781

MPH-02

December - Examination 2018

MSC (Previous) Physics Examination

Mathematical Physics and Numerical Analysis

गणितीय भौतिकी एवं सांख्यिकी विश्लेषण

Paper - MPH-02

Time : 3 Hours] **[Max. Marks :- 80**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. In case of any discrepancy, the English version will be final for all purposes. Check your paper code and paper title before starting the paper. You are allowed to use a non-programmable calculator, however, sharing of calculators is not allowed.

निर्देश : यह प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ' 'ब' और 'स'में विभाजित है प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। किसी भी विसंगति की स्थिति में अंग्रेजी रूप ही अंतिम माना जायेगा। प्रश्न पत्र शुरू करने से पूर्व प्रश्न पत्र कोड व प्रश्न पत्र शीर्षक जाँच ले आपको बिना प्रोग्रामिंग वाले केलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है परन्तु केलकुलेटर के हस्तांतरण की अनुमति नहीं है।

Section - A **8 × 2 = 16**

(Very Short Answer Questions)

Note: Answer **all** questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to 30 words. Each question carries 2 marks.

खण्ड – 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

1) (i) Find the residue of the following at the pole $z = 0$

$$\frac{\cos z}{z}$$

ध्रुव $z = 0$ पर निम्न फलन का रेजिडूय ज्ञात कीजिए– $\frac{\cos z}{z}$

(ii) Find the Laplace transform of $f(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

निम्न फलन का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो। $f(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

(iii) Determine the sum of eigen values of the given matrix.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

दी गई मेट्रिक्स के आइगेंन मानों का योग ज्ञात करो।

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(iv) Find $curl\left(2\vec{r}\right)$ where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$curl\left(2\vec{r}\right)$ ज्ञात करो जहाँ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

(v) If $z = x + iy$ is complex number, then find the imaginary part of $(z^2 + z)$

यदि $z = x + iy$ सम्मिश्र संख्या है तो $(z^2 + z)$ का काल्पनिक भाग ज्ञात करो।

(vi) What is value of $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\delta(x-b)\,dx$ where $\delta(x-b)$ is Dirac delta function?

$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\delta(x-b)\,dx$ का मान क्या होगा? जहाँ $\delta(x-b)$ डिराक डेल्टा फलन है?

(vii) If function $f(x) = H_1(x) + H_0(x)$ Here H denotes Hermite Polynomial, then plot the graph between $f(x)$ versus x.

यदि फलन $f(x) = H_1(x) + H_0(x)$ है यहाँ H हरमाइट बहुपद है तो $f(x)$ का x के साथ ग्राफ चित्रित कीजिए।

(viii) What are poles of function $f(z)$ where $f(z) = \dfrac{3}{z(z^2 + a^2)^2}$

फलन $f(z)$ के ध्रुव क्या होंगे? $f(z) = \dfrac{3}{z(z^2 + a^2)^2}$

Section - B **4 × 8 = 32**

(Short Answer Questions)

Note: Answer **any four** questions. Each answer should not exceed 200 words. Each question carries 8 marks.

खण्ड – ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 200 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 8 अंकों का है।

2) Find $\int div\, \vec{F}\, dV$ using divergence theorem for the vector $\vec{F} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ taken over cube $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$,

यदि सदिश $\vec{F} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ है तो

घन $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1,$ के लिए अपसरण प्रमेय का उपयोग करते हुए $\int div\, \vec{F}\, dV$ का मान ज्ञात करो।

3) Determine $f(x)$ in a Fourier Sine Series. $f(x) = \begin{cases} 1; & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0; & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

फुरिएर ज्या श्रेणी में $f(x)$ को व्यक्त कीजिए– $f(x) = \begin{cases} 1; & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0; & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$

4) Find the eigen values and eigne vectors of matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

मेट्रिक्स के आइगेंन मान तथा आइगेंन फलन ज्ञात कीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5) Using Cauchy Riemann equations check the analyticity of the function $f(z) = z^3$ where $z = x + iy$

कोचि रिमान समीकरणों का उपयोग करते हुए निम्न फलन की एनेलिसिटी जाँच करो $f(z) = z^3$ जहाँ $z = x + iy$

6) Evaluate the following integral $\oint_C \left(\frac{4 - 3z}{z^2 - z} \right) dz$ counterclockwise

around any simple closed path such that

(i) 0 and 1 are inside C

(ii) 0 is inside and 1 outside C

एक साधारण बंद पथ इस तरह से लेते हुए वामावर्त में निम्न समाकल

$\oint_C \left(\frac{4 - 3z}{z^2 - z} \right) dz$ का मान ज्ञात कीजिए कि –

(i) 0 तथा 1 वृत्त C के भीतर है।

(ii) 0 वृत्त C के भीतर है तथा 1 वृत्त C के बाहर है।

7) Check that following matrix is Hermitian or not?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & (1-i) & 2 \\ (1+i) & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

यह जाँच करो कि निम्न मेट्रिक्स हर्मिशियन है अथवा नहीं

$$A = \begin{bmatrix} 1 & (1-i) & 2 \\ (1+i) & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

8) The velocity V (km/min) with respect to time t is shown in the table. Estimate the distance $\int_0^{20} V dt$ covered in 20 minutes using Simpson's 3/8 rule.

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
V	0	10	18	25	29	32	20	11	5	2	0

समय t के साथ वेग V (km/min) को टेबल में बताया गया है सिम्पसन के 3/8 के नियम से 20 मिनट में तय की गई दूरी $\int_0^{20} V dt$ ज्ञात कीजिए।

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
V	0	10	18	25	29	32	20	11	5	2	0

9) Solve the following partial differential equation where symbols have usual meanings $yzp + zxq = xy$

निम्न आंशिक अवकल समीकरण को हल करो जहाँ प्रतीकों के सामान्य अर्थ है $yzp + zxq = xy$

Section - C $2 \times 16 = 32$

(Long Answer Questions)

Note: Answer **any two** questions. You have to delimit your each answer maximum up to 500 words. Each question carries 16 marks.

खण्ड – स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 500 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 16 अंकों का है।

10) (i) Find the value of $\oint_C \left(\frac{z+4}{z^2+2z+5}\right) dz$ if C is the circle $|(z+1)|=1$

यदि C एक वृत्त $|(z+1)|=1$ है तो समाकल $\oint_C \left(\frac{z+4}{z^2+2z+5}\right) dz$ का मान ज्ञात कीजिए–

(ii) Find the Fourier Cosine transform of

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{for} \quad 0<x<\frac{1}{2} \\ 1-x & \text{for} \quad \frac{1}{2}<x<1 \\ 0 & \text{for} \quad x>1 \end{cases}$$

फोरिएर कोज्या रूपान्तर ज्ञात कीजिए यदि

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{for} \quad 0<x<\frac{1}{2} \\ 1-x & \text{for} \quad \frac{1}{2}<x<1 \\ 0 & \text{for} \quad x>1 \end{cases}$$

11) Find the Fourier series corresponding to the function $f(x)$ defined in $(-2, 2)$ as follows $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{for } -2 \le x \le 0 \\ x & \text{for } 0 < x < 2 \end{cases}$

$f(x)$ फलन जो कि $(-2, 2)$ में परिभाषित है से सम्बन्धित फोरिअर श्रेणी ज्ञात कीजिए $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{for } -2 \le x \le 0 \\ x & \text{for } 0 < x < 2 \end{cases}$

12) (i) Using Rodrigues formula for Legendre polynomial $P_n(x)$ Determine the final expression of following function $f(x) = 2P_3(x) + 3P_1(x)$.

लिजेंद्रे बहुपद $P_n(x)$ के लिए रोद्रिगुएस सूत्र का उपयोग करते हुए निम्न फलन के लिए अंतिम व्यंजक ज्ञात कीजिए – $f(x) = 2P_3(x) + 3P_1(x)$

(ii) Find the Laplace transform of the function $f(t) = \dfrac{e^{at} - 1}{a}$ Here a is constant.

निम्न फलन का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात कीजिए $f(t) = \dfrac{e^{at} - 1}{a}$ यहाँ a अचर है।

13) (i) Given $e^0 = 1, e^1 = 2.72, e^2 = 7.39, e^3 = 20.09, e^4 = 54.60$

Evaluate $\int_0^4 e^x dx$ by Simpson's 1/3 rule,

दिया है $e^0 = 1, e^1 = 2.72, e^2 = 7.39, e^3 = 20.09, e^4 = 54.60$

सिम्पसन के 1/3 नियम से $\int_0^4 e^x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) Find the Fourier transform of the slit function $f(x)$ defined as $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon} & ; |x| \leq \varepsilon \\ 0 & ; |x| > \varepsilon\end{cases}$ Also determine the limit of this transform as limit $\varepsilon \to 0$

स्लिट फलन का $f(x)$ फुरिअर रूपांतर ज्ञात कीजिए –

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\varepsilon} & ; |x| \leq \varepsilon \\ 0 & ; |x| > \varepsilon\end{cases}$ इस रूपांतर की सीमा limit $\varepsilon \to 0$ के लिए ज्ञात कीजिए।