MT-04

December - Examination 2017

B.A. / B.Sc. Pt. II Examination

Real Analysis & Metric Space

Paper - MT-04

Time : 3 Hours] **[Max. Marks :- 67**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश : यह प्रश्न पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। इस प्रश्नपत्र में नॉन–प्रोग्रामेबल साइंटीफिक केल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section - A $7 \times 1 = 7$

(Very Short Answer Questions)

Note: Section 'A' contain seven (7) Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 mark and maximum word limit may be thirty words.

खण्ड – 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'अ' में सात (7) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न के 01 अंक है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द है।

1) (i) Which type of discontinuity is present in the function and

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x = 0 \\ \sin\frac{1}{x}; & x \neq 0 \end{cases}$$ and why?

फलन $f(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x = 0 \\ \sin\frac{1}{x}; & x \neq 0 \end{cases}$ में $x = 0$ पर किस प्रकार का असातत्य है? व क्यों?

(ii) What is the infinmum of the set $S = \left\{x{:}x = \frac{1}{2n} : n\epsilon I, n \neq 0\right\}$

समुच्चय $S = \left\{x{:}x = \frac{1}{2n} : n\epsilon I, n \neq 0\right\}$ का निम्नक बताइये।

(iii) Define denseness property of real numbers.
वास्तविक संख्याओं के सघनता गुणधर्म को परिभाषित कीजिये।

(iv) Define the Pseudo-Metric.
छद्म–दूरीक को परिभाषित कीजिये।

(v) Define the distance between two sets A and B.
दो समुच्चयों A व B के बीच की दूरी को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define Rieman integrability.
रीमान समकालनीयता को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define uniform convergence of sequence of functions.
फलनों का अनुक्रम का एकसमान अभिसरण को परिभाषित कीजिये।

Section - B $\quad 4 \times 8 = 32$

(Very Short Answer Questions)

Note: Section 'B' contain Eight Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any four (4) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

खण्ड – 'ब'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'ब' में आठ लघुउत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं चार (4) सवालों के जवाब देने हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

2) Prove that set of Rational numbers Q is not complete ordered field.
परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं है।

3) Prove that any subset of real numbers R is open if and only if (R ~ F) is closed.
सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R का कोई उपसमुच्चय है यदि और केवल यदि (R ~ F) संवृत समुच्चय है।

4) Prove that every continuous function in closed interval is bounded in closed interval.
सिद्ध कीजिये कि संवृत अन्तराल पर संतत् फलन, संवृत्त अन्तराल में परिबद्ध भी होता है।

5) Prove that the function f is differentiable at $x = 0$, where
सिद्ध कीजिये कि निम्न फलन $x = 0$ पर अवकलनीय है, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & ; \text{ जब } x \text{ परिमेय संख्या नहीं है। } (x \text{ is irrational}) \\ x & ; \text{ जब } x \text{ परिमेय संख्या है। } (x \text{ is rational}) \end{cases}$$

6) If a function $d : R \times R \to R$ is defined as

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y, \forall x, y \epsilon R, \end{cases}$$

Then prove that (R, d) is a metric space.

माना कि एक फलन $d : R \times R \to R$ निम्न प्रकार से परिभाषित है:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y, \forall x, y \epsilon R, \end{cases}$$

तो सिद्ध कीजिये कि (R, d) एक दूरीक समष्टि है।

7) Prove that if a Cauchy sequence in a metric space has a convergent sub-sequence then Cauchy sequence is convergent.
सिद्ध कीजिये कि यदि किसी दूरीक समष्टि में एक कोशी अनुक्रम का एक अभिसारी उपानुक्रम हो, तो कोशी अनुक्रम अभिसारी होती है।

8) Show that every bounded function is not necessarily Riemann integrable.
प्रदर्शित कीजिये कि प्रत्येक परिबद्ध फलन आवश्यक नहीं कि रीमान समाकलनीय हो।

9) Prove that is sequence $\{x_n\}$ is convergent then its limit is unique.
सिद्ध कीजिये कि यदि $\{x_n\}$ एक अभिसारी अनुक्रम हो, तो सीमा अद्वितीय होती है।

Section - C **2 × 14 = 28**

(Long Answer Questions)

Note: Section 'C' contain 4 Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer any two (2) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words.

खण्ड – 'स'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'स' में चार निबन्धात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं दो (2) सवालों के जवाब देने हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

10) (i) Show that every infinite subset of a compact metric space has at least one limit point.

प्रदर्शित कीजिये कि संहत दूरीक समष्टि का प्रत्येक अनन्त उपसमुच्चय कम से कम एक सीमा बिन्दु रखता है।

(ii) Prove that a metric space is connected if and only if any non-void subset of X which is both open and close is X itself.

सिद्ध कीजिये कि एक दूरीक समष्टि X सम्बद्ध है यदि और केवल यदि का अरिक्त उपसमुच्चय जो संवृत एवं विवृत दोनों हो केवल X ही है

11) (i) Prove that sequence $\{x_n\}$ is convergent and its limit is between 2 and 3, where $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \forall n \in N.$

सिद्ध कीजिये कि अनुक्रम $\{x_n\}$ एक अभिसारी है तथा इसकी सीमा 2 एवं 3 के मध्य है। जहाँ $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \forall n \in N$ है।

(ii) Prove that if $f \in R[a,b]$ then $|f|$ is also Riemann integrable on $[a, b]$.

सिद्ध कीजिये कि यदि $f \in R[a,b]$ तब मापांक फलन $|f|$ भी $[a, b]$ पर रीमान समाकलनीय है।

12) (i) Prove that if limit of function of two variables $f(x, y)$ exists then it is unique.
सिद्ध कीजिए कि यदि फलन $f(x, y)$ की युगपत सीमा का अस्तित्व है तो युगपत् सीमा अद्वितीय होती है।

(ii) Show that series

$$\frac{x}{(1+x)} + \frac{x}{(1+x)(1+2x)} + \frac{x}{(1+2x)(1+3x)} + \cdots\cdots\cdots$$

is uniformly convergent in interval $[a, \infty[$ where $a > 0$.
प्रदर्शित कीजिये कि श्रेणी

$$\frac{x}{(1+x)} + \frac{x}{(1+x)(1+2x)} + \frac{x}{(1+2x)(1+3x)} + \cdots\cdots\cdots$$

अन्तराल $[a, \infty[$ में एक समान अभिसारी है, जहाँ $a > 0$।

13) (i) Check uniform convergence and continuity of sum of series sum of whose n terms is $f(x) = nx(1-x)^n, 0 \le x \le 1$.
उस श्रेणी के एक समान अभिसरण एवं श्रेणी के योगफलन के सातत्य का परीक्षण कीजिये, जिसके n पदों का योगफल $f(x) = nx(1-x)^n, 0 \le x \le 1$ है।

(ii) If $f(x) = x^2 \, \forall x \in [0,1]$ and $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 1\right\}$ is any partition then calculate $L(P, f)$ and $U(P, f)$.
यदि $f(x) = x^2 \, \forall x \in [0,1]$ तथा यदि $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 1\right\}$ का कोई विभाजन है, तब $L(P, f)$ एवं $U(P, f)$ की गणना कीजिये।
