

**MT - 07**

December - Examination 2015

**B.A. / B.Sc. Part - III Examination****Algebra****Paper - MT - 07****Time : 3 Hours ]****[ Max. Marks :- 67**

**Note :** The question paper is divided into three sections A, B and C.  
Use of calculator is allowed in this paper.

**नोट :** प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ' 'ब' तथा 'स' में विभाजित है। इस प्रश्नपत्र में केलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

**Section - A**

7 x 1 = 7

**Note :** Section 'A' contain 07 very short answer type questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit is thirty words.

**(खण्ड - अ)**

**नोट :** खण्ड 'अ' में (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न के 01 अंक हैं और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द हैं।

1) (i) Define Binary operation.

द्विआधारी संक्रिया को परिभाषित कीजिये।

(ii) Define permutation group.

क्रमचय समूह को परिभाषित कीजिये।

(iii) Define cyclic group.

चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिये।

(iv) Define normal subgroup of a group.

किसी समूह के प्रसामान्य उपसमूह को परिभाषित कीजिए।

(v) Define a Vector space.

सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिये।

(vi) Write the characteristic of a field  $(z_7, +_7, \times_7)$  and

$$z_7 = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$$

क्षेत्र  $(z_7, +_7, \times_7)$ , जहाँ  $z_7 = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$  का अभिलक्षण बताइये।

(vii) What is the order of identity element in a group?

किसी समूह में तत्सतक अवयव की कोटि कितनी होती है?

### Section - B

4 x 8 = 32

**Note :** Section 'B' contain eight short answer type questions. Examinees will have to answer any four (04) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

### (खण्ड - ब)

**नोट :** खण्ड 'ब' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंक का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

- 2) Show that the set  $G = \{a + b\sqrt{2} ; a, b \in \mathbb{Q}\}$  is an abelian group for the addition operation.

प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय  $G = \{a + b\sqrt{2} ; a, b \in \mathbb{Q}\}$  योग संक्रिया के लिए एक क्रमविनिमेय समूह है।

- 3) If  $\sigma = (1 \ 7 \ 2 \ 6 \ 3 \ 5 \ 8 \ 4)$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Then prove that

$$\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(1) \rho(7) \rho(2) \rho(6) \rho(3) \rho(5) \rho(8) \rho(4))$$

यदि  $\sigma = (1 \ 7 \ 2 \ 6 \ 3 \ 5 \ 8 \ 4)$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

तो सिद्ध कीजिए कि

$$\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(1) \rho(7) \rho(2) \rho(6) \rho(3) \rho(5) \rho(8) \rho(4))$$

- 4) Prove that there have no proper subgroup of an finite group of prime order.

सिद्ध कीजिए कि अभाज्य कोटि वाले परिमित समूह का कोई उचित उपसमूह नहीं होता है।

- 5) State and prove Caley's theorem for group homomorphism.

समूह समकारिता के लिए कैले प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिये।

- 6) Prove that a field has no proper ideals.

सिद्ध कीजिए कि एक क्षेत्र की उचित गुणजावलिया नहीं होती है।

- 7) Show that the following set  $V$  of matrices is vector space over the field  $\mathbf{R}$  of real numbers with respect to matrix addition and matrix scalar multiplication where:

सिद्ध कीजिए कि निम्न मैट्रिक्स समुच्चय, मैट्रिक्स योग एवं मैट्रिक्स अदिश गुणन के सापेक्ष वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र  $\mathbf{R}$  पर एक सदिश समष्टि है।

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

- 8) Prove that every finite generated vector space has a base.

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक परिमित जनित सदिश समष्टि का एक आधार होता है।

- 9) Prove that in a vector space if every subset of a finite set is linearly dependent then finite set is also linearly dependent.

सिद्ध कीजिये कि किसी सदिश समष्टि में यदि किसी परिमित समुच्चय का कोई उपसमुच्चय एकघात परतंत्र हो तो वह परिमित समुच्चय भी एकघात परतंत्र होता है।

**Note :** Section 'C' contain 4 long answer type questions. Examinees will have to answer any two 02 questions. Each question is of 14 marks Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words.

**(खण्ड - स)**

**नोट :** खण्ड 'स' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को कीन्ही भी दो (02) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है, परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

10) Prove that every ring can be embedded in a ring with unity.

सिद्ध कीजिये प्रत्येक वलय का एक तत्समकी वलय में अन्तस्थापन किया जा सकता है।

11) Prove that  $V(F)$  is an finite dimensional vector space and  $W$  is any subspace of  $V$ , then quotient space  $V/W$  is also finite dimensional and  $\dim.(V/W) = \dim. (V) - \dim. (W)$

सिद्ध कीजिये कि यदि  $V(F)$  एक परिमित विमीय सदिश समष्टि हैं तथा  $W, V$  कि एक उपसमष्टि हैं तो विभाग समष्टि भी परिमित विमा कि होती हैं तथा  $\text{विमा } V/W = \text{विमा } V - \text{विमा } W$

12) Prove that prime field of non zero characteristic  $p$  is isomorphic to field  $(Z_p, +_p, \times_p)$ , Where  $Z_p = \{0, 1, 2, 3, \dots, (p-1)\}$

सिद्ध कीजिये कि अशून्य अभिलक्षण का अभाज्य क्षेत्र, क्षेत्र  $(Z_p, +_p, \times_p)$  के तुल्यकारी होता है जहाँ  $Z_p = \{0, 1, 2, 3, \dots, (p-1)\}$

13) (i) Prove that the intersection of any two normal subgroups of a group is a normal subgroup.

सिद्ध कीजिये कि किन्हीं दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्व निष्ठ उस समूह का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

(ii) State and prove fundamental theorem on homomorphism.

समकारिता कि मूलभूत प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिये।

---