

MT-08

December - Examination 2017

B.A./B.Sc. Pt. III Examination**Complex Analysis****Paper - MT-08****Time : 3 Hours]****[Max. Marks :- 67**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answers as per the given instructions.

निर्देश : प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ', 'ब' और 'स' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Section - A**7 × 1 = 7**

(Very Short Answer Type Questions)

Note: Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 mark and maximum word limit may be thirty words.

खण्ड - 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'ए' में सात (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न के लिए 01 अंक है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द है।

- 1) (i) Represent complex number $2 + 2\sqrt{3}i$ in polar form.
सम्मिश्र संख्या $2 + 2\sqrt{3}i$ को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिए।

- (ii) Define Analytic function.
विश्लेषिक फलन को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define conformal mapping.
अनुकोण प्रतिचित्रण को परिभाषित करें।
- (iv) Write Cauchy's integral formula.
कोशी समाकलन सूत्र को लिखिए।
- (v) Find radius of convergence of power series $\sum (\log n)^n z^n$.
घात श्रेणी $\sum (\log n)^n z^n$ की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात करें।
- (vi) Write statement of Rouche's theorem.
रूशे प्रमेय का कथन लिखिए।
- (vii) Define removable singularity.
अपनेय विचित्रता को परिभाषित कीजिए।

Section - B

4 × 8 = 32

(Short Answer Type Questions)

Note: Examinees will have to answer any four (4) question. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

(खण्ड - ब)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'बी' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देने हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

- 2) Find bilinear transformation that maps the points $z = 0, i, \infty$ into $w = \infty, i, 0$ respectively.

वह द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए। जो बिन्दुओं $z = 0, i, \infty$ को $w = \infty, i, 0$ में प्रतिचित्रित करे।

- 3) State and prove fundamental theorem of integral calculus.

समाकलन की मूल प्रमेय का कथन कर सिद्ध करें।

- 4) Prove that the function

$$u = e^x (x \cos y - y \sin y)$$

satisfies Laplace's equation and find the corresponding analytic function $f(z) = u + iv$.

सिद्ध करिए कि फलन $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$ लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करता है। तथा इसके संगत विश्लेषिक फलन $f(z) = u + iv$ ज्ञात कीजिए।

- 5) Show that

प्रदर्शित कीजिए कि

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin^6 z}{\left(z - \frac{\pi}{6}\right)^3} dz = \frac{21}{16} \pi i$$

- 6) Discuss the nature of singularities of the function.

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$$

फलन $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$ की विचित्रताओं की प्रकृति की

विवेचना कीजिए।

- 7) State and prove Cauchy's residue theorem.

कोशी अवशेष प्रमेय का कथन कर सिद्ध करें।

8) Describe various types of singularities.

विभिन्न वियुक्त विचित्रताओं के प्रकारों कि विवेचना कीजिए।

9) Show that the power series

$$z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \dots$$

may be analytically continued to a wider region by means of the series

$$\log 2 - \frac{1-z}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1-z}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1-z}{2} \right)^3 - \dots$$

सिद्ध करो कि घात श्रेणी $z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 - \dots$ का विश्लेषिक सातत्य घात श्रेणी

$$\log 2 - \frac{1-z}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1-z}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1-z}{2} \right)^3 - \dots$$

द्वारा वृहत् क्षेत्र में किया जा सकता है।

Section - C

2 × 14 = 28

(Long Answer Type Questions)

Note: Examinees will have to answer any two (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to answer in maximum 500 words. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

(खण्ड - स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'सी' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्ही भी दो (02) सवालों के जवाब देने हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं। इस प्रश्नपत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

10) (i) State and prove Cauchy's inequality.
कोशी असमिका का कथन कर सिद्ध करें।

(ii) Evaluate:

मान ज्ञात कीजिए:

$$\int_{-2+i}^{5+3i} z^3 dz$$

11) State and prove sufficient condition for $f(z) = u + \varphi$ to be analytic.
फलन $f(z) = u + \varphi$ विश्लेषिक फलन होने का पर्याप्त प्रतिबंध लिखिए व सिद्ध कीजिए।

12) Obtain expansion for function $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$, which are valid for the regions:

a) $|z| < 1$

b) $1 < |z| < 3$ and

c) $|z| > 3$.

निम्न क्षेत्र में फलन $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ का प्रसार ज्ञात कीजिए।

a) $|z| < 1$

b) $1 < |z| < 3$ and

c) $|z| > 3$.

13) Prove that

सिद्ध कीजिए कि

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a \cos \theta}{a + \cos \theta} d\theta = 2\pi a \left\{ 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} \right\}, \quad (a > 1).$$