

MT - 04

December - Examination 2015

B.A. / B.Sc. II Year Examination**Real Analysis & Matric Space****Paper - MT - 04****Time : 3 Hours]****[Max. Marks :- 67**

Note : The Question Paper is divided into three sections A, B and C. Use of calculators is allowed in this paper.

नोट : यह प्रश्नपत्र 'अ' 'ब' तथा 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। इस प्रश्नपत्र में कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section - A

7 x 1 = 7

(Very Short Answer Question)

Note : Section 'A' contain 07 very short answer type questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit is 30 words.

(खण्ड - अ)

अति लघु उत्तर वाले प्रश्न (अनिवार्य)

नोट : खण्ड 'अ' में सात (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1) (i) Is the set of real number is compact.

क्या वास्तविक संख्याओं का समुच्चय \mathbb{R} संहत समुच्चय है?

(ii) Define the Pseudo-Metric.

छद्म-दूरीक को परिभाषित कीजिये।

(iii) Define neighbourhood of a set.

किसी समुच्चय के सामीप्य को परिभाषित कीजिये।

(iv) Define the diameter of the set A , where A is the non-void subset of metric space (X, d) .

दूरीक समष्टि (X, d) जहाँ A कोई अरिक्त उपसमुच्चय है, के लिये समुच्चय A का व्यास परिभाषित कीजिये।

(v) What is the infimum of the set $S = \left\{x : x = \frac{1}{2n} : n \in I, n \neq 0\right\}$

समुच्चय $S = \left\{x : x = \frac{1}{2n} : n \in I, n \neq 0\right\}$ का निम्नक बताइये।

(vi) What is the point where the sequence $\left[\frac{3+2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right]$ converges?

अनुक्रम $\left[\frac{3+2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right]$ किस बिन्दु को अभिसृत होती है?

(vii) What is the point at which the following function is not differentiable?

निम्न फलन किस बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है?

$$f(x) = \begin{cases} 2+x & : x \geq 2 \\ 6-x & : x < 2 \end{cases}$$

(Short Answer Questions)

Note : Section 'B' contain eight short answer type questions. Examinees will have to answer any four (04) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

(खण्ड - ब)

(लघुउत्तर वाले प्रश्न)

नोट : खण्ड 'ब' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

2) If F is an ordered field and $a, b \in F$ then prove that
यदि F एक क्रमित क्षेत्र हो तथा $a, b \in F$ तो सिद्ध करो।

$$a < 0, b > 0 \Leftrightarrow a.b > 0$$

3) Show that $0 \in R$ is limit point of $A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in N \right\}$

प्रदर्शित कीजिये कि $0 \in R$, $A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in N \right\}$ का सीमा बिन्दु है।

4) If $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ are two convergent sequence and let $\text{Lim } x_n = l$ and $\text{Lim } y_n = l'$, then prove that :-

यदि $\{x_n\}$ व $\{y_n\}$ दो अभिसारी अनुक्रम हैं, $\text{Lim } x_n = l$ तथा $\text{Lim } y_n = l'$ तब सिद्ध कीजिये।

$$\text{Lim } \{x_n - y_n\} = l - l'$$

5) Prove that: सिद्ध कीजिये।

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)(n+2)\dots\dots(2n)}{n^n} \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$$

6) Test the following function for differentiability at $x = 1$ and $x = 2$

निम्न फलन की $x = 1$ व $x = 2$ पर अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

$$f(x) = |x - 1| + |x - 2|, \forall x \in [0, 3]$$

7) Prove that the limit of the following function at $(0, 0)$ doesn't exist.

सिद्ध कीजिये कि निम्न फलन कि $(0, 0)$ पर युगपत सीमा विद्यमान नहीं है।

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

8) If f is bounded function on $[a, b]$ and if p_1 and p_2 are two arbitrary partition of $[a, b]$ then prove that

यदि फलन f , संव्रत अन्तराल $[a, b]$ में परिबद्ध है तथा यदि p_1 व p_2 , $[a, b]$ के कोई दो स्वेच्छ विभाजन है तो सिद्ध करो।

$$(i) \quad L(p_1, f) \leq U(p_2, f)$$

$$(ii) \quad L(p_2, f) \leq U(p_1, f)$$

9) Taking an example, explain the uniform convergence of series of functions.

फलनों की श्रेणी के एकसमान अभिसरण के उदाहरण देकर समझाइये।

Section - C

2 x 14 = 28

(Long Answer Questions)

Note : Section 'C' contain 4 long answer type questions. Examinees will have to answer any two 02 questions. Each question is of 14 marks Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words.

(खण्ड - स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

नोट : खण्ड 'स' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्हीं भी दो (02) सवालों के जवाब देने हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है, परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करना है।

10) (i) Show that the following function is metric on R .

प्रदर्शित कीजिये कि निम्न फलन R में दूरीक है।

$$d(x, y) = \min\{2, |x - y|\} \quad \forall x, y \in R$$

(ii) If (X, d) is a metric space then prove that any subset F of X is closed if and only if $F \subseteq F'$, where F' is set of all limit points of F .

यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तब सिद्ध कीजिये कि X का एक उपसमुच्चय F संवृत है यदि और केवल यदि $F \subseteq F'$, जहां F' , F के सभी सीमा बिन्दुओं का समुच्चय है।

- 11) (i) If X and Y are metric spaces then prove that a mapping $f : X \rightarrow Y$ is continuous on X if and only if for any subset A of X , $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$

यदि X, Y दूरीक समष्टिया हैं तब सिद्ध कीजिये कि एक प्रतिचित्रण $f : X \rightarrow Y$ पर सतत है यदि X और केवल यदि के किसी उपसमुच्चय A के लिए $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

- (ii) Prove that the following function is continuous and differentiable at $x = 0$

सिद्ध कीजिये कि निम्न फलन $x = 0$ पर सतत व अवकलनीय है।

$$f(x) = \begin{cases} \sin x; & x \text{ अपरिमेय है। (x is irrational)} \\ x & ; x \text{ परिमेय है। (x is rational)} \end{cases}$$

- 12) Prove that metric space (\mathbb{R}, d) is not compact where d is simple metric on the set of real numbers \mathbb{R} .

सिद्ध कीजिये कि दूरीक समष्टि (\mathbb{R}, d) सहंत नहीं है जहाँ d वास्तविक संख्याओ के समुच्चय \mathbb{R} में सामान्य समष्टि हैं।

- 13) Using second mean value theorem, prove that

द्वितीय मध्यमान प्रमेय का उपयोग कर सिद्ध कीजिये कि

$$(i) \quad \frac{1}{3\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} dx < \frac{1}{3}$$

$$(ii) \quad \frac{\pi^3}{15} < \int_0^\pi \frac{x^2}{3+2\cos x} dx < \frac{\pi^3}{3}$$