MSCPH - 01

December - Examination 2015

MSc (Previous) Physics Examination

Mathematical Physics and Classical Mechanics

गणितीय भौतिकी तथा चिरसम्मत यांत्रिकी

Paper - MSCPH - 01

Time : 3 Hours] **[Max. Marks :- 80**

Note : The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answers as per the given instruction.

नोट : यह प्रश्नपत्र 'अ' 'ब' तथा 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Section - A 8 x 2 = 16

Very Short Answer type Questions (Compulsory)

Note : Answer all questions. As per the nature of the question you delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to 30 words. Each question carries 2 marks.

(खण्ड – अ)

अति लघु उत्तर वाले प्रश्न (अनिवार्य)

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है।

1) (i) For a system Lagrangian is given by $L = a\phi\phi^2 + b\phi + c$ Find the momentum p_ϕ

निकाय का लेग्रंजियन $L = a\phi\phi^2 + b\phi + c$ दिया जाता है संवेग p_ϕ ज्ञात करो।

(ii) Plot the following function $f(x)$ versus x. $f(x) = \frac{H_3(x)}{x}$ and $H_3(x)$ is Hermite polynomial.

फलन $f(x)$ को x के साथ चित्रित (plot) करो। यहाँ $f(x) = \frac{H_3(x)}{x}$ तथा $H_3(x)$ हर्माईट बहुपद है।

(iii) Find the value of the Poisson bracket $[p^2q, q]$

पोइसन ब्रेकिट $[p^2q, q]$ का मान ज्ञात करो।

(iv) Find the Fourier sine transform of $f(t) = \frac{1}{t}$. Here $\int_0^\infty \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{2}$

फलन $f(t) = \frac{1}{t}$ का फुरिअर ज्या रूपांतरण ज्ञात करो। यहाँ $\int_0^\infty \frac{\sin\theta}{\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{2}$

(v) Find the Laplace transform of $f(t) = 3 + e^{-t}$

फलन $f(t) = 3 + e^{-t}$ का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो।

(vi) Evaluate the following integral for Legendre Polynomial

$$\int_{-1}^{+1} \left(1 + x^{\frac{1}{2}} + x^2\right) P_2(x)\, dx$$

लिजेंड्र बहुपद के लिए निम्न समाकल का मान ज्ञात करो

$$\int_{-1}^{+1} \left(1 + x^{\frac{1}{2}} + x^2\right) P_2(x)\, dx$$

(vii) A transformation is given by $\overline{B}_{ij} = \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} B_{ab}$. Here all symbols have usual meanings. What is the order of this tensor? Is this contravariant tensor?

एक रूपांतरण $\overline{B}_{ij} = \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j} B_{ab}$ द्वारा दिया जाता है। यहाँ सभी पदों के प्रचलित अर्थ है। इस प्रदिश की कोटि क्या है? क्या यह कोंट्रावेरिअंत (contravariant) प्रदिश है?

(viii) Evaluate the integral $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx$ correct to three decimal places using Trapezoidal rule for given table

x	0.0	0.5	1.0
$\frac{1}{1+x}$	1.000	0.6667	0.5

दी गई सारणी के लिए ट्रेपेजोईडल के नियम से समाकल $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx$ का मान तीन दशमलव स्थान तक ज्ञात करो।

x	0.0	0.5	1.0
$\frac{1}{1+x}$	1.000	0.6667	0.5

Section - B

4 x 8 = 32

(Short Answer Questions)

Note : Answer any 4 questions. Each answer should not exceed 200 words. Each question carries 8 marks.

(खण्ड – ब)

(लघुउत्तर वाले प्रश्न)

नोट : किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 200 शब्दों में परिसीमित कीजिये प्रत्येक प्रश्न 8 अंकों का है।

2) By using this Hermite function $H_n(x) = \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^r n!}{r!(n-2r)!} (2x)^{n-2r}$

Prove that for $m < n$,

$$\frac{d^m}{dx^m} H_n(x) = 2^m \frac{n!}{(n-m)!} H_{n-m}(x).$$

इस हर्मिट फलन $H_n(x) = \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^r n!}{r!(n-2r)!} (2x)^{n-2r}$ का उपयोग करते हुए $m < n$, के लिए निम्न सिद्ध करो।

$$\frac{d^m}{dx^m} H_n(x) = 2^m \frac{n!}{(n-m)!} H_{n-m}(x).$$

3) A body is oscillating with kinetic energy $\frac{3}{4} M (r-a)^2 \theta^2$ and potential energy $-Mg(r-a)\cos\theta$. Here r and a are constants. Obtain the equation of motion for this body using Lagrangian and also obtain the period of small oscillations.

एक वस्तु गतिज उर्जा $\frac{3}{4} M (r-a)^2 \theta^2$ तथा स्थितिज उर्जा $-Mg(r-a)\cos\theta$ के साथ दोलन कर रही है। यहाँ r तथा a अचर है। लेग्रंजियन का उपयोग करते हुए वस्तु का गति का समीकरण प्राप्त करो तथा अल्प दोलनो के लिए आवर्तकाल ज्ञात करो।

4) Using Rodrigues's formula, prove the following relation

$$x^3 = \frac{2P_3 + 3P_1}{5}$$

रोद्रिगुज (Rodrigues's) सूत्र का उपयोग करते हुए निम्न सम्बन्ध सिद्ध करो।

$$x^3 = \frac{2P_3 + 3P_1}{5}$$

5) By using this Bessel function $J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\sqrt{n+r+1}} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$ prove that $\int_0^x [x^n J_{n-1}(x)]\ dx = x^n J_n(x)$

इस बेसल फलन $J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\sqrt{n+r+1}} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$ का उपयोग करते हुए निम्न सिद्ध करो। $\int_0^x [x^n J_{n-1}(x)]\ dx = x^n J_n(x)$

6) Find the finite Fourier cosine transform of $f(x) = \frac{\pi}{3} - x + \frac{x^2}{2\pi}$ in the interval $(0, \pi)$

फलन $f(x) = \frac{\pi}{3} - x + \frac{x^2}{2\pi}$ का परिमित फुरिअर कोज्या रूपान्तर अंतराल $(0, \pi)$ में ज्ञात करो।

7) By using appropriate steps, state whether transformation $Q = p \cot q, P = \log\left(\frac{\sin q}{p}\right)$ is canonical or not canonical?

उचित पदों का उपयोग करते हुए बताओ कि रुपांतरण $Q = p \cot q, P = \log\left(\frac{\sin q}{p}\right)$ क्लोनिक्ल है अथवा नहीं है?

8) A particle is moving along y direction with kinetic energy $\frac{1}{2}my^2 + myy$ and potential energy mgy. Find following:

(i) Equation of motion for the particle

(ii) Hamiltonian of the particle

एक कण y दिशा के अनुदिश गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}my^2 + myy$ तथा स्थितिज ऊर्जा mgy के साथ गति कर रहा है तो निम्न ज्ञात करो।

(i) कण के लिए गति का समीकरण

(ii) कण का हेमिल्टोनियन

9) The velocity V(km/min) with respect to time t is shown in the table. Estimate the distance $\int_0^{20} V dt$ covered in 20 minutes using Simpson's 1/3 rule and by Simpson's 3/8 rule.

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
V	0	10	18	25	29	32	20	11	5	2	0

समय t के सापेक्ष वेग V(km/min) सारणी में दर्शाया गया है।

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
V	0	10	18	25	29	32	20	11	5	2	0

सिम्पसन के 1/3 तथा 3/8 दोनों नियम द्वारा 20 मिनट में तय की गई दूरी $\int_0^{20} V dt$ ज्ञात करो।

Section - C

2 x 16 = 32

(Long Answer Questions)

Note : Answer any 2 questions. You have to delimit your each answer maximum 500 words. Each question carries 16 marks.

(खण्ड – स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

नोट : किन्हीं 2 प्रश्नों के उत्तर दीजिये। आप अपने उत्तर को अधिकतम 500 शब्दों में परिसीमित कीजिये। प्रत्येक प्रश्न 16 अंक का है।

10) (i) Find the Laplace transform of $\sin \sqrt{x}$

You can use property $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + ...$

(ii) Find the Laplace transform of $5e^{-2t}\cos 6t$

(iii) Find inverse Laplace transform of $\frac{3(s^2-2)^2}{2s^5}+\frac{1}{s-a}$

(iv) Find the Fourier sin transform of following function

$$f(x)=\begin{cases} x & ;0\le x\le \pi \\ 0 & ;\textit{otherwise} \end{cases}$$

(i) $\sin\sqrt{x}$ का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो।

आप $\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+.....$ का उपयोग कर सकते है।

(ii) $5e^{-2t}\cos 6t$ का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो।

(iii) $\frac{3(s^2-2)^2}{2s^5}+\frac{1}{s-a}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो।

(iv) निम्न फलन का फुरिअर ज्या रूपान्तर ज्ञात करो।

$$f(x)=\begin{cases} x & ;0\le x\le \pi \\ 0 & ;\textit{otherwise} \end{cases}$$

11) (i) For the following data obtain the polynomial using Newton's forward interpolation formula.

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1.40	1.56	1.76	2.00	2.28

(ii) A body is moving with kinetic energy $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+xy)$ and potential energy $ax^2+by^2+cz^2$. Find the Lagrange's equations of motion.

(i) न्यूटन अग्र अन्तरवेशी (interpolation) सूत्र द्वारा निम्न सारणी से बहुपद प्राप्त करो।

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	1.40	1.56	1.76	2.00	2.28

(ii) एक वस्तु गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + xy)$ तथा स्थितिज ऊर्जा $ax^2 + by^2 + cz^2$ के साथ गति कर रही है तो लेग्रेंज के गति के समीकरण ज्ञात करो।

12) A bead of mass m slides on the wire in the shape of the cycloid as given by equations. $x = b(\phi - \sin\phi)$ and $y = b(1 + \cos\phi)$ where y is the height of the particle and $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Gravity due to earth is g. Obtain the Lagrangian and the equation of motion for the bead.

एक m द्रव्यमान का मनका चक्रज पर फिसल रहा है। चक्रज का समीकरण निम्न है $x = b(\phi - \sin\phi)$ तथा $y = b(1 + \cos\phi)$ जहाँ y कण की उँचाई है तथा $0 \leq \phi \leq 2\pi$ मनका का लंग्रेजियन तथा गति का समीकरण प्राप्त करो। पृथ्वी के कारण गुरूत्व g है।

13) (i) Find a real root of the equation $x^3 - 3x - 5 = 0$ using Newton's Raphson method.

समीकरण $x^3 - 3x - 5 = 0$ का वास्तविक मूल न्यूटन रेफ्सन विधिद्वारा ज्ञात करो।

(ii) Use second order Runge - Kutta method (midpoint method) to solve the ordinary differential equation $\frac{dy}{dx} = x + y$, with initial condition $y(0) = 2$ in steps 0.1.

द्वितीय कोटि रुंगे कुटा (Runge - Kutta) (मध्य बिंदु) विधि द्वारा साधारण अवकल समीकरण को $\frac{dy}{dx} = x + y$, हल करो। यहाँ 0.1 के पद (steps) में प्रारम्भिक शर्त $y(0) = 2$ है।

———