

MT - 08

December - Examination 2015

B.A./B.Sc. Part-III Examination**Complex Analysis****Paper - MT - 08****Time : 3 Hours]****[Max. Marks :- 067**

Note : The question paper is divided into three Sections A, B, and C. Use of calculator is allowed in this paper.

नोट : प्रश्न-पत्र तीन खण्डों ए, बी, और सी में विभाजित है। इस प्रश्न-पत्र में कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section - A

7 x 1 = 7

Note : Section 'A' contain seven (07) Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit is thirty words.

(खण्ड - अ)

नोट : खण्ड 'ए' में सात (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न के 01 अंक हैं और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द हैं।

1) (i) Define removable singularity.

अपनेय विचित्रता को परिभाषित कीजिए।

(ii) Write sufficient condition for a conformed mapping representation.

अनुकोण प्रतिचित्रण के निरूपण के लिए पर्याप्त प्रतिबन्ध लिखिए।

(iii) Define limit point of a set.

समुच्चय के सीमा बिन्दु को परिभाषित करो।

(iv) State fundamental theorem of algebra.

बीजगणित का मूल प्रमेय लिखिए।

(v) Define uniform continuity.

एकसमान सांतत्य को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define poles.

अनन्तक को परिभाषित कीजिए।

(vii) Write Cauchy-Riemann equations in polar form.

कोशी रोमान समीकरण का ध्रुवीय रूप लिखिए।

Section - B

4 x 8 = 32

Note : Section 'B' contain Eight Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any four (04) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

(खण्ड - ब)

नोट : खण्ड - 'ब' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं चार 04 सवालों के जवाब देना है। प्रत्येक प्रश्न 08 अंक का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

2) Write a short note on stereographic projection of complex numbers.
सम्मिश्र संख्याओं के त्रिविम प्रक्षेप पर टिप्पणी कीजिये।

3) Prove that every closed and finite set is compact
सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक संवृत एवं परिमित समुच्चय संहत होता है।

4) Prove that $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|}$ does not exist.

सिद्ध कीजिये की सीमा $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|}$ का अस्तित्व नहीं है।

5) Find the image of infinite strip $\frac{1}{4} < z < \frac{1}{2}$ in w -plane under the transformation $w = \frac{1}{z}$.

रूपांतरण $w = \frac{1}{z}$ के अन्तर्गत अनंत पट्टी $\frac{1}{4} < z < \frac{1}{2}$ का w -समतल में समवर्ती क्षेत्र ज्ञात कीजिये।

6) State and prove Cauchy's general principle of uniform convergence for sequence.

अनुक्रमों के एकसमान अभिसरण के लिए कोशी के सामान्य सिद्धांत को कथन कर सिद्ध कीजिये।

7) Verify Cauchy's theorem for the function $z^3 - iz^2 - 5z + 2i$ if C is the circle $|z - 1| = 2$

यदि C एक वृत्त $|z - 1| = 2$ हो तो फलन $z^3 - iz^2 - 5z + 2i$ के लिए कोशी समाकल प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

8) State and prove Liouville's theorem for entire function.

ल्युवेल प्रमेय को कथन कर सिद्ध कीजिये।

9) Describe nature of singularities of function

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$$

फलन $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$ कि विचित्रताओं की प्रकृति की विवेचना कीजिये।

Section - C

2 x 14 = 28

Note : Section 'C' contain 4 Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer any two (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words.

(खण्ड - स)

नोट : खण्ड 'सी' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्हीं दो (02) सवालों के जवाब देने हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है, परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

10) Show that the function $f(z) = e^{-z^{-4}}$, $z \neq 0$ and $f(0) = 0$ is not analytic at $z = 0$, although Cauchy - Riemann equations are satisfied at the point. How would you explain this

प्रदर्शित कीजिए की फलन $f(z) = e^{-z^{-4}}$, $z \neq 0$ तथा $f(0) = 0$ पर विश्लेषिक नहीं है यद्यपि इस बिन्दु पर कोशी रीमान समीकरण सन्तुष्ट होती है। इसको आप कैसे स्पष्ट करेंगे। ?

- 11) (i) Find the bilinear transformation which transforms point $z = 0, i, \infty$ into the points $w = \infty, i, 0$.

वह द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z = 0, i, \infty$ को $w = \infty, i, 0$ में प्रतिचित्रित करें।

- (ii) Describe the transformation $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

रूपान्तरण $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ की विवेचना कीजिये।

- 12) (i) Prove that every polynomial of degree n has exactly n zeroes.

सिद्ध कीजिये कि कोटि n के प्रत्येक बहुपद के ठीक n शून्य होते हैं।

- (ii) Show that the power series $z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \dots$ May be analytically continued to a wide range by means of the series

$$\log 2 - \frac{(1-z)}{2} - \frac{1}{2} \frac{(1-z)^2}{2^2} - \frac{1}{3} \frac{(1-z)^3}{2^3} - \dots$$

सिद्ध करो कि घात श्रेणी $z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \dots$ का विश्लेषिक सांतत्य

$$\text{घात श्रेणी } \log 2 - \frac{(1-z)}{2} - \frac{1}{2} \frac{(1-z)^2}{2^2} - \frac{1}{3} \frac{(1-z)^3}{2^3} - \dots$$

द्वारा वृहत्त क्षेत्र में किया जा सकता है।

- 13) Prove by contour integration :

परिरेखा समाकलन द्वारा सिद्ध कीजिये:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x(1-x^2)} dx = \pi$$