

MT-02

December - Examination 2016

B.A./B.Sc. Pt. I Examination**Calculus and Differential Equations****Paper - MT-02****Time : 3 Hours]****[Max. Marks :- 67**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answer as per the given instructions.

निर्देश : यह प्रश्न पत्र 'अ' 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Section - A**7 × 1 = 7**

Very Short Answer Questions

Note: Section 'A' contain seven (07) Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit may be thirty words.

खण्ड - 'अ'

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

निर्देश : खण्ड 'ए' में सात (07) लघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न को 01 अंक है और अधिकतम शब्द तीस शब्द हैं।

- 1) (i) Write the formula of Cauchy's n^{th} root test.
कोशी n वाँ मूल परीक्षण सूत्र लिखिए।
- (ii) State Maclourine's theorem.
मेकलारिन्स प्रमेय का कथन लिखिए।
- (iii) Write the formula of radius of curvature for parametric equation of curves.
वक्र की प्राचलिक समीकरण के लिए वक्रता त्रिज्या का सूत्र लिखिए।
- (iv) State the Euler's theorem for homogeneous functions.
समघात फलनों के लिए आयलर प्रमेय का कथन लिखिए।
- (v) How many number of maximum asymptotes of the following curve.
दिए गए वक्र की अधिकतम कितनी अनन्त स्पर्शियाँ होंगी।
$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$$
- (vi) Define Gamma function.
गामा फलन को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Write the formula of length of curve for polar curves.
ध्रुवी वक्रों के लिए वक्र की लम्बाई का सूत्र लिखिए।

Section - B

$4 \times 8 = 32$

Short Answer Questions

Note: Section 'B' contain Eight Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any four (04) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

(खण्ड - ब)

लघुत्तरात्मक प्रश्न

निर्देश : खण्ड 'ब' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देना है। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

2) If $u = F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$ then by chain rule find the value of

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$$

यदि $u = F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$ हो तो श्रृंखला नियम से $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3) Prove that $B(m, n) = \frac{\sqrt{(1m)}\sqrt{(n)}}{\sqrt{1(m+n)}}$

सिद्ध कीजिए कि $B(m, n) = \frac{\sqrt{(1m)}\sqrt{(n)}}{\sqrt{1(m+n)}}$

4) Find the perimeter of the cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$. Also prove that the arc of the upper half of the cardioid is bisected by $\theta = \frac{\pi}{3}$.

वक्र $r = a(1 + \cos \theta)$ का परिमाण ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए इसका ऊपरी अर्द्ध भाग रेखा $\theta = \frac{\pi}{3}$ से समद्विभाजित होता है।

5) Trace the following curve.

निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए:

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

- 6) Find the envelope of the family of the following straight lines where t being a parameter.

निम्न सरल रेखा के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए जहाँ t प्राचल है:

$$x \cos t + y \sin t = \alpha + \alpha \cos t \log \tan \left(\frac{1}{2} t \right)$$

- 7) Find the height and volume of the cylinder of maximum volume that can be inscribed in a sphere of radius ' a '.

त्रिज्या ' a ' के गोले में से अधिकतम आयतन का एक बेलन काटा गया है। बेलन की ऊँचाई तथा उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

- 8) For the curve $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{r}{k} \right) - \sqrt{\frac{k^2 - r^2}{r^2}}$

Show that $r \frac{ds}{dr}$ is a constant.

दिए गए वक्र $\theta = \cos^{-1} \left(\frac{r}{k} \right) - \sqrt{\frac{k^2 - r^2}{r^2}}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $r \frac{ds}{dr}$ एक अचर है।

- 9) Show that asymptotes of the following cubic, cut the curve again in three points which lie on the straight line $x - y + 1 = 0$:

$$x^3 - 2y^2 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$$

सिद्ध करो कि निम्न त्रिपद वक्र के अनन्त स्पर्शी वक्र को तीन बार काटते हैं तथा रेखा $x - y + 1 = 0$ पर स्थित है : $x^3 - 2y^2 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$

Section - C

2 × 14 = 28

Long Answer Questions

Note: Section 'C' contain 4 Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer any two (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

(खण्ड - स)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

निर्देश : खण्ड 'सी' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को कीन्हीं भी दो (02) सवालों के जवाब देना है। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है, परीक्षार्थियों को कीन्हीं भी दो (02) सवालों के जवाब देना है। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है, परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं। इस प्रश्नपत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

10) (i) Test the convergence of series

$$1 + \frac{a.b}{1.c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)1.2}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1.2.3c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots$$

where all a, b, c are positive

निम्न श्रेणी के अमिसरण की परीक्षा कीजिए

$$1 + \frac{a.b}{1.c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)1.2}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1.2.3c(c+1)(c+2)}x^3 + \dots$$

जहाँ a, b, c सभी घनात्मक हैं।

(ii) Evaluate the following integral by changing to polar coordinates.

निम्न द्वि समाकल को ध्रुवीय निर्देशांकों में परिवर्तित कर मान ज्ञात कीजिए

$$\int_0^a \int_y^a \frac{x dx dy}{(x^2 + y^2)}$$

- 11) (i) Find the surface area and the volume of the spindle shaped solid generated by revolution of curve astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ about the x - axis.

एस्ट्रायड $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के x - अक्ष के परित घूर्णन करने पर जनित का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए।

- (ii) Evaluate (मान ज्ञात कीजिए)

$$\int_1^e \int_1^{\log y} \int_1^{e^x} \log z \, dz \, dx \, dy$$

- 12) (i) Show that the radius of curvature at any point P on the parabola $y^2 = 4ax$ is $\frac{2(SP)^{3/2}}{\sqrt{a}}$, where s is the focus of the parabola.

सिद्ध कीजिए कि परवलय $y^2 = 4ax$ के किसी बिन्दु P पर वक्रता त्रिज्या $\frac{2(SP)^{3/2}}{\sqrt{a}}$, होगी, जहाँ s परवलय की नाभि है।

- (ii) By using Maclaurine's theorem expand $\log \sec x$ upto three terms.

मेकलारिन्स प्रमेय से $\log \sec x$ का प्रसार तीन पदों तक कीजिए।

- 13) (i) Determine the area between the parabolas $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$.

परवलयों $y^2 = 4ax$ और $x^2 = 4ay$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

- (ii) If $u = \sin^{-1} \left(\frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}} \right)$ then prove that $\frac{x\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{20} \tan 4$

यदि $u = \sin^{-1} \left(\frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}} \right)$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{x\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{20} \tan 4$