

MT-07

December - Examination 2017

B.A. / B.Sc. Pt. III Examination**Algebra****Paper - MT-07****Time : 3 Hours]****[Max. Marks :- 67**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश : यह प्रश्न पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। इस प्रश्नपत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section - A**7 × 1 = 7**

(Very Short Answer Questions)

Note: Section 'A' contain seven (7) Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 mark and maximum word limit may be thirty words.

खण्ड - 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'अ' में सात (7) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न के 01 अंक हैं और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द हैं।

- 1) (i) **Define centre of Group.**
किसी समूह के केन्द्र को परिभाषित कीजिए।
- (ii) **Define order of a cycle.**
किसी चक्र की कोटि को परिभाषित कीजिए।
- (iii) **State Lagrange's theorem for order of a group.**
किसी समूह की कोटि के लिए लेग्रेंज प्रमेय का कथन कीजिए।
- (iv) **Define quotient group.**
विभाग समूह को परिभाषित कीजिए।
- (v) **Define characteristic of an integral domain.**
पूर्णांकीय प्रांत के अभिलक्षण को परिभाषित कीजिए।
- (vi) **Define Kernal of Ring Homomorphism.**
वलय समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिए।
- (vii) **Define dimension of a vector space.**
सदिश समष्टि की विमा को परिभाषित कीजिए।

Section - B**4 × 8 = 32**

(Very Short Answer Questions)

Note: Section 'B' contain Eight Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any four (4) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

खण्ड - 'ब'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'ब' में आठ लघुउत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

2) Prove that union of any two subgroups of a group is a subgroup if and only if one subgroup is included in other subgroup.

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होता है यदि व केवल यदि एक उपसमूह दूसरे उपसमूह में अन्तर्विष्ट हैं।

3) Prove that order of an element in a group and order of it's inverse are equal.

सिद्ध कीजिए कि समूह के किसी अवयव की कोटि व उसके प्रतिलोम की कोटि समान होती हैं।

4) If H is any subgroup of G and $K = \{X \in G / XH = HX\}$ then prove that K is a subgroup of G.

यदि H, समूह G का एक उपसमूह है तथा $K = \{X \in G / XH = HX\}$ तो सिद्ध कीजिए कि K, G का उपसमूह है।

5) Prove that any subgroup of index 2 (two) in a group is a normal subgroup of that group.

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह में सूचक 2 का कोई उपसमूह उस समूह का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

6) State and prove fundamental theorem on homomorphism.

समाकारिता के मूलभूत प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

- 7) Prove that field of rational numbers $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ is a prime field.
सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का क्षेत्र $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ एक अभाज्य क्षेत्र होता है।
- 8) Prove that any two vector in a vector space are linearly dependent if and only if one vector of them is equal to scalar multiplication of other.
सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि में दो अशून्य सदिश एक घाततः परतन्त्र होने यदि व केवल यदि इनमें से एक सदिश दूसरे सदिश के अदिश गुणन के बराबर है।
- 9) If U and W are any two vector subspaces of a vector space $V(F)$ then prove that $U + W = \{u+w/u \in U, w \in W\}$, is smallest vector sub space of $V(F)$ which include $U \cup W$.
यदि U व W किसी सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि $U + W = \{u+w/u \in U, w \in W\}$, $V(F)$ की $U \cup W$ को अन्तर्विष्ट करने वाली सबसे छोटी उपसमष्टि है।

Section - C

$2 \times 14 = 28$

(Long Answer Questions)

Note: Section 'C' contain 4 Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer any two (2) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words.

खण्ड - 'स'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'स' में चार निबन्धात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी दो (02) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

10) Prove that quotient field of an integral domain is smallest field which include that integral domain.

सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकीय प्रांत का विभाग क्षेत्र, पूर्णांकीय प्रांत को समाहित करने वाला सबसे छोटा क्षेत्र है।

11) Prove that operations \oplus and \odot defined on set of ordered pairs of real numbers R

$S = \{(a, b)/a, b \in R\}$ as follow

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\text{and } (a, b) \odot (c, d) = (ac, bd)$$

$$\forall (a, b), (c, d) \in S$$

then (S, \oplus, \odot) is a communicative ring with unity and with zero divisors.

सिद्ध कीजिए कि यदि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R के अवयवों के क्रमित युग्मों के समुच्चय $S = \{(a, b)/a, b \in R\}$ वर योग \oplus व गुणन \odot संक्रियाएँ निम्न प्रकार परिभाषित हैं :-

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$\text{and } (a, b) \odot (c, d) = (ac, bd)$$

$$\forall (a, b), (c, d) \in S$$

तब (S, \oplus, \odot) इकाई अवयव सहित क्रम विनिमय शून्य भाजक वलय है।

12) If F is any field and $V = \{(a_1, a_2, a_3) / a_1, a_2, a_3 \in F\}$ is any set and operations vector addition and scalar multiplication defined as $(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ and $\alpha (a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$

$$\forall (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in V \text{ and } \alpha \in F$$

then prove that set V along with vector addition and scalar multiplication is a vector space over field F .

यदि F कोई क्षेत्र है तथा $V = \{(a_1, a_2, a_3) / a_1, a_2, a_3 \in F\}$ एक समुच्चय है तो सिद्ध कीजिए कि V सदिश योग व अदिश गुणन जो निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \text{ तथा}$$

$$\alpha (a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$$

$$\forall (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in V \text{ तथा } \alpha \in F$$

के सापेक्ष सदिश समष्टि है।

13) (i) Prove that intersection of any two ideals of a ring is a ideal of ring.

सिद्ध कीजिए कि किसी वलय की किन्हीं दो गुणजावलियों का उभयनिष्ठ भी वलय की गुणजावली होती है।

(ii) Find permutation group for group $G = (\{1, -1, i, -i\}, X)$ which is isomorphic to group G .

समूह $G = (\{1, -1, i, -i\}, X)$ का क्रमचय समूह ज्ञात कीजिए जो समूह G के साथ तुल्यकारी है।