# MSCPH-01

December - Examination 2017

## MSc (Previous) Physics Examination

## Mathematical Physics and Classical Mechanics

## गणितीय भौतिकी तथा चिरसम्मत यांत्रिकी

## Paper - MSCPH-01

**Time : 3 Hours ]** **[ Max. Marks :- 80**

**Note:** The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. Check your paper code and paper title before starting the paper. In case of any discrepancy English version will be final for all purposes. You are allowed to use a non-programmable calculator, however sharing of calculator is not allowed.

**निर्देश :** यह प्रश्न पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्नपत्र शुरू करने से पूर्व प्रश्नपत्र कोड व प्रश्नपत्र शीर्षक जाँच लें। किसी भी विसंगतता की स्थिति में अंग्रेजी रूप ही अंतिम माना जायेगा। आपको बिना प्रोग्रामिंग वाले केलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है परन्तु केलकुलेटर के हस्तान्तरण की अनुमति नहीं है।

**Section - A** **8 × 2 = 16**

(Very Short Answer Questions)

**Note:** Answer **all** questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to 30 words. Each question carries 2 marks.

## खण्ड – 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :** सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

1) (i) What is the value of the integral $\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 \, dx$. Here Legendre function $P_n(x)$?

समाकल $\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 \, dx$ का क्या मान है? $P_n(x)$ लिजेंड्री फंक्शन प्रदर्शित करता है।

(ii) Relation $\frac{d}{dx}(J_0(x)) = -J_1(x)$. Is this relation correct?

$\frac{d}{dx}(J_0(x)) = -J_1(x)$ क्या यह सम्बन्ध सत्य है?

(iii) Write the Laplace's equation in spherical polar coordinates.
लाप्लास समीकरण को गोलीय ध्रुवीय निर्देशांक में लिखें।

(iv) Write the Fourier transform of $\delta$ (t – a).
फलन $\delta$ (t – a) का फूरिये रूपान्तरण लिखें।

(v) State Hamilton's variational principle.
हेमिल्टन का वेरिएशनल सिद्धान्त लिखें।

(vi) Write the names of the conservation law that follows from the homogeneity of time.
'समय' की समांगता के सिद्धान्त पर आधारित 'संरक्षण नियम' का नाम लिखें।

(vii) Write the value of Poisson bracket $[x, p_x]$

पोइसन ब्रैकिट $[x, p_x]$ का नाम लिखें।

(viii)The Lagrangian of a system is given by $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\,\dot{q} - \frac{1}{2}q^2$

It describes the motion of (choose the correct option)

(A) A harmonic oscillator

(B) damped oscillator

(C) anharmonic oscillator

(D) a system with unbounded motion

किसी निकाय का लेगरेंजियन $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\,\dot{q} - \frac{1}{2}q^2$ है। तो यह लेगरेंजियन जिस निकाय का है वह निकाय निम्न में से कौन सा है? (सही उत्तर अंकित करें)

(A) एक सरल आवर्त दोलित्र

(B) अवमंदित दोलित्र

(C) एनहार्मोनिक दोलित्र

(D) एक निर्बाध गतिमान निकाय

**Section - B** **4 × 8 = 32**

(Short Answer Questions)

**Note:** Answer **any four** questions. Each answer should not exceed 200 words. Each question carries 08 marks.

**(खण्ड – ब)**

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :** किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 200 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का है।

2) (i) Find the Laplace transform $F(s)$ of the following function

$f(t) = \cos k t$

(ii) Find the inverse Laplace transform $f(t)$, if $F(s) = \dfrac{1}{(s^2 - 5s + 6)}$

(i) निम्न का लाप्लस ट्राँसफार्म (रूपान्तर) $F(s)$ प्राप्त करें।

$f(t) = \cos k t$

(ii) व्युत्क्रम लाप्लास ट्रान्सफार्म $f(t)$ प्राप्त करें। यदि $F(s) = \dfrac{1}{(s^2 - 5s + 6)}$.

3) Write the Rodrigue's formula for Legendre polynomials and deduce the values of $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$.

लेजेंन्ड्री पौलीनोमियलस के लिये रोड्रिग के सूत्र लिखें एवं इसकी सहायता से $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ के मान की गणना करें।

4) Using Laplace transform or otherwise show that $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

लाप्लास ट्राँसफार्म की सहायता से या अन्य किसी तरह से सिद्ध करें कि

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

5) Define covariant and contravariant tensor of second order. Also show that any covariant (or contravariant) tensor of second order may be expressed as the sum of symmetric tensor and a skew-symmetric (anti-symmetric) tensor.

द्वितीय कोटि के कोवेरिएन्ट तथा कॉन्ट्रावेरिऐंट टेंसर को परिभाषित करें। यह भी प्रदर्शित करें कि द्वितीय कोटि का कोवेरिऐंट या कोन्ट्रावेरिऐंट टेंसर सममित एवं प्रतिसमामित टेंसरों के योग के बराबर होता है।

6) Using Legendre's transformation from one set of independent variables $(q, \dot{q})$ to another set of variables $(q, p)$ obtain Hamilton's canonical equations.
लेजेंड्री ट्रान्सफार्मेशन की सहायता से $(q, \dot{q})$ से $(q, p)$ वेरिएबिल्स में हेमिल्टन केनोनिकल समीकरण प्राप्त करें।

7) State Hamilton's principle of least action. Use it to obtain the Lagrange's equation.
हैमिल्टन के न्यूनतम एक्शन सिद्धान्त लिखें तथा इसकी सहायता से लेगरेंजी समीकरण प्राप्त करें।

8) Prove that the Poisson bracket, $[f, g]$ for two quantities $f$ and $g$, remains invariant under canonical transformation of the variables $(p, q)$ to new variables $(P, Q)$.
दो राशियों $f$ तथा $g$ के लिए सिद्ध करें कि पाँइशन ब्रेकेट $[f, g]$ का मान केनोनिकल ट्राँसफोर्मेशन $(p, q)$ से $(P, Q)$ के अन्तर्गत निश्चर रहता है।

9) Find the Lagrangian of a particle of mass $m$ moving on the surface of a sphere of radius $l$ in a gravitational field (acceleration $g$). Show that the $z$ - component of angular momentum, is conserved.
एक कण जिसकी संहति $m$ है, $l$ त्रिज्या के गोले की सतह पर गुरुत्वीय क्षेत्र में गतिमान है। गुरुत्वजनित त्वरण $g$ है। सिद्ध करो कि कोणीय संवेग का $z$ - घटक सदैव संरक्षित होगा।

## Section - C $\quad 2 \times 16 = 32$

(Long Answer Questions)

**Note:** Answer **any two** questions. You have to delimit your each answer maximum up to 500 words. Each question carries 16 marks.

456

## (खण्ड – स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :** किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 500 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 16 अंकों का है।

10) (i) Find the complete integral of the Hamilton-Jacobi equation by separating the variables for the Hamiltonian in spherical coordinates

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \phi),$$

and $U(r, \theta, \phi) = a(r) + [b(\theta)/r^2]$

(ii) Solve harmonic oscillator problem using Hamilton-Jacobi method.

(i) हेमिल्टन–जेकोबी समीकरण का पूर्ण समाकल को चरों को पृथक करके प्राप्त करें। हेमिल्टोनिअन निम्न है :

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r, \theta, \phi),$$

तथा $U(r, \theta, \phi) = a(r) + [b(\theta)/r^2]$

(ii) हेमिल्टन – जेकोबी समीकरण की सहायता से सरल आवर्त दोलित्र की प्रॉब्लम को हल करें।

11) Consider the Gaussian probability function

$f(x) = N\, e^{-ax^2}$, Here ($N$, $\alpha$ = constant).

Find its Fourier transform $F(k)$. Plot $f(x)$ and $F(k)$ for

(i) large $\alpha$

(ii) small $\alpha$.

गाँउशियन प्रायिकता फलन $f(x) = N\, e^{-ax^2}$ है, ($N$, $\alpha$ स्थिर राशि हैं)। इस फलन का फूरिए रूपान्तरण $F(k)$ ज्ञात करें। $f(x)$ तथा $F(k)$ को ग्राफित करें यदि

(i) $\alpha$ दीर्घ है

(ii) $\alpha$ का मान लघु है

12) Evaluate $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ by dividing the interval [0, 1] into 6 equal parts and using

(a) the trapezoidal rule,

(b) Simpson's $\frac{1}{3}$ rule, and Simpson's $\frac{3}{8}$ rule.

$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ का मान, इन्टरवल [0, 1] को 6 समान हिस्सों में विभाजित करते हुए,

(i) ट्रेपेजोइडल नियम

(ii) सिम्पसन का $\frac{1}{3}$ रूल तथा सिम्पसन का $\frac{3}{8}$ नियम के द्वारा, ज्ञात करें।

13) (i) The Lagrangian for a simple pendulum is given by

$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l (1 - \cos\theta)$. Obtain Hamilton's equations.

(ii) Show that the total time derivative of the Hamitonian satisfies the following relationship : $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

(i) एक सरल लोलक का लेगरेंजियन फंक्शन

$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l (1 - \cos\theta)$ है। हेमिल्टन समीकरण प्राप्त करें।

(ii) यह सिद्ध करें कि हेमिल्टोनियन का पूर्ण समय अवकलक निम्न सम्बन्ध संतुष्ट करता है : $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$