MT-07

June - Examination 2026
B.A./B.Sc. (Part-III) Examination
MATHEMATICS
Algebra
Paper : MT-07

[*Time: **3** Hours*] [*Maximum Marks: **70***]

Note :- The question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions in each section. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :– यह प्रश्न–पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। इस प्रश्न–पत्र में नॉन–प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section-A **7×2=14**

(Very Short Answer Type Questions)

Note :- Answer **all** questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries **2** marks.

खण्ड–'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :– **सभी** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न **2** अंक का है।

1. (i) Define cyclic group.
   चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए।

   (ii) Define normal subgroup.
   प्रसामान्य उपसमूह को परिभाषित कीजिए।

   (iii) Define ring homomorphism.
   वलय समाकारिता को परिभाषित कीजिए।

   (iv) Define integral domain.
   पूर्णांकीय प्रान्त को परिभाषित कीजिए।

   (v) Define Ideal.
   गुणजावली को परिभाषित कीजिए।

   (vi) Define linear dependence of vectors.
   सदिशों की एकघाती आश्रितता को परिभाषित कीजिए।

   (vii) Define quotient space.
   विभाग समष्टि को परिभाषित कीजिए।

Section-B 4×7=28

(Short Answer Type Questions)

Note :- Answer **any four** questions. You have to delimit your each answer maximum up to **200** words. Each question carries **7** marks.

खण्ड–'ब'

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :– **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने प्रत्येक उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न **7** अंक का है।

2. Show that $G = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in R_0\right\}$ is a commutative group under matrix multiplication.

   सिद्ध कीजिए कि $G = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a \in R_0\right\}$ मैट्रिक्स गुणा के लिए क्रमविनिमेय समूह है।

3. Show that every subgroup of a cyclic group is also cyclic.

   सिद्ध करो कि एक चक्रीय समूह का प्रत्येक उपसमूह भी चक्रीय होता है।

4. Show that the intersection of any two normal subgroup of a group is a normal subgroup.

   सिद्ध करो कि किसी समूह के किन्हीं दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ उस समूह का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

5. Show that every group is homomorphic to its quotient group.

   सिद्ध करो कि प्रत्येक समूह अपने विभाग समूह के समाकारी होता है।

6. Prove that the set $W=\{(a, b, 0) \mid a, b \in F\}$ is a subspace of the vector space $V_3(F)$.

   सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $W=\{(a, b, 0) \mid a, b \in F\}$ सदिश समष्टि $V_3(F)$ की एक उपसमष्टि है।

7. Prove that every non-empty subset of a linearly independent set of vectors is also linearly independent.

   सिद्ध करो कि सदिशों के एकघातत स्वतन्त्र समुच्चय का प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय भी एकघातत स्वतन्त्र होता है।

8. Show that the set of all units in a ring with unity forms a multiplicative group.

   सिद्ध करो कि किसी तत्समकी वलय के एकको का समुच्चय एक गुणनात्मक समूह होता है।

9. If 'a' be an element of a ring R, then prove that the normalizer of 'a' in R

   $N(a) = \{r \in R \mid ar = ra\}$ is a subring of R.

   यदि 'a' किसी वलय R का अवयव हो, तो सिद्ध कीजिए कि R में 'a' का प्रसामान्यक $N(a) = \{r \in R \mid ar = ra\}$, R का एक उपवलय है।

Section-C 2×14=28

(Long Answer Type Questions)

Note :- Answer **any two** questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries **14** marks.

खण्ड–'स'

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :– **किन्हीं दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने प्रत्येक उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न **14** अंक का है।

10. State and prove Lagrange's theorem for groups.
समूह के लिए लाग्रंज प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

11. Show that every group is isomorphic of some permutation group.
सिद्ध करो कि प्रत्येक समूह एक क्रमचय समूह के तुल्याकारी होता है।

12. Show that every ring can be embedded in a ring with unity.
सिद्ध करो कि प्रत्येक वलय का एक तत्समकी वलय में अन्तर्स्थापन किया जा सकता है।

13. If W_1 and W_2 are two subspaces of a finite dimensional vector space V(F), then prove that -

$$\dim (W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2)$$

यदि W_1 और W_2 एक परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टियाँ हो, तो सिद्ध कीजिए कि –

$$\dim (W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2)$$
