MT-04

June - Examination 2026
B.A./B.Sc. (Part-II) Examination
MATHEMATICS
Real Analysis & Metric Space
Paper : MT-04

[*Time: **3** Hours*] [*Maximum Marks: **70***]

Note :- The question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions in each section.

निर्देश :– यह प्रश्न–पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Section-A **7×2=14**

(Very Short Answer Type Questions)

Note :- Answer **all** questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries **2** marks.

खण्ड–'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :– **सभी** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न **2** अंक का है।

1. (i) Find the limit points of the set $E= \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$.

समुच्चय $E= \left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$ की सीमा बिन्दु ज्ञात कीजिए।

(ii) Define limit of a sequence.

अनुक्रम की सीमा को परिभाषित कीजिए।

(iii) Evaluate -

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{(x - a)}$$

मान ज्ञात कीजिए –

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{(x - a)}$$

(iv) Define Darboux sum.

डार्बू योग को परिभाषित कीजिए।

(v) Define Uniform Convergence of a Sequence.

अनुक्रम का एकसमान अभिसरण परिभाषित कीजिए।

(vi) Define closed set in metric space.

दूरिक समष्टि में संवृत समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define compact set in metric space.

दूरिक समष्टि में संहत समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

Section-B 4×7=28

(Short Answer Type Questions)

Note :- Answer **any four** questions. You have to delimit your each answer maximum up to **200** words. Each question carries **7** marks.

खण्ड–'ब'

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :– **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने प्रत्येक उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न **7** अंक का है।

2. Prove that the union of any arbitrary collection of open sets is open.
सिद्ध कीजिए कि विवृत समुच्चयों का स्वेच्छ संघ एक विवृत समुच्चय होता है।

3. Show that the following sequence $<x_n>$ converge to 2 -
$x_1=\sqrt{2}$ and $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$
प्रदर्शित कीजिए कि निम्न अनुक्रम $<x_n>$, 2 को अभिसृत होती है –
$x_1=\sqrt{2}$ तथा $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$

4. Prove that a differentiable function at a point c is necessarily continuous at this point, but converse is not necessarily true.
सिद्ध कीजिए कि किसी बिन्दु c पर एक अवकलनीय फलन इस बिन्दु पर आवश्यक रूप से संतत है, परन्तु विलोम सत्य होना आवश्यक नहीं।

5. If f(x)=x, x∈ [0, 1], then show that f is R-integrable on [0, 1] and $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.
यदि f(x)=x, x∈ [0, 1], तो सिद्ध कीजिए कि f अंतराल [0, 1] पर R-समाकलनीय है तथा $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$

6. Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ converges uniformly on R.
प्रदर्शित कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, R में एकसमान अभिसारी है।

7. If (X, d) be a metric space, then show that -
$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) \; \forall \; x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$
यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है, तो दर्शाइए कि –
$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \leq d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) \; \forall \; x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$

8. Prove that a subset A of a metric space X is closed iff $\bar{A} = A$.
सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि X का कोई उपसमुच्चय A संवृत होता है यदि और केवल यदि $\bar{A} = A$

9. Let X and Y be metric spaces and f is a continuous mapping from X into Y, then prove that $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.
माना X तथा Y दूरीक समष्टियाँ है तथा f, X का Y में सतत प्रतिचित्रण है, तब सिद्ध कीजिए कि $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

Section-C 2×14=28

(Long Answer Type Questions)

Note :- Answer **any two** questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries **14** marks.

खण्ड–'स'

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :– **किन्हीं दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने प्रत्येक उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न **14** अंक का है।

10. State and prove Cauchy's general principle of convergence for sequence.

अनुक्रम के अभिसरण के लिए कोशी का सामान्य सिद्धांत का कथन कर सिद्ध कीजिए।

11. Find a number c so that the following function is continuous on the origin.

$$f(x, y)= \begin{cases} \frac{3xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} & \text{if } (x, y)\neq(0, 0) \\ c & \text{if } (x, y)=(0, 0) \end{cases}$$

एक संख्या c इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि निम्न फलन मूल बिन्दु पर सतत है –

$$f(x, y)= \begin{cases} \frac{3xy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} & \text{यदि } (x, y)\neq(0, 0) \\ c & \text{यदि } (x, y)=(0, 0) \end{cases}$$

12. If $f\in R$ [a, b], then show that $|f| \in R[a, b]$. Also prove that its converse is not necessarily true.

यदि $f\in R$ [a, b] हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि $|f| \in R[a, b]$। यह भी सिद्ध कीजिए कि इसका विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं।

13. Let (X, d) is a metric space and d* be defined as $d^*(x, y)= \frac{Md(x, y)}{1+d(x, y)}$, $x, y \in X, M>0$, then prove that (X, d*) is also metric space.

माना कि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा d^* निम्न परिभाषित है $d^*(x, y)= \frac{Md(x, y)}{1+d(x, y)}$, $x, y \in X, M>0$, तो सिद्ध कीजिए कि (X, d^*) भी एक दूरीक समष्टि है।
