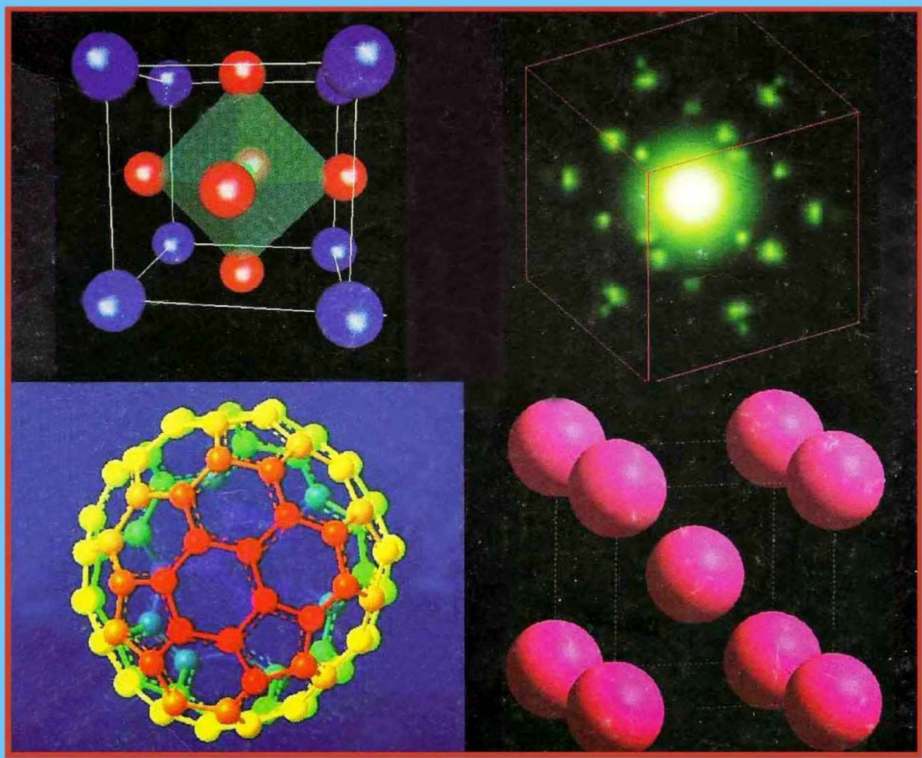
PH-10

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा



ठोस अवस्था भौतिकी

PH-10

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

ठोस अवस्था भौतिकी

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

अध्यक्ष
प्रोफेसर (डॉ.) नरेश दाधीच
कुलपति
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय,
कोटा (राजस्थान)

संयोजक /समन्वयक एवं सदस्य

विषय समन्वयक
प्रो. एन. एस. सक्सेना
भौतिक विज्ञान विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

सदस्य सचिव /समन्वयक
डॉ. अनुराधा शर्मा
सहायक आचार्य, वनस्पति विज्ञान
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

सदस्य

1. **प्रो. आर. के. पाण्डेय,**
भौतिक विज्ञान विभाग
बर्कतुल्ला विश्वविद्यालय, भोपाल
2. **प्रो. एस. आर. धारीवाल,**
सेवानिवृत्त प्रोफेसर
जयनारायण विश्वविद्यालय, जोधपुर
3. **प्रो. एम. हुसैन**
भौतिक विज्ञान विभाग
जामिया मिलिया इस्लामिया, नयी दिल्ली
4. **डॉ. के. बी. शर्मा**
भौतिक विज्ञान विभाग
एस. एस. जैन सुबोध (पी. जी.) कॉलेज, जयपुर
5. **प्रो. कानन बाला शर्मा**
भौतिक विज्ञान विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
6. **डॉ. आर. एन. शर्मा,**
भौतिक विज्ञान विभाग
एम. एस. जे. कॉलेज, भरतपुर
7. **डॉ. डी. सी. जैन**
भौतिक विज्ञान विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
8. **श्री बी. एस. शर्मा**
भौतिक विज्ञान विभाग
राजकीय महाविद्यालय, कोटा

सम्पादक एवं पाठ लेखक

संपादक

डॉ. एन.एस. सक्सेना,
भौतिक विज्ञान विभाग,
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

लेखक

1. **डॉ. डी. सी. जैन**
भौतिक विज्ञान विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
2. **डॉ. पी. जे. सिंह**
भौतिक विज्ञान विभाग,
एम.एस. जे. कॉलेज, भरतपुर
3. **श्री रीटा शर्मा,**
भौतिक विज्ञान विभाग,
एस. एस. जैन सुबोध (पी. जी.) कॉलेज, जयपुर
4. **डॉ. आर. के. सिंघल**
भौतिक विज्ञान विभाग,
राजस्थान विश्वविद्यालय,जयपुर
5. **डॉ. मनीष गुप्ता,**
भौतिक विज्ञान विभाग,
एम.एस. जे. कॉलेज, भरतपुर
6. **डॉ. दिनेश पाटीदार**
भौतिक विज्ञान विभाग,
जे. एन. आई. टी. जयपुर

अकादमिक एवं प्रशासनिक व्यवस्था

प्रोफेसर (डॉ.) नरेश दाधीच
कुलपति
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय,कोटा (राज.)

प्रो. (डॉ.) अनाम जैटली
निदेशक
संकाय विभाग

योगेन्द्र गोयल
प्रभारी
पाठ्यक्रम सामग्री उत्पादन एवं वितरण विभाग

पाठ्यक्रम उत्पादन

योगेन्द्र गोयल
सहायक उत्पादन अधिकारी
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

उत्पादन सितंबर,2009ISBN-13/978-81-8496-126-3

इस सामग्री के किसी भी अंश की वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा की लिखित अनुमति के बिना किसी भी रूप में अथवा मिमियोग्राफी (चक्रमुद्रण) द्वारा या अन्यत्र पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है ।

PH-10

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

अनुक्रमणिका

ठोस अवस्था भौतिकी

इकाई क्रमांक	इकाई का नाम	पृष्ठ संख्या
इकाई-1	क्रिस्टल में परमाणु	7–25
इकाई-2	क्रिस्टल संरचना	26–52
इकाई-3	परमाण्वीय आबंधन	53–71
इकाई-4	क्रिस्टल अपूर्णता	72–85
इकाई-5	क्रिस्टल द्वारा तरंग विवर्तन	86–101
इकाई-6	विवर्तन प्रयोग	102–111
इकाई-7	जालक कंपन	112–135
इकाई-8	ठोसों के तापीय गुण	136–164
इकाई-9	ठोसों के वैद्युत गुण	165–187
इकाई-10	ठोसों का बैंड सिद्धांत	188–207
इकाई-11	ठोसों के अर्धचालकीय गुण	208–237
इकाई-12	परावैद्युत गुण	238–254
इकाई-13	प्रकाशिक गुण	255–282
इकाई-14	चुम्बकीय गुण	283–307
इकाई-15	अतिचालकता	308–326

आमुख

आपकी अध्ययन-सामाग्री भौतिकी के क्षेत्र के विद्‌वानों की एक टीम द्‌वारा विकसित की गई है । यह आपको स्वतंत्र अध्ययन में प्रदान करने के लिए दिया गया ढांचा है । निम्नलिखित पर ध्यान देने से अप इस अध्ययन सामाग्री का सर्वोत्तम लाभ ले सकेंगे । इस पुस्तक को बी. एससी. पार्ट-III की भौतिक विज्ञान के पत्र -2 (PH-10), ठोस अवस्था भौतिकी, के पाठ्यक्रम को ध्यान में रखकर तैयार किया गया है पुस्तक को कुल 15 इकाइयों में विभक्त किया गया है । प्रत्येक इकाई के (पाठ) के प्रारम्भ में पाठ का शीर्षक हिन्दी एवं अंग्रेजी में दिया गया है । यह आपको पाठगत सामाग्री के विषय में एक समान्य विचार प्रदान करेगा ।शीर्षक के पश्चात प्रत्येक इकाई (पाठ) की रूपरेखा दी गई है जो कि सम्पूर्ण पाठ का दर्पण है तथा पाठ में सम्मिलित सभी अनुच्छेदों का क्रमवार उल्लेख करती है । प्रत्येक इकाई कि पाठ्य सामाग्री को सरलतम भाषा में सुगम एवं सुस्पष्ट रूप से लिखने का प्रयास किया गया है । प्रत्येक पाठ (इकाई) में एक अवधारणा (concept) पूर्ण होने के पश्चात कुछ बोध प्रश्न व हल किए गए उदाहरण दिये गए हैं । इनका उद्देश्य आपके द्‌वारा सीखी गई अवधारणा को पुष्ट करना और समस्या हल करने की तकनीक सिखाना है जो भौतिकी के अध्ययन का एक अनिवार्य अंग है ।

प्रत्येक इकाई के अंत में सारांश, शब्दावली, संदर्भ ग्रंथ तथा अभ्यासार्थ प्रश्न दिये गए हैं ।

हमें आशा है कि इस पुस्तक कि अध्ययन सामग्री अपने उद्देश्य में सफल होगी तथा विद्‌यार्थियों के लिये उपयोगी सिद्ध होगी ।

हम, अपने साथियों एवं विद्‌यार्थियों से यह अनुरोध करते हैं कि वे इस पुस्तक की छपाई की त्रुटियों एवं अपने बहुमूल्य सुझावों से अवगत कराकर हमें अनुगृहीत करें जिससे पाठ्य-सामाग्री को आपकी आशा के अनुरूप बनाया जा सके ।

इकाई-1

क्रिस्टल में परमाणु

(Atomic in Crystal)

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य

1.1 प्रस्तावना

1.2 ठोस अवस्था

1.3 क्रिस्टलों में आवर्तिता

1.3.1 जालक स्थानान्तरण सदिश

1.3.2 आधार और क्रिस्टल संरचना

1.4 अभाज्य कोष्ठिका

1.4.1 विगनर - साइट सेल

1.5 प्रति एकक सेल जालक बिन्दुओं की संख्या

1.6 ब्रेवे जालक

1.6.1 द्वि-विमीय ब्रेवे जालक

1.6.2 त्रिविमीय ब्रेवे जालक

1.7 मिलर सूचकांक

1.8 अंतरातल अन्तराल

1.9 सारांश

1.10 शब्दावली

1.11 संदर्भ ग्रंथ

1.12 बोध प्रश्नों के उत्तर

1.13 अभ्यासार्थ प्रश्न

1.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप -

- क्रिस्टलीय पदार्थो की जालक संरचना को जान सकेंगे;
- अभाज्य कोष्ठिका तथा एकक कोष्ठिका की जानकारी एवं इनकी पुनरावृत्ति द्वारा क्रिस्टल संरचना जान सकेंगे;
- द्वि-विभीय तथा त्रिविभीय ब्रेवे जालकों की जानकारी प्राप्त कर सकेंगे;!
- विभिन्न जालक संरचनाओं में प्रति एकक कोष्ठिका (सेल) जालक बिन्दुओं की संख्या तथा संकुलन गुणांक जान सकेंगे;

- क्रिस्टल संरचना में किसी क्रिस्टल तल के दिक्विन्यास को व्यक्त करने को लिए मिलर सूचकांकों को ज्ञात करना जान सकेंगे;
- क्रिस्टल जालक तलों के मध्य अन्तराल ज्ञात कर सकेंगे ।

1.1 प्रस्तावना (Introduction)

सभी द्रव्य (पदार्थ) परमाणुओं व अणुओं से मिलकर बने होते हैं । हम जानते हैं कि पदार्थ ठोस, द्रव तथा गैस तीन अवस्थाओं में पाया जाता है । जब पदार्थ ठोस अवस्था में होता है, तब उसका निश्चित आकार और आयतन होता है लेकिन जब पदार्थ द्रव व गैस अवस्था में होता है, तब उसका कोई निश्चित आकार नहीं होता। ठोस अवस्था भौतिकी में हम पदार्थ की ठोस अवस्था के भौतिक गुणों के सम्बंध में अध्ययन करते हैं । अनुच्छेद 1.2 में आप ठोस पदार्थ की क्रिस्टलीय तथा अक्रिस्टलीय अवस्था का अध्ययन करेंगे । अनुच्छेद 1.3 में आप जानेंगे कि जब आकाश में जालक बिन्दुओं को नियमित व आवर्त्ती रूप से व्यवस्थित कर उन पर परमाणु या आयनों का आधार सम्बद्ध किया जाता है तो क्रिस्टल संरचना प्राप्त होती है । अनुच्छेद 1.4 में आप अभाज्य कोष्ठिका तथा विगनट साइट सेल का निर्माण करने की जानकारी प्राप्त करेंगे । अनुच्छेद 1.6 में आप द्वि-विमीय व त्रि-विभीय ब्रेवे जालकों का अध्ययन करेगें । अनुच्छेद 1.7 में आप किसी क्रिस्टल तल के अभिविन्यास को व्यक्त करने के लिए मिलर सूचकांक तथा अनुच्छेद 1.8 में अंतरातल अन्तराल का मान ज्ञात करेंगे ।

1.2 ठोस अवस्था (Solid State)

पदार्थ की ठोस अवस्था को उनकी संरचना के आधार पर दो भागों में बांटा जा सकता है : क्रिस्टलीय ठोस तथा अक्रिस्टलीय ठोस । इन दोनों भागों में अन्तर ठोसों के स्थूल रूप या उनके बाह्य अवलोकन पर निर्भर नहीं करता, बल्कि उनकी संरचना करने वाले मूल कणों-परमाणुओं, अणुओं या आयनों के समयोजन की कोटि पर प्रारम्भिक रूप से निर्भर करता है ।

जिन ठोस पदार्थों में अणुओं की कोई निश्चित व्यवस्थित संरचना नहीं होती और न ही उनमें कोई निश्चित ज्यामितीय रूप पाया जाता है, अक्रिस्टलीय ठोस कहलाते हैं, जैसे प्लास्टिक, रेजिन, कांच आदि ।

जिन ठोस पदार्थो में अवयवी कण एक क्रमबद्ध नियमित आन्तरिक व्यवस्था में व्यवस्थित होते हैं तथा उनमें एक निश्चित ज्यामितीय आकृति होती है, क्रिस्टलीय ठोस पदार्थ कहलाते है, जैसे सोडियम क्लोराइड, हीरा, पोटेशियम नाइट्रेट, आर्सेनिक, जिंक, फैरस सल्फेट आदि । ठोस पदार्थो में प्रत्यास्थता, कठोरता, दृढ़ता, असंपीड्यता, विद्युत व ऊष्मीय चालकता आदि गुण पाये जाते हैं ।

1.3 क्रिस्टलों में आवर्तिता (Periodicity in Crystal)

ठोस पदार्थों के क्रिस्टल में अवयवी कण परमाणु, अणु या आयन एक नियमित क्रम में त्रिविमीय आवर्ती व्यूह में व्यवस्थित होते हैं । अवयवी कणों का यह विन्यास क्रिस्टल संरचना कहलाता है । एक आदर्श क्रिस्टल आकाश में अनन्त सदृश संरचना इकाईयों की पुनरावृत्ति से

बनता है । सरल क्रिस्टलों जैसे ताम्बा, चान्दी तथा क्षारीय धातुओं में सदृश इकाई एकल परमाणु होता है । अकार्बनिक क्रिस्टलों में सदृश इकाई अनेक परमाणुओं या अणुओं से बनी तथा प्रोटीन क्रिस्टल में इनकी संख्या 10000 तक होती है । सभी क्रिस्टलों की संरचना जालक द्वारा व्यक्त की जाती है । जालक (lattice) उन बिन्दुओं का आवर्ती व्यूह होता है, जिन पर जब परमाणुओं के समूह सम्बद्ध किये जाते हैं तो क्रिस्टल संरचना प्राप्त होती है । परमाणुओं के इस समूह को सुधार (basis) कहते हैं ।

1.3.1 जालक स्थानान्तरण सदिश (Lattice Translation vectors)

एक आदर्श क्रिस्टल मूलभूत स्थानान्तरण सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ व $\vec{c}$ से परिभाषित जालक पर व्यवस्थित परमाणुओं द्वारा इस प्रकार बना होता है कि परमाणुओं का समायोजन किसी बिन्दु $\vec{r}$ से देखने पर सभी प्रकार से ठीक वैसा ही दिखाई दे, जैसा कि अन्य बिन्दुओं से दिखाई देता हो,

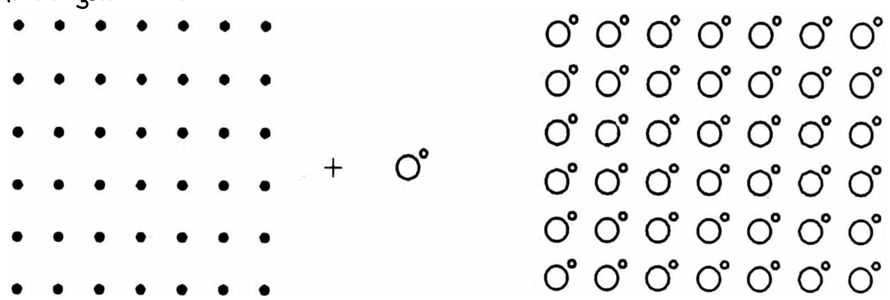
$$\vec{r}\,' = \vec{r} + m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} \qquad \text{... (1.1)}$$

जहां m, n व p स्वैच्छिक नियतांक हैं । पूर्णाको m, n व p के सभी मानों के लिए सेमी (1.1) द्वारा निर्देशित बिन्दुओं $\vec{r}\,'$ का समूह जालक को परिभाषित करता है । आकाश में बिन्दुओं के नियमित आवर्ती समायोजन को जालक कहते हैं । क्रिस्टल संरचना की प्राप्ति हेतु प्रत्येक जालक बिन्दु पर परमाणु या परमाणुओं के समूह का आधार नियमित रूप से जमाया जाता है । गणितीय रूप से

जालक + आधार = क्रिस्टल संरचना

चित्र 1.1 में दो भिन्न आयनों के समूह वाले आधार की प्रत्येक जालक बिन्दु पर नियमित पुनरावृत्ति से प्राप्त क्रिस्टल संरचना को दर्शाया गया है ।

जालक तथा स्थानान्तरण सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ व $\vec{c}$ अभाज्य (primitive) कहलाते हैं, यदि किन्हीं दो बिन्दुओं $\vec{r}$ व $\vec{r}\,'$



(अ) (ब) (स)

चित्र 1.1 (अ) आधार जालक (ब) दो भिन्न आयनों वाला आधार

(स) आधार बिन्दुओं को प्रत्येक जालक बिन्दु पर नियमित व्यवस्थित करने प्राप्त क्रिस्टल संरचना

से देखे जाने पर परमाणुओं का समायोजन. m, n व p पूर्णाकों के लिए सभी (1.1) द्वारा उचित मानों के लिए, एक समान दिखाई दे । हम सामान्यत: क्रिस्टल अक्षों को

परिभाषित करने के लिए अभाज्य स्थानान्तरण सदिशों को प्रयुक्त करते हैं, यद्यपि सरल होने की स्थिति में अविभाज्येतर (non-primitive) क्रिस्टल अक्षों का उपयोग भी किया जा सकता है। क्रिस्टल $\vec{a}$, $\vec{b}$ व $\vec{c}$ एक समान्तर षटफलक की तीन आसन्न भुजाओं को निर्मित करते हैं। यदि जालक बिन्दु समान्तर षटफलक के केवल कोनों पर स्थित हों, तो इसे अभाज्य समान्तर षटफलक (primitive parallopiped) कहते हैं ।

1.3.2 आधार और क्रिस्टल संरचना (The basis and the crystal structure)

प्रत्येक जालक बिन्दु से सम्बद्ध परमाणुओं का आधार होता हैं । प्रत्येक आधार संरचना, समायोजन तथा अभिविन्यास में एक समान होता है । चित्र 1.1 में दर्शाये अनुसार प्रत्येक जालक बिन्दु पर आधार जोड़ने पर क्रिस्टल संरचना प्राप्त होती है । चित्र (अ) में जालक बिन्दु, (ब) में दो भिन्न आयनों या परमाणुओ वाला आधार तथा (स) में क्रिस्टल संरचना को दिखाया गया है, जिसमें बिन्दुओं (dots) को छोड़ दिया गया है । आधार में न्यूनतम एक परमाणु धातुओं व निष्फिय गैसों में होता है, लेकिन ऐसी संरचनाएं (जैसे प्रोटीन) होती हैं, जिनके आधार में परमाणुओं की संख्या 1000 या उससे भी अधिक हो सकती है ।

1.4 अभाज्य कोष्ठिका (Primitive cell)

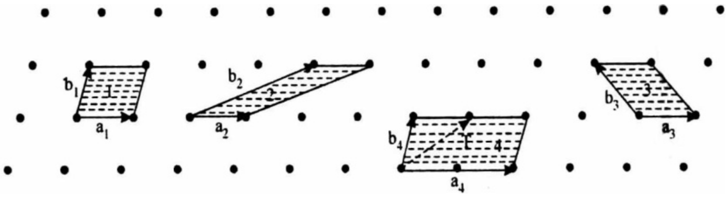
जालक तथा स्थानान्तरण सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ व $\vec{c}$ अभाज्य कहलाते हैं, यदि किन्हीं दो बिन्दुओं $\vec{r}$ व $\vec{r}\,'$ के सापेक्ष देखने पर क्रिस्टल में परमाणु विन्यास एक समान दिखाई दे तथा पूर्णाकों. m, n व p के लिए सेमी. (1.1) द्वारा निर्देशित जालक स्थानान्तरण संक्रिया को परिभाषित करे, जहां क्रिस्टल स्थानान्तरण सदिश

$$\vec{T} = \vec{r}\,' - \vec{r} + m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} \qquad ...(1.2)$$

कोई भी दो जालक बिन्दुओं को आपस में जोड़ता है ।

अभाज्य सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ से बनने वाला समान्तर षटफलक (parallopiped) अभाज्य कोष्ठिका कहलाता है । (देखिये चित्र 1.2 (ब)) । अभाज्य कोष्ठिका एक प्रकार की कोष्ठिका (cell) या एकक कोष्ठिका (unit cell) होती है । कोष्ठिका के उपयुक्त क्रिस्टल स्थानान्तरण संक्रिया द्वारा सम्पूर्ण आकाश भर जाता है ।

एक अभाज्य कोष्ठिका न्यूनतम आयतन वाली कोष्ठिका या सेल होती है, जिसकी त्रिविभीय आकाश में बार-बार पुनरावृत्ति करने पर क्रिस्टल संरचना प्राप्त होती है।

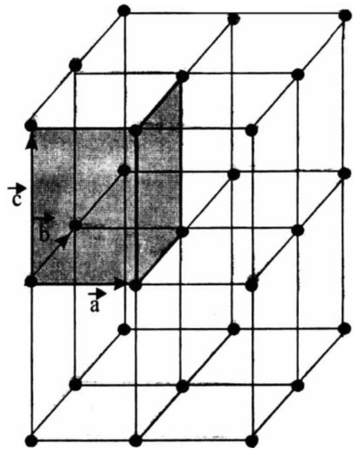


चित्र 1.2 (अ) द्विमीय आकाश में आकाश जालक के जालक बिन्दु

किसी दिये गये जालक के लिए अभाज्य अक्षों व अभाज्य कोष्ठिका के चयन के अनेक तरीके हो सकते हैं ।

इन सभी चयन विधियों में अभाज्य आधार में परमाणुओं की संख्या समान होती है । प्रति अभाज्य कोष्ठिका में एक जालक बिन्दु का घनत्व होता है ।

चित्र 1.2 (अ) में द्वि-विमीय आकाश में जालक बिन्दु दर्शाये गये हैं । सदिशों $\vec{a}$ व $\vec{b}$ सभी युग्म जालक के स्थानान्तरण सदिश हैं । कोष्ठिकाओं 1, 2 व 3 में सदिश अभाज्य स्थानान्तरण हैं, जबकि कोष्ठिका 4 में सदिश $\vec{a}_4$ व $\vec{b}_4$ के पूर्णांक संयोजनों से जालक स्थानान्तरण सदिश $\vec{T}$ प्राप्त नहीं कर सकते । $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के शेष सभी युग्म जालक के अभाज्य स्थानान्तरण सदिश हैं । समान्तर चतुर्भुज 1, 2 व 3 सभी समान क्षेत्रफल के हैं तथा इनमें से हम किसी को भी अभाज्य कोष्ठिका के रूप में ले सकते हैं । समान्तर चतुर्भुज 4 का क्षेत्रफल अभाज्य कोष्ठिका का दुगना है लेकिन इसे एकक कोष्ठिका कह सकते हैं ।



चित्र 1.2 (ब) त्रिविम में आकाश जालक की अभाज्य कोष्ठिका

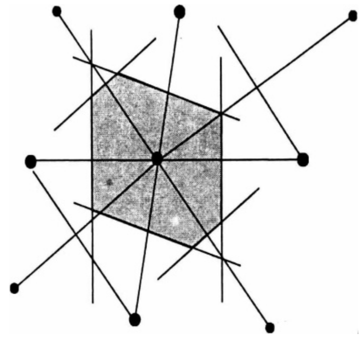
त्रिविम में अभाज्य स्थानान्तरण सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ द्वारा निर्मित समान्तर षटफलक अभाज्य कोष्ठिका को चित्र 1.2 (ब) में प्रदर्शित किया गया है । समान्तर षटफलक के आठ कोनों पर एक-एक जालक बिन्दु है, लेकिन प्रत्येक कोने का बिन्दु आठ कोष्ठिकाओं के मध्य साझेदारी करता है, जो कि वहां मिलती है । इस प्रकार एक अभाज्य कोष्ठिका में औसतन एक जालक बिन्दु होता है । अभाज्य कोष्ठिका के जालक बिन्दु से सम्बद्ध आधार को अभाज्य आधार कहते हैं ।

अक्षों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ से परिभाषित कोष्ठिका का आयतन, सदिश त्रिक गुणनफल के बराबर होता है

$$V_c = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} \qquad \text{... (1.3)}$$

1.4.1 विगनर-साइट सेल (Wigner - Seitz Cell)

अभाज्य कोष्ठिका की संरचना को विगनर - साइट द्वारा दी गई विधि द्वारा निम्न प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है



चित्र 1.3 विगनर-साइट अभाज्य कोष्ठिका

(i) सर्वप्रथम किसी दिये गये जालक बिन्दु को उसके निकटवर्ती सभी. बिन्दुओं से मिलाते हैं ।

(ii) इन रेखाओं के अभिलम्ब समद्विभाजक रेखाएं या तल खींचते हैं । इन तलो के मध्य घिरे न्यूनतम आयतन को विगनर-साइट अभाज्य कोष्ठिका कहते हैं ।

चित्र 1.3 में उक्त विधि के द्वारा निर्मित की गई विगनर - साइट कोष्ठिका को दर्शाया गया है । इस कोष्ठिका में भी केवल एक जालक बिन्दु होता है । इस कोष्ठिका द्वारा भी सम्पूर्ण आकाश को ठीक उसी प्रकार भरा जा सकता है, जैसे कि चित्र 1.2 में प्रदर्शित कोष्ठिकाओ के लिए होता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. जालक क्या है?

----

2. क्रिस्टल सरंचना को परिभाषित कीजिये ।

----

3. अभाज्य कोष्ठिका की परिभाषा दीजिये।

----

4. अभाज्य कोष्ठिका में जालक बिन्दुओ की सख्या कितनी होती है ?

----

5. अभाज्य कोष्ठिका व एकक कोष्ठिका में अन्तर समझाइये ।

1.5 प्रति एकक सेल जालक बिन्दुओं की संख्या (Number of lattice points unit cell)

किसी कोष्ठिका (cell) में अवयवी परमाणुओं का परमाणु भार, घनत्व व सेल का आयतन, हमें उस एकक सेल में परमाणुओं या जालक बिन्दुओं की संख्या की जानकारी प्रदान करते हैं ।

माना एकक कोष्ठिका का आयतन V(सेमी^{3} में) है तथा क्रिस्टल का घनत्व ρ (ग्राम /सेमी^{3}) है तो एकक सेल में द्रव्य का द्रव्यमान $V \times \rho$ होगा ।

यदि प्रति एकक सेल में परमाणुओं या अणुओं की संख्या n है व m एक परमाणु या अणु का द्रव्यमान हो तो

$$n \times m = V \times \rho$$

या $$n = \frac{V \times \rho}{m} \cdot \frac{N}{N}$$

या $$n = \frac{V \times \rho \times N}{M} \quad ...(1.4)$$

जहां N आवोगाद्रो संख्या व M परमाणु (या अणु) भार है ।

1.6 ब्रेवे जालक (Bravais lattice)

क्रिस्टल जालकों की संरचना में जालक स्थानान्तरण $\vec{T}$ तथा अन्य सममिति अवयव या संक्रियाएं समाहित होती हैं । किसी विशिष्ट सममिति संक्रिया में किसी जालक बिन्दु से पारित अक्ष के सापेक्ष $2\pi / n$ से घूर्णन देने पर जालक संरचना अपरिवर्तित रहती है, तो उस अक्ष को सममिति अक्ष कहते हैं । जहां n एक पूर्णांक है जिसका मान 1, 2, 3, 4 व 6 हो सकता है । लेकिन n का मान 5 नहीं हो सकता, क्योंकि पंचभुजों के आव्यूह (array) को जोड़कर सम्पूर्ण आकाश को नहीं भरा जा सकता ।

क्रिस्टल जालक की आवर्त्ती-स्थानान्तरण सममिति को तीन आधारभूत असमतलीय सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के रूप में परिभाषित कर सकते है । किसी बिन्दु $\vec{r}$ (m,n,p) जालक के किसी अन्य $\vec{r}$ (0,0,0) से निम्नलिखित रूपान्तरण से प्राप्त किया जा सकता है

$$\vec{r}\,(m,n,p) = \vec{r}\,(0,0,0) + m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$$

$$= \vec{r} + \vec{T} \quad ...1.5$$

इस प्रकार से निर्मित जालक को ब्रेवे जालक कहते हैं तथा $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ द्वारा छादित समान्तर षट्फलक को एकांक कोष्ठिका कहते हैं । सभी कोष्ठिकाएं (cells) सर्वसम आकृति व

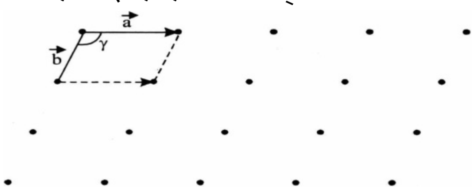
समान आयतन की होती हैं एवं उनमें जालक बिन्दुओं की संख्या भी समान होती है । सम्पूर्ण जालक ऐसे सुव्यवस्थित व संकुलित समान्तर षट्फलकों के समूह के तुल्य बना माना जा सकता है ।

ब्रेवे ने प्रदर्शित किया कि विभिन्न सममिति अवयवों या संक्रियाओं द्वारा द्वी-विमीय जालकों में 5 विभिन्न प्रकार की तथा त्रि-विमीय जालकों में 14 विभिन्न प्रकार की जालक संरचनाएं प्राप्त होती हैं, जिन्हें ब्रेवे जालक कहते हैं ।

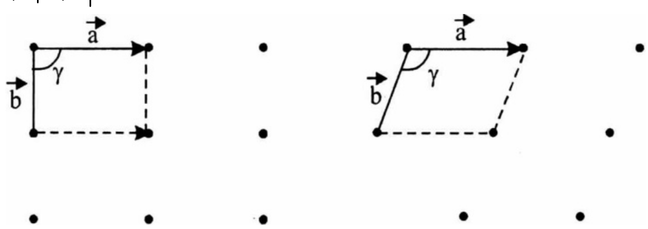
1.6.1 द्वि-विमीय ब्रेवे जालक (Two dimensional Bravais lattice)

असीमित संख्या में सम्भावित जालक हो सकते हैं, क्योंकि प्राकृतिक रूप जालक स्थानान्तरण सदिशों $\vec{a}$ व $\vec{b}$ की लम्बाईयों व उनके मध्य कोण θ पर कोई प्रतिबंध नहीं है । इस प्रकार प्राप्त सामान्य जालक को तिर्यक जालक (Oblique lattice) कहते हैं और यह किसी जालक बिन्दु के सापेक्ष डवल π और 2π के घूर्णन के लिए ही निश्चर है ।

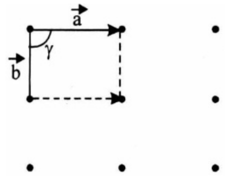
लेकिन तिर्यक प्रकार के विशिष्ट जालक $\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}$,या $\frac{2\pi}{6}$ परावर्तन प्रतिबिम्ब के अन्तर्गत निश्चर हो सकते हैं । इस प्रकार हम $\vec{a}$ व $\vec{b}$ पर प्रतिबंध लगाकर नये जालकों की रचना करते हैं, जो कि इन नये एक या अधिक घूर्णनों के सापेक्ष निश्चर हों । इस प्रकार चार विभिन्न प्रकार के प्रतिबंधों के द्वारा चार विशिष्ट प्रकार के जालक प्रकार प्राप्त होते हैं । अत: द्वि-विमीय आकाश में पांच भिन्न प्रकार के जातक होते हैं, एक तिर्यक जालक (Oblique lattice) जिसे चित्र 1.4 (अ) में दर्शाया गया है तथा चार विशिष्ट जालक जिन्हें चित्र 14 (ब), (स), (द), (य) में दर्शाया गया है । इन्हें हम पांच द्वि-विमीय ब्रेवे जालक कहते हैं ।



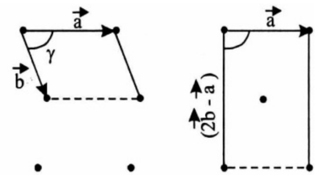
(अ) तिर्यक जालक $|\vec{a}|\#|\vec{b}|; \gamma =$ स्वैच्छिक



(ब) वर्ग जालक : $|\vec{a}|\#|\vec{b}|; \gamma = 90^\circ$ (स) षट कोणीय जालक :$|\vec{a}|\#|\vec{b}|; \gamma = 120^\circ$



(द) आयताकार जालक : $|\vec{a}|\#|\vec{b}|; \gamma = 90^\circ$



(य)केन्द्रीत आयताकर जालक : (अभाज्य कोष्ठिका तथा अविभाज्येटर सेल में

$|\vec{a}|\#|\vec{b}|; \gamma = 90^\circ$

$|\vec{a}|\#|\vec{b}|; \gamma = 90^\circ)$

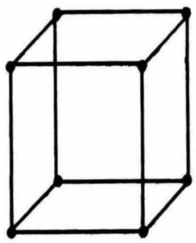
चित्र तक स्थानांतरण (य) से (ब) सामान्य जालक तथा शेष (अ) : ब्रेवे जालक 5 द्‌विभीय 1.4 सदिशों की लंबाई पर प्रतिबंध वसममिति संक्रियाओं द्‌वारा प्राप्त विशिष्ट जालक

1.6.2 त्रिविमीय बेबे जालक (Three dimensional Bravais lattices)

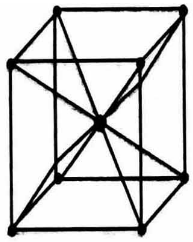
त्रिविम क्रिस्टलों में जालक बिन्दुओं को 14 विभिन्न (एक सामान्य व 13 विशिष्ट) जालक प्रकारों में व्यवस्थित किया जा सकता है । इस प्रकार 14 विभिन्न ब्रेवे जालक प्राप्त होते हैं, जिन्हें 7 क्रिस्टल निकायों में वर्गीकृत कर चित्र 1.5 में व सारणी 11 में वर्णित किया गया है । सामान्य जालक त्रिनताक्ष (triclinic) प्रकार का होता है । क्रिस्टल निकायों में वर्गीकरण क्रिस्टलीय अक्षों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तथा उनके मध्य कोण α, β, γ द्‌वारा पारिभाषित होते हैं ।a, b, c के परिमाण को जालक प्राचल कहते हैं । क्रिस्टलीय अक्षों व उनके मध्य कोण को चित्र 1.6 में दर्शाया गया है । सात क्रिस्टल जालक निकायों का संक्षिप्त वर्णन निम्न प्रकार है-

(i) घनीय (cubic) :

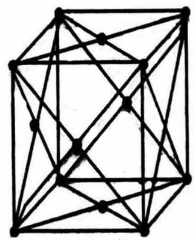
इस निकाय में एकक कोष्ठिका के तीनों अक्षों के परिमाण तथा उनके मध्य कोण समान होते हैं, अर्थात् a=b=c तथा $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$ होते हैं । घनीय संरचना में तीन प्रकार के जालक होते है - सरल घनीय (simple cubic) या अभाज्य (primitive P), अन्त केन्द्रित घनीय (body centered cubic) I; तथा फलक केन्द्रित घनीय (face centred cubic)F।



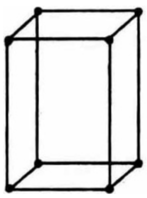
सरल घनीय (P)

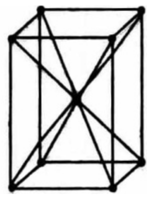


अन्तः केन्द्रित घनीय I

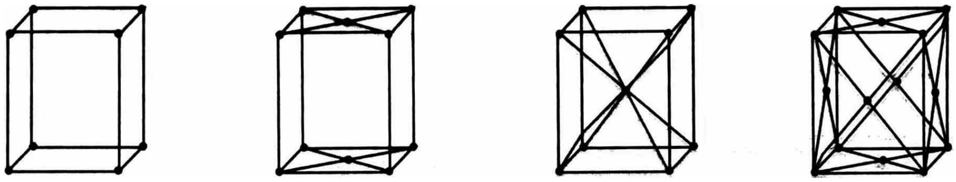


फलक केन्द्रित घनीय F

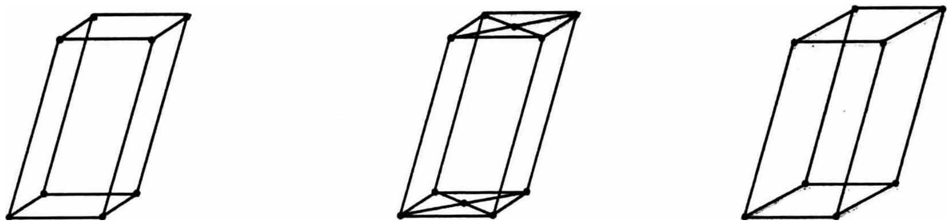




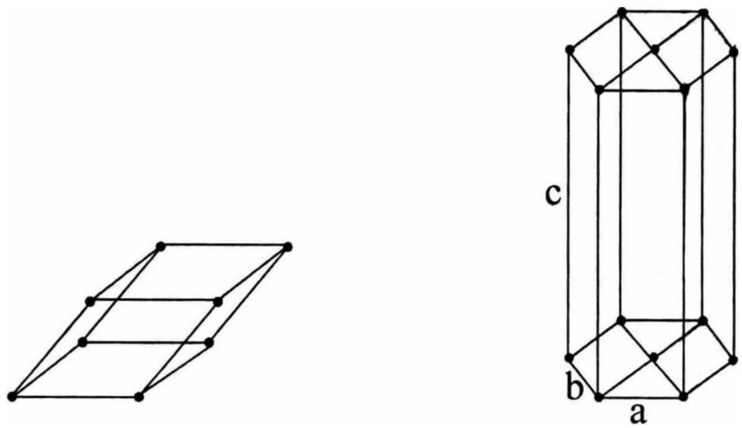
सरल द्विसमलम्बाक्ष अभाज्य P   अन्तः द्विसमलम्बाक्ष I



विषमलंम्बाक्ष सरल अभाज्य P आधारकेन्द्रित विषम लम्बाक्ष C अन्तः केन्द्रित लम्बाक्ष I फलक केन्द्रित विषम लम्बाक्ष F

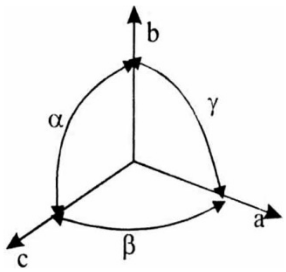


एकनताक्ष आभाज्य   P एकनताक्ष आधार केन्द्रित   C त्रिनताक्ष



समत्रिनताक्ष P   षटकोणीय P

चित्र 1.5 त्रिविभीय 14 ब्रेव जालक



चित्र 1.6 क्रिस्टलीय अक्षों के मध्य कोण

सारणी 1.1 त्रिविमीय 14 ब्रेवे जालक प्रकार

क्रम संख्या	क्रिस्टल निकाय	जालको संख्या	की जालक संकेत	एकक कोष्ठिका की अक्षीय लम्बाइयाँ	अंतरा अक्षीय कोण
1.	घनीय(cubic)	3	P या sc I या bcc	a=b=c	$\alpha = \beta = \gamma = 90^0$

			F या fcc		
2.	द्विसमलंबाक्ष (Tetragonal)	2	P,I	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^0$
3.	विषम लंबाक्ष (orthorhombic)	4	P,C,I,F	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^0$
4.	त्रिसमनताक्ष (Rhombohedral or Trigonal)	1	R व P	a=b=c	$\alpha = \beta = \gamma \neq 90^0$ < 120
5.	षट्कोणीय (Hexagonal)	1	P	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^0$ $\gamma = 120$
6.	एकनताक्ष (Monoclinic)	2	P,C	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \gamma = 90^0$ $\beta = 120$
7.	त्रिनताक्ष (Triclinic)	1	P	$a \neq b \neq c$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma$

(ii) द्विसमलम्बाक्ष (Tetragonal) :

इस निकाय में एकक कोष्ठिका के दो अक्षो के परिणाम समान होते है, तथा तीनों कोण समान होते है, अर्थात $a = b \neq c$ तथा $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$ होते है। इसमें केवल दो प्रकार के जालक होते है- अभाज्य (Primitive, P); अंत केंद्रीत (Body centered, I) ।

(iii) विषम लम्बाक्ष

इस निकाय में एकक कोष्ठिका के दो अक्षों के परिणाम समान नहीं होते है, तथा तीनों कोण समान होते है, अर्थात $a \neq b \neq c$; $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$ होते है। इसमें चार प्रकार के जालक होते है- अभाज्य (P); आधार केन्द्रित (base centered या C) अंत केंद्रीत (I) तथा फ़लक केन्द्रित (F)।

(iv) त्रिसमनताक्ष (Rhombohedral or Trigonal):

इस निकाय के तीनों अक्षों के परिणाम समान तथा तीनों कोण भी समान होते है, अर्थात $a = b = c$ तथा $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^0$ लेकिन <120^0 होते है। इसमें केवल एक अभाज्य (P) जालक होता है ।

(v) षटकोणीय (Hexagonal):

इस निकाय में केवल दो अक्षों के परिमाण तथा दो कोण समान होते है, अर्थात् $a \neq b \neq c$ तथा

$\alpha = \beta = \gamma = 90^0 \neq \beta$ होते हैं । इसमें केवल एक अभाज्य जालक (P) होता है ।

(vi) एकनताक्ष (Monoclicnic)

इस निकाय में तीनों अक्षों के परिमाण असमान होते हैं तथा α व γ कोण समान होते हैं, अर्थात् $a \neq b \neq c$ तथा $\alpha = \beta = \gamma = 90^0 \neq \beta$ होते हैं । इस निकाय में दो जालक अभाज्य (P) तथा आधार केन्द्रित (C)होते है।

(vii) त्रिनताक्ष (Triclinic) :

यह सामान्य प्रकार का जालक है, जिसमें सभी अक्षों के परिमाण व उनके मध्य कोण असमान होते हैं । अर्थात् $a \neq b \neq c$ तथा $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ तथा इसमें केवल एक अभाज्य (P) जालक होता है ।

1.7 मिलर सूचकांक (Miller Indices)

किसी क्रिस्टल तल की स्थिति एवं अभिविन्यास को उसके तल में स्थित तीन अरेखीय (non-collinear) बिन्दुओं द्वारा व्यक्त किया जा सकता है । यदि प्रत्येक बिन्दु क्रिस्टल अक्षों पर स्थित हो तो बिन्दुओं की स्थितियों को जालक नियतांकों के रूप में व्यक्त कर तल की स्थिति को व्यक्त किया जा सकता है । उदाहरण के लिए यदि मूल बिन्दु के सापेक्ष बिन्दुओं के निर्देशानुसार (3,0,0), (0,2,0), (0,0,2) हों तो समतल की स्थिति को तीन अंकों 3, 2, 2 द्वारा व्यक्त कर सकते हैं । लेकिन क्रिस्टल संरचना के विश्लेषण में किसी समतल के अभिविन्यास को अधिक सुविधाजनक रूप से व्यक्त करने के लिए तीन सूचकांको को निर्धारित किया जाता है, जिन्हें मिलर सूचकांक कहते हैं । किसी क्रिस्टल तल के मिलर सूचकांकों को निम्न नियमों द्वारा ज्ञात किया जाता है :-

1. क्रिस्टल अक्षों $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ पर जालक नियतांकों के पदों में अन्त: खण्ड (intercepts) ज्ञात करते है । अक्षें अभाज्य (primitive) या विभाज्य (non- primitive) हो सकती हैं ।
2. इन गुणांकों के व्युत्क्रम (reciprocal) ज्ञात करते हैं और प्राप्त भिन्नों के हर के लघुत्तम समापवर्तक (L.C.M) से गुणा कर पूर्णाकों में परिवर्तित कर देते हैं । प्राप्त पूर्णाकों (h, k, l) को मिलर सूचकांक कहते हैं ।

उदाहरण के लिये यदि एक समतल जिसके अक्षों पर अन्त: खण्ड 3, 2, 2 हों, के व्युत्क्रम $\frac{1}{3},\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{2}$ है । हर के मानों का लघुत्तम समापवर्तक 6 है, जिससे गुणा करने पर 2, 3, 3 प्राप्त होता है । अत: इस समतल के

मिलर सूवकांक (2, 3, 3) देखिये चित्र 1.7 में । घनीय क्रिस्टल में कुछ महत्वपूर्ण तलों के सूचकांको को चित्र 1.8 में प्रदर्शित किया गया है।

मिलर सूचकांकों की कुछ विशेषताएं :-

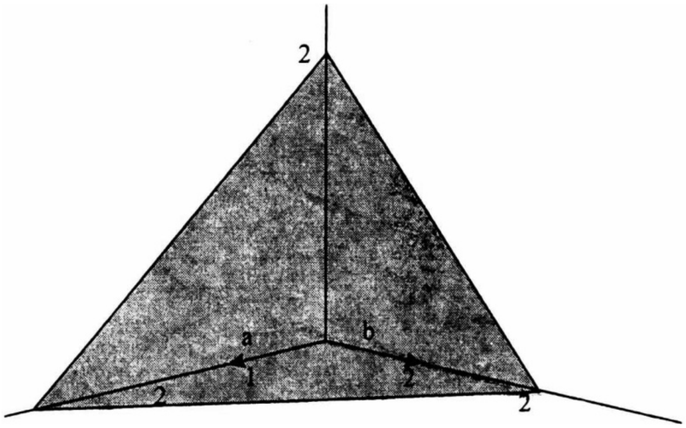
(i) सूचकांक (h,k,l) एकल तल या समान्तर तलों के समूह को प्रदर्शित कर सकते हैं ।

(ii) यदि कोई तल मूल बिन्दु की ऋणात्मक ओर अन्त: खण्ड काटता है, तो उसके संगत सूचकांक ऋणात्मक होता है और उसे रेखिका (bar) द्वारा व्यक्त करते हैं $(h,\vec{k},l)$ ।

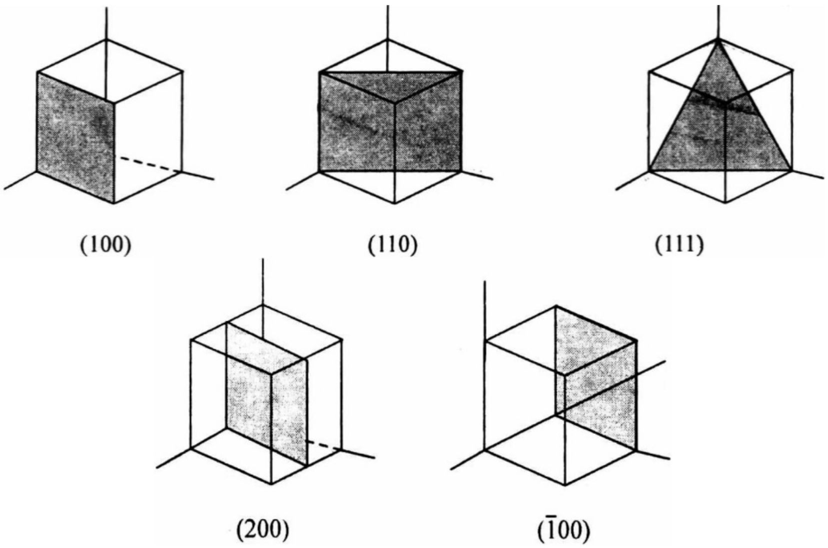
इस प्रकार घनीय क्रिस्टल में घन के फलकों के सूचकांक (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), ($\vec{1}$,0,0,) (0, $\vec{1}$,0) और (0,0, $\vec{1}$) हैं ।

(iii) जब कोई तल किसी विशिष्ट अक्ष के समान्तर होता है, अर्थात ∞ मान का अन्त: खण्ड काटता है तो 0 संगत सूचकांक शून्य (0) होता है ।

(iv) यदि किन्हीं दो तलों के मिलर सूचकांक समान अनुपात में हैं, तो वे तल परस्पर समान्तर होते हैं ।



चित्र 1.7 मिलर सूचकांक (2,2,3,) वाला समतल जो कि क्रिस्टलीय अक्षों a,b,c, पर 3a, 2b, 2c अन्त: खण्ड काटता है।



चित्र 1.8 क्रिस्टल में कुछ तलों के मिलर सूचकांक

1.8 अन्तरातल अन्तराल (Spacing of planes in crystal lattice or Interplanar spacing)

किसी तल समूह, जिनके मिलर सूचकांक (h,k,l) हैं, के दो क्रमागत तलों के मध्य अन्तराल या लम्बवत् दूरी d ज्ञात करने के लिए किसी एक जालक बिन्दु को मूल बिन्दु 0 लेते हैं । 0 से क्रिस्टलीय $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ गुजरती हैं ।

अब क्रिस्टल तल जिसके सूचकांक (h,k,l) हैं, के द्वारा इन अक्षों पर काटे गये अन्त: खण्ड $\frac{a}{h},\frac{b}{k},\frac{c}{l}$ ज्ञात करते हैं । मूल बिन्दु 0 से इस तल पर अभिलम्ब OP डालते हैं, जिसकी लम्बाई d ही दो क्रमागत तलों के मध्य दूरी है, क्योंकि 0 से एक निर्देश तल गुजरता है । चित्र 1.9 में दर्शाये अनुसार यदि अभिलम्ब OP तीनों अक्षों से क्रमशः α , β व γ कोण बनाये तो

$$d = OP = \frac{a}{h}\cos\alpha = \frac{b}{k}\cos\beta = \frac{c}{l}\cos\gamma \qquad ...(1.6)$$

दिक् कोज्याओं के नियमानुसार

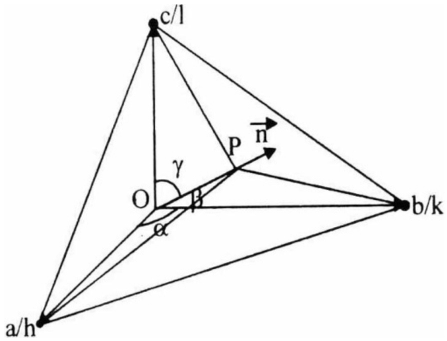
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad ....(1.7)$$

सेमी (1.6) से $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ के मान रखने पर

$$d^2\left(\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}\right)=1$$

या
$$d^2 = \frac{1}{\left(\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}\right)}$$

अत: (h,k,l) सूचकाकों वाले दो क्रमागत तलों के मध्य अन्तरातल अन्तराल



चित्र 1.9 (h,k,l,) तल के अभिलम्ब $\vec{n}$ के दिककोण

$$d^2 = \frac{1}{\left(\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}\right)^{1/2}} \qquad .....(1.8)$$

उदाहरणस्वरूप एक घनीय क्रिस्टल में a=b=c

$$d = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \quad .....(1.9)$$

इसी प्रकार अन्य क्रिस्टलीय जालकों के लिए भी सेमी (1.8) द्वारा सकते हैं ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

6. ब्रेवे जालक क्या हैं, व इनकी संख्या कितनी होती है?

----

7. मिलर सूचकांक क्या हैं?

----

8. अन्तरातल अन्तराल क्या है? एक घनीय क्रिस्टल में इसका मान कितना होता है?

उदाहरण 1.1 ताम्बे की fcc संरचना के लिए जालक नियतांक 3.615 $\mathring{A}$ है । (1,1,1) मिलर सूचकांक वाले समतलों के मध्य दूरी ज्ञात करो ।

हल : जालक नियतांक a=3.615 $\mathring{A}$

मिलर सूचकांक h=1; k=1; l=1

समतलों के मध्य अन्तरातल दूरी d= $d = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$

या $$a = \frac{3.615}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3.615}{\sqrt{3}} \mathring{A}$$

या $$a = \frac{3.615}{1.732} \mathring{A} = 2.09 \mathring{A}$$

उदाहरण 1.2 ताम्बे की क्रिस्टलीय संरचना में जालक नियतांक 3.62 $\mathring{A}$ है । प्रति एकक कोष्ठिका में परमाणुओं की संख्या ज्ञात करो । ताम्बे का परमाणु भार 63.54 तथा घनत्व 8.9 x 10^3 किग्रा मी' है ।

हल : a=3.62 $\mathring{A}$; M=63. 54 ग्राम/ मोल ρ =8.9 x 10^3 kg/ m^3

एकक कोष्ठिका आयतन $V=a^3 = (3.62 \times 10^{-10})^3$

अनुच्छेद 1.5 से प्रति एकक कोण जालक बिन्दुओं या परमाणुओं की संख्या

$$n=\frac{V\times\rho\times N}{M}$$

$$=\frac{(3.62x10^{-10})^3\times 8.9\times 10^3\times 6\times 10^{23}}{63.54\times 10^{-3}}$$

$= 4$

उदाहरण 1.3 उन समान्तर तलों के मिलर सूचकांक ज्ञात कीजिये जो x व y अक्षो को 4a : 3b के अनुपात में काटते हैं तथा z - अक्ष के समान्तर हैं । जहां a, b, c अभाज्य सेल के जालक है ।

हल : चूंकि तल z- अक्ष के समान्तर है इसलिए z - अक्ष पर इसके द्वारा काटे गये अन्त: खण्ड की लम्बाई अनन्त होगी ।;

अत: $pa:qb:rc=4a:3b:\infty c$

या $p:q:r=4:3:\infty$

या $\frac{1}{p}:\frac{1}{q}:\frac{1}{r}=\frac{1}{4}:\frac{1}{3}:\frac{1}{\infty}$

=3:4:0

अत: समतल के मिलर सूचकांक (h,k,l) के मान (3,4,0) हैं ।

1.9 सारांश (Summary)

- ठोस पदार्थो को संरचना के आधार पर क्रिस्टलीय तथा अक्रिस्टलीय पदार्थो में बांटा जा सकता है ।
- ठोस पदार्था के क्रिस्टल में अवयवी कण परमाणु, अणु या आयन एक नियमित क्रम में त्रिविमीय आवर्ती व्यूह में व्यवस्थित होते है । अवयवी कणों का यह विन्यास क्रिस्टल संरचना कहलाता है ।
- आकाश में बिन्दुओं के नियमित आवर्ती समायोजन को जालक कहते हैं । जब जालक बिन्दुओं पर परमाणु या परमाणुओं के समूह का आधार नियमित रूप से जमाया जाता है, तो क्रिस्टल संरचना प्राप्त होती है ।
- गणितीय रूप में जालक + आधार= क्रिस्टल संरचना ।
- एक अभाज्य कोष्ठिका न्यूनतम आयतन वाली कोष्ठिका या सेल होती है, जिसकी त्रिविमीय आकाश में बार-बार पुनरावृत्ति करने पर क्रिस्टल संरचना प्राप्त होती है ।
- प्रति अभाज्य कोष्ठिका में एक जालक बिन्दु का घनत्व होता है ।
- किसी कोष्ठिका का आयतन $V=(\vec{a}\times\vec{b}\times\vec{c})$ होता है ।
- अभाज्य कोष्ठिका को विगनर -साइट विधि द्वारा भी प्राप्त किया जा सकता है ।
- द्विविमीय जालक में 5 विभिन्न प्रकार के ब्रेवे जालक होते है ।

- त्रिविमीय जालक में 14 विभिन्न प्रकार के ब्रेवे जालक होते हैं, जिन्हें सात समूहों में वर्गीकृत किया जाता है ।
- किसी क्रिस्टल में किसी समतल के अभिविन्यास को मिलर सूचकांकों द्वारा व्यक्त किया जाता है ।
- (h,k,l) मिलर सूचकांकों वाले तल समूहों के मध्य अन्तरातल अन्तराल का मान d $= \frac{1}{\left(\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}\right)^{1/2}}$ होता है ।

1.10 शब्दावली (Glossary)

अन्तः केन्द्रित	Body centred
अभाज्य कोष्ठिका	Primitive cell
अन्तरातल अन्तराल	Interplannar distance
आधार	Basis
आधार केन्द्रित	Base Centred
आवर्तिता	Periodicity
क्रिस्टलीय अक्षें	Crystal axes
जालक	Lattice
फलक केन्द्रित	Face centred
मिलर सूचकांक	Miller indices
स्थानान्तरण सदिश	Translation vector

1.11 संदर्भ ग्रंथ (Reference books)

C. Kittel	introduction to solid state physics	Wiley Eastern Ltd.
John P Mckelvey	Solid state and semiconductor Physics	A Harper international edition
S. O. Pillai	Solid state Physics	New Age Publications New Delhi
Saxena, Gupta and Saxena	Fundamental of solid state Physics	Pragati Prakashan Meerut
एस एस रावत	ठोस अवस्था भौतिकी	कालेज बुक हाउस, जयपुर

1.12 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer of self assessment questions)

1. जब प्रत्येक जालक बिन्दु के संगत एक या एक से अधिक परमाणुओं या आयनों के समूह का आधार नियमित रूप से जमाया जाता है तो क्रिस्टल संरचना प्राप्त होती है । जालक+आधार=क्रिस्टल संरचना
2. आकाश में बिन्दुओं के नियमित आवर्ती समायोजन को जालक कहते हैं ।
3. न्यूनतम आयतन की कोष्ठिका जिसकी त्रिविम में पुनरावृत्ति से क्रिस्टल संरचना प्राप्त होती है, अभाज्य कोष्ठिका कहते हैं ।
4. एक ।
5. एक अभाज्य कोष्ठिका में केवल एक जालक बिन्दु होता है, जबकि एकक कोष्ठिका में एक से अधिक जालक बिन्दु हो सकते हैं । एकक कोष्ठिका एक अभाज्य कोष्ठिका हो सकती है, लेकिन सभी अभाज्य कोष्ठिकाएं, एकक कोष्ठिका नहीं होती ।
6. क्रिस्टल संरचना में जालक बिन्दुओं पर सममिति अवयव प्रतिबंध प्रयुक्त करने पर प्राप्त विभिन्न प्रकार की जालक संरचनाओं को ब्रेवे जालक कहते हैं । द्विविमीय तथा त्रिविमीय जालक बिन्दुओ की संख्या क्रमश: 5 व 14 होती है ।
7. क्रिस्टल तलों के अभिविन्यास को व्यक्त करने के लिए प्रयुक्त सूचकांकों को मिलर सूचकांक कहते है । विलोमत: मिलर सूचकांक ज्ञात होने पर क्रिस्टल तल की स्थिति व क्रिस्टलीय अक्षों पर इसके अन्त: खण्ड ज्ञात कर सकते हैं ।
8. क्रिस्टल संरचना में तल समूहों के मध्य अन्तराल के मान को अन्तरातल अन्तराल कहते हैं । घनीय जालक में इसका मान $d = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}}$ होता है ।

1.13 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type question)

1. क्या सममिति संक्रिया के लिए किसी जालक बिन्दु से पारित अक्ष के सापेक्ष $2\pi/5$ या $2\pi/7$ का घूर्णन सम्भव है? (नहीं)
2. एक अभाज्य कोष्ठिका में जालक बिन्दुओं की संख्या कितनी होती है?
3. एक समतल x व y अक्षों के समान्तर है, इसके मिलर सूचकांक क्या होते हैं?
4. yव z अक्षों के समान्तर समतल के मिलर सूचकांक क्या होते है?
5. क्रिस्टल जालक, आधार तथा क्रिस्टल संरचना को परिभाषित कीजिये ।
6. 14 त्रिविमीय ब्रेवे जालकों को कितने समूहों में वर्गीकृत किया गया है?

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

7. क्रिस्टल संरचना में उपयोग आने वाले निम्नलिखित पदों को समझाइये -
   (i) जालक (ii) आधार (iii) एकक कोष्ठिका (iv) अभाज्य कोष्ठिका

8. ब्रेवे जालक क्या हैं? द्विविमीय व त्रिविमीय ब्रेवे जालकों को वर्गीकृत कीजिये ।

9. मिलर सूचकांक क्या है? क्रिस्टल में किसी समतल के मिलर सूचकांक ज्ञात करने की विधि समझाइये।

10. सिद्ध करो कि एक क्रिस्टल में (h,k,l)मिलर सूचकांकों वाले समतलों के मध्य अन्तरातल अन्तराल का मान

$$d=\left(\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$ होता है ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

11. किसी एकक सेल में अक्षीय लम्बाइयां व अन्तर आक्षीय कोण निम्न प्रकार हैं -

(i) $a=b=10.73\overset{\circ}{A}, c=14.3\overset{\circ}{A}$

$\alpha=\beta=90^0$ तथा $\gamma=120^o$

(ii) $a=10.8\overset{\circ}{A}, b=9.47\overset{\circ}{A}, c=5.2\overset{\circ}{A}$

$\alpha=41^0, \beta=83^0$ तथा $\gamma=93^0$

इनसे सम्बन्धित जालक संरचना को बताइये ।

(**उत्तर** (i) षटकोणीय, (ii) त्रिनताक्ष)

12. किसी क्रिस्टल के एक तल द्वारा क्रिस्टलीय अक्षों पर 1.49, 2.58 और 1.25 $\overset{\circ}{A}$ प्रतिच्छेद प्राप्त होते है । यदि क्रिस्टलीय अक्षों के सदिंदों की लम्बाइयां a, b व c के मान क्रमश: 3.01, 5.12 तथा 4.8 $\overset{\circ}{A}$ हों तो उस तल के मिलर सूचकांक ज्ञात कीजिये। (**उत्तर.** (1,1,2)

13. जालक नियतांक a वाले एक घनीय जालक में (1,0,1), (1,1,0) व (1,1,2) तलों के मध्य अन्तराल ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर :** $\left[\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{6}}\right]$)

इकाई-2

क्रिस्टल संरचना

(Crystal Structure)

इकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य

2.1 प्रस्तावना

2.2 कतिपय सरल व उभयनिष्ठ क्रिस्टल संरचनाएं

- 2.2.1 सरल घनीय संरचना
- 2.2.2 अन्त: केन्द्रित घनीय संरचना
- 2.2.3 फलक केन्द्रित घनीय संरचना
- 2.2.4 षटकोणीय सुसंकुलित संरचना

2.3 अन्य महत्वपूर्ण घनीय संरचनाएं

- 2.3.1 हीरे की संरचना
- 2.3.2 जिंक सल्फाइड संरचना
- 2.3.3 सोडियम क्लोराइड की संरचना
- 2.3.4 सीजियम क्लोराइड की संरचना
- 2.3.5 पेरोवस्काइट संरचना

2.4 व्युत्क्रम जालक

2.5 ब्रिलुवां क्षेत्र

- 2.5.1 सरल घनीय सरंचना के लिए व्युत्क्रम जालक व ब्रिलुवां क्षेत्र
- 2.5.2 अन्त: केन्द्रित घनीय सरंचना के लिए व्युत्क्रम जालक व ब्रिलुवां क्षेत्र
- 2.5.3 फलक केन्द्रित घनीय संरचना के लिए व्युत्क्रम जालक व ब्रिलुवां क्षेत्र

2.6 सारांश

2.7 शब्दावली

2.8 सन्दर्भ ग्रंथ

2.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

2.10 अभ्यासार्थ प्रश्न

2.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप -

- विभिन्न प्रकार की सरल क्रिस्टल संरचनाओं के बारे में जान सकेंगे;

- घनीय जालक में सरल घनीय, अन्त: केन्द्रित, फलक केन्द्रित क्रिस्टलों के बारे में जान सकेंगे;
- विभिन्न क्रिस्टल संरचनाओं में समन्वयन संख्या, जालक नियतांक, प्रति सेल में परमाणुओं की संख्या, संकुलन गुणांक व एकक कोष्ठिका का आयतन ज्ञात कर सकेंगे;।
- विभिन्न संरचनाओं के लिए अभाज्य कोष्ठिका को ज्ञात कर सकेंगे;
- विभिन्न जालकों के व्युत्क्रम जालकों को ज्ञात कर सकेंगे;
- विभिन्न जालकों के ब्रिलुवां क्षेत्र के बारे में जान सकेंगे ।

2.1 प्रस्तावना (Introduction)

इकाई 1 में आपने यह जाना कि क्रिस्टल संरचना का निर्माण किस प्रकार होता है और क्रिस्टल संरचना के सम्बन्ध में अनेक महत्वपूर्ण पदों का ज्ञान प्राप्त किया है । प्रथम इकाई में ही आपने अभाज्य कोष्ठिका के बारे में जानकारी प्राप्त की तथा विगनर साइट अभाज्य कोष्ठिका ज्ञात करने की विधि जानी है । इस इकाई में आप कतिपय सरल क्रिस्टल संरचनाओं का अध्ययन करेंगे । इस इकाई के अनुच्छेद 2.2 में घनीय क्रिस्टल के विभिन्न जालकों के लिए समन्वय संख्या, जालक नियतांक, प्रति एकक कोष्ठिका में परमाणुओं की संख्या तथा उनके लिए जालक नियतांक ज्ञात करेगें । अनुच्छेद 2.3 में आप कुछ महत्वपूर्ण घनीय संरचनाओं के बार में जानेगें । अनुच्छेद 2.4 में आप व्युत्क्रम जालक तथा अभाज्य स्थानान्तरण सदिश के रूप में व्युत्कम जालक के अभाज्य सदिश सम्बन्धों के बारे में अध्ययन करेगें । अनुच्छेद 2.5 में आप विगनर साइट सेल द्वारा परिभाषित ब्रिलुवां क्षेत्र का अध्ययन करेगें तथा एक विमीय व द्विविभीय आकाश में ब्रिलुवां क्षेत्र के निर्माण का अध्ययन करेगें । इसी अनुच्छेद में आप सरल घनीय (sc), अन्त: केन्द्रित घनीय (bcc) व फलक केन्द्रित घनीय (fcc) संरचनाओं के लिए व्युत्क्रम जालक व ब्रिलुवां क्षेत्र की जानकारी प्राप्त करेगें ।

2.2 कतिपय सरल व उभयनिष्ठ क्रिस्टल संरचनाएं (Some simple and common structures)

इस अनुच्छेद में आप अनेक पदार्थो की क्रिस्टल संरचना का अध्ययन करेंगे । सन्निकट विश्लेषण के लिए प्रत्येक परमाणु को एक परिमित त्रिज्या के गोले के रूप में मानते हैं और इन गोलों को एक उचित व स्थाई संरचना में सघन रूप से संकुलित कर क्रिस्टल संरचना प्राप्त होती है ।

2.2.1 सरल घनीय संरचना (simple cubic structure)

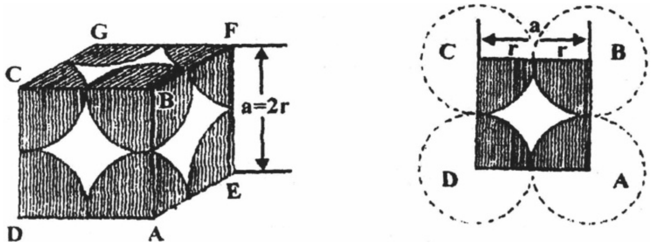
सरल घनीय संरचना की घनीय एकक कोष्ठिका में केवल कोनों पर परमाणु परस्पर एक दूसरे को स्पर्श करते हुए होते हैं, जैसा कि चित्र 2.1 में प्रदर्शित किया गया है । केवल पोलोनियम (Po) विशिष्ट ताप पर यह संरचना प्रदर्शित करता है ।

प्रति एकक कोष्ठिका परमाणुओं की संख्या -

कोनों पर स्थित प्रत्येक परमाणु आठ एकक कोष्ठिकाओं में अपनी साझेदारी रखता है, अत: प्रत्येक कोष्ठिका में एक परमाणु का योगदान $\frac{1}{8}$ भाग होता है । चूंकि प्रत्येक एकक कोष्ठिका में आठ कोनों पर कुल आठ परमाणु होते हैं, अत: प्रति एकक कोष्ठिका में परमाणुओं की संख्या $8\times\frac{1}{8}=1$

समन्वयन संख्या (Coordination number)

किसी परमाणु के सभी ओर स्थित निकटतम परमाणुओं की कुल संख्या को क्रिस्टल जालक संरचना की समन्वयन संख्या कहते हैं । घनीय संरचना में प्रत्येक परमाणु समान दूरी पर 6 निकटतम परमाणुओं से घिरा हुआ होता है, अत: सरल घनीय (sc) संरचना की समन्वयन संख्या 6 होती है ।



(अ) एकक कोष्ठिका (ब) किसी फलक में परमाणुओं का विन्यास

चित्र 2.1 सरल घनीय (sc) संरचना

जालक नियतांक (Lattice constant)

यदि परमाणु की प्रभावी त्रिज्या r हो तो चित्र 2.1 के अनुसार दो परमाणुओं के मध्य दूरी a=2r को जालक नियतांक कहते हैं ।

एकक कोष्ठिका में परमाणुओं का आयतन (volume of the atom in the unit cell)

एकक कोष्ठिका में परमाणुओं का आयतन

V_a = एकक कोष्ठिका में परमाणुओं की संख्या x परमाणु का आयतन

या $$V_a = 1\times\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3$$

$$=\frac{\pi}{6}a^3 \qquad ....(2.1)$$

संकुलन गुणांक (Packing fraction)

एकक कोष्ठिका के आयतन के सापेक्ष, एकक कोष्ठिका में परमाणुओं के आायतन को संकुलन गुणांक कहते हैं ।

अतः संकुलन गुणाक(PF) = एकक कोष्ठिका में परमाणुओं का आयतन/एकक कोष्ठिका का आयतन = $\left(\frac{V_a}{V_c}\right)$

$$\left(\frac{\pi a^3 / 6}{a^3}\right) = \frac{\pi}{6} \qquad ....(2.2)$$

$$=0.52 \text{ या } 52\%$$

संकुलन गुणांक का मान कम होने के कारण यह विरल संकुलित संरचना (loosely packed structure) कही जाती है ।

2.2.2 अन्त केन्द्रित घनीय संरचना (Body centered cubic (bcc) structure)

इस संरचना में एकक घनीय कोष्ठिका के आठ कोनों पर परमाणुओं के अतिरिक्त केन्द्र पर भी एक परमाणु होता है, जो सभी कोनों पर स्थित आठ परमाणुओं को स्पर्श करते हुए होता है, जिसे चित्र 2.2 में प्रदर्शित किया गया है । लीथियम Li, सोडियम Na, पोटेशियम K, क्रोमियम Cr, मोलबडेनियम Mo आदि ।

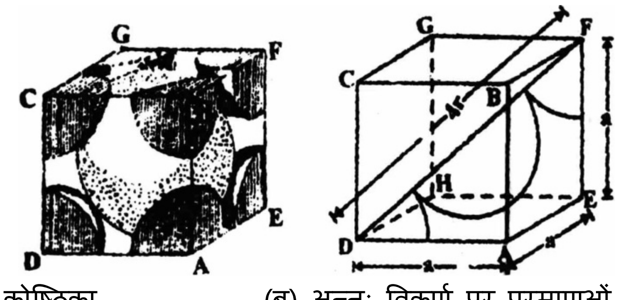
प्रति एकक कोष्ठिका परमाणुओं की संख्या (Number of atoms per unit cell)

इस संरचना में कोनों पर स्थित प्रत्येक परमाणु आठ कोष्ठिकाओं में भागीदारी रखता है, अत: प्रति कोष्ठिका कोने पर स्थित प्रत्येक परमाणु का योगदान $\frac{1}{8}$ होता है । जबकि केन्द्र पर स्थित परमाणु पूर्णतया केवल एक ही कोष्ठिका में स्थित होता है ।

अत: प्रति कोष्ठिका में जालक बिन्दुओं या परमाणुओं की संख्या $\left(8\times\frac{1}{8}\right)+1=2$ होती है।

समन्वयन संख्या (Coordination number)

इस संरचना में केन्द्र पर स्थित परमाणु आठों कोनों पर स्थित परमाणुओं को स्पर्श करता है । इस प्रकार केन्द्र पर स्थित परमाणु से समान दूरी पर आठ परमाणु स्थित होने के कारण bcc संरचना की समन्वयन संख्या आठ होती है ।



(अ) एकक कोष्ठिका (ब) अन्तः विकर्ण पर परमाणुओं का विन्यास

चित्र 2.2 अन्त: केंद्रीय घनीय संरचना

जालक नियतांक -

चित्र में प्रदर्शित ज्यामिति के अनुसार

$DF^2=DA^2+AE^2+EF^2$

$(4r)^2=a^2+a^2+a^2+=3a^2$

या $4r=a\sqrt{3}$

अत: जालक नियतांक $a=\frac{4r}{\sqrt{3}}$ ....(2.3)

एकक कोष्ठिका में परमाणुओं का आयतन -

एकक कोष्ठिका में परमाणुओं का आयतन

V_a =प्रति एकक कोष्ठिका परमाणुओं की संख्या x एक परमाणु का आयतन

$$2\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{8}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^3$$

या $V_a=\frac{\sqrt{3}}{8}\pi a^3$ ..(2.4)

संकुलन गुणांक -

संकुलन गुणांक (PF) प्रति एकक कोष्ठिका में परमाणुओं का आयतन/प्रति एकक कोष्ठिका का आयतन

$$=\left(\frac{\sqrt{3}\pi a^3/8}{a^3}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{8} \quad ......(2.5)$$

= 0.68 या 68%

इस प्रकार bcc संरचना एक सुसंकुलित संरचना (Closely packed structure) होती है ।

2.2.3 फलक केन्द्रित घनीय संरचना (Face Centred cubic or (fcc) structure)

इस संरचना की एकक कोष्ठिका में आठों कोनों पर एक- एक परमाणु तथा सभी 6 फलकों के केन्द्र पर भी एक-एक परमाणु स्थित होता है । फलकों के केन्द्र पर स्थित परमाणु किनारों के परमाणुओं को स्पर्श करता है । लेकिन किनारों के परमाणु परस्पर स्पर्श नहीं करते हैं । जैसा कि चित्र 2.3 में प्रदर्शित किया गया है । Cu, Al, Pb व Ag यह संरचना रखते हैं।

प्रति एकक कोष्ठिका परमाणुओं की संख्या -

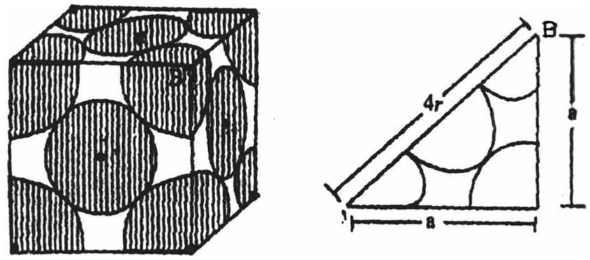
एकक कोष्ठिका के प्रत्येक कोने पर स्थित परमाणु 8 कोष्ठिकाओं में साझेदारी रखता है तथा प्रत्येक फलक के केन्द्र पर स्थित परमाणु दो कोष्ठिकाओं में साझेदारी रखता है । अत: प्रति एकक कोष्ठिका में जालक बिन्दुओं या परमाणुओं की कुल संख्या

$$=\left(8\times\frac{1}{8}\right)+\left(6\times\frac{1}{2}\right)$$

= 1 + 3 = 4

जालक नियतांक

चित्र 2.3 की ज्यामिति से



(अ) एकक कोष्ठिका (ब) फलक विकर्ण में परमाणुओं का अभिविन्यास

चित्र 2.3 फलक केन्द्रित घनीय संरचना (fcc)

या $(4r)^2=a^2+a^2$

$16r^2=2a^2$

या जालक नियतांक -

$$a=\frac{4r}{\sqrt{2}} \qquad .....(2.6)$$

एकक कोष्ठिका में परमाणुओं का आयतन -

एकक कोष्ठिका में परमाणुओं का आयतन, V_a= प्रति एकक कोष्ठिका की संख्या x एक परमाणु का आयतन

$$=4\times\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{16}{3}\pi\times\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^3$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi a^3$$

समन्यवन संख्या -

इस संरचना में किसी परमाणु के निकटतम परमाणुओं की संख्या 12 होती है, जिनमें से 6 परमाणु उसी तल में, 3 उससे ऊपरी व 3 उससे निचली तल में स्थित होते हैं । इस प्रकार fcc संरचना में समन्वय संख्या 12 होती है।

संकुलन गुणांक -

$$PF=\frac{\text{प्रति एकांक कोष्ठिका में परमाणुओका आयतन}}{\text{प्रति एकक कोष्ठिका का आयतन}}$$

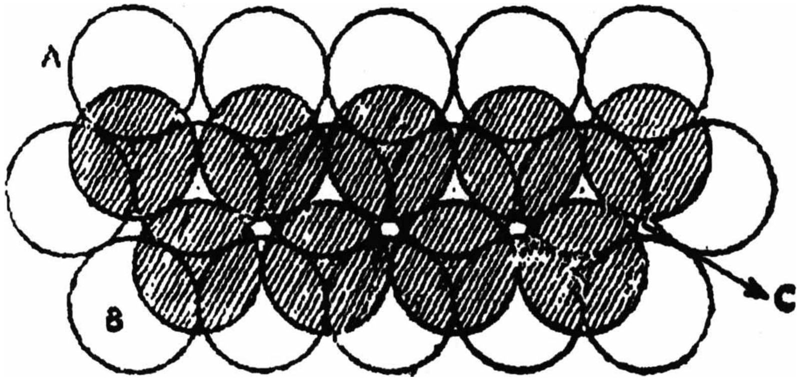
$$=\left(\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{6a^3}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{6} \qquad ....(2.8)$$

= 0.74 or 74%

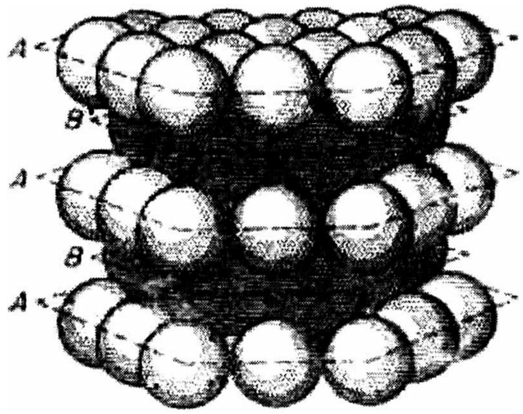
इस प्रकार यह एक सुसंकुलितं (Closed packed structure) संरचना है ।

2.2.4 षटकोणीय सुसंकुलित संरचना (Hexagonal close packed (hcp) structure)

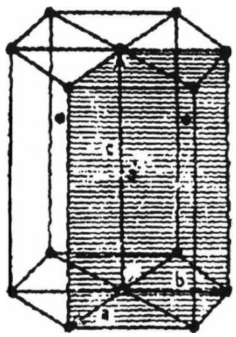
इस संरचना की एकक कोष्ठिका में प्रत्येक कोने पर एक परमाणु, प्रत्येक षटकोणीय फलक के केन्द्र पर एक परमाणु तथा साथ ही कोष्ठिका के अन्दर तीन परमाणु और होते हैं । इस प्रकार की संरचना को परमाणुओं के एक तल (A) पर रिक्त स्थानों पर दूसरी तल (B) पर रखकर तथा फिर नयी तल को A के परमाणुओं के ठीक ऊपर रखते हैं, तो ABABAB..... के तलों के रूप में प्राप्त कर सकते हैं, जिसे चित्र 2.4 में दर्शाया गया है ।



चित्र 2.4 (अ) द्विसतही संरचना की ज्यामिति



चित्र 2.4 (ब) त्रिविमीय संरचना की ज्यामिती



चित्र 2.5 में षटकोणीय

चित्र 25 में षटकोणीय सुसंकुलित संरचना (hcp) की एकक कोष्ठिका को तथा उसमें छायांकित भाग द्वारा अभाज्य कोष्ठिका को दर्शाया गया है । षटभुज की भुजा पर परमाणु परस्पर स्पर्श करते हैं, अतः a=2r ।

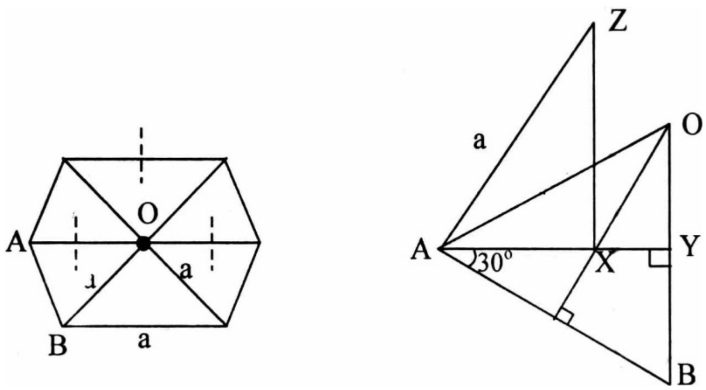
प्रति एकक कोष्ठिका परमाणुओं की संख्या -

hcp संरचना की एकक कोष्ठिका के ऊपरी व निचले तल में कोनों पर स्थित कुल 12 परमाणुओं में से प्रत्येक 6 कोष्ठिकाओं में साझेदारी रखता है, अतः इन 12 परमाणुओं का प्रति एकक कोष्ठिका में योगदान $12\times\frac{1}{6}=2$ होता है । ऊपरी व निचले षटफलकीय तलों के केन्द्र पर स्थित परमाणु दो कोष्ठिकाओं में साझेदारी रखता है, अतः इन दो परमाणुओं का प्रति एकक कोष्ठिका में योगदान $2\times\frac{1}{2}=1$ होता है । एकक कोष्ठिका के अन्दर स्थित 3 अन्य परमाणु पूर्णतया एकक कोष्ठिका में योगदान करते हैं । अतः hcp संरचना की प्रति एकक कोष्ठिका में जालक बिन्दुओं या परमाणुओं की कुल संख्या = 2+1+3=6 होती है ।

समन्वयन संख्या -

षटकोणीय सुसंकुलित (hcp) संरचना में प्रत्येक परमाणु अपने तल में स्थित 6 परमाणुओं से, ऊपरी तल व निचले तल में स्थित तीन-तीन परमाणुओं को स्पर्श करता है । इस प्रकार प्रत्येक परमाणु 12 निकटतम परमाणुओं को स्पर्श करता है और इनसे समान दूरी पर होता है । अतः hcp संरचना की समन्वयन संख्या 12 होती है ।

जालक नियतांक



चित्र 2.6 hcp संरचना की निचली परत

ΔAYB में $\cos 30^0 = \frac{AY}{AB}$ या AY=AB cos30= $a\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$AX=\frac{2}{3}AY=\frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

ZX= $\frac{C}{2}$

$\therefore$ $(AZ)^2 = (AX)^2 + (ZX)^2$

$$a^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{c^2}{4}$$

या $$\frac{c^2}{4} = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3}$$

$$\therefore \frac{c^2}{a^2} = \frac{8}{3} \text{ या } \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{8}{3}} \quad ......(2.9)$$

एकक कोष्ठिका का आयतन -

एकक कोष्ठिका का आयतन (V)= आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई

= 6 x ΔAOB का क्षेत्रफल x ऊँचाई

$$= 6\times \frac{1}{2} \times OB \times AY \times C$$

$$= 6\times\frac{1}{2}\times a\times\frac{a\sqrt{3}}{2}\times c$$

$$= \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\times a\sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$= 3\sqrt{2}a^3 \quad ....(2.10)$$

एकक कोष्ठिका में परमाणुओं का आयतन -

$$V_a = 6\times\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{24}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3$$

$$= \pi a^3 \quad ....(2.11)$$

संकुलन गुणांक -

$$PF = \frac{\text{एकक कोष्ठिका में परमाणुओं का आयतन}}{\text{एकक कोष्ठिका का आयतन}} \;/$$

$$= \frac{\pi a^3}{3\sqrt{2}a^3} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0.74 \text{ या } 74\% \quad .....(2.12)$$

hcp व fcc दोनों संरचनाओं में ही संकुलन गुणांक अधिक होने के कारण यह सुसंकुलित संरचनाए (Closely packed structured) हैं तथा इन दोनों संरचनाओं के लिए समन्वयन संख्या 12 है जो कि अधिकतम हैं अर्थात् अन्य किसी भी संरचना में समन्वयन संख्या 12 से अधिक नहीं होती ।

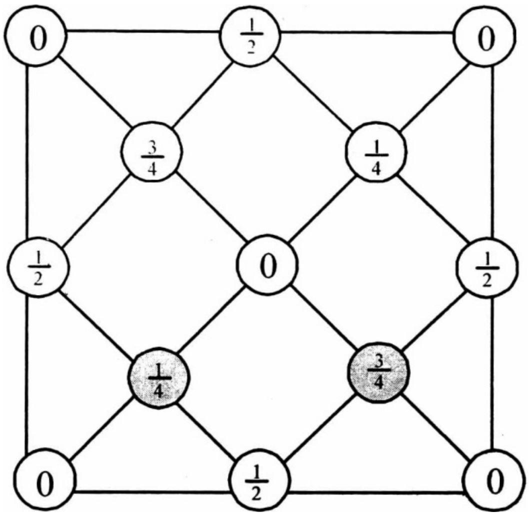
मैग्नीशियम, जिंक व कैडमियम षटकोणीय सुसंकुलित (hcp) संरचना में क्रिस्टीलत होते हैं ।

2.3 अन्य महत्वपूर्ण घनीय संरचनाएं (Other important cubic structures)

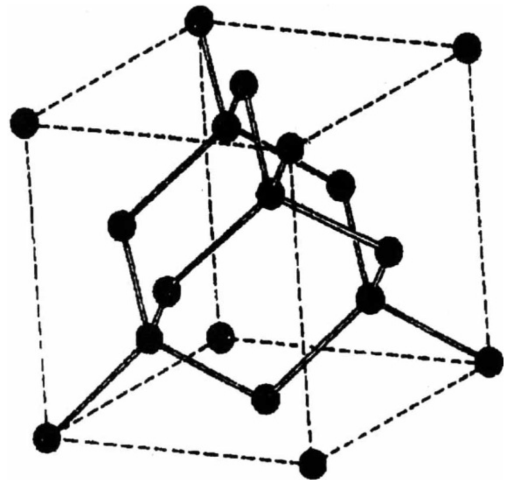
अधिकांश तत्व उपरोक्त वर्णित संरचनाओं द्वारा क्रिस्टलित होते हैं, लेकिन अनेक ऐसे तत्व व यौगिक हैं जो कि किसी घनीय संरचना के व्युत्पन्न या उनके संयोजन की संरचनाएं रखते हैं। इनमें से कुछ महत्वपूर्ण संरचनाओं का उल्लेख किया जा रहा है -

2.3.1 हीरे की संरचना (Diamond structure)

हीरे के जालक को दो feck जालकों के अन्त: विकर्ण पर भुजा $\frac{1}{4}$ दूरी पर अन्तर विभेदन द्वारा निर्मित मान सकते हैं अर्थात् एक उपजालक का मूल बिन्दु (0,0,0) पर व दूसरे का अन्त: विकर्ण पर $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ दूरी पर होता है । हीरे के मूल जालक को तथा घनीय फलक पर प्रक्षेपित हीरे की घनीय कोष्ठिका पर परमाणुओं की स्थितियों को चित्र 2.7 में प्रदर्शित किया गया है । भिन्नात्मक मान आधार के सापेक्ष घनीय भुजा के मात्रक में ऊचाई दर्शाते हैं । बिन्दु 0 व $\frac{1}{2}$, fcc जालक पर हैं, $\frac{1}{4}$ व $\frac{3}{4}$ पर स्थित परमाणु घनीय विकर्ण पर $\frac{a}{4}$ दूरी से दूसरे समान जालक पर विस्थापित हैं । इस संरचना का संकुलन गुणांक 0.34 होने के कारण यह विरल संकुलित (loosely packed) संरचना है ।



चित्र 2.7 की संरचना में घनीय कोष्ठिका के फलक पर प्रक्षेपित परमाणुओ की स्थितियाँ

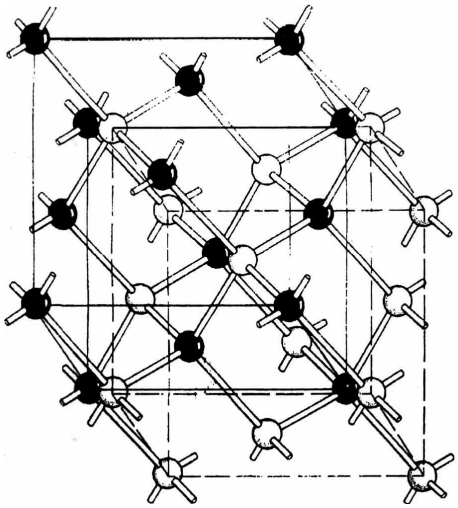


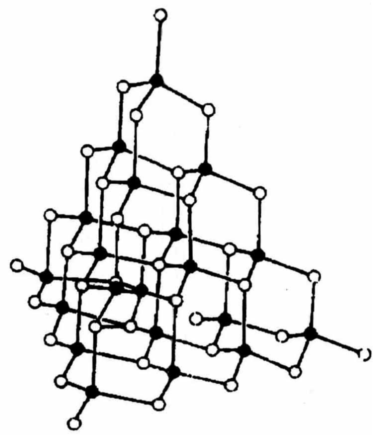
चित्र 2.8 चतुष्फलकीय बंध व्यवस्था दर्शाते हुए हीरे की संरचना

हीरे की चतुष्फलकीय बंध संरचना को चित्र 2.8 में प्रदर्शित किया गया है । C, Si, Ge भी इसी प्रकार की संरचना रखते हैं ।

2.3.2 जिंक सल्फाइड (ZnS) की संरचना (Structure of ZnS)

जिंक सल्फाइड (या जिंक ब्लेंड) की संरचना भी हीरे के समान ही आकाशीय जालक फलक केन्द्रित घनीय होता है, जिसमें Zn परमाणु एक fcc जालक पर व S परमाणु दूसरे fcc जालक पर चित्र 2.9 में दर्शाये अनुसार स्थित होते हैं ।





चित्र 2.9 (अ) ZnS की संरचना   चित्र 2.9 (ब) ZnS की चतुष्फ्लकीय परमाणु व्यवस्था

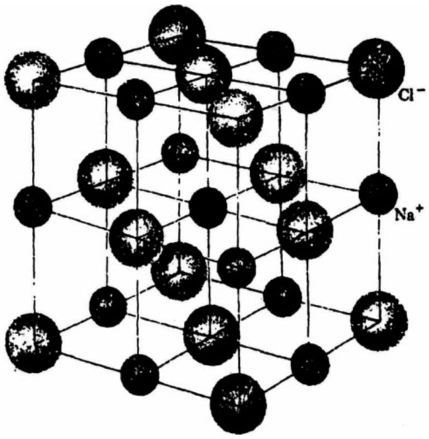
प्रति एकक कोष्ठिका में ZnS के चार अणु होते हैं । प्रत्येक परमाणु के परित समान दूरी पर विपरीत प्रकृति के चार परमाणु समचतुष्फलक के कोनों पर व्यवस्थित होते हैं ।

2.3.3 सोडियम क्लोराइड (NaCl) की संरचना (Structure of sodium chloride or NaCl)-

NaCl की संरचना चित्र 2.10 में दर्शायी गयी है, इसका ब्रेवे जालक फलक केन्द्रित घनीय होता है । प्रति घनीय एकक कोष्ठिका में NaCl की चार इकाइयां होती हैं. जिसमें परमाणुओं की स्थितियां निम्न प्रकार होती है।

Cl= 000; $\frac{1}{2}\frac{1}{2}0$; $\frac{1}{2}0\frac{1}{2}$; $0\frac{1}{2}\frac{1}{2}$

Na : $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$; $00\frac{1}{2}$; $0\frac{1}{2}0$ $\frac{1}{2}00$

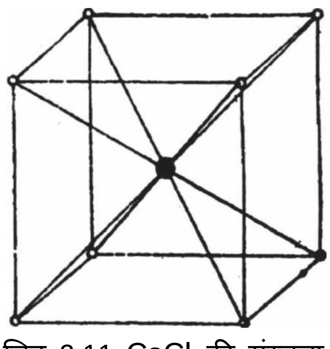


चित्र 2.10 सरल घनीय जालक के जालक बिन्दुओं पर Na^+व Cl^- को एकान्तर क्रम में दर्शाते हुए NaCl की संरचना

प्रत्येक परमाणु के निकटतम समान दूरी पर विपरीत प्रकार के 6 परमाणु होते हैं । इसी प्रकार की संरचना KCl, LiH, PbS में भी होती है ।

2.3.4 सीजियम क्लोराइड (CsCl) की संरचना (Cesium chloride structure)

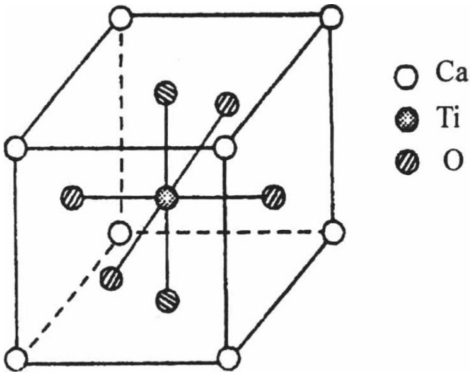
इसकी संरचना अन्त: केन्द्रित घनीय होती है, जिसमें Cs परमाणु अन्त: केन्द्रित स्थिति पर तथा Cl की स्थिति घन के कोनों पर (विलोमत: भी सत्य) होती है । इसे चित्र 2.11 में दर्शाया गया है । इसी प्रकार की संरचना TlBr, NH_4Cl आदि में भी पायी जाती है ।



चित्र 2.11 CsCl की संरचना

2.3.5 पेरोवस्काइट संरचना (Perovskites structure)

कैल्सियम टाइटेनेट ($CaTiO_3$) की संरचना एक विशेष प्रकार की होती है, जिसे पेरोवस्काइट संरचना कहते हैं । इसकी एकक कोष्ठिका की आकृति घनाकार होती है, जिसमें Ca आयन घन के कोनों पर, O आयन फलक केन्द्रों पर तथा Ti आयन अन्त: केन्द्र पर स्थित होते हैं । इस संरचना को चित्र 2.12 में दर्शाया गया है । इसी प्रकार की संरचना $BaTiO_{3,}$ $_{SrTi}O_3$ $BaZrO_{3,}$ $PbTiO_3$ आदि में भी पायी जाती है ।



चित्र 2.12 पेरोवास्काइट जालक

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. सरल घनीय संरचना में प्रति एकक कोष्ठिका परमाणुओं की संख्या कितनी होती है?

   ----

2. अन्त: घनीय संरचना में प्रति एकक कोष्ठिका परमाणुओं की संख्या कितनी होती हैं?

   ----

3. फलक केन्द्रित संरचना में समन्वयन संख्या व संकुलन गुणांक के मान क्या होते हैं?

   ----

4. समस्त क्रिस्टल संरचनाओं में संकुलन गुणांक का अधिकतम मान क्या होता है। और यह किन संरचनाओ के लिए हैं?

   ----

5. हीरे व 208 के क्रिस्टल की संरचना किस प्रकार की होती है और इसकी समनव्यन संख्या कितनी है?

2.4 व्युत्क्रम जालक (Reciprocal lattice)

प्रत्येक क्रिस्टल संरचना के साथ दो प्रकार के जालक सम्बद्ध होते हैं - क्रिस्टल जालक (crystal lattice) तथा व्युत्क्रम जालक (reciprocal lattice)। क्रिस्टल का विवर्तन प्रतिरूप, क्रिस्टल के व्युत्क्रम जालक का चित्रण होता है । इसके विपरीत सूक्ष्मदर्शी प्रतिबिम्ब वास्तविक क्रिस्टल संरचना का चित्रण होता है । क्रिस्टल जालक में सदिशों की लम्बाईयो की विमा 'लम्बाई' (length) की होती हैं, जबकि व्युत्क्रम जालक में सदिशों की लम्बाईया (लम्बाई)$^{-1}$ की विमा में होती हैं ।

जब समान्तर समतलों के प्रत्येक तल समूह पर एक उभयनिष्ठ मूल बिन्दु से अभिलम्ब डालते हैं और उनकी लम्बाईयों को सम्बन्धित अन्तरातल अन्तराल के आनुपातिक लम्बाईयो के व्युत्क्रम में लेने पर, इन अभिलम्बों के अंत बिन्दु एक जालक आव्यूह (lattic array) बनाते हैं । चूंकि इस आव्यूह में दूरियाँ क्रिस्टल में दूरियों की व्युत्क्रम होती हैं, इस कारण इस आव्यूह को क्रिस्टल का `व्युत्क्रम जालक' कहते हैं ।

व्युत्क्रम जालक बिन्दुओं को व्युत्क्रम जालक बिन्दु कहते हैं । त्रिविम में यह बिन्दु व्युत्क्रम जालक आकाश का निर्माण करते हैं, जिसे k- आकाश (k-space) या फोरियर आकाश (Fourier space) भी कहते हैं । जबकि क्रिस्टल जालक वास्तविक या सामान्य आकाश में जालक होता है । व्युत्क्रम जालक की अवधारणा से व्युत्क्रम जालक आकाश में बिन्दुओं के निर्देशांकों को मिलर सूचकांकों (hkl) द्वारा परिभाषित करते हैं ।

व्युत्क्रम जालक के अभाज्य, अक्षीय, सदिश ($\vec{a}^*, \vec{b}^*, \vec{c}^*$) तथा क्रिस्टल जालक के अभाज्य सदिश ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$)

$$\vec{a}^* = 2\pi \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})}; \; \vec{b}^* = 2\pi \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})}; \; \vec{c}^* = 2\pi \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})} \quad ....(2.13)$$

व्युत्क्रम जालक के अभाज्य सदिश तथा क्रिस्टल जालक के अभाज्य सदिश परस्पर लाम्बिक होते हैं, अर्थात्

$$\begin{aligned} &\vec{a}^*.\vec{a} = 2\pi, && \vec{b}^*.\vec{a} = 0, && \vec{c}^*.\vec{a} = 0 \\ &\vec{a}^*.\vec{b} = 0, && \vec{b}^*.\vec{b} = 2\pi, && \vec{c}^*.\vec{b} = 0 \quad ...(2.14) \\ &\vec{a}^*.\vec{c} = 0, && \vec{b}^*.\vec{c} = 0, && \vec{c}^*.\vec{c} = 2\pi \end{aligned}$$

व्युत्क्रम जालक बिन्दु (hkl) के संगत व्युत्क्रम जालक सदिश $\vec{G}$ को अभाज्य स्थानान्तरण सदिशों $\vec{a}^*$, $\vec{b}^*$, $\vec{c}^*$ के पदों में निम्न प्रकार व्यक्त करते हैं -

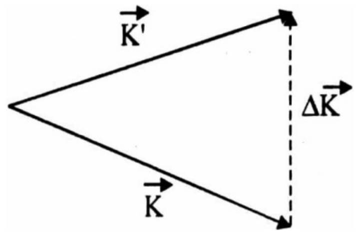
$$\vec{G} = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^* \quad ....(2.15)$$

विवर्तन प्रतिबंध (Differection condition)

यदि क्रिस्टल के किसी आयतन अल्पांश पर आपतित तरंग का तरंग सदिश $\vec{K}$ व प्रकीर्णन (scattering) के पश्चात् निर्गत तरंग का तरंग सदिश $\vec{K}'$ हों तो

$$\vec{K} + \Delta\vec{K} = \vec{K}' \quad ....(2.16)$$

यहां $\Delta\vec{K}$ प्रकीर्णन द्वारा तरंग सदिश में परिवर्तन का माप है तथा इसे प्रकीर्णन सदिश कहते हैं, (देखिये चित्र 2.13) ।



चित्र 2.13

प्रत्यास्थ प्रकीर्णन में फोटोन की ऊर्जा h ω संरक्षित रहती है, अर्थात $h\omega' = h\omega$

या $\omega' = \omega$

या $CK' = CK$

या $K' = K$

आवर्ती जालक से ब्रेग प्रकीर्णन में अनुमत $\Delta\vec{K}$ का मान किसी व्युत्क्रम जालक सदिश $\vec{G}$ के बराबर होता है, अत: सेमी (2.16) से

$$\vec{K} + \vec{G} = \vec{K}'$$

तथा विवर्तन प्रतिबंध सेमी (2.17) से

$$K'^2 = K$$

या $\left(\vec{K} + G\right)^2 = K^2$

या $2\vec{K}.\vec{G} + G^2 = 0 \quad ....(2.19)$

चूंकि $\vec{G}$ एक व्युत्क्रम जालक सदिश है, तो $-\vec{G}$ भी व्युत्क्रम जालक सदिश होगा तथा सेमी. (2.19) $\vec{G}$ को $-\vec{G}$ से प्रतिस्थापित करने पर वैध रहेगा, अत:

$$2\vec{K}.\vec{G} = G^2 \quad ...(2.20)$$

यह सेमी.करण विवर्तन प्रतिबंध कहलाता है । इस सेमी (2.20) में (hkl) सूचकांको वाले दो आसन्न समान्तर समतलों के मध्य अन्तरातल अन्तराल $d = \frac{2\pi}{|\vec{G}|}$ रखकर ब्रेग विवर्तन प्रतिबंध

$$2d \sin\theta = n\lambda \quad .....(2.21)$$

प्राप्त कर सकते हैं । इसका विस्तृत अध्ययन तथा ईवाल्ड रचना के बारे आप विस्तार से इकाई 5 में अध्ययन करेगें । ।

2.5 ब्रिलुवां चित्र (Brillouin Zones)

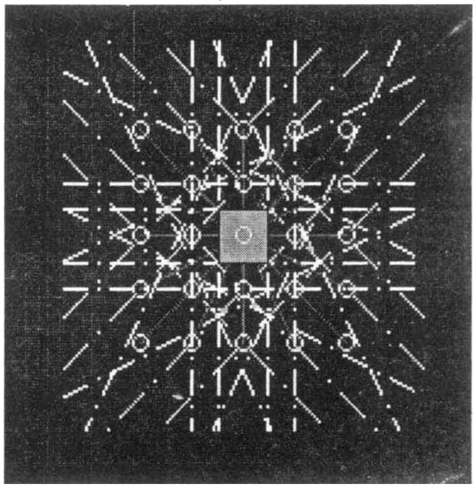
ठोस अवस्था भौतिकी में विवर्तन प्रतिबंध का महत्वपूर्ण कथन ब्रिलुवां द्वारा दिया गया था । ब्रिलुवां क्षेत्र रचना का उपयोग इलेक्ट्रॉन ऊर्जा बैण्ड सिद्धान्त में किया जाता है ।

"ब्रिलुवां क्षेत्र को व्युत्क्रम जालक में विगनर - साइट कोष्ठिका के रूप में परिभाषित किया जाता है।"

ब्रिलुवां क्षेत्र विवर्तन प्रतिबंध सेमी. (2.20) $2\vec{K}.\vec{G}=G^2$ का सुस्पष्ट ज्यामितीय ।,निरूपण प्रदान करता है, या

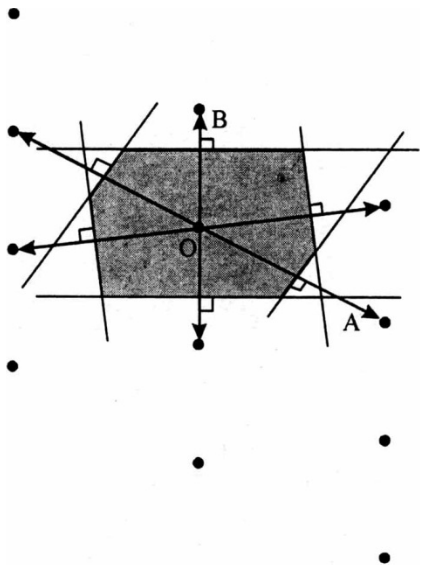
$$\vec{K}.\left(\frac{1}{2}\vec{G}\right)=\left(\frac{1}{2}G\right)^2 \qquad ....(2.22)$$

ब्रिलुवां क्षेत्र की रचना व्युत्क्रम जालक में किसी बिन्दु के सेमी.प सभी बिन्दुओं को मिलाकर, उन सदिशों के अभिलम्ब समद्विभाजक समतलों के मध्य परिबद्ध क्षेत्र के रूप में प्राप्त की जाती है । चित्र 2.14 में वर्गाकार व्युत्क्रम जालक के व्युत्क्रम जालक सदिशों को गहरी काली रेखाओं द्वारा प्रदर्शित किया गया है तथा इनकी अभिलम्ब समद्विभाजकों को सफेद रेखाओं द्वारा दर्शाया गया है । इन सफेद रेखाओं के मध्य परिबद्ध न्यूनतम आयतन के केन्द्रीय वर्ग को मूल बिन्दु के परित: दर्शाया गया है । इस वर्ग को व्युत्क्रम जालक की विगनर - साइट अभाज्य कोष्ठिका कहते हैं और यह प्रथम ब्रिलुवां क्षेत्र भी कहलाता है ।



चित्र 2.14

चित्र 2.15 में एक तिर्यक जालक की द्विविम में प्रथम ब्रिलुवां क्षेत्र की रचना दर्शायी गयी है। जिसमें बिन्दु o को व्युत्क्रम जालक निकटवर्ती बिन्दुओं से मिलाकर अनेक सदिश खींचते है । इसके पश्चात पर सदिशो के मध्य बिन्दुओ से समद्विभाजक अभिलम्ब खींचते है, इनके मध्य परिबद्ध न्यूनतम क्षेत्रफल प्रथम ब्रिलुवां क्षेत्र कहलाता है ।



चित्र 2.15

चित्र 2.16 में एक विमीय क्रिस्टल व व्युत्क्रम जालक को प्रदर्शित किया गया है । व्युत्क्रम जालक में आधार सदिश $\vec{a}^*$ है, जिसकी लम्बाई $2\pi/a$ है । मूल बिन्दु O से न्यूनतम व्युत्क्रम जालक सदिश $\vec{a}^*$ व $-\vec{a}^*$ हैं । इन सदिशों के अभिलम्ब समद्विभाजक प्रथम ब्रिलवां क्षेत्र की सीमाएं बनाते हैं । रेखीय जालक की क्षेत्र सीमाएं $K = \pm\pi/a$ पर हैं, जहां a क्रिस्टल जालक की अभाज्य अक्ष है ।

ब्रिलुआं रचना आपतित तरंग के उन सभी तरंग सदिशों $\vec{K}$ को दर्शाती है, जो कि क्रिस्टल से ब्रेग-परावर्तित होते हैं।

(अ) एक विमीय क्रिस्टल जालक   (ब) एक विमीय व्युत्क्रम जालक

चित्र 2.16

2.5.1 सरल घनीय (SC) संरचना के लिए व्युत्क्रम जालक व ब्रिलुवां क्षेत्र (Reciprocal lattice and Brillouin zone for simple cubic lattice)

सरल घनीय जालक के अभाज्य स्थानान्तरण सदिश माना निम्न समूह द्वारा दिये जाते हैं -

$$\vec{a} = a\hat{x}; \vec{b} = a\hat{y}; \vec{c} = a\hat{z} \qquad ......(2.23)$$

एकक कोष्ठिका का आयतन

$$V_c = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = a^3 \qquad ...(2.24)$$

व्युत्क्रम जालक के अभाज्य स्थानान्तरण सदिश सेमी. (2.13) द्वारा निम्नानुसार प्राप्त होते हैं -

$$\vec{a}^* = 2\pi\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})} = \frac{2\pi}{a}\hat{x};$$

$$\vec{b}^* = 2\pi\frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})} = \frac{2\pi}{a}\hat{y};$$

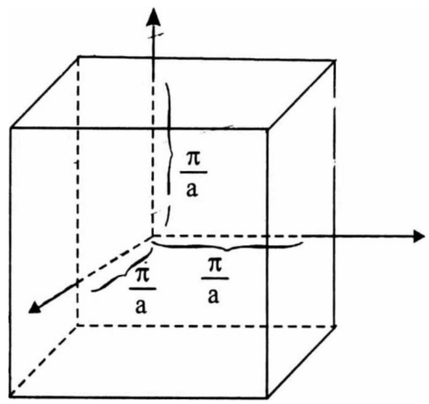
$$\vec{c}^* = 2\pi\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})} = \frac{2\pi}{a}\hat{z}; \qquad .....(2.25)$$

इस प्रकार सरल घनीय जालक का व्युत्क्रम जालक भी सरल घनीय जालक होता है, जिसका जालक $\frac{2\pi}{a}$ नियतांक होता है ।

प्रथम ब्रिलुवां क्षेत्र की परिसीमाओं को छः व्युत्क्रम जालक सदिशों $\pm\vec{a}^*$, $\pm\vec{b}^*$, $\pm\vec{c}^*$ बिन्दुओं से पारित अभिलम्ब तलों द्वारा चित्र 2.17 में दर्शाया गया है -

$$\pm\frac{1}{2}\vec{a}^* = \pm\frac{\pi}{a}\hat{x};\quad \pm\frac{1}{2}\vec{b}^* = \pm\frac{\pi}{a}\hat{y};\quad \pm\frac{1}{2}\vec{c}^* = \pm\frac{\pi}{a}\hat{z}; \qquad ...(2.26)$$

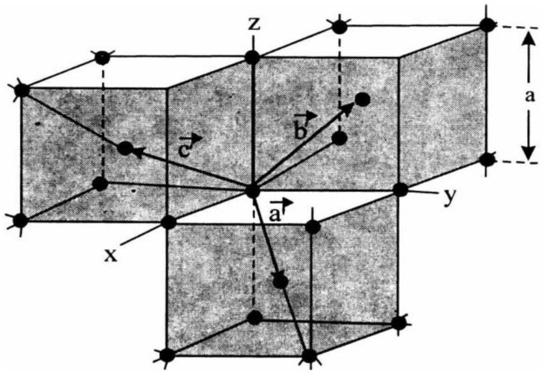
इन छः समतलों द्वारा $\frac{2\pi}{a}$ भुजा का घन परिबद्ध होता है, जिसका आयतन $\left(\frac{2\pi}{a}\right)^3$ है । यह न्यूनतम आयतन की संरचना है । यह घन सरल घनीय (SC) क्रिस्टल संरचना का प्रथम ब्रिलुवां क्षेत्र कहलाता है ।



चित्र 2.17

2.5.2 अन्त: केन्द्रित घनीय (bcc) संरचना के लिए व्युत्क्रम जालक व ब्रिलुबां क्षेत्र (Reciprocal lattice and Brillouin zone for body centred cubic lattice)

bcc संरचना के लिए अभाज्य स्थानान्तरण सदिश चित्र 2.18 में दर्शाये गये हैं -



चित्र 2.18

$$\vec{a}' = \frac{1}{2}a\,(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z})$$

$$\vec{b}' = \frac{1}{2}a\;(-\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}) \quad \text{....(2.27)}$$

$$\vec{c}' = \frac{1}{2}a\;(\hat{x}-\hat{y}+\hat{z})$$

.....(2.27)

जहां a मूल घन की भुजा है । $\hat{x},\hat{y}$ व $\hat{z}$ घन की क्रिस्टलीय अक्षों के अनुदिश लाम्बिक इकाई सदिश हैं ।

अभाज्य कोष्ठिका का आयतन

$$V_c = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$= \frac{a^3}{8}\left(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z}\right).\left(\hat{z}+\hat{y}-\hat{z}+\hat{x}+\hat{y}+\hat{x}\right)$$

$$= \frac{a^3}{8}\left(\hat{x}+\hat{y}-\hat{x}\right).\left(2\hat{x}+2\hat{y}\right) \quad \text{......(2.28)}$$

$$= \frac{a^3}{4}(1+1)$$

$$= \frac{1}{2}a^3$$

व्युत्क्रम जालक के अभाज्य स्थानान्तरण सदिश सेमी (2.13) द्वारा -

$$\vec{a}^* = 2\pi\,\frac{\vec{b}'\times\vec{c}'}{\vec{a}'.(\vec{b}'\times\vec{c}')} = 2\pi\,\frac{\frac{a^2}{4}\left(\hat{x}+\hat{y}\right)}{\frac{1}{3}a^3} = \frac{2\pi}{a}\left(\hat{x}+\hat{y}\right)$$

$$\hat{b}^* = \frac{2\pi}{a}\left(\hat{y}+\hat{z}\right)$$

$$\hat{c}^* = \frac{2\pi}{a}\left(\hat{x}+\hat{z}\right) \quad \text{...(2.29)}$$

चित्र (2.20) से तुलना करने पर यह फलक केन्द्रित घनीय (fcc) संरचना के अभाज्य सदिश हैं । अत: fcc जालक, bcc जालक का व्युत्क्रम जालक होता है ।

सेमी. (2.15) से पूर्णाको h,k,l के लिए सामान्य व्युत्क्रम जालक सदिश $\vec{G} = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$

$$= \frac{2\pi}{a}\left[(h+l)\hat{x}+(h+k)\hat{y}+(k+l)\hat{z}\right] \quad \text{....(2.30)}$$

न्यूनतम $\vec{G}$ के निम्नांकित 12 सदिश होते हैं, जहाँ सभी स्वतंत्र चिन्ह सम्भावित हैं -

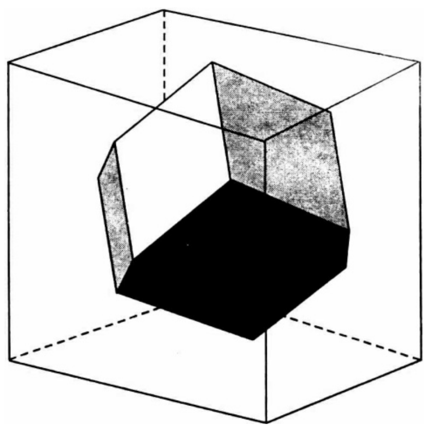
$$\frac{2\pi}{a}\left(\pm\hat{x}\pm\hat{y}\right);\frac{2\pi}{a}\left(\pm\hat{y}\pm\hat{z}\right);\frac{2\pi}{a}\left(\pm\hat{x}\pm\hat{z}\right) \quad \text{....(2.31)}$$

व्युत्क्रम जालक की अभाज्य कोष्ठिका सेमी. (2.29) द्वारा परिभाषित सदिशों $\vec{a}^*$, $\vec{b}^*$ व $\vec{c}^*$ से निर्मित समान्तर षटफलक (parallopiped) होता है । इस अभाज्य कोष्ठिका में एक व्युत्क्रम जालक होता है । सेमी. (2.31) से परिभाषित 12 सदिशों के मध्य बिन्दुओं से पारित लम्बवत समतलों के मध्य परिबद्ध भाग को प्रथम ब्रिलुवां क्षेत्र कहते हैं, जिसे चित्र 2.19 में दर्शाया गया है । ब्रिलुवां क्षेत्र के फलकों के 12 सदिश निम्न हैं-

$$\frac{\pi}{a}\left(\pm\hat{x}\pm\hat{y}\right);$$

$$\frac{\pi}{a}\left(\pm\hat{y}\pm\hat{z}\right);$$

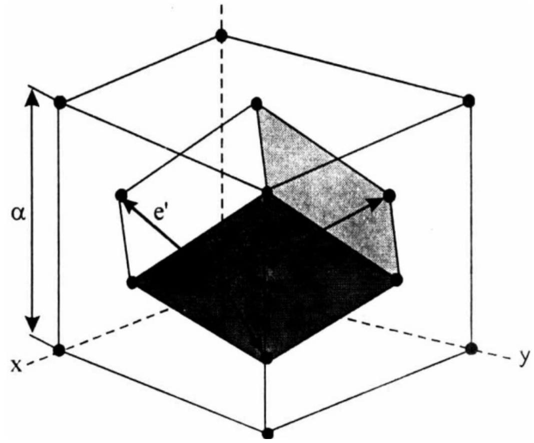
$$\frac{\pi}{a}\left(\pm\hat{x}\pm\hat{z}\right); \quad \text{....(2.34)}$$



चित्र 2.19 bcc संरचना का समानान्तर द्वादवश फलकीय प्रथम ब्रिलुवां क्षेत्र

2.5.3 फलक केन्द्रित घनीय (fcc) संरचना के लिए व्युत्क्रम जालक व ब्रिलुवां क्षेत्र

(Reciporcal lattice and Brillouin zone for face centred cubic lattice)



चित्र 2.20

fcc संरचना के लिए अभाज्य स्थानान्तरण सदिश चित्र 2.20 द्वारा

$$\vec{a}' = \frac{1}{2}a\left(\hat{x}+\hat{y}\right); \vec{b}' = \frac{1}{2}a\left(\hat{y}+\hat{z}\right); \vec{c}' = \frac{1}{2}a\left(\hat{z}+\hat{x}\right) \quad ....(2.33)$$

अभाज्य कोष्ठिका का आयतन

$$V_c = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$= \frac{1}{8}a^3(\hat{x}+\hat{y}).(\hat{x}-\hat{z}+\hat{y})$$

$$= \frac{1}{8}a^3(1+1) \quad ......(2.34)$$

$$= \frac{1}{4}a^3$$

fcc के जुत्कम जालक के लिए अभाज्य स्थानान्तरण सदिश सेमी. (2.13) द्वारा

$$\vec{a}^* = 2\pi\frac{\vec{b}'\times\vec{c}'}{\vec{a}'.(\vec{b}'\times\vec{c}')} = 2\pi\frac{\frac{a^2}{4}\left(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z}\right)}{\frac{1}{4}a^3}$$

या

$$\vec{a}^* = \frac{2\pi}{a}\left(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z}\right)$$

$$\vec{b}^* = \frac{2\pi}{a}\left(-\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}\right);$$

$$\vec{c}^* = \frac{2\pi}{a}\left(\hat{x}-\hat{y}+\hat{z}\right) \quad ....(2.35)$$

यह fcc जालक के अभाज्य स्थानान्तरण सदिश हैं, अत: bcc जालक, fcc का व्युत्क्रम जालक होता है ।

सेमी. (2.15) से पूर्णाकों h,k,l के लिए सामान्य व्युत्क्रम जालक सदिश

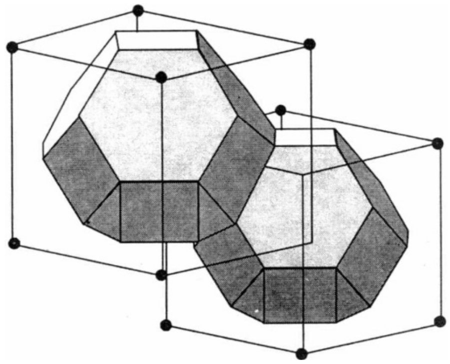
$$\vec{G} = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$$

$$= \frac{2\pi}{a}^3 \left[(h-k+l)\hat{x} + (h+k-l)\hat{y} + (-h+k+l)\hat{z} \right] \quad ....(2.36)$$

न्यूनतम $\vec{G}$ के निम्नांकित 8 सदिश हैं, जहां सभी स्वतंत्र चिन्ह सम्भावित हैं -

$$\frac{2\pi}{a}\left(\pm\hat{x} \pm \hat{y} \pm \hat{z} \right) \quad ...(2.37)$$

इन सदिशों के मध्य बिन्दुओं से पारित 8 लम्बवत समतलों द्वारा व्युत्क्रम जालक की अभाज्य कोष्ठिका की परिसीमाए परिभाषित की जाती है । इसमें परिबद्ध न्यूनतम आयतन प्रथम ब्रिलुवां क्षेत्र कहलाता है । इसे अष्टफलकीय संरचना द्वारा चित्र 2.21 में दर्शाया गया है।



चित्र 2.21

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

6. व्युत्क्रम जालक में सदिशों की लम्बाई की विमा क्या होती है?

----

7. प्रथम ब्रिलुवां क्षेत्र की परिभाषा दीजिये ।

----

8. सरल घनीय संरचना की व्युत्क्रम जालक कोष्ठिका की संरचना किस प्रकार की होती है?

----

9. किन दो घनीय संरचनाओं की क्रिस्टल अभाज्य कोष्ठिका दूसरी संरचना की व्युत्क्रम जालक होती है?

उदाहरण 2.1 एक वर्ग जालक जिसके अभाज्य स्थानान्तरण सदिश $\vec{a}$ हों, के लिए ब्रिलुआं क्षेत्र रेखांकित कीजिये ।

हल : वर्ग जालक के लिए -

$$\vec{a} = a\hat{i}; \qquad \vec{b} = a\hat{j}$$

व्युत्क्रम जालक के स्थानान्तरण सदिश

$$\overrightarrow{a^*} = \left(\frac{2\pi}{3}\right)\hat{i}; \; \overrightarrow{b^*} = \left(\frac{2\pi}{a}\right)\hat{j}$$

व्युत्क्रम जालक सदिश $\vec{G} = h\vec{a}^* + k\vec{b}^*$

या $$\overrightarrow{G} = \frac{2\pi}{a}\left(h\hat{i} + k\hat{j}\right)$$

$$= G_x\hat{i} + G_y\hat{j}$$

माना आपतित X- किरण का तरंग सदिश

$$\vec{k} = \hat{i}k_x + \hat{j}k_y$$

यह व्युत्क्रम जालक के मूल बिन्दु से मापा जाता है । ब्रेग प्रतिबंध सेमी. (2.20)

$$2\vec{k}.\vec{G} = G^2$$

या $$2\left(\vec{k}_x G_x + \vec{k}_y G_y\right) = G^2{}_x + G^2{}_y$$

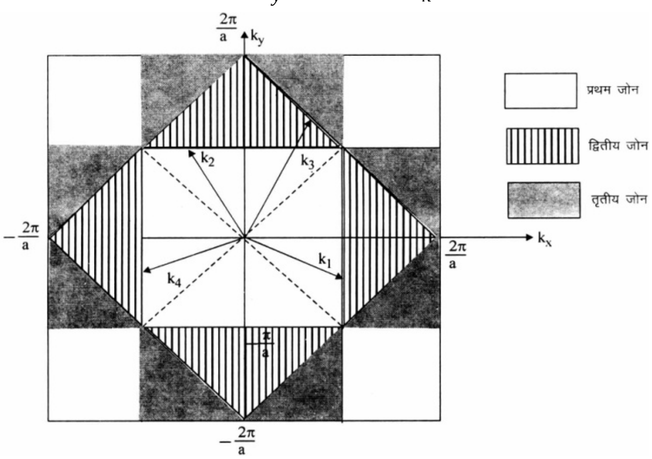
या $$2\left(k_x\frac{2\pi h}{a} + K_y\frac{2\pi k}{a}\right) = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 (h^2 + k^2)$$

या $$hk_x + kK_y = \frac{\pi}{a}(h^2 + k^2)$$ ......(2.38)

अत: ब्रेग परावर्तन घटित होगा, यदि

$$h = \pm 1, k = 0, k_x = \pm\pi / a, k_y = \text{कोई भी मान}$$

या $$h = 0, k = \pm 1, k_y = \pm\pi / a, k_x = \text{कोई भी मान}$$



चित्र 2.22

इन चार रेखाओं को चित्र 2.22 में आलेखित किया गया है । मूल बिन्दु से प्रारम्भ होकर इन रेखाओं पर समापित होने वाले सभी k सदिश जैसे k_1, k_2 ब्रेग परावर्तन उत्पन्न करते हैं । इनके अतिरिक्त $\pm k_x = \pm k_y = 2\pi / a$ रेखाओं के समूह भी सम्भव हैं तथा मूल बिन्दु से प्रारम्भ होकर इन रेखाओं पर समापित सदिश k_3, k_4जैसे भी बेग परावर्तन दर्शायेगे । $k_x = \pm\pi / a,$ और $k_y = \pm\pi / a$ द्वारा परिबद्ध वर्ग को प्रथम ब्रिलुवां क्षेत्र कहते हैं । $\pm k_x = \pm k_y = 2\pi / a$ द्वारा सम्मिलित अतिरिक्त क्षेत्रफल को द्वितीय ब्रिलुवां क्षेत्र कहते हैं । तृतीय ब्रिलुवां क्षेत्र के टुकड़ों को मिलाने पर तथा द्वितीय ब्रिलुवां क्षेत्र के टुकड़ों को मिलाने पर प्राप्त क्षेत्रफल, प्रथम क्षेत्र के क्षेत्रफल के समान होता है ।

त्रिविमीय आकाश में ब्रिलुवां क्षेत्र का मान

$$hk_x + kk_y + lk_z = \frac{\pi}{a}(h^2 + k^2 + l^2) \qquad ...(2.39)$$

सेमी. द्वारा ज्ञात किये जा सकते हैं ।

उदाहरण 2.2 किसी धातु के घनीय क्रिस्टल का जालक नियतांक 2.9 $\overset{\circ}{A}$ है, तो इसकी एकक विद्यमान परमाणुओं की संख्या की गणना करो तथा जालक का प्रकार बताइये । धातु का परमाणु भार 55.85 व घनत्व 7870 किग्रा / मी है ।

हल : घनीय क्रिस्टल का घनत्व

$$\rho\left(\frac{nM}{Na^3}\right)$$ जहां ρ = 7870 किग्रा / मी^{3}, M -55.85 ग्राम मोल

=55.85 x 10^{-3}ग्राम/मोल

N=6.02 x 10^{23} प्रति मोल

या $$n = \left(\frac{\rho Na^3}{M}\right)$$

$$= \frac{7870 \times 6.02 \times 10^{23} \times \left(2.9 \times 10^{-10}\right)^3}{55.85 \times 10^{-3}}$$

= 2

चूंकि अन्त: केन्द्रित घनीय (bcc) संरचना में प्रति एकक कोष्ठिका 2 परमाणु हैं । अत: जालक bcc प्रकार का है।

उदाहरण 2.3 ताम्बे की संरचना फलक केन्द्रित घनीय प्रकार की है, जिसमें परमाणु की परमाणु की त्रिज्या 1.278 $\overset{\circ}{A}$ है । ताम्बे का घनत्व ज्ञात कीजिये, यदि इसका परमाणु भार 63.54 है ।

हल : r=1.278 $\overset{\circ}{A}$

M=63.54 ग्राम/मोल=63.54x10^{-3} किग्रा/मोल

N=6.02x 10^{23} प्रति/मोल

fcc संरचना के लिए , n=4

fcc संरचना में जालक नियंतांक $a = \frac{4r}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{4 \times 1.278}{\sqrt{2}}$$

=3.62 $\overset{\circ}{A}$

घनत्व $\rho = \left(\frac{nM}{Na^3}\right)$

$$= \frac{4 \times 63.54 \times 10^{-3}}{6.02 \times 10^{23} \times (3.62 \times 10^{-10})^3}$$

= 8.9x10^3 किग्रा/मी^{3}

2.6 सारांश (Summary)

- सरल घनीय (sc) संरचना में समन्वय संख्या 6, प्रति एकक कोष्ठिका एक परमाणु होता है । संकुलन गुणांक कम (0.52) होने के कारण यह विरल संकुलित संरचना होती है ।
- अन्त: केन्द्रित घनीय (bcc) संरचना में समन्वय संख्या 8 तथा प्रति एकक कोष्ठिका में 2 परमाणु होते हैं । संकुलन गुणांक का मान (0.68) होता है ।
- फलक केन्द्रित घनीय (fcc) संरचना में समन्वय संख्या 12 व प्रति एकक कोष्ठिका 4 परमाणु होते हैं । संकुलन गुणांक अधिकतम (0.74) होने के कारण यह सुसंकुलित संरचना होती है ।
- षटकोणीय सुसंकुलित (hcp) संरचना में भी fcc के समान ही समन्वय संख्या 12 व संकुलन गुणांक अधिकतम (0.74) होता है । hcp की प्रति एकक कोष्ठिका में 6 परमाणु होते हैं ।
- व्युत्क्रम जालक के अभाज्य स्थानान्तरण सदिश

  $\overrightarrow{a^*} = 2\pi \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})}$; $\overrightarrow{b^*} = 2\pi \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})}$; $\overrightarrow{c^*} = 2\pi \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})}$

  होते हैं । जहां $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ क्रिस्टल जालक के अभाज्य स्थानान्तरण सदिश हैं।
- व्युत्क्रम जालक सदिश का प्रारूप
- $\vec{G} = \overrightarrow{ha^*} + \overrightarrow{kb^*} + \overrightarrow{ic^*}$ होता है । जहां h, k, l पूर्णांक या शून्य हैं ।
- प्रथम ब्रिलवा क्षेत्र, व्युत्क्रम जालक की विगनर साइट अभाज्य कोष्ठिका होती है ।

2.7 शब्दावली (glossary)

जालक नियतांक — Lattice constant

व्युत्क्रम जालक	Reciprocal lattice
विरल संकुलित	Lossely packed
संकुलन Packing	fraction
समन्वयप संख्या	coordination number
सुसंकुलित	Closed packed

2.8 सन्दर्भ ग्रंथ (Reference book)

C Kittel	Introduction to solid state physics	Wiley Eastern Ltd.
John P Mckelvey	solid state and semiconductor physics	A Harper international edition
Saxena, Gupta, saxena	Fundamental of solid state physics	Pragati Prakashan, Meerut
एस एस रावत	ठोस अवस्था भौतिकी	कालेज बुक हाउस जयपुर

2.9 बोध प्रश्नो के उत्तर (Answer of self assessment questions)

1. प्रति एकक कोष्ठिका में एक परमाणु या जालक बिन्दु होता है ।
2. प्रति एकक कोष्ठिका में दो परमाणु होते है ।
3. fcc संरचना में समन्वय संख्या 12 तथा संकुलन गुणांक 0.74 होता है ।
4. संकुलन गुणांक का अधिकतम मान 0.74 होता है, जो कि फलक केन्द्रित (fcc) व षटकोणीय संकुलित संरचना (hcp) के लिए होता है ।
5. हीरे व ZnS की संरचना चतुष्फलकीय होती है और इनकी समन्वय संख्या 4 होती है।
6. व्युत्क्रम जालक में सदिशों की लम्बाई की विभा $[\text{लम्बाई}]^{-1}$ होती है ।
7. व्युत्क्रम जालक में विगनर - साइट कोष्ठिका के रूप में प्रथम ब्रिलुवां क्षेत्र परिभाषित किया जाता है ।
8. सरल घनीय संरचना में व्युत्क्रम जालक कोष्ठिका की संरचना भी सरल घनीय होती है।
9. अन्त: केन्द्रित घनीय (bcc) व फलक केन्द्रित घनीय (fcc) संरचना की व्युत्क्रम जालक कोष्ठिका व अभाज्य क्रिस्टल जालक कोष्ठिका परस्पर एक-दूसरे की व्युत्क्रम होती है ।

2.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (very short answer type questions)

1. Cscl क्रिस्टल की एकक कोष्ठिका में आयनों की संख्या बताओ ।
2. विभिन्न क्रिस्टलों में न्यूनतम व सर्वाधिक समन्वय संख्या के मान बताओ ।

3. सरल घनीय (sc), अन्त: केन्द्रित (bcc) व फलक केन्द्रित (fcc) घनीय क्रिस्टलों के एक-एक उदाहरण बताओ ।
4. सुसंकुलित संरचना (closely packed) के नाम बताओ ।
5. एक रेखीय जालक में प्रथम ब्रिलुवां क्षेत्र की परिसीमा पर k के मान बताओ ।

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

6. सरल घनीय, अन्त: केन्द्रित, फलक केन्द्रित घनीय एवं षटकोणीय सुसंकुलित संरचनाओं का वर्णन कीजिये तथा इनमें परमाणुओं की स्थितियों को चित्र द्वारा दर्शाइये ।
7. प्रश्न 6 में वर्णित संरचनाओं के लिए अभाज्य कोष्ठिकाओं के आयतन तथा संकुलन गुणांक के मानों की गणना करो ।
8. प्रदर्शित कीजिये की न fcc व hcp संरचना के लिए संकुलन गुणांक के मान समान होते हैं ।
9. सरल घनीय (sc), अन्त केन्द्रित (bcc) व फलक केन्द्रित (fcc) घनीय संरचना के लिए व्युत्क्रम जालक व ब्रिलुवां क्षेत्र प्राप्त कीजिये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

10. ताम्बे की संरचना फलक केन्द्रित हैं । ताम्बे के लिए जालक नियतांक 3.6 $\overset{\circ}{A}$ इसके परमाणु की त्रिज्या ज्ञात करो । (**उत्तर**: 1.27 $\overset{\circ}{A}$)
11. एल्यूमीनियम की संरचना फलक केन्द्रित है । परमाणुओं के मध्य निकटतम दूरी ज्ञात करो । Al का घनत्व 2.7gm/cm^3 परमाणु भार 27 है । (**उत्तर :** 2.87 $\overset{\circ}{A}$)
12. ताम्बे के परमाणु की त्रिज्या 1.2784 $\overset{\circ}{A}$ है । इसके क्रिस्टल के (111) तलों के मध्य दूरी ज्ञात कीजिये । (**उत्तर** : 2.09 $\overset{\circ}{A}$)

इकाई-3

परमाण्वीय आबंधन
(Atomic Bonding)

इकाई की रूपरेखा

3.0 उद्देश्य

3.1 प्रस्तावना

3.2 परमाणुओं के मध्य बल

3.3 आयनिक आबंधन

3.3.1 आयनिक क्रिस्टलों की बंधन ऊर्जा या संसजक ऊर्जा

3.3.2 प्रतिकर्षी घातांक का निर्धारण

3.3.3 आयनिक क्रिस्टलों के लिए मैडेलुग नियतांक की गणना

3.4 सहसंयोजी आबंधन

3.5 धात्विक आबंधन

3.6 हाइड्रोजन आबंधन

3.7 वान्डरवाल आबंधन

3.8 सारांश

3.9 शब्दावली

3.10 संदर्भ ग्रंथ

3.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

3.12 अभ्यासार्थ प्रश्न

3.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप -

- क्रिस्टल संरचना में परमाणुओं के मध्य बनने वाले विभिन्न प्रकार के आबंधनों को जान सकेंगे;
- किसी अणु की साम्यावस्था की स्थिति में न्यूनतम स्थितिज ऊर्जा के रूप में बंधन ऊर्जा या संसजक ऊर्जा या वियोजन ऊर्जा का मान प्राप्त कर सकेंगे;
- दो परमाणुओं के मध्य इलेक्ट्रॉन के हस्तान्तरण द्वारा बनने वाले आयनिक आबंध का अध्ययन कर सकेंगे;
- आयनिक क्रिस्टल की बंधन ऊर्जा या संसजक ऊर्जा की गणना कर सकेंगे;
- आयनिक क्रिस्टलों के लिए मैडेलुंग नियतांक की गणना कर सकेंगे;

- क्रिस्टलों में परमाणुओं के मध्य इलेक्ट्रॉनों की साझेदारी द्वारा निर्मित आबंधन का अध्ययन कर सकेंगे;
- धात्विक क्रिस्टलों में बनने वाले आबंधन तथा उनके गुणों को जान सकेंगे।
- अध्रुवीय अणुओं के मध्य बनने वाले वान्डर-वाल आबंधन तथा उनकी अन्योन्य ऊर्जा के बारे में जान सकेंगे ।

3.1 प्रस्तावना (Introduction)

गत इकाइयों में आप पदार्थो की क्रिस्टलीय व अक्रिस्टलीय अवस्था तथा क्रिस्टल संरचना का अध्ययन कर चुके हैं । इस इकाई में आप क्रिस्टलों के अणुओं तथा परमाणुओं के मध्य बनने वाले विभिन्न प्रकार के आबंधनों का अध्ययन करेगें और आप यह जानेंगे कि क्रिस्टल में अणु व परमाणुओं को परस्पर किस प्रकार व कौन बांधे रखता है? नाभिक का धनात्मक आवेश तथा इलेक्ट्रॉन के ऋणात्मक आवेश के मध्य स्थिर विद्युत आकर्षण अन्योन्य क्रिया ठोसों में संयोजन (cohesion) के लिए पूर्ण रूप से उत्तरदायी होती है ।

जब परमाणुओं को स्वतंत्र अवस्था से पररयर निकट लाया जाता है, तो वह अन्योय क्रिया द्वारा आबंध का निर्माण करते हैं । इस निर्माण में उपयोग होने वाली ऊर्जा को संसजक ऊर्जा या बंधन ऊर्जा कहते हैं । किसी क्रिस्टल को उसके घटक स्वतंत्र परमाणुओं में विभक्त करने के लिए आवश्यक प्रति परमाणु ऊर्जा को संसजक या बंधन ऊर्जा कहते हैं । अनुच्छेद 3.2 में आप क्रिस्टलों के परमाणुओं के मध्य लगने वाले बलों तथा विभिन्न आबन्धों के वर्गीकरण का अध्ययन करेगें । अनुच्छेद 3.3 में आप आयनिक क्रिस्टलों में बनने वाले आयनिक आबन्धन तथा उसकी संसजक ऊर्जा की गणना का विस्तार पूर्वक अध्ययन करेगें और आयनिक क्रिस्टलों के लिए मैडुलंग नियतांक की गणना का अध्ययन कर सकेंगे । इसी इकाई के अनुच्छेद 3.4, 3.5 व 3.6 में आप क्रमश: सह संयोजी आबंधन, धात्विक आबंधन तथा वान्डर-वाल आबंधन बनाने वाले क्रिस्टलो तथा उनके कुछ गुणों का अध्ययन करेंगे ।

3.2 परमाणुओं के मध्य बल (Forces between atoms)

किसी ठोस पदार्थ में परमाणुओं का समायोजन, परमाणुओं के मध्य बन्धन बलों, संसजन बलों या रासायनिक बंध के अभिलक्षण, सामर्थ्य व दिशात्मकता द्वारा निर्धारित होता है । परमाणुओं के मध्य दो प्रकार के बल लगते हैं -

आकर्षण बल - जो कि परमाणुओं को परस्पर बांधे रखते हैं ।

प्रतिकर्षण बल - जो कि ठोसों के सम्पीडन के समय महत्वपूर्ण भूमिका हैं ।

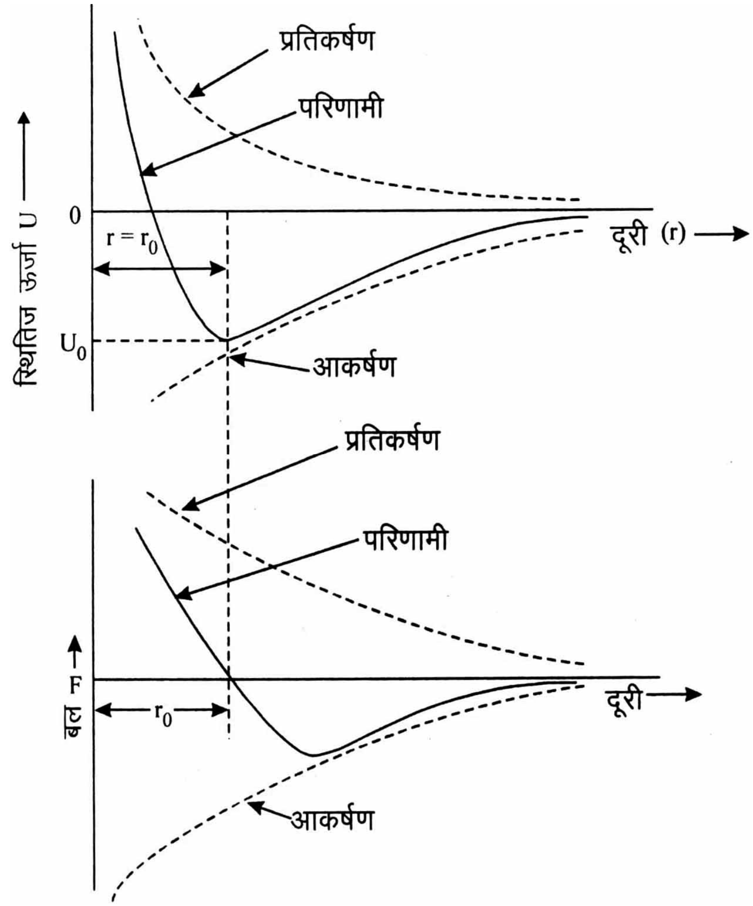
किसी पदार्थ की स्थितिज या संचित आंतरिक ऊर्जा, विभिन्न परमाणुओं की पृथक-पृथक ऊर्जाओं तथा उनकी अन्योन्य ऊर्जाओं के योग के तुल्य होती है । जब सभी परमाणु मूल अवस्था में तथा परस्पर अनन्त दूरी पर होते हैं, तो स्थितिज ऊर्जा का मान शून्य होता है, क्योंकि यह दूरी की किसी घात के व्युत्क्रमानुपाती होती है । जब इन परमाणुओं के मध्य दूरी कम की जाती है, तो वे एक-दूसरे से अन्योन्य क्रिया, करते हैं तथा फलस्वरूप निकाय की स्थितिज ऊर्जा शून्य से परिवर्तित हो जाती है ।

आकर्षण बल निकाय की स्थितिज ऊर्जा को घटाते हैं, जबकि प्रतिकर्षण बल स्थितिज ऊर्जा को बढ़ाते हैं । निकाय की कुल ऊर्जा इन दोनों प्रकार की ऊर्जाओं के योग के बराबर होती है । इस प्रकार कुल ऊर्जा

$$U = U_{\text{आकर्षण}} + U_{\text{प्रतिकर्षण}}$$

या $$U = -\frac{a}{r^m} + \frac{b}{r^n}$$

जहां a, b, m व n नियतांक हैं, जो परमाणुओं की प्रकृति पर निर्भर करते हैं । दो परमाणुओं के मध्य कुल ऊर्जा तथा उनके मध्य लगने वाले बल को अंतर-परमाण्वीय दूरी (r) के साथ चित्र 3.1 में आलेखित किया गया है । जब दोनों परमाणुओं के मध्य दूरी $r=r_0$ होती है तो परिणामी बल शून्य तथा स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम $(-U_0)$हो जाती है । इस



चित्र 3.1 स्थितिज ऊर्जा एवं बल का दूरी के साथ परिवर्तन

दूरी r_0 को `साम्यावस्था' की दूरी कहते हैं । इस समय निकाय सर्वाधिक स्थायी होता है और परमाणुओं के मध्य रासायनिक बंध का बनना सुनिश्चित होता है । साम्यावस्था दूरी $r= r_0$ पर ऊर्जा U_0 को अणु की बंधन या संसजन ऊर्जा कहते हैं । अणु को घटक परमाणुओं में अनन्त विस्थापन या वियोजन के लिए इतनी ही ऊर्जा बाहय रूप से प्रदान करनी होती है, इस कारण इसे वियोजन ऊर्जा (dissociation energy) भी कहते हैं ।

सेमी. (3.1) के r के सापेक्ष अवकलन द्वारा परमाणुओं के मध्य बल

$$F=-\frac{dU}{dr}=-\frac{ma}{r^{m+1}}+\frac{nb}{r^{n+1}} \quad ...(3.2)$$

साम्यावस्था $r=r_0$ की स्थिति में ,निकाय पर परिणामी बल F = 0 होता है, अतः

$$F=-\frac{ma}{r_0^{m+1}}+\frac{nb}{r_0^{n+1}}=0$$

या $$\frac{nb}{r_0^{n+1}}=\frac{ma}{r_0^{m+1}}$$

या $$\frac{nb}{ma}=\frac{r_0^{n+1}}{r_0^{m+1}}=(r_0)^{n-m}$$

अत साम्यावस्था दूरी $r_0=\left(\frac{nb}{ma}\right)^{\frac{1}{n-m}}$ ...(3.3)

पुन: सेमी. (3.2) द्वारा

$$\frac{dU}{dr}=\frac{ma}{r^{m+1}}-\frac{nb}{r^{n+1}}$$

r के सापेक्ष पुन: अवकलन करने पर

$$\frac{d^2U}{d^2r}=-\frac{m(m+1)a}{r^{m+2}}+\frac{n(n+1)b}{r^{n+2}}$$

साम्यावस्था $r=r_0$ पर U(r) के न्यूनतम होने के लिए $\left(\frac{d^2U}{d^2r}\right)_{r=r_0}>0$ होना, अर्थात्

$$\left(\frac{d^2U}{d^2r}\right)_{r=r_0}=-\frac{m(m+1)a}{r_0^{m+2}}+\frac{n(n+1)b}{r_0^{n+2}}>0$$

या $$r_0^{m+2}n(n+1)b-r_0^{n+2}m(m+1)a>0$$

या $$n(n+1)b>m(m+1)a\left(\frac{r_0^{n+2}}{r_0^{m+2}}\right)$$

या $$n(n+1)b>m(m+1)a(r_0)^{n-m}$$

r_0 का मान सेमी. (3.3) में रखने पर

या $$n(n+1)b>m(m+1)a\frac{n.b}{m.a}$$

या $$(n+1)>(m+1)$$

या $$n>m \quad ....(3.4)$$

इस प्रकार सेमी. (3.1) $n>m$ में होता है । परमाणुओं के मध्य सामान्यत: स्थिर विद्युत प्रकृति के बल लगते हैं, जो कि परमाणुओं के बाह्य इलेक्ट्रॉनों (या इलेक्ट्रॉन अभ्र) के तरंग फलनों के अतिव्यापन द्वारा प्रभावित होते हैं ।

साम्यावस्था ($r=r_0$)में सेमी. (3.1) द्वारा स्थितिज ऊर्जा U(r) का न्यूनतम मान

$$U_{\min} = -\frac{a}{r_0^{\,m}} + \frac{b}{r_0^{\,n}}$$

$$= -\frac{a}{r_0^{\,m}}\left(1 - \frac{b}{a}.\frac{1}{r_0^{\,n-m}}\right)$$

$$= -\frac{a}{r_0^{\,m}}\left(1 - \frac{b}{a}.\frac{ma}{n.b}\right)$$ (जहां सेमी. (3.3) से r_0 का मान रखने पर)

$$\therefore U_{\min} = -\frac{a}{r_0^{\,m}}\left(1 - \frac{m}{n}\right) = U_0 \qquad ...(3.5)$$

इस ऊर्जा को निकाय की बंधन ऊर्जा, संसजक ऊर्जा या वियोजन ऊर्जा कहते हैं ।

क्रिस्टलों में एक परमाणु अनेक परमाणुओं से घिरा होता है, इस कारण सेमी. (3.1) द्वारा परिभाषित ऊर्जा यथार्थ रूप में लागू नहीं होती है । क्रिस्टलों में ऊर्जाओं का यथार्थ परिकलन परमाणुओं के संयोजी इलेक्ट्रॉनों के मध्य आवेश वितरण, इलेक्ट्रॉनों के आदान-प्रदान तथा परमाणुओं के मध्य इलेक्ट्रॉनों की साझेदारी पर निर्भर करता है । क्रिस्टलों में परमाणुओं के मध्य अन्योन्य क्रिया के आधार पर निम्नलिखित प्रकार के आबंधन बनते हैं-

(1) आयनिक आबंधन,

(2) सह संयोजी आबंधन,

(3) धात्विक आबंधन,

(4) हाइड्रोजन आबंधन,

(5) वान्डर-वाल आबंधन

3.3 आयनिक आबंधन (Ionic Bonding)

जब दो परमाणुओं के मध्य परस्पर संयोजी इलेक्ट्रॉन का स्थानान्तरण या आदान-प्रदान होता है, तो विपरीत आवेश युक्त आयनों का निर्माण होता है । इन आयनों के मध्य प्रबल स्थिर विद्युत बल लगता है व वह आयनिक आबंध बनाते हैं । इस प्रकार निर्मित होने वाले क्रिस्टलों को आयनिक क्रिस्टल कहते हैं । उदाहरण स्वरूप NaCl, MgO, KCl, LiH $CaCl_2$ NaCl क्रिस्टल में, सोडियम परमाणु अपने एक इलेक्ट्रॉनको क्लोरीन परमाणु को स्थानान्तरित करता है, इससे Na^+ व Cl^- बनता है एवं इन आयनों के मध्य आयनिक बनता है । आयनिक क्रिस्टल कठोर व भंगुर होते हैं तथा इनके गलनांक उच्च होते हैं । यह क्रिस्टल उपयुक्त विलायक (Solvent) जैसे जल में सुगमता-पूर्वक घुल कर घटक आयनों में विघटित हो जाते हैं, जो कि विलयन में सुगमतापूर्वक विचरण करते हैं । यह बंध उन परमाणुओं या अणुओं के मध्य बनते हैं, जिनकी विद्युत ऋणता में। अधिक अन्तर होता है ।

3.3.1 आयनिक क्रिस्टलों की बंधन ऊर्जा या संसजक ऊर्जा (Binding energy or cohesive energy of Ionic crystals)

आयनिक बंध के सरलतम उदाहरण के रूप में सोडियम क्लोराइड में धन सोडियम आयन तथा ऋण क्लोरीन आयन के मध्य बंध पर विचार करते हैं । Na परमाणु का इलेक्ट्रॉनिक विन्यास $1s^2 2s^2 p^6 3s^1$ है तथा इसका आयनन विभव (ऊर्जा) अल्प 5.14 ev है, और यह आसानी से एक इलेक्ट्रॉन त्याग देता है । क्लोरीन परमाणु का इलेक्ट्रॉनिक विन्यास $1s^2 2s^2 p^6 3s^2 p^5$ तथा इसकी इलेक्ट्रॉन बंधुता (electron affinity) उच्च 3.61eV है और यह इलेक्ट्रॉन ग्रहण करने की प्रबल इच्छाशक्ति रखता है । क्रिस्टलीय NaCl अणु €की पृथक Na^+ व Cl^- आयनों के सापेक्ष प्रति इकाई अणु संसजक ऊर्जा का प्रायोगिक मान 7.90ev होता है । इस प्रकार पृथक उदासीन परमाणुओं की तुलना में NaCl के क्रिस्टल में प्रति अणु (7.9-5.1+3.6) = 6.4eV ऊर्जा कम होती है । जालक या संसजक ऊर्जा की अब हम अधिक गहराई से गणना करते हैं ।

जब आयनिक क्रिस्टल के निर्माण के लिए इलेक्ट्रॉनदाता परमाणु को इलेक्ट्रॉन ग्राही परमाणु के निकट लाया जाता है, तो उनमें परस्पर अन्योन्य क्रिया के कारण स्वतंत्र उदासीन परमाणुओं की ऊर्जा व क्रिस्टल ऊर्जा के अन्तर के तुल्य ऊर्जा का उपयोग हो जाता है । इस ऊर्जा को बंधन या संसजक ऊर्ज़ा कहते हैं । प्रति आयन संसजक ऊर्जा का मान

U_c आयनन ऊर्जा + इलेक्ट्रॉन बंधुता ऊर्जा + जालक ऊर्जा

या $Uc=U_i+U_a+U_{e}$....(3.6)

NaCl के उपरोक्त उदाहरण में हम परमाणु से इलेक्ट्रॉन बाहर निकालने के लिए आवश्यक आयनन ऊर्जा (U_i) तथा उदासीन परमाणु द्वारा इलेक्ट्रॉन ग्रहण करने की क्षमता के रूप में उत्सर्जित होने वाली इलेक्ट्रॉन बंधुता ऊर्जा (U_a)के बारे में अध्ययन कर चुके हैं । अब हम जालक ऊर्जा या साम्यावस्था में आयनों की न्यूनतम स्थितिज ऊर्जा (U_e) का विस्तार से अध्ययन करते हैं । जालक ऊर्जा का मान बोर्न - मैडेलुंग (born- Madelung) सिद्धान्त द्वारा ज्ञात किया जा सकता है ।

आवेश z_1e व z_2eके दो आयनों के दूरी से विस्थापित होने पर कूलॉम आकर्षण ऊर्जा, $-\frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi \in_0 r}$ दी जाती है । सम्पूर्ण क्रिस्टल के लिए कूलॉम स्थितिज ऊर्जा $-\frac{\pi z_1 z_2 e^2}{4\pi \in_0 r}$ द्वारा दी जाती है । नियतांक α **मैडेलुंग** स्थिरांक कहते हैं ।

जालक को विनाश (collapsing) से बचाने के लिए आयनों के मध्य प्रतिकर्षण बल भी लगना चाहिए । यह प्रतिकर्षण तब अधिक प्रभावी होता है, जब सेमी.पवर्ती आयनों के इलेक्ट्रॉन अभ्र परस्पर अतिव्यापित होते हैं । यह प्रतिकर्षण ऊर्जा, आयनों के मध्य दूरी की n वीं घात के

व्युत्क्रमानुपाती होती है या B/r^n द्वारा दी जाती है ।

एक आयन की अन्य सभी आयनों की उपस्थिति में कुल ऊर्जा

$$U(r) = -\frac{\alpha z_1 z_2 e^2}{4\pi \in_0 r} + \frac{B}{r^n} \qquad ...(3.7)$$

एक संयोजी क्षारीय हैलाइडों (alkali halides) के लिए

$z_1 = z_2 = 1$ होता है, अत:

$$U(r) = -\frac{\alpha e^2}{4\pi \in_0 r} + \frac{B}{r^n}$$

तथा प्रति मोल क्रिस्टल की ऊर्जा -

$$U(r) = N\left[-\frac{Ae^2}{r} + \frac{B}{r^n}\right] \qquad ....(3.8)$$

3.3.2 प्रतिकर्षी घातांक का निर्धारण (Determination of the repulsive exponent)

आयतन प्रत्यावस्था गुणांक (E) का मान परिभाषानुसार

$$E = \frac{dP}{-\left(\frac{dV}{V}\right)} = -V\frac{dP}{dV}$$

अत: क्रिस्टल की सम्पीड्‌यता $\beta = \frac{1}{E} = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dP}\right)$

उष्मागतिकी के प्रथम नियम से

$$dQ = dU + PdV$$

अत्यन्त न्यून तापों पर तापीय प्रभाव नगण्य लेने पर

$dQ=0$, अत:

$$dQ = dU + PdV = 0$$

या $\qquad dU = -PdV$

या $\qquad \frac{dU}{dV} = -P$

तथा $\qquad \frac{d^2U}{d^2V} = -\frac{dP}{dV}$

सेमी. (3.9) से $\frac{1}{\beta} = V\left(\frac{d^2U}{d^2V}\right) \qquad ....(3.10)$

जहां V क्रिस्टल का आयतन है । NaCl क्रिस्टल में निकटवर्ती आयनों के मध्य $r = r_{cl} + r_{Na} = a/2$ NaCl क्रिस्टल की एकांक कोष्ठिका में 4 अणु (अर्थात् 4Na परमाणु व 4Cl परमाणु) होते हैं । इस प्रकार एक अणु का आयतन $a^3/4$ होता है । यदि क्रिस्टल में प्रतिमोल N अणु हों तो क्रिस्टल आयतन

$$V=\left(\frac{a^3}{4}\right).N=\frac{(2r)^3}{4}N=2Nr^3$$ ...(3.11)

$$\therefore \frac{dV}{dr}=6Nr^2$$ ....(3.12)

अब $$\frac{dU}{dV}=\frac{dU}{dr}.\frac{dr}{dV}$$

तथा $$\frac{d^2U}{dV^2}=\left(\frac{dU}{dr}\right).\left(\frac{d^2r}{dV^2}\right)+\frac{d}{dV}\left(\frac{dU}{dr}\right).\frac{dr}{dV}$$

या $$\frac{d^2U}{dV^2}=\left(\frac{dU}{dr}\right).\left(\frac{d^2r}{dV^2}\right)+\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right).\left(\frac{dr}{dV}\right)^2$$

परन्तु साम्यावस्था $r=r_0$ पर U= न्यूनतम = U_0 तथा $\frac{dU}{dr}=0$ होता है, अतः

$$\left(\frac{d^2U}{dV^2}\right)_{r=r_0}=0+\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r=r_0}\left(\frac{dr}{dV}\right)^2_{r=r_0}$$

समी. (3.12) से मान रखने पर

$$\left(\frac{d^2U}{dV^2}\right)_{r=r_0}=\frac{1}{36N^2r_0^{\,4}}\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r=r_0}$$ ....(3.13)

यह मान समी. (3.10) में रखने पर साम्यावस्था में सम्पीड़यता β_0 के लिए

$$\frac{1}{\beta_0}=V_0\left(\frac{d^2U}{dV^2}\right)_{r=r_0}$$

या $$\frac{1}{\beta_0}=\frac{2Nr_0^3}{36N^2r_0^{\,4}}\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r=r_0}$$

या $$\frac{1}{\beta_0}=\frac{1}{18Nr_0}\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r=r_0}$$

समी. (3.8) का r के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dU}{dr}=N\left[-\frac{2Ae^2}{r^2}+\frac{nB}{r^{n+1}}\right]$$ ...(3.15)

तथा $$\frac{d^2U}{dr^2}=N\left[-\frac{2Ae^2}{r^3}+\frac{n(n+1)B}{r^{n+2}}\right]$$ ...(3.16)

साम्यावस्था $r=r_0$ पर $\frac{dU}{dr}=0$ समी. (3.15) से

$$\frac{Ae^2}{r_0^{\,2}}+\frac{nB}{r_0^{\,n+1}}=0 \text{ या } \frac{Ae^2}{r_0^{\,2}}=\frac{nB}{r_0^{\,n+1}}$$

$$\therefore B = \frac{Ae^2}{n} r_0^{\,n-1} = \frac{\alpha e^2}{4\pi \in_0 n} r_0^{\,n-1} \qquad ....(3.17)$$

जहां $$A = \frac{\alpha}{4\pi \in_0}$$

B का मान सेमी. (3.16) में रखने पर साम्यावस्था में

$$\left(\frac{d^2U}{dr^2}\right)_{r=r_0} = -\frac{2Ae^2}{r_0^{\,3}} N + \frac{n(n+1)}{r_0^{\,n+2}} N.\frac{Ae^2}{n} r_0^{\,n-1}$$

$$= \frac{-2Ae^2}{r_0^{\,3}} N + \frac{(n+1)Ae^2}{r_0^{\,3}} N$$

$$= \frac{NAe^2}{r_0^{\,3}}(n-1)$$

$$= \frac{\alpha e^2 N}{4\pi \in_0 r_0^{\,3}}(n-1)$$

यह मान सेमी. (3.14) में रखने पर

$$\frac{1}{\beta_0} = \frac{1}{18Nr_0} \frac{\alpha e^2 N}{4\pi \in_0 r_0^{\,3}}(n-1)$$

या $$(n-1) = \frac{72\pi \in_0 Nr_0^{\,4}}{\beta_0 \alpha e^2 N}$$

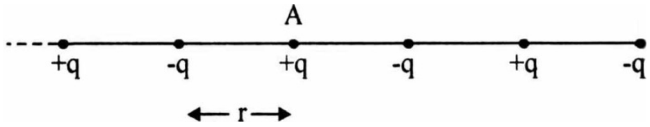
$$\therefore n = 1 + \frac{72\pi \in_0 r_0^{\,4}}{\beta_0 \alpha e^2} \qquad ....(3.18)$$

इस सेमी. (3.18) में NaCl के लिए β_0, r_0, e तथा मैड़ेलुंग नियतांक α = 1.7476 पर n का मान 9.1 प्राप्त होता है । साम्यावस्था में सेमी. (3.8) तथा (3.17)ए से क्रिस्टल की जालक ऊर्जा

$$U = -\frac{N\alpha e^2}{4\pi \in_0 r_0}\left(\frac{n-1}{n}\right) \qquad ...(3.19)$$

3.3.3 आयनिक क्रिस्टलों के लिए मैडेलुंग नियतांक की गणना (Calculation of Madelung constant of ionic crystals)

मैडुलंग नियतांक स्थिर विद्‌युत स्थितिज ऊर्जा पर आयनों के विशिष्ट ज्यामितीय आव्यूह के प्रभाव को प्रदर्शित करता है । यह क्रिस्टल संरचना का एक गुण है और जालक प्राचल, धनायन व ऋणायन के मध्य दूरी या क्रिस्टल के आणविक आयतन पर निर्भर करता है । त्रिविभीय क्रिस्टल जालक पर विफर करने से पूर्व हम एक विमीय क्रिस्टल के लिए जालक ऊर्जा एवं मैडुलंग स्थिरांक की गणना करने के लिए चित्र 3.2 में दर्शाये अनुसार एकान्तर क्रम में +q एवं -q आवेश, जो r दूरी पर स्थित हैं, पर विचार करते हैं ।



चित्र 3.2

किसी एक आयन A को केन्द्र मानकर उस आयन की कूलॉम स्थितिज ऊर्जा की गणना निम्न प्रकार करते है-

$$U = 2\times\frac{1}{4\pi\in_0}\left[\frac{q(-q)}{r}+\frac{q(q)}{2r}+\frac{q(-q)}{3r}+\frac{q(q)}{4r}+.......\right]$$

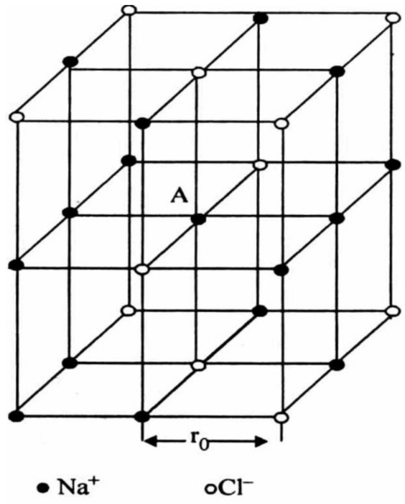
या
$$U = \frac{1}{4\pi\in_0}\left(\frac{-2q^2}{r}\right)\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.......\right]$$

या
$$U = -\frac{1}{4\pi\in_0}\left(\frac{2q^2}{r}\right)\log_e(1+1)$$

या
$$U = -\frac{q^2}{4\pi\in_0 r}(2\log_e 2) = \frac{\alpha ke^2}{r} \qquad ....(3.20)$$

अत: एक विमीय आयनिक क्रिस्टल का मैडलुंग नियतांक □ =2$\log_e$2 होता है ।

त्रिविमीय क्रिस्टल के लिए जालक ऊर्जा एवं मैडलुंग स्थिरांक की गणना के लिए हम चित्र 3.3 में सोडियम क्लोराइड (NaCl) के जालक पर विचार करते हैं ।



चित्र 3.3

चित्र 3.3

यदि आयनों के मध्य दूरी r_0 हो तो एक सोडियम आयन r_0 दूरी पर स्थित 6Cl आयनों से, दूरी $r_0\sqrt{2}$ पर स्थित 12Na आयनों से, दूरी $r_0\sqrt{3}$ पर स्थित 8Cl आयनों से, $2r_0$ दूरी पर स्थित 6 Na आयनों से, ...आदि द्वारा घिरा होता है । अत: निर्देश सोडियम आयन (4) पर अन्य आयनों द्वारा अन्योन्य क्रिया से उत्पन्न क्रिस्टल की स्थितिज ऊर्जा

$$U=\frac{1}{4\pi\in_0}\left[\frac{6(e)(-e)}{r_0}+\frac{12(e)(e)}{r_0\sqrt{2}}+\frac{8(e)(-e)}{r_0\sqrt{3}}+\frac{6(e)(e)}{2r_0}+.....\right]$$

$$=-\frac{Ke^2}{r_0}\left[6-\frac{12}{\sqrt{2}}+\frac{8}{\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{4}}+.....\right]=-\frac{K\alpha e^2}{r_0} \quad ....(3.21)$$

जहां $$\alpha=6-\frac{12}{\sqrt{2}}+\frac{8}{\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{4}}+..... \quad ....(3.22)$$

=1.747565

यह NaCl क्रिस्टल के लिए मैडेलुग नियतांक है तथा सेमी. (3.21) इसके लिए जालक ऊर्जा है । मैडेलुंग नियतांक का मान अलग-अलग क्रिस्टलों के लिए भिन्न-भिन्न होता है, जैसे CsCl के लिए, 1.762675, ZnS या जिंक ब्लैंड के लिए 1.6381 होता है ।

इसी प्रकार ऋणायन Cl^- आयन पर अन्य आयनों द्वारा अन्योन्य क्रिया से उत्पन्न स्थितिज ऊर्जा का मान भी सेमी.(3.21) से $U=-\frac{K\alpha e^2}{r_0}$ होता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. समानरूप से विस्थापित धन व ऋण आयन के क्रिस्टल में आबंधन की किस प्रकार होती है'

   ----
2. कौनसा तत्व सह संयोजी आबंधन वाला क्रिस्टल है?

   ----
3. अणु की बंधन ऊर्जा का सम्बन्ध क्या है?

   ----
4. NaCl अणु में Na^+ व Cl^- आवेशित होते हैं, लेकिन फिर भी यह आयन कूलाम आकर्षण बल द्वारा संलयित क्यों नहीं होते?

   ----
5. Li व Na रासायनिक रूप से क्यों समान होते हैं?

   ----
6. आयनिक क्रिस्टल की सम्पीड्यता का क्या सम्बंध है?

उदाहरण 3.1 आयनिक क्रिस्टल में आयनों की स्थितिज ऊर्जा $U(r)=\left(-\frac{K\alpha e^2}{r}+\frac{B}{r^n}\right)N$ द्वारा दी जाती है, तो प्रतिकर्षी घातांक का मान ज्ञात करो । क्रिस्टल के लिए सम्पीडयता गुणांक β_0 =3.3 x 10^{-11} मी^{2} /न्यूटन,

मैडेलुग नियतांक = 1.75 तथा अन्तर परमाणुक दूरी 2.80 $\overset{\circ}{A}$ है ।

हल : प्रतिकर्षी घातांक $n=1+\frac{18r_0^{\,4}}{K\beta_0\alpha e^2}$ जहां $K=\frac{1}{4\pi\in_0}=9.0\times10^9$ न्यूटन-मी / कूलॉम^2

$$n=1+\frac{18\times(2.80\times10^{-10})^4}{9\times10^9\times1.75\times3.3\times10^{-11}\times(1.6\times10^{-19})^2}$$

= 1+8=9

उदाहरण 3.2 यदि NaCl क्रिस्टल में आयन की स्थितिज ऊर्जा $U(r)=\left(-\frac{K\alpha e^2}{r}+\frac{B}{r^n}\right)$ द्वारा व्यक्त की जाये, तो क्रिस्टल की सम्पीड्यता ज्ञात कीजिये । मैडेलुंग नियतांक α= 1.75 तथा अन्तर-परमाणविक दूरी 2.80 $\overset{\circ}{A}$ है ।

हल : सम्पीड्यता $\beta_0=\frac{18r_0^{\,4}}{K\alpha e^2(n-1)}$ जहां n= 9

$$=\frac{18\times(2.80\times10^{-10})^4}{9\times10^9\times1.75\times(1.6\times10^{-19})^2\times8}$$

=3.46 x 10^{-11} मी^{2}/न्यूटन

3.4 सहसयोजी आबंधन (Covelent Bonding)

क्रिस्टलों के परमाणुओं के मध्य संयोजी इलेक्ट्रॉनों की साझेदारी द्वारा बनने वाले आबंध को सहसंयोजी आबंध कहते हैं तथा इस प्रकार निर्मित क्रिस्टलों को सहसंयोजक क्रिस्टल (covelent crystals) कहते हैं । सामान्यत: आवर्त्त सारणी के III, IV व V समूह के परमाणु सहसंयोजी आबंध का निर्माण करते हैं । उदाहरण के लिए In, C, Ge, Si, As आदि।

यह आबंध, आयनिक बंध के विपरीत उदासीन परमाणुओं के मध्य लगता है, लेकिन आयनिक क्रिस्टलों के समन इसकी सामर्थ्य अधिक होती है । हीरे में दो उदासीन पृथक परमाणुओं के सापेक्ष संसजक ऊर्जा का मान 7.3 eV है । C, Si, Ge में हीरे की तरह प्रत्येक परमाणु चतुष्फलकीय व्यवस्था में चार निकटवर्ती परमाणुओं से दो-दो इलेक्ट्रॉनों की साझेदारी कर सहसयोजी आबंध बनाकर अपना अष्टक पूर्ण करते हैं और स्थायी क्रिस्टल संरचना प्राप्त करते हैं । इस व्यवस्था में संकुलन गुणांक मात्र 0.34 होता है, जबकि सुसंकुलित संरचना

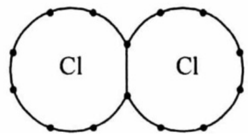
(Closed packed structure) में संकुलन गुणांक 0.74 होता है, जिसमें प्रत्येक परमाणु के समान दूरी पर 12 निकटवर्ती परमाणु होते हैं ।

सह संयोजी आबंध परमाणुओं के अपूर्ण बाह्य कोश के संयोजी इलेक्ट्रॉनों के साझे इलेक्ट्रॉन युग्म द्वारा बनता है, जिसमें युग्म के दोनों इलेक्ट्रॉनों का प्रचक्रण (spin) एक दूसरे के प्रति समान्तर (anti-parallel) होते हैं ।

सहसयोजी आबंध का एक सरल उदाहरण हाइड्रोजन अणु में बंधन है । यह शक्तिशाली आबन्धन तब बनता है, जब दो विलगित हाइड्रोजन परमाणु जिनमें इलेक्ट्रॉन मूल अवस्था (IS) में होता है, एक-दूसरे के निकट आते हैं और उनमें दोनों इलेक्ट्रॉनों का प्रचक्रण परस्पर विपरीत होता है । यह आबन्धन आपेक्षिक प्रचका अभिविन्यास पर निर्भर करता है क्योंकि पाउली (Pauli) के सिद्धान्त से प्रचक्रण अभिविन्यास के अनुसार आवेश वितरण परिवर्तित हो जाता है । प्रचक्रण पर आधारित कूलॉम ऊर्जा को विनिमय अन्योन्य क्रिया कहते हैं ।

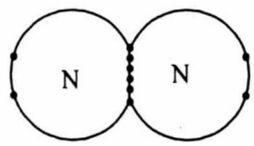
0_2, N_2, H_2, Cl_2 आदि अणुओं में भी सहसंयोजी आबन्ध ही बनते हैं । क्लोरीन तत्व में प्रत्येक क्लोरीन परमाणु की बाह्य कक्षा में सात इलेक्ट्रॉन होते हैं । जब दो क्लोरीन परमाणु, क्लोरीन अणु बनाते हैं तो उनमें एक-एक इलेक्ट्रॉन की साझेदारी होती है और परस्पर सह संयोजी आबन्ध बना लेते हैं ।

$$:\ddot{\underset{\cdot\cdot}{Cl}} + \ddot{\underset{\cdot\cdot}{Cl}}: \longrightarrow :\ddot{\underset{\cdot\cdot}{Cl}} : \ddot{\underset{\cdot\cdot}{Cl}}: \longrightarrow Cl-Cl \quad \text{or} \quad Cl_2$$



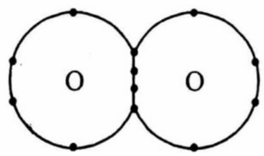
इसी प्रकार नाइट्रोजन अणु में प्रत्येक परमाणु की बाह्य कक्षा में 5 इलेक्ट्रॉन होते हैं तथा उनमें तीन-तीन इलेक्ट्रॉनों की साझेदारी होती है व सहसंयोजी आबंधन बनता है ।

$$:N\vdots + \vdots N: \longrightarrow :N \vdots\vdots N: \longrightarrow N\equiv N \quad \text{or} \quad N_2$$



तथा आक्सीजन अणु में सहसयोजी आबंध निम्न प्रकार साझेदारी द्वारा बनता है -

$$:\dot{\underset{\cdot}{O}}: + :\dot{\underset{\cdot}{O}}: \longrightarrow :\dot{\underset{\cdot}{O}}: : \dot{\underset{\cdot}{O}}: \longrightarrow O=O \quad \text{or} \quad O_2$$



3.5 धात्विक आबंधन (Metallic bonding)

धात्विक आबंधन, धात्विक क्रिस्टलों में बनते हैं । धात्विक क्रिस्टलों में परमाणुओं के संयोजी इलेक्ट्रॉन, नाभिक के साथ शिथिलत: बद्ध होते हैं और जालक में स्वतंत्र विचरण करते हैं । इन इलेक्ट्रॉनों को मुक्त इलेक्ट्रॉन कहते हैं । यह इलेक्ट्रॉन जालक में स्थित धनायनों से आकर्षण अन्योन्य क्रिया कर दुर्बल आबन्ध का निर्माण करते हैं, जिसे धात्विक आबंधन कहते हैं।

धात्विक तत्वों की आयनन ऊर्जाएं कम होने के कारण, इस आबंधन में समान तत्वों या विभिन्न तत्वों के परमाणु अपने संयोजी इलेक्ट्रॉनों को परमाणुओं द्वारा घेरे गये सम्पूर्ण आकाश में इलेक्ट्रॉन अग्र या इलेक्ट्रॉन गैस बनाने के लिए प्रदान कर देते हैं । इस प्रकार इलेक्ट्रॉन त्यागकर परमाणु वास्तव में आयन बन जाते हैं । यह इलेक्ट्रॉन अपने मूल परमाणु के साथ शिथिलत: बद्ध होते हैं, अत: इलेक्ट्रॉन अग्र बनाने के लिए आसानी से मुक्त हो जाते हैं । धनात्मक आयन तथा इलेक्ट्रॉन गैस के मध्य स्थिर विद्युत अन्योन्य क्रिया धातुओ की संरचना को बनाये रखती है । धातुओं में उच्च विद्युत तथा ऊष्मीय चालकता के गुण धात्विक संरचना में इलेक्ट्रॉनों के पलायन के गुणों की योग्यता के कारण है, जबकि आयनिक व सहसयोजी क्रिस्टलों में सभी इलेक्शेन विशिष्ट परमाणु के साथ ही बद्ध होते हैं ।

धात्विक क्रिस्टलों के गुण -

(i) धात्विक क्रिस्टलों में आबन्धन दुर्बल या प्रबल हो सकते हैं, इस कारण इनकी संसजक ऊर्जाएं पारे के लिए 64 x 10^3 किलो जूल / किलो मोल (या 0.7eV प्रति परमाणु) से लेकर टंगस्टन के लिए 850 x 10^3 किलो जूल / किलो मोल (या 8.8eV परमाणु) प्रति के मध्य होती हैं ।

(ii) आकाशीय जालक में धनात्मक आयनों के सममित समायोजन के कारण धातुओं की संरचना क्रिस्टलीय होती है ।

(iii) धात्विक क्रिस्टलों के गलनांक अधिक होते हैं, लेकिन यह सह संयोजी क्रिस्टलों की तुलना में कम होते है ।

(iv) मुक्त इलेक्ट्रॉनों की अत्यधिक उपलब्धता के कारण धात्विक क्रिस्टलों की विद्युत व ऊष्मीय चालकताएं उच्च होती हैं ।

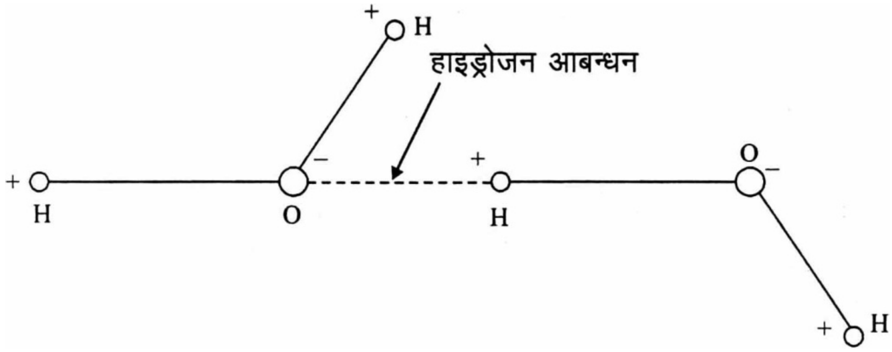
(v) धातुएं प्रकाश के लिए अपारदर्शी होती हैं, क्योंकि मुक्त इलेक्ट्रॉन, प्रकाशीय ऊर्जा को अवशोषित कर लेते हैं । सोडियम, ताम्बा, एल्युमिनियम, चांदी आदि धातु क्रिस्टलों के उदाहरण हैं।

(vi) धात्विक क्रिस्टलों में आबन्ध दुर्बल होने के कारण इनमें प्रत्यास्थता, तन्यता, आघात वर्धनीयता आदि गुण पाये जाते हैं ।

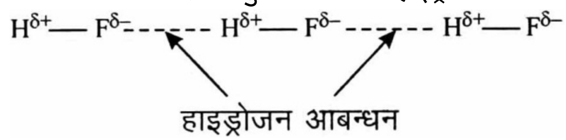
(vii) धात्विक क्रिस्टलों की संरचना सामान्यत: फलक केन्द्रित घनीय, अन्त: केन्द्रित घनीय तथा षटकोणीय संकुलित हैं ।

3.6 हाइड्रोजन आबंधन (Hydrogen bonding)

जब हाइड्रोजन, प्रबल विद्युत ऋणी तत्वों जैसे F, O व N से संयोग कर आबंधन बनाता है, तो साझे का इलेक्ट्रॉन-युग्म विद्युत ऋणी तत्व के अधिक निकट तथा हाइड्रोजन से दूर रहता है । इसके फलस्वरूप स पर आशिक धन आवेश $(\delta+)$ तथा विद्युत ऋणी तत्व पर आशिक ऋण आवेश $(\delta-)$ आ जाता है और एक शक्तिशाली स्थायी द्वि-ध्रुव (dipole) स्थापित हो जाता है । अणुओं के मध्य द्वि-ध्रुव - द्वि-ध्रुव आकर्षण बल को हाइड्रोजन आबंधन कहते हैं । स्थायी द्वि-ध्रुव स्थापित होने के कारण यह आबंधन विशिष्ट दैशिक होता है । हाइड्रोजन आबंधन वाले क्रिस्टलों की संसजक ऊर्जा कम होती है तथा इनमें बहुलीकरण (polymerisation) की प्रवृत्ति होती है । जल तथा हाइड्रोजन फ्लोराइड के अणुओं के मध्य बनने वाले हाइड्रोजन आबंधन को क्रमश चित्र 3.4 व 3.5 में दर्शाया गया है । हाइड्रोजन आबन्धन में बन्ध की लम्बाई का मान 0.74 $\overset{\circ}{A}$ होता है ।



चित्र 3.4 जल के दो अणुओ के मध्य हाइड्रोजन आबंधन



चित्र 3.5 हाइड्रोजन फलोराइड़ के अणुओ के मध्य हाइड्रोजन आबंधन

3.7 वान्डर-वाल आबंधन (Vander waal bonding)

वान्डर-वाल आबंधन या आणविक आबंधन अध्रुवीय अणुओं के मध्य लगते हैं । इन आबंधों की उत्पत्ति द्वि- ध्रुव बलौं के कारण होती है, जो कि एक दुर्बल बल हैं और इस आबंधन में अणु अपना अस्तित्व बनाये रखते हैं । यह आबंधन मुख्यत: अक्रिय गैसों He, Ne, Ar, Kr, Xe तथा अन्य गैसों व कार्बनिक गैसों CH_4, C_2H_6 आदि में पाये जाते है ।

वान्डर-वाल आबंधन के कारण अन्योन्य ऊर्जा का मान अणुओं के मध्य दूरी की षष्टम घात के व्युतक्रमानुपाती होता है

$$U = -\frac{A}{R^6}$$

इसे लन्डन अन्योन्य क्रिया (London interaction) या प्रेरित द्विध्रुव-द्विध्रुव अन्योन्य क्रिया (induced dipole- dipole interaction) भी कहते हैं । यह निष्क्रिय गैसों के क्रिस्टलों व अन्य कार्बनिक अणुओं के क्रिस्टलों की प्रधान आकर्षण अन्योन्य ऊर्जा है । वान्डर -वाल बल का मान अणुओं के मध्य दूरी की सप्तम घात के व्यत्क्रमानुपाती होता है ।

वान्डर - बाल आबंधन वाले क्रिस्टलों के गुण -

(i) इन क्रिस्टलों की संसजक ऊर्जा अल्प होती है । जैसे - Ne के लिए 1.92 किलो जूल/मोल तथा Ar के लिए 7.74 किलो जूल/मोल होती है ।

(ii) इन क्रिस्टलों के गलनांक व क्वथनांक कम होते हैं और इस कारण यह सामान्य पर गैसीय अवस्था में होते हैं ।

(iii) यह क्रिस्टल विद्युत तथा ऊष्मा के कुचालक होते हैं ।

(iv) यह क्रिस्टल समस्त तरंग दैर्ध्यों के प्रकाश के लिए पारदर्शी होते हैं ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

7. CH_4 अणु में आबंधन की प्रकृति क्या होती है?

----

8. H-H आबंधन में लंबाई का मान क्या होता है?

----

9. द्वि-परमाणु अणु की स्थितिज ऊर्जा का संबंध क्या है?

----

10. बहुलीकरण की प्रवृति किस प्रकार के आबंधन वाले क्रिस्टलो में होती है?

3.8 सारांश (Summary)

- परमाणुओं के मध्य आकर्षण व प्रतिकर्षण दो प्रकार के बल लगते हैं ।
- साम्यावस्था की स्थिति में अणु पर परिणामी बल शून्य होता है तथा अणु की बंधन ऊर्जा को संसजक ऊर्जा कहते हैं । अणु को उसके परमाणुओं में अनन्त तक विस्थापित करने में इतनी ही ऊर्जा बाहय रूप से प्रदान करनी होती है, जिसे वियोजन ऊर्जा कहते हैं।
- क्रिस्टलों के परमाणुओं के मध्य अन्योन्य क्रिया के आधार पर बनने वाले आबंधनों को आयनिक, सह संयोजी, धात्विक, हाइड्रोजन व वान्डर-वाल आबंधन में वर्गीकृत किया जाता है ।
- जब दो परमाणुओं के मध्य परस्पर संयोजी इलेक्ट्रॉन का आदान-प्रदान होता है, तो विपरीत युक्त आयनों के मध्य प्रबल स्थिर विद्युत बल लगता है, जिसे आयनिक आबंध कहते हैं ।

- आयनिक क्रिस्टलों के सम्पीड्यता गुणांक का मान $72\pi \in_0 r_0^4 / \alpha e^2 (n-1)$ होता है ।
- एक विमीय आयनिक क्रिस्टल का मैडेलुंग नियतांक 2ln2 होता है ।
- क्रिस्टलों के परमाणुओं के मध्य संयोजी इलेक्ट्रॉनों की साझेदारी द्वारा सहसंयोजी आबंधन का निर्माण होता है ।
- धात्विक क्रिस्टलों में परमाणुओं के शिथिलत: बद्ध संयोजी इलेक्ट्रॉन जालक में धनायनों से आकर्षण अन्योन्य क्रिया कर दुर्बल आबंध का निर्माण करते हैं, जिसे धात्विक आबंधन कहते हैं ।
- जब हाइड्रोजन परमाणु, प्रबल विद्युत ऋणी तत्वों जैसे F, O व N से संयोग करता है तो हाइड्रोजन आबंधन बनता है । इस आबंधन में साझे का इलेक्ट्रॉन - युग्म विद्युत ऋणी तत्व के अधिक निकट तथा हाइड्रोजन से दूर होता है तथा इन पर आशिक आवेश उत्पन्न हो जाने से स्थायी द्वि-ध्रुव निर्मित होता है । यह आबंधन विशिष्ट दैशिक होता है ।
- अध्रुवीय अणुओं के मध्य द्वि-ध्रुव बलों द्वारा आणविक या वान्डर वाल आबंधन का निर्माण होता है । यह दुर्बल प्रकृति का बल होता है । वान्डर वाल आबंधन वाले क्रिस्टलों की संसजक ऊर्जा का मान अल्प होता है ।

3.0 शब्दावली (Glossary)

अन्योन्य क्रिया	Interaction
आबंधन	Binding
द्वि ध्रुव	Dipole
प्रचक्रण	Spin
प्रतिकर्षी घातांक	Repulsive exponent
वियोजन	Dissociation
संसजक ऊर्जा	cohesive energy
सम्पीड्यता	compressibility
साम्यावस्था	Equilibrium

3.10 संदर्भ ग्रंथ (Reference books)

C Kittle	Introduction to solid state Physics	Wiley Easteren Ltd.
S.O. Pillai	Solid state Physics	New age Pub। Delhi
एस.एस रावत	ठोस अवस्था भौतिकी	कॉलेज बुक हाउस, जयपुर

3.11 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to the assessment question)

1. आयनिक प्रकृति होती है ।
2. जरमेनियम (Ge) में सहसयोजी आबंधन होता है ।
3. $U = -\dfrac{e^2}{4\pi \in_0 r_0}$
4. अल्प परास प्रतिकर्षी बलों के कारण आयन संलयित नहीं हो पाते ।
5. दोनों बाह्यतम अपूरित कोष में एक इलेक्ट्रॉन होता है ।
6. सम्पीड्यता $\beta_0 = \dfrac{72\pi \in_0 r_0^4}{Ae^2(n-1)}$
7. सह संयोजी आबंधन होता है ।
8. बंध की लम्बाई 0.74 $\mathring{A}$ होती है ।
9. $U = -\dfrac{a}{r^m} + \dfrac{b}{r^n}$
10. हाइड्रोजन आबंधन

3.12 अभ्यासार्थ प्रश्न (Excercise)

अति लघुत्तरात्मक प्रश्न (very short answer type questions)

1. क्रिस्टल आबंधन कितने प्रकार के होते है? उनके नाम बताइये ।
2. आयनिक क्रिस्टल की संसजक ऊर्जा को परिभाषित कीजिये ।
3. एक विमीय आयनिक क्रिस्टल के लिये मैडेलुंग नियतांक का मान कितना होता है?
4. आयनिक क्रिस्टल की संसजक ऊर्जा में किन-किन ऊर्जाओं का योगदान होता है?
5. क्रिस्टलों में हाइड्रोजन आबंधन का निर्माण किस प्रकार होता है?

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

6. ठोस पदार्थो में लगने वाले अन्तर परमाणवीय बलो का वर्णन कीजिये ।
7. आयनिक क्रिस्टल के लिए सम्पीड्यता गुणांक का व्यंजक ज्ञात कीजिये ।
8. सिद्ध कीजिये कि NaCl क्रिस्टल का मैडेलुंग नियतांक 1.7476 होता है ।
9. वान्डरवाल आबंधन क्या हैं? यह आबंधन किन क्रिस्टलों में पाया जाता है ।
10. हाइड्रोजन आबंधन क्या है? उदाहरण बेकर इसके निर्माण को समझाइये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

11. किसी अणु की स्थितिज ऊर्जा निम्न सूत्र द्वारा दी जाती है

$$U(r) = -\frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}}$$

ज्ञात कीजिये - (i) साम्यावस्था दूरी, (ii) शून्य स्थितिज ऊर्जा की अवस्था में अन्तर परमाणविक दूरी, (iii) न्यूनतम स्थितिज ऊर्जा ।

(उत्तर : (i) $\left(\frac{2b}{a}\right)^{1/6}$ (ii) $(2)^{-\frac{1}{6}}$, (iii) $-\frac{a^2}{4b}$)

12. NaCl क्रिस्टल में अन्तरापरमाणुक दूरी 2.80 $\mathring{A}$ है । प्रतिकर्षी विभव B/r^n है, जहां मैडुलंग नियतांक α=1.748 तथा n=9 है । आयनिक क्रिस्टल में स्थितिज ऊर्जा का प्रति आयन योगदान की गणना कीजिये । यदि Na आयन की आयनन ऊर्जा 5.14 इलेक्ट्रॉन-वोल्ट तथा Cl आयन की इलेक्ट्रॉन बंधुता - 3.61 इलेक्ट्रॉन-वोल्ट हो तो इलेक्ट्रॉन स्थानान्तरण ऊर्जा तथा संसजक ऊर्जा प्रति परमाणु की भी गणना करो ।

(**उत्तर :** यू=-3.98 eV, स्थानान्तरण ऊर्जा = 1.53 इलेक्ट्रान-वोल्ट, संसजक ऊर्जा= -3.21 इलेक्ट्रॉन-वोल्ट)

13. KCl क्रिस्टल में जालक नियतांक 3.144 $\mathring{A}$,मैडेलुंग नियतांक 1.748 तथा प्रतिकर्षी घातांक 5.77 है । KCl की संसजक ऊर्जा प्रति परमाणु की गणना कीजिये । KCl की संसजक ऊर्जा प्रति परमाणु की गणना कीजिये । K आयन की आयनन ऊर्जा 4.35 इलेक्ट्रॉन-वोल्ट तथा Cl आयन की इलेक्ट्रॉन बंधुता 3.62 इलेक्ट्रॉन-वोल्ट है ।

(**उत्तर** : -295 इलेक्ट्रॉन-वोल्ट)

14. CsCl क्रिस्टल का जालक नियतांक 4.11 $\mathring{A}$, मैडेलुंग नियतांक 1.76 तथा प्रतिकर्षी घातांक 10.5 है । क्रिस्टल के सम्पीड्यता गुणांक की गणना कीजिये ।

(**उत्तर** 7.48 x 10^{11} मी^{2}/न्यूटन)

इकाई-4

क्रिस्टल अपूर्णता (Crystal Imperfections)

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य

4.1 प्रस्तावना

4.2 बिन्दु दोष

4.3 फ्रेन्कल दोष

4.4 शॉटकी दोष

4.5 सारांश

4.6 शब्दावली

4.7 संदर्भ ग्रन्थ

4.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

4.9 अभ्यासार्थ प्रश्न

4.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप-

- आदर्श क्रिस्टल क्या है, समझ सकेंगे
- क्रिस्टल में विभिन्न संभव अपूर्णताओं (Imperfections) के बारे में जान सकेंगे
- बिन्दु दोष क्यों उत्पन्न होते हैं, जान सकेंगे
- फ्रेन्कल दोष एवं शॉटकी दोषों को समझ सकेंगे तथा इनके लिये सान्द्रता का व्यंजक निकालने में समर्थ हो सकेंगे ।

4.1 प्रस्तावना (Introduction)

एक आदर्श क्रिस्टल वह है जिसमें उसके परमाणु क्रिस्टल संरचना में सही जालक स्थितियाँ पर विराम एवं आवर्त स्थिति में हों । इस प्रकार का आदर्श क्रिस्टल, केवल 0 K पर ही संभव है । सभी वास्तविक तापों पर क्रिस्टल के परमाणु कम्पन करते रहते हैं । इस कारण इन तापों पर परमाणुओं के लिये इनकी विराम स्थिति में बने रहना असभंव होता है । क्रिस्टल में इस प्रकार की स्थिति को क्रिस्टल अपूर्णता (imperfection) की श्रेणी में रखा जा सकता है। परमाणुओं के कम्पनों का आयाम ताप पर निर्भर करता है और यह आयाम अन्तरपरमाण्वीय दूरी के तुलना में अत्यल्प होता है, फिर भी इसके कारण ठोस के कई गुणधर्म प्रभावित होते हैं। क्रिस्टल में ताप के कारण उपरोक्त अपूर्णता के अतिरिक्त अन्य अपूर्णताए भी देखने को मिलती हैं जो क्रिस्टल संरचना में परमाणुओं की आदर्श स्थिति में उपस्थित न रहने के कारण अथवा अपनी वास्तविक स्थिति से अन्य स्थान पर विस्थापित होने के कारण उत्पन्न होती हैं । यहाँ हम इसी प्रकार की क्रिस्टल अपूर्णताओं के बारे मैं विवेचना करेंगे । कुछ क्रिस्टलों में इन

अपूर्णताओं की सान्द्रता अत्यल्प (<< 1%) होती है, जैसे परिशुद्ध हीरा, ,क्वार्टज । कुछे अन्य क्रिस्टलों में अपूर्णता की सान्द्रता अत्यधिक (1%) होती है और ऐसा प्रतीत होता है कि जैसे क्रिस्टल संरचना में इनका महत्वपूर्ण योगदान हो । जालक में इस प्रकार की अपूर्णताए निश्चय ही क्रिस्टल संरचना को प्रभावित करती हैं । परन्तु ये ही अपूर्णताएं पदार्थ में किन्हीं अन्य गुणों का सृजन भी करती है । पदार्थ में वैद्युत प्रतिरोध एवं यांत्रिकीय प्रबलता जैसे गुण जालक में विशेष प्रकार की अपूर्णताओं के कारण ही संभव है। अत: शुद्ध क्रिस्टल संरचना के साथ साथ अपूर्णता युक्त क्रिस्टल का अध्ययन भी अति आवश्यक है ।

अनुच्छेद 4.2 में हम बिन्दु दोष का अध्ययन करेंगे । अन्य प्रकार की का संक्षिप्त अध्ययन भी इसी अनुच्छेद में करेंगे । बिन्दु अपूर्णताओं को दो भागों में विभाजित किया जा है- फ्रेन्कल एवं शॉटकी दोष । इनकी विस्तार से चर्चा क्रमश: अनुच्छेद 4.3 व 4.4 में करेंगे ।

4.2 बिन्दु दोष (Point defects)

क्रिस्टलीय पदार्थों में पाये जाने वाली अपूर्णताओं को विमाओं के आधार पर निम्न चार भागों में विभाजित किया जा सकता है ।

(अ) बिन्दु अपूर्णताएं (शून्य विमा दोष)

(ब) रैखिक अपूर्णताएं (एकल विमा दोष)

(स) सतह अपूर्णताएं (द्‌वि-विमा दोष)

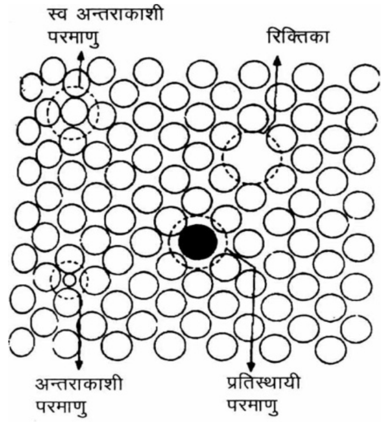
(द) आयतनीय अपूर्णताएं (त्रि-विमा दोष)

हम यहाँ पर उपरोक्त अपूर्णताओं में से बिन्दु दोष (point defect) पर ही विस्तार से अध्ययन करेंगे । किसी रेखा के अनुदिश परमाणुओं की शुद्ध आवर्त व्यवस्था में किसी भी प्रकार का विचलन (deviation) रेखा अपूर्णता कहलाती है । ज्यामितीय दृष्टि से इसे एक-विमीय अपूर्णता कह सकते हैं । इसी प्रकार, सतह अपूर्णताएं ज्यामितीय दृष्टि से द्‌वि-विमा युक्त होती है । यह उन विकृत (distorted) स्थानों / क्षेत्रों के बारे में इंगित करती है जो एक सतह में उपस्थित होती हैं । इन सतहों की मोटाई कुछ परमाण्वीय व्यास के बराबर हो सकती है । रेणु परिसीमा (grain boundary), प्रणति सीमा (tilt boundary) , व्यावर्तित परिसीमा (twisted boundary), यमल सीमा (twin boundary), चितिकरण दोष (stacking fault), सतह अपूर्णताओ की विशेष श्रेणी है । आयतनीय अपूर्णताएं की श्रेणी में विजातीय कण समावेशन (foreign particle inclusion), वृहद शून्यिका (large voids), वृहद छिद्र (large pores), अक्रिस्टलीय क्षेत्र (non- crystalline regions) आते है । इनका आयतन अत्यल्प (10 A^3) होता है ।

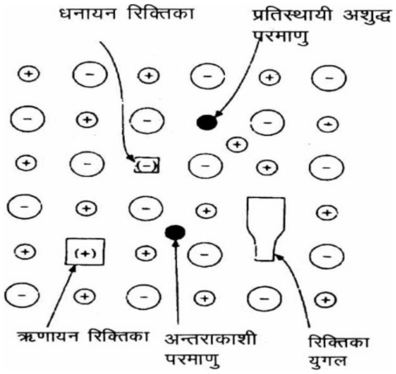
बिन्दु दोष, सभी अपूर्णताओं में सबसे सरल अपूर्णता दोष है । इसमें एक या दो परमाणु भाग लेते हैं अत: इसे शून्य विमा दोष भी कहा गया है । धात्विक क्रिस्टलों में पाये जाने वाले बिन्दु अपूर्णता को चित्र 4.1 में दिखाया गया है एवं आयनिक क्रिस्टल में पाये जाने वाले बिन्दु दोष को चित्र 4.2 में दिखाया गया है । बिन्दु दोष विलगित जालक बिन्दुओं पर

जालक दोष को कहते है । प्रमुख रूप से ये दो प्रकार के होते हैं अन्तरालीय /अन्तराकाशी परमाणु (interstitial atom) और रिक्तिका (vacancy) ।

अन्तराकाशी परमाणु से यह तात्पर्य है कि क्रिस्टल की नियमित परमाण्वीय में उपस्थित शून्यिका (void) में कोई अन्य परमाणु स्थित है यह परमाणु एक अशुद्धि परमाणु (atom impurity) अथवा एक शुद्ध (pure) परमाणु (अर्थात् क्रिस्टल जिन परमाणुओं से मिलकर बना है, उसी तरह का एक परमाणु) भी हो सकता है । छोटे आकार के परमाणु व आयनों द्वारा अन्तराकाशी स्थल ग्रहण करने की संभावना अधिक प्रबल होती है । जब एक अन्य प्रकार का परमाणु क्रिस्टल के किसी एक परमाणु को प्रतिस्थापित करता है तो उसे प्रतिस्थापी अशुद्ध परमाणु (impurity atom) कहते हैं । इसी प्रकार रिक्तिका से यह तात्पर्य है कि एक परमाण्वीय क्रिस्टल में वह स्थल (site) जहाँ से परमाणु अनुपस्थित हों । शॉटकी परमाण्वीय दोष भी एक प्रकार की रिक्तिका ही है जिसमें कोई परमाणु अपनी नियमित स्थल से, विभिन्न क्रमागत पदों में विसरण करता हुआ सतह पर स्थित हो जाता है ।



चित्र 4.1



चित्र 4.2

आयनिक क्रिस्टल में रिक्तिका या तो गणायन पर या धनायन स्थल पर होगी, जहाँ यह विद्युतीय दृष्टि से उदासीन होनी चाहिये । यह निम्न दो तरीकों से प्राप्त की जा सकती है।

(1) यदि क्रिस्टल में जितनी धनायन रिक्तिकाएं हो, उतनी है ऋणायन रिक्तिकाएं हों । एक धनायन रिक्तिका एवं एक ऋणायन रिक्तिका के संयोग (combination) को एक शाँटकी दोष (schottky defect) कहते हैं ।

(2) यदि क्रिस्टल में प्रत्येक आयनिक रिक्तिका के लिये, उसी प्रकार के आवेश वाला अन्तराकाशी परमाणु उपस्थित हों तो रिक्तिका एवं अन्तराकाशी परमाणु के इस संयोग को फ्रेन्कल दोष (frenkel defect) कहते हैं ।

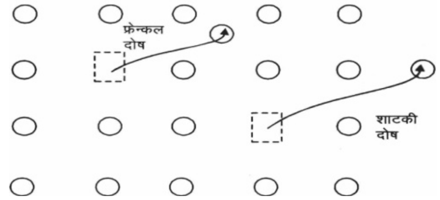
अब हम बिन्दु दोषों की संख्या पर विचार करते है । ऊष्मागतिकी से हम जानते हैं कि किसी ठोस की साम्य अवस्था में इसकी स्वतन्त्र उर्जा F = E-TS का मान न्यूनतम होता है । यहाँ E, S व T क्रमश: ठोस की आन्तरिक उर्जा, ऐन्ट्रापी एवं केल्विन पैमाने पर तापक्रम है । हम यह भी जानते हैं कि संघनीय (condensed) निकायों (जैसे द्रव व ठोस अवस्था) में आन्तरिक उर्जा का मान निकाय की रन्थाल्पी H के तुल्य होता है । ऐसा इसलिये होता है कि H=E + PV व्यंजक में PV पद का मान अत्यल्प माना जा सकता है । स्वतन्त्र उर्जा F के व्यंजक से स्पष्ट है कि जालक में हर ताप पर किसी न किसी मात्रा में अव्यवस्था (disorder) की मात्रा उपस्थित रहती है । अत: समझने योग्य तथ्य यह है कि ठोस में दोषों का कारण ऊष्मागतिक परिस्थितियाँ हैं ।

जैसा कि ऊपर बताया गया है कि ठोस में नियमित परमाण्वीय स्थल पर परमाणु का न होना रिक्तिका है । एक रिक्तिका को उत्पन्न करने के लिये हमें आन्तरिक परमाणु को इसके नियमित! स्थल से क्रिस्टल की सतह पर किसी स्थल तक लाना होता है । देखें चित्र 4.3 । इस प्रकार से क्रिस्टल में दोषों / अपूर्णताओ को समावेश करने पर इसकी आन्तरिक उर्जा में परिवर्तन निम्न दो प्रकार से होता है । एक तो स्थैतिक जालक में अपूर्णता / दोष उत्पन्न करने के लिये आवश्यक उर्जा और दूसरा उत्पन्न दोष के स्थल से संबंधित कम्पनीय उर्जा में परिवर्तन । अत: क्रिस्टल की एन्ट्रापी में परिवर्तन का पहला प्रमुख कारण-परमाणीय दोलकों की आवृत्ति में परिवर्तन के कारण ऊष्मीय एन्ट्रापी में परिवर्तन तथा दूसरा रिक्तिका के परमाण्वीय स्थलों के चयन प्रक्रिया की स्वतन्त्रता के कारण उत्पन्न विन्यास एन्ट्रापी ।

अब हम एक परमाण्वीय क्रिस्टल में रिक्तिका उत्पन्न करने में उपयोगी आवश्यक पदों की गणना करते हैं ।

माना प्रत्येक बिन्दु दोष उत्पन्न करने की आवश्यक उर्जा का मान E_s (इलेक्ट्रान वोल्ट) है । क्रिस्टल के अन्दर से सतह तक लाने में आवश्यक उर्जा E_H तथा प्रति परमाणु जालक उर्जा का मान E_L हों तो ।

$$E_s = E_H - E_L \quad ....(4.1)$$



चित्र 4.3

क्रिस्टल में n दोष उत्पन्न करने पर क्रिस्टल की आन्तरिक उर्जा में परिवर्तन होगा

$$N E_s = n (E_H - E_L)$$

अत: अपूर्ण क्रिस्टल की आन्तरिक उर्जा

$$E = E_P + nE_s \qquad ...(4.2)$$

E_P क्रिस्टल की आन्तरिक उर्जा है ।

शुद्ध क्रिस्टल की ऊष्मीय एन्ट्रापी का मान निम्न होता है।

$$S_P = 3Nk\left[1+\ln\left(\frac{kBT}{h\nu}\right)\right] \qquad ....(4.3)$$

तथा अपूर्ण क्रिस्टल में ऊष्मीय एन्ट्रापी में परिवर्तन निम्न व्यंजक से दिया जाता है:

$$S_{th} = nk_B \ln\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^x \qquad ....(4.4)$$

यहाँ x उन परमाणुओं की संख्या है जो रिक्तिका को घेरे हुये है । ν' अपूर्ण क्रिस्टल में इन x परमाणुओं की आवृत्ति है ।

जहाँ तक विन्यासीय एन्ट्रापी का प्रश्न है इसका उर्जा वितरण से कोई सम्बन्ध नहीं है; यह मात्र इस बात पर निर्भर करेगी कि जालक स्थलों में उन्हें कितने विभिन्न तरीकों से व्यवस्थित किया जा सकता है । यदि एक ऐसे क्रिस्टल जिसमें N जालक स्थल हैं तथा इसमें n रिक्तिकाऐ हैं, तब इन प्र रिक्तिकाओं तथा (N-n) समरूपी परमाणुओं को व्यवस्थित करने के तरीकों की संख्या

$$W = \frac{N!}{(N-n)!n!} \qquad ....(4.5)$$

इन विभिन्न तरीकों W के कारण उत्पन्न विन्यास एन्ट्रापी का मान बोल्टजमान सेमी.करण ($S = k_B \log W$) से प्राप्त करते हैं ।

$$S_{cf} = k_B \log W = k_B \ln\left(\frac{N!}{(N-n)!n!}\right)$$

अत: अपूर्ण क्रिस्टल में कुल एन्ट्रापी होगी

$$S = S_{th} + S_{cf}$$

और स्वतन्त्र उर्जा का मान होगा

$$F = E_P + nE_s - nk_BT\log\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{3x} - k_BT\ln\left[\frac{N!}{(N-n)!n!}\right]$$

साम्यावस्था में n का मान $\frac{\partial F}{\partial n} = 0$ करके प्राप्त किया जाता है ।

$$\frac{\partial F}{\partial n} = E_s - k_BT\log\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{3x} - k_BT\frac{\partial}{\partial n}\log\left[\frac{N!}{(N-n)!n!}\right]$$

$$E_s = k_B T \log\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{3x} - k_B T \log\left(\frac{N-n}{n}\right) = 0$$

Or $$k_B T \log\left(\frac{N-n}{n}\right) = -k_B T \log\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{3x} + E_s$$

$$\log\left(\frac{n}{N-n}\right) = \log\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{3x} + \frac{E_s}{k_B T}$$

$$\frac{n}{N-n} = \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{3x} \exp\left(\frac{-E_s}{k_B T}\right)$$

चूंकि $n<N$, अत:

$$n = N\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{3x} \exp\left(\frac{-E_s}{k_B T}\right)$$

एक मोल परमाणु के लिये

$nk_BT= RT$

तथा $\Delta H=NE_s$

अत: $$n = N\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{3x} \exp\left(\frac{-\Delta H}{RT}\right) \quad ....(4.8)$$

स्टर्लिंग सूत्र $\log N! = N \log N - N$ का उपयोग करने पर

$$\log\left(\frac{N!}{(N-n)!n!}\right) = N\log N - N - (N-n)\log(N-n) + (N-n) - n\log n + n$$

$$= N\log N - (N-n)\log(N-n) - n\log n$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\log\left(\frac{N!}{(N-n)!n!}\right) = \frac{-(N-n)}{(N-n)}(-1) - \log(N-n)(1) - \frac{n}{n}.1 - \log n$$

$$\log\left(\frac{N-n}{n}\right)$$

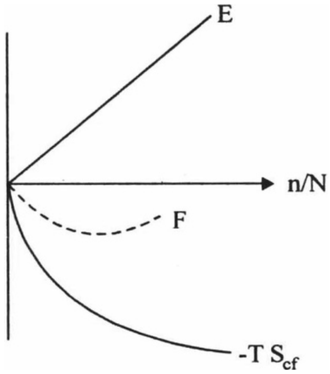
सेमी. (4.7) में E_s मान इलेक्टॉन-वोल्ट में तथा सेमी. (4.8) में ΔH मान किलो जूल/मोल में है । सारणी 4.। में कुछ एकल परमाण्वीय क्रिस्टलों में रिक्तिकाओं के बनने की उर्जा दी हुयी है । चूंकि $\nu > \nu'$, अत: ऊष्मीय एन्ट्रापी, रिक्तिकाओ के बनने में योगदान देती है । (ν/ν') का मान घात 3x के कारण और भी अधिक हो जाता है ।

सारणी 4.1 एकल परमाण्वीय क्रिस्टलों में रिक्तिकाओ के बनने की उर्जाऐं

क्रिस्टल	Pb	Mg	Al	Ag	Cu	Ni

ΔH(kJ / mol)	48	56	68	106	120	168
E_s(eV)	0.50	0.58	0.70	1.10	1.24	1.74

उपरोक्त परिणाम यह समझने में सहायक है कि किसी भी ताप पर जालक दोष क्यों होते हैं? उदाहरण के लिये किसी शुद्ध क्रिस्टल में हम परमाणुओं को क्रिस्टल के आन्तरिक भाग से सतह पर लाते है । इसके लिये हमें कुछ उर्जा की आवश्यकता होगी । क्रिस्टल की आन्तरिक उर्जा E के मान में वृद्धि होगी । इसे चित्र 4.4 में दिखाया गया है इसके परिणामस्वरूप, क्रिस्टल की स्वतन्त्र उर्जा F भी बढती है जो कि ऊष्मागतिकी के अनुकूल नहीं (Unfarourable) है । दूसरी तरफ रिक्तिकाओं के उत्पन्न होने के कारण क्रिस्टल में अव्यवस्था बढ़ती है जो कि विन्यास एन्ट्रापी का मान बढ़ाती है । चूंकि एन्ट्रापी, स्वतन्त्र उर्जा के व्यंजक (F=E-TS) में उपस्थित है, अत: एन्ट्रापी के बढने से स्वतन्त्र उर्जा का मान कम होता है जो कि ऊष्मागतिकी के अनुकूल है । अत: आन्तरिक उर्जा तथा एन्ट्रापी दु के बीच प्रतिस्पर्धा के परिणामस्वरूप, क्रिस्टल एक स्थायी अवस्था को प्राप्त करता है जिसमें कुछ न कुछ रिक्तिकाओं का समावेश होना आवश्यक है । चित्र 4.4 में F का n/N के साथ परिवर्तन दिखाया गया है । यहाँ सरलता के लिये ऊष्मीय एन्ट्रापी को n/N से मुक्त माना है । किसी भी ताप पर F का न्यूनतम मान स्थायी अवस्था को व्यक्त करता है ।



चित्र 4.4

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. बिन्दु दोष किसे कहते हैं?

उदाहरण 4.1 ऊष्मीय एन्ट्रापी को नगण्य मानते हुये किसी एक परमाण्वीय ठोस के एक मोल में रिक्तिकाओं की संख्या ज्ञात करो यदि E_s = 1 eV तथा T=1000 K हों ।

हल: हम जानते है कि

$$\frac{n}{N} = \exp\left(\frac{-E_s}{kT}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{-1}{8.6\times10^{-5}\times1000}\right)$$

=exp(-11.6)

$=10^{-5}$

$n=10^{-5}N = 6.023 \times 10^{23} \times 10^{-5}$

$n = 6.023 \times 10^{18}$

4.3 फ्रेन्कल दोष (Frenkal defects)

जैसा कि आपने अनुच्छेद 4.2 में अध्ययन किया कि जब एक परमाणु इसकी नियमित जालक स्थल से किसी अन्य अन्तराकाशी स्थल पर स्थानान्तरित हो जाता है तब इस प्रकार की अपूर्णता को फ्रेन्कल दोष कहते हैं । इसमें दो घटक हैं- रिक्तिका तथा अन्तराकाशी परमाणु ।

माना एक फ्रेन्कल दोष उत्पन्न करने के लिये आवश्यक उर्जा का मान E_F है । यदि क्रिस्टल में N जालक स्थल है, N_i अन्तराकाशी स्थल है तथा n फ्रेन्कल दोष है तो (N-n) समरूपी परमाणुओं एवं n समान रिक्तिकाओ को N स्थलों में निम्न तरीकों से समायोजित कर सकते हैं:

$$\frac{N!}{(N-n)!n!}$$

इसी प्रकार n समान रिक्तिकाओ एवं (N_i-n) समरूपी परमाणुओं को Ni स्थलों में समायोजित करने के विभिन्न तरीकों की संख्या

$$\frac{N_i!}{(N_i-n)!n!}$$

अत: विन्यास के आधार पर व्यवस्थित होने की कुल विभिन्न तरीकों की संख्या

$$Wcf = \frac{N!}{(N-n)!n!} \times \frac{N_i!}{(N_i-n)!n!} \quad ......(4.9)$$

अनुच्छेद 42 में अपनायी गयी विधि के अनुरूप फ्रेन्कल दोषों के लिये भी निम्न प्राप्त किया जा सकता है ।

$$\frac{n}{(NN_i)^{\frac{1}{2}}} = \gamma \exp\left(\frac{-E_f}{2k_BT}\right) \quad ......(4.10)$$

$$\frac{n}{(NN_i)^{\frac{1}{2}}} = \gamma \exp\left(\frac{-\triangle H_F}{2RT}\right) \quad ...(4.11)$$

चरघातांकी पद के गुणांक γ का संबंध उस ऊष्मीय एन्ट्रापी से है जो रिक्तिका एवं अन्तराकाशी परमाणु के पड़ोस में उपस्थित अन्य परमाणुओं की कम्पनीय आवृत्ति में परिवर्तन

के फलस्वरूप है । फ्रेन्कल दोष के रिक्तिका घटक के कारण γ से संबधित पद $\left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{3x}$ होगा । यदि यह मान लिया जाये कि अन्तराकाशी परमाणु की समन्वय संख्या (coordination number)y है तथा अन्तराकाशी परमाणु एवं इसके पड़ोसी परमाणुओं की कम्पन आवृतियाँ क्रमश: ν_i, व ν_i' हो तो γ के लिये निम्न सूत्र प्राप्त किया जा सकता है ।

$$\gamma = \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{3x}\left(\frac{\nu^{y+1}}{\nu_i \nu_i'^{y}}\right) \qquad \text{......(4.12)}$$

इस परिणाम के निम्न प्रभाव हैं: -

$\nu > \nu'$ होने की स्थिति में ऊष्मीय-एन्ट्रापी शॉटकी रिक्तिकाओं के निर्माण कि लिये सहायक है, परन्तु जब फ्रेन्कल दोष उत्पन्न होते है तब निश्चय ही ν_i व ν_i' के मान से ν अधिक होते हैं क्योंकि γ का मान एक से कम होना चाहिये । परिणामस्परूप यह समझना आसान है कि ऊष्मीय एन्ट्रापी फ्रेन्क्रल दोष उत्पन्न करने में सहायक नहीं है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

2. फ्रेंकल दोष उत्पन्न होने के लिए ऊष्मीय एंट्रापी सहायक है? यदि नहीं तो किस प्रकार की एंट्रापी इसके लिए उतरदायी है ?

उदाहरण 4.2 किसी आयनिक क्रिस्टल A^{2+},' B^{2-} में एक फ्रेन्कल दोष उत्पन्न करने के लिये आवश्यक उर्जा 1.4 इलेक्ट्रॉन-वोल्ट है तो 1 ग्राम क्रिस्टल में 300 K व 600 K पर फ्रेन्कल दोषों का अनुपात ज्ञात करो ।

हल: हम जानते है कि

$$n = (NN_i)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{E_F}{2k_B T}\right)$$

अत:
$$n_{300} = (NN_i)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1.4}{600 k_B}\right)$$

तथा
$$n_{600} = (NN_i)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1.4}{1200 k_B}\right)$$

अत:
$$\frac{n_{300}}{n_{600}} = \exp\left(-\frac{1.4}{600 k_B} + \frac{1.4}{1200 k_B}\right)$$

$$= \exp\left[\frac{-1.4}{k_B}\left(\frac{1}{600} - \frac{1}{1200}\right)\right]$$

$$= \exp\left[\frac{-1.4}{8.6\times10^{-5}}\left(\frac{1}{600} - \frac{1}{1200}\right)\right]$$

$$= 1.316\times10^{-6}$$

4.4 शॉटकी दोष (Schottky defect)

अधात्विक क्रिस्टलों में रिक्तिकाओ के बनने की प्रवृति होती है । यदि किसी धनायन स्थल पर रिक्तिका है तो आवेश उदासीनता के कारण इसके पड़ोस में ऋणायन स्थल पर एक ओर रिक्तिका उत्पन्न हो जाती है । इस प्रकार की युगल रिक्तिकाऐ एक शॉटकी दोष उत्पन्न करती है ।

हम एक ऐसे शुद्ध /पूर्ण क्रिस्टल पर विचार करते है जिसमें धनावेशित आयनों व ऋणावेशित आयनों की संख्या बराबर हो, जैसे आयनिक ठोस । इस प्रकार के ठोसों में बराबर मात्रा में ऋणायन एवं धनायन रिक्तिकाओं का बनना उर्जा की दृष्टि से आसान है । देखें चित्र 4.2 । इस प्रकार के युगल रिक्तिखाओं के निर्माण में क्रिस्टल का छोटा सा क्षेत्र भी विद्युतीय उदासीन अवस्था में रहता है । माना कि क्रिस्टल में n धनायन व n ऋणायन रिक्तिकाऐ है जिनके बनने में व्यय उर्जा क्रमश: E_C व E_A, हैं । अत: एक युगल रिक्तिका के बनने में आवश्यक उर्जा

$$E=E_C+E_A \qquad ....(4.13)$$

अत: अपूर्ण क्रिस्टल की आन्तरिक उर्जा

$$E_1=E_P+nE \qquad ...(4.14)$$

यहाँ पूर्ण क्रिस्टल की स्वतन्त्र उर्जा

$$F_P=E_P-TS_P \qquad ...(4.15)$$

यहाँ उर्जा E_P में बन्धन उर्जा एवं कम्पनीय उर्जा समाहित है । यहाँ एन्ट्रापी मात्र उष्मीय कारणों से है क्योंकि $W_{cf}=1$ तथा $S_{cf}=0$ ।

n धनायन व n ऋणायन रिक्तिकाओ वाले क्रिस्टल की विन्यासीय एन्ट्रापी,

$$S_{cf}=k_B ln\left(\frac{N!}{(N-n)!n!}\right)^2 \qquad ....(4.16)$$

यहाँ वर्ग पद उन विभिन्न तरीकों की संख्या बताता है जो n समरूपी (धनायन या ऋणायन) रिक्तिकाओ तथा (N-n) समरूपी आयनों (धनायन या ऋणायन) के N स्थलों मे व्यवस्थित होने की है ।

चूँकि अपूर्ण क्रिस्टल में 6nx रेखिक दोलक ν'आवृत्ति से तथा (6N - 6nx) दोलक ν आवृत्ति से कम्पन करते हैं यहाँ x उन पड़ोसी परमाणुओं की संख्या है जो रिक्तिका के चारों ओर है) । अत: पूर्ण व अपूर्ण क्रिस्टलों की ऊष्मीय आवृत्ति निम्न होगी:

$$S_P\ 6NK=\left[1+\ln\frac{k_BT}{h\nu}\right] \qquad ....(4.17)$$

तथा

$$S_1=6nxk\left[1+\ln\frac{k_BT}{h\nu}\right]+(6N-6nx)k_B\left[1+\ln\frac{k_BT}{h\nu}\right] \qquad ...(4.18)$$

अत: अपूर्ण क्रिस्टल की स्वतन्त्र उर्जा

$$F = Ep + nE - 6n \times k_B T \ln\left(\frac{\nu}{\nu'}\right) - k_B T \ \ln\left(\frac{N!}{(N-n)!n!}\right)^2 \quad ...(4.20)$$

साम्यावस्था में n का मान प्राप्त करने के लिये उपरोक्त सेमी. (4.20) से $\frac{\partial F}{\partial n}$ का मान प्राप्त कर शून्य के बराबर लिखते हैं तथा स्र्टलिंग सूत्र का प्रयोग कर निम्न सेमी.करण प्राप्त कर सकते है :

$$\frac{n}{N} = \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{3x} \exp\left(-\frac{E}{2k_B T}\right) \quad ....(4.21)$$

या

$$\frac{n}{N} = \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^{3x} \exp\left(-\frac{E_C + E_A}{2k_B T}\right) \quad ....(4.22)$$

यदि ऊष्मीय एष्ट्रॉपी को नगण्य मान ले तो शॉटकी दोष की संख्या के लिये निम्न व्यंजक लिखा जा सकता है

$$n = N \exp\left(-\frac{E_C + E_A}{2k_B T}\right) \quad ...(4.23)$$

उपरोक्त विवेचना से आप समझ सकते हैं कि बिन्दु दोषों की संख्या का व्यंजक फ्रेन्कल एवं शाटको दोषों के लिये भिन्न भिन्न है । यह भिन्नता इस कारण है कि इन दोषों को उत्पन्न करने के लिये आवश्यक उर्जा भिन्न हैं । यद्यपि ठोसों में दोनों ही प्रकार के अपूर्णता/दोष होते हैं फिर भी एक प्रकार के दोष की अधिकता रहती है । धातुओं में रिक्तिकाओ की अधिकता रहती है परन्तु फ्रेरुल दोष भी पाये जाते है । प्रयोगों एवं सैदान्तिक गणनाओं से यह स्पष्ट हो चुका है कि क्षारीय हैलाइडस में शॉटकी दोषों की अधिकता है जबकि सिल्वर हैलाइड में 700 K के से कम ताप पर फ्रेन्कल दोष होते हैं ।

शॉटकी दोष युक्त क्रिस्टल में यह देखा गया है कि इसके आयतन एवं घनत्व में वृद्धि हो जाती है जबकि फ्रेन्कल दोष युक्त क्रिस्टलों में इनके मान अप्रभावित रहते हैं ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

3. किस दोष की उपस्थिति में क्रिस्टल का आयतन बढ जाता है ?

उदाहरण 4.3 NaCl क्रिस्टल में Na^+ व Cl^- आयनों के युगल को हटाने में आवश्यक उर्जा 2 इलेक्ट्रॉन-वोल्ट है । शॉटकी अपूर्णता की सान्द्रता का मान 300 K पर ज्ञात कीजिये । (k_B =8.61 x 10^{-5} eV/ K)

हल : चूंकि $$\frac{n}{N} = \exp\left(-\frac{E_P}{2k_B T}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{2}{2 \times 8.61 \times 10^{-5} \times 300}\right)$$

=exp(-38.7)

$=1.564 \times 10^{-17}$

अत: $n = N \times 1.564 \times 10^{-17}$

1 मोल क्रिस्टल के लिये

$n = 6.023 \times 10^{23} \times 1.564 \times 10^{-17}$

$= 9.42 \times 10^{6}$

1 मोल NaCl क्रिस्टल का आयतन =26.83 सेमी^{3}

अत: सान्द्रता = $\frac{9.42\times10^6}{26.83} = 0.35\times10^6$ सेमी^{3}

$=3.5 \times 10^6$ सेमी^{3}

4.5 सारांश (Summary)

- क्रिस्टल में अपूर्णताओं को विमा के आधार पर विभाजित किया जाता है । जैसे बिन्दु, रेखीय, सतही एवं आयतनीय दोष ।
- बिन्दु अपूर्णताओ की श्रेणी में फ्रेन्कल एवं शॉटकी दोष आते हैं ।
- किसी आयनिक क्रिस्टल में धनायन/ऋणायन रिक्तिका एवं अन्तराकाशी धनायन / ऋणायन के संयोग को फ्रेन्कल दोष कहते हैं ।
- किसी आयनिक क्रिस्टल में धनायन रिक्तिका एंव ऋणायन रिक्तिका के संयोइग को शॉटकी दोष कहते दूं ।

  किसी भी ताप T पर उपस्थित रिक्तिकाओ की संख्या

$$n = N\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

  यहाँ है, N, क्रिस्टल में परमाणुओं की संख्या तथा E वह ऊर्जा है जो परमाणु को क्रिस्टल के आन्तरिक भाग से बाहय भाग में ले जाने के लिये आवश्यक है ।

- शाँटकी दोषों की संख्या निम्न सूत्र से दी जाती है ।

$$n = N\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

- फ्रेन्कल दोषों की संख्या ज्ञात करने के लिये निम्न सूत्र है ।

$$n = (NN_i)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{-E}{k_B T}\right)$$

4.6 शब्दावली (Glossary)

अन्तराकाशी परमाणु	Interstitial atom
अपूर्णता	Imperfection
ऊष्मीय एन्ट्रापी	Thermal entropy

ऋणायन	Anion
दोष	Defect
धनायन	Cation
प्रतिस्थापी	Substitution
रिक्तिका	Vacancy
विन्यासीय एन्ट्रापी	Configurational entropy
शुद्ध	Pure
शुन्यिका	Void
संधनीय	Condensed

4.7 संदर्भ ग्रंथ (Reference Books)

C.M. Kachhava	Solid State Physics	Tata McGraw -Hill Publishing Company Ltd New Delhi
M.A. Wahab	Solid State Physics	Narosa Publishing House New Delhi

4.8 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer of self assessment question)

1. बिन्दु दोष विलगित जालक बिन्दुओं पर जालक दोष को कहते है ।
2. नहीं, इसके लिये विन्यासीय एन्ट्रापी की आवश्यकता होती है ।
3. शॉटकी दोष

4.9 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. फ्रेन्कल दोष क्या हैं?
2. शॉटकी दोष क्या हैं?
3. ऊष्मीय एष्ट्रॉपी किसे कहते हैं ?
4. विन्यासीय एष्ट्रॉपी किसे कहते हैं ?
5. आदर्श क्रिस्टल से आपका क्या तात्पर्य है ?
6. किसी क्रिस्टल में कितनी विभिन्न प्रकार की अपूर्णताऐं संभव हैं? उनके नाम लिखिये ।
7. रिक्तिका से आप क्या समझते हैं?

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

8. किसी एक परमाण्वीय क्रिस्टल में उपस्थित रिक्तिकाओं की संख्या और इसके एक परमाणु को आन्तरिक भाग से बाह्य भाग में ले जाने में आवश्यक उर्जा E में संबध ज्ञात कीजिये ।

9. फ्रेन्कल दोष किसे कहते हैं ? किसी क्रिस्टल में उपस्थित फ्रेन्कल दोषों की सान्द्रता के लिये सूत्र निकालिये ।

10. शॉटकी दोष को समझाते हुये एवं ऊष्मीय एन्ट्रापी को नगण्य मानते हुये इस दोष की सान्द्रता के लिये सूत्र प्राप्त कीजिये ।

11. किसी ताप पर साम्यावस्था में फ्रेन्कल दोषों की संख्या $(NN_i)^{1/2}$ के समानुपाती होती है, सिद्ध कीजिये । यहाँ N, क्रिस्टल में परमाणुओं की संख्या तथा N_i अन्तराकाशी परमाणुओं की संख्या है।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

12. स्टर्लिंग सूत्र का प्रयोग करते हुये निम्न व्यंजक का मान ज्ञात कीजिये

$$\frac{\partial}{\partial n}\left[\log\left[\frac{N!}{(N-n)!n!}\right]\right]$$

(**उत्तर :** $\log\frac{N-n}{n}$)

13. ताँबे में एक रिक्तिका उत्पन्न करने के लिये आवश्यक ऊर्जा का मान 1 eV है तो 1356 K पर प्रति मोल रिक्तिकाओ की संख्या ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर :** 11528×10^{20})

इकाई - 5

क्रिस्टल द्वारा तरंग विवर्तन

(Differection of Waves by Crystal)

इकाई की रूपरेखा

5.0 उद्देश्य

5.1 प्रस्तावना

5.2 एक्स किरण विवर्तन

5.3 लाउए सेमी.करणें

5.4 ईवाल्ड रचना

5.5 व्युत्क्रम जालक

5.6 सारांश

5.7 शब्दावली

5.8 संदर्भ ग्रन्थ

5.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

5.10 अभ्यासार्थ प्रश्न

5.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप -

- क्रिस्टल समतलों से एक्स किरणों का विवर्तन कैसे होता है, समझ सकेंगे;
- ब्रेग सेमी.करण की व्युत्पत्ति कर सकेंगे;
- लाउए सेमी.करणों की जानकारी एवं व्युत्पत्ति करने में समर्थ हो सकेंगे;
- ईवाल्ड रचना कर, ब्रेग नियम को व्युत्क्रम जालक में समझ सकेंगे;
- व्युत्क्रम जालक क्या है, इसके आधार सदिश क्या हैं, इसके क्या गुणधर्म है, समझ सकेंगे ।

5.1 प्रस्तावना (Introduction)

क्रिस्टलीय पदार्थो का प्रायोगिक अध्ययन, रांजन (Roentgen) द्वारा 1895 में एक्स किरणों के आविष्कार के बाद ही संभव हो सका । 1912 में मैक्स - वान लाउए (Max Von Laue) ने महसूस किया कि इन किरणों का तरंगदैर्ध्य, क्रिस्टल में अन्तरपरमाण्वीय दूरी (1 $\mathring{A}$) की कोटि का है । इसलिये उसने प्रस्तावित किया कि क्रिस्टलों को त्रिविमीय ग्रेटिंग (Three dimensional grating) की तरह प्रयोग कर इनसे एक्स किरणों के विवर्तन का अध्ययन किया जा सकता है ।

1913 में बेग (W.L.Bragg) ने वान लाउए द्वारा प्राप्त विवर्तन प्रारूप का सरलीकृत स्पष्टीकरण दिया और ब्रेग सेमी.करण की व्युत्पत्ति की, जिसे आप अनुच्छेद 5.2 में पढेंगे । स्वयं लाउए में क्रिस्टल के सरल स्थैतिक मॉडल के आधार पर सेमी.करणे व्युत्पन्न की, जिन्हें इन्हीं के नाम से जाना जाता है । ये सेमी.करणें एक्स किरण विवर्तन को पूर्ण रूपेण समझाती है । इनका अध्ययन आप अनुच्छेद 5.3 में करेंगे ।

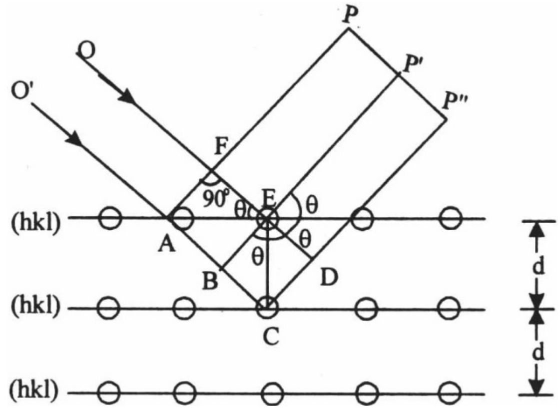
व्युत्क्रम जालक की अवधारणा ईवाल्ड (Ewald) द्वारा प्रतिपादित की गयी थी । ईवाल्ड ने ईवाल्ड रचना कर व्युत्क्रम जालक में एक्स किरण विवर्तन को समझाने का प्रयास किया जिसे आप अनुच्छेद 5.4 में पढ़ेंगे । अन्तिम अनुच्छेद 5.5 में व्युत्क्रम जालक एवं इसके गुणधर्मो के बारे में अध्ययन कर सकेंगे ।

5.2 एक्स किरण विवर्तन (X-ray diffraction)

अन्य विद्युत चुम्बकीय तरंगों की भांति ही एक्स किरणें परमाणुओं के इलेक्ट्रॉन बादल (cloud) के साथ अन्योन्य क्रिया करती हैं । (एक्स किरणों की तरंगदैर्ध्य लघु होने के कारण, ये क्रिस्टल के परमाणुओं से प्रकीर्णित हो जाती है, जो आपस में व्यतिकरण कर विवर्तन प्रभाव उत्पन्न करती हैं । जब एक्स किरणें क्रिस्टल में प्रवेश करती है तो क्रिस्टल का प्रत्येक परमाणु विवर्तन केन्द्र की तरह कार्य करने लगता है तथा सम्पूर्ण क्रिस्टल एक त्रि-विभीय (three dimensional) ग्रेटिंग की भांति काम करने लगता है । इस प्रकार से प्राप्त विवर्तन प्रारूप क्रिस्टल में परमाणुओं की आन्तरिक संरचना (internal structure) के बारे में सूचना प्रदान करने में सक्षम है । इसे स्पष्टता से समझने के लिये हम एक क्रिस्टल पर विचार करते हैं, जो परमाणुओं के समान्तर समतलों से बना है । ये समतल आपस में समान दूरी पर स्थित है तथा इनके मध्य दूरी को अन्तरतलीय दूरी (interplanery distance) d कहते हैं । अब हम एकवर्णी एक्स किरण पुन्ज, जिसकी तरंग λ है, पर विचार करते हैं । माना इससे निर्मित एक तरंगाग्र क्रिस्टल के उपरोक्त समतलों पर θ कोण पर आपतित होता है । चित्र 5.1 से स्पष्ट है कि यह कोण समतल के साथ बना कोण है और इसे पृष्ठसर्पी (glancing angle) कहते है । यद्यपि प्रत्येक परमाणु एक्स किरणों को कम या अधिक समान रूप से सभी दिशाओं में प्रकिर्णित करता है, परन्तु परमाणु के आवर्ती संरचना के कारण समान्तर तलों के समुच्चय में उपस्थित सभी परमाणुओं से प्रकीर्णित विकिरण किसी दिशा विशेष में एक ही कला में हो जाने के कारण संपोषी व्यतिकरण हो जाता है । शेष अन्य दिशाओं में विनाशी व्यतिकरण होने के कारण, ऐसा प्रतीत होता है कि आपतित एक्स किरण पुंज दिशा विशेष में परावर्तित हो गया है । अत इसे हम एक्स-किरण परावर्तन भी कहते हैं ।

चित्र 5.1 में क्रिस्टल के समतलों के एक समुच्चय (set of planes) समुच्चय (hkl) को दिखाया गया है । सबसे ऊपर वाले समतल पर दो एक्स किरणों OE तथा O'A को θ कोण पर आपतित दिखाया गया है । ये किरणें प्रकीर्णन के बाद समतल से θ कोण बनाते हुये AP व EP' दिशा में गमन कर जाती है । OEP' व O'AP किरणों का पथान्तर AF-EF है । पथान्तर का मान शून्य होने पर AP व EP' संपोषी व्यतिकरण उत्पन्न करेगी और इस दिशा

में एक्स किरण गमन करेगी । यह मात्र तब ही संभव है जब AP व EP' किरणें समतल से θ कोण के अतिरिक्त कोई अन्य कोण न बनायें । अन्य कोण होने पर AF-EF का मान शून्य के अतिरिक्त कुछ होगा जिसके कारण व्यतिकरण संपोषी नहीं हो सकता है । क्रिस्टल के एकल समतल द्वारा एक ही कला में प्रकीर्णन की यह शर्त है । सेमी.पवर्ती समतल का प्रभाव समझने के लिये आपतित एक्स किरण O'C पर विचार करते हैं जो प्रकीर्णन के बाद CP" दिशा में गमन करती है ।



चित्र 5.1 में क्रिस्टल समतलों से एक्स किरण विवर्तन

आप यहां देख सकते हैं किरण OE P' की तुलना में किरण O' CP" का पथ अधिक लम्बा है । यह पथान्तर के रूप में BCD है । यदि प्रकीर्णित किरण निकटवर्ती समतल से θ कोण पर निकलती है तो BCD का मान 2BC के तुल्य होगा । समकोणीय त्रिभुज EBC से BC का मान ज्ञात किया जा सकता है जो d $\sin\theta$ के बराबर है । अत: दोनों किरणों के मध्य पधान्तर Δ=2d$\sin\theta$। दो निकटवर्ती समतल एक ही कला में प्रकीर्णित करें, इसके लिये आवश्यक है कि 2d$\sin\theta$ का मान λ या 2λ या 3λ या nλ के तुल्य हो । अत: समअन्तराल के समान्तर समतलों द्वारा एक ही कला में प्रकीर्णन के लिये आवश्यक शर्त निम्न हुयी ।

$$2d\sin\theta = n\lambda \qquad ...(5.1)$$

सेमी.करण (5.1) को ब्रेग नियम (Bragg's) कहते हैं । यहां n परावर्तन की कोटि कहते हैं । उपरोक्त विवेचना से स्पष्ट है कि प्रकीर्णित किरण पुन्ज परावर्तन की ज्यामिती का पालन करता है ।

सेमी.करण (5.1) से

$$\frac{n\lambda}{2d} = \sin\theta \qquad ...(5.2)$$

$\sin\theta$ का अधिकतम मान 1 है अत: $\frac{n\lambda}{2d}$ सदैव ही 1 या इससे कम होना चाहिये । प्रथम कोटि के लिये λ का मान अन्तरतलीय दूरी d के दुगने से कम ही होना चाहिये अन्यथा विवर्तन नहीं होगा ।

ब्रेग सेमी.करण का उपयोग एक्स किरण की तरंगदैर्ध्य अथवा क्रिस्टल के समतलों की अन्तरतलीय दूरी ज्ञात करने में किया जाता है । पृष्ठसर्पी कोण प्रायोगिक विधि से ज्ञात किया जाता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. क्रिस्टल में समान्तर समतलों का एक समुच्चय है जिसकी अन्तरतलीय दूरी 2.54 $\overset{\circ}{A}$ है । क्या 6 $\overset{\circ}{A}$ तरंगदैधर्य की X- किरण इन समान्तर समतलों से विवर्तित हो सकेगी?

उदाहरण 5.1 किसी क्रिस्टल से एक्स किरणों का प्रथम कोटि का विवर्तन 15^o पर प्राप्त होता है । द्वितीय कोटि का विवर्तन किस कोण पर प्राप्त होगा? यदि एक्स किरण का तरंगदैर्ध्य 2 $\overset{\circ}{A}$ हो तो अन्तरतलीय दूरी ज्ञात कीजिए ।

हल : प्रथम कोटि विवर्तन के लिये

$$2d\sin\theta = n\lambda$$

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

$$= \frac{2}{2\sin 15^o}$$

$$= \frac{1}{\sin 15^o} = \frac{1}{0.26} = 3.86 \overset{\circ}{A}$$

अत : d का मान 3.86 होना चाहिये ।

द्वितीय कोटि विवर्तन के लिये

$$2d\sin\theta_1 = 2\lambda$$

$$\sin\theta_1 = \frac{2\lambda}{2d}$$

$$= \frac{\lambda}{d}$$

$$= \sin 15^o$$

$$= 2(0.26)$$

$$\sin\theta_1 = 0.52$$

$$\theta_1 = 31.3^o$$

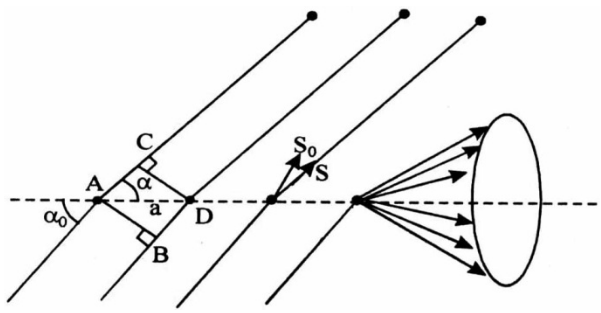
द्वितीय कोटि विवर्तन के लिये θ_1 का मान 31.3^0 होगा ।

5.3 लाउए सेमी.करणें (Laue equations)

यधपि शो सेमी.करण क्रिस्टल समतलों के मूलभूत आवर्ती व्यवस्था का ही परिणाम है परन्तु फिर भी यह उनसे सम्बन्धित परमाणुओं की वास्तविक व्यवस्था को इंगित नहीं करता है । लाउए सेमी.करणें शो सेमी.करण की तुलना में अधिक सामान्य हैं तथा क्रिस्टल के स्थैतिक मॉडल से व्युत्पन्न की जा सकती है । यह सिद्ध किया जा सकता है कि बेग सेमी.करण लाउए सेमी.करणों के तुल्य है तथा इनके परिणाम स्वरूप है ।

हम जानते हैं कि λ तरंगदैर्ध्य का एक्स किरण पुंज जब किसी भी दिशा में स्थित परमाणुओं की श्रृंखला या पंक्ति (row) पर आपतित होता है तब इसका प्रत्येक परमाणु प्रकीर्णन का केन्द्र बन जाता है । इनसे तरंगे सभी दिशाओं में गमन करती है जो आपस में व्यतिकरण कर दिशा विशेष में विभिन्न कोटि के विवर्तन उत्पन्न करती हैं । व्यतिकरण की शर्त यह है कि पंक्ति के दो निकटवर्ती परमाणुओं से विवर्तित किरणों के मध्य पथान्तर तरंगदैर्ध्य का पूर्णांक गुणज हो । सरलता के लिये हम एक विमीय पंक्ति के परमाणुओं को जो अन्तरपरमाण्वीय दूरी (interatomic distance) a से स्थित हैं, पर विचार करते हैं (देखें चित्र 5.2) । माना AB एक समतल तरंगाग्र है जो परमाणुओं की पंक्ति के साथ α_0 कोण बनाता है तथा CD विवर्तित समतल तरंगाग्र है जो इसी पंक्ति के साथ α कोण बनाता है । अत: इन दोनों किरणों के मध्य पथान्तर

$$\Delta = AC - BD = a(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$$



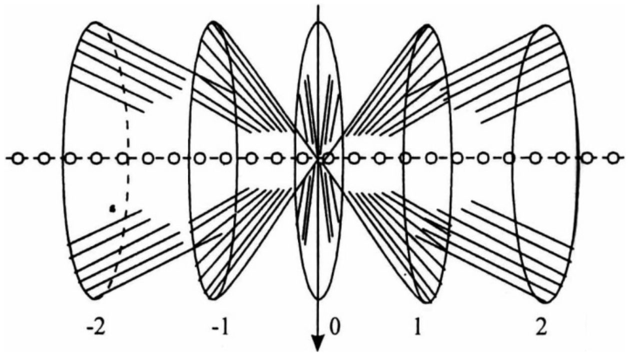
चित्र 5.2

तथा विवर्तित किरण पुंज के लिये आवश्यक शर्त होगी -

$$a(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = e\lambda \qquad ...(5.3)$$

यहाँ e = 0,1, 2...... पूर्णांक है जो कि विवर्तन की कोटि को बताता है ।

उपरोक्त सेमी.करण उन सभी विवर्तित किरणों द्वारा सन्तुष्ट होती है जो परमाणुओं की पंक्ति के सापेक्ष बनी संकेन्द्रीय शंकु (जिसका अर्धशीर्ष कोण α है) पर स्थित है, देखें चित्र 5.2। किसी भी आपतित कोण के लिये, बहुत से संकेन्द्रीय शंकु परमाणुओं की पंक्ति के सापेक्ष होंगे । ये शंकु विवर्तन की विभिन्न कोटियों को प्रदर्शित करते हैं, देखें चित्र 5.3 । आपतित किरण की दिशा को तीर से तथा उच्च कोटि के विवर्तनों को संख्या से दिखाया गया



चित्र 5.3

यदि हम यह मानें कि आपतित दिशा में इकाई सदिश $\vec{s}_0$, विवर्तित दिशा में $\vec{s}$ तथा x- दिशा में स्थानान्तरीय सदिश $\vec{a}$ हो तो सेमी. (5.3) को सदिश रूप में निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$\vec{a}.(\vec{s}-\vec{s}_0)=e\lambda \qquad ....(5.4)$$

द्वि - विमीय समतल जालक के लिये, जिसकी एक दिशा में आद्य सदिश (primitive vector) $\vec{a}$ तथा दूसरी दिशा में आद्य सदिश $\vec{b}$ हो तो तीव्र (intense) विवर्तित किरण उसी स्थिति में प्राप्त होगी जब निम्न दोनों सेमी.करणे एक साथ सन्तुष्ट हों ।

$$\left.\begin{array}{l} a(\cos a - \cos a_{\circ}) = \vec{a}.\left(\vec{s}-\vec{s_{\circ}}\right) = e\lambda \\ b(\cos\beta - \cos\beta_{\circ}) = \vec{b}.\left(\vec{s}-\vec{s_{\circ}}\right) = f\lambda \end{array}\right\} ...(5.5)$$

यहां β_0, β व f का आद्य सदिश b के अनुदिश क्रमश: वह ही तात्पर्य है जो α_0, α व e का आद्य सदिश $\vec{a}$ अनुदिश है । अन्य दिशा $\vec{b}$ के अनुदिश परमाणुओं की पंक्ति के समावेश से विवर्तित किरण की संभावनाऐं पहले से कम हो गयी है । $\vec{a}$ व $\vec{b}$ दिशाओं के अनुदिश बने शंकुओं के प्रतिच्छेदन की दिशा ही विवर्तित किरण की दिशा होगी । इस प्रकार के शंकुओं के प्रतिच्छेदन से दो दिशाऐं ही प्राप्त होती है । चूंकि क्रिस्टल में प्रमाणु त्रि-विमीय आवर्ती अवस्था में होते हैं अत: अन्तराकाशी जालक के एकक कोष्ठिका; जिसके आद्य स्थानान्तरीय सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ व $\vec{c}$ है, से विवर्तित किरण के लिये आवश्यक शर्त यह है कि निम्न तीनों सेमी.करणें एक साथ सन्तुष्ट हो ।

$$\begin{array}{l} a(cos\alpha - cos\alpha_0) = \vec{a}.(\vec{s}-\vec{s}_0) = e\lambda \\ b(cos\beta - cos\beta_0) = \vec{b}.(\vec{s}-\vec{s}_0) = f\lambda \\ c(cos\gamma - cos\gamma_0) = \vec{c}.(\vec{s}-\vec{s}_0) = g\lambda \end{array} \qquad ....(5.6)$$

γ_0, γ व g का $\vec{c}$ दिशा में वही तात्पर्य है कि जो α_0, α व e का $\vec{a}$ दिशा के परमाणुओं की पंक्ति के लिये है । ये तीनों सेमी.करणे लाउए सेमी.करणें कहलाती हैं । a, b व c दिशा में परमाणुओं की पंक्तियों के अनुदिश बने शंकुओं के प्रतिच्छेदन के फलस्वरूप उत्पन्न दिशा विवर्तित किरण की दिशा होगी । इस प्रकार विवर्तित किरणों की दिशाऐं अनेकानेक न होकर कुछ ही संभव हो पाती है ।

ध्यान देने योग्य बात यह है कि नियत तरंगदैर्ध्य वाली एक्स किरण यदि क्रिस्टल पर किसी कोण पर आपतित हो और यदि ऐसी कोई s की दिशा प्राप्त न हो जो लाउए सेमी.करणों को संतुष्ट कर सके तो क्रिस्टल एक्स किरण विवर्तित नहीं करेगा । इसका यही तात्पर्य है कि विशेष आपतित कोण पर ही विवर्तन संभव होगा ।

यह सिद्ध करने के लिये कि बेग सेमी.करण लाउए सेमी.करणों के तुल्य है, हम सरल घनाकार जालक लेते हैं जिसमें $\vec{a}=\vec{b}=\vec{c}$ तथा आपतित व विवर्तित किरणों के मध्य 2θ कोण है । लाउए सेमी.करणों का वर्ग कर परस्पर जोड़ने पर

$$a^2\left[cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma+cos^2\alpha_0+cos^2\beta_0+cos^2\gamma_0\right.$$

$$\left.-2(cos\,\alpha\,cos\alpha_0+cos\beta cos\beta_0+cos\gamma\,cos\gamma_0)\right]=\lambda^2\left(e^2+f^2+g^2\right) \qquad (5.7)$$

ठोस ज्यामिती से हम जानते हैं कि

$$cos^2\alpha+cos^2\beta+cos^2\gamma=1$$

$$cos^2\alpha_0+cos^2\beta_0+cos^2\gamma_0=1$$

तथा $$cos\alpha cos\alpha_0+cos\beta cos\beta_0+cos\gamma cos\gamma_0=\cos 2\theta$$

इनका उपयोग करने पर सेमी.करण (5.7) निम्न रूप ले लेती है ।

$$2a^2\left[l-\cos 2\theta\right]=\lambda^2\left(e^2+f^2+g^2\right)$$

$$\sin^2\theta=\frac{\lambda^2}{4a^2}\left(e^2+f^2+g^2\right) \qquad ....(5.8)$$

ब्रेग सेमी.करण को भी $\sin^2\theta$ के रूप में लिखने पर

$$\sin^2\theta=\frac{n^2\lambda^2}{4d^2}$$

सरल घनाकार जालक के लिये हम जानते हैं कि

$$\frac{l}{d^2}=\frac{h^2+k^2+l^2}{a^2}$$

अतः $$\sin^2\theta=\frac{n^2\lambda^2}{4a^2}\left(h^2+k^2+l^2\right) \qquad ......(5.9)$$

सेमी (5.8) व (5.9) की तुलना करने पर

e=nh, f=nk तथा g=nl

इसका यह तात्पर्य है कि लाउए विशलेषण में e, f, g पूर्णांक जो विवर्तित किरण परिभाषित करते हैं, उन्हें ब्रेग विशलेषण में (hkl) समतलों के समुच्चय द्वारा n^{th} कोटि का विवर्तन समझा जा है

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

2. तीन विभिन्न दिशाओं (a, b, c अक्षों के अनुदिश) में बने शकुं यदि परस्पर न करें तो आपतित एक्स किरण विवर्तित होगी अथवा नहीं? ।

5.4 ईवाल्ड रचना (Ewald construction)

क्रिस्टल समतलों द्‌वारा एक्स किरण विवर्तन को समझाने के लिये ईवाल्ड ने व्युत्क्रम आकाश (reciprocal space) की अवधारणा प्रतिपादित की । इस अवधारणा के अनुसार क्रिस्टल में उपस्थित अनेकानेक समतलों के बारे में जानकारी व्युत्क्रम आकाश के बिन्दुओं के रूप में प्राप्त की जा सकती है । अर्थात् समतलों व बिन्दुओं के गुण आपस में परिवर्तनशील होना संभव है । इन बिन्दुओं से निर्मित आकाश को व्युत्क्रम आकाश कहते हैं । इसके गुणों की विस्तृत जानकारी आगामी अनुच्छेद 5.5 में करेंगे । यहाँ हम ईवाल्ड रचना के बारे में अध्ययन करते हैं जो व्युत्क्रम जालक में की जाती हैं ।

सरलता के लिये हम ईवाल्ड रचना द्‌विविमीय सतह के लिये करते हैं । ईवाल्ड ने आपतित एक्स किरण की तरंगदैर्ध्य व दिशा से सम्बन्धित जानकारी को व्युत्क्रम जालक में निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया ।

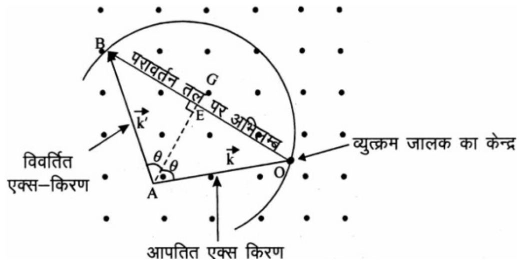
1. एक्स किरण की तरंगदैर्ध्य λ है, तो इसके व्युत्क्रम $\frac{1}{\lambda}$ लम्बाई की एक सदिश AO इस प्रकार खींचते हैं कि इसकी आपतित एक्स-किरण की दिशा को व्यक्त करें । O व्युत्क्रम जालक में मूल बिन्दु है । यह आवश्यक नहीं है कि A व्युत्क्रम जालक के किसी बिन्दु पर ही स्थित हो । (देखें चित्र 5.4) ।
2. एक वृत्त की रचना करें जिसकी त्रिज्या $\frac{1}{\lambda}$ हो तथा A उसका केन्द्र हो ।

   यहाँ दो संभावनाऐं प्रतीत होती हैं ।

(a) वृत्त किसी भी व्युत्क्रम बिन्दु से ही ना गुजरे । इसका यह तात्पर्य होगा कि λ की एक्स-किरण क्रिस्टल से विवर्तित ही नहीं होगी । यहां आप देख सकते हैं कि यदि λ का मान कर दें तो सदिश AO की लम्बाई बढ़ जायेगी और यह संभावना बढ जायेगी कि वृत्त किसी न किसी बिन्दु को प्रतिच्छेदित कर सके ।

(b) यदि वृत्त किसी व्युत्क्रम बिन्दु B से गुजरता है तो इस स्थिति में B को O से तथा A से मिलाते हैं । OB एक व्युत्क्रम जालक सदिश $\vec{G}$ है । यह सदिश वास्तविक जालक समतलों के किसी एक समुच्चय को प्रदर्शित करता है । अत:

OB=$|\vec{G}|=\frac{1}{d}$ यहां d अन्तरतलीय दूरी है ।



चित्र 5.4

दिशा AB में किरण विवर्तित होगी ।

माना $\vec{k} = A\vec{O}$ तथा $\vec{k} = \vec{A}B$ क्रमशः आपतित तरंग सदिश एवं विवर्तित तरंग सदिश हैं ।

अतः $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{G}$ ...(5.10)

उपरोक्त सेमी. (5.10) से स्पष्ट है कि प्रकीर्णन की घटना में मात्र $\vec{k}$ की दिशा में परिवर्तन हुआ है तथा प्रकीर्णित तरंग आपतित किरण से व्युत्क्रम जालक सदिश $\vec{G}$ से भिन्न है । चित्र 5.4 से आप देख सकते हैं कि $|k'|\ |k|$ । सेमी. (5.10) का वर्ग करने पर

$$k'^2 = k^2 + 2\vec{k}\vec{G} + G^2$$

या $G^2 + 2\vec{k}\vec{G} = 0$ .....(5.11)

यह सेमी.करण व्युत्क्रम आकाश में ब्रेग नियम को सदिश रूप में निरूपित करती है । इसे पुनः अदिश रूप में लिखने के लिये सेमी. (5.11) को निम्न रुप से लिख सकते हैं ।

$$\left(\vec{k} + \frac{\vec{G}}{2}\right).\vec{G} = 0 \quad ....(5.12)$$

चित्र 54 से $\left(\vec{k} + \frac{\vec{G}}{2}\right) = \vec{A}E$ है ।

$\because \vec{A}E, \vec{G}$ के लम्बवत है, अतः $OE = AO\cos(90-\theta)$

$$\frac{1}{2d} = \frac{1}{\lambda}\sin\theta$$

या $2d\sin\theta = n\lambda$

इससे स्पष्ट होता है कि ब्रेग सेमी.करण का व्युत्क्रम जालक आकाश में अपश, एक महत्व है । उपरोक्त ईवाल्ड रचना द्वि-विभीय सतह के लिये की गयी है परन्तु यह रचना त्रि-विभीय है और उसमें वृत्त के स्थान पर गोला (sphere) होगा ।

5.5 व्युत्क्रम जालक (Reciprocal lattice)

एक क्रिस्टल जालक पर विचार करते हैं । इसमें कई समान्तर समतल होते हैं जो बराबर दूरी पर स्थित होते हैं । इसे हम समान्तर समतलों का एक समुच्चय कहते हैं । इस तरह के कई विभिन्न समुच्चय होते हैं । इन समुच्चयों की एक साथ कल्पना करना बहुत कठिन है अतः सर्वप्रथम ईवाल्ड ने एक अवधारणा दी, उसके अनुसार क्रिस्टल में-

1. किसी मूल बिन्दु से प्रत्येक क्रिस्टल समतल पर लम्ब डालें ।
2. प्रत्येक लम्ब की लम्बाई इस प्रकार सुनिश्चित करें कि यह अन्तरतलीय दूरी d_{hkl} व्युत्क्रम के बराबर हो । यह लम्बाई $\frac{2\pi}{d_{hkl}}$ भी ले सकते हैं ।

(3) इन सभी लम्बों के शीर्ष बिन्दु क्रिस्टल समतलों (hkl) को निरूपित करेंगे ।

इस प्रकार प्राप्त बिन्दुओं का वह समूह जो समस्त क्रिस्टल समतलों को प्रदर्शित करता हो, व्युत्क्रम जालक कहलाता है । व्युत्क्रम जालक बिन्दु, समतलों के समस्त गुणों को बनाये रखते हैं । मूल बिन्दु से व्युत्क्रम बिन्दु की दिशा, समतल के अभिविन्यास को तथा मूल बिन्दु से व्युत्क्रम बिन्दु के मध्य दूरी, समतल की अन्तरतलीय दूरी को सुरक्षित रखते हैं । व्युत्क्रम जालक की अवधारणा जालक कम्पन, इलेक्ट्रॉनिक बैंड संरचना इत्यादि में महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है । वास्तविक आकाश में स्थानान्तरीय सदिश की विमा लम्बाई की होती है, परन्तु यहां इसकी विमा लम्बाई$^{-1}$ होगी । आप यहां तुलना करके देख सकते हैं कि फोनॉन, फोटान तथा स्वतन्त्र इलेक्ट्रॉन के तरंग सदिश की विमा भी लम्बाई$^{-1}$ ही है । यह ही नहीं क्वान्टम यांत्रिकी में भी वह आकाश ज्यादा उपयोगी होता है जो व्युत्क्रम आकाश को 2π से गुणा करने पर प्राप्त होता है । इसे हम k आकाश या तरंग सदिश आकाश या व्युत्क्रम आकाश कहते हैं ।

जहां सामान्य जालक माध्यम को आवर्ती बने रहने को प्रदर्शित करता है वहीं जालक उन आवृत्तियों का बोध कराता है जो क्रिस्टल में से गुजर सकती हैं । ।

अब हम इसके गणितीय स्वरूप की चर्चा करते हैं ।

सामान्य जालक में आधार सदिश $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ व $\vec{a}_3$ हो तो व्युत्क्रम जालक में आधार सदिश $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ व $\vec{b}_3$ को

निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं ।

$$\vec{a}_i.\vec{b}_j = \delta_{ij} \quad \text{(i, j=1,2,3)}$$

...(5.14)

इन 9 सेमी.करणों में निम्न दो सेमी.करणें

$$\vec{a}_2.\vec{b}_1 = 0$$

$$\vec{a}_3.\vec{b}_1 = 0$$

जो कि स्पष्ट करती है कि $\vec{b}_1$ सदिश $\vec{a}_2$ व $\vec{a}_3$ सदिशों के लम्बवत है ।

अर्थात $\quad \vec{b}_1 = A\left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\right)$ ...(5.15)

यहां अदिश A निम्न संबन्ध से ज्ञात कर सकते हैं

$$\vec{a}_1.\vec{b}_1 = 1 \qquad \text{...(5.16)}$$

$$A.\vec{a}_1.\left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\right) = 1$$

या $\quad A_1 = \dfrac{1}{\vec{a}_1.\left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\right)}$

अत: $\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1.(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}$

इसी प्रकार,

$$\vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1.(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}$$

तथा $\vec{b}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1.(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}$

क्रिस्टल में तरंगगुणों को समझने के लिये व्युत्क्रम जालक सदिश G को परिभाषित करना बहुत उपयोगी एवं सुविधापूर्ण है, जो निम्न है:

$$G_l = 2\pi(l_1\vec{b}_1 + l_2\vec{b}_2 + l_3\vec{b}_3) \quad ...(5.18)$$

यहां l_1, l_2, व l_3 पूर्णांक हैं ।

सेमी. (5.18) को सामान्य जालक में स्थानान्तरीय सदिश

$$\vec{R}_n = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3$$

से अदिश गुणा करने पर

$$\vec{G}_l.\vec{R}_n = 2\pi(n_1l_1 + n_2l_2 + n_3l_3)$$

$$= 2\pi \times \text{पूर्णांक} \quad ...(5.19)$$

या $\exp(i\vec{G}_l.\vec{R}_n) = 1$ ...(5.20)

अत: व्युत्क्रम जालक की सदिश G_l, सामान्य जालक के स्थानान्तरीय सदिश के साथ उपरोक्त शर्त को संतुष्ट करती हैं । सेमी. (5.18) व्युत्क्रम जालक में विभिन्न बिन्दुओं को उत्पन्न करती जो $2\pi\vec{b}_1$, $2\pi\vec{b}_2$ व $2\pi\vec{b}_3$ माप का उपयोग कर प्राप्त किये जा सकते हैं । इस प्रकार से प्राप्त बिन्दुओं से बना, सामान्य जालक का व्युत्क्रम जालक कहलाता है ।

व्युत्क्रम जालक के मूलभूत गुण निम्न हैं-

(1) व्युत्क्रम जालक की एकक कोष्ठिका का समानान्तर षटफलकीय (parallopiped) होना आवश्यक नहीं है ।

(2) सामान्य जालक, इसके स्वयं की व्युत्क्रम जालक का व्युत्क्रम होती है ।

(3) सरल घनीय जालक की व्युत्क्रम जालक भी सरल घनीय जालक होती है । । ऐसा ही षटफलकीय जालक (hcp) के लिये होता है जबकि अन्त: केन्द्रित घन (bcc) व फलक केन्द्रित क (fcc) एक दूसरे के परस्पर व्युत्क्रम जालक होते हैं ।

(4) व्युत्क्रम जालक की एकक कोष्ठिका का आयतन, सामान्य जालक की एकक कोष्ठिका के आयतन का व्यत्क्रमानुपाती होता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

3. व्युत्क्रम जालक का उपयोग किस अध्ययन में किया जाता है?

उदाहरण 5.2 $2\hat{i}$, $3\hat{j}$, $4\hat{k}$ सदिशों के जालक का व्युत्क्रम जालक ज्ञात करो ।

हल : यहां $a_l = 2\hat{i}$, $\vec{a}_2 = 3\hat{j}$ और $\vec{a}_3 = 4\hat{k}$

अत: $$\vec{b}_1 = 2\pi\left(\frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1.\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}\right)$$

$$\vec{b}_1 = 2\pi\left(\frac{3\hat{j}\times 4\hat{k}}{2\hat{i}\left(3\hat{j}\times 4\hat{k}\right)}\right)$$

$$= 2\pi\frac{12i}{24} = 2\pi\frac{\hat{i}}{2}$$

तथा $$\vec{b}_2 = 2\pi\left(\frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1.\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{4\hat{k}\times 3\hat{j}}{24}\right)$$

$$= 2\pi.\frac{8\hat{j}}{24} = 2\pi\frac{\hat{j}}{3}$$

एवं $$\vec{b}_3 = 2\pi\left(\frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1.\left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\right)}\right)$$

$$= 2\pi\left(\frac{2\hat{i}\times 3\hat{j}}{24}\right)$$

$$= 2\pi.\frac{6\hat{k}}{24} = 2\pi\frac{\hat{k}}{4}$$

अत: व्युत्क्रम जालक के सदिश क्रमश : $2\pi\frac{\hat{i}}{2}$, $2\pi\frac{\hat{j}}{3}$ तथा $2\pi\frac{\hat{k}}{4}$ होगें ।

उदाहरण 5.3 फलक केन्द्रित घनाकार (fcc) जालक का व्युत्क्रम जालक अंत: केन्द्रित घनाकार (bcc) जालक होता है ।

हल : फलक केन्द्रित घनाकार जालक के अभाज्य स्थानान्तरण सदिश होगें

$$\vec{a}_1 = \frac{a}{2}\left(\hat{j}+\hat{k}\right)$$

$$\vec{a}_2 = \frac{a}{2}\left(\hat{i}+\hat{k}\right)$$

$$\vec{a}_3 = \frac{a}{2}\left(\hat{i} + \hat{j}\right)$$

इससे निर्मित अभाज्य कोष्ठिका का आयतन होगा -

$$V = \vec{a}_1 . \left(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3\right)$$

$$V = \frac{a}{2}\left(\hat{j} + \hat{k}\right) . \left[\frac{a}{2}\left(\hat{i} + \hat{k}\right) \times \frac{a}{2}\left(\hat{i} + \hat{j}\right)\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left(\vec{j} + \vec{k}\right) . \left[\frac{a^2}{4}\left(\vec{j} + \vec{k} - \vec{i}\right)\right] = \frac{a^3}{4}$$

फलक केन्द्रित घनाकार जालक के व्युत्क्रम जालक के सदिश निम्न होगें -

$$\vec{b}_1 = 2\pi\left(\frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{V}\right)$$

$$= \frac{2\pi \times 4}{a^3}\left[\frac{a}{2}\left(\hat{i} + \hat{k}\right) \times \frac{a}{2}\left(\hat{i} + \hat{j}\right)\right]$$

$$= \frac{2\pi}{a}\left[-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right]$$

तथा $\vec{b}_2 = 2\pi\left(\frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_2}{V}\right)$

$$= \frac{2\pi \times 4}{a^3}\left[\frac{a}{2}\left(\hat{i} + \hat{j}\right) \times \frac{a}{2}\left(\hat{j} + \hat{k}\right)\right] = \frac{2\pi}{a}\left[\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right]$$

एवं $\vec{b}_3 = 2\pi\left(\frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{V}\right)$

$$= \frac{2\pi \times 4}{a^3}\left[\frac{a}{2}\left(\hat{j} + \hat{k}\right) \times \frac{a}{2}\left(\hat{i} + \hat{k}\right)\right] = \frac{2\pi}{a}\left[\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}\right]$$

ये अभाज्य स्थानान्तरण सदिश अंत: केन्द्रित घनाकार जालक के हैं । अत: फ़लक घनाकार केन्द्रित जालक का व्युत्क्रम जालक अंत: केन्द्रित घनाकार जालक होता है ।

5.6 सारांश (Summary)

- ब्रेग नियम का गणितीय स्वरूप निम्न है -

$$2d \sin\theta = n\lambda$$

- एक्स-किरण के विवर्तन के लिये आवश्यक है कि इसके तरंगदैर्ध्य का मान क्रिस्टल के समान्तर समतलों के मध्य अन्तरतलीय दूरी के दुगने से कम हो ।
- क्रिस्टल, एक्स-किरणों के विवर्तन के लिये त्रि-विमीय ग्रेटिंग की भांति कार्य करता है ।
- लाउए सेमी.करणे निम्न हैं -

$$a(cos\alpha - cos\alpha_0) = e\lambda$$

$$b(cos\beta - cos\beta_0) = f\lambda$$

$$c(cos\gamma - cos\gamma_0) = g\lambda$$

उपरोक्त तीनों सेमी.करणों के एक साथ संतुष्ट होने पर ही विवर्तित किरण प्राप्त होगी।

- ब्रेग सेमी.करण में विवर्तन की कोटि संख्या n, लाउए सेमी.करणों में पूर्णांक e, f व g के अधिकतम सामान्य गुणज (LCM) के बराबर है ।
- व्युत्क्रम जालक आकाश में ब्रेग नियम को निम्न तरह से लिख सकते हैं ।

$$G^2 + 2\vec{G}.\vec{k} = 0$$

- ईवाल्ड रचना ब्रेग नियम को व्युत्क्रम जालक में समझाने में उपयोगी है ।
- व्युत्क्रम जालक के आद्य सदिश निम्न होते हैं-

$$\vec{b}_1 = \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{\vec{a}_1.(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}$$

$$\vec{b}_2 = \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{\vec{a}_1.(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}$$

$$\vec{b}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\vec{a}_1.(\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)}$$

व्युत्क्रम जालक में सदिश निम्न रूप में लिखते हैं -

$$\vec{G}_i = l_1\vec{b} + l_2\vec{b}_2 + l_3\vec{b}_3$$

5.7 शब्दावली (Glossary),

अर्धशीर्ष कोण	Semiapex angle
अन्तरतलीय दूरी	Interplanery distance
अन्तरपरमाण्वीय दूरी	Interatomic distance
अन्तराकाशी	Space
आद्य	Primitive
आन्तरिक संरचना	Internal structure
ईवाल्ड संरचना	Ewald construction
ब्रेग नियम	Bragg's law
पंक्ति	Row
प्रकीर्णित	Scattered
पृष्ठसर्पी कोण	Glancing angle
लाउए सेमी.करणें	Laue equations
व्युत्क्रम जालक	Reciprocal lattice
विवर्तन	Diffraction

शंकु	Cone
समतलों का समुच्चय	Set of planes
त्रिविमीय	Three dimensional

5.8 संदर्भ ग्रंथ (Reference books)

C.M. Kachhava	Solid State Physics	Tata McGraw-Hill Publishing company Ltd। New Delhi
M.A. Wahab	Solid State Physics	Narosa Publishing House New Delhi

5.9 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to self assessment questions)

1. नहीं, क्योंकि $\sin\theta$ अधिकतम मान 1 से अधिक संभव ही नहीं है ।
2. नहीं ।
3. व्युत्क्रम जालक का उपयोग जालक कम्पन, इलेक्ट्रॉनिक बैंड संरचना में किया जाता है।

5.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. एक्स-किरण विवर्तन में प्रकाशीय ग्रेटिंग के स्थान पर क्रिस्टल प्रयुक्त होता है, क्यों?
2. लाउए सेमी.करण लिखिये । इसमें प्रयुक्त संकेत किस राशि को प्रदर्शित करते हैं लिखिये ।
3. ब्रेग सेमी.करण लिखिये ।
4. ईवाल्ड रचना से किस नियम की उत्पत्ति की जा सकती है?
5. ईवाल्ड रचना किस घटना को समझाने के लिये की गयी थी?
6. व्युत्क्रम जालक की परिभाषा लिखिये ।

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

7. एक्स किरणों के विवर्तन के लिये ब्रेग के नियम को व्युत्पन्न कीजिए ।
8. लाउए सेमी.करणों को व्युत्पन्न कीजिये ।
9. सिद्ध करो कि लाउए सेमी.करणों का सरलीकृत रूप ब्रेग नियम है ।
10. व्युत्क्रम जालक आकाश में ब्रेग के नियम की उत्पत्ति कीजिए ।
11. ईवाल्ड रचना समझाइये तथा इससे ब्रेग नियम प्रतिपादित कीजिये ।
12. व्युत्क्रम जालक में समतलों के समूह को बिन्दु रूप में किस प्रकार प्रदार्शित किया जाता है? व्युत्क्रम जालक के आधार सदिशों को सामान्य जालक के आधार सदिशों के रूप में लिखिये ।

13. सिद्ध करो कि व्युत्क्रम जालक की एकक कोष्ठिका का आयतन, सामान्य जालक की एकक कोष्ठिका के आयतन का व्युत्क्रमानुपाती होता है ।

14. सिद्ध करो कि सरल घनाकार जालक का व्युत्क्रम जालक भी सरल घनाक़ार जालक होता है।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

तरंगदैर्ध्य 0.44Å की एक्स किरणें साधारण नमक के घनीय क्रिस्टल पर आपतित की जाती है। क्रिस्टल के दो क्रमिक तलों का अन्तराल 2.814Å है । विवर्तन के लिये न्यूनतम पृष्ठसर्पी कोण की गणना करो । **उत्तर :** $\theta = \sin^{-1}(0.0782) = 4.3^0$)

16. $\left(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}\right)$, $\left(\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right)$ और $\left(-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\right)$ सदिश निकाय का सदिश निकाय ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर :** $\frac{2\pi}{8}\left(7\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}\right)$; $\frac{2\pi}{8}\left(-11\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}\right)$; $\frac{2\pi}{8}\left(-5\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}\right)$)

इकाई-6

विवर्तन प्रयोग

(Diffraction Experiments)

इकाई की रूपरेखा

6.0 उद्देश्य

6.1 प्रस्तावना

6.2 पावडर विधि

6.3 लाउए विधि

6.4 घूर्णन विधि

6.5 सारांश

6.6 शब्दावली

6.7 संदर्भ ग्रन्थ

6.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

6.9 अभ्यासार्थ प्रश्न

6.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप-

- क्रिस्टल संरचना ज्ञात करने की तीन प्रमुख विधियो को समझ सकेंगे;
- पावडर विधि में विवर्तन प्रारूप किस प्रकार का प्राप्त होता है और इसमें कौन सी रेखा किस (hkl) के लिये है जान, सकेंगे,
- लाउए व घूर्णन विधियों से क्रिस्टल संरचना ज्ञात करने की जानकारी कर सकेंगे ।

6.1 प्रस्तावना (Introduction)

पिछली इकाई में आप पढ चुके हैं कि एक्स-किरणों का क्रिस्टल से विवर्तन ब्रेग सेमी.करण $2d\sin\theta = n\lambda$ के अनुसार होता है । क्रिस्टल के समतलों की अन्तरतलीय दूरियाँ (d) ज्ञात करने के लिये यह आवश्यक हैं कि θ व λ ज्ञात हों । एक्स-किरण स्रोत से प्राप्त विकिरण सतत होते हैं, परन्तु विशेष फिल्टरों (filters) का उपयोग कर एकवर्णी किरण भी प्राप्त की जा सकती है । इन एक्स किरणों को क्रिस्टल पर आपतित करवा कर विवर्तित एक्स किरणें प्राप्त कर θ का मान ज्ञात किया जाता है । अत: क्रिस्टल संरचना जानने के लिये यह आवश्यक है कि λ या θ में, या फिर दोनों में परिवर्तन किया जावें । किसी भी एक्स किरण विवर्तन प्रयोग में एक्स किरण स्त्रोत, क्रिस्टल अथवा इसका पाउडर तथा संसूचक (detector) की आवश्यकता होती है । इस संदर्भ में मुख्य रूप से तीन विधियां हैं ।

(1) पाउडर विधि - इसमें बहु क्रिस्टलीय पाउडर से एकवर्णी एक्स किरण को गुजारा जाता है। किसी एक समतल के विभिन्न विन्यासों में कुछ ऐसे विन्यास प्राप्त होते हैं जिनके लिये ब्रेग सेमी.करण संतुष्ट होती है । इसके विषय में अनुच्छेद 8.2 में विस्तार से बताया गया है ।

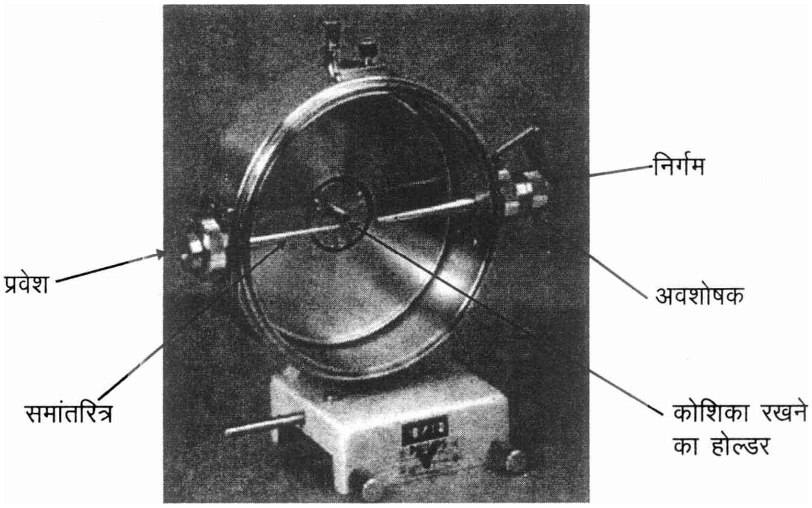
(2) लाउए विधि- इस में एकल क्रिस्टल को स्थिर रखते है और इस पर सतत एक्स किरणें आपतित की जाती है । क्रिस्टल के समतल सतत एक्स किरणों में से कुछ ऐसी किरणों का चयन करते है जिसके लिये $2d \sin\theta = n\lambda$ संतुष्ट हो सकें । किरणें θ कोण पर विवर्तित हो जाती है । इसकी विस्तृत जानकारी अनुच्छेद 6.3 में दी गयी है।,

(3) घूर्णन विधि - इस विधि में क्रिस्टल को एक नियत अक्ष के सापेक्ष घुमाया जाता है । क्रिस्टल पर उपरोक्त अक्ष के लम्बवत एकवर्णी एक्स किरण आपतित की जाती है । θ में परिवर्तन के कारण विभिन्न समतलों की ऐसी स्थिति बन जाती है कि एक्स-किरणों का विवर्तन हो सके । इसे विस्तार से अनुच्छेद 6.4 में समझाया गया है ।

6.2 पाउडर विधि (Powder method)

विवर्तन दत्त (data) प्राप्त करने की सबसे तीव्रगामी एवं सरलतम विधि पाउडर विधि है । यह सभी प्रकार के बहु क्रिस्टलीय (poly crystalline) पदार्थो के लिये उपयोगी है । किसी भी पदार्थ विशेष का विवर्तन दत्त अपने आप में विशिष्ट होता है अत: इस विधि को पदार्थो की पहचान के लिये प्रयोग में लाते हैं । इसके अतिरिक्त इससे a,b,c जालक प्राचलों के मान भी ज्ञात किये जा सकते हैं ।

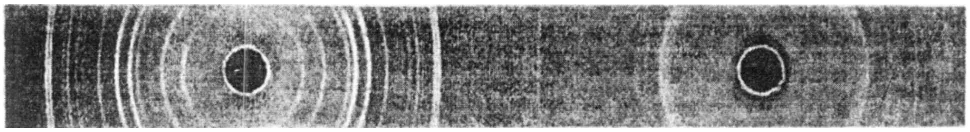
पाउडर कैमरा, जिसे डिबाई शेरर (debye Scherrer) कैमरा भी कहते हैं, को चित्र 6.1 में दिखाया गया है । बेलनाकार कैमरे के केन्द्र पर पदार्थ (पाउडर अवस्था में) रखने के लिये एक होल्डर होता 'है । बहुत ही महीन किये हुये पदार्थ के पाउडर को पतले काँच की कोशिका में भरकर कोशिका को होल्डर में लगाते हैं । इसके बाद इस केमरे को अन्धेरे कमरे में ले जाकर एक्स-किरण फिल्म की पतली स्ट्रिप (strip) को बेलनाकार केसेट में इस प्रकार लोड (load) करते हैं कि फिल्म के दोनों छोर एक्स किरण के प्रवेश व निर्गम (exit) बिन्दुओं के मध्य रहें । इस व्यवस्था की दो विशेषताऐं हैं । पहली तो यह कि एक ही फिल्म पर $\theta = 0$ से $\theta = 90^0$ के सभी विवर्तन संसूचित हो जाते हैं तथा दूसरी यह कि इससे यह ज्ञान हो जाता है कि $\theta = 0$ तथा $\theta = 90^0$ के सापेक्ष बनने वाली विभिन्न चापों के युग्म न्यून कोण अथवा अधिक कोण वाली स्थिति में से किस एक के हैं । फिल्म को केमरे में लोड करने से पहले पंच कटर (punch cutter) से दो छेद (hole) किये जाते हैं । ये छेद इस लिये किये जाते है कि लोड करते समय फिल्म समांतरित्र (collimeter) तथा प्रमुख एक्स-किरण अवशोषक (direct beam absorber) में व्यवस्थित (fit) हो सके । इस अवशोषक में ZnS पर्दा भी होता जिससे सीधी एक्स-किरण की स्थिति का ज्ञान हो जाता है । फिल्म को काले कागज में लपेट कर ही लोड किया जाता है । इसके बाद कैमरे का ढक्कन लगाकर एक्स-किरण स्रोत के सामने रखते हैं।



चित्र 6.1

जब एकवर्णी एक्स किरणें पाउडर पर गिरती है तो पाउडर में उपस्थित किसी एक सूक्ष्म क्रिस्टल (crystallite) से कोण विशेष पर विवर्तित हो जाती हैं । पाउडर में और भी अन्य कई क्रिस्टलाइट हैं जिनके समतल आपतित किरण से θकोण तो बनाते हैं परन्तु विन्यास में भिन्न हैं । इस कारण इनसे विवर्तित किरणें एक शंकु के रूप में निकलती है जो फिल्म को दो स्थानों पर चापों के रूप में प्रतिच्छेदित करती हैं । ये चाप $\theta = 0$ (अर्थात् सीधी किरण दिशा) के सापेक्ष बनते हैं । चूंकि सूक्ष्म क्रिस्टल में अनेकानेक समतल होते हैं अत: ये अलग अलग कोणों के लिये ब्रेग सेमी.करण संतुष्ट करते हैं । ये फिल्म पर जिस प्रकार का विवर्तन प्रारूप बनाते हैं उसे चित्र 6.2 में दिखाया गया है । उचित समय (exposure) के पूर्ण होने पर फिल्म को विशेष क्रिया द्वारा धोते हैं । इसके बाद इससे अन्तरतलीय दूरी d ज्ञात करने के लिये θ का मापन करते हैं ।

अन्तरतलीय दूरी (d) का मापन फिल्म का वह छेद जिससे एक्स-किरण निर्गम होती है $\theta = 90^0$ पर स्थित होता है तथा दूसरा छेद $\theta = 90^0$ की स्थिति को बताता है । फिल्म को कोम्प्रेटर पर इस प्रकार रखते हैं कि फिल्म इसके पैमाने के समान्तर रहें । इस पर स्थिर सूक्ष्मदर्शी के क्रास बाल (cross hair) को इस प्रकार समाजित करते हैं कि यह विवर्तन चाप के मध्य बिन्दु के समान्तर रहें । इस प्रकार फिल्म पर उपस्थित सभी चाप युग्मों के पाठंयाक ले लिये जाते है और निम्न सूत्र के आधार पर θ का मान ज्ञात कर लेते हैं ।



चित्र 6.2

चाप युग्मों के मध्य दूरी $4\theta = \dfrac{\text{चाप युग्मों के मध्य दूरी (S)}}{\text{कैमरे का अर्द्धव्योंस (R)}}$

या $\theta = \dfrac{S}{4R}$ (रेडियन)

$$\theta = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{4R}\right) S \text{ (डिग्री) } \left\{\frac{180}{\pi} = 57.3^o\right\}$$

यदि कैमरे का व्यास 2R=57.3 मिमी हो तो $\theta = \frac{S}{2}$। अर्थात् 1 मिमी दूरी $\frac{1^o}{2}$ मापन करेगी । विवर्तन रेखाओं के लिये कोण का मान ज्ञात करने के बाद d का मान ब्रेग सेमी.करण से ज्ञात कर लिया जाता है ।

इन विवर्तन रेखाओं, जो विभिन्न समतलों से एक्स किरण विवर्तन के कारण बनती है, के लिये (hkl) का मान निम्न तरीके से निकाल सकते है । इसके लिये एक सरल घनीय क्रिस्टल का उदाहरण लेते हैं । ब्रेग नियम को निम्न प्रकार से लिखने पर,

$$\sin^2 \theta = \frac{\lambda^2}{4d^2}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{\lambda^2}{4d^2}(h^2 + k^2 + l^2) \left\{ \text{सरल घनीय क्रिस्टल के लिये } d^2 = \frac{a^2}{(h^2 + k^2 + l^2)} \right\} \quad \ldots (6.1)$$

चूंकि एक्स किरण की तरंगदैर्ध्य, λ, नियत है तथा क्रिस्टल जालक नियतांक a भी नियत है अत: $\sin^2 \theta$, का मान $(h^2 + k^2 + l^2)$ के समानुपाती होना चाहिये । विभिन्न रेखाओं से प्राप्त $\sin^2 \theta$ के मान को $\sin^2 \theta$ के न्यूनतम मान से विभाजित करने पर प्रत्येक θ के लिये $h^2 + k^2 + l^2$, का मान इस प्रकार आयेगा जो पूर्णांक होगा । h,k,l के 0,1,2,3 जैसे मान रखकर यह पता लगाया जाता है वह पूर्णांक h, k, l के किस मान लिये संभव है । यह (hkl) ही उस रेखा का मिलर सूचकांक होता है । चूंकि (hkl), θ व λ के मान ज्ञात हो हैं, अत: इन मानों को प्रतिस्थापित कर क्रिस्टल जालक नियतांक a का मान ज्ञात करते है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. पाउडर विधि में प्रयुक्त एक्स किरने एक्वर्णी होती है या बहूवर्णी?

उदाहरण 6.1 सेमी.करण (6.1) में $h^2 + k^2 + l^2$ का मान 9 प्राप्त होता है । इस रेखा के लिये संभव तलों के (hkl) का मान ज्ञात करो ।

हल: चूंकि $h^2 + k^2 + l^2 = 9$

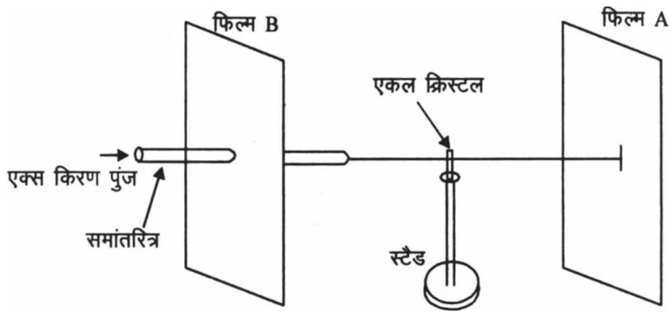
अत: h=3, k= 0, l = 0 एक संभव है अत: तल का मिलर सूचकांक (300) होगा । इसके अतिरिक्त h= 2, k = 2, व l= 1 भी एक संभव हल है । अत: इस रेखा के लिये संभावित तल (221) भी है ।

6.3 लाउए विधि (Laue Method)

लाउए विधि एक्स किरण विवर्तन की सबसे पुरानी विधि है । क्रिस्टल के विन्यास ज्ञात करने की यह सरलतम एवं परिशुद्ध विधि है । इससे क्रिस्टल की सममितता भी सुगमता के साथ ज्ञात की जा सकती है ।

लाउए विधि में एकल क्रिस्टल को एक एक्स किरण पुंज के सामने रखा जाता है । इस पुंज में सतत तरदैर्ध्य (0.2-24 $\overset{\circ}{A}$) होती है । क्रिस्टल के समतल (planes), उनकी अन्तरतलीय दूरियों व आपतन कोणों के अनुसार तरंगदैर्ध्य के असतत् (discrete) मानों का चयन कर विवर्तन बिन्दु (differection spots) उत्पन्न करते हैं ।

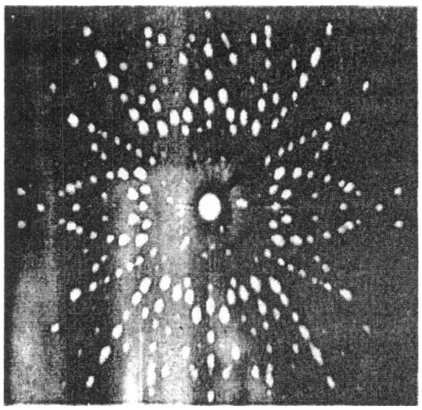
लाउए एक्स किरण कैमरे में सतत् तरंगदैर्ध्य वाले एक्स-किरण पुंज को समांतरित्र (collimeter) से गुजारा जाता है । इससे बहुत ही पतला एक्स-किरण पुंज प्राप्त होता है । इस पुंज को, एकल क्रिस्टल से गुजारा जाता है । एकल क्रिस्टल एक स्टैण्ड पर रखा होता है । इस क्रिस्टल के दोनों तरफ समतल (flat) एक्स-किरण फिल्म रखते हैं (देखे चित्र 6.3) ।



चित्र 6.3

फिल्म A पश्च परावर्तन प्रारूप तथा फिल्म B पारगमन प्रारूप को संसूचित करती है ।

फिल्म पर विवर्तन प्रारूप को देखने पर ऐसा लगता है कि इस पर अनेक काले बिन्दु हैं जो श्रेणीबद्ध है तथा विशेष सममितता रखते हैं । इनको ही लाउए बिन्दु (Laue spot) कहते हैं, चित्र 6.4 देखें ।



चित्र 6.4

चौगुनी अक्षीय सममितता (fourfold axis symmetry) वाले क्रिस्टल को यदि इस प्रकार व्यवस्थित करें कि अक्ष एक्स-किरण पुंज के समान्तर हो तो प्राप्त विवर्तन प्रारूप भी चौगुनी अक्षीय सममितता दिखायेगा । लाउए केमरे का यह गुण ही इसे ठोस भौतिकी प्रयोगों में क्रिस्टल व्यवस्था को ज्ञात करने के लिये उपयोगी बनाता है ।

लाउए विधि के उपयोग

1. एकल क्रिस्टल के विन्यास (orientation) और सममितता को शीघ्रता से ज्ञात करने की सरलतम विधि है ।
2. क्रिस्टल में यांत्रिकीय एवं ऊष्मीय प्रभाव से उत्पन्न क्रिस्टलीय (crystalline imperfection), को मापने में इसका प्रयोग किया जाता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

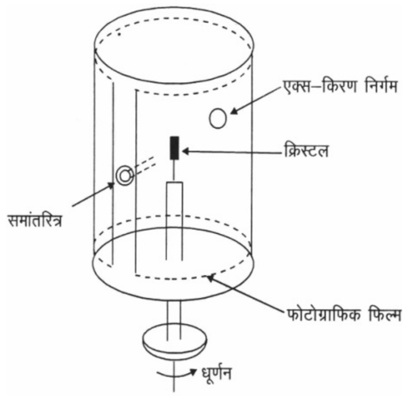
2. लाउए विधि में समांतरित्र (collimeter) का क्या कार्य है?

----

3. लाउए विधि में किस प्रकार का एक्स-किरण पुंज होना चाहिये, सतत या असतत्?

6.4 घूर्णन विधि (Rotating method)

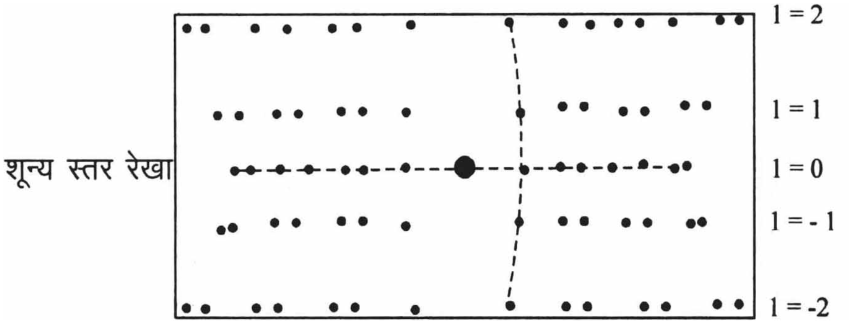
इस विधि में एकल क्रिस्टल को एक अक्ष के अनुदिश घूर्णन अथवा दोलन (15^0) करवाया जाता है। क्रिस्टल की विमा साधारणतया: 1 मिमी से कम ली जाती है । क्रिस्टल की इस अक्ष के लम्बवत दिशा में क्रिस्टल से एकवर्णी एक्स-किरण पुंज को पारगमित किया जाता है । क्रिस्टल के घूर्णन के कारण, अर्थात् कोण θ में बदलाव के कारण विभिन्न परमाण्वीय समतलों के लिये यह संभव हो पाता है कि वे एक्स-किरण को विवर्तित कर सकें । विवर्तित प्रारूप को संसूचित करने के लिये एक्स-किरण फिल्म को एक बेलनाकार होल्डर में रखा जाता है जिसका व्यास लगभग 3 सेमी होता है, चित्र 6.5 देखें । बेलनाकार होल्डर की अक्ष तथा क्रिस्टल की घूर्णन अक्ष दोनों सम्पाती होती हैं । बेलनाकार होल्डर के उस भाग पर, जहाँ से एक्स-किरण बाहर निकलती है, एक्स-किरणों को रोकने के लिये शीशे (lead) का डाट (stopper) लगाया जाता है ।



चित्र 6.5

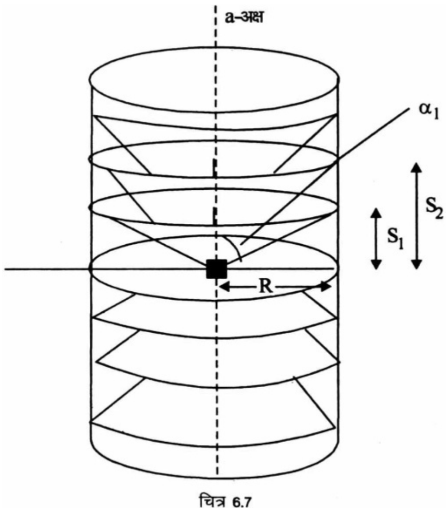
लाउए सेमी.करणों को व्युत्पन्न करते समय हमनें देखा था कि सभी विवर्तित किरण संकेन्द्रीय शंकुओं की श्रेणी के रूप में प्राप्त होती हैं । इन शंकुओं की अक्ष वह ही होती है जो

परमाणुओं की पंक्ति की होती है तथा जिसके परावर्तन के कारण शंकुनुमा विवर्तन प्राप्त होता है । ये शंकु ही घूर्णन फोटोग्राफ में विभिन्न स्तरों में रेखाओं का निर्माण करते हैं । फिल्म धोने के पश्चात प्राप्त विवर्तन प्रारूप को चित्र 6.6 में दिखाया गया है ।



चित्र 6.6

वे सभी परावर्तन जो शून्य स्तर की रेखा पर प्राप्त होते हैं, उन समतलों से प्राप्त होते हैं जो घूर्णन अक्ष के समान्तर है, अत: संबंधित मिलर सूचकांक शून्य होगा । इस स्तर की पंक्ति में विभिन्न परवर्तन बिन्दुओं की स्थितियाँ, समतलों की दूरियों से संबंधित रहती हैं । वे समतल जिनकी अन्तरतलीय दूरी ज्यादा होती है कम ब्रेग कोण पर प्राप्त होगें अर्थात् वे एक्स-किरण के निकास बिन्दु के पास होगें । क्रिस्टल समतल जो अन्य विन्यासों (अर्थात् जिनका मिलर सूचकांक l=1,2 है) में है, के कारण विवर्तन बिन्दुओं का स्तर, शून्य स्तर से ऊपर या नीचे प्राप्त होगा । चित्र 6 में इन्हें l=1 तथा l=2 से दिखाया गया है ।



चित्र 6.7

यदि क्रिस्टल को इस प्रकार रखा जाये कि यह a-अक्ष के सापेक्ष घूर्णन करें तथा आपतित एक्स-किरण पुंज इस अक्ष के लम्बवत हो तो लाउए सेमी.करण से

$$acos\alpha = e\lambda \qquad ....(6.2)$$

यहाँ e के मान 0,1,2.....क्रमश: शून्य, प्रथम व द्वितीय स्तर की रेखाओं के लिए हैं।

यदि e वीं स्तर रेखा व शून्य स्तर रेखा के मध्य दूरी Se हों, तथा R कैमरे की त्रिज्या हो तो चित्र 6.7 से

$$\cot\alpha = \frac{S_e}{R} \quad ...(6.3)$$

समी. (6.2) व (6.3) से

$$S_e = \frac{\left(\frac{e\lambda}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{e\lambda}{a}\right)^2}}.R$$

या $$a = \frac{e\lambda}{S_e}\left(R^2 + S_e{}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad ...(6.4)$$

समी. (6.4) से जालक प्राचल a ज्ञात किया जाता है । इसी प्रकार क्रिस्टल को b व c अक्ष के सापेक्ष घूर्णन करवा कर b व c जालक प्राचल प्राप्त किये जाते हैं ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

4. घूर्णन /दोलन विधि किस प्रकार के क्रिस्टल के लिये उपयोगी हैं?

उदाहरण 6.2 किसी घूर्णन फोटोग्राफ में शून्य स्तर के ऊपर व नीचे 6 स्तर देखाऐं प्राप्त होती है । यदि इनकी शून्य स्तर रेखा से दूरियाँ क्रमश: 0.29,0.59,0.91,1.25,1.65 व 2.12 सेमी हो तो घूर्णन अक्ष के अनुदिश जालक प्राचल का मान ज्ञात कीजिये । कैमरे की त्रिज्या 3 सेमी तथा एक्स किरण तरंगदैर्ध्य 1.544 $\overset{\circ}{A}$

हल: दिया है - S_1,= 0.29 सेमी

R=3 सेमी

λ=1.54 x 10^{-8} सेमी.

समी. (6.4) से

$$a = \frac{e\lambda}{S_e}\left(R^2 + S_e{}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e=1के लिए s_1=0.29

$$a = \frac{1\times 5.4\times 10^{-8}}{2.9}\left[3^2 + (0.29)^2\right]^{1/2} = 16\,\overset{\circ}{A}$$

इसी प्रकार e तके अन्य मानों 2,3,4,5,6 के लिये S_e के मानों (0.59, 0.91,1.25,1.65 व 2.12 सेमी) को रखने पर भी a का मान 16 $\overset{\circ}{A}$ प्राप्त होता है ।

6.5 सारांश (Summary)

- पाउडर विधि विवर्तन दत्त प्राप्त करने की सबसे सरलतम एवं शीघ्रता से ज्ञात करने वाली विधि है । इस डाटा में युग्मित रेखाओं के मध्य दूरी व ब्रेग कोण में निम्न संबंध होता है

$$\theta = \frac{S}{4R}$$

- लाउए विधि एकल क्रिस्टल के विन्यास एवं सममितता ज्ञात करने की सरलतम व परिशुद्ध (accurate) विधि है ।
- घूर्णन/दोलन विधि, एकल क्रिस्टल के जालक प्राचलों का ज्ञात करने के लिये प्रयुक्त होती है । इसमें निम्न सूत्र का उपयोग होता है ।

$$a = \frac{e\lambda}{S_e}\left(R^2 + S_e{}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

6.6 शब्दावली (Glossary)

पंच कटर	Punch cutter
फिल्टर	filter
बहु क्रिस्टलीय	polycrystalline
विन्यास	Orientation
समतल	Plane
स्ट्रिप	strip

6.7 संदर्भ ग्रंथ (Reference books)

C.M. Kachhava	Solid State Physics	Tata McGraw-Hill Publishing company Ltd. New Delhi
M.A. Wahab	Solid State Physics	Narosa Publishing House New Delhi

6.8 बोध प्रश्नों के उत्तर (answer to self assessment question)

1. एकवर्णी
2. समातरित्र का कार्य समान्तर एवं पतला एक्स-किरण पुंज प्राप्त करना होता है ।
3. सतत
4. एकल क्रिस्टल

6.9 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलधुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. क्रिस्टल संरचना ज्ञात करने की तीन प्रमुख विधियों के नाम लिखिये ।
2. उस विधि का नाम लिखिये जिससे क्रिस्टल संरचना ज्ञात करने के लिये सतत एक्स-किरणों का प्रयोग करना होता है ।
3. उस विधि का नाम लिखिये जिससे क्रिस्टल संरचना ज्ञात करने हेतु क्रिस्टल का घूर्णन आवश्यक होता है ।
4. पदार्थों की पहचान करने हेतु कौन सी विधि सरलतम एवं तीव्रगामी है?

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

5. पाउडर विधि का वर्णन कीजिये । किसी सरल घनीय क्रिस्टल का उदाहरण लेते हुये समझाइये कि इससे किस प्रकार जालक प्राचलों को ज्ञात किया जा सकता है?
6. लाउए विधि का वर्णन करते हुये समझाइये कि इससे क्रिस्टल की सममितता किस प्रकार ज्ञात करते हैं?
7. घूर्णन /दोलन विधि क्या है ' इसका वर्णन करो । इससे किस प्रकार जालक प्राचल a,b,cज्ञात किये जाते हे?

अंकिक प्रश्न (Numerical questions)

8. किसी रेखा के लिये $h^2+k^2+l^2$ का मान 6 प्राप्त होता है इस रेखा के लिये संभव तलों के (h,k,l) का मान ज्ञात करो ।

   (**उत्तर** : (2,1,1); (1,2,1); (1,1,2))

9. उदाहरण 6.2 में e के अन्य मान (e = 2,3, 4, 5 व 6) के लिये a का मान ज्ञात करें ।

   (**उत्तर :** 16 $\mathring{A}$)

इकाई - 7

जालक कम्पन
(Lattice Vibration)

इकाई की रूपरेखा

7.0 उद्देश्य
7.1 प्रस्तावना
7.2 फोनॉन
7.3 एकपरमाणुक रेखीय श्रृंखला के फोनॉन परिक्षेपण
7.4 द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला के फोनॉन परिक्षेपण
7.5 सारांश
7.6 शब्दावली
7.7 संदर्भ ग्रन्थ
7.8 बोध प्रश्नों के उत्तर
7.9 अभ्यासार्थ प्रश्न

7.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप

- जालक कम्पन के क्वान्टम् (फोनॉन) के बारे में विस्तृत जानकारी प्राप्त कर सकेंगे;
- एकपरमाणुक रेखीय श्रृंखला के फोनॉन परिक्षेपण सूत्र को व्युत्पन्न कर सकेंगे तथा आप समझ सकेंगे कि यह श्रृंखला निम्न पारक फिल्टर की तरह कार्य करती है;
- द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला के लिये फोनॉन परिक्षेपण ज्ञात कर ध्वानिक व प्रकाशिक फोनॉन के बारे में समझ सकेंगे तथा देखेंगे कि यह श्रृंखला यांत्रिक बैंड वर्जक फिल्टर की भाँति कार्य करती है ।

7.1 प्रस्तावना (Introduction)

प्रथम वर्ष भौतिकी में आपने दो समान दोलकों से बने युग्मित दोलक (coupled oscillator) के कम्पनों तथा इसकी प्रसामान्य विधाओं (normal modes) का अध्ययन किया है । प्रकृति में युग्मित दोलकों के उदाहरण में अधिकतर दोलकों की संख्या दो से अधिक होती है जैसे एकपरमाणुक (monoatomic)व द्विपरमाणुक (diatomic) रेखीय श्रखला में परमाणुओं के कम्पन इत्यादि । इस इकाई में हम इन उपरोक्त दो उदाहरणों का विस्तार से अध्ययन करेंगे।

सबसे पहले अनुच्छेद 7.2 में समझेंगे कि फोनॉन क्या है? इसके अतिरिक्त इस अनुच्छेद में आप फोनॉन के गुणों को जानकर, इसकी तुलना फोटॉन से कर सकेंगे । आगामी

अनुच्छेद 7.3 में युग्मित दोलक के उदाहरण के रूप में एकपरमाणुक रेखीय श्रृंखला के लिये फोनॉन परिक्षेपण का अध्ययन करेंगे तथा देखेंगे कि दीर्घ तरंग लम्बाई सीमा में एकपरमाणुक रेखीय श्रृंखला में तरंग संचरण सतत् डोरी की भाँति होता है व अल्प तरंग लम्बाई के लिये असंतत माध्यम (discontinuous medium) की भाँति व्यवहार करता है । अंतिम अनुच्छेद 7.4 में आप द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला के लिये फोनॉन परिक्षेपण प्राप्त करेंगे जिसमें आप देखेंगे कि संचरण सदिश (k) के एक मान के लिये कम्पन की कोणीय आवृत्ति (ω) के दो मान प्राप्त होते हैं । अधिक आवृत्ति कीं विधा को प्रकाशिक तथा कम आवृत्ति की विधा को ध्वानिक विधा कहते हैं । इन दोनों विधाओं का अध्ययन भी आप इस अनुच्छेद में करेंगे ।

7.2 फोनॉन (Phonons)

आप जानते हैं कि परमाणु सामान्य ताप पर स्थिर न रहकर अपनी साम्यावस्था के इर्द-गिर्द कम्पन करते हैं । जालक (lattice) में प्रत्येक परमाणु की कम्पन गति इनके मध्य बन्धों (bonds) द्वारा परस्पर युग्मित रहती हैं, जिसे सम्पूर्ण जालक की कम्पन गतियाँ कहते हैं । परमाणुओं की यह कम्पन गतियाँ ही ठोस में प्रत्यास्थ तरंग (elastic wave) का निर्माण करती हैं ।

यदि परमाणुओं के मध्य अंतराअणुक बल (inter molecular force) हुक के नियम (Hoook's law) का पालन करते हैं तथा कम्पन करते हुए परमाणु के कम्पन का आयाम अंतराअणुक दूरी के सापेक्ष अल्प हो, तो प्रत्येक कम्पन करते हुए परमाणु को एक आवर्त्ती दोलक (harmonic oscillator) के रूप में माना जा सकता है । जालक में ये सभी दोलक एक समान आवृत्ति से कम्पन करते हैं, जिसे कम्पन की प्रसामान्य विधा (normal mode) कहते हैं ।

क्वान्टम यांत्रिकी (quantum mechanics) के अनुसार आवर्ती दोलकों की प्रसामान्य विधाओं में उर्जा क्वान्टीकृत (quantized) होती है । प्रत्येक विधा में विविक्त (discrete) उर्जा का अनुमत (allowed) मान

$$E_n = \left(n + 1/2\right)h\nu \qquad ....(7.1)$$

के बराबर होता है । यहां $\frac{1}{2}h\nu$ सभी कम्पन विधाओं की शून्य बिन्दु उर्जा हैं जिसका मान ताप पर निर्भर नहीं करता है । सेमी.. (7.1) से हम देखते हैं कि जालक कम्पनों अथवा प्रत्यास्थ तरंग की उर्जा $h\nu$ की पूर्ण गुणज (multiple) होती है । उर्जा $h\nu$ के इस क्वान्टम को फोनॉन कहते हैं । अत: जिस प्रकार विद्युत चुम्बकीय तरंग के उर्जा क्वान्टम को फोटॉन (photon) कहते हैं उसी प्रकार जालक कम्पन अथवा प्रत्यास्थ तरंग में उर्जा के क्वान्टम को फोनॉन कहते हैं ।

सेमी.. (7.1) से हम देखते हैं कि उर्जा $h\nu$ दो क्रमागत उर्जा स्तरों ($\Delta n = \pm 1$)के मध्य उर्जा अन्तराल को प्रदर्शित करती है । अत: जब भी किसी अन्योन्य क्रिया में जालक कम्पनों

का योगदान होता है तो न केवल इन कम्पनों की उर्जा $h\nu$ की पूर्ण गुणज होती है बल्कि एक समय में एक ही फोनॉन का अवशोषण (absorption) अथवा उत्सर्जन (emission) होता है ।

ठोसों की ऊष्मा धारिता (heat capacity) में जालक का योगदान परमशून्य ताप पर शून्य होना, क्रिस्टल द्वारा X- किरणों का विवर्तन, न्यूट्रॉनो का अप्रत्यास्थ प्रकीर्णन (scattering) आदि फोनॉन के अस्तित्व को प्रदर्शित करते है।

फोटॉन की भाँति ये भी अविभेद्य होते हैं तथा इनकी स्पिन (spin) शून्य होती है । ये फोटॉन की भांति ही बोस आइन्सटीन (Bose Einstein) सांख्यिकी (statistics) का पालन करते हैं अत: ठोसों में T ताप पर फोनॉन की माध्य संख्या

....(7.2)

द्वारा दी जाती है ।

सेमी. (7.2) से हम देखते हैं कि ताप में कमी से फोनॉन की संख्या में कमी तथा वृद्धि होने पर फोनॉन की संख्या में वृद्धि होती है परन्तु फोनॉन की सृष्टि (वृद्धि) अथवा विनाश (कमी) से उर्जा संरक्षण के नियम का कोई उल्लंघन नहीं होता है ।

यदि कोई क्रिस्टल जालक T(K) ताप पर ऊष्मीय साम्य में है तो इस ताप पर प्रसामान्य विधा की माध्य उर्जा प्लांक सूत्र

$$\bar{E} = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \qquad ....(7.3)$$

द्वारा व्यक्त की जा सकती है ।

फोनॉन की आवृत्ति परास (10^4 से 10^{13} हर्टज ध्वनि तरंगों (sound waves) से अवरक्त लाल (infrared) तरंगों तक होती है । कम आवृत्ति का क्षेत्रं ध्वानिक क्षेत्र (acoustic region) तथा अधिक आवृत्ति का क्षेत्र अवरक्त क्षेत्र में होता है । जिस प्रकार फोटॉन प्रकाश के वेग से गति करते हैं उसी प्रकार किस्टल में फोनॉन ध्वनि के वेग से गति करते हैं । वास्तव में फोनॉन में भौतिक (Physically) रूप से कोई संवेग नहीं होता है, परन्तु संवरण नियतांक k का फोनॉन, फोटॉन, इलेक्ट्रॉन इत्यादि से उसी प्रकार अन्योन्य क्रिया करता है जैसे कि उसमें $\frac{h}{\lambda}$ परिमाण का संवेग उपस्थित हो। इस संवेग को फोनॉन संवेग अथवा क्रिस्टल संवेग (crystal momentum) भी कहते हैं ।

इसी प्रकार फोनॉन के कुछ अन्य गुणधर्म (properties) भी हैं :

1. फोटॉन की भाँति ठोस में फोनॉन की द्वैत (dual) प्रकृति मानी जा सकती है ।

2. जिस प्रकार विद्युत-चुम्बकीय तरंगें फोटॉन से निर्मित मानी जाती हैं उसी प्रकार प्रत्यास्थ तरंगों को भी फोनॉन से निर्मित माना जा सकता है ।

3. जिस प्रकार नियत ताप पर ऊष्मीय साम्य (thermal equilibrium) में कृष्णिका (black body) को फोटॉन गैस के रूप में माना जाता है उसी प्रकार नियत ताप पर ऊष्मीय साम्य में क्रिस्टल को फोनॉन गैस के रूप में माना जा सकता है ।

4. क्रिस्टल की ऊष्मीय उर्जा का मुख्य भाग फोनॉन की कुल ऊर्जा के रूप में होता है क्योंकि क्रिस्टल के मक्त इलेक्ट्रॉन (free electron) का ऊष्मीय उर्जा में बहुत कम योगदान होता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. फोनॉन क्या हैं

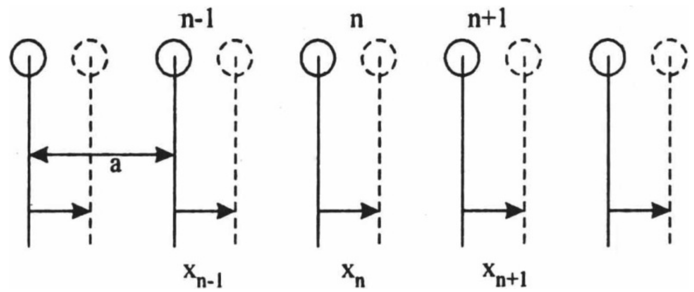
----

2. फोनॉन की आवृत्ति किस परास में होती है?

7.3 एकपरमाणुक रेखीय श्रृंखला के फोनॉन परीक्षेपण (Phonen dispersion of monoatomic linear chain)

चित्र 7.1 में दिखाये अनुसार हम एक अनन्त लम्बाई के समान परमाणुओं की रेखीय श्रृंखला (chain) पर विचार करते हैं. जिसके प्रत्येक परमाणु का द्रव्यमान m है तथा सभी परमाणु एक दूसरे से समान दूरी a पर x दिशा के अनुदिश, बन्धों द्वारा स्प्रिंग की भाँति जुड़े हुए हैं । अत: एकपरमाणु रेखीय श्रृंखला की तुलना हम उस स्प्रिंग से कर सकते हैं जिस पर समान द्रव्यमान के परमाणु समान दूरी पर जुड़े हों ।

जब प्रत्यास्थ तरंग श्रृंखला से संचरित होती है तो श्रृंखला के परमाणु तरंग की संचरण की दिशा में अथवा संचरण की दिशा के अभिलम्बवत् कम्पन करते हैं । हम यहां सरलता की दृष्टि से पस्माणुओं के अनुदैर्ध्य प्रत्यास्थ कम्पनों का अध्ययन करेंगे । इस स्थिति में विस्थापन (displacement) केवल एक निर्देशांक (co-ordinate) द्वारा निरूपित किया जा सकता है ।



चित्र 7.1

विरामावस्था में सेमी. परमाणु अपनी साम्यावस्था में स्थित होते हैं चित्र में इन्हें पूर्ण गोले द्वारा प्रदर्शित किया गया है । साम्यावस्था में n, n+1 व n-1 क्रमांक वाले परमाणुओं के x-निर्देशांक क्रमश: na, (n+1)a, (n-1)a हैं । जब इन्हें प्रत्यास्थ तरंग के संचरण द्वारा कम्पन अवस्था में लाया जाता है तो परमाणु साम्यावस्था की स्थिति से इर्द गिर्द सरल आवर्त गति करते हैं । यदि श्रृंखला के क्रमांक n, (n+1) तथा (n-1) वाले परमाणुओं का किसी क्षण t पर साम्यावस्था से विस्थापन क्रमश: x_n, x_{n+1} तथा x_{n-1} हैं (चित्र में इनकी विस्थापित स्थिति

बिन्दुवत गोले से प्रदर्शित की गयी है) । अत: यह मानते हुए कि परमाणुओं के मध्य अन्योन्य क्रिया केवल निकटतम परमाणुओं तक ही सीमित है तो हुक के नियमानुसार किसी भी n क्रमांक वाले परमाणु पर उसके निकटतम (n+1) व (n- 1) क्रमांक वाले परमाणुओं के कारण लगने वाले प्रत्यानयन (प्रत्यास्थ) बल का मान

$$F_n = \beta(x_{n+1} - x_n) - \beta(x_n - x_{n-1}) \qquad ...(7.4)$$

होगा । यहां $\beta(x_{n+1} - x_n)$ तथा $\beta(x_n - x_{n-1})$ क्रमश: n वे परमाणु पर केवल (n+1) वे परमाणु तथा (n-1) वें परमाणु के विस्थापन के कारण उत्पन्न प्रत्यास्थ (प्रत्यानयन) बल हैं तथा β अन्तरापरमाणुक बल नियतांक (interatomic force constant) है ।

न्यूटन के गति के नियम से n क्रमांक वाले परमाणु की गति का समी.करण

$$m\frac{d^2x_n}{dt^2} = \beta(x_{n+1} - x_n) - \beta(x_n - x_{n-1})$$

या $$= \beta(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n) \qquad ..(7.5)$$

हम जानते हैं कि इस एकपरमाणुक रेखीय श्रृंखला में कम्पन का संचरण प्रत्यास्थ तरंग के रूप में होता है अत: इस समी.करण का हल निम्न समी.करण द्वारा व्यक्त किया जा सकता है ।

$$x_n = Ae^i(\omega t - kna) \qquad ...(7.6)$$

यही na, n क्रमांक वाले परमाणु की मूल बिन्दु के सापेक्ष साम्यावस्था की स्थिति है तथा k व ω संचरित तरंग का क्रमश: संचरण सदिश व कोणीय आवृत्ति हैं ।

समी. (7.6) का समय के सापेक्ष दो बार अवकलन करने पर

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} = -A\omega^2e^{i(\omega t - kna)}$$

$$= -A\omega^2e^{i(\omega t - kna)} \qquad ...(7.7)$$

समी. (7.6) के अनुसार (n +1) व (n-1) क्रमांक वाले परमाणुओं के लिये विस्थापन का मान

$$x_{n+1} = Ae^{i[\omega t - k(n+1)a]} \qquad ...(7.8)$$

$$x_{n-1} = Ae^{i[\omega t - k(n-1)a]} \qquad ...(7.9)$$

समी. (7.5) में समी. (7.6), (7.7), (7.8) व (7.9) से क्रमश: x_n, $\frac{d^2x_n}{dt^2}$, x_{n+1} व x_{n-1} का मान रखने पर

$$-A\omega^2me^{i(\omega t - kna)} = \beta\left[Ae^{i[\omega t - k(n+1)a]} + Ae^{i[\omega t - k(n-1)a]} - 2Ae^{i(\omega t - kna)}\right]$$

या $$-A\omega^2me^{i(\omega t - kna)} = \beta Ae^{i(\omega t - kna)}\left(e^{-ika} - e^{ika} - 2\right)$$

या $$-\omega^2m = \beta\left(e^{-ika} + e^{ika} - 2\right)$$

या $$= \beta(2\cos ka - 2)$$

या $$= -2\beta\left(2\sin^2\frac{ka}{2}\right)$$

अतः $$-\omega^2 m = -4\beta\sin^2\frac{ka}{2}$$

$$\omega^2 = \frac{4\beta}{m}\sin^2\frac{ka}{2}$$

या $$\omega = \sqrt{\frac{4\beta}{m}}\sin\frac{ka}{2} \qquad \text{....(7.10)}$$

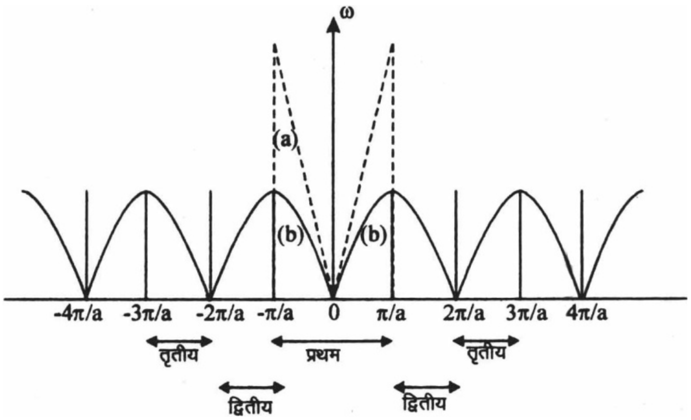
यहाँ केवल + चिन्ह का उपयोग किया गया है क्योंकि कोणीय आवृत्ति सदैव धनात्मक होती है । हम जानते हैं $\sin\frac{ka}{2}$ का अधिकतम मान 1 होता है । अत: कोणीय आवृत्ति का अधिकतम मान

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{4\beta}{m}} \qquad \text{...(7.11)}$$

यह प्रत्यास्थ तरंग का अधिकतम कोणीय आवृत्ति का मान है जो कि एकपरवणुक रेखीय श्रृंखला में संचरित हो सकती है ।

$$\omega = \omega_{\max}\sin\frac{ka}{2} \qquad \text{....(7.12)}$$

यह सेमी. ω व k में सम्बन्ध को व्यक्त करता है । इस सेमी.करण से हम देखते हैं कि कोणीय आवृत्ति ω , तरंग सदिश k के समानुपाती नहीं है अत: इनमें संबंध रेखीय नहीं है इसलिये इस ω व k में संबंध को फोनॉन परिक्षेपण संबंध कहते हैं । यह सम्बन्ध एकपरमाणुक रेखीय श्रृंखला में तरंग के विक्षेपण को प्रदर्शित करता है । ω व k के मध्य आरेख चित्र 7.2 में प्रदर्शित किया गया है ।



चित्र 7.2 विक्षेपण सेमी.करण का आरेख

इस आरेख से यह ज्ञात होता है कि आवृत्ति ω , संचरण सदिश k का आवर्त फलन (periodic function) है, जिसका आवर्तकाल $2\pi/a$ है ।

अब हम k के विभिन्न मानों के लिये विक्षेपण सम्बन्ध से श्रृंखला के व्यवहार का अध्ययन करते हैं ।

(i) न्यून आवृत्ति पर (at low frequency) जब k का मान अन्तरापरमाणविक (interatomic) दूरी a की तुलना में अल्प होता है अर्थात् तरंगदैर्ध्य λ (wavelength) का मान a की तुलना में अधिक होता है, जिसे दीर्घ तरंग सीमा (long wavelength limit) कहते हैं, की स्थिति में

$$\sin\frac{ka}{2} \approx \frac{ka}{2}$$

अत: सेमी. (7.10) से

$$\omega = \sqrt{\frac{4\beta}{m}\frac{ka}{2}} = ka\sqrt{\beta / m}$$

$$\omega = ak\sqrt{\frac{\beta}{m}}$$

$$\omega \propto k$$

अत: दीर्घ तरंग सीमा में (न्यून आवृत्ति सीमा) आवृत्ति ω, संचरण सदिश के समानुपाती है अर्थात् विक्षेपण प्रभाव नगण्य है। ऐसा सतत् डोरी में होता है इसलिये दीर्घ तरंग सीमा में एक विमीय परमाणु श्रृंखला में तरंग संचरण सतत् डोरी की भाँति होता है अथवा श्रृंखला समांग माध्यम की भाँति व्यवहार करती है तथा इस श्रृंखला में परमाणुओं की नियमित व्यवस्था की नियमितता का महत्व कम होता है क्योंकि इस स्थिति में कला वेग व समूह वेग समान होते हैं । कला वेग

$$v_p = \frac{\omega}{k} = a\sqrt{\beta / m} = v_0 \quad ...(7.14)$$

तथा समूह वेग

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = a\sqrt{\beta / m} = v_0 \quad ...(7.15)$$

यहाँ v_0 एकपरमाणुक श्रृंखला में ध्वनि का वेग है अर्थात् दीर्घ तरंग दैर्ध्य सीमा में कला व समूह वेग आवृत्ति अथवा तरंग दैर्ध्य पर निर्भर नहीं करते हैं । यह केवल 10^{13} हर्टज आवृत्ति की सीमा तक ही संभव है । इस आवृत्ति तक की सीमा को ध्वानिक परास (acoustic range) कहते हैं । इस सीमा में माध्यम (medium) अविक्षेपणी (non-dispersive) कहलाता है तथा संमागी सांतत्य माध्यम (homogenous continuum) के समान व्यवहार करता है । इस स्थिति को आरेख में वक्र (a) द्वारा प्रदर्शित किया गया है ।

(ii) उच्च आवृत्ति पर (at high frequency) जब k का मान अधिक (तरंग दैर्ध्य कम) होता है तो ω व k में रेखीय संबंध नहीं होता है तथा विक्षेपण प्रभाव महत्वपूर्ण होता है । इस अवस्था में एकपरमाणुक रेखीय श्रृंखला एक परिक्षेपी अथवा असंतत माध्यम

की भाँति व्यवहार करती है जिसे ω - k आरेख में वक्र (b) द्वारा प्रदर्शित किया गया है । इस स्थिति में

कला वेग $$v_p = \frac{\omega}{k} = a\sqrt{\frac{\beta}{m}}\left|\frac{\sin ka}{\frac{ka}{2}}\right| = v_0\left|\frac{\sin ka}{\frac{ka}{2}}\right| \quad ...(7.16)$$

तथा-समूह वेग

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = a\sqrt{\frac{\beta}{m}}\left|\cos\frac{ka}{2}\right| = v_0\left|\cos\frac{ka}{2}\right| \quad ....(7.17)$$

अत: कला व समूह वेग आवृत्ति के फलन होते हैं ।

(iii) आवृत्ति $\omega_{\max} = \sqrt{\frac{4\beta}{m}}$ पर या अन्तक आवृत्ति पर (cut off frequency) में से संचरित प्रत्यास्थ तरंगों की उच्चतम आवृत्ति है, जिसे अन्तक आवृत्ति कहते हैं ।

सेमी. (7.11) से,

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{4\beta}{m}} = 2\sqrt{\beta/m} = 2\pi v_{\max}$$

या $$v_{\max} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\beta/m}$$

यदि $$k_{\max} = \pm\pi/a \quad ....(7.18)$$

या $$\frac{2\pi}{\lambda_{\min}} = \mp\pi/a$$

$$\lambda_{\min} = \pm 2a$$

$$\therefore v_{\max} = \frac{v_0}{\lambda_{\min}} = \frac{v_0}{2a} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\beta/m} \quad ...\ (7.20)$$

अत: एकपरमाणुक रेखीय श्रृंखला में संचरित प्रत्यास्थ तरंगों की अधिकतम $v_{\max}$ होती है, इस प्रकार यह श्रृंखला निम्न पारक फिल्टर (low pass filter) के समान कार्य करती है जिसमें 0 $v_{\max}$ आवृत्ति की ही तरंगे संचरित हो सकती हैं । $k_{\max} = \frac{a}{\pi}$, यह आवृत्ति परास अवरक्त क्षेत्र में पायी जाती है, संगत मान पर कला वेग का मान सेमी. (7.16) से

$$v_p = a\sqrt{\frac{\beta}{m}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2},\frac{a}{2}\right)}{\frac{\pi}{2},\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{2a}{\pi}\sqrt{\beta/m}$$

जो कि कला वेग का अधिकतम मान है ।

सेमी.(7.17) से $k_{\max} = \pi / a$ पर समूह वेग का मान

$$v_g = a\sqrt{\frac{\beta}{m}}\left(\cos\frac{\pi}{2}, \frac{a}{2}\right) = 0$$

यह समूह वेग का न्यूनतम मान है ।

ब्रिलुवां क्षेत्र (Brillouin zones)

हम सेमी. (7.10) में यदि k को $k_m = k \pm 2\pi m / a$ से प्रतिस्थापित करें तो हम एक महत्वपूर्ण निष्कर्ष प्राप्त कर सकते हैं ।

सेमी. (7.10) में k के स्थान $km = k \pm 2\pi m / a$ पर रखने पर

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{4\beta}{m}} \sin k_m \frac{a}{2}$$

$$\pm\sqrt{\frac{4\beta}{m}} \sin\frac{a}{2}(k \pm 2\pi m / a)$$

$$\pm\sqrt{\frac{4\beta}{m}} \sin\frac{ka}{2}$$

अर्थात k तथा k_m तरंग सदिश के लिये आवृत्ति ω का समान मान प्राप्त होता है अत: k व $k_m = k \pm 2\pi \frac{m}{a}$ तरंग सदिशों के संगत श्रृंखला में परमाणुओं की कम्पन्न आवृत्ति अथवा कंपन अवस्थाएं समान होती हैं इसलिये कम्पन की अवस्था अथवा आवृत्ति संबंध प्राप्त करने के लिये k के मान को $\frac{2\pi}{a}$ के मानों के बीच ($\pm\pi / a$ से $-\pi / a$) सीमित रखा जाता है क्योंकि इस सीमा से अधिक k का मान होने पर वही आवृत्तियाँ पुन: प्राप्त होती हैं ।

$k = +\pi / a$ तथा $-\pi / a$ के बीच का भाग प्रथम ब्रिलुवाँ क्षेत्र कहलाता है ।

इस क्षेत्र के अंतक मान

$$k_{\max} = \pm\pi / a$$

होते है । इस क्षेत्र की परिसीमा (boundaries) $k_{\max} = \pm\pi / a$ पर n क्रमांक वाले, परमाणु का विस्थापन

$$x_n = Ae^{i(\omega t - kna)}$$

प्रगामी तरंग को व्यक्त नहीं करता है बल्कि अप्रगामी तरंग को व्यक्त करता है क्योंकि परिसीमा पर $v_g = 0$, होता है तथा हम जानते हैं कि v_g ऊर्जा के संचरण को प्रदर्शित करता है इसलिए परिसीमा पर उर्जा का संचरण नहीं होता है व तरंग अप्रगामी हो जाती है । इस परिसीमा पर

$$nk_{\max} a = \pm n\pi$$

$$x_n = Ae^{i(\omega t \pm n\pi)} = Ae^{i\omega t} \cos n\pi$$

जो कि अप्रगामी तरंग का सेमी.करणहै । यह सेमी.करण प्रदर्शित करता है इस क्षेत्र की परिसीमा में निकटतम परमाणु विपरीत कला में कम्पन करते है । प्रथम ब्रिलुवाँ क्षेत्र के दोनों

ओर $-2\pi/a$ से $-\pi/a$ तथा π/a से $2\pi/a$ के k सदिश अन्तरालों के क्षेत्र को द्वितीय ब्रिलुवाँ क्षेत्र कहते हैं ।

इसी प्रकार अन्य उच्च कोटि की परिसीमाओं तथा ब्रिलुवाँ क्षेत्र को परिभाषित किया जा सकता है लेकिन ω व k सम्बन्ध की आवर्ती प्रकृति के अध्ययन के लिये प्रथम ब्रिलुवाँ क्षेत्र तक ही करते है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

3. अन्तक आवर्ती से आप क्या समझते है?

----

4. एकपरमाणुक रेखीय श्रृंखला में प्रथम ब्रिलुवाँ क्षेत्र की परिसीमा पर संचरण सदिश का मान क्या होता है?

----

5. परिक्षेपित माध्यम से आप क्या समझते हैं?

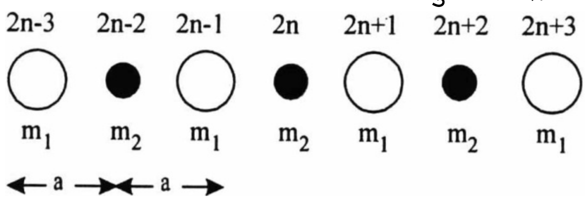
----

6. एकपरमाणुक रेखीय श्रृंखला निम्न पारक फिल्टर की तरह क्यों काम है?

7.4 द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला के फोनॉन परिक्षेपण (Phonon dispersion of diatomic linear chain)

फोनॉन परिक्षेपण (Phonon dispersion)

हम एक द्विपरमाणुक (diatomic) रेखीय श्रृंखला पर विचार करते हैं जिसमें दो भिन्न-भिन्न प्रकार के परमाणु जिनके द्रव्यमान क्रमश: m_1 व m_2, हैं तथा $m_1 > m_2$, एकान्तर क्रम में चित्र 7.3 में दिखाये अनुसार एक दूसरे से दूरी a पर स्थित हैं । माना ये रेखीय श्रृंखला में इस प्रकार व्यवस्थित हैं समसंख्या वाले क्रमांक पर स्थित परमाणुओं का द्रव्यमान m_2, व विषम संख्या वाले क्रमांक पर स्थित परमाणुओं का द्रव्यमान m_1 है ।



चित्र 7.3 द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला

यदि एक अनुदैर्ध्य तरंग इस श्रृंखला में से x-दिशा में संचरित होती है तो सभी परमाणु x-दिशा में विस्थापित होगें । माना अनुदैर्ध्य तरंग के संचरण के कारण 2n, 2n-1, 2n+2 क्रमांक वाले परमाणुओं का x- दिशा में विस्थापन क्रमशः x_{2n}, x_{2n+1} व x_{2n+2} हैं । हम यहाँ यह मानते हैं कि निकटतम परमाणुओं के मध्य अन्योन्य क्रिया ही किसी परमाणु पर कार्यरत प्रत्यानयन बल में योगदान करती है तथा परमाणुओं का विस्थापन प्रत्यास्था सीमा में है तब x_{2n+1} तथा x_{2n} विस्थापनों के लिये, m_1 व m_2 द्रव्यमान के परमाणुओं की गति के निम्न सेमी.करण होंगे -

$$m_1 \frac{d^2 x_{2n+1}}{dt^2} = \beta\left[x_{2n+2} + x_{2n} - 2x_{2n+1}\right] \quad ...(7.21)$$

तथा $$m_1 \frac{d^2 x_{2n+1}}{dt^2} = \beta\left[x_{2n+2} + x_{2n-1} - 2x_{2n}\right] \quad ...(7.22)$$

यहां β बल नियतांक है ।

चूंकि दोनों परमाणुओं के द्रव्यमान भिन्न भिन्न हैं इसलिये इनके कम्पन आयाम भी भिन्न होंगे । माना m_1 व m_2 द्रव्यमान के परमाणुओं के कम्पन के आयाम क्रमशः A तथा B हैं तो सेमी. (7.21) व (7.22) के हल निम्न सेमी.करणों द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं ।

$$x_{2n+1} = Ae^{i[\omega_1 t - (2n+1)ka]} \quad ...(7.23)$$

$$x_{2n} = Be^{i[\omega_2 t - 2nka]} \quad ...(7.24)$$

सेमी. (7.23) व (7.24) को दो बार अवकलित करने पर

$$\frac{d^2 x_{2n+1}}{dt^2} = -\omega^2 Ae^{i[\omega_1 t - (2n+1)ka]}$$

$$= -\omega^2{}_1 x_{2n+1} \quad ....(7.25)$$

$$\frac{d^2 x_{2n}}{dt^2} = \omega^2{}_2 \beta e^{i[\omega_2 t - 2kna]}$$

$$= -\omega^2{}_2 x_{2n} \quad ...(7.26)$$

सेमी (7.23) व (7.24) के समान 2n-1 व 2n+2 क्रमांक वाले परमाणुओं के को निम्न प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं

$$x_{2n-1} = Ae^{i[\omega_1 t - (2n-1)ka]} \quad ...(7.27)$$

$$x_{2n+2} = Be^{i[\omega_2 t - (2n+2)ka]} \quad ...(7.28)$$

सेमी. (7.21) में सेमी. (7.23), (7.24), (7.25) व (7.28) से क्रमश x_{2n+1}, x_{2n}, $\frac{d^2 x_{2n+1}}{dt^2}$ व प्र x_{2n+2} के मान रखने पर

$$-m_1 \omega^2{}_1 = \beta\left[\mathrm{x}_{2n} e^{-2ika} + \mathrm{x}_{2n} - 2\mathrm{x}_{2n+1}\right]$$

$$x_{2n+1} = \frac{\beta(1+e^{-2ika})}{(2\beta - m1\omega^2{}_1)} x_{2n} \qquad ....(7.29)$$

सेमी. (7.27) में x_{2n+1}, व x_{2n} का मान क्रमश: सेमी. (7.23) व (7.24) में रखने पर

$$Ae^{i[\omega_1 t-(2n+1)ka]} = \frac{\beta(1+e^{-2ika})}{(2\beta - m1\omega^2{}_1)} Be^{i[\omega_2 t-2nka]} \qquad ...(7.30)$$

इसी प्रकार सेमी. (7.22) से

$$-m_2\omega^2{}_2 x_{2n} = \beta\left[x_{2n+1} + e^{2ika}x_{2n+1} - 2x_{2n}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad x_{2n+1} = \frac{2\beta - m_2\omega^2{}_2}{\beta(1+e^{+2ika})} x_{2n} \qquad ....(7.31)$$

सेमी. (7.30) के साथ t के समस्त मानों के यथार्थ होने के लिये t से सम्बद्ध (associated) राशि इस सेमी.करण के दायें (right) व बायें (left) पक्ष (side) में बराबर होनी चाहिये । अत:

$$e^{i\omega_1 t} = e^{i\omega_2 t}$$

माना. $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ...(7.32)

अर्थात् परमाणुओं के भिन्न भिन्न होने पर भी वे समान आवृत्ति ω से कम्पन करेंगे परन्तु उनके कम्पन आयाम भिन्न भिन्न होंगे ।

सेमी. (7.29), (7.31) व (7.32) में

$$\frac{\beta(1+e^{-2ika})}{2\beta - m_1\omega^2} = \frac{2\beta - m_1\omega^2}{\beta(1+e^{2ika})} \qquad ..(7.33)$$

या $$\beta^2(2+e^{-2ika}+e^{2ika}) = (2\beta - m_2\omega^2)(2\beta - m_1\omega^2)$$

या $$\beta^2(2+2\cos ka) = 4\beta^2 - 2\beta(m_1+m_2)\omega^2 + m_1m_2\omega^4$$

या $$\omega^4 - 2\beta\frac{(m_1+m_2)}{m_1m_2}\omega^2 + \frac{2\beta}{m_1m_2}^2(1-2\cos ka)$$

या $$\omega^4 - 2\beta\frac{(m_1+m_2)}{m_1m_2}\omega^2 + 4\beta^2\frac{2\sin^2 ka}{m_1m_2} = 0 \qquad ....(7.34)$$

सेमी. (7.34) का द्विघात (quadratic) सेमी.करण है अत: इसका हल निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं ।

$$\omega^2 = \frac{\beta(m_1+m_2)}{m_1m_2} \pm \beta^2\left[\frac{(m_1+m_2)}{m_1m_2} - 4\frac{\sin^2 ka}{m_1m_2}\right]^{1/2} \qquad ...(7.35)$$

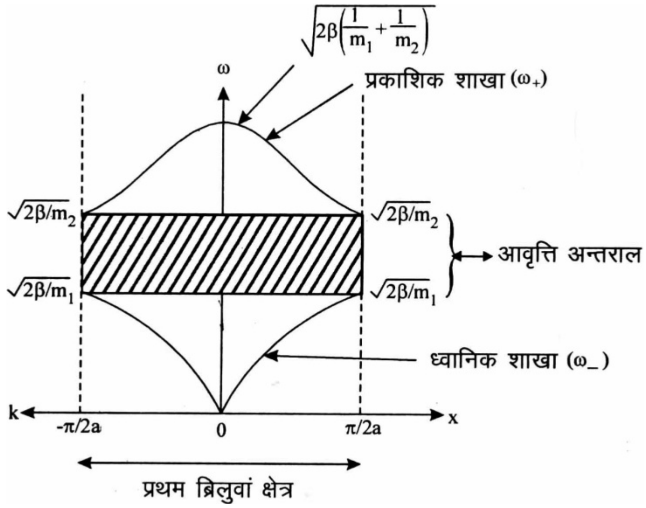
या $$\omega^2 = \beta\left[\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) \pm \beta\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^2 - 4\frac{\sin^2 ka}{m_1 m_2}\right]^{1/2}$$

यह सेमी.करण द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला की कोणीय आवृत्ति ω व k संचरण नियतांक में सम्बन्ध को प्रदर्शित करता है इसे विक्षेपण संबंध (dispersion relation) कहते हैं । सेमी. (7.35) से स्पष्ट होता है कि आवृत्ति ω, तरंग नियतांक k का आवर्ती फलन है तथा k के किसी एक मान के लिये ω के सेमी. (7.35) के दूसरे पद में धनात्मक व ऋणात्मक चिन्ह प्रयुक्त करने पर क्रमश: दो मान प्राप्त होते हैं, ω_+व ω_- । जबकि हम जानते हैं कि एकपरमाणुक रेखीय श्रृंखला में k के एक मान के लिये ω का एक ही मान प्राप्त होता है ।

ध्वानिक एवं प्रकाशिक फोनॉन (Acoustic and Optical phonons)

सेमी (7.35) में ω^2 के कम मान के लिये ऋण चिन्ह प्रयुक्त करने पर प्राप्त न्यूनतम आवृत्ति (ω_-)के फोनॉन को ध्वानिक फोनॉन कहते हैं । ω_-आवृत्ति व संचरण नियतांक k के मध्य आरेख को ध्वानिक शाखा कहते हैं । सेमी. (7.35) में ऋणात्मक चिन्ह प्रयुक्त करने पर प्राप्त न्यूनतम आवृत्ति (ω_-) का मान

$$\omega^2_- = \beta\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) - \beta\left[\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^2 - 4\frac{\sin^2 ka}{m_1 m_2}\right]^{1/2} \quad \text{....(7.36)}$$



चित्र 7.4 द्विपरमाणुक जालक का बिलुवाँ क्षेत्र

यह सेमी.करण विक्षेपण सम्बन्ध की ध्वानिक शाखा (branch) को व्यक्त करता है जैसा कि चित्र 7.4 में दर्शाया गया है सेमी. (7.35) में धनात्मक चिन्ह प्रयुक्त करने पर अधिकतम आवृत्ति ω_+ के फोनॉन प्राप्त होते हैं जिन्हें प्रकाशिक फोनॉन (optical phonons)

कहते हैं । ω_+ आवृत्ति व संचरण नियतांक k के मध्य आरेख को प्रकाशिक शाखा कहते हैं । सेमी. (7.35) में धनात्मक चिन्ह प्रयुक्त करने पर प्राप्त अधिकतम आवृत्ति का मान

$$\omega_{\pm}^2 = \beta\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)+\beta\left[\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^2-4\frac{\sin^2 ka}{m_1 m_2}\right]^{1/2} \quad ....(7.37)$$

यह सेमी.करण विक्षेपण संबंध की प्रकाशिक शाखा को प्रदर्शित करता है । यह शाखा चित्र 7.4 में ऊपर वाले भाग में प्रदर्शित की गयी है । ω_+ आवृत्ति के कम्पन (विधा) आयनिक पदार्थ में विद्युत चुम्बकीय तरंग (प्रकाश) में उपस्थित विद्युत क्षेत्र के द्वारा उत्तेजित किये जा सकते हैं इसलिये ω_+ आवृत्ति की विधा को प्रकाशिक विधा (optical mode) कहते हैं ।

अब हम k के विभिन्न मानों के लिये दोनों शाखाओं का अध्ययन करेंगे ।

(a) जब k= 0 तो सेमी. (7.36) व (7.37) से

$$\omega_-(0) = 0 \quad ....(7.38)$$

तथा $$\omega_+(0) = \sqrt{2\beta\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)} \quad ...(7.39)$$

यहां $\omega_-(0)$ तथा $\omega_+(0)$ क्रमशः न्यूनतम ध्वानिक शाखा व अधिकतम प्रकाशिक शाखा की आवृत्तियाँ हैं

अतः k=0 पर जिस शाखा का परिमित मान हो इसे प्रकाशिक शाखा तथा शून्य मान हो तो ध्वानिक शाखा कहते हैं ।

(b) $(k\to 0)$ के अल्पमानों के लिये sinka ka

सेमी. (7.38) व (7.37) से

$$\omega_{\pm}^2 = \beta\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\pm\beta\left[\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^2-\frac{4k^2a^2}{m_1 m_2}\right]^{1/2}$$

$$= \beta\left(\frac{m_2+m_1}{m_1 m_2}\right)\pm\beta\left[\left(\frac{m_2+m_1}{m_1 m_2}\right)-\frac{4k^2a^2}{m_1 m_2}\right]^{1/2}$$

$$= \beta\left(\frac{m_2+m_1}{m_1 m_2}\right)\left[1\pm\left(1-\frac{4k^2a^2 m_1 m_2}{m_2+m_1}\right)\right]^{1/2}$$

$$= \beta\left(\frac{m_2+m_1}{m_1 m_2}\right)\left[1\pm\left(1-\frac{2m_1 m_2 k^2 a^2}{(m_2+m_1)^2}\right)\right]$$

अतः $$\omega_{\pm}^2 = \frac{k^2a^2 2\beta}{(m_2+m_1)}$$ तथा

तथा $$\omega_- = ka\sqrt{\frac{2\beta}{(m_2+m_1)}}$$ ..(7.40).

ω_- का मान k के अल्प मानों के लिये, दोनों परमाणुओं के द्रव्यमान व उनके बीच दूरी पर निर्भर करता है ।

$k \to 0$ सीमा में

$$v = \frac{\omega}{k} = a\sqrt{\frac{2\beta}{(m_2+m_1)}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = a\sqrt{\frac{2\beta}{(m_2+m_1)}}$$

अत: इस सीमा में कला व समूह वेग ध्वानिक शाखा में समान होते हैं ।

$$\omega^2_+ = 2\beta\frac{(m_2+m_1)}{m_1m_2}$$

यहां k², को नगण्य माना गया है

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{2\beta(m_2+m_1)}{m_1m_2}} = \omega_+(0) \qquad 7.41$$

अत: k², के अल्पमानों (शून्य के पास) के लिये ω_+ लगभग नियत रहता है ω का k के साथ रैखिक (linear) परिवर्तन होता है जैसा कि चित्र में प्रदर्शित है । सेमी. (7.35) में sinka पद कारण ω का k के सापेक्ष परिवर्तन आवर्ती प्रकृति का होता है । सेमी. (7.35) में k के स्थान पर $km = k \mp m\pi/a$ रखने पर ω का समान मान प्राप्त होता है अत: k व $km = k \pm \frac{m\pi}{a}$ तरंग सदिशों के संगत श्रृंखला में कम्पन आवृत्ति अथवा अवस्थाएं समान होती हैं इसलिये कम्पन आवृत्ति संबंध प्राप्त करने के लिये k के मानों को $\frac{-\pi}{2a}$ व $\frac{+\pi}{2a}$ के मध्य रखते हैं, क्योंकि परास से अधिक K का मान होने पर वही आवृत्तियाँ वापस प्राप्त होती हैं । अत: $\frac{-\pi}{2a} \le k \le \frac{\pi}{2a}$ के अन्तराल में परिक्षेपण वक्र प्राप्त होता है इस अन्तराल के संगत क्षेत्र को द्विपरामाणुक रेखीय श्रृंखला के लिये प्रथम ब्रिलुवाँ क्षेत्र कहते हैं । जबकि एकपरमाणुक रेखीय श्रृंखला में यह क्षेत्र $k = \pm\frac{\pi}{2a}$ के बीच प्राप्त होता है । यहां 2a दो निकटतम समान परमाणुओं के बीच की दूरी है । इससे यह भी स्पष्ट होता है कि प्रथम ब्रिलुवाँ क्षेत्र अन्तरापरमाणविक दूरी a पर निर्भर नहीं करता है अपितु समान परमाणुओं के अन्तराल 2a पर निर्भर करता है ।

द्वितीय ब्रिलुवा क्षेत्र $= -\frac{3\pi}{2a} \le k \le -\frac{\pi}{2a}$ तथा $+\frac{\pi}{2a} \le k \le +\frac{3\pi}{2a}$ के बीच के क्षेत्र में प्राप्त होता है ।

(c) जब $k=+\frac{\pi}{2a}$ हो तो सेमी. (7.37)

$$\omega_{+}^{2}=\beta\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)+\beta\left[\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^{2}-\frac{4}{m_1m_2}\right]^{1/2}$$

या $$=\beta\left(\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\right)+\beta\left[\left\{\frac{(m_1-m_2)}{m_1m_2}\right\}^{2}\right]^{1/2}$$

या $$\beta\left(\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\right)+\beta\frac{(m_1-m_2)}{m_1m_2}$$

$$\omega^{2}_{+}=\beta\frac{2m_1}{m_1m_2}=\frac{2\beta}{m_2}$$

$$\omega_{+}=\sqrt{\frac{2\beta}{m_2}} \qquad ...(7.42)$$

अत: $k=\frac{\pi}{2a}$ प्रकाशीय आवृत्ति का न्यूनतम मान है । यह आवृत्ति भारी द्रव्यमान m_1 वाले परमाणु पर निर्भर नहीं करती है इसलिये m_1 द्रव्यमान वाले परमाणु अपने स्थान पर स्थिर रहते हैं, केवल m_2 द्रव्यमान वाले हल्के परमाणु ही कम्पन करते हैं ।

इसी प्रकार सेमी. (7.38) से

$$\omega^{2}_{-}=\beta\left(\frac{m_2+m_1}{m_1m_2}\right)-\beta\left[\left(\frac{m_2+m_1}{m_1m_2}\right)^{2}-\frac{4}{m_1m_2}\right]^{1/2}$$

$$\omega^{2}_{-}=\frac{2\beta}{m_1}$$

$$\omega_{-}=\sqrt{\frac{2\beta}{m_1}} \qquad ....(7.43)$$

यह आवृत्ति द्रव्यमान स्थान वाले परमाणुओं पर निर्भर नहीं करता है अर्थात् इस शाखा में m_2 द्रव्यमान वाले हल्के परमाणु स्थिर रहते हैं व m_1 द्रव्यमान वाले भारी परमाणु कम्पन करते हैं । यह ध्वानिक आवृत्ति का अधिकतम मान है । उपयुक्त विश्लेषण से हम देखते हैं कि प्रथम ब्रिलुवाँ क्षेत्र की परिसीमा पर $\left(k=\pm\frac{\pi}{2a}\right)$ केवल एक प्रकार के ही परमाणु कम्पन करते हैं । जब k का मान $\pm\frac{\pi}{2a}$ से कम होता है तो दोनों प्रकार के परमाणु कम्पन करते हैं।

दोनों शाखाओं में कम्पनों के भौतिक महत्व को समझने के लिये हम दोनों प्रकार के परमाणुओं के कम्पन आयामों के अनुपात का मान $k\rightarrow 0$ के लिये ज्ञात करते हैं ।

सेमी (7.23)ए व (7.24) से को

$$\lim_{k\to 0}\frac{x_{2n+1}}{x_{2n}}=\frac{A}{B} \quad ...(7.44)$$

सेमी. (7.29) से

$$\lim_{k\to 0}\frac{x_{2n+1}}{x_{2n}}=\frac{2\beta}{2\beta-m_1\omega^2}=\frac{A}{B} \quad ...(7.45)$$

हम जानते हैं कि $k\to 0$ पर $\omega_-=0$ तथा $\omega_+=\sqrt{\frac{2\beta(m_1+m_2)}{m_1m_2}}$

सेमी (7.45) में $k\to 0$ पर ω के स्थान पर ω_- रखने पर

$$\frac{A}{B}=\frac{2\beta}{2\beta-m_1\omega_-^2}$$

$$=\frac{2\beta}{2\beta}=1$$

अतः $\frac{A}{B}=1 ...(7.46)$

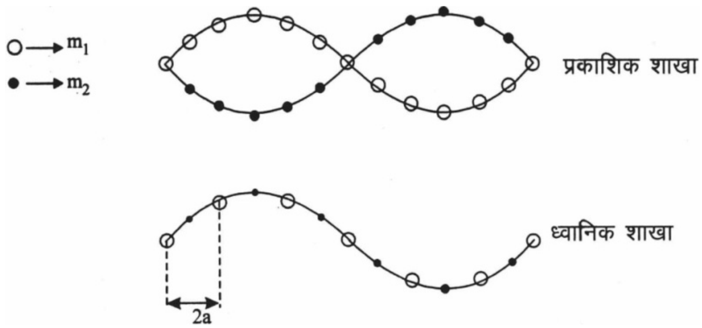
अर्थात् ध्वानिक शाखा में दोनों परमाणुओं का आयाम समान होगा व समान में गति करेंगे । ध्वानिक में दोनों प्रकार के परमाणु एक साथ एक ही दिशा में इस प्रकार गति हैं जिस प्रकार दीर्घ तरंग दैर्ध्य की ध्वनि तरंगों में होता है । इसी कारण इस कम्पन विधा को ध्वानिक विधा कहते हैं ।

इसी प्रकार सेमी. (7.45) में ω के स्थान पर ω_+ का मान रखने पर ।

$$\frac{A}{B}=\frac{2\beta}{2\beta-\frac{m_1 2\beta(m_1+m_2)}{m_1m_2}}$$

$$=\frac{-m_2}{m_1} \quad .....(7.47)$$

अतः दोनों परमाणुओ के आयाम का अनुपात उनके द्रव्यमानों के व्युतक्रमानुपाती हैं तथा प्रकाशिक शाखा (ω_+) में दोनों प्रकार के परमाणुओं के कम्पन एक दूसरे से विपरीत दिशा (कला) में हैं । इन शाखाओं में के कम्पन चित्र 7.5 में प्रदर्शित किये गये हैं ।



चित्र 7.5 प्रसामान्य विधाओं की प्रकाशित व ध्वनिक शाखाएं

अब A/B का मान हम $k \pm \frac{\pi}{2a}$ पर ज्ञात करेंगे ।

सेमी. (7.29) में सेमी. (7.27), (7.28) व (7.32) से x_{2n+1}, x_{2n} तथा $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, रखने पर

$$\frac{A}{B} e^{-ika} = \beta \frac{\left(1 + e^{-2ika}\right)}{\left(2\beta - m_1\omega^2\right)}$$

या

$$\frac{A}{B} = \frac{\beta}{\left(2\beta - m_1\omega^2\right)}\left(e^{ika} + e^{-ika}\right)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{2\beta}{2\beta - m_1\omega^2} \cos ka$$

$k \pm \frac{\pi}{2a}$ पर

$$\frac{A}{B} = 0 \qquad \text{...(7.48)}$$

अत: मै A= 0 यदि $B \neq 0$

इसी प्रकार सेमी. (7.31) (7.27), (7.28) व (7.32)

$$\frac{A}{B} = \frac{2\beta - m_2\omega^2}{2\beta \cos ka}$$

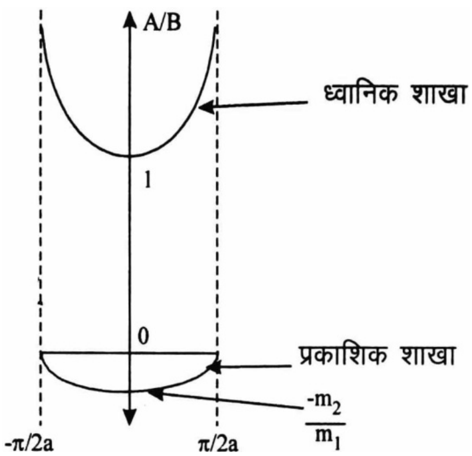
$k = \pm \frac{\pi}{2a}$ पर

$$\frac{A}{B} = \frac{2\beta - m_2\omega^2}{0}$$

$$\frac{A}{B} = \infty$$

अतः B=0 यदि $A \neq 0$

अनुपात (A/B) तथा k के वक्र को चित्र 7.6 में प्रदर्शित किया गया है ।



चित्र 7.6 प्रथम ब्रिलुवाँ क्षेत्र में प्रकाशित एवं ध्वनिक क्षेत्र में कंपनों के आपेक्षिक आयाम

वर्जित अन्तराल (Forbidden gap) :

चित्र 7.4 में हम देखते हैं कि द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला में $\sqrt{\frac{2\beta}{m_1}}$ तथा $\sqrt{\frac{2\beta}{m_2}}$ आवृत्तियों के मध्य आवृत्तियों के संगत कम्पन इस श्रृंखला में संभव नहीं है, अथवा इस अन्तराल में स्थित आवृत्तियों की तरंगें इस श्रृंखला में संचरित नहीं हो सकती । इस आवृत्ति अन्तराल $\left(\sqrt{\frac{2\beta}{m_2}}-\sqrt{\frac{2\beta}{m_1}}\right)$ को वर्जित अन्तराल (forbidden -gap) कहते हैं ।

चित्र 7.4 में इसे तिर्यक रेखाओं द्वारा प्रदर्शित किया गया है । इस प्रकार द्रिपरमत्युक रेखीय श्रृंखला एक यांत्रिक - yvj (band-stop filter) की भांति कार्य करता है । यदि $m_1 = m_2$, हो तो वर्जित अन्तराल शून्य हो जाता है । वर्जित अन्तराल का मान द्रव्यमान अनुपात $\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$ पर निर्भर करता है । इस आवृत्ति अन्तराल में उपस्थित किसी आवृत्ति के लिये क्रमागत परमाणु विपरीत कला में समान आयाम से कम्पन करते हैं जिससे उनके कम्पन परस्पर निरस्त हो जाते हैं इसलिये ऐसी आवृत्तियों की तरंगें जालक में संचरित नहीं से सकती हैं । वर्जित अन्तराल द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला का अभिलाक्षणिक गुण है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

7. द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला में प्राप्त विक्षेपण संबंध में तरंग सदिश k के एक मान के लिये कोणीय आवृत्ति ω के कितने मान प्राप्त होते हैं?

----

8. विक्षेपण आरेख में संचरण सदिश व उच्च व निम्न आवर्तियो के संगत प्राप्त आरेख को क्या कहते है?

----

9. प्रकाशीय शाखा में `ω_+' का मान k के किस मान पर अधिकतम व न्यूनतम होता है तथा इनके मान अधिकतम व न्यूनतम क्या होते हैं?

----

10. द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला के लिये प्राप्त प्रथम ब्रिलुवा क्षेत्र की परिसीमा पर k का मान क्या होता है तथा किस पर निर्भर करता है?

11.	द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला में दोनों प्रकार के परमाणुओं का द्रव्यमान बराबर होने पर वर्जित अन्तराल का मान क्या होता है? --- ---	
12.	प्रकाशिक व ध्वानिक शाखा पर द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला के भारी परमाणु के द्रव्यमान में वृद्धि करने पर क्या प्रभाव पडता है? --- ---	
13.	प्रकाशिक व ध्वानिक शाखाओं पर श्रृंखला के हल्के परमाणु के द्रव्यमान में कमी करने पर क्या प्रभाव पड़ता है? --- --	

7.5 सारांश (Summary)

- जालक कम्पन अथवा प्रत्यास्थ तरंग में उर्जा के क्वान्टम को फोनॉन कहते हैं ।
- फोनॉन बोस आइन्सटीन सांख्यिकी का पालन करते हैं तथा इनकी आवृत्ति परास ध्वनि तरंगों से अवरक्त लाल तरंगों तक होती है ।
- एक-परमाणुक रेखीय श्रृंखला में संचरित तरंग की अधिकतम कोणीय आवृत्ति का मान $\omega_{\max} = \sqrt{\frac{4\beta}{m}}$ बराबर होता है, जिसे अन्तक आवृत्ति कहते हैं ।
- एक-परमाणुक रेखीय श्रृंखला में ω व k में संबंध $\omega = \omega_{\max} = \sin\frac{ka}{2}$ है, जिसे विक्षेपण सम्बन्ध कहते हैं ।
- दीर्घ तरंग सीमा में एक परमाणुक रेखीय श्रृंखला में तरंग संचरण सतत् डोरी की भाँति होता है ।
- लघु तरंग सीमा में एकपरमाणुक रेखीय श्रृंखला एक परिक्षेपी माध्यम की भाँति व्यवहार करती है ।
- एकपरमाणुक रेखीय श्रृंखला निम्न पारक फिल्टर की तरह कार्य करती है क्योंकि इसमें 0 से $v_{\max}$ आवृत्ति की ही तरंगें संचरित हो सकती है ।
- एक-परमाणुक रेखीय श्रृंखला से प्राप्त विक्षेपण संबंध में k के एक मान के लिये ω का एक ही मान प्राप्त होता है जबकि द्विपरमाणुक श्रृंखला में k के एक मान के लिये ω के दो मान प्राप्त होते हैं । इसमें से अधिक आवृत्ति ω_+ व k के मध्य आरेख को प्रकाशिक शाखा तथा कम आवृत्ति ω_- व k के आरेख को ध्वानिक शाखा कहते हैं ।
- k = 0 मान के संगत ध्वानिक शाखा की न्यूनतम आवृत्ति $\omega_- = 0$ तथा प्रकाशिक शाखा की आवृत्ति ω_+ का अधिकतम मान प्राप्त होता है ।

- $k=\pm\frac{\pi}{2a}$ के संगत ω_+ का मान $\sqrt{\frac{2\beta}{m_2}}$ (न्यूनतम) तथा $\omega_-=\sqrt{\frac{2\beta}{m_1}}$ (अधिकतम) प्राप्त होता है । ये दोनों आवृत्तियाँ केवल द्रिपरमाणु श्रृंखला के एक ही प्रकार के परमाणु के द्रव्यमान पर निर्भर करती है ।
- द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला में $-\frac{\pi}{2a}\le k\le\frac{\pi}{2a}$ के अन्तराल में प्रथम ब्रिलुवाँ प्राप्त होता है, जबकि एकपरमाणुक श्रृंखला में यह $-\frac{\pi}{a}$ व $+\frac{\pi}{a}$ के मध्य प्राप्त होता है ।
- प्रथम ब्रिलुवाँ की परिसीमा पर द्रिपरमाणुक श्रृंखला में एक ही प्रकार के परमाणु कम्पन्न करते हैं तथा का मान $\pm\frac{\pi}{2a}$ से कम होने पर दोनों प्रकार के परमाणु कम्पन करते हैं ।
- आवृत्ति $\sqrt{\frac{2\beta}{m_1}}$ तथा $\sqrt{\frac{2\beta}{m_2}}$ अन्तराल में स्थित आवृत्तियों की तरंगें द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला में संचरित नहीं हो सकती हैं । इस आवृत्ति अन्तराल को वर्जित अन्तराल कहते हैं ।
- द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला एक यांत्रिक बैंड वर्जक फिल्टर का कार्य करती है

7.6 शब्दावली (Glossary)

अन्तरापरमाणुक दूरी	Interatomic distance
अवरक्त क्षेत्र	Infrared region
अंतक आवृत्ति	Cut off frequency
एक परमाणुक	Monoatomic
क्वान्टीकृत	Quantized
जालक कम्पन	Lattice vibration
द्विपरमाणुक	Diatomic
दीर्घ तरंग सीमा	Long wavelength limit
ध्वनि तरंगे	Sound waves
ध्वानिक शाखा	Acoustic branch
निकटतम	Nearest
निम्न पारक फिल्टर	Low pass filter
परिक्षेपण	Dispersion
प्रत्यास्थ तरंग	Elastic wave
प्रकाशिक शाखा	Optical branch
प्रसामान्य विधा	Normal mode

फोनॉन	Phonon
बैंड वर्जक अन्तराल	Band stop filter
रेखीय श्रृंखला	Linear chain
वर्जित अन्तराल	Forbidden gap

7.7 संदर्भ ग्रंथ (Reference Books)

N.K. Bajaj	The Physics of waves and oscillations	Tata Mcgraw Hill publishing Co. Ltd, New Delhi.
S.L. Kakani	A Text book of Solid State Physics	Sultan Chand
CHem Rajani	Solid State Physics	and sons, New Delhi.
H.C. Gupta	Solid State Physics	Vikas Publishing Pvt. Ltd।, New Delhi
एस.एस रावत	ठोस अवस्था भौतिकी	कॉलेज बुक हाउस, जयपुर
शर्मा, सक्सेना	आंदोलन एवं तरंगें	राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी, जयपुर

छाबड़ा

7.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. जालक कम्पन अथवा प्रत्यास्थ तरंग में उर्जा के क्वान्टम को फोनॉन कहते हैं ।
2. फोनॉन की आवृत्ति परास ध्वनि तरंगों से अवरक्त लाल तरंगों तक होती है।
3. क्रिस्टल जालक में संचरित प्रत्यास्थ तरंग की अधिकतम कोणीय आवृत्ति को अंतक आवृत्ति कहते हैं ।
4. एक-परमाणुक रेखीय शृंखला प्रथम ब्रिलुवा क्षेत्र की परिसीमा पर संचरण सदिश k का मान $\pm\frac{\pi}{a}$ है ।
5. जब किसी माध्यम (क्रिस्टल) में संचरित तरंग के लिये कोणीय आवृत्ति ω तरंग सदिश k के समानुपाती नहीं होती है, तो माध्यम को परिक्षेपित माध्यम कहते हैं ।
6. एक-परमाणुक रेखीय सुखला में संचरित प्रत्यास्थ तरंग की अधिकतम v_{max}, होती है अत: इससे केवल 0 से v_{max} तक की आवृत्ति की ही तरंगें संचरित हो सकती है यह श्रृंखला निम्न पारक फिल्टर की भांति कार्य, करती है ।
7. द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला में तरंग सदिश k के एक मान के लिये कोणीय आवृत्ति के दो मान (अधिक आवृत्ति ω_+ व निम्न आवृत्ति ω_-) प्राप्त होते हैं ।

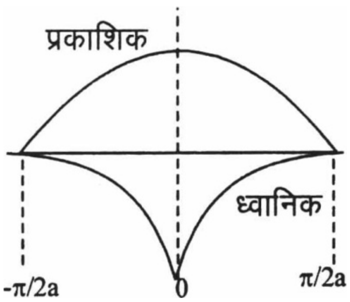
8. विक्षेपण आरेख में संचरण सदिश k व उच्च आवृत्ति ω_+ के मध्य आरेख को शाखा तथा k व ω_- के मध्य आरेख को ध्वानिक शाखा कहते हैं ।

9. प्रकाशिक शाखा में ω_+ का मान k = 0 पर अधिकतम तथा $k = \pm\frac{\pi}{2a}$ पर होता है ।

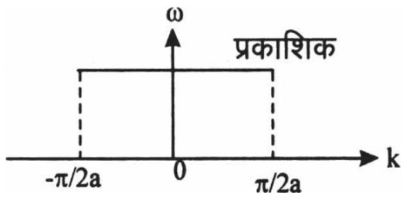
$$(\omega_+)_{\text{अधिकतम}} = \sqrt{2\beta\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}$$

$$(\omega_+)_{\text{न्यूनतम}} = \sqrt{\frac{2\beta}{m_2}}$$

10. द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला के लिये प्राप्त ब्रिलुवां क्षेत्र की परिसीमा पर k का मान $\pm\frac{\pi}{2a}$ होता है यह श्रृंखला के समान प्रकार के परमाणुओं के मध्य अन्तराल 2a पर निर्भर करता है ।

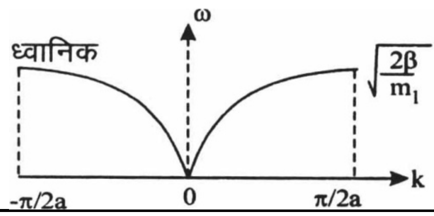


11. द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला में दोनों प्रकार के परमाणुओं का द्रव्यमान समान होने पर वर्जित अन्तराल शून्य होता है ।



12. श्रृंखला के भारी परमाणु का द्रव्यमान बढ़ाने पर प्रकाशिक शाखा का वक्र सपाट (flat) होता जाता है तथा ध्वानिक शाखा का वक्र तीक्ष्ण (sharp) होता जाता है । इसका द्रव्यमान अनन्त होने पर प्रकाशिक शाखा k अक्ष के समान्तर हो जाती है व ध्वानिक शाखा विलुप्त हो जाती है ।

13. हल्के परमाणु का द्रव्यमान कम होने पर प्रकाशिक शाखा का वक्र तीक्ष्ण होता जाता है जबकि ध्वानिक शाखा पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता । हल्के परमाणु का द्रव्यमान लगभग शून्य होने पर प्रकाशिक शाखा लुप्त हो जाती है ।



7.9 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. फोनॉन संवेग को परिभाषित कीजिये ।
2. फोनॉन के अस्तित्व को प्रमाणित करने के लिये एक उदाहरण दीजिये ।
3. क्रिस्टल के ताप में वृद्धि करने पर फोनॉन की संख्या पर क्या प्रभाव पड़ता है?
4. एक-परमाणुक रेखीय श्रृंखला के लिये परिक्षेपण संबंध लिखिये ।
5. दीर्घ तरंग सीमा में एक-परमाणुक रेखीय श्रृंखला किस प्रकार की डोरी की भाँति व्यवहार करती है?
6. ब्रिलुवाँ क्षेत्र किसे कहते हैं?
7. ध्वानिक तथा प्रकाशिक विधा किसे कहते हैं?
8. द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला की प्रथम ब्रिलुवाँ क्षेत्र परिसीमा में प्रकाशिक तथा ध्वानिक शाखा पर किस प्रकार के परमाणु कम्पन करते हैं?
9. वर्जित अन्तराल को परिभाषित कीजिये, यह किस पर निर्भर करता है?

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

10. फोनॉन को परिभाषित कर उसके विभिन्न अभिलाक्षणिक गुणों का वर्णन कीजिये ।
11. एक-परमाणुक रेखीय श्रृंखला के लिये परिक्षेपण संबंध व्युत्पन्न कीजिये ।
12. सिद्ध कीजिये की दीर्घ तरंग लंबाई की एक-परमाणुक रेखीय श्रृंखला में तरंग संचरण सतत के धागे समान होता है ।
13. सिद्ध कीजिये एक परमाणुक रेखीय श्रृंखला निम्न पारक फिल्टर की भाँति कार्य करती है ।
14. द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला के लिये विक्षेपण संबंध ज्ञात कीजिये तथा इनके कम्पनों के दो शाखाओं को समझाते हुए प्रदर्शित कीजिये इनके मध्य वर्जित आवृत्तियाँ भी होती हैं ।
15. सिद्ध कीजिये कि द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला में दोनों प्रकार के परमाणुओं के कम्पन प्रकाशिक शाखा में एक दूसरे के विपरीत तथा ध्वानिक शाखा में एक ही दिशा में होते हैं ।
16. सिद्ध कीजिये एक-परमाणुक रेखीय श्रृंखला में अनुदैर्ध्य कम्पनों के लिये जोन सीमा $\pm\pi/a$ पर समूह वेग शून्य होता है ।
17. सिद्ध कीजिये कि द्विपरमाणुक रेखीय श्रृंखला की ध्वानिक शाखा के लिये $k \rightarrow 0$ की सीमा में, कला व समूह वेग समान होते है।

इकाई 8

ठोसों के तापीय गुण (Thermal Properties of Solid)

इकाई की रूपरेखा

8.1 उद्देश्य
8.2 प्रस्तावना
8.3 विशिष्ट ऊष्मा
8.4 आइन्सटीन मॉडल
8.5 सतत् माध्यम में प्रसामान्य विधा घनत्व
8.6 डिबाई मॉडल
8.7 ऊष्मा चालकता
8.8 अप्रसवांदिता
8.9 तापीय प्रसार
8.10 सारांश
8.11 शब्दावली
8.12 संदर्भ ग्रन्थ
8.13 बोध प्रश्नों के उत्तर
8.14 अभ्यासार्थ प्रश्न

8.0 उद्देश्य (Objectives)

आप इस इकाई को पढने के पश्चात्

- विशिष्ट ऊष्मा की जानकारी कर सकेंगे;
- आइन्सटीन मॉडल द्वारा विशिष्ट ऊष्मा का उच्च ताप सीमा में ताप के साथ परिवर्तन प्राप्त कर सकेंगे;
- सतत् माध्यम में प्रसामान्य विधा घनत्व ज्ञात कर डिबाई मॉडल द्वारा निम्न ताप सीमा में, विशिष्ट ऊष्मा का ताप के साथ परिवर्तन प्राप्त कर सकेंगे;
- ऊष्मा चालकता का अध्ययन करके ठोसों की ऊष्मा चालकता ज्ञात कर सकेंगे;
- अप्रसवांदिता क्या है, समझ सकेंगे;
- ठोसों के तापीय प्रसार गुणांक की ताप पर निर्भरता ज्ञात कर सकेंगे।

8.1 प्रस्तावना (Introduction)

पिछली कक्षाओं में आपने विशिष्ट ऊष्मा के बारे में संक्षिप्त में जानकारी प्राप्त की है । अब आप इस इकाई के अनुच्छेद 8.2 में जालक कम्पन व ठोसों के मुक्त इलेक्ट्रॉनों के उच्च ऊर्जा स्तरों में संक्रमण से सम्बद्ध विशिष्ट ऊष्मा का अध्ययन करेंगे । अनुच्छेद 8.3 में आइन्सटीन के अभिग्रहितों द्वारा ठोस की विशिष्ट ऊष्मा के लिये सूत्र व्युत्पन्न करेंगे तथा

विभिन्न ताप परासों में इसकी ताप निर्भरता की जानकारी प्राप्त करेंगे । आपने इससे पहले वाली इकाई में जालक की प्रसामान्य विधाओं का अध्ययन किया है, अब हम अनुच्छेद तय में जालक में प्रसामान्य विधाओं के घनत्व का सूत्र प्राप्त करेंगे । इस सूत्र की सहायता से अनुच्छेद 8.5 में हम डिबाई मॉडल द्वारा निम्न ताप पर विशिष्ट ऊष्मा के T^3 नियम को व्युत्पन्न करेंगे । आगामी अनुच्छेद 8.6 में आप धातुओं के लिये जालक व इलेक्ट्रॉनिकी ऊष्मा चालकता की जानकारी प्राप्त करेंगे । अनुच्छेद 8.7 में अप्रसवांदिता को समझ सकेंगे तथा इसकी सहायता से अनुच्छेद 8.8 में ठोसों के तापीय प्रसार का अध्ययन करेंगे ।

8.2 विशिष्ट ऊष्मा (Specific Heat)

पदार्थ के एकांक द्रव्यमान का ताप 1^0C से बढ़ाने के लिये जितनी ऊष्मा की आवश्यकता होती है, विशिष्ट ऊष्मा (C) कहते हैं । अत:

$$C = \frac{dQ}{dt} \qquad ...(8.1)$$

विशिष्ट ऊष्मा के अनेक प्रकार होते हैं, परन्तु अधिकतर स्थिर दाब व आयतन पर विशिष्ट ऊष्माओं को ही प्रयुक्त किया जाता है । स्थिर दाब व स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्माओं को क्रमश: स्थिर,दाब पर विशिष्ट ऊष्मा C_P व स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा C_V कहते हैं जिन्हें निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं ।

$$C_P = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_P \qquad ...(8.2)$$

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_V \qquad ...(8.3)$$

तब सैद्धान्तिक रूप से स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा को अधिक प्रयुक्त किया है । यद्यपि C_P, को प्रयोगिक रूप (Practically) से ज्ञात करना सरल है । अत: विशिष्ट ऊष्मा से हमारा C_V से होता है । ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से आप जानते हैं कि निकाय को दी गयी ऊष्मा dQ तब, की आन्तरिक उर्जा में वृद्धि dU तथा उसके द्वारा किये गये कार्य के बराबर होती है । अत:

$$dQ = dU + dW$$

परंतु $$dW = pdV$$

$$\therefore dQ = dU + pdV \qquad ..(8.4)$$

इस सेमी.करण से

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dt}\right)_V = \left(\frac{dU}{dT}\right) \qquad ..(8.5)$$

ठोसों (solids) को ऊष्मीय उर्जा (thermal energy) देने पर आन्तरिक उर्जा में वृद्धि अथवा विशिष्ट ऊष्मा में योगदान दो प्रकार से होता है ।

(i) परमाणुओं के कम्पन का आयाम अथवा कम्पन तीव्रता में वृद्धि से

(ii) ठोसों के मुक्त इलेक्ट्रॉनों (free electron) के उच्च उर्जा तलों में उत्तेजित होने से ।

क्रिस्टल जालक के परमाणुओं के कम्पनों से सम्बद्ध (associated) विशिष्ट ऊष्मा को जालक विशिष्ट ऊष्मा (specific heat) तथा इलेक्ट्रॉनिक संक्रमण (transition) से सम्बन्धित विशिष्ट ऊष्मा को इलेक्ट्रॉनिकी (electronic) विशिष्ट ऊष्मा कहते हैं ।

साधारणत : अधिकांश ठोसों में ताप वृद्धि से आयतन में परिवर्तन नगण्य होता है, इस कारण ठोसों में C_P व C_V में अन्तर बहुत कम होता है । कुचालकों (insulator) में इलेक्ट्रॉनिक विशिष्ट ऊष्मा का मान नगण्य होता है अत: इनकी ऊष्मा में मुख्य रूप से जालक की विशिष्ट ऊष्मा का योगदान होता है । धातुओं में उच्च ताप पर (C_V)जालक अधिक प्रभावी (effective) व न्यूनतापों पर (C_V) इलेक्ट्रॉनिक अधिक प्रभावी होता है । प्रयोगिक रूप से ठोसों में विशिष्ट ऊष्मा का ताप के साथ परिवर्तन निम्न प्रकार से होता है।

(i) उच्च ताप पर लगभग सभी ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा (C_V) का मान 3R (6 कैलोरी/ ग्राम अणु - कैल्विन) होता है ।

(ii) ताप कम करने पर विशिष्ट ऊष्मा का मान कम हो जाता है तथा परमशून्य ताप तक पहुँचने पर विशिष्ट ऊष्मा का मान शून्य हो जाता है ।

(iii) न्यूनतापों पर (परमशून्य ताप के आस पास) धातुओं (metals) की विशिष्ट ऊष्मा परम ताप 1 के अनुक्रमानुपाती होती है, ऐसा इनके चालन (conduction) इलेक्ट्रॉन के कारण होता है । अधातुओं (non metals) में निम्न ताप पर विशिष्ट ऊष्मा C_V का मान T^3 के अनुक्रमानुपाती होता है । इसे डिबाई का सिद्धान्त भी कहते हैं क्योंकि इसकी सैद्धान्तिक रूप से व्याख्या डिबाई द्वारा की गयी ।

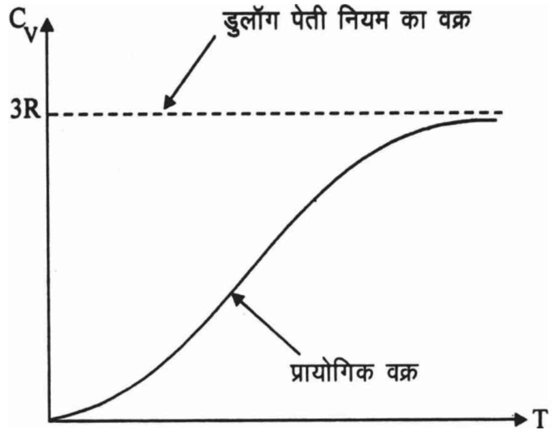
सर्वप्रथम ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा का मान चिरसम्मत (classically) यांत्रिकी द्वारा सैद्धान्तिक रूप से डुलॉग पेती द्वारा ज्ञात किया गया । चिरसम्मत यांत्रिकी के अनुसार एक विमीय कम्पन करते हुए परमाणु की कुल उर्जा उसकी स्थितिज (potential) उर्जा व गतिज (kinetic) उर्जा के योग के बराबर होती है जो कि क्रमश: विस्थापन व वेग की द्विघाती फलन होती है । अत: उर्जा समविभाजन के नियम (law of eqipartion of energy) से गतिज व स्थितिज दोनों उर्जाओं के लिये माध्य उर्जा का मान $\frac{1}{2}k_B T$ पूछा होगा, जहाँ k_B बोल्टज्मान नियतांक है । इसलिये एक विमीय (dimesional) कम्पन गति से सम्बद्ध औसत उर्जा का मान $\frac{1}{2}k_B T+\frac{1}{2}k_B T=k_B T$ होगा । प्रत्येक परमाणु तीन दिशाओं में स्वतन्त्रता पूर्वक (freely) गति कर सकता है इसलिये परमाणु की कुल औसत उर्जा का मान $3k_B T$ होगा ।

एक मोल ठोस पदार्थ के लिये औसत उर्जा का मान $\bar{E}=3NK_B T$ होगा जहाँ N आवोगाद्रो संख्या तथा R गैस नियंताक (2 कैलोरी / ग्राम अणु K) (gas constant) है । अत:

$$C_V = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\right)_V = 3R$$

=6 कैलोरी ग्राम-अणु-K ....(8.6)

इस सेमी.करण से हम देखते हैं कि C_V का मान ताप पर निर्भर नहीं करता है । C_V = 3R को डुलॉग पेती का नियम कहते हैं । यह नियम वास्तव में केवल उच्च तापों के लिये ही वैध (valid) है क्योंकि प्रयोगिक रूप से भी ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा उच्च ताप पर नियत रहती है व इसका मान 3R के बराबर होता है तथा निम्न (low) तापों के लिये वैध नहीं है क्योंकि वास्तव में ताप कम करने पर विशिष्ट ऊष्मा शून्य की ओर अग्रसर होती है जैसा कि चित्र 8.1 में प्रदर्शित किया गया हैं ।



चित्र 8.1 ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा का ताप के साथ परिवर्तन

निम्न ताप (low temperature) पर इस नियम की असफलता को आइन्सटीन व डिबाई द्वारा क्यान्टम सिद्धान्त के आधार पर दूर किया गया जिसका अध्ययन आप अगले अनुच्छेदों में करेंगे।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. जालक की विशिष्ट ऊष्मा को परिभाषित कीजिये ।

----

2. प्रयोगिक रूप से ठोसों (धातुओं) की विशिष्ट ऊष्मा निम्न तापों पर ताप के साथ किस प्रकार परिवर्तित होती है?

8.3 आइन्सटीन मॉडल (Einstein's model)

निम्न ताप पर विशिष्ट ऊष्मा की ताप पर निर्भरता की व्याख्या सर्वप्रथम आइन्सटीन द्वारा की गयी, जो कि निम्न अभिधारणाओं पर आधारित है ।

(i) एक ही क्रिस्टल के सभी परमाणु मुक्त (freely) रूप से समान आवृत्ति के कम्पन करते हैं ।

(ii) N परमाणु मुक्त क्रिस्टल को 3N सरल आवृर्ती दोलक के रूप में माना जा सकता है ।

(iii) परमाणु दोलकों के उर्जा स्तर विविक्त (discrete) होते हैं । जिनकी उर्जा निम्न सेमी.करण द्वारा व्यक्त की जा सकती हैं ।

$$E_n = nh\nu \quad ....(8.7)$$

जहां n=0,1,2,.... पूर्णांक हैं ।

(iv) क्रिस्टल के सभी परमाणुओं के लिये वातावरण समान होता है । समान क्वान्टम उर्जा स्तर में कितने भी परमाणु दोलक हो सकते हैं ।

(v) क्रिस्टल जालक में परमाणु दोलक अपनी ही माध्यावस्था के इर्द गिर्द कम्पन करते हुए विभेद्य (distinguishable) माने जा सकते हैं, अत: ये दोलक उर्जा के मैक्सवेल-बोल्ट्जमान वितरण फलन (distribution function) $\exp\left[\frac{-E_n}{k_B T}\right]$ का पालन करते हैं जिनके अनुसार दोलक की ताप T पर उर्जा E_n होने की प्रायिकता (probability) $\exp\left[\frac{-E_n}{k_B T}\right]$ के अनुक्रमानुपाती होती है।

अत: T ताप पर दोलक की माध्य उर्जा

$$\bar{E}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n \exp(-E_n / k_B T)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-E_n / k_B T)} \quad ...(8.8)$$

द्वारा ज्ञात कर सकते हैं ।

सेमी. (8.7) से E_n का मान रखने पर

$$\bar{E}_n = \frac{\sum nh\nu \exp\left(\frac{-nh\nu}{k_B T}\right)}{\sum \exp\left(\frac{-nh\nu}{k_B T}\right)}$$

माना $\frac{h\nu}{k_B T} = x$

$$\bar{E}_n = h\nu \frac{\sum n e^{-nx}}{\sum e^{-nx}}$$

$$= -h\nu \frac{d}{dx}\ln\left(\sum ne^{-nx}\right)$$

$$= -h\nu \frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1}{1-e^{-x}}\right)$$

$$= \frac{h\nu e^{-x}}{1-e^{-x}} \qquad ....(8.9)$$

$$= \frac{h\nu}{e^{x}-1}$$

$$= \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1}$$

परन्तु क्वान्टम यांत्रिकी के अनुसार दोलितों की उर्जा का मान

$$E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)h\nu \qquad ...(8.10)$$

के बराबर होता है । यहीं $\frac{1}{2}h\nu$ उर्जा को शून्य बिन्दु उर्जा (zero point energy) हैं । सेमी. (8.10) का मान सेमी. (8.8) में रखने पर औसत उर्जा $\bar{E}_n$ का मान $\frac{1}{2}h\nu$ प्रति दलक से बढ जाता है अत: क्वान्टम यांत्रिकी द्वारा प्राप्त औसत उर्जा का मान

$$\bar{E}_n = \left[\frac{h\nu}{2}+\frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1}\right] \qquad ...(8.11)$$

इसलिये N परमाणु युक्त ठोस की कुल आन्तरिक उर्जा U

= प्रति दोलक की माध्य उर्जा $\bar{E}_n$ x दोलकों की संख्या 3N

$$= \bar{E}_n \times 3N$$

$$= 3N\left[\frac{h\nu}{2}+\frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1}\right]$$

(क्योंकि N परमाणु वाला ठोस 3N दोलकों की भाँति व्यवहार करता है।)

तथा ठोस की विशिष्टऊष्मा

$$C_V = \left(\frac{dU}{dT}\right)_V = \frac{3Nh\nu e^{h\nu/k_BT}\left(-\frac{h\nu}{k_BT^2}\right)}{-\left(e^{h\nu/k_BT}-1\right)^2}$$

$$= \frac{3Nk_B\left(\frac{h\nu}{k_BT^2}\right)^2 e^{h\nu/k_BT}}{\left(e^{h\nu/k_BT}-1\right)^2}$$

$$=\frac{3R\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right)^2 e^{h\nu/k_BT}}{\left(e^{h\nu/k_BT}-1\right)^2}$$ (यहाँ एक मोल ठोस पदार्थ के लिये $R=Nk_B$) ...(8.12)

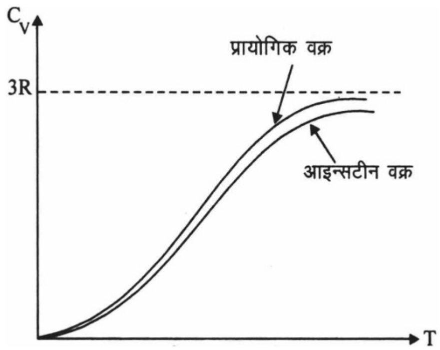
यदि $\frac{h\nu}{k_B}=\theta_E$ प्रयुक्त करें जिसे आइन्सटीन ताप कहते हैं । $\frac{h\nu}{k_B}=\theta_E$ सेमी. (8.12) में रखने पर

$$=\frac{3R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \exp\left(\frac{\theta_E}{T}\right)}{\left[\exp\left(\frac{\theta_E}{T}\right)-1\right]^2}$$ ...(8.13)

इसे आइन्सटीन का विशिष्ट ऊष्मा सूत्र कहते हैं ।

[θ_E के मान का चयन इस प्रकार किया जाता है कि C_V का मान पूर्ण ताप परास (उच्च व न्यून तापों पर) में प्रयोगिक रूप से सहमति प्राप्त कर सके ।)

यह सेमी.करण ताप के सापेक्ष चरघातांकी रूप से विशिष्ट ऊष्मा C_V में कमी को प्रदर्शित करता है जिसे चित्र 8.2 में प्रदर्शित किया गया है ।



चित्र 8.2

चित्र 8.2 इस मॉडल द्वारा T के सापेक्ष C_V के आरेख का वही प्रारूप प्राप्त होता है जैसा कि चित्र 8.1 में प्रदर्शित है । सेमी. (8.13) द्वारा उच्च तथा न्यून ताप पर विशिष्ट ऊष्मा की निर्भरता को निम्न प्रकार से समझ सकते हैं ।

(i) उच्च ताप पर ($T >> \theta_E$)

या $\frac{\theta_E}{T} << 1$

इसलिये $\exp\left(\frac{\theta_E}{T}\right)=1+\frac{\theta_E}{T}$

अर्थात् $C_V = 3R\left(1+\frac{\theta_E}{T}\right)$

$= 3R$

अत: उच्च ताप पर सभी ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा चिरसम्मत मान 3R की ओर अग्रसर होती है तथा आइन्सटीन सूत्र द्वारा प्राप्त C_V का मान प्रयोगिक मान 3R से सहमति प्रकट करता है ।

(ii) निम्न ताप पर ($T << \theta_E$)

या $$\frac{\theta_E}{T} >> 1$$

$$\exp\left(\frac{\theta_E}{T}\right) >> 1$$

$$\left[\exp\left(\frac{\theta_E}{T}\right) - 1\right]^2 = e^{2\theta_E/T}$$

$$C_V = 3R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 e^{-\frac{\theta_E}{T}} \qquad ....(8.14)$$

इस सेमी.करण के अनुसार C_V का मान निम्न तापों पर ताप के साथ चरघातांकी (exponentially) रूप से कम होता है जब कि प्रायोगिक रूप से इस परास में C_V ताप की तृतीय घात के अनुक्रमानुपाती होता है । अत: आइन्सटीन के अनुसार C_V का ताप के साथ कम होना प्रायोगिक रूप से कम होने की अपेक्षाकृत अधिक शीघ्र (तीव्र) होता है । सेमी. (8.14) के अनुसार परमशून्य ताप पर विशिष्ट ऊष्मा का मान शून्य हो जाता है जैसा कि प्रयोगों द्वारा प्राप्त होता है ।

आइन्सटीन मॉडल की कमियाँ (Drawbacks of Einstrin's model)

1. इस सिद्धान्त के अनुसार न्यून तापों पर C_V का मान ताप के साथ चरघातांकी रूप से कम होता है जबकि वास्तव में न्यून ताप परास में C_V का मान T^3के अनुसार कम होता है ।
2. इस मॉडल के अनुसार एक ही ठोस के सभी परमाणु स्वतंत्र जन्म से समान आवृत्ति से कम्पन करते हैं । परन्तु वास्तव में ठोस के परमाणु परस्पर (mutually) बन्धों (bonds) द्वारा युग्मित रहते हैं अर्थात् युग्मित दोलकों (coupled oscillator) की भाँति व्यवहार करते हैं ।
3. ठोसों में परमाणु दोलकों की आवृत्तियाँ विविक्त मानी गयी हैं जबकि इनकी आवृत्ति की परास-ध्वनि तरगों 10^3 हर्टज से अवरक्त लाल (infrared) 10^{13}हर्टज तक पायी जाती है ।
4. इस मॉडल द्वारा T के सापेक्ष C_V के आरेख का प्रारूप प्रायोगिक आरेख (वक्र) के समान प्राप्त होता है

   परन्तु θ_E (सेमी.करण $\frac{h\nu}{k_B} = \theta_E$ द्वारा परिभाषित होता है) के लिये ऐसा मान ज्ञात करना सम्भव नहीं हैं जो कि पूर्ण ताप परास (उच्च व निम्न) में अच्छी सहमति प्रकट कर

सके। यदि θ_E के मान का वरण (selection) इस प्रकार किया जाये कि उच्च तापों पर सहमति प्राप्त हो तो निम्न तापों पर प्रयोगिक मान व सैद्धान्तिक मानों में काफी अन्तर प्राप्त होगा ।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

3. चिरसम्मत दोलित्र व आइन्सटीन क्वान्टम दोलित की माध्य उर्जा में क्या अन्तर है?

----

4. आइन्सटीन मॉडल द्वारा प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा का मान न्यूनतापों पर, ताप के साथ किस प्रकार परिवर्तित होता है?

उदहारण 8.1 ताम्बे के लिये आइन्सटीन ताप 340 K है । इसके आइन्सटीन आवृत्ति ज्ञात कीजिये । जबकि h=6.6 x 10^{-34} जूल x सेकन्ड k_B =1.3जूल/K।

हल: प्रश्नानुसार $\theta_E = 340K$

आइन्सटीन ताप $\theta_E = \dfrac{h\nu_E}{k_B}$

अतः $\nu_E = \dfrac{k_B\theta_E}{h} = \dfrac{1.38\times10^{-23}\times340}{6.6\times10^{-34}}$

$= 7.11\times10^{12}$ हर्टज

8.4 सतत् माध्यम में प्रसामान्य विधा घनत्व (Density of normal modes in continuous medium)

हम जानते हैं कि उच्च तरंगदैर्ध्य सीमा में एक परमाणुक रेखीय श्रृंखला सतत् (continuous) माध्यम के समान व्यवहार करती है, इसलिये हम सतत् माध्यम में प्रसामान्य विधा घनत्व ज्ञात करने के लिये सर्वप्रथम एक परमाणुक रेखीय श्रृंखला जिसमें परमाणुओं के मध्य दूरी a तथा परमाणुओं की संख्या N है, पर विचार करते हैं । यदि श्रृंखला में स्थित परमाणुओं के कम्पन आयाम अल्प हों तो कम्पन करते हुए परमाणु को सरल आवृर्ती दोलक के रूप में मान सकते हैं । जब कोई प्रगामी तरंग (progressive) इस श्रृंखला में से संचरित होती है तो श्रृंखला में स्थित परमाणु से परावर्तित (refelect) होकर अप्रगामी तरंग (stationary waves) का निर्माण करती है जिसे हम निम्न समी.करण द्वारा व्यक्त कर सकते हैं ।

$$u(x,t) = A\sin k_x x \cos\omega t \qquad ...(8.15)$$

जहाँ u (x,t) व k_x, क्रमशः ω आवृत्ति वाली तरंग के किसी क्षण t पर x-दिशा में विस्थापन व संचरण नियतांक हैं । k_x का मान हम सीमान्त अवस्थाओं (boundary condition) द्वारा ज्ञात कर सकते हैं । रेखीय श्रृंखला के दोनों सिरों पर स्थित परमाणुओं के

लिये विस्थापन का मान शून्य होता है अत: x = L = N.a स्थिति पर u (x,t)=0 से sin $k_xL=0$

या $k_xL=n_x\pi$

जहाँ n_2 =0,1,2,3 धनात्मक पूर्णांक हैं ।

या $$k_x = \frac{n_x\pi}{L}$$ ....(8.16)

इसी प्रकार त्रिविमीय L भुजा वाले घनाकार (cubic) जालक के लिये x, y व z-दिशा में संचरण नियतांक शांत कर सकते हैं जिनके मान क्रमश

$$k_x = \frac{n_x\pi}{L},\ k_y = \frac{n_y\pi}{L},\ \text{तथा}\ k_3 = \frac{n_z\pi}{L}$$

होगें । जहाँ n_x, n_y व n_z धनात्मक पूर्णाक हैं ।

अत: $$k^2 = k_x{}^2 + k_y{}^2 + k_z{}^2$$

$$k^2 = \frac{\pi^2}{L^2}\left(n_x{}^2 + n_y{}^2 + n_z{}^2\right)$$

या $$n_x{}^2 + n_y{}^2 + n_z{}^2 = \frac{k^2L^2}{\pi^2}$$ ....(8.17)

या $$n^2 = \frac{k^2\omega^2}{\pi^2 v^2}$$

जहां $$n^2 = n_x{}^2 + n_y{}^2 + n_z{}^2\ \text{तथा}\ v = \frac{\omega}{k}$$

$$n = \frac{LW}{\pi v}$$ ...(8.18)

अत: जालक में संचरित विधाओं की आवृत्ति ω पूर्णाक n_x, n_y व n_z के समुच्चय (set) पर निर्भर करती है अर्थात् त्रिविमीय क्रिस्टल में (n_x, n_y व n_z) का एक समुच्चय एक सम्भावित (possible) कम्पन विधा को व्यक्त करेगा ।

त्रिविमीय निर्देश तंत्र में सेमी. (8.17) एक गोले के सेमी.करण को व्यक्त करता है जिसकी त्रिज्या $\frac{LW}{\pi v}$ है ।

n_x, n_y व n_z के धनात्मक (0 से n के मध्य) मान के संगत सभी बिन्दु इस गोले के आठवें भाग में स्थित होगें

अत: n_x, n_y व n_z के मान केवल गोले के $\frac{1}{8}$ वें भाग में धनात्मक होगें ।

इन बिन्दुओं की संख्या उन प्रसामान्य विधाओं की संख्या के बराबर होगी जिनकी आवृत्ति 0 से ω के मध्य होगी । अत: 0 से ω के मध्य प्रसामान्य विधाओं की संख्या

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi n^3\right)$$ ...(8.19)

होगी अर्थात् ω व $\omega+d\omega$ के मध्य आवृत्ति परास में विधाओं की संख्या, उस आयतन में स्थित बिन्दुओं की संख्या के बराबर होगी जो कि त्रिज्या n व n+dn के गोलीय कोश (spherical shell) के आठवें भाग में स्थित होगें । ω व $\omega+d\omega$ तल के मध्य आवृत्ति में कम्पन विधाओं की संख्या

$$Z(\omega)d\omega=\frac{1}{8}\left(4\pi n^2 dn\right)$$ [n त्रिज्या के गोले पर dn मोटाई का गोलीय कोश ...(8.20)

का आयतन = $4\pi n^2 dn$]

सेमी. (8.18) से

$$dn=L\frac{d\omega}{\pi v}$$

व $n=\frac{L\omega}{\pi v}$ सेमी. (8.19) में रखने पर

$$Z(\omega)d\omega=\frac{1}{8}4\pi\left(\frac{L^2\omega^2}{\pi^2 v^2}\right)\frac{Ld\omega}{\pi v}=\frac{L^2\omega^2}{2\pi^2 v^2}d\omega$$

$$=\frac{V\omega^2}{2\pi^2 v^3}d\omega$$

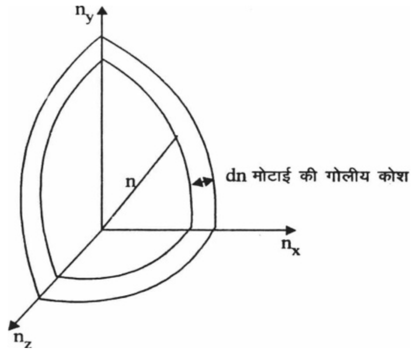
जहाँ V=L^3 घनीय जालक का आयतन है ।

ठोसों (क्रिस्टल) में अनुप्रस्थ व अनुदैर्ध्य दोनों प्रकार की प्रत्यास्थ तरंगें विभिन्न वेग से संचरित होती हैं तथा प्रत्येक आवृत्ति के लिये अनुदैर्ध्य तरंग की एक ध्रुवण अवस्था तरंग की गति की में एक तथा अनुप्रस्थ तरंग की दो ध्रुवण अवस्थाएं (polarization state) तरंग की गति के अभिलम्बत् दिशाओ, में पायी जाती हैं । यदि v_1 व v_2, क्रमश: क्रिस्टल में संचरित अनुदैर्ध्य व अनुप्रस्थ तरंगों के वेग हों तो हम $\frac{1}{v^3}$ को $\left(\frac{2}{v^3_{\ t}}+\frac{1}{v_1^{\ 3}}\right)$ द्वारा प्रतिस्थापित कर सकते हैं । अत: ω व $\omega+d\omega$ आवृत्ति परास के मध्य कम्पन विधाओ की संख्या

$$Z(\omega)d\omega=\frac{V\omega^2}{2\pi^2}\left(\frac{2}{v^3_{\ t}}+\frac{1}{v_1^{\ 3}}\right)d\omega$$

या $$Z(\omega)d\omega=\frac{V\omega^2}{2\pi^2}\left(\frac{2}{v^3_{\ t}}+\frac{1}{v_1^{\ 3}}\right)$$

फलन $Z(\omega)$ एकांक आवृत्ति परास में प्रसामान्य विधाओं की संख्या को व्यक्त करता है जिसे प्रसामान्य विधाओं का घनत्व व वर्णक्रमी वितरण फलन (spectral distribution function) भी हैं ।



चित्र 8.3 dn मोटाई का गोलीय कोश

8.5 डिबाई मॉडल (Debye model)

आइन्सटीन मॉडल द्वारा प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा की निम्न तापों पर असफलता के निराकरण के लिये डिबाई द्वारा प्रयास किया गया जो कि निम्नलिखित अभिकल्पनाओं पर आधारित है ।

(i) ठोस एक समदैशिक (isptropic), प्रत्यास्थ (elastic) समांगी (homogenous) तथा सांतत्यक (continuum) माध्यम होता है ।

(ii) क्रिस्टल जालक में जब अन्तरापरमाणुक दूरी उसमें संचरित प्रत्यास्थ तरंग की तरंगदैर्ध्य की तुलना में कम होती है तो प्रत्यास्थ तरंग के लिये क्रिस्टल एक सतत् माध्यम की भाँति व्यवहार करता है ।

(iii) क्रिस्टल जालक के परमाणु समान आवृत्ति से स्वतंत्र रूप से कम्पन नहीं करते हैं । प्रत्येक परमाणु के कम्पन अपने निकटवर्ती परमाणुओं के कम्पनों द्वारा प्रभावित रहते हैं इसलिये इसके प्रत्येक परमाणु को युग्मित दोलक के रूप में माना जा सकता है, जिसके कम्पन प्रसामान्य विधा द्वारा व्यक्त किये जा सकते है

(iv) प्रसामान्य विधाओं की सभी आवृत्तियाँ सम्भव नहीं हैं बल्कि प्रसामान्य विधाओं की आवृत्ति शून्य से एक अधिकतम संभव आवृत्ति, जिसे अन्तक आवृत्ति (cut off frequency) अथवा डिबाई अभिलाक्षणिक आवृत्ति भी कहते हैं, के मध्य सतत् परास में होती है ।

(v) अन्तक आवृत्ति ω_D का मान अनुप्रस्थ व अनुदैर्ध्य विधाओं में समान होता है ।

(vi) Nपरमाणु वाले ठोस की कुल 3N प्रसामान्य विधायें होती हैं । इसलिये यदि सतत् माध्यम में ω व $\omega+d\omega$ आवृति परास में कम्पन विधाओं की संख्या $Z(\omega)d\omega$ हो तो कुल कम्पन विधाओं की संख्या (जिनकी आवृतियॉ 0 से ω_D के मध्य होती हैं) को निम्न सूत्र द्वारा व्यक्त कर सकते हैं ।

$$\int_0^{\omega_D} Z(\omega)d\omega = 3N \quad \text{......(8.20)}$$

हम जानते हैं सतत् माध्यम में आवृत्ति ω व $\omega+d\omega$ के मध्य कम्पन विधाओं की संख्या

$$Z(\omega)d\omega = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2}{v^3_t}+\frac{1}{v_1^3}\right)\omega^2 d\omega \qquad .....(8.21)$$

के बराबर होती है ।

$Z(\omega)d\omega$ का मान समी. (8.20) में रखने पर

$$\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2}{v^3_t}+\frac{1}{v_1^3}\right)\int_0^{\omega_D}(\omega)d\omega = 3N$$

या
$$\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2}{v^3_t}+\frac{1}{v_1^3}\right)\frac{\omega^3_D}{3} = 3N$$

या
$$\omega^3_D = \frac{18N\pi^2}{V}\left[\frac{2}{v^3_t}+\frac{1}{v_1^3}\right]^{-1} \qquad ...(8.22)$$

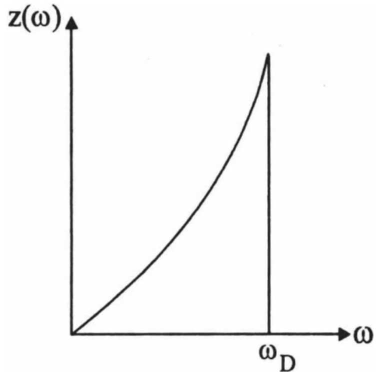
इस समी.करण द्वारा हम डिबाई अन्तक आवृत्ति ω_D का मान ज्ञात कर सकते हैं । ω_D का मान समी. (18.21) में रखने पर

$$Z(\omega)d\omega = \frac{9N\omega^2}{\omega_D^{\ 2}}d\omega$$

या विधा घनत्व

$$Z(\omega) = \frac{9N\omega^2}{\omega_D^{\ 2}} \qquad ...(8.23)$$

विधा घनत्व $Z(\omega)$ व आवृत्ति ω के मध्य आरेख को चित्र 8.4 में प्रदर्शित किया गया है जिससे यह स्पष्ट है कि ω_D आवृत्ति ω तक ही विधा घनत्व $Z(\omega)$, आवृत्ति ω के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होता है ।



चित्र 8.4 विद्या घनत्व

कम्पन विधाओं की माध्य उर्जा : क्मान्टम यांत्रिकी के अनुसार परमाणु दोलक की उर्जा का मान समी.करण द्वारा दिये गये उर्जा के मानों के समुच्चय मे से कोई एक मान हो सकता है ।

$$E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar(\omega)$$

जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ है । मैक्सवेल बोल्ट्ज़मान यात्रिकी के अनुसार किसी ताप T पर दोलित की उर्जा E_n होने की प्रायिकता $\exp(-E_n / k_B T)$ के अनुक्रमानुपाती होती है, जहां k_B बोल्टजमान नियतांक है । अत: दोलित्र की माध्य उर्जा

$$\bar{E}_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp\left(\frac{-E_n}{k_B T}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{-E_n}{k_B T}\right)}$$

इस सेमी.करण में E_n में रखने पर

$$\bar{E}_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right]}$$

$x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ का मान रखने पर

$$\bar{E}_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}$$

$$= \hbar\omega \frac{\left[\frac{1}{2}e^{-\frac{-x}{2}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{-3x}{2}} + \frac{5}{2}e^{-\frac{-5x}{2}} + \dots\dots\right]}{\left[e^{-\frac{-x}{2}} + e^{-\frac{-3x}{2}} + e^{-\frac{-5x}{2}} + \dots\dots\right]}$$

$$\bar{E}_n = -\hbar\omega \frac{d}{dx}\log\left(e^{-\frac{-x}{2}} + e^{-\frac{-3x}{2}} + e^{-\frac{-5x}{2}} + \dots\right)$$

$$= -\hbar\omega \frac{d}{dx}\log\left[\frac{e^{-\frac{-x}{2}}}{1-e^{-x}}\right]$$

$$= \hbar\omega \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{2} + \log\left(1-e^{-x}\right)\right]$$

$$= \hbar\omega \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2} + \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right] = \hbar\omega\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{-x}-1}\right]$$

$$=\frac{\hbar\omega}{2}+\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1} \qquad .....(8.24)$$

जालक की विशिष्ट ऊष्मा (Lattice specific heat) : N परमाणु वाले (ठोस) की कुल आन्तरिक

ऊर्जा

$$U=\bar{E}_n.3N$$

होगी क्योंकि N परमाणु वाले ठोस जालक को 3N आवर्ती दोलकों के समान माना जा सकता हैं तथा उसकी 3N प्रसामान्य विधायें होती हैं । सेमी.. (8.20) से

$$U=\int_0^{\omega_D}\bar{E}_n Z(\omega)d\omega$$

तथा ठोस की विशिष्ट ऊष्मा

$$C_V=\frac{dU}{dT}=\frac{d}{dT}\int_0^{\omega_D}\bar{E}_n Z(\omega)d\omega$$ $\bar{E}_n$ व $Z(\omega)d\omega$ का मान रखने पर

$$=\frac{d}{dT}\int_0^{\omega_D}\left\{\frac{\hbar\omega}{2}+\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar(\omega)/k_BT}-1}\right\}\frac{9N}{\omega^2_D}\omega^2 d\omega$$

समाकलन में कोष्ठक का प्रथम पद ताप पर निर्भर नहीं करता है इसलिये इसका ताप के सापेक्ष अवकलन का मान शून्य होगा ।

$$C_V=\frac{9N\hbar}{\omega^3_D}\int_0^{\omega_D}\frac{d}{dt}\left[\frac{\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}-1\right)}\right]d\omega$$

$$=\frac{9N\hbar^2}{k_B\omega^3_D T^2}\int_0^{\omega_D}\frac{\omega^4\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)d\omega}{\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}-1\right)\right]^2} \qquad ....(8.25)$$

$$x=\frac{\hbar\omega}{k_BT}$$ तथा $$\theta_D=\frac{\omega_D}{k_B}$$

जहाँ θ_D को डिबाई ताप कहते हैं । θ_D के उचित मान के चयन से आइन्सटीन सिद्धान्त की अपेक्षा डिबाई सिद्धान्त से प्रायोगिक रूप से प्राप्त C_V के मान से अधिक अच्छी सहमति प्राप्त की सकती है ।

$$\therefore C_V=\frac{9N\hbar^2}{k_B\omega^3_D T^2}\int_0^{\theta_D/T}\frac{\left(\frac{xk_BT}{\hbar}\right)^4 e^x\frac{k_BT}{\hbar}dx}{\left(e^x-1\right)^3}$$

$$= 9Nk_B\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} dx$$

$$C_V = 9R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^4 e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} dx \qquad ....(8.26)$$

(i) उच्च ताप (T >> θ_D) पर :

$\frac{\theta_D}{T} << 1$ तो x>>1 (क्योंकि $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$)

$\therefore e^x 1 = +x$

यह मान सेमी. (8.26) में रखने पर

$$C_V = 9R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\theta_D/T} (1+x)x^2 dx$$

$$= 9R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]^{\frac{\theta_D}{T}}$$

$$= 9R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \left(\frac{\theta_D}{T}\right)^3 \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{\theta_D}{T}\right)\right]$$

=3R.

यह डयूलॉग-पेती का नियम है अत: उच्च ताप परास में डिबाई सिद्धान्त, चिरसम्मत सिद्धान्त के तुल्य होता है।

(ii) निम्न ताप पर ($T << \theta_D$) : θ_D का मान निम्न ताप पर बहुत अधिक होगा । इसलिये समाकल की उच्च सीमा (upper limit) को अत्यधिक न्यूनताप पर अनन्त मान सकते हैं । सेमी. (8.26) में समाकलन की (∞) रखने पर

$$C_V = 9R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\infty} \frac{e^x x^4}{\left(e^x - 1\right)^2} dx$$

समाकलन को हल करने पर इसका मान $\frac{4\pi^4}{15}$ प्राप्त होता है, इसलिये

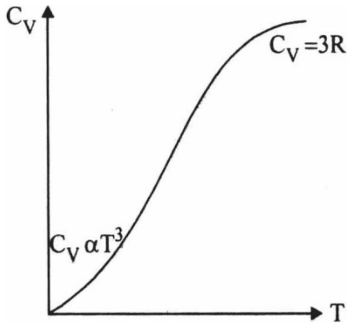
$$C_V = \frac{12}{5}\pi^4 R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3$$

$$C_V \propto T^3 \qquad ......(8.27)$$

इसे डिबाई का T^3 नियम (Debye T^3 Law) कहते हैं । इस प्रकार अत्यधिक न्यून ताप पैर विशिष्ट ऊष्मा C_V ताप के घन (T^3) के अनुक्रमानुपाती होती है ।

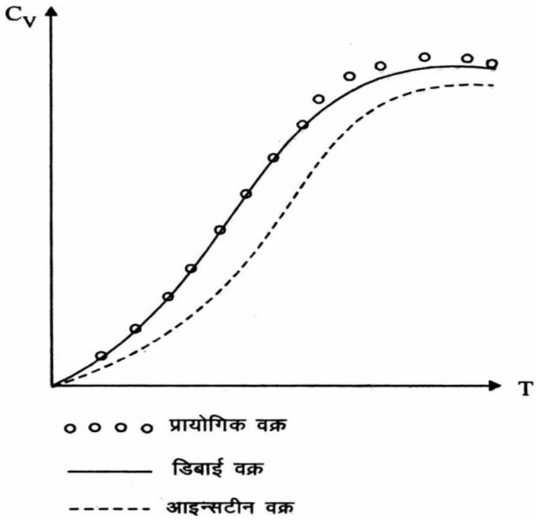
डिबाई के अनुसार T^3 नियम $T << 0.1\theta_D$ के लिये ही वैध है । डिबाई सिद्धान्त द्वारा' प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा के ताप के साथ परिवर्तन को चित्र 8.5 में प्रदर्शित किया गया है । यह

वक्र प्रायोगिक वक्र ये निम्न व उच्च तापों पर पूर्ण सहमति व्यक्त करता है, परन्तु ब्लेकमेन (Blackman) ने यह प्रेक्षित किया कि ताप क्षेत्र $T << 0.1\theta_D$ में तत्वों की विशिष्ट ऊष्मा, प्रयोगिक रूप से प्राप्त मान से सदैव सहमति में नहीं होती है अपितु ताप क्षेत्र $T << 0.1\theta_D$ में ही परिणामों में सहमति प्राप्त होती है ।



चित्र 8.5

डिबाई विशिष्ट ऊष्मा वक्र की प्रयोगिक वक्र से तुलना करने पर हम देखते हैं कि निम्न व उच्च दोनों तापों पर ही वक्रों में यथेष्ट रूप से समानता पाई जाती है परन्तु मध्यवर्ती तापों पर पूर्ण रूप से समानता प्राप्त नहीं होती है जैसा कि चित्र 8.6 में प्रदर्शित है । मध्यवर्ती ताप परासों में डिबाई सिद्धान्त को असफलता डिबाई सिद्धान्त की कमियों (shortcomings) के कारण प्राप्त होती है ।



चित्र 8.6

डिबाई सिद्धान्त की कमियाँ.

(i) ठोसों में परमाणुओं के कम्पन को सतत् माध्यम में माना गया है जो कि दीर्घ तरंगों के लिये लागू होता है जबकि ठोस विविक्त (discrete) आयनों से मिलकर बना होता है ।

(ii) ठोस की वास्तविक क्रिस्टलीय संरचना की उपेक्षा की गयी है । वास्तविक रूप से इसमें आणविक तथा आयनिक क्रिस्टल संरचना सम्मिलित है ।

(iii) सतत माध्यम में कम्पन की कुल विधाओं की संख्या 3N मानी गयी है जब कि सतत् माध्यम में इसकी कोई सीमा नहीं होती ।

(iv) ध्वनि का वेग सभी तरंगदैर्ध्यो के लिये समान माना गया है जबकि प्रायोगिक रूप से ध्वनि का वेग तरंगदैर्ध्य पर भी निर्भर करता है ।

(v) डिबाई ताप θ_D को नियत माना गया है अर्थात् θ_D की ऊष्मीय निर्भरता को नगण्य माना गया है जबकि θ_D का मान ताप पर निर्भर करता है ।

(vi) विशिष्ट ऊष्मा का सेमी.करण ज्ञात करते समय ठोसों में स्वतंत्र इलेक्ट्रॉनों की गति के योगदान को नगण्य माना है कि जबकि 1K ताप पर ठोसों में स्थित स्वतंत्र इलेक्ट्रॉनों की गति का विशिष्ट ऊष्मा में विशेष योगदान होता है ।

(vii) जालक को सतत् माध्यम मानकर, जालक की आवर्तिता (periodicity) की उपेक्षा की गयी है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

5. डिबाई सिद्धान्त द्वारा निम्न ताप पर विशिष्ट ऊष्मा का मान ताप पर किस प्रकार निर्भर करता है

----

6. डिबाई मॉडल, आइन्सटीन मॉडल की किस कमी का निराकरण करता है?

----

7. डिबाई सिद्धान्त किस ताप परास में चिरसम्मत सिद्धान्त में रूपान्तरित हो जाता है?

उदाहरण 8.2 कार्बन का डिबाई ताप 1655 K है तो कार्बन के डिबाई आवृत्ति का मान ज्ञात कीजिये ।

हल: डिबाई अधिकतम आवृत्ति $v_D = \frac{k_B \theta_D}{h}$

$$\therefore v_D = \frac{1.38 \times 10^{-23} \times 1655}{6.62 \times 10^{-34}}$$

= 34.5 x 10^{11} हर्ट्ज

उदाहरण 8.3 10 K ताप पर कार्बन क्रिस्टल की विशिष्ट ऊष्मा ज्ञात कीजिये । क्रिस्टल का डिबाई ताप 1000 K है ।

हल: 10 K ताप निम्न ताप को प्रदर्शित करता है, अत: डिबाई सिद्धान्त के अनुसार विशिष्ट ऊष्मा का मान

$$C_V = \frac{12}{5}\pi^2 Nk_B\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3$$

$$=1.93\times10^6\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3$$

$$=1.936\times10^6\left(\frac{10}{1000}\right)^3$$

=1.936 जूल / किलोमोल-K

8.6 धातुओं की ऊष्मा चालकता (Thermal conductivity of metals)

हम जानते हैं जब भी किसी धातु का ताप सभी बिन्दुओं पर समान नहीं होता अ ताप की प्रवणता होती है तो ऊष्मा का संरचण उच्च ताप बिन्दु से निम्न ताप बिन्दु की ओर होता है । ऊष्मा के रैखिक (linear) संरचण में एकांक दूरी के साथ ताप में परिवर्तन जिसे ताप प्रवणता कहते हैं, $\frac{dT}{dx}$ हो तो धातु प्रति एकांक क्षेत्रफल से प्रति सेकण्ड संचरित ऊष्मा अथवा ऊष्मा धारा घनत्व Q_x ताप प्रवणता $\left(\frac{dT}{dx}\right)$ के अनुक्रमानुपाती होता है ।

अर्थात् $$Q_x \alpha -\frac{dT}{dx}$$

यहाँ ऋणात्मक चिन्ह यह प्रदर्शित करता है कि ऊष्मा का प्रवाह प्रवणता की विपरीत दिशा में होता है ।

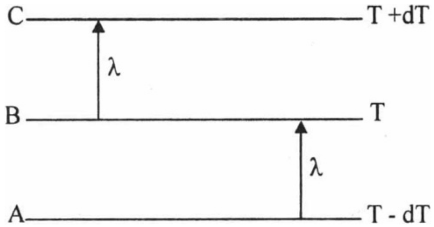
या $$Q_x' = -K'\frac{dT}{dx} \qquad \text{....(8.29)}$$

यहाँ समानुपाती नियतांक K' को ऊष्मा चालकता (thermal conductivity) कहते हैं । धातुओं में अधिकतर ऊष्मा संचरण मुक्त इलेक्ट्रॉन अथवा इलेक्ट्रॉन गैस द्वारा होता है जब कि अधातुओं में संचरण फोनॉन द्वारा ध्वनि के वेग से होता है । यदि इलेक्ट्रॉनों द्वारा ऊष्मा संचरण का ऊष्मा चालकता गुणांक K_{el} तथा मुक्त फोनॉन द्वारा ऊष्मा संचरण का ऊष्मा चालकता गुणांक K_{lat} हो तो ठोस (धातु) की ऊष्मा चालकता को व्यापक रूप से निम्न प्रकार प्राप्त कर सकते हैं

$$K' = K_{el} + K_{lat}$$

जालक ऊष्मा चालकता : किसी भी जालक में ऊष्मा चालकता का अध्ययन करने के लिये जालक को फोनॉन गैस की भाँति मान सकते हैं जिसमें फोनॉन ध्वनि वेग से गति करते हैं । माना N फोनॉन वाली गैस ताप T_1, व T_2 वाली दो प्लेटों के मध्य स्थित है ($T_1 > T_2$) तथा इसके तीन समान्तर तल तथा एक दूसरे से माध्य मुक्त पथ (mean free path) की दूरी पर स्थित हैं जिनके ताप क्रमशः T-dT, T तथा T+dT हैं । यदि फोनॉन माध्य वेग $\bar{C}$

से याद्दच्छिक (randomly) गति कर रहे हैं तो औसतन $\frac{N}{3}$ फोनॉन किसी भी अक्ष (x, y अथवा z) के अनुदिश गति कर सकते हैं तथा इनमें से भी आधे-आधे (अत: $\frac{N}{6}$) फोनॉन किसी भी अक्ष के ऊपर या नीचे गति कर सकते हैं । इसलिये औसतन (average) $\frac{N}{6}$ फोनॉन B से A (नीचे) की ओर अथवा B से C के (ऊपर) की ओर गति कर सकते हैं ।



चित्र 8.7

B तल के एकांक क्षेत्रफल से प्रति सेकन्ड़ गुजरने वाली फोनॉन की संख्या $\frac{N\bar{C}}{6}$ होगी। हम जानते हैं कि प्रत्येक फोनॉन की औसतन उर्जा का मान $\frac{3}{2}k_BT$ होता है ।

तल C से चलकर B तल के प्रति एकांक क्षेत्रफल पर प्रति सेकन्ड पहुँचने वाली गयी उर्जा (ऊष्मा) का मान अथवा ऊष्मा धारा घनत्व

$$Q_1 = \frac{N\bar{C}}{6}\frac{3}{2}k_B[(T+dT)-T]$$

इसी प्रकार A से चलकर B तल के प्रति एकांक क्षेत्रफल पर प्रति सेकन्ड पहुँचने वाली ऊष्मा का मान

$$Q_2 = \frac{N\bar{C}}{6}\frac{3}{2}k_B[(T-dT)-T]$$

$$= -\frac{N\bar{C}}{4}k_B dT$$

अत: B तल के प्रति एकांक क्षेत्रफल द्वारा प्रति सेकन्ड ऊष्मा धारा घनत्व

$$Q_x = Q_1 - Q_2$$

$$= -\frac{N\bar{C}}{2}k_B dT \qquad ....(8.30)$$

C व A तलों के मध्य ताप प्रवणता

$$\frac{dT}{dx} = \frac{(T+dT)-(T-dT)}{2\lambda} = \frac{dT}{\lambda} \qquad ...(8.31)$$

सेमी (8.30) व (8.31) से Q_x व $\frac{dT}{dx}$ का मान सेमी. (8.29) में रखने पर

$$-\frac{N\bar{C}k_B}{2}dT = K_{lat}\frac{dT}{\lambda}$$

या $$K_{lat} = \frac{N\bar{C}k_B\lambda}{2}$$

हम जानते हैं ठोस के जालक के कारण विशिष्ट ऊष्मा का मान

$$C_V = \frac{3}{2}Nk_B$$

होता है क्योंकि प्रत्येक कम्पन करने वाले परमाणु की तीन स्वातंत्र कोटियॉ हैं ।

$$\therefore K_{lat} = \frac{1}{3}C_V\bar{C}\lambda \quad ....(8.32)$$

इलेक्ट्रॉनिक ऊष्मा चालकता (Electronic thermal conductivity) : धातुओं में मुक्त इलेक्ट्रॉन पाये जाते हैं जो कि धातु में याद्दच्छिक रूप से गति करते हैं जिन्हें इलेक्ट्रॉन गैस की भांति माना जाता है । हम जानते हैं धातु में वे इलेक्ट्र जो फर्मी तल के निकट होते हैं, विशिष्ट ऊष्मा में योगदान करते है। जिनका वेग v_f, निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है'

$$\frac{1}{2}mv_f^{\,2} = E_F \quad ....(8.33)$$

यहां E_F उर्जा (Fermi energy) है । अत: इलेक्ट्रॉनिक ऊष्मा चालकता का मान ज्ञात करने के लिये फोनॉन वेग (c) व माध्य मुक्त पथ (λ) को फर्मी तल पर v_f तथा माध्य मुक्त λ_f द्वारा प्रतिस्थापित कर प्राप्त कर सकते हैं ।

इसलिये इलेक्ट्रॉनिक ऊष्मा चालकता

$$K_{el} = \frac{1}{3}(C_V)_{el}v_f\lambda_f \quad ....(8.34)$$

यहाँ $(C_v)_{el}$ इलेक्ट्रॉनिक विशिष्ट ऊष्मा हैं, जिसका मान

$$(C_v)_{el} = \frac{N\pi^2k^2{}_B}{2E_F}T \quad ....(8.35)$$

होता है तथा $\lambda_f = v_f\tau_f$ जहाँ विश्रान्ति काल है । सेमी. (8.35) से $(C_v)_{el}$ का मान सेमी. (8.34) में रखने पर

$$K_{el} = \left(\frac{\pi^2}{3}\right)\left(\frac{Nk^2{}_B}{2}E_F\right)T \quad ...(8.36)$$

यह सेमी.करण इलेक्ट्रॉनिक ऊष्मा चालकता का ताप के साथ रैखिक (linear) परिवर्तन प्रदर्शित करता है, परन्तु धातुओं के लिये τ_f ताप T के व्युतक्रमानुपाती होता है इसलिये K_{el}ताप पर निर्भर नहीं करता है । यह निष्कर्ष प्रयोगिक तथ्यों से भी सत्यापित होता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

8.ऊष्मा चालकता को परिभाषित कीजिये?

----

9. इलेक्ट्रानिक ऊष्मा चालकता ताप पर किस प्रकार निर्भर करती है?

8.7 अप्रसवांदिता (Anharmonicity)

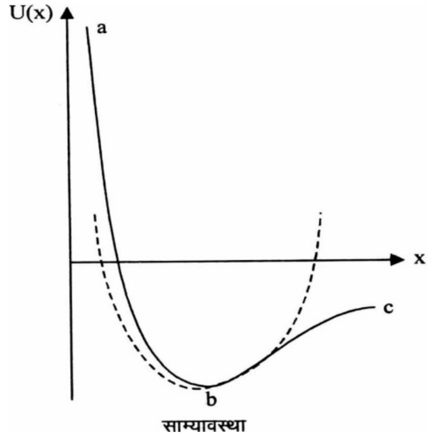
अभी तक हमने जालक के परमाणुओं के कम्पन का आयाम अल्प मानते हुए जालक के परमाणुओं को सरल आवर्ती दोलक के रूप में माना है जिसमें अन्तरापरमाणुक बल हुक के नियम का पालन करते हैं ।

इस स्थिति में जालक क्रिस्टल की स्थितिज ऊर्जा U(x) अन्तरापरमाणुक दूरी x का द्विघाती होती है अत: $U(x)=x^2$ को प्रसंवादी सन्निकटन (harmonic approximation) कहते हैं ।इस सन्निकटन में जालक को स्थितिज उर्जा व अन्तरापरमाणविक दूरी के मध्य आरेख को बिन्दुवत वक्र (dotted curve) द्वारा चित्र 8.8 में प्रदर्शित किया गया है । इस वक्र की आकृति परवलय के समान होती है । इस सन्निकटन द्वारा हम क्रिस्टल के ऊष्मीय प्रसार, नियत आयतन व दाब पर विशिष्ट ऊष्माओं में अन्तर को नहीं समझा सकते हैं । परन्तु, वास्तव में जालक कम्पन आवर्त नहीं होते हैं तथा जालक की स्थितिज उर्जा व अन्तरापरमाणुक दूरी के मध्य आरेख वक्र abc के रूप में प्राप्त होता है (जो कि यह प्रदर्शित करता है कि अन्तरापरमाणुक दूरी बढ़ाने की अपेक्षा कम करने पर स्थितिज उर्जा का मान अधिक तेजी से बढ़ता है) । यह वक्र अन्तरा परामाणुक दूरी के बढ़ने पर बिंदुवत वक्र से विचलित होता जाता है । इस विचलन (deviation) को स्थितिज उर्जा सेमी.करण में द्विघाती पदों के अतिरिक्त उच्चतर पदों को सम्मिलित कर समझाया जा सकता है । इन पदों को अप्रसवादी (anharmonic) पद कहते हैं तथा सन्निकटन को अप्रसंवादी सन्निकटन कहते हैं । इस सन्निकटन में जालक की स्थितिज ऊर्जा को निम्न प्रकार प्रदर्शित करते

$$U(x) = cx^{2} - gx^{3} - fx^{4}$$

यहाँ c,g,f स्थिरांक हैं जो कि धनात्मक हैं ।

इन प्रसंवादी पदों की उपस्थिति के कारण परमाणुओं की कम्पन गति को अप्रसंवादी गति कहते हैं । स्थितिज उर्जा सेमी.करण में त्रिघातीय पद (cubic term) परस्पर प्रतिकर्षी बल में असममितिता को व्यक्त करता x^4 का पद अधिक आयाम के कम्पनों के मृदुलन प्रभाव (softening effect) को प्रदर्शित करता है क्योंकि यह पद उस ऊर्जा को कम करता है जिसके कारण आयाम के मान मे वृद्धि होती है । चित्र में दिखाये अनुसार त्रिघातीय पद विभव वक्र के वामहस्त (right hand) भाग को तीक्ष्ण (sharp) व दक्षिणइस्त (left hand) भाग को सपाट (flattoen) कर देता है जो कि परमाणुओं के कम्पनों के अप्रसवांदी होने को प्रद्रर्शित करता है ।



चित्र 8.8

8.8 तापीय प्रसार (Thermal expansion)

जालक में जब कोई कम्पन करता हुआ परमाणु किसी अन्य परमाणु के निकट आता है तो वह आकर्षण की अपेक्षा अधिक प्रतिकर्षण बल का अनुभव करता है तथा माध्य स्थिति से विस्थापित हो जाता है तथा जालक को ऊष्मीय उर्जा देने पर (ताप बढ़ाने पर) परमाणु अपनी माध्य स्थिति से और अधिक विस्थापित हो जाता है । परमाणु अपनी माध्य स्थिति से जितना अधिक विस्थापित होगा उतना ही अधिक रेखीय प्रसार होता है ।

ठोस जालक के इस तापीय प्रसार को अप्रसंवादी मॉडल द्वारा समझाया जा सकता है जिसके अनुसार परमाणु की स्थितिज उर्जा U(x) को निम्न सेमी.करण द्वारा प्रदर्शित किया जाता है :

$$U(x) = cx^2 - gx^3 - fx^4 \qquad ...(8.37)$$

जहाँ x परमाणु का माध्य स्थिति से विस्थापन है । ऊष्मागतिक प्रायिकता के आधार पर माध्य विस्थापन का मान <x> मैक्सवेल वितरण फलन द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं ।

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-U(x)/k_B T} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-U(x)/k_B T} dx} \qquad ...(3.38)$$

निम्न मानक समाकलनों (standard integrals) का मान

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-U(x)/k_B T} dx = \frac{3g}{4k_B T} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{c}{k_B T}\right)^5}}$$

तथा $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-U(x)/k_BT} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{c}{k_BT}\right)}} + \frac{3}{4}\frac{f}{k_BT}\sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{c}{k_BT}\right)^5}}$$

प्रयुक्त करने पर माध्य विस्थापन का मान

$$\langle x \rangle = \frac{3gk_BT/4c^2}{\left(1+3f\frac{k_BT}{4c^2}\right)}$$

$$\langle x \rangle = \left(3gk_BT/4c^2\right)\left(1+3\frac{fk_BT}{4c^2}\right)^{-1}$$

द्विपद प्रसरण में प्रथम कोटि के सन्निकटन (first order approximation) से

$$\langle x \rangle = \frac{3gk_BT}{4c^2}\left(1-3\frac{fk_BT}{4c^2}\right)$$

इस सूत्र से ऊष्मीय प्रसार गुणांक तथा ताप की निर्भरता ज्ञात की जा सकती है । कोष्ठक के द्वितीय पद को 1 की तुलना में नगण्य मानने पर

$$\langle x \rangle = \frac{3g}{4c^2}(k_BT) \qquad ...(8.39)$$

तथा तापीय प्रसार गुणांक (thermal expansion coefficient)

$$\alpha = \frac{d\langle x \rangle}{dT} = \frac{3g}{4c^2}k_B \qquad ....(8.40)$$

अतः चिरसम्मत सांख्यिकी (classical statistics) के अनुसार तापीय प्रसार $\langle x \rangle$ ताप T के अनुक्रमानुपाती तथा तापीय प्रसार गुणांक ताप पर निर्भर नहीं करता है । साधारण (कमरे) ताप सभी धातुओं के लिये यह सिद्धान्त उपयुक्त है परन्तु प्रायोगिक रूप से यह प्रेक्षित किया गया है कि α का चिरसम्मत मान से बहुत कम होता है तथा परम ताप के शून्य की ओर अग्रसर होने पर, शून्य की ओर होता है । इस तथ्य को समझाने के लिये चिरसम्मत यांत्रिकी के स्थान पर क्वान्तम सांख्यिकी प्रयुक्त हैं जिससे माध्य विस्थापन $\langle x \rangle$ के सूत्र (8.39) मे k_BT के स्थान पर $\frac{h\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}$ रखने पर माध्य विस्थापन मान

$$\langle x \rangle = \frac{3g}{4c^2}\left(\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}\right)$$

प्राप्त होगा । उच्च तापों पर यह मान सेमी. (8.39) द्वारा प्राप्त मान के समान होगा । परन्तु $T \to 0$ के लिये

$$\langle x \rangle = \frac{3g}{4c^2}\hbar\omega e^{-\hbar\omega/k_BT} \qquad ...(8.41)$$

$$a = \frac{3g}{4c2}\left(\frac{h\omega}{kBT}\right)^2 k_B e - h\omega / k_B T \qquad ...(8.42)$$

जो $T \to 0$ परिरिथति में शून्य हो जाता है जैसा कि प्रायोगिक रूप से प्रेषित है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

10 प्रसंवादी सन्निकटन से आप क्या समझते हैं?

----

11. प्रसंवादी सन्निकटन द्वारा तापीय प्रसार क्यों नहीं समझाया जा सकता है?

----

12. अप्रसवांदी सन्निकटन में स्थितिज उर्जा सेमी.करण में त्रिघातीय पद क्या व्यक्त करता है?

----

13. अप्रसवादी सन्निकटन में स्थितिज उर्जा वक्र का सपाट भाग क्या प्रदर्शित करता है?

----

14. चिरसम्मत यांत्रिकी द्वारा प्राप्त तापीय प्रसार ताप पर किस प्रकार निर्भर करता है?

----

15. क्वान्टम यांत्रिकी अनुसार ताप के शून्य की ओर अग्रसर होने पर तापीय प्रसार गुणांक पर क्या पड़ता है?

8.9 सारांश (Summary)

- पदार्थ के एकांक द्रव्यमान का ताप 1^0C से बढ़ाने के लिये जितनी ऊष्मा की आवश्यकता होती है विशिष्ट ऊष्मा कहते हैं ।
- क्रिस्टल जालक के परमाणुओं के कम्पनों से सम्बद्ध विशिष्ट ऊष्मा को जालक विशिष्ट ऊष्मा तथा इलेक्ट्रॉनिक संक्रमण से सम्बद्ध विशिष्ट ऊष्मा को इलेक्ट्रॉनिक विशिष्ट ऊष्मा कहते हैं ।
- कुचालकों में इलेक्ट्रॉनिकी विशिष्ट ऊष्मा का मान नगण्य होता है ।
- धातुओं में उच्च ताप पर जालक विशिष्ट ऊष्मा अधिक प्रभावी होती है तथा न्यूनतापों पर इलेक्ट्रॉनिकी विशिष्ट ऊष्मा अधिक प्रभावी होती है ।

- प्रायोगिक रूप से ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा का मान उच्च ताप पर 3R के बराबर प्राप्त होता है । इस प्रायोगिक तथ्य की पुष्टि सैद्धान्तिक रूप से आइन्सटीन व डिबाई दोनों मॉडलों द्वारा भी होती है ।
- प्रायोगिक रूप से परम ताप के शून्य की ओर अग्रसर होने पर विशिष्ट ऊष्मा भी शून्य की ओर अग्रसर होती है । आइन्सटीन व डिबाई मॉडल भी इस तथ्य की पुष्टि करते हैं।
- चिरसम्मत यांत्रिकी के अनुसार विशिष्ट ऊष्मा का मान ताप पर निर्भर नहीं करता है ।
- आइन्सटीन मॉडल द्वारा निम्न तापों पर प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा का मान ताप के साथ चरघातांकी रूप से कम होता है । निम्न ताप पर यह मॉडल प्रयोगिक मान से सहमति व्यक्त नहीं करता है ।
- डिबाई मॉडल द्वारा न्यून ताप पर प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा C_V का मान परमताप के घन के अनुक्रमानुपाती होता है ।
- डिबाई विशिष्ट ऊष्मा वक्र प्रयोगिक वक्र से निम्न ताप व उच्च तापों पर सहमति व्यक्त करता है परन्तु मध्यवर्ती तापों पर समानता प्राप्त नहीं होती है ।
- जालक (कुचालक) में ऊष्मा का संचरण फोनॉन द्वारा होता है तथा धातुओं में अधिकतर ऊष्मा का संचरण इलेक्ट्रॉन द्वारा होता है ।
- इलेक्ट्रॉनिक ऊष्मा चालकता का मान ताप पर निर्भर नहीं करता है ।
- अप्रसंवादी मॉडल द्वारा प्राप्त स्थितिज उर्जा वक्र न्यूनतम स्थितिज उर्जा के ' ओर सममित नहीं होता है । इस वक्र का सपाट भाग पूरमाणुओं के कम्पनों के अप्रसवादी होने को स्तक्त करता है ।
- ठोसों में ऊष्मीय प्रसार को अप्रसंवादी मॉडल द्वारा समझाया जा सकता है ।
- चिरसम्मत सांख्यिकी के अनुसार तापीय प्रसार परम ताप के अनुक्रमानुपाती होता है तथा तापीय प्रसार गुणांक ताप पर निर्भर नहीं करता है ।
- क्वान्टम सांख्यिकी के अनुसार परम ताप के शून्य की ओर अग्रसर होने पर । तापीय प्रसार गुणांक का मान भी शून्य की ओर अग्रसर होता है ।

8.10 शब्दावली (Glossary)

अप्रसवांदिता	Anharmonicity
अधातु	Nonmetal
असममित	Asymmetrical
अन्तक आवृत्ति	cut off frequency
ऊष्मा चालकता	Thermal conductivity
कमियाँ	Drawbacks
क्यान्टम सांख्यिकी	Quantum statistics
गुणांक	Coefficient
चरघातांकी	Exponentially

चिरसम्मत यांत्रिकी	Classical mechanics
ठोस	Solid
तापीय गुण	Thermal properties
परावर्तित	Reflected
प्रसामान्य विधा घनत्व	Density of normal modes
प्रायिकता	Probability
विश्रान्ति काल	Reflexation time
विविक्त	Discrete
विशिष्ट ऊष्मा	Specific heat
सतत्	Continuous
सन्निकटन	Approximation
सीमान्त अवस्था	Boundary condition

8.11 संदर्भ ग्रन्थ (References books)

S.L. Kakani and C. Hemrajani	A Text Book of Solid State Physics	Sultan Chand and Sons, New Delhi
Saxena, Gupta and Saxena	Fundamental of Solids state Physics	Pragati Prakashan, Meerut
H.C. Gupta	Solids State Physics	Vikas Publishing house, New Delhi
सी.एम.कछावा	ठोसों के सिद्धान्त	राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी, जयपुर
एस.एस.रावत	ठोस अवस्था भौतिकी	कॉलेज बुक हाऊस जयपुर

8.12 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to self assessment questions)

1. क्रिस्टल जालक के परमाणुओं के कम्पनों से सम्बद्ध विशिष्ट ऊष्मा को, जालक विशिष्ट ऊष्मा कहते हैं ।
2. न्यूनतापों पर धातुओं की विशिष्ट ऊष्मा परम ताप के अनुक्रमानुपाती होती है ।
3. चिरसम्मत दोलक की माध्य ऊर्जा, आवृत्ति पर निर्भर नहीं करती है जब कि आइन्सटीन दोलित्र की माध्य ऊर्जा आवृत्ति पर निर्भर करती है ।
4. आइन्सटीन द्वारा प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा का मान निम्न तापों पर ताप के साथ चरघाताकी रूप से कम होता
5. डिबाई द्वारा प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा का निम्न ताप पर प्राप्त मान, परम ताप की तृतीय घात के अनुक्रमानुपाती होता है ।

6. आइन्सटीन द्वारा निम्न ताप पर प्राप्त विशिष्ट ऊष्मा के मान की इस ताप पर प्रायोगिक मान से असहमति का निराकरण डिबाई मॉडल करता है ।
7. उच्च ताप परास में-डिबाई सिद्धान्त चिरसम्मत सिद्धान्त में रूपान्तरित हो जाता है ।
8. एकांक ताप प्रवणता के लिये धातु के प्रति एकांक क्षेत्रफल से प्रति सेकण्ड संचरित ऊष्मा प्रवाह को ऊष्मा चालकता कहते हैं ।
9. इलेक्ट्रॉनिक ऊष्मा चालकता ताप पर निर्भर नहीं करती है ।
10. प्रसवांदी सन्निकटन में स्थितिज उर्जा सेमी.करण में द्विघाती पदों के अतिरिक्त उच्चतर घाती पदों के समावेश को अप्रसवांदी सन्निकटन कहते हैं ।
11. प्रसवांदी सन्निकटन में स्थितिज उर्जा वक्र न्यूनतम स्थितिज अवस्था के दोनों ओर सममित होता है इसलिये ठोस के ताप में वृद्धि करने पर उनका तापीय प्रसार नहीं होती है ।
12. अप्रसवांदी सन्निकटन में स्थितिज उर्जा वक्र में त्रिघातीय पद परस्पर प्रतिकर्षी बल में असममिता को व्यक्त करता है ।
13. वक्र का सपाट भाग परमाणुओं के कम्पन अप्रसवांदी होने का द्योतक है ।
14. चिरसम्मत यांत्रिकी द्वारा प्राप्त तापीय प्रसार, ताप के अनुक्रमानुपाती होता है ।
15. क्वान्टम यांत्रिकी के अनुसार ताप के शून्य की ओर अग्रसर होने पर तापीय प्रसार गुणांक भी शून्य की ओर अग्रसर होता है ।

8.13 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. इलेक्ट्रॉनिक विशिष्ट ऊष्मा को परिभाषित कीजिये ।
2. प्रयोगिक रूप से उच्च ताप पर विशिष्ट ऊष्मा ताप पर किस प्रकार निर्भर करती है?
3. डुलॉग-पेती का नियम किस ताप परास के लिये वैध है?
4. आइन्सटीन विशिष्ट ऊष्मा वक्र की प्रायोगिक वक्र से तुलना कीजिये ।
5. आइन्सटीन मॉडल की मुख्य कमी क्या है ?
6. प्रसामान्य विधा घनत्व से आप क्या समझते हैं?
7. डिबाई विशिष्ट ऊष्मा वक्र ताप की किन परासों में प्रायोगिक वक्र से प्रकट करता है?
8. डिबाई मॉडल की मुख्य कमी क्या है?
9. जालक में ऊष्मा संचरण किस के द्वारा होता है?
10. ताप प्रवणता से आप क्या समझते हैं ।
11. अप्रसवादी सन्निकटन में स्थितिज ऊर्जा वक्र प्रसवांदी वक्र में क्या भिन्नता है ?
12. किस ताप पर क्वान्टम व चिरसम्मत सांख्यिकी द्वारा प्राप्त तापीय प्रसार का मान समान होता है?
13. निम्न ताप पर क्वान्टम यांत्रिकी द्वारा प्राप्त तापीय प्रसार का मान ताप पर किस प्रकार निर्भर करता है?

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

14. ठोसों की विशिष्ट ऊष्मा ताप के साथ किस प्रकार परिवर्तित होती है? इसकी व्याख्या करने के लिये आइन्सटीन मॉडल द्वारा विशिष्ट ऊष्मा का सूत्र व्युत्पन्न कीजिये । इस मॉडल की सफलता व असफलता को भी समझाइये ।
15. सतत् माध्यम में कम्पन विधाओं के घनत्व के लिये सूत्र व्युत्पन्न कीजिये ।
16. डिबाई सिद्धान्त द्वारा निम्न ताप पर ठोस की विशिष्ट ऊष्मा की ताप पर निर्परता ज्ञात कीजिये तथा इसकी मुख्य विशेषतओ का भी उल्लेख कीजिये ।
17. सिद्ध कीजिये कि धातुओं की ऊष्माचालकता ताप के साथ रैखिक रूप से परिवर्तित होती है ।
18. अप्रसवांदिता के आधार पर ठोसों के तापीय प्रसार को समझाइये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

19. यदि चिरसम्मत सिद्धान्त विशिष्ट ऊष्मा के लिये वैद्य है तो एक मोल तॉबे के लिये 30^0C पर ऊष्मीय उर्जा का मान ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर :** 748 किलोजूल)

20. एक 10^{27}परमाणु आवर्ती दोलक वाले निकाय के प्रत्येक दोलित्र की आवृत्ति 10^{12}हर्टज है । शून्य बिन्दु उर्जा को नगण्य मानते हुए 20K ताप पर निकाय की माध्य उर्जा ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर :** 66 जूल)

21. सोने के लिये डिबाई ताप की गणना कीजिये यदि इसका परमाणु भार 197, घनत्व 1.9×10^4 किग्रा.मी^{3} तथा ध्वनि का वेग 2100 मीटर/सेकंड हो ।

(**उत्तर :** 240 K)

22. ताम्बे के लिये आइन्सटीन आवृत्ति $5x10^{12}$ हर्टज है । प्रदर्शित कीजिये कि ताप T> 239 K पर ताम्बे की विशिष्ट ऊआ का मान 3R प्राप्त होता है ।

इकाई 9

ठोसों के वैद्युयत गुण

(Electrical Properties of Solids)

इकाई की रूपरेखा

9.0 उद्देश्य

9.1 प्रस्तावना

9.2 विद्यूत चालकता

9.3 ड्रयूड लॉरेन्टज़ का सिद्धान्त

9.4 सोमर फील्ड मॉडल

9.5 वीडमा - फ्रेन्ज का नियम

9.6 इलेक्ट्रॉनिकी विशिष्ट ऊष्मा

9.7 सारांश

9.8 शब्दावली

9.9 संदर्भ ग्रन्थ

9.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

9.11 अभ्यासार्थ प्रश्न

9.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ्ने के पश्चात् आप

- विद्युत चालकता की जानकारी प्राप्त कर सकेंगे ;
- इलेक्ट्रॉन गैस मॉडल पर आधारित ड्रयूड - लॉरेन्टज सिद्धान्त द्वारा विद्युत चालकता की ताप पर निर्भरता जान सकेंगे ;
- प्रायोगिक तथा सैद्धान्तिक रूप से विद्युत की ताप पर निर्भरता की समानता प्राप्त करने के लिये प्रयुक्त सोमरफील्ड मॉडल के बारे में जान सकेंगे;
- वीडमा् - फ्रेन्ज के नियम की सहायता से ऊष्मा चालकता व विद्युत चालकता में संबंध ज्ञात कर सकेंगे;
- फर्मी डिरॉक सांख्यिकी के आधार पर इलेक्ट्रॉनिक विशिष्ट ऊष्मा का सूत्र व्युत्पन्न कर उसकी ताप पर निर्भरता प्राप्त कर सकेंगे ।

9.1 प्रस्तावना (Introduction)

इकाई-8 में आपने ठोसों के तापीय गुणों जैसे विशिष्ट ऊष्मा व ऊष्मा चालकता का अध्ययन किया है । ऊष्मा चालकता के अध्ययन करते समय आपने देखा जब भी ठोसों में ताप प्रवणता होती है तो उसमें ऊष्मा चालन होता है । इसी प्रकार जब ठोसों पर विद्युत क्षेत्र

(electric field) आरोपित किया जाता है तो ठोसों में विद्युत चालन (conduction) होता है । इस इकाई के अनुच्छेद 9.2 में आप विद्युत चालकता (electrical conductivity) का विस्तृत अध्ययन करेंगे तथा प्रायोगिक रूप से प्रेक्षित विद्युत चालकता के गुणों की जानकारी प्राप्त करेंगे । अनुच्छेद 9.3 में ड्रयूड - लॉरेन्टज़ सिद्धान्त द्वारा विद्युत चालकता का सूत्र व्युत्पन्न करेंगे । अनुच्छेद 9.4 में सोमरफील्ड मॉडल द्वारा विद्युत चालकता का सूत्र व्युत्पन्न कर उसकी ताप पर निर्भरता का अध्ययन करेंगे । अनुच्छेद 9.5 में वीडमा-फ्रेन्ज के नियम, जो कि ठोसों में ऊष्मा व विद्युत चालकता में संबंध व्यक्त कता है, का अध्ययन करेंगे । अनुच्छेद 9.6 में ठोसों में मुक्त इलेक्ट्रॉनों के कारण 'विशिष्ट ऊष्मा में योगदान ज्ञात करने के लिये इलेक्ट्रॉनिकी विशिष्ट ऊष्मा का सूत्र व्युत्पन्न करेंगे ।

9.2 विद्युत चालकता (Electrical conductivity)

हम जानते हैं कि ठोसों में अधिकतर सभी धातु (metals) विद्युत सुचालक (conductor) होती हैं क्योंकि इनमें मुक्त इलेक्ट्रॉन (free electron) जिन्हें चालन-इलेक्ट्रॉन (conduction electron) भी कहते हैं, आयनकोरों के मध्य इधर उधर यादृच्छिक (random) रूप से स्वतन्त्रता पूर्वक गति करते रहते हैं । जिन्हें ठोस (solids) में इलेक्ट्रॉन गैस की भाँति माना जा सकता है । साम्यावस्था (equilibrium) में निश्चित दिशा में इन गतिशील इलेक्ट्रॉनों की संख्या, उसके विपरीत दिशा में गति करने वाले इलेक्ट्रॉनों की संख्या के बराबर होती है अत: ठोसों में मुक्त इलेक्ट्रॉनों का औसत वेग (average velocity) शून्य होता है । जब ठोस चालक पर विद्युत क्षेत्र (electric fied) आरोपित किया जाता है तो मुक्त इलेक्ट्रॉन क्षेत्र के विपरीत दिशा में गति करते हैं अतः'इस स्थिति में विद्युत क्षेत्र की दिशा में इलेक्ट्रॉनों का औसत वेग शून्य नहीं होगा ।

विद्युत क्षेत्र की उपस्थिति में मुक्त इलेक्ट्रॉनों के समूह के इस औसत वेग को अपवाह वेग (drift velocity) कहते हैं । अपवाह वेग का मान विद्युत क्षेत्र पर निर्भर करता है तथा विद्युत क्षेत्र के शून्य होने पर अपवाह वेग भी शून्य हो जाता है । मुक्त इलेक्ट्रॉन के प्रवाह (अपवाह वेग से) से विद्युत धारा उत्पन्न होती है । चालक के एकांक क्षेत्रफल से प्रवाहित धारा को धारा घनत्व (current density) कहते हैं जिसका मान विद्युत क्षेत्र पर निर्भर करता है । धारा घनत्व (J) आरोपित विद्युत क्षेत्र (E) के अनुक्रमानुपती होता है अर्थात्,

$$J \propto E$$

$$J = \sigma E \qquad ...(9.1)$$

यहाँ σ समानुपाती स्थिरांक है, जिसे पदार्थ की विद्युत चालकता (electrical conductivity) कहते हैं । विद्युत चालकता विद्युत क्षेत्र के प्रभाव में पदार्थ में विद्युत-चालन की क्षमता (capacity) को प्रदर्शित करता है । विद्युत चालकता पदार्थ की प्रकृति (nature) व ताप पर निर्भर करती है । विद्युत चालकता के व्युत्क्रम (reciprocal) को प्रतिरोधकता (resitivity) कहते हैं ।

माना चालक के एकांक आयतन में इलेक्ट्रॉनों की संख्या n, अपवाह वेग v_d तथा इलेक्ट्रॉन पर आवेश का मान q है तो प्रति एकांक क्षेत्रफल से प्रति सेकण्ड आवेश प्रवाह (flow) जिसे धारा घनत्व (J) कहते हैं, का मान

$$J=-qnv_d \qquad ..(9.2)$$

होगा । सेमी. (9.1) व (9.2) से

$$\sigma E = -qnv_d$$

या

$$\sigma = \frac{-qnv_d}{E} \qquad ....(9.3)$$

अपवाह v_d वेग व विद्युत क्षेत्र की तीव्रता E के अनुपात को आवेश वाहक (इलेक्ट्रॉन) की गतिशीलता (mobility) कहते हैं । अत: गतिशीलता

$$\mu = \frac{v_d}{E} \qquad ....(9.4)$$

सेमी. (9.3) व (9.4) से

$$\sigma = -nq\mu \qquad ....(9.5)$$

n व E के नियत मान के लिये विद्युत चालकता का मान गतिशीलता μ पर निर्भर करता है ।

μ इलेक्ट्रॉन प्रवाह में अवरोध (प्रतिरोध) के अनुरूप माना जाता है, अत: हम कह सकते हैं कि पदार्थ की विद्युत चालकता इलेक्ट्रॉन के प्रवाह में प्रतिरोध पर निर्भर करती हैं।

प्रायोगिक रूप से धातुओं की विद्युत चालकता निम्न गुणों को प्रदर्शित करती है :

(i) स्थायी अवस्था (steady state) में धातुओं में धारा घनत्व का मान विद्युत क्षेत्र के अनुक्रमानुपाती होता है अर्थात् चालकता का मान E व J पर निर्भर नहीं करता है तथा स्थायी अवस्था में धातु ओम (ohm) के नियम का पालन करती हैं ।

(ii) धातुओं (metals) की विद्युत चालकता अन्य पदार्थो की तुलना में अधिक होती है ।

(iii) सामान्य ताप (कमरे के ताप) पर धातुओं की चालकता 10^7 म्हो/मीटर की कोटि (order) की होती है।

(iv) न्यूनताप पर (परन्तु 20 K ताप से अधिक) कुछ धातुओं की प्रतिरोधकता परमताप के पंचम घात (T^5) के अनुक्रमानुपाती होती है ।

(v) अधिकांश धातुओं की प्रतिरोधकता दाब के व्यत्क्रमानुपाती होती है ।

(vi) डिबाई ताप से अधिक ताप पर धातुओं की प्रतिरोधकता ताप के अनुक्रमानुपाती होती है।

(vii) शुन्य ताप के निकट धातुओं की प्रतिरोधकता शून्य हो जाती है जो कि धातुओं की अति चालकता के गुण को प्रदर्शित करती है ।

(viii) डिबाई ताप से अधिक ताप पर ऊष्मीय व विद्युत चालकता का अनुपात परम ताप के अनुक्रमानुपाती होता है, जिसे विडेमा-फ्रेन्ज का नियम कहते हैं ।

(ix) अल्प अशुद्धि युक्त धातुओं की प्रतिरोधकता 9 का मान निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है

$\rho = \rho_0 + \rho(T)$

यही ρ_0 एक नियतांक है जो अशुद्धि की मात्रा के साथ बढ़ता है तथा $\rho(T)$ प्रतिदर्श (sample) की प्रतिरोधकता है जो कि ताप पर निर्भर करती है । इसे माटिसेन (Matthiessen) का नियम कहते हैं ।

(x) धातुओं की चालकता चुम्बकीय क्षेत्र (magnetic field) द्वारा प्रभावित होती है।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. विद्युत चालकता को परिभाषित कीजिये ।

----

2. गतिशीलता से आपका क्या अभिप्राय है?

उदाहरण 9.1 2 सेमी^{2} अनुप्रस्थ काट वाले ताम्बे के तार में 100 एम्पियर की प्रवाहित हो रही है । यदि तार में 10^{30} इलेक्ट्रॉन प्रति एकांक आयतन हों, तो तार में धारा घनत्व तथा इलेक्ट्रॉन का अपवाह वेग ज्ञात कीजिये ।

हल : दिया हुआ है : A = 2 सेमी^{2} = 2x 10^{-4} मीटर^2

I= 100 एम्पियर, n =10^{30}

धारा घनत्व $J = \frac{I}{A} = \frac{100}{2 \times 10^{-4}}$ =50 x 10^4एम्पियर/मी^{2}

अपवाह वेग $v_d = \frac{J}{qn}$

$= \frac{50 \times 10^4}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^{30}}$

31.25×10^7 मी/से

9.3 ड्रयूड लीरेन्टजू का विद्युत-चालकता का सिद्धान्त (Drude - Lorentz theory of electrical conductivity)

स्थायी अवस्था में धातुओं में विद्युत चालकता की व्याख्या सर्वप्रथम ड्रयूड व - द्वारा धातुओं के

इलेक्ट्रॉन गैस मॉडल (model) के आधार पर की गयी । जिसे ड्रयूड व लॉरेन्टज की विद्युत चालकता का सिद्धान्त कहते हैं । इस सिद्धान्त के अनुसार धातुओं में मुक्त इलेक्ट्रॉनों की गति को गैस के अणु अथवा परमाणु की गति के समान माना जा सकता है । ये इलेक्ट्रॉन मैक्सवैल बोल्टज्मान सांख्यिकी (statistics) का पालन करते हैं । धातुओं में मुक्त इलेक्ट्रानों का निश्चित दिशा में माध्य वेग शून्य होता है परन्तु जब धातु पर विद्युत क्षेत्र E आरोपित किया जाता है, तो प्रत्येक इलेक्ट्रॉन पर विद्युत बल कार्य करता है जो उसमें त्वरण उत्पन्न

करता है । माना धातु के एकांक आयतन में मुक्त इलेक्ट्रॉनों की संख्या n है, जिस पर x-दिशा में विद्युत क्षेत्र E_xआरोपित किया जाता है । विद्युत क्षेत्र के कारण तु द्रव्यमान व एवं) आवेश वाले इलेक्ट्रॉन पर x- दिशा में उत्पन्न त्वरण का मान

$$a_x = \left(\frac{dv_d}{dt}\right)_{\text{क्षेत्र}} = \frac{-qE_x}{m} \qquad ...(9.6)$$

यहाँ v_d क्षेत्र की उपस्थिति में क्षेत्र की दिशा में इलेक्ट्रॉन का अपवाह वेग है । इस सेमी.करण से हम देखते हैं कि समय के साथ अपवाह वेग v_d में वृद्धि होती है । जब यह त्वरित इलेक्ट्रॉन जालक (lattice) के स्थिर आयनों से टकराता है तो उसके द्वारा विद्युत क्षेत्र में संचित ऊर्जा का पूर्ण रूप से क्षय (loss) हो जाता है । इसके पश्चात् गति यादृच्छिक हो जाती है । इस प्रकार हम देखते हैं कि अपवाह वेग में परिवर्तन विद्युत क्षेत्र के साथ-साथ इलेक्ट्रॉन-आयनों के टक्कर (collision) के कारण भी होता है । अपवाह वेग में कमी की दर, उस क्षण अपवाह वेग के अनुक्रमानुपाती होती है

$$\frac{dv_d}{dt} \propto v_d$$

$$\frac{dv_d}{dt} = \frac{v_d}{\tau} \qquad ...(9.7)$$

$\frac{1}{\tau}$ एक समानुपाती स्थिरांक है । τ की विभा समय की होने के कारण इसे विश्रान्ति काल (relaxation time), कहते हैं । τ का मान इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा व गति (motion) की दिशा पर निर्भर नहीं करता है, इस प्रकार मुक्त इलेक्ट्रॉनों के अपवाह वेग में कुल परिवर्तन विद्युत क्षेत्र तथा जालक के आयनों के टक्कर से होता है इसलिग्रे अपवाह वेग में कुल परिवर्तन की दर

$$\frac{dv_d}{dt} = \left(\frac{dv_d}{dt}\right)_{\text{क्षेत्र}} + \left(\frac{dv_d}{dt}\right)_{\text{टक्कर}}$$

$$\frac{-qE_x}{m} - \frac{v_d}{\tau}$$

विद्युत क्षेत्र $E_{,x}$ आरोपित करने के पश्चात् कुछ समय बाद अपवाह वेग का मान नियत हो जाता है जिसे निकाय की स्थायी (steady) अवस्था कहते हैं । इसे सैद्धान्तिक रूप से भी समझाया जा सकता है जिसके अनुसार विद्युत क्षेत्र आरोपित करने पर इलेक्ट्रॉन में क्षेत्र की दिशा में उत्पन्न त्वरण के कारण मुक्त इलेक्ट्रॉनों के वेग में परिवर्तन नहीं होता है क्योंकि ये इलेक्ट्रॉन स्थिर आयनों से टकराते रहते हैं व इनकी ऊर्जा में कमी होती रहती है । अत: क्षेत्र की दिशा में इनका औसत वेग जिसे अपवाह वेग कहते हैं, नियत हो जाता है ।

स्थायी अवस्था में 1।

$$\frac{dv_d}{dt} = 0$$

$$\frac{-qE_x}{m} = \frac{v_d}{\tau}$$

या $$v_d = \frac{-q\tau E_x}{m} \qquad ....(9.9)$$

इस सेमी.करण से स्पष्ट है कि नियत विद्युत क्षेत्र के लिये अपवाह वेग पदका नियत रहता है जैसा कि प्रयोगिक रूप से भी प्रेक्षित है । सेमी. (9.2) में v_d का मान रखने पर धारा घनत्व

$$J_x = \left(\frac{nq^2\tau}{m}\right)E_x \qquad ....(9.10)$$

$$= \sigma E_x$$

अतः $$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m} \qquad ....(9.11)$$

सेमी. (9.5) से

$$\sigma = -nq\tau$$

सेमी. (9.11) के अनुसार विद्युत चालकता विश्रान्ति काल का रैखिक (linear) है ।

विश्रान्ति काल को हम निम्न प्रकार से समझ सकते हैं । माना चालक पर से विद्युत क्षेत्र हटा दिया जाता है, तो सेमी. (9.8) में $E_x = 0$ रखने पर ।

$$\left(\frac{dv_d}{dt}\right) = \frac{-v_d}{\tau}$$

या $$\int \frac{dv_d}{v_d} = -\int \frac{dt}{\tau}$$

या $$v_d = (v_d)_0 \, e^{-t/\tau}$$

जहाँ समय t=0 पर अपवाह वेग (v_{do}) है (जिस क्षण विद्युत क्षेत्र शून्य किया? है तथा अपवाह वेग नियत मान प्राप्त कर चुका है) तथा t समय पर अपवाह वेग v_d है ।

यदि t = τ तो

$$v_d = \frac{(v_d)}{e} = 0.37(v_d)_0 \qquad ....(9.12)$$

अत: वह समय जिसमें विद्युत क्षेत्र शून्य करने पर अपवाह वेग का मान प्रारम्भिक (नियत) मान का 0.37 भाग रह जाता है विश्रान्ति काल कहते हैं । स्थायी अवस्था से (जब अपवाह वेग का मान नियत होता है) साम्यावस्था (क्षेत्र हटाने पर जब अपवाह वेग का मान शून्य अथवा जब इलेक्ट्रॉनों की गति यादृच्छिक हो जाती है) प्राप्त करने में जितना समय लगता है, विश्रान्ति काल कहते हैं । विश्रान्ति काल जितना कम होगा, उतनी शीघ्र साम्यावस्था प्राप्त होगी ।

टक्कर से पूर्व इलेक्ट्रॉन की गति को यादृच्छिक मानने पर विश्रान्ति काल को इलेक्ट्रॉनों का माध्य मुक्त काल (mean free time) संघट्ट काल मान सकते हैं । सेमी. (9.11) के

अनुसार विद्युत चालकता, विश्रान्ति काल, पर निर्भर करती है । ड्रयूड से τ की ताप पर निर्भरता गैस के अणु गति सिद्धान्त द्वारा की । ड्रयूड के अनुसार ठोस में मुक्त इलेक्ट्रॉन जो कि इलेक्ट्रॉन गैस के समान व्यवहार करते हैं, बोल्टज्मा्न सांख्यिकी का पालन करते हैं । जिसके अनुसार इलेक्ट्रॉन तब तक सीधी रेखा में गति करता है जब तक कि वह जालक के आयनों से नहीं टकराता है । इलेक्ट्रॉन द्वारा दो क्रमागत टक्करों के मध्य सरल रेखा में तय की गयी दूरी जिसे मुक्त पथ (free path) कहते हैं का मान इलेक्ट्रॉन के वर्ग माध्य मूल वेग $\bar{u}$ व माध्य मुक्त काल τ के गुणनफल के बराबर होता है

$$\lambda = \bar{u}\tau$$

यहाँ

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$$

$$\tau = \frac{\lambda}{\bar{u}} = \lambda\sqrt{\frac{m}{3k_BT}} \quad ....(9.13)$$

सेमी. (9.11) से

$$\sigma = \frac{nq^2}{m}\lambda\sqrt{\frac{m}{3k_BT}} \quad ....(9.14)$$

यदि λ का मान अन्तरापरमाणुक दूरी (interatomic spacing) की कोटि का हो तो λ ताप पर निर्भर नहीं.करता है । अत:

विद्युत चालकता

$$\alpha \propto \frac{1}{\sqrt{T}} \quad ...(9.15)$$

या प्रतिरोधकता

$$\rho \propto \sqrt{T} \quad ...(9.16)$$

अत: प्रतिरोधकता, $T^{1/2}$ के अनुक्रमानुपाती होती है जबकि प्रायोगिक रूप से प्रतिरोधकता ताप के अनुक्रमानुपाती होती है । सैद्धान्तिक व प्रयोगिक मानों के मध्य यह विसंगति ड्रयूड के सिद्धान्त में कमी को व्यक्त करती है । ड्रयूड द्वारा विश्रान्ति काल को ताप (अथवा ऊर्जा) का फलन (function) नहीं माना जाना असंगति का एक मुख्य कारण है । इसके साथ साथ द्र की ताप पर निर्भरता को न मानना भी गलत है । सोमरफील्ड द्वारा कु।। इलेक्ट्रॉनों के समूह को इलेक्ट्रॉन गैस के समान मानकर तथा फर्मी डिराक (Fermi Dirac) वितरण फलन का उपयोग कर इस विसंगति के निराकरण करने का प्रयास किया जिसका अध्ययन अगले अनुच्छेद में करेगें ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

3. ड्रयूड - लॉरेन्टज मॉडल में विद्युत चालकता की ताप पर निर्भरता किस सांखियकी द्वारा समझायी गयी है?

----

4. विश्रान्ति काल को परिभाषित कीजिये?

----

5. ड्रयूडं - लॉरेन्टज् व प्रायोगिक रूप से प्राप्त प्रतिरोधकता की ताप पर निर्भरता में क्या असमानता है?

उदाहरण 9.2 चाँदी का परमाणु भार 108 तथा घनत्व 10.5 x 10^3 किग्रा/मी^{3} है। यह मानते हुए कि चाँदी का एक परमाणु एक चालन इलेक्ट्रॉन प्रदान करता है तो चाँदी में मुक्त इलेक्ट्रॉनों की गतिशीलता व औसत मुक्त काल व अपवाह वेग ज्ञात कीजिये । यदि इसकी कमरे के ताप पर विद्युत 3.5x 10^7 ओम$^{-1}$ मी$^{-1}$ तथा विद्युत क्षेत्र की तीव्रता 100 वॉल्ट/मी है।

हल : दिया हुआ है :

विद्युत क्षेत्र की तीव्रता =100 वोल्ट/मी

परमाणु भार M = 108

घनत्व d = 10.5x 10^3 किग्रा/मी^{2}

ऊष्मा चालकता σ =3.5 x 10^7 ओम$^{-1}$ मी$^{-1}$

हम जानते हैं अवोगाद्रो संख्या N=6.02 x 10^{-19}/केल्विन मोल

q=1.6x10^{-19} कुलॉम

m=9.1x10^{-31}किग्रा

$\therefore$पदार्थ के एकांक आयतन में परमाणुओं की संख्या

$$n=\left[\frac{d\times N}{M}\right]$$

$$=\frac{10.5\times10^3\times6.02\times10^{23}}{108}$$

= 5.85 x 10^{25} /मी^{3}

इलेक्ट्रॉनों की गतिशीलता $\mu=\frac{\sigma}{nq}$

$$=\frac{3.5\times10^7}{5.85\times10^{28}\times1.6\times10^{-19}}$$

= 3.74 x 10^{-3} मी^{2} /वोल्ट से$^{-1}$

औसत मुक्त काल $\tau=\frac{m\mu}{q}$

$$=\frac{9.1\times10^{-31}\times3.74\times10^{-3}}{1.6\times10^{-19}}$$

=2.125 x 10^{-14} सेकेंड

अपवाह वेग $v_d = \mu E$

$= 3.74 \times 10^{-3} \times 100$

$= 0.374$ मी / सेकन्ड

9.4 सोमरफील्ड का विद्युत चालकता का सिद्धान्त (Sommerfield theory of electrical conductivity)

हमने पिछले अनुच्छेद में ड्रयूड- लॉरेन्टज् के विद्युत चालकता के सिद्धान्त का अध्ययन किया जिसमें धातुओं के मुक्त इलेक्ट्रॉनों को इलेक्ट्रॉन गैस के अनुरूप माना तथा विश्रान्ति काल को ताप (अथवा ऊर्जा) तथा उसकी दिशा पर निर्भर नहीं माना । सोमरफील्ड ने विद्युत चालकता के सिद्धान्त को ड्रयूड- लारेन्टज् के समान धातुओं के मुक्त इलेक्ट्रानों को इलेक्ट्रॉन गैस के समान मानकर फर्मी डिरॉक (Fermi Dirac) सांख्यिकी को प्रयुक्त किया । इस सिद्धान्त में विश्रान्ति काल को इलेक्ट्रॉन की उर्जा का फलन (दिशा का नहीं) माना गया ।

जब इलेक्ट्रॉन पर विद्युत क्षेत्र आरोपित किया जाता है तो निकाय के फर्मी डिरॉक के वितरण फलन (जो कि प्रति क्वान्टम अवस्था (state) में इलेक्ट्रॉन की संख्या की प्रायिकता को प्रदर्शित करता है) में परिवर्तन होता है ।

इस परिवर्तन का मान ज्ञात करने के लिये बोल्टजमान् ने पृष्ठ विमीय (six dimensional) कला -आकाश (phase space) की कल्पना की । इस आकाश में स्थित बिंदु के तीन स्थिति निर्देशांक (x, y,z) तथा तीन संवेग निर्देशांक p_x, p_y, p_z) होते हैं तथा फलन f इन छः निर्देशाकों का फलन होता है ।

$$f=f\,(x,y,z\ p_x,\ p_y,\ p_z)$$

क्षेत्र की उपस्थिति में अपवाह वेग के कारण वितरण फलन में परिवर्तन की दर को निम्न प्रकार से प्रदर्शित कर सकते हैं

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{क्षेत्र}} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{-dx}{dt}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{-dy}{dt}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{-dz}{dt}\right)$$

$$+\frac{\partial f}{\partial p_x}\left(\frac{-dp_x}{dt}\right)+\frac{\partial f}{\partial p_y}\left(\frac{-dp_y}{dt}\right)+\frac{\partial f}{\partial p_z}\left(\frac{-dp_z}{dt}\right)$$

(इलेक्ट्रॉनक की -गति विद्युत क्षेत्र E के विपरीत दिशा मे होने के कारण dx, dy, dz dp_x, dp_y, dp_z को ऋणात्मक (negative) लिया गया है)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{क्षेत्र}} = -\left(v_x\frac{\partial f}{\partial x}+v_y\frac{\partial f}{\partial y}+v_z\frac{\partial f}{\partial z}\right)-\left(F_x\frac{\partial f}{\partial p_x}+F_y\frac{\partial f}{\partial p_y}+F_z\frac{\partial f}{\partial p_z}\right) \quad ..(9.17)$$

या
$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{क्षेत्र}} = -\vec{v}\vec{\nabla}_r f - \vec{F}\vec{\nabla}_p f \quad ...(9.18)$$

इलेक्ट्रॉनों के जालक आयनों से टक्करों के कारण फलन में परिवर्तन का मान

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{टक्कर}} = \left(\frac{f - f_0}{\tau}\right) \quad ....(9.19)$$

के बराबर होता है । यहाँ f_0 व f क्रमश: साम्यावस्था व स्थायी अवस्था में फर्मीन्डिराक वितरण फलन हैं तथा τ विश्रान्ति काल या संघट्ट काल (collision period) है जिसके पश्चात् फलन f, f_0 के बराबर हो जाता है ।

वितरण फलन में कुल परिवर्तन

$$\left(\frac{df}{dt}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{क्षेत्र}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{टक्कर}} \quad ...(9.20)$$

परन्तु स्थायी अवस्था में $\frac{df}{dt}=0$

अत: स्थायी अवस्था में सेमी.. (9.20) से

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{क्षेत्र}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{टक्कर}} = 0 \quad ...(9.21)$$

इस सेमी. (9.21) में सेमी. (9.18) व (9.19) मान रखने पर

$$\vec{v}\vec{\nabla}_r f + \vec{F}\vec{\nabla}_p f = -\left(\frac{f - f_0}{\tau}\right)$$

विद्युत क्षेत्र E में इलेक्ट्रॉन पर लगने वाले बल का मान $\vec{F}=-q\bar{E}$

$$\vec{v}.\vec{\nabla}_r f - q\vec{E}.\vec{\nabla}_p f = -\left(\frac{f - f_0}{\tau}\right) \quad ....(9.22)$$

इस सेमी.करण को बोल्टजमान् अभिगमन (transport) सेमी.करण कहते हैं । इस सेमी.करण की सहायता से हम विद्युत चालकता का मान ज्ञात कर सकते हैं ।

माना संमागी (homogenous) पदार्थ पर नियत ताप पर x- दिशा में विद्युत क्षेत्र E_x आरोपित करते हैं इसलिये

$$\vec{E} = i\hat{E}_x$$

तथा विश्रान्ति काल, ऊर्जा E का फलन है, अर्थात्

$$\tau = \tau(E)$$

स्थायी अवस्था में $\nabla_r f=0$ क्योंकि f का मान सभी स्थानों पर समान रहता है, अत: स्थायी अवस्था में बोल्टजमान् सेमी.करण को निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

$$f - f_0 = qE_x\tau\frac{\partial f}{\partial p_x} \quad ...(9.23)$$

यदि आरोपित क्षेत्र E_x का मान अल्प हो तो f व f_0 में अन्तर भी अल्प होता है इसलिये उपरोक्त में सेमी.करण $\frac{\partial f}{\partial p_x}$ के स्थान पर $\frac{\partial f_0}{\partial p_x}$ लिख सकते हैं ।

अत:

$$f - f_0 = \tau q E_x \frac{\partial f_0}{\partial p_x} \qquad ...(9.24)$$

हम जानते हैं कि कला आकाश में स्थित अल्पांश (element) का आयतन $dxdydzdp_x dp_y dp_z$ बराबर होता है तथा कोष्ठिका (cell) अथवा क्वान्टम अवस्था (quantum state) का आयतन h^3 की कोटि का होता है । अत: इस अल्पांश में क्यान्टम अवस्थाओं की संख्या (चक्रण (spin) को ध्यान में रखते हुए)

$$= \frac{2}{h^3} dxdydzdp_x dp_y dp_z$$

के बराबर होगी अर्थात् इस आयतन में क्यान्टम अवस्थाओं का संख्या घनत्व (एकांक स्थिति अल्पांश के

आयतन में अवस्थाओं की संख्या) $= \frac{2}{h^3} dp_x dp_y dp_z$ होगा ।

इसलिये साम्यावस्था में संवेग अल्पांश $dp_x dp_y dp_z$ में इन क्यान्टम अवस्थाओं में इलेक्ट्रॉन घनत्व, क्यान्टम अवस्थाओं की संख्या घनत्व (number density) तथा प्रत्येक अवस्था में इलेक्ट्रॉनों की संख्या (f_0) के गुणनफल के बराबर होगी । अत: साम्यावस्था में क्यान्टम अवस्थाओं में इलेक्ट्रॉन घनत्व

$$= \frac{2}{h^3} dp_x dp_y dp_z . f_0$$

इसी प्रकार स्थायी अवस्था में संवेग अल्पांश में क्वान्टम अवस्थाओं में इलेक्ट्रॉन घनत्व

$$= \frac{2}{h^3} dp_x dp_y dp_z . f$$

अत: अल्पांश $dp_x dp_y dp_z$ में प्रवाहित आवेश घनत्व

$$n = \frac{-2}{h^3} (f - f_0) dp_x dp_y dp_z \qquad ...(9.25)$$

विद्युत क्षेत्र को x- दिशा में आरोपित करने पर इलेक्ट्रॉन v_x वेग से x-दिशा गति करेगें इसलिये x- दिशा में पूर्ण संवेग आकाश में धारा घनत्व

$$J_x = \frac{-2q}{mh^3} \iiint p_x [f - f_0] dp_x dp_y dp_z$$

$$J_x = -qnv_x = \frac{-qnv_x}{m}$$

समी. (9.24) से ($f - f_0$) का मान रखने पर

$$J_x = \frac{-2q^2}{mh^3} E_x \iiint \tau \frac{\partial f_0}{\partial p_x} p_x dp_x dp_y dp_z \qquad ....(9.26)$$

हम जानते हैं $\quad dp_x dp_y dp_z = 4\pi p^2 dp$

तथा $\quad p^2 = p^2{}_x + p^2{}_y + p^2{}_z$

$$pdp = p_x dp_x$$

अत: समी.. (9.26) से

$$J_x = \frac{-2q^2 E_x}{mh^3} \int_0^\infty \tau \frac{\partial f_0}{p \partial p} p_x \cdot 4\pi p^2 dp$$

$$J_x = \frac{-8q^2 E_x}{mh^3} \int_0^\infty \tau \frac{\partial f_0}{\partial p} p^2 \cdot_x pdp$$

इसी प्रकार? व 2 दिशा मे घारा घनत्व j_y व j_x को भी निम्न प्रकार से सकते हैं । अत: कुल माध्य धारा घनत्व)

$$J = \frac{1}{3}\left(J_x + J_y + J_z\right)$$

$$= \frac{-8q^2 E_x}{3mh^3} \int_0^\infty \tau \frac{\partial f_0}{\partial p} p^3 dp \qquad \text{....(9.27)}$$

यदि इलेक्ट्रॉनों की गतिज (kinetic) ऊर्जा $E = \frac{p^2}{2m}$ है तो

$p = \sqrt{2mE}$ तथा $\partial E = \frac{p \partial p}{m}$ समी.. (9.27) में रखने पर

$$J = \frac{-8\pi q^2 E_x}{3mh^3} \int_0^\infty \tau \frac{\partial f_0}{\partial E} (2mE)^{\frac{3}{2}} dE \qquad \text{....(9.28)}$$

समाकलन में राशि $\frac{\partial f_0}{\partial E}$ का मान (f_0 का E के साथ परिवर्तन) चित्र 9.1 अनुसार फर्मी तल के आसपास दी अल्प परास ($k_B T$) में पाया जाता है इसलिये समाकलन में राशि $E^{3/2}\tau(E)$ को फर्मी तल (Fermi surface) पर राशि $E_F{}^{3/2}\tau(E_F)$ द्वारा प्रतिस्थापित (replace) कर सकते हैं तथा समाकलन के बाहर निकाल सकते हैं । अत:

$$J_x = \frac{-16\pi q^2 \sqrt{2m}}{3h^3} E_x E_F{}^{3/2} \tau(E_F) \int_0^\infty \frac{\partial f_0}{\partial E} dE$$

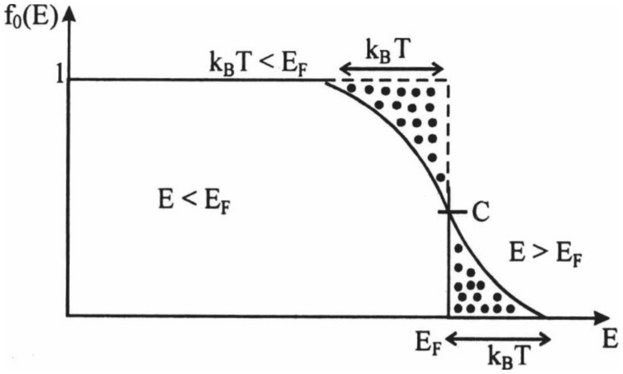
यहाँ $\int_0^\infty \frac{\partial f_0}{\partial E} dE = -1$

तथा $E_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3}$ रखने पर

$$J_x = \frac{nq^2 \tau(E_F)}{m} E_x \qquad \text{....(9.29)}$$

समी.. (9.29) के अनुसार विद्युत चालकता में यद्यपि सभी मुक्त इलेक्ट्रानों (n) का योगदान होता है परन्तु विश्रान्ति काल में उन्हीं.इलेक्ट्रॉनों का योगदान होता है जो कि फर्मी तेल

पर उपस्थित होते हैं । (जबकि ड्रयूड़ - लॉरेन्टज़ सिद्धान्त में विद्युत चालकता में विश्रान्ति काल τ में सभी चालन इलेक्ट्रॉनों का योगदान होता है) । इस कारण फर्मी वक्र (curve) का केवल वही भाग जो E_F हल्के निकट होता है, क्षेत्र के प्रभाव में विचलित (deviated) होता है ।



चित्र 9.1

विद्युत चालकता की ताप पर निर्भरता सोमरफील्ड मॉडल द्वारा निम्न प्रकार से समझायी जा सकती है । फर्मी तल (Fermi level) पर स्थित इलेक्ट्रॉनों की उर्जा E_F नियत होती है अत: उनके v_f भी नियत होगें । फर्मी तल पर स्थित इलेक्ट्रॉनों का माध्य मुक्तपथ

$$\lambda_f = v_p \tau(E_F)$$

सेमी.. (9.29) से विद्युत चालकता

$$\sigma = \frac{nq^2\lambda_f}{mv_f} \quad (\text{क्योंकि } \sigma = \frac{J_x}{E_x})$$

या $\sigma \propto \lambda_f$

हम जानते हैं कि जालक - इलेक्ट्रॉन टक्करों में इलेक्ट्रॉनों का माध्य पथ ताप के व्युतक्रमानुपाती होता हैं, अर्थात् विद्युत चालकता

$$\sigma \propto \frac{1}{T}$$

तथा प्रतिरोधकता $(\rho) = \frac{1}{\sigma} \propto T$

जो कि प्रायोगिक निष्कर्ष (result) के अनुरूप (similar) है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

6. विद्युत चालकता के ड्रयूड-लॉरेन्टज व सोमरफील्ड सिद्धान्त में क्या है?

----

7. सोमरफील्ड द्वारा विद्युत चालकता का सूत्र व्युत्पन्न करने के लिये कौन सी सांख्यिकी प्रयुक्त की गयी

उदाहरण 9.3 यदि ताँबे की फर्मी उर्जा 6.2 eV तथा मुक्त इलेक्ट्रॉन घनत्व 5 X 10^{28} चालकता 2 x 10^8 ओम$^{-1}$ मी$^{-1}$ है तो इलेक्ट्रॉनों का विश्रान्ति काल व माध्य मुक्त पथ ज्ञात कीजिये (m=9.1 x 10^{31} किग्रा)

हल : दिया हुआ है :

$$E_F = 6.2eV = 6.2\times1.6\times10^{-19} \text{ जूल}$$

$$n = 5\times10^{28} \text{ प्रति मी}^3$$

$$\sigma = 2\times10^8 \text{ म्हो / मी}$$

विश्रान्ति काल

$$\tau(E_F) = \frac{m\sigma}{nq^2}$$

प्रति मी तथा विद्युत कीजिये

$$= \frac{9.1\times10^{31}\times2\times10^8}{5\times10^{28}\left(1.6\times10^{-19}\right)}$$

=1.42 x 10^{-31} सेकंड

फर्मी पृष्ठ पर वेग

$$v_f = \sqrt{\frac{2E_F}{m}}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2\times2\times6.2\times1.6\times10^{-19}}{9.1\times10^{31}}}$$

=1.48 x 10^6 मी / सेकण्ड

माध्य मुक्त पथ

$$\lambda = \tau(E_F)v_f$$

$$=1.42\times10^{-13}\times1.48\times10^6$$

$$=2.102\times10^{-7}$$

=2102 A°

9.5 वीडमा - फ्रेन्ज का नियम (Wiedemann -Franz law)

हम जानते है कि धातुओं में विद्युत क्षेत्र आरोपित करने पर विद्युत आवेश का अभिगमन होता है तथा ताप प्रवणता होने पर ऊष्मा का अभिगमन होता है, अत: धातुओं में विद्युत व ऊष्मीयचालकताओं में कुछ परस्पर संबंध (relation) होना चाहिये ।

हम जानते हैं कि ऊष्मा चालकता का मान

$$K = \frac{\pi^3}{3}\frac{Nk^2{}_B}{m}\tau_F T \qquad \text{....(9.32)}$$

तथा विद्युत चालकता का मान

$$\sigma = \frac{nq^2}{m}\tau_F \qquad ...(9.33)$$

अत:

$$\frac{K}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k_B}{q}\right)^2 \qquad .....(9.34)$$

यहां $\frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k^2{}_B}{q^2}\right)$ को लॉरेन्स संख्या (Lorentz number) कहते हैं जो कि m, n व τ_f पर निर्भर नहीं करती है, अत: धातुओं के लिये इसका मान समान होता है । इसका मान

$$L = \frac{(3.14)^2 \times \left(1.38\times10^{-23}\right)^2}{3\times\left(1.6\times10^{-19}\right)}$$

=2.45 वाट ओम/केल्विन^2

होता है । साधारण ताप पर शुद्ध धातुओं के सैद्धान्तिक व प्रायोगिक मानों में समानता पायी जाती है । इसलिये सेमी.. (9.34) के अनुसार सभी धातुओं के लिये ऊष्मा चालकता व विद्युत चालकता का अनुपात ताप के अनुक्रमानुपाती होता है अथवा दिये गये ताप पर सभी धातुओं के लिये ऊष्मीय व विद्युत चालकता का अनुपात समान होता है उसे वीडमा - फ्रेन्क्र का नियम कहते हैं । (यह निष्कर्ष ठोसों के सिद्धान्त में एक विशेष महत्व रखता है) इस नियमानुसार अच्छे (good) विद्युत चालक अच्छे ऊष्मीय (thermal) चालक भी होते हैं ।

परन्तु न्यून ताप पर L का मान प्रायोगिक रूप से प्राप्त मान से कम होता है क्योंकि न्यून ताप पर $(T \le \theta_D)$ ऊष्मा व विद्युत चालन में विभिन्न संघट्ट निहित रहते हैं इसलिये दोनों के विश्रान्ति काल के मान समान नहीं होते हैं । न्यूनताणें पर ऊष्मीय उर्जा का अभिगमन इलेक्ट्रॉन के साथ साथ फोनाँन (Phonon) द्वारा भी होता τ_{ph} व τ_{el} के मान समान नहीं होते। $\frac{\tau_{ph}}{\tau_{el}}$ का मान न्यूनतापों पर कम हो जाता है परन्तु सामान्य ताप पर इनका अनुपात लगभग एक होता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

8. वीडमा-फ्रेन्ज का नियम क्या है?

----

9. वीडमा-फ्रेन्ज नियम का क्या महत्व है?

उदाहरण 9.4 27^0 C ताप पर 0.9 मीटर लम्बे तथा 0.2 मिमी त्रिज्या वाले तार का प्रतिरोध 0.1 ओम है यदि इसी ताप पर ताँबे की ऊष्मा चालकता 300 वॉट मी$^{-1}$ केल्विन$^{-1}$ हो तो लॉरेन्ज संख्या का मान ज्ञात कीजिये ।

हल : दिया हुआ है

तार की लम्बाई l= 0.9 मी

त्रिज्या r=0.2 x 10^{-3} मी.

प्रतिरोध R=0.1 ओम

ऊष्मा चालकता K = 300 वाट/ मी केल्विन

ताप T= 27^0C = 300 K

लोरन्ज संख्या $$L = \frac{K}{\sigma T}$$

तथा $$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{l}{R\pi r^2}$$

अतः $$L = \frac{KR\pi r^2}{lT}$$

$$= \frac{300 \times 0.1 \times 3.14 \left(0.2 \times 10^{-3}\right)^2}{1.6 \times 10^{-19}}$$

=1.39x10^{-8} वाट ओम केल्विन^{2}

9.6 इलेक्ट्रानिकी विशिष्ट ऊष्मा (Electranic specific heat)

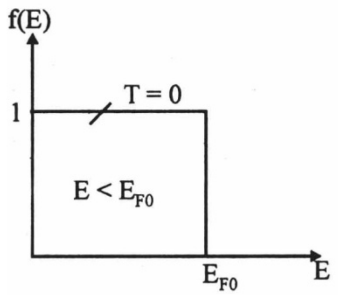
हम जानते हैं कि धातुओं में मुक्त इलेक्ट्रॉनों की संख्या 10^{22}प्रति सेमी^{3} की कोटि की होती है तथा ये मुक्त इलेक्ट्रॉन धातु में इलेक्ट्रान गैस के समान माने जा सकते हैं ।

चिरसम्मत यांत्रिकी (classical mechanics) के अनुसार धातु का प्रत्येक मुक्त इलेक्ट्रॉन एक इलेक्ट्रॉन गैस के एक-परमाणुक अणु की भाँति होता है जिसकी स्थानान्तरण (translational) गति की तीन स्वातंत्रय कोटियों से सम्बद्ध उर्जा का मान $3 \times \frac{1}{2} k_B T$ होता है । यदि ठोस में N स्वतंत्र इलेक्ट्रॉन हो तो ठोस के इलेक्ट्रॉनों के कारण विशिष्ट ऊष्मा का मान $(C_V)_{el} = \frac{3}{2} N k_B = \frac{3}{2} R$ होता है अर्थात् ताप पर निर्भर नहीं करता है । परन्तु प्रायोगिक रूप से निम्न (low) तापों पर विशिष्ट ऊष्मा का मान ताप के अनुक्रमानुमाती होता है । इस विसंगति को क्यान्टम यांत्रिकी द्‌वारा समझाया जा सकता है । हम जानते हैं इलेक्ट्रॉन फर्मी-डिराक सांख्यिकी का पालन करते हैं इसलिये इलेक्ट्रॉनिक विशिष्ट ऊष्मा के सूत्र को व्युत्पन्न करने के लिये हम फर्मी डिराक वितरण फलन जो कि प्रति उर्जा अवस्था में इलेक्ट्रॉनों की संख्या को प्रदर्शित करता है, को काम में लाते हैं । इस फलन को निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं

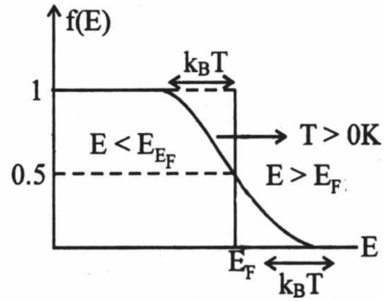
$$f(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right) - 1} \qquad ...(9.35)$$

जहाँ E_F, ताप T k पर फर्मी तल की उर्जा है । T=0 व $T \neq 0$ के लिये फर्मी फलन को चित्र 9.2 व

चित्र 9.3 द्वारा प्रदर्शित कर सकते है :-



चित्र 9.2



चित्र 9.2

ताप T=0 पर

$$f(E)=1 \text{ जब } E<E_{F0}$$

$$f(E)=0 \text{ जब } E>E_{F0}$$

जो कि यह प्रदर्शित करता है कि ताप T=0K पर फर्मी ऊर्जा से कम ऊर्जा के सभी स्तर रिक्त (empty) है तथा E_{FO} ऊर्जा का ताप 0K पर वह महत्तम मान है जिसके संगत उर्जा स्तर भरे हुए हैं । फर्मी ऊर्जा कहलाती है।

किसी अन्य ताप ($T \neq 0$) पर फर्मी उर्जा वह उर्जा है जिसके संगत f(E) का मान $\frac{1}{2}$ होता है ।

सैद्धान्तिक व प्रायोगिक निष्कर्षो में असमानता ऊष्मीय उर्जा का अवशोषण करने वाले परमाणुओं की कारण होती है क्योंकि जब ठोस का ताप 0K से T K के मध्य बढ़ाया जाता है तो केवल वे ही मुक्त ऊष्मीय रूप से उत्तेजित होते हैं जिनकी उर्जा E_f से $k_B T$ परास में पायी जाती हैं (क्योंकि इसी ताप परास स्तर रिक्त होते हैं) और ये ही मुक्त इलेक्ट्रॉन धातु की विशिष्ट ऊष्मा में योगदान (contribution) देते हैं ।

फर्मी डिरॉक वितरण के नियमानुसार उर्जा परास

E व E+dE में इलेक्ट्रॉनों की संख्या

$$n(E)dE = \frac{g(E)dE}{\exp\left(\frac{E-E_F}{k_B T}\right)-1} \qquad ...(9.36)$$

होती है, जहाँ g(E)dE इस उर्जा परास में क्वांटुमक्याटम अवस्थाओं की संख्या है । जिसका मान

$$g(E)dE = \frac{V.4\pi 2m}{h^3} E\sqrt{\frac{m}{2E}}dE$$

$$g(p)dp = V4\pi p^2 \frac{dp}{h^3} \quad (\because p^2 = 2mE \text{ तथा } 2p.dp = 2m.dE)$$

के बराबर होता है । 0K ताप पर फर्मी उर्जा का मान

$$E_{F0} = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{\frac{3}{2}}$$ यहाँ V इलेक्ट्रॉन गैस का आयतन है ।

अत: $$g(E)dE = \frac{3}{2}N\frac{E^{1/2}}{E^{3/2}_{FO}} \text{ यदि } E \le E_F \quad ...(9.37)$$

तथा $$n(E)dE = \frac{3}{2}\frac{NE^{1/2}}{E^{3/2}_{FO}}f(E) \quad ...(9.38)$$

इलेक्ट्रॉन गैस की माध्य उर्जा

$$\bar{E} = \frac{3}{2E^{3/2}_{FO}}\int_0^\infty E^{1/2}f(E)dE \quad ....(9.39)$$

f(E) का मान रखकर गणना करने के बाद माध्य उर्जा का मान

$$\bar{E} = \frac{3}{5}E_{FO}\left[1+\frac{5}{12}\left(\frac{\pi k_B T}{E_{FO}}\right)^2\right]$$

प्राप्त होता है । जिससे इलेक्ट्रॉनिक विशिष्ट ऊष्मा का मान

$$(C_V)_{el} = N\frac{d\bar{E}}{dT}$$

$$= \frac{3N}{5}E_{FO}\frac{5}{12}2T\left(\frac{\pi k_B}{E_{FO}}\right)^2$$

$$= \frac{N\pi^2 k^2_B T}{2E_{FO}} \quad ....(9.40)$$

यदि E_{FO} उर्जा के संगत ताप T_f, हो तो सेमी.. (9.40) में $E_{FO} = k_B T_F$ रखने पर

$$(C_V)_{el} = \frac{\pi^2}{2}R\frac{T}{T_F} \text{ जहां } Nk_B = R \quad ...(9.41)$$

अत: न्यून तापों पर इलेक्ट्रॉनिक विशिष्ट ऊष्मा $(C_V)_{el}$ ताप T के रैखिक (linearly) रूप से परिवर्तित होती है । सामान्य ताप (कमरे के ताप) पर $T << T_F$ तो $(C_V)_{el}$ का चिरसम्मत मान 3/2 Nk_B से बहुत कम होता है इसलिये इलेक्ट्रॉनिक विशिष्ट ऊष्मा का कमरे के ताप पर ठोस की कुल विशिष्ट ऊभा में केवल 1% योगदान ही होता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

10. ठोस का ताप बढ़ाने पर वे ही इलेक्ट्रॉन जिनकी उर्जा E_F से $k_B T$दो परास में होती हैं धातु की विशिष्ट ऊष्मा में योगदान क्यों देते हैं?

11.	चिरसम्मत यांत्रिकी व क्वान्टम यांत्रिकी द्वारा प्राप्त इलेक्ट्रॉनिकी विशिष्ट ऊष्माओं में क्या सम्बन्ध है? -- --	

उदाहरण 9.5 ताँबे की फर्मी उर्जा 13.8 eV है । 127^0C ताप पर इलेक्ट्रानिकी विशिष्ट ऊष्मा ज्ञात कीजिये ।

हल : दिया हुआ है.

$E_F = 1.38 \times 1.6 \times 10^{-19}$ जूल

$T = 127^0C = 400$ केल्विन

फर्मी ताप $\left(T_F = \dfrac{E_F}{k_B}\right)$

$$= \frac{13.8 \times 1.6 \times 10^{-19}}{13.8 \times 10^{-23}}$$

$= 1.6 \times 10^{-5}$ केल्विन

तथा विशिष्ट ऊष्मा $\left(C_V\right)_{el} = \dfrac{\pi^2 RT}{2T_F}$

$$= \frac{(3.14)^2 \times 8.32 \times 400}{2 \times 1.6 \times 10^{-5}}$$

=10.254 जूल/किलो मोल-केल्विन

9.7 सारांश (Summary)

- चालक पर विद्युत क्षेत्र आरोपित करने पर उसमें से प्रवाहित धारा घनत्व (1) विद्युत क्षेत्र (8) के अनुक्रमानुपाती होता है :

  $$\backslash J \propto E$$

  $$J = \sigma E$$

  यहां σ को पदार्थ की विद्युत चालकता कहते हैं तथा इसके व्युत्क्रम को प्रतिरोधकता कहते हैं ।
- चालक पर विद्युत क्षेत्र लगाने पर उसके मुक्त इलेक्ट्रॉनों के औसत वेग को अपवाह वेग कहते है।
- अपवाह वेग व पदार्थ पर आरोपित विद्युत क्षेत्र की तीव्रता के अनुपात को गतिशीलता कहते हैं ।
- ड्रयूड-लॉरेन्टज़् का विद्युत चालकता का सिद्धान्त इलेक्ट्रॉन गैस मॉडल व मैक्सवैल बोल्जमान सांख्यिकी पर आधारित है ।
- इलेक्ट्रॉन द्वारा स्थायी अवस्था से साम्यावस्था प्राप्त करने में जितना समय लगता है, विश्रान्ति काल कहते हैं ।

- ड्रयूड-लॉरेन्टज् मॉडल द्वारा प्राप्त विद्युत चालकता ताप के वर्गमूल के व्युतक्रमानुपाती होती है जब कि प्रायोगिक रूप से ताप के व्युतक्रमानुपाती होती है ।
- सोमरफील्ड का विद्युत चालकता का सिद्धान्त इलेक्ट्रॉन गैस मॉडल व- फर्मी डिराक सांख्यिकी पर आधारित है । इस सिद्धान्त में विश्रान्ति काल ऊर्जा का फलन है ।
- सोमरफील्ड द्वारा प्राप्त विद्युत चालकता प्रयोगों के अनुरूप ताप के व्युतक्रमानुपाती होती है ।
- सामान्य ताप पर सभी धातुओं के लिये ऊष्मा चालकता व विद्युत चालकता का अनुपात समान होता है, जिसे वीडमा - फ्रेन्ज का नियम कहते हैं । इसका ठोसों के सिद्धान्त में विशेष महत्व है।

निम्न तापों पर इलेक्ट्रॉनिक विशिष्ट ऊष्मा का मान ताप के अनुक्रमानुपाती है क्योंकि निम्न तापों पर ठोसों को ऊष्मा देने पर केवल वे हो इलेक्ट्रॉन उत्तेजित होते हैं जिसकी ऊर्जा, E_F (फर्मी ऊर्जा) से k_BTपरास में पायी जाती है ।

9.8 शब्दावली (Glossary)

अपवाह वेग	Drift velocity
क्वान्टम अवस्था	Quantum state
कला आकाश	Phase space
गतिशीलता	Mobility
टक्कर	collision
प्रतिरोधकता	Resistivity
प्रवाह	Flow
मुक्त पथ	Free path
यादृच्छिक गति	Random motion
रैखिक	Linear
वैद्युत गुण	Electrical properties
विद्युत चालकता	Electrical conductivity
विश्रान्ति काल	Relaxation time
स्थायी अवस्था	Steady state
साम्यावस्था	Equilibrium state
सांख्यिकी	Statistics
क्षय	Loss

9.9 संदर्भ ग्रन्थ (Reerence books)

C. Kittle	Introduction to Solids State Physics	John Wiley and Sons, NewYork

S.L. Kakani and C. Hem Rajani	A Text book of Solid State Physics	Sultan Chand and sons, New Delhi.
H.C. Gupta	Solid State Physics	Vikas Publishing Pvt. Ltd. New Delhi
R.L.Singhal	Solid State Physics	Kedar Nath Ram Nath and Co. Meerut
S.S. Pillai	Solid State Physics	New age Pub. New Delhi
एस.एस.रावत	ठोस अवस्था भौतिकी	कॉलेज बुक हाऊस, जयपुर

9.10 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to self assessment questions)

1. पदार्थ में विद्युत क्षेत्र -की उपस्थिति में धारा घनत्व J विद्युत क्षेत्र (E) के अनुक्रमानुपाती होता है;

   $J \propto E$

   $J = \sigma E$

2. गतिशीलता इलेक्ट्रॉन प्रवाह में अवरोध को प्रदर्शित करती है ।
3. ड्रयूड - लॉरेन्टज़ मॉडल में विद्युत चालकता की ताप पर निर्भरता मैक्सवेल बोल्टजमान् सांख्यिकी द्वारा समझायी गयी है ।
4. विद्युत क्षेत्र हटाने पर इलेक्ट्रॉन को स्थायी अवस्था से साम्यावस्था प्राप्त करने में जितना समय लगता है, विश्रान्ति काल कहते हैं ।
5. ड्रयूड व लॉरेन्टज़् द्वारा प्राप्त प्रतिरोधकता $T^{1/2}$ के अनुक्रमानुपाती होती है जब कि प्रयोगिक रूप से T के अनुक्रमानुपाती होती है ।
6. विद्युत चालकता के दोनों सिद्धान्तों में चालकों के मुक्त इलेक्ट्रॉनों को इलेक्ट्रॉन गैस के अनुरूप माना गया है ।
7. सोमरफील्ड द्वारा विद्युत चालकता ज्ञात करने के लिये फर्मी - डिराक सांख्यिकी प्रयुक्त की गयी है
8. दिये गये ताप पर सभी धातुओं के लिये ऊष्मीय व विद्युत चालकता का अनुपात समान होता है ।
9. इस नियम का ठोसों के सिद्धान्त जैसे इलेक्ट्रॉन गैस मॉडल में विशेष महत्व है ।
10. ठोस का ताप बढ़ाने पर वे ही इलेक्ट्रॉन जिनकी ऊर्जा E_F से k_BT परास में होती है, विशिष्ट ऊष्मा में योगदान देते हैं क्योंकि इस परास से कम उर्जा वाले सभी ऊर्जा स्तर भरे हुए होते हैं इसलिये पीली अपवर्जन के नियम के अनुसार इस परास से कम ऊर्जा वाले स्तरों में इलेक्ट्रॉन उत्तेजित नहीं हो सकते
11. $(C_V)_{\text{चिरसम्मत}} = \frac{3}{2}R$

$$(C_V)_{el} = \frac{N\pi^2 k^2{}_B T}{2E_{FO}} = \frac{\pi^2}{2}\frac{RT}{T_F}$$

अतः $$(C_V)_{el} = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{T}{T_F}\right)(C_V)_{\text{चिरसम्मत}}$$

9.11 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. पदार्थ की विद्युत चालकता किस पर निर्भर करती है?
2. अपवाह वेग से आप क्या समझते है?
3. विद्युत चालकता से आपका क्या अभिप्राय है?
4. विद्युत चालकता के ड्रयूड मॉडल की असफलता का क्या कारण है '
5. ड्रयूड व सोमरफील्ड मॉडल किस सिद्धान्त पर आधारित हैं?
6. सोमर फील्ड मॉडल किस सांख्यिकी पर आधारित है?
7. न्यून तापों पर लॉरेन्टज् संख्या का मान प्रायोगिक मान से कम क्यों प्राप्त होता है?
8. वीडमा - फ्रेन्ज नियम क्या प्रदर्शित करता है?
9. इलेक्ट्रॉन की स्थायी व साम्यावस्था से आप क्या समझते है?
10. निम्न तापों पर इलेक्ट्रॉनिकी विशिष्ट ऊष्मा का मान ताप पर किस प्रकार करता है?

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

11. धातुओं में विद्युत चालकता व अपवाह वेग के संबंध को व्युत्पन्न कीजिये ।
12. धातुओं मे विद्युत चालकता से संबंधित प्रायोगिक तथ्यों का वर्णन कीजिये।
13. ड्रयूड-लॉरेन्टज़ मॉडल की सहायता से सिद्ध कीजिये विद्युत चालकता विश्रान्ति काल का रैखिक फलन है । इस मॉडल की कमियों को भी समझाइये ।
14. विश्रान्ति काल व संघट्ट काल में क्या संबंध है? धातुओं में मुक्त इलेक्ट्रॉनाँ के विश्रान्ति काल पर ताप की निर्भरता स्पष्ट कीजिये ।
15. सोमर-फील्ड सिद्धान्त की सहायता से इलेक्ट्रॉन गैस की विद्युत चालकता का सूत्र व्युत्पन्न कीजिये तथा विद्युत चालकता की ताप पर निर्भरता ज्ञात कीजिये ।
16. वीडमा-फ्रेन्ज का नियम का उल्लेख कीजिये तथा इसे व्युत्पन्न कीजिये । निम्न तापों पर लॉरेन्ज संख्या का मान प्रायोगिक मान से कम क्यों होता है? समझाइये ।
17. सिद्ध कीजिये न्यूनतापों पर इलेक्ट्रॉनिक विशिष्ट ऊष्मा ताप के अनुक्रमानुपाती होती है?

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

18. 1000 वोल्ट/मीटर के विद्युत क्षेत्र में किसी ताम्बे के प्रतिदर्श में इलेक्ट्रॉन का अपवाह वेग 5 मी/से है । इलेक्ट्रॉन की गतिशीलता व विश्रान्ति काल ज्ञात कीजिये

(**उत्तर :** 5×10^{-3}मी^{2} वोल्ट$^{-1}$ से$^{-1}$, 2.84×10^{-14}सेकन्ड)

19. ताँबे में मुक्त इलेक्ट्रॉन का विश्रान्ति काल 9.1 x 10^{-14} सेकन्ड है । 5 वोल्ट/सेमी का एक विद्युत क्षेत्र x दिशा के अनुदिश लगाया जाता है तो दो टक्करों के मध्य वेग के घटक में परिवर्तन ज्ञात कीजिये (**उत्तर :** 8 मी./से.)

20. 23^0C ताप पर ताम्बे की ऊष्मा चालकता 420 वाट $मी^{-1}$ $केल्विन^{-1}$ है यदि ताम्बे की लॉरेन्ज संख्या 2.1x10^{-8} वाट ओम $केल्विन^{-2}$ है तो इस ताप पर ताम्बे की प्रतिरोधकता ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर :** 15x10^{-8} ओम x मी.)

21. यदि सोडियम क्रिस्टल की चालकता में 2 चालन इलेक्ट्रॉन प्रति कोष्ठिका का योगदान है तो सोडियम की प्रतिरोधकता ज्ञात कीजिये । (कोष्ठिका नियतांक 6.0 $\overset{\circ}{A}$ तथा μ =8.2 x 10^{-3} $मी^2$/वोल्ट से है)

(**उत्तर :** 8.23 x 10^{-8}ओम मीटर)

इकाई-10

ठोसों का बैंड सिद्धान्त
(Band theory of Solids)

इकाई की रूपरेखा

10.0 उद्देश्य

10.1 प्रस्तावना

10.2 ब्लॉक प्रमेय

10.3 क्रॉनिग-पैनी मॉडल

10.4 इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान

10.4.1 एक, द्वि तथा त्रिविमीय क्रिस्टल जालक में इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान

10.4.2 प्रभावी द्रव्यमान की प्रकृति

10.5 ऋणात्मक द्रव्यमान का भौतिक उद्गम तथा होल की अभिधारणा

10.6 सारांश

10.7 शब्दावली

10.8 सदंर्भ ग्रन्थ

10.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

10.10 अभ्यासार्थ प्रश्न

10.0 उद्देश्य (objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप-

- इलेक्ट्रॉन की गति पर ठोसों में विद्यमान आवर्ती विभव का प्रभाव देख सकेंगे,
- ठोसों के प्रकार के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे,
- आवर्ती विभव के प्रभाव में इलेक्ट्रॉन के द्रव्यमान की व्याख्या कर सकेंगे,
- होल की अभिधारणा के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे ।

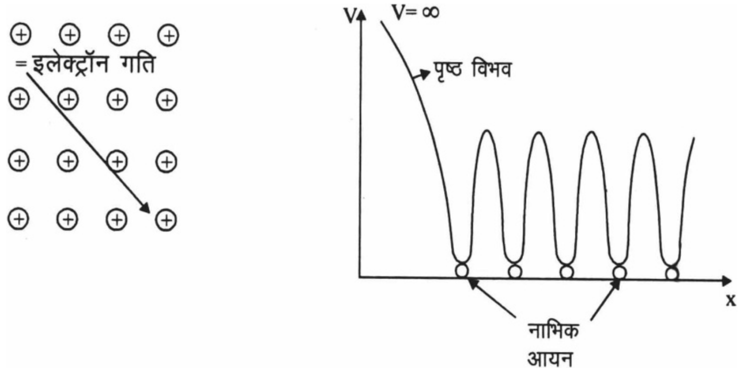
10.1 प्रस्तावना (Inroduction)

पिछली इकाइयों में आपने ठोसों के विभिन्न गुणों विशिष्ट ऊष्मा, ऊष्मा चालकता, वैद्युत चालकता इत्यादि का अध्ययन मुक्त इलेक्ट्रॉन सिद्धान्त द्वारा किया है । परन्तु यह सिद्धान्त ठोस के प्रकार चालक, कुचालक तथा अर्धचालक को समझाने में असफल रहा । यदि परमाणुओं के स्थिर आयन तथा मुक्त, इलेक्ट्रॉन के मध्य स्थिर वैद्युत आकर्षण बल के प्रभाव के कारण मुक्त इलेक्ट्रॉन की गति पर विचार करे तो ये ठोस में ऊर्जा बैण्ड का निर्माण कर देते हैं । अत: इसके आधार पर ठोसों के प्रकार को समझाया जा सकता है इसे ठोस का ऊर्जा बैण्ड सिद्धान्त कहते हैं । इसका अध्ययन आप इस इकाई में करेंगे । इसके अन्तर्गत अनुच्छेद 10.2

में ब्लॉक प्रमेय का अध्ययन करेंगे । अनुच्छेद 10.3 में ठोसों के लिए क्रॉनिग पैनी मॉडल की व्याख्या करेंगे । ठोसों में इलेक्ट्रॉन के प्रभावी द्रव्यमान का अध्ययन तथा इसकी प्रकृति की विवेचना अनुच्छेद 10.4 में करेंगे । जबकि अनुच्छेद 10.5 में ऋणात्मक द्रव्यमान के भौतिक उद्गम तथा होल की अभिधारणा के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे ।

10.2 ब्लाक प्रमेय (Bloch theorem)

मुक्त इलेक्ट्रॉन सिद्धान्त से ठोसों की वैद्युत चालकता, ऊष्मीय उत्सर्जन इत्यादि गुणों को समझाया जा सकता है । इस सिद्धान्त के अनुसार ठोसों में इलेक्ट्रॉन एक, द्वि या त्रिविमीय विभव क्षेत्र के अन्दर नियत विभव में गति करते हैं परन्तु इस सिद्धान्त से ठोसों के प्रकार (चालक, कुचालक व अर्धचालक) को नहीं समझाया जा सका । ठोसों में अन्तर समझने के लिए यह आवश्यक है कि मुक्त इलेक्ट्रॉन सिद्धान्त में क्रिस्टल के अन्दर धनात्मक आयन कोर की उपस्थिति के कारण विभव में परिवर्तन को सम्मिलित (incorporate) किया जाये । देखें चित्र 10.1 (a) । इसके लिए यह मानते हैं कि ठोस के अन्दर विभव जालक की आवर्तिता में आवर्ती होगा, जैसा कि चित्र 10.1(a) में दिखाया गया है । विभव धनात्मक आयन कोर के स्थान (site) पर न्यूनतम तथा दो आयनों के मध्य अधिकतम होता है ।



(a) **(b)**

चित्र 10.1

क्वान्टम यांत्रिकी से हम जानते हैं कि श्रोडिंजर सेमी.करण (Schrodinger equation) को हल कर ठोसों के गुणधर्मो को ज्ञात किया जा सकता है । इलेक्ट्रॉन के लिए एक विमीय श्रोडिंजर । को निम्न प्रकार लिखते हैं ।

$$\frac{d\psi}{dx^2}+\frac{m}{\hbar^2}[E-V(x)]\psi=0$$

जहाँ ψ इलेक्ट्रॉन का तरंग फलन, m इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान, E इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा, $\hbar=\frac{h}{2\pi}$ प्लांक नियतांक तथा V(x) विभव क्षेत्र है, जिसमें इलेक्ट्रॉन गतिशील है । V(x) आवर्ती विभव है इसको जालक नियतांक (a) के पद में निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$V(x)=V(x+a) \qquad ...(10.2)$$

सेमी.. (10.2) का उपयोग करने पर सेमी.. (10.1) का हल

$$\psi(x) = u_k(x)e^{ika} \quad \text{....(10.3)}$$

जहाँ $u_k(x) = u_k(x+a)$ अर्थात् $u_k(x)$ की आवर्तिता जालक की आवर्तिता के समान है, इसे जालक आवर्तिता फलन कहते हैं ।

सेमी.. (10.3) से दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि समतल तरंग का हल जालक आवर्तिता फलन $u_k(x)$ द्वारा मॉडुलित होता है । यह प्रमेय ब्लॉक प्रमेय कहलाती है । फलन $\psi(x)$ को ब्लॉक फलन कहते हैं, जो इलेक्ट्रॉन ब्लॉंक फलन का पालन करते हैं उन्हें ब्लॉंक इलेक्ट्रॉन कहते हैं । ब्लॉंक प्रमेय को निम्न प्रकार भी परिभाषित कर सकते हैं; किसी जालक में जालक नियतांक (a) के लिए जालक आवर्ती विभव V(x) = V(x + a) को सन्तुष्ट करने वाले एकल इलेक्ट्रॉन के आइगेन फलन $\psi(x)$ को एक समतल तरंग फलन तथा जालक आवर्तिता फलन $u_k(x)$ के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है ।

ब्लॉक प्रमेय की उत्पत्ति (Proof of Bloch theorem)

चूँकि सेमी.. (10.1) द्वितीय कोटि की अवकल सेमी.करण है अत: इसके दो हल f(x) से तथा g(x) वास्तविक तथा स्वतंत्र हैं इसके अतिरिक्त सभी हल को स्वतंत्र हल के रेखीय सम्मिश्रण (linear combination) के रूप में व्यक्त करते हैं ।

सेमी. (10.1) का हल

$$\psi(x) = Af(x) + Bg(x) \quad \text{...(10.4)}$$

जहाँ A तथा B दो स्वेच्छिक नियतांक हैं । चूंकि V(x) = V(x + a) अत: f(x+a) तथा g(x+a) भी श्रोडिजर सेमी.करण के हल होंगे तब

$$f(x+a) = \alpha_1 f(x) + \alpha_2 g(x)$$
$$g(x+a) = \beta_1 f(x) + \beta_2 g(x) \quad \text{...(10.5)}$$

जहाँ α_1, α_2, β_1, तथा β_2, उर्जा E के वास्तविक फलन हैं । सेमी.. (10.5) के अनुसार सेमी.. (10.1) का सामान्य हल

$$\psi(x+a) = Af(x+a) + Bg(x+a)$$

या

$$\psi(x+a) = (A\alpha_1 + B\beta_1)f(x) + (A\alpha_2 + B\beta_2)g(x) \quad \text{...(10.6)}$$

अब यदि A व B को इस प्रकार लेते हैं कि

$$A\alpha_1 + B\beta_1 = \lambda A$$

तथा

$$A\alpha_2 + B\beta_2 = \lambda B \quad \text{...(10.7)}$$

जहाँ λ एक नियतांक है ।

फलन $\psi(x)$ में निम्न गुण होना चाहिए

$$\psi(x+a) = \lambda\psi(x) \quad \text{...(10.8)}$$

सेमी.. (10.7) से A तथा B के परिमित हल प्राप्त होंगे यदि A व B के गुणकों सारणिक (determinant) का मान शून्य हो अर्थात्

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad ...(10.9)$$

सेमी.. (10.9) को हल करने पर λ में एक द्विघातीय सेमी.करण प्राप्त होती ।

$$\lambda^2 - (\alpha_1 + \beta_2)\lambda + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = 0 \quad ...(10.10)$$

परन्तु यह सिद्ध किया जा सकता है कि $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 1$, यह उत्पत्ति इस कक्षा के विस्तार के बाहर है तथा इसे आप अगली क्या में पढ़ेंगे ।

अत: सेमी.. (10.10) से

$$\lambda^2 - (\alpha_1 + \beta_2)\lambda + 1 = 0 \quad ...(10.11)$$

इस सेमी.करण के दो हल λ_1 तथा λ_2 होंगे जोकि निम्न सेमी.करण को करेंगे ।

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha_1 + \beta_2$$

तथा $$\lambda_1\lambda_2 = 1 \quad ..(10.12)$$

सेमी. (10.12) से स्पष्ट है कि λ_1तथा λ_2 परस्पर प्रतिलोम होते हैं तब λ_1 तथा λ_2 को निम्न रूप में लिया जा सकता है-

$$\lambda_1 = e^{ika}$$

तथा $$\lambda_2 = e^{-ika} \quad ...(10.13)$$

λ_1 तथा λ_2 से सम्बन्धित फलन $\psi_1(x)$ तथा $\psi_2(x)$ 2(8) निम्न गुण रखेंगे.

$$\psi_1(x+a) = e^{ika}\psi_1(x)$$

तथा $$\psi_2(x+a) = e^{-ika}\psi_2(x) \quad ...(10.14)$$

सामान्य रूप में

$$\psi(x+a) = e^{\pm ika}\psi(x) \quad ...(10.15)$$

अब ब्लॉक फलन $\psi(x) = u_k(x)e^{ika}$ में a के स्थान पर (x+a) रखने पर

$$\psi(x+a) = e^{\pm ik(x+a)}u_k(x+a)$$

$$\psi(x+a) = e^{\pm ikx}e^{\pm ika}u_k(x) \quad [\because u_k(x+a) = u_k(x)]$$

$$\psi(x+a) = e^{\pm ik(x+a)}\psi(x) \quad ...(10.16)$$

इस प्रकार सेमी.. (10.16) ब्लॉक प्रमेय को सिद्ध करती है । त्रिविमीय जालक के लिए ब्लॉक प्रमेय

$$\psi_k(\vec{r}) = e^{i\vec{k}.\vec{r}}u_k(\vec{r})$$

चूंकि $(\alpha_1 + \beta_2)$, उर्जा E के फलन है अत: सेमी.. (10.11) के परिमित हल अनुमत ऊर्जा बैण्ड के तुल्य है तथा अमान्य हल वर्जित उर्जा बैण्ड के तुल्य है । इस प्रकार आवर्ती विभव क्षेत्र में इलेक्ट्रॉन की गति का ऊर्जा वर्णक्रम अनुमत तथा वर्जित ऊर्जा बैण्डों से बना होता है । इस निष्कर्ष को अगले अनुच्छेद 10.3 में समझाया गया है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

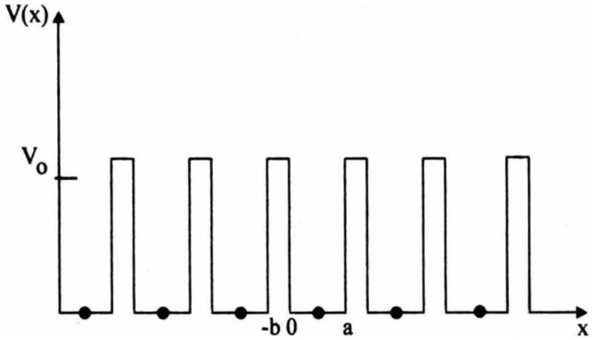
1. ब्लॉक प्रमेय को परिभाषित कीजिए ।

   ----

2. ब्लॉक इलेक्ट्रॉन किसे कहते हैं?

10.3 क्रॉनिग-पैनी मॉडल (Kroning Penny Model)

अनुच्छेद 10.2 में हमने अध्ययन किया है कि ठोसों में संयोजी इलेक्ट्रॉन आयनों के नाभिक के निकट विचरण करने के कारण इन पर विभव आवर्ती होता है । इसे ध्यान में रखते हुए क्रॉनिग-पैनी ने एकविमीय जालक ठोस में संयोजी इलेक्ट्रॉन के व्यवहार का अध्ययन किया । क्रॉनिग पैनी के अनुसार आवर्ती विभव को सरलतम् आयताकार विभव क्षेत्र के रूप में माना जा सकता है जैसा कि चित्र 10.2 में दर्शाया गया है । इस विभव क्षेत्र में $0<x<a$ झूमें विभव का मान शून्य तथा $-b < x < 0$ में विभव का मान V_0 है । इन दोनों I तथा II क्षेत्रों के संगत श्रोडिंजर सेमी.करण निम्न होगी



चित्र 10.2

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_1=0 \quad 0<x<a \text{ के लिए}$$

तथा
$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}+\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\psi_2=0 \quad -b<x<a \text{ के लिए} \qquad ...(10.17)$$

या
$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+\alpha^2\psi_1=0$$

तथा
$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}-\beta^2\psi_2=0 \quad (E<V_o) \text{ के लिए} \qquad ....(10.18)$$

जहां $\alpha^2=\frac{2mE}{\hbar^2}, \beta^2=\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-E)$ तथा m, E उर्जा से गतिशील इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान है ।

चूंकि सेमी.. (10.18) का अनुमानित हल ब्लॉक फलन के रूप में होना चाहिए इसके लिए यह आवश्यक है कि ψ तथा $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ दोनों सम्पूर्ण क्रिस्टल में सतत् हों । अत: सेमी.. (10.18) का सामान्य हल

$$\psi_1(x) = Ae^{i\alpha x} + Be^{i\alpha x}$$

तथा $\psi_2(x) = Ce^{\beta x} + De^{-\beta x}$ (E-V_0) के लिए ...(10.19)

जहाँ A, B तथा C, D क्रमश: क्षेत्र I तथा II में स्वेच्छिक नियतांक है । इनके मान तरंग फलन ψ_1 तथा पर परिसीमा तथा सांतत्य प्रतिबन्धों के उपयोग से ज्ञात कर सकते हैं ।

$$\left|\psi_1(x)\right|_{x=0} = \left|\psi_2(x)\right|_{x=0} \quad ...(10.20)$$

तथा $$\left|\frac{d\psi_1}{dx}\right|_{x=0} = \left|\frac{d\psi_2}{dx}\right|_{x=0} \quad ...(10.21)$$

$$\left|\psi_1(x)\right|_{x=a} = \left|\psi_2(x)\right|_{x=-b} \quad ...(10.22)$$

तथा $$\left|\frac{d\psi_1}{dx}\right|_{x=a} = \left|\frac{d\psi_2}{dx}\right|_{x=-b} \quad ...(10.23)$$

चूंकि विभव क्षेत्र आवर्ती जालक विभव V(x+a) =V(x) है, अत: तरंग फलन भी इसी के समान आवर्तिता दर्शाना चाहिए । इसलिये सेमी.. (10.18) का अनुमानित हल ब्लॉक फलन के रूप में ही होना चाहिए अर्थात्

$$\psi_k(x+a+b) = \psi_k(x)\exp[+ik(a+b)]$$

या $$\psi_k(x) = \psi_k(x+a+b)\exp[-ik(a+b)]$$

इस आवश्यक शर्त को सेमी.. (10.22) तथा (10.23) में x=-b, x=a पर सम्मिश्रित करने पर

$$\psi_2(-b) = \psi_1(a)\exp[-ik(a+b)] \quad ...(10.24)$$

तथा $$\left|\frac{d\psi_2}{dx}\right|_{x=-b} = \left|\frac{d\psi_1}{dx}\right|_{x=a} \exp[-ik(a+b)] \quad ...(10.25)$$

अब सेमी.. (10.19) में सेमी.. (10.20), (10.21), (10.24) तथा (10.25) से परिसीमा तथा संत्तया प्रतिबंध लगाने पर

A+B = C+D...(10.26)

$$i\alpha(A-B) = \beta(C-D) \quad ...(10.27)$$

$$Ce^{-\beta b} + De^{\beta b} = e^{-ik(a+b)}[Ae^{+i\alpha a} + B^{-i\alpha a}] \quad ..(10.28)$$

तथा $$\beta Ce^{-\beta b} - \beta De^{\beta b} = i\alpha e^{-ik(a+b)}[Ae^{+i\alpha a} - B^{-i\alpha a}] \quad ...(10.29)$$

सेमी. (10.26) - (10.29) के हल से है, A,B,C तथा D के परिमित मान प्राप्त होंगे यदि A, B, C, तथा D के गुणाको का सारणिक शून्य हो अर्थात्

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ ia & -ia & -\beta & \beta \\ -e^{ik(a+b)+i\alpha a} & -e^{ik(a+b)i\alpha a} & -e^{-\beta b} & e^{\beta b} \\ -i\alpha e^{ik(a+b)+i\alpha a} & iae-^{ik(a+b)-i\alpha a} & \beta e^{\beta b} & -\beta e^{\beta b} \end{vmatrix} = 0$$

इस सारणिक को हल.क्रूरने पर

$$\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}\right)\sin\alpha a \sin\beta\,\mathrm{h}\,b + \cos\alpha a\cos\beta\,\mathrm{h}\,b = \cos k(a+b) \quad ...(10.30)$$

सेमी. (10.30) का सरल हल प्राप्त करने के लिए क्रॉनिग-पैनी ने कल्पना की, कि जालक बिन्दु की स्थिति पर विभव शून्य तथा इनके मध्य V_0 है तथा जब $b \to 0$ तब $V_0 \to 0$ परन्तु V_{0b} का मान परिमित हो । इस धारणा के अनुसार विभव क्षेत्र एक डिराक $\delta -$ फलन के समान होता है । इस स्थिति में जालक एक सूक्ष्म चौड़ाई तथा अनन्त विभव के आवर्ती प्राचीर के समान कार्य करता है । $V_0 \to \infty$ तथा $b \to 0$ पर V_{0b} के परिमित मान को प्राचीर प्रबलता (barrier strength) कहते हैं ।

इस धारणा से $b \to 0$ के लिए।

$$\sin\beta b \to \beta b \text{ तथा } \cosh\beta b \to 1$$

सेमी. (10.30) से

$$\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}\right)\beta b\sin\alpha a + \cos\alpha a = \cos ka$$

या

$$P\frac{\sin\alpha a}{\alpha a} + \cos\alpha a = \cos ka \quad ...(10.31)$$

जहाँ

$$P = \left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}\right)ab$$

$$P = \frac{ab}{2}\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-2E)\ [\alpha,\beta \text{ के मान रखने पर}]$$

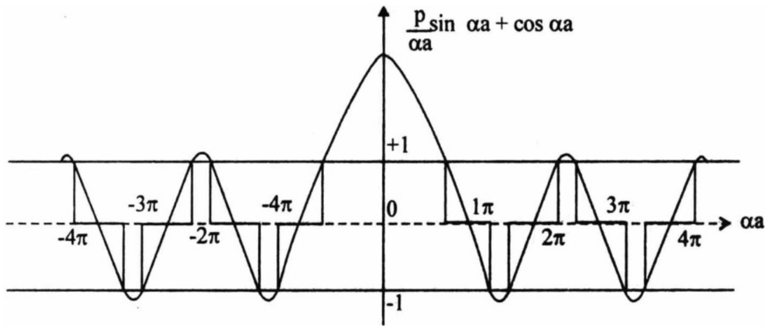
$$P = \frac{abm}{\hbar^2}(V_0-2E)$$

यदि $V_0 >> E$ हो तो

$$P = \frac{am}{\hbar^2}(V_0 b) \quad ...(10.32)$$

सेमी. (10.31) को क्रॉनिग-पैनी सेमी.करण कहते हैं । इस सेमी.करण को चित्र 10.3 द्वारा प्रदर्शित किया गया है जिसमें $\left(P = \frac{\sin\alpha a}{\alpha a} + \cos\alpha a\right)$ तथा αa में आलेख खींचा गया है । सेमी.करण बायें पद $\cos ka$ का अधिकतम् मान +1 से -1 के मध्य होता है जिसे चित्र में क्षैतिज रेखाओं द्वारा दर्शाया गयी है । अत: इस परिसीमा के कारण α या E के

केवल निश्चित मान अनुमत है जो कि सेमी.. (10.31) को सन्तुष्ट करते हैं । इस सेमी.करण से स्पष्ट है कि α या E के एक विशिष्ट मान के लिए coska का केवल एक मान हो सकता है । चूंकि coska एक सम (even) आवर्ती फलन है । अत: यदि ka का मान धनात्मक, ऋणात्मक या 2π, के गुणन में बढ़ता है तो coska का मान समान प्राप्त होगा । इस प्रकार इलेक्ट्रॉन की कुल ऊर्जा E, $2\pi / a$ के आवर्तकाल में K का आवर्ती फलन है जिसे चित्र (10.4) में E तथा k के मध्य आलेख से बताया गया है । यदि k का मान वास्तविक हो तो $|\cos \alpha a| < 1$ होना चाहिए जो कि अनुमत ऊर्जा बैण्ड के समरूप है । दूसरी ओर ऊर्जा के वे मान जिनके लिए $|\cos \alpha a| > 1$ अर्थात् k के मान काल्पनिक है, वर्जित ऊर्जा बैण्ड के समरूप है । इसे चित्र 10.4 में दर्शाया गया है ।



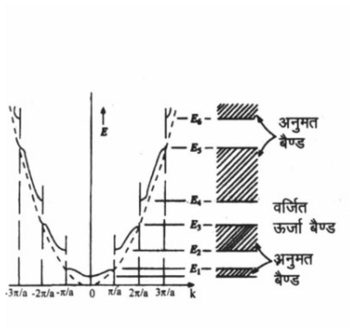
चित्र 10.3

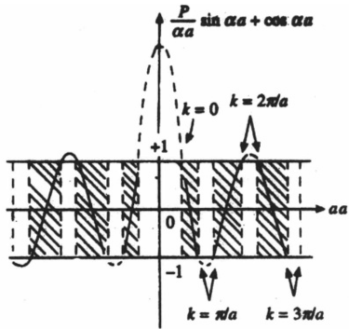
सेमी.. (10.31) के विश्लेषण से हम निम्न निष्कर्ष निकाल सकते हैं ;

(1) αa के अनुमत मानों के लिए श्रोडिंजर सेमी.करण के हल का अस्तित्व होता है जिसे चित्र 10.5 में रेखांकित भाग द्वारा दर्शाया गया है । इस प्रकार एक आवर्ती जालक में इलेक्ट्रॉन की गति अनुमत ऊर्जा बैण्डों द्वारा अभिलक्षित (characterised) होती है । ये अनुमत ऊर्जा बैण्ड ऐसे बैण्डों द्वारा पृथक होते हैं जिनमें कोई ऊर्जा स्तर नहीं होता है । इन्हें वर्जित ऊर्जा बैण्ड कहते हैं ।

(2) αa के मान में वृद्धि से अनुमत ऊर्जा बैण्ड की चौड़ाई बढ़ती है तथा वर्जित ऊर्जा बैण्ड की चौड़ाई कम होती है क्योंकि αa में वृद्धि से $P\left(\frac{\sin \alpha a}{\alpha a}\right)$ मान कम होता हैं ।

(3) हम जानते हैं कि विभव प्राचीर प्रबलता (V_{ob})का मान P पर निर्भर करता है । अत: यदि P का मान घटता है तो इसका अर्थ है कि V_{0b}, का मान भी घटेगा अर्थात इस विभव क्षेत्र में संयोजी इलेक्ट्रॉन के जालक से बंध ढीले होने लगते हैं । अब P के विभिन्न मानों के लिए सेमी.. (10.31) पर विचार करते हैं;





चित्र 10.5 **चित्र 10.5**

(a) P=0 के लिए सेमी.. (10.31) से

$$\cos\alpha a = \cos ka$$

$$\alpha = k$$

$$\therefore \frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad \text{....(10.33)}$$

ऊर्जा का यह मान मुक्त इलेक्ट्रॉन सिद्धान्त से प्राप्त ऊर्जा के मान के है । इसे चित्र 10.6 (a) मे दर्शाया गया हैं ।

(b) $P \to \infty$ के लिए सेमी.. (10.31) से

$$\sin\alpha a \to \infty$$

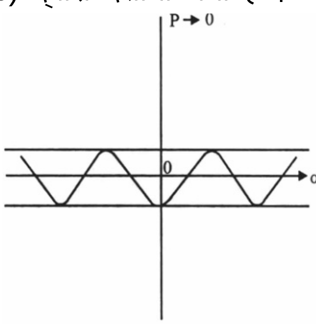
$$\therefore \alpha a = \pm n\pi$$

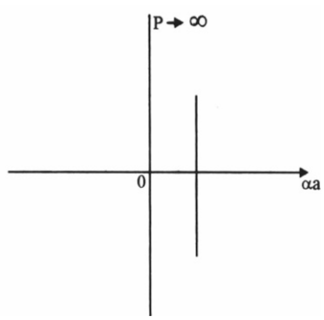
$$\alpha^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

या
$$E = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

या
$$E = \frac{\pi^2 h^2}{8ma^2} \left[\therefore \hbar = \frac{h}{2\pi}\right] \qquad \text{.....(10.34)}$$

यह परिणाम एक-विमीय विभव कक्ष में कण को विविक्त ऊर्जा स्तर के समान है । इसे चित्र 10.6(b) द्वारा दर्शाया गया है ।





चित्र 10.6 (a) **चित्र 10.6 (b)**

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

3. क्रॉनिग-पैनी मॉडल में आवर्ती विभव को किस रूप में माना गया है?

----

4. विभव प्राचीर प्रबलता किसे कहते हैं?

उदाहरण 10.1 P<< 1 के लिए क्रॉनिग-पैनी मॉडल का उपयोग करते हुऐ निम्नतर ऊर्जा बैण्ड में k=0 पर ऊर्जा का मान ज्ञात करो ।

हल : क्रॉनिग-पैनी मॉडल से प्राप्त सेमी.करण से

$$P\frac{\sin\alpha a}{\alpha a}+\cos\alpha a=\cos ka$$

$$\because k=0, \cos ka=1$$

$$\therefore P\frac{\sin\alpha a}{\alpha a}+\cos\alpha a=1$$

या $$P\frac{\sin\alpha a}{\alpha a}=1-\cos\alpha a$$

या $$\frac{P}{\alpha a}\left[2\sin\frac{\alpha a}{2}\cos\frac{\alpha a}{2}\right]=2\sin^2\frac{\alpha a}{2}$$

$\therefore$ $$\frac{P}{\alpha a}\cos\frac{\alpha a}{2}=\sin\frac{\alpha a}{2}$$

$$P=\alpha a\tan\frac{\alpha a}{2}$$

$\because P<<1$ अतः $$\tan\frac{\alpha a}{2}=\frac{\alpha a}{2}$$

$$P=\alpha a\frac{\alpha a}{2}$$

$$P=\frac{\alpha^2 a^2}{2}$$

परन्तु $$\alpha^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$$

$\therefore$ $$2P=\frac{2mE}{\hbar^2}.a^2$$

$$E=\frac{P\hbar^2}{ma^2}$$

10.4 इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान (Effective mass of electron)

जब किसी मुक्त इलेक्ट्रॉन पर विद्युत क्षेत्र ($\vec{\in}$) आरोपित करते हैं तो इलेक्ट्रॉन पर एक बल कार्य करता है जो कि आरोपित विद्युत क्षेत्र के समानुपाती होता है अर्थात्

$$\vec{F} = -e\vec{\in}$$

जहाँ e इलेक्ट्रॉन का आवेश है ।

परन्तु न्यूटन के द्वितीय नियम से हम जानते हैं कि किसी कण पर आरोपित बाह्य बल, इसके कारण उत्पन्न त्वरण तथा कण के द्रव्यमान के गुणनफल के बराबर होता है । इस प्रकार यदि इलेक्ट्रॉन पर बाह्य बल आरोपित करे तो इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान, आरोपित बाह्य बल तथा इसके कारण उत्पन्न त्वरण के अनुपात $\left(\vec{F}/\vec{a} = m\right)$ के बराबर होगा । इसे इलेक्ट्रॉन का मुक्त द्रव्यमान कहते हैं । परन्तु ठोसों में आवर्ती विभव के कारण इलेक्ट्रॉन का त्वरण मुक्त इलेक्ट्रॉन के त्वरण से भिन्न हो जाता है । इसके फलस्वरुप ठोसों में इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान उसके वास्तविक द्रव्यमान से भिन्न होता है इसे इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान कहते हैं । अब यदि ठोस में विद्युत क्षेत्र ($\vec{\in}$) आरोपित करते हैं तो इलेक्ट्रॉन पर कार्यरत कुल बल

$$\vec{F} = -e\vec{\in} + \vec{F}_1 \qquad \text{....(10.35)}$$

जहां $\vec{F}_1$ आवर्ती विभव की उपस्थिति के कारण इलेक्ट्रान पर कार्यरत बल है ।

न्यूटन के द्वितीय नियम से

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

सेमी. (10.35) से

$$m\vec{a} = -e\vec{\in} + m_1\vec{a}$$

$$m^* = (m - m_1) = \frac{-e\vec{\in}}{\vec{a}} \qquad \text{....(10.36)}$$

जहाँ $m^* = (m - m_1)$ को ठोसों में इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान कहते हैं । इलेक्ट्रॉन द्वारा अनुभव किये गये त्वरण की दिशा बल की दिशा के समान्तर या प्रतिसमान्तर हो सकती है इसलिए इलेक्ट्रॉन के प्रभावी द्रव्यमान (m^*) का मान धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है ।

10.4.1 एक द्वि तथा त्रिविमीय क्रिस्टल जालक में इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान (Effective mass of an electron in one, two and three dimensional crystal lattice)

जैसा हम जानते हैं कि मुक्त इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा निम्न सूत्र से दी जाती हैं [सेमी.. (10.33)]

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

जहाँ m मुक्त इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान तथा $\vec{k}$ तरंग सदिश है । इस सेमी.करण का k के सापेक्ष दो बार अवकलन करने पर

$$\frac{d^2E}{dk^2} = \frac{\hbar^2}{m}$$

या $$m = \frac{\hbar^2}{\left(\frac{d^2E}{dk^2}\right)}$$ ....(10.37)

यदि इलेक्ट्रॉन एकविमीय जालक क्रिस्टल के आवर्ती विभव में गतिशील है तो सेमी.. (10.37) में m के स्थान पर इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान (m^*) रखते हैं अर्थात्

$$m^* = \hbar^2 \left(\frac{d^2E}{dk^2}\right)^{-1}$$ ...(10.38)

अब हम द्वि तथा त्रिविमीय जालक क्रिस्टंल पर विचार करते हैं । चूंकि हि तथा त्रिविमीय जालक में इलेक्ट्रॉन पर कार्यरत बाह्य बल तथा इसके द्वारा उत्पन्न दोनों कीं दिशायें भिन्न-2 होती है इसके कारण इनका अनुपात द्वि-कोटि प्रदिश के रूप में प्राप्त होता है । अत: इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान भी द्वि-कोटि प्रदिश होगा ।

त्रिविमीय जालक में मुक्त इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k^2{}_x + k^2{}_y + k^2{}_z\right)$$

या $$E = \frac{\hbar^2}{2m}\vec{k}.\vec{k}$$

या $$\nabla_k \nabla_k E = \frac{\hbar^2}{m}$$

$$m = \hbar^2[\nabla_k \nabla_k E]^{-1}$$ (10.39)

अत: यदि इलेक्ट्रॉन त्रिविमीय जालक क्रिस्टल के आवर्ती विभव में गतिशील है तो इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान

$$m^* = \hbar^2[\nabla_k \nabla_k E]^{-1}$$

$$m^* = \hbar^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E}{\partial k_x{}^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_x \partial k_y} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_x \partial k_z} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial k_y \partial k_x} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_y{}^2} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_y \partial k_z} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial k_z \partial k_x} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_z \partial k_y} & \frac{\partial^2 E}{\partial k_z{}^2} \end{pmatrix}^{-1}$$ ....(10.40)

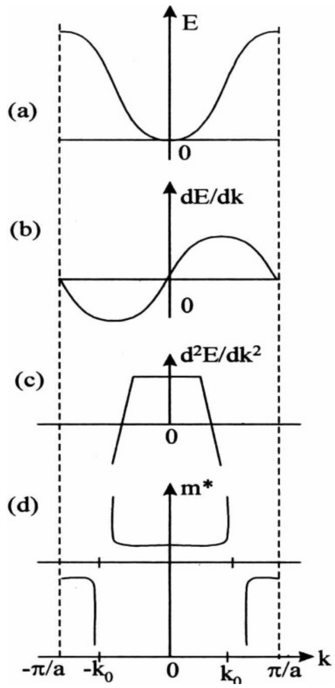
या $$(m^*)_{ij} = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial k_i \partial k_j} \right) \quad ....(10.41)$$

जहां i व j =x,y,z

इस प्रकार सेमी.. (10.41) से स्पष्ट है कि त्रिविमीय जालक क्रिस्टल के विभव में इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान द्वि-कोटि के प्रदिश के रूप में प्राप्त होता है ।

10.4.2 प्रभावी द्रव्यमान की प्रकृति (Nature of effective mass)

मुक्त इलेक्ट्रॉन मॉडल में हम जानते हैं कि ऊर्जा E तथा तरंग सदिश $\vec{k}$ के मध्य सम्बन्ध परवलय प्रकृति का होता है । यदि इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान नियत है तो $\frac{d^2E}{dk^2}$ को भी नियत मान सकते हैं । परन्तु जब इलेक्ट्रॉन जालक क्रिस्टल के आवर्ती विभव में गतिशील है तो इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा -E, k^2 के समानुपाती (परवलय प्रकृति) नहीं रहती है । E-k वक्र विभिन्न जोन सीमाओं (Zone boundaries) पर असतत होता है । E-k वक्र में जिस बिन्दु पर यह E-k सम्बंध भंग होता है उस बिन्दु को नति बिन्दु (point of inflexion) कहते हैं । इस बिन्दु पर $\frac{d^2E}{dk^2}$ का मान शून्य होता है जिसे चित्र 10.7 (a) में $k = k_0$ से दर्शाया गया है ।



चित्र 10.7

इसी प्रकार चित्र 10.7(c) में $\frac{d^2E}{dk^2}$ का k के साथ परिवर्तन दर्शाया गया है । चित्र से स्पष्ट है कि k = 0 तथा $k=\mp\frac{\pi}{a}$ पर $\frac{d^2E}{dk^2}$ का परिमाण अधिकतम् परन्तु प्रकृति विपरीत्त होती है तथा k = 0 पर $\frac{d^2E}{dk^2}=0$ होता है । हम जानते हैं कि प्रभावी द्रव्यमान m^*, $\frac{d^2E}{dk^2}$ के व्युत्क्रमानुपाती होता है । चित्र 10.7(d) में m^* तथा k के मध्य आलेख दर्शाया गया है । चित्र से स्पष्ट है कि k= 0 के निकट m^* का मान नियत तथा धनात्मक होता है क्योंकि ऊर्जा E का k में एक द्विघाती सेमी.करण (10.37) जोन के अधो स्तरों (lower levels) के निकट तक ही वैध रहता है । अब k के मान में जैसे-2 वृद्धि करते हैं तो m^* का मान नियत नहीं रहता है अर्थात् यह k के साथ बढ़ता है । $k=k_0$ पर m^* का मान अनन्त होता है क्योंकि $k=k_0$ पर $\frac{d^2E}{dk^2}$ मान शून्य होता है । $0< k< k_0$

$<k_0$अर्ध जोन में m^* का मान धनात्मक होता है अर्थात् इस स्तर पर इलेक्ट्रॉन तथा जालक के मध्य आबन्ध इतना प्रबल होता है कि बाहय बल लगाने के बावजूद भी त्वरण का मान शून्य ही रहता है । k में ओर अधिक वृद्धि करने पर $k_0<k<\frac{\pi}{a}$ क्षेत्र में m^* का मान ऋणात्मक होता है क्योंकि इस ऊपरी अर्ध ज़ोन में जालक, इलेक्ट्रॉन पर इतना प्रबल बल आरोपित करता है कि यह आरोपित बाहय बल से अधिक हो जाता है । अत: विपरीत दिशा में ऋणात्मक त्वरण उत्पन्न हो जाता है । $k=\pm\frac{\pi}{a}$ पर भी इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान ऋणात्मक ही रहता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

5. इलेक्ट्रॉन के प्रभावी द्रव्यमान को परिभाषित कीजिए ।

----

6. इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान किस पर निर्भर करता है?

उदाहरण 10.2 किसी बैण्ड में इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा E=3+5k+9k2 से दी जाती है तो इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान ज्ञात करो ।

हल : इलेक्ट्रॉन के प्रभावी द्रव्यमान के सेमी.करण से

$$m^*=\frac{\hbar^2}{\frac{d^2E}{dk^2}}$$

इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा'

$$E=3+5k+9k^2$$

$$\therefore \frac{d^2E}{dk^2}=5+18k$$

$$\frac{d^2E}{dk^2}=18$$

इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान $m^*=\frac{\hbar^2}{18}$

उदाहरण 10.3 यदि किसी सरल घनीय धातु का सहसंयोजन बैण्ड सेमी.करण $E=10^{39}k^2+A$ द्वारा व्यक्त किया जाता है तो m^*/m का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : इलेक्ट्रॉन के प्रभावी द्रव्यमान के सेमी.करण से

$$m^*=\frac{\hbar^2}{\frac{d^2E}{dk}}$$

दिया गया है $E=10^{-39}k^2+A$

$$\therefore \frac{d^2E}{dk}=2\times10^{-39}k$$

$$\therefore m^*=\frac{\hbar^2}{2\times10^{-39}}$$

$$\hbar=1.05\times10^{-34}$$

तथा $m=9.1\times10^{-31}\,kg$

$$\frac{m^*}{m}=\frac{(1.05\times10^{-34})^2}{2\times10^{-39}\times9.1\times10^{-31}}$$

$$=\frac{1.1025\times10^{-68}}{18.2\times10^{-70}}$$

$$=0.06057\times10^2$$

$$=6.057$$

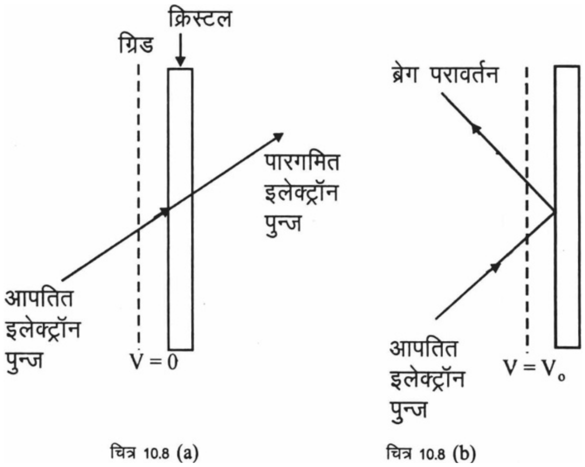
अतः $\frac{m^*}{m}$ का मान 6.057 प्राप्त होता है ।

10.5 ऋणात्मक द्रव्यमान का भौतिक उद्गम तथा होल की अभिधारणा (Physical origin of negative mass and concept of hole)

हम जानते हैं कि $k_0<k<\frac{\pi}{a}$ में इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान ऋणात्मक होता है । ऋणात्मक द्रव्यमान के भौतिक उद्गम को समझने के लिए क्रिस्टल से इलेक्ट्रॉन के विवर्तन पर

विचार करते हैं जिसमें आपतित इलेक्ट्रॉन की दिशा में विवर्तक क्रिस्टल के आगे एक सुचालक ग्रिड रखते हैं जिस पर धनात्मक या ऋणात्मक विभव आरोपित कर सकते हैं ।

अब ग्रिड को शून्य विभव पर रखते हुऐ क्रिस्टल पर इलेक्ट्रॉन आपतित कराते हैं जिसके तरंग सदिश का मान π / a से थोड़ा कम है । इलेक्ट्रॉन विवर्तक क्रिस्टल से पारगमित हो जाता है जैसा कि चित्र 10.8 (a) में दर्शाया गया है । परन्तु जब ग्रिड पर धनात्मक विभव आरोपित करते हैं तो यह विभव इलेक्ट्रॉन को त्वरित करता है जिससे तरंग सदिश k के मान में वृद्धि होती है । अब विभव मे इतनी वृद्धि करते है कि क्रिस्टल से इलेक्ट्रॉन का ब्रेग परावर्तन हो जाये [देखें चित्र 10.8(b)] इस स्थिति में क्रिस्टल द्वारा संवेग परिवर्तन अधिकतम होता है । अत: इलेक्ट्रॉन एक कण की भाँति व्यवहार करता है जिसका आदेश तथा द्रव्यमान ऋणात्मक है । इस प्रकार इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान ऋणात्मक होता है । अब यदि ग्रिड पर ऋणात्मक विभव देकर उसकी तब तक वृद्धि करें जब तक कि इलेक्ट्रॉन का क्रिस्टल से ब्रेग परावर्तन न हो जाये । इस स्थिति में भी क्रिस्टल द्वारा संवेग परिवर्तन अधिकतम होगा परन्तु इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान धनात्मक होगा ।



चित्र 10.8 (a) चित्र 10.8 (b)

पिछले अनुच्छेद 10.4 में हम देख चुके हैं कि इलेक्ट्रॉन का 'प्रभावी द्रव्यमान अधो स्तरों $0<k<k_0$ में धनात्मक तथा ऊपरी स्तरों $k_0 < k< \frac{\pi}{a}$ में ऋणात्मक होता है । चूंकि द्रव्यमान एक धनात्मक भौतिक राशि है अत: द्रव्यमान ऋणात्मक नहीं हो सकता, यह केवल एक काल्पनिक अभिधारणा है । ऊपरी स्तरों में इलेक्ट्रॉन के ऋणात्मक प्रभावी द्रव्यमान को होल अभिधारणा से समझ सकते हैं ।

हम जानते हैं कि नैज अर्धचालक में 0K ताप पर संयोजकता बैण्ड पूर्णत: भरा तथा चालन बैण्ड पूर्णत: रिक्त होता है परन्तु 0K ताप के अतिरिक्त अन्य तापों पर कुछ इलेक्ट्रॉन ऊष्मीय ऊर्जा ग्रहण कर वर्जित ऊर्जा अन्तराल को पार कर संयोजकता बैण्ड से चालन बैण्ड में पहुँच जाते हैं । इस प्रकार संयोजकता बैण्ड में इलेक्ट्रॉन का स्थल रिक्त हो जाता है जो कि होल की अभिधारणा को जन्म देता है । इस रिक्त स्थल को होल कहते हैं । संयोजकता बैण्ड से केवल ऊपरी स्तर में स्थित इलेक्ट्रॉन ही चालन बैण्ड में पहुँचते है ।

जब बैण्ड इलेक्ट्रॉन से पूर्णत: भरा है तो तरंग सदिश k का योग शून्य होगा अर्थात्

$$\sum k = 0 \quad \text{[सम्पूर्ण ब्रिलुआँ जोन के लिए]}$$

अब यदि k_e तरंग सदिश का एक इलेक्ट्रॉन पूर्णत: भरे बैण्ड से अलग होता है तो इस स्थिति में तरंग सदिश

$$k_h = \sum k - k_e = -k_e \quad \text{....(10.42)}$$

यह इलेक्ट्रॉन के तरंग सदिश का ऋणात्मक है । जब होल उत्पन्न होता है तब निकाय (होल-इलेक्ट्रॉन) की ऊर्जा में परिवर्तन अलग हुये कण की ऊर्जा की ऋणात्मक होती है इसलिए होल की ऊर्जा $E_h(k_h)$ निम्न सम्बंध को सन्तुष्ट करेगी

$$E_h(k_h) = -E(k_e) \quad \text{...(10.43)}$$

समी.. (10.38) से $k_0 < k < \frac{\pi}{a}$ में इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान ऋणात्मक होता है अर्थात्

$$m^*_e = \frac{-h^2}{\frac{d^2E(k_e)}{dk^2_e}} \quad \text{....(10.44)}$$

समी.. (10.43) का उपयोग समी.. (10.44) में करने पर होल के प्रभावी द्रव्यमान को निम्न प्रकार परिभाषित कर सकते है

$$m^*_h = \frac{h^2}{\frac{d^2E_h(k_h)}{dk^2_h}} \quad \text{....(10.45)}$$

जो कि एक धनात्मक राशि है ।

समी. (10.44) तथा समी.. (10.45) से

$$m^*_h = -m^*_e$$

इस प्रकार होल का प्रभावी द्रव्यमान, इलेक्ट्रॉन के प्रभावी द्रव्यमान का ऋणात्मक होता है, अर्थात् होल धनात्मक आवेश तथा धनात्मक प्रभावी द्रव्यमान के कण के समान व्यवहार करता है ।

10.6 सारांश (Summary)

- इलेक्ट्रॉन ठोस में गति करता है तो इस पर आवर्ती विभव कार्य करता हैं। विभव धनात्मक आयन कोर पर न्यूनतम् तथा इनके मध्य अधिकतम् होता है ।
- ब्लॉक प्रमेय.के अनुसार जालक में किसी जालक नियतांक (a) के लिए जालक आवर्ती विभव V(x) = V(x + a) को सन्तुष्ट करने वाले एकल इलेक्ट्रॉन का आइगन फलन, समतल तरंग तथा जालक आवर्तिता फलन के गुणनफल के बराबर होता है ।
- आवर्ती जालक में इलेक्ट्रॉन की गति अनुमत ऊर्जा बैण्डों द्वारा अभिलक्षित होती है ये बैण्ड वर्जित ऊर्जा बैण्डों द्वारा पृथक होते हैं जिनमें कोइ ऊर्जा स्तर नहीं होता है ।

- αa के मान में वृद्धि से अनुमत ऊर्जा बैण्ड की चौड़ाई बढ़ती है तथा वर्जित ऊर्जा बैण्ड की चौड़ाई कम होती है ।
- विभव प्राचीर प्रबलता (V_{ob}) का मान P पर निर्भर करता है P वृद्धि से (V_{ob}) में भी वृद्धि होती है ।
- P=0 पर इलेक्ट्रॉन जालक में मुक्त विचरण करने लगते हैं ।
- ठोसों में उपस्थित आवर्ती विभव के कारण इलेक्ट्रॉन पर कार्यरत बल तथा उत्पन्न त्वरण का अनुपात मुक्त इलेक्ट्रॉन के द्रव्यमन से भिन्न हो जाता है । ठोसों में यह अनुपात इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान कहलाता है ।
- एकविमीय जालक ठोस में इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान $m^* = \hbar\left(\frac{d^2E}{dk^2}\right)^{-1}$ से दिया जाता है।
- ठोसों में इलेक्ट्रॉन के प्रभावी द्रव्यमान के मान धनात्मक, ऋणात्मक ख शून्य तीनों हो सकते हैं ।
- अधो स्तर $0 < k < k_0$ में इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान धनात्मक तथा ऊपरी स्तर $k_0 < k < \frac{\pi}{a}$ में ऋणात्मक होता है ।
- $k=k_0$ पर इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान अनन्त होता है इस बिन्दु को नति बिन्दु कहते हैं ।
- होल का प्रभावी द्रव्यमान, इलेक्ट्रॉन के प्रभावी द्रव्यमान का ऋणात्मक होता है । होल धनात्मक आवेश तथा धनात्मक प्रभावी द्रव्यमान के कण के समान व्यवहार करता है ।

10.7 शब्दावली (Glossary)

अधो-स्तर	Lower level
आवर्तिता	Periodicity
आवर्ती विभव	Periodic potential
ऊर्जा वर्णक्रम	Energy spectrum
ऊपरी स्तर	Higher Level
चालन बैण्ड	conduction band
जालक	Lattice
जालक	नियतांक Lattice constant
त्वरण	Acceleration
नति बिन्दु	Point of infexion
प्रतिलोम	Inverse
प्रभावी द्रव्यमान	Effective mass
परावर्तन	Reflection

रेखीय सम्मिश्रण	Linear combination
विद्युत क्षेत्र	Electric field
विवर्तन	Differection
संवेग	Momentum
संयोजकता बैण्ड	Valence band

10.8 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

M.A Wahab	Solid state Physics Structure and Properties of Materials	Narosa Publication House, New Delhi
A.J. Dekker	Solids state Physics	Macmillan India Ltd, Madras
Jeno solyom	Fundamental of Physics of Solids, Vol.II Electrical Properties	Springer-Verlag Berlin
एस. एस. रावत	ठोस अवस्था भौतिकी	कॉलेज बूक हाउस, जयपुर

10.9 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to self assessment question)

1. जालक आवर्ती विभव को सन्तुष्ट करने वाले एकल इलेक्ट्रॉन का आइगन फलन, समतल तरंग तथा जालक आवर्तिता फलन के गुणनफल के बराबर होता है ।
2. आवर्ती विभव के संगत एकल इलेक्ट्रॉन जो श्रोडिंजर सेमी.करण का पालन करते हैं, को ब्लॉक इलेक्ट्रॉन कहते हैं ।
3. क्रॉनिग-पैनी मॉडल में आवर्ती विभव को आयताकार विभव के रूप में माना गया है ।
4. V_{ob} को विभव प्राचीर प्रबलता कहते हैं ।
5. ठोसों में विधमान आवर्ती विभव से इलेक्ट्रॉन पर कार्यरत बल तथा उत्पन्न त्वरण का अनुपात मुक्त इलेक्ट्रॉन के द्रव्यमान से भिन्न हो जाता है ठोसों में यह अनुपात इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान कहलाता
6. इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान $\frac{d^2E}{dk^2}$ के व्युत्क्रमानुपाती होता है ।

10.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type question)

1. ब्लॉक फलन को परिभाषित कीजिए ।
2. आवर्ती विभव किसे कहते है?

3. $P \to \infty$ तथा $P \to 0$ पर इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा का मान क्या होता 'है?

4. विभव प्राचीर प्रबलता P पर किस प्रकार निर्भर करती है?

5. नति बिन्दु किसे कहते है

6. नति बिन्दु पर इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान कितना होता है?

7. होल को परिभाषित कीजिए ।

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type question)

8. आवर्ती विभव का उपयोग करते हुये ब्लॉक प्रमेय को सिद्ध किजिए ।

9. सिद्ध करो कि आवर्ती विभव में गतिशील एकल इलेक्ट्रॉन का ऑइगन $\psi_k(x) = e^{ikx} u_k(x)$ होता

10. क्रॉनिग पैनी मॉडल की विवेचना कीजिए । यह ठोसों में ऊर्जा बैण्ड के निर्माण में किस प्रकार सहायता करता है?

11. सिद्ध करो कि एकविमीय जालक में श्रोडिंजर सेमी.करण का हल निम्न होता है

$$P\frac{\sin \alpha a}{\alpha a} + \cos \alpha a = \cos ka$$

जहाँ $\alpha = \left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{1/2}$ तथा शेष चिन्हों के सामान्य अर्थ है ।

12. क्रॉनिग पैनी मॉडल के निष्कर्षो की विवेचना कीजिए । ।

13. इलेक्ट्रॉन के प्रभावी द्रव्यमान का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए तथा इसकी प्रकृति बताईये ।

14. ऋणात्मक द्रव्यमान का भौतिक उद्गम समझाइये तथा इसके आधार पर होल की व्याख्या कीजिए ।

अंकिक प्रश्न (Numerical question)

15. P<< 1 के लिए क्रॉनिग पैनी मॉडल का उपयोग करते हुए उच्चतर ऊर्जा $k = \frac{\pi}{a}$ पर ऊर्जा का मान ज्ञात करो । (**उत्तर :** $\frac{P^2\hbar^2}{2ma^2}$)

16. किसी क्रिस्टल में इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा $E = E' - 2A\cos ka$ है । k के किस मान के लिए प्रभावी द्रव्यमान का मान न्यूनतम तथा अधिकतम होगा?

(**उत्तर :** $k = (2n+1)\frac{\pi}{2a}$, $k = \frac{2n\pi}{2a}$)

इकाई 11

ठोसों के अर्धचालकीय गुण

(Semiconducting Properties of Solids)

इकाई की रूपरेखा

11.0 उद्देश्य

11.1 प्रस्तावना

11.2 ऊर्जा बैण्ड के आधार पर ठोसों का वर्गीकरण

11.3 नैज अर्धचालक

11.3.1 नैज अर्धचालक में आवेश वाहक सान्द्रता

11.3.2 नैज अर्धचालक में फर्मी तल

11.3.3 नैज अर्धचालक की चालकता तथा गतिशीलता

11.4 अपद्रव्यी अर्धचालक

11.4.1 N-अर्धचालक

11.4.2 P-अर्धचालक

11.4.3 N व P अर्धचालकों में आवेश वाहक सान्द्रता

11.4.4 N व P अर्धचालकों में फर्मी तल

11.4.5 N व P अर्धचालकों की चालकता तथा गतिशीलता

11.5 हॉल प्रभाव

11.6 सारांश

11.7 शब्दावली

11.8 संदर्भ ग्रंथ

11.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

11.10 अभ्यासार्थ प्रश्न

11.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप-

- अर्धचालकों के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे;
- विभिन्न प्रकार के अर्धचालकों में वाहक सान्द्रता, फर्मी तल, गतिशीलता तथा विद्युत चालकता का अध्ययन कर सकेंगे;
- अर्धचालकों के हॉल प्रभाव की व्याख्या कर सकेंगे ।

11.1 प्रस्तावना (Introduction)

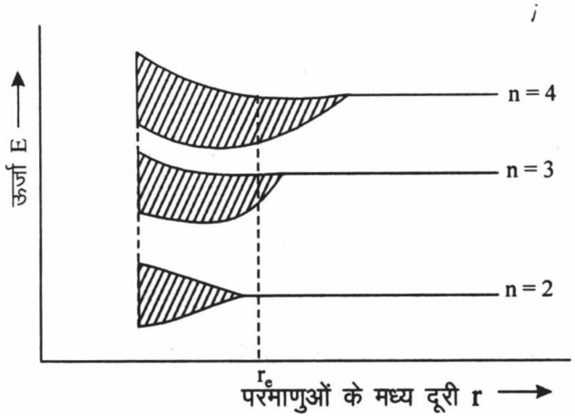
पिछली इकाइयों में आपने ठोसों के विभिन्न प्रकार के गुणों के बारे में जानकारी प्राप्त की है । इकाई-10 में आपने ठोसों के बैण्ड सिद्धान्त का अध्ययन किया । इस इकाई में आप ठोसों के अर्धचालक गुणों का अध्ययन करेंगे । इसी संदर्भ में अनुच्छेद 11.2 में ऊर्जा बैण्ड के आधार पर ठोसों के वर्गीकरण की व्याख्या कर चालक अर्धचालक तथा कुचालक की विवेचना की गई है । अनुच्छेद 11.3 में नैज अर्धचालक में आवेश वाहक सान्द्रता, फर्मी तल, विद्युत चालकता तथा गतिशीलता का अध्ययन करेंगें । अपद्रव्यी अर्धचालक के प्रकार, इनमें आवेश वाहक सान्द्रता, फर्मी तल, विद्युत चालकता तथा गतिशीलता का अध्ययन अनुच्छेद 11.4 करेंगे जबकि अनुच्छेद 11.5 में अर्धचालकों में हॉल प्रभाव की विवेचना करेंगे ।

11.2 ऊर्जा बैण्ड के आधार पर ठोसों का वर्गीकरण (Cliaasification of solids on the basis of energy bands)

हम जानते हैं कि परमाणुओं में सभी इलेक्ट्रॉन विभिन्न अनुमत ऊर्जा स्तरों वाले कक्षो में पाउली के अपवर्जन नियम (Pauli’s exclusion principle) के अनुसार वर्गीकृत होते हैं । परमाणु में सबसे पहले उस कक्षा में रहते हैं जिसकी ऊर्जा सबसे कम होती है और तत्पश्चात् पाउली के अपवर्जन नियम पालन करते हुए उच्च ऊर्जा वाले कक्षों में रहते हैं । सबसे बाहरी कक्ष में उपस्थित इलेक्ट्रॉन को संयोजी इलेक्ट्रॉन कहते हैं । संयोजी इलेक्ट्रान, नाभिक से अधिक दूर होने तथा अन्य इलेक्ट्रॉनों के आवरणी प्रभाव के कारण। पर कूलॉम आर्कषण बल नगण्य होता है । अत: ये इलेक्ट्रॉन परमाणु से शिथिलत बद्ध होते हैं तथा किसी अन्य परमाणु से सम्बन्ध स्थापित करने के लिए स्वतंत्र होते हैं । ये परमाणुओं के जालक में किसी भी जगह आ जा सकते हैं परन्तु नाभिक के प्रभाव से पूर्णत: मुक्त नहीं हो पाते हैं । अन्य इलेक्ट्रॉन जो कि परमाणुओं के अन्त: कक्षों में उपस्थित होते हैं वे नाभिक के आकर्षण के क्षेत्र में होते हैं और स्वयं के कक्ष में ही रहते हैं इन्हें बद्ध इलैक्ट्रॉन कहते हैं । जब दो परमाणुओं को निकट लाया जाता है तो एक परमाणु का नाभिक दूसरे परमाणु के इलेक्ट्रॉनों से अन्योन्य क्रिया कर सकता हैं । इस प्रकार दोनों परमाणुओं के प्रत्येक ऊर्जा स्तर का परस्पर अन्योन्या, क्रिया के कारण 2 ऊर्जा स्तरों का समूह बन जाता है । जिससे एक स्तर की ऊर्जा पूर्वमान ऊर्जा स्तर से अधिक तथा दूसरे ऊर्जा स्तर की ऊर्जा कम होती हैं । इससे दोनों परमाणुओं के संयोजी ऊर्जा स्तर परस्पर उभयनिष्ठ हो जाते है । इस प्रकार दोनों परमाणुओं के संयोजी इलेक्ट्रॉन एक दूसरे परमाणु में आ जा सकते हैं ।

हम जानते हैं कि ठोसों में परमाणु नियमित रूप से पंक्ति बद्ध होते हैं तथा इनके मध्य दूरी बहुत कम होती है । जिससे प्रत्येक परमाणु अन्य परमाणु से अन्योन्य क्रिया करता है तथा ऊर्जा ऊर्जा स्तरों के समूह में परिवर्तित हो जाते हैं । ये ऊर्जा स्तर पूर्वमान ऊर्जा स्तर के दोनों ओर होते हैं तथा, ऊर्जा स्तरों के बीच की दूरी बहुत कम होती हैं । अतः ये ऊर्जा स्तरों के समूह ऊर्जा बैण्डों में बदल जाते हैं (कि चित्र 11.1 में दर्शाया गया है) । ठोसों में परमानुओं के मध्य दूरी निश्चित होती हैं । इस दूरी पर बाहय स्तर, ऊर्जा बैण्ड में परिवर्तित हो जाता हैं ।

ठोस में परमाणुओं के संयोजी इलेक्ट्रॉन जिस ऊर्जा बैण्ड में होते हैं उसे संयोजकता बैण्ड कहते हैं । संयोजकता बैण्ड के उपर अधिक ऊर्जा के अनुमत बैण्ड को जो कि रिक्त होता हैं चालन बैण्ड कहते हैं । चालन बैण्ड तथा संयोजकता बैण्ड के मध्य ऊर्जा अन्तराल को वर्जित ऊर्जा अन्तराल कहते हैं ।



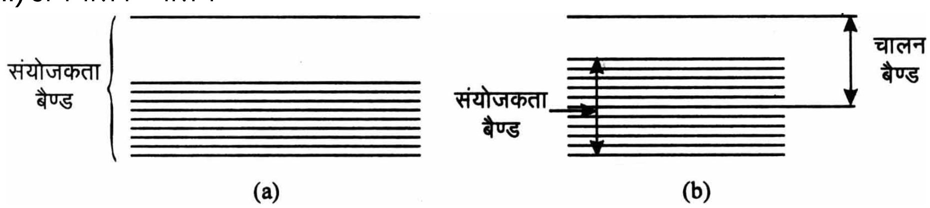
चित्र 11.1

संयोजकता बैण्ड में उपस्थित इलेक्ट्रॉन परमाणुओं के नाभिक से बंधे होने के कारण धारा वाहक के रूप में क्रियाशील नहीं हो पाते हैं । परन्तु ये इलेक्ट्रॉन कुछ ऊर्जा ग्रहण कर चालन बैण्ड में संक्रमण कर सकते हैं तथा ये इलेक्ट्रॉन धारा वाहक के रूप में कार्य करते हैं । संयोजकता बैण्ड से चालन बैण्ड में इलेक्ट्रॉनों के संक्रमण के लिए जितनी ऊर्जा की आवश्यकता होती है, यह न्यूनतम ऊर्जा चालन बैण्ड तथा संयोजकता बैण्ड के मध्य स्थित वर्जित ऊर्जा अन्तराल के बराबर होती है । इन ऊर्जा बैण्डों के आधार पर ठोसों को तीन भागों में वर्गीकृत किया गया है.

(i) चालक

(ii) कुचालक

(iii) अर्धचालक चालन



चित्र 11.2

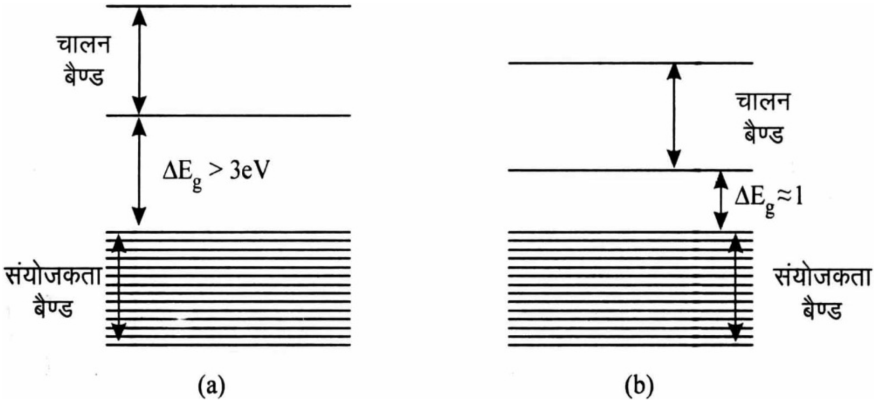
(i) चालक (Conductor)

इस प्रकार के ठोसों में पूर्णत: भरे हुए बैण्ड के उपर आशिक भरा हुआ बैण्ड होता है । यह दो प्रकार से सम्भव हो सकता है प्रथम संयोजकता बैण्ड आशिक रूप से भरा हुआ हो तथा द्वितीय पूर्णत: भरा हुआ संयोजकता बैण्ड तथा चालन बैण्ड परस्पर अतिव्यापन करते हों अर्थात् ΔE_g (ऊर्जा अन्तराल)=0 जैसा कि चित्र 11.2 (a) तथा 11.2(b) में दिखाया गया है । संयोजी इलेक्ट्रॉन नाभिक से शिथिलत: बद्ध होते हैं जिससे ये इलेक्ट्रॉन मुक्त इलेक्ट्रॉन की भांति

व्यवहार करते हैं । जैसा कि आप जानते है धातुओं में अन्तरापरमाणविक दूरी लगभग 10^{-10} मीटर के क्रम की होती है तथा संयोजी इलेक्ट्रॉनों की सामान्य कक्षाओं का व्यास भी लगभग इसी क्रम का होता हैं, अत: परमाणुओं के नाभिकों के कारण इलेक्ट्रॉनों पर बल एक को नष्ट कर देते हैं । एकल संयोजी धातुओं के सभी संयोजी इलेक्ट्रॉन लगभग 10^{29} /मीटर^3 सामान्य ताप पर अवस्था में होते हैं । इस प्रकार चालन बैण्ड में मुक्त इलेक्ट्रॉनों की संख्या अत्यधिक होने के कारण इन पदार्थो की चालकता बहुत अधिक होती है । सामान्य ताप पर इनकी चालकता 10^6 से 10^{-6} म्हो/मीटर की कोटी की होती हैं, अर्थात् इनकी प्रतिरोधकता 10^{-8} से 10^{-6} ओम- मीटर की कोटि की होती हैं ।

(ii) कुचालक (Insulator)

इस प्रकार के ठोसों में पूर्णत: भरे हुए बैण्ड (संयोजकता बैण्ड) के ऊपर बैण्ड (चालन बैण्ड) होता हैं तथा सामान्य ताप पर इनके मध्य अन्तराल ΔE_g अत्यधिक (ΔE_g >3eV) होता जैसा कि चित्र 11.3 (a) में दिखाया गया है । आप जानते है कि सामान्य ताप पर इलेक्ट्रॉन की माध्य तापीय ऊर्जा 0.025 eV होती है । इलेक्ट्रॉन का संयोजकता बैण्ड से चालन बैण्ड में संक्रमण अत्यल्प होता है । अत: ताप पर चालन बैण्ड में इलेक्ट्रॉन की संख्या नगण्य होती है । जिसके कारण इस प्रकार के पदार्थो की द्यालकता बहुम कम होती हैं तथा इन्हें कुचालक कहते हैं । इन पदार्थो की चालकता लगभग 10^{-12} से 10^{-18} म्हो/मीटर की कोटि की होती हैं अर्थात् इनकी प्रतिरोधकता बहुत अधिक 10^{12} से 10^{18} ओम-मीटर की कोटि की हैं । ताप में अत्यधिक वृद्धि करने पर कुछ इलेक्ट्रॉन संयोजकता बैण्ड से चालन बैण्ड में संक्रमण कर जाते है जिससे कि इनकी चालकता में वृद्धि हो जाती हैं । हीरे, बोरॉन नाइट्राइड तथा ऐलुमिना (Al_2O_3) का वर्जित अन्तराल क्रमशः 7 eV, 4.6 eV तथा 5.4 eV होता है तथा ये सभी कुचालक होते हैं।



चित्र 11.3

(iii) अर्धचालक (Semiconductor)

इस प्रकार के ठोसों में वर्जित ऊर्जा अंतराल चालक से अधिक तथा कुचालक से कम होता है अर्थात् वर्जित ऊर्जा अन्तराल लगभग 1eV होता है जैसा कि चित्र 11.3 (b) में दर्शाया गया है । अर्धचालकों की चालकता चालकों तथा कुचालकों के मध्य (10^{-7} से 10^1 म्हो /मीटर) होती हैं । उदाहरण सिलीकॉन (Si), जरमेनियम (Ge) तथा गेलियम आर्सेनाइड (GsAs)

इत्यादि का वर्जित ऊर्जा अन्तराल क्रमश:1.1eV, 0.72 eV तथा 1.3 eV होता है तथा ये सभी अर्धचालक पदार्थ हैं । परम शून्य ताप पर सभी अर्धचालक पदार्थ कुचालकों की भाँति व्यवहार करते हैं क्योंकि परम शून्य ताप पर परमाणु में नाभिक से बन्धे संयोजी इलेक्ट्रॉन संयोजी आबंध बना लेते हैं । इस ताप पर इनकी चालकता शून्य होती हैं । ताप में वृद्धि करने पर तापीय उर्जा के कारण कुछ संयोजी इलेक्ट्रॉनों के संयोजी आबंध टूटते हैं तथा ये इलेक्ट्रॉन वर्जित ऊर्जा अन्तराल या इससे अधिक ऊर्जा लेकर चालन बैण्ड में पहुँच जाते हैं और संयोजकता बैण्ड में इलेक्ट्रॉन स्थल रिक्त हो जाता है । इस रिक्त इलेक्ट्रॉन स्थल को कोटर या होल (hole) कहते हैं । यह रिक्त स्थल इलेक्ट्रॉन के विपरीत धन आवेश वाहक की भाँति व्यवहार करता है । अर्धचालक में कक्ष ताप पर कुछ इलेक्ट्रॉन तापीय ऊर्जा ग्रहण कर संयोजकता बैण्ड से चालन बैण्ड में पहुँच जाते हैं अर्थात् कक्ष ताप पर इनकी चालकता अत्यल्प हैं । अर्धचालकों में चालकता दोनों प्रकार के आवेश वाहक (इलेक्ट्रॉन तथा होल) के कारण होती हैं ।

अर्धचालक दो प्रकार के होते हैं । (1) नैज अर्धचालक तथा (11) अपद्रव्यी अर्धचालक । नैज अर्धचालकों में चालकता केवल ताप जनित आवेश वाहकों के कारण होती है अर्थात् इस प्रकार के अर्धचालक को शुद्ध अर्धचालक भी कहते हैं । दूसरे प्रकार के अर्धचालकों की चालकता उपयुक्त प्रकारू की अशुद्धि (अपद्रव्य) नैज अर्धचालकों में मिलाकर आवश्यकता अनुसार परिवर्तित की जा सकती हैं । इसलिये इन्हें अपद्रव्यी अर्धचालक कहते हैं । इनका विस्तृत अध्ययन अनुच्छेद 11.3 तथा 11.4 में करेगे ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. ठोसों को कितने भागों में वगीकृत किया गया है?

----

2. अर्धचालक की चालकता की कोटि क्या होती है?

----

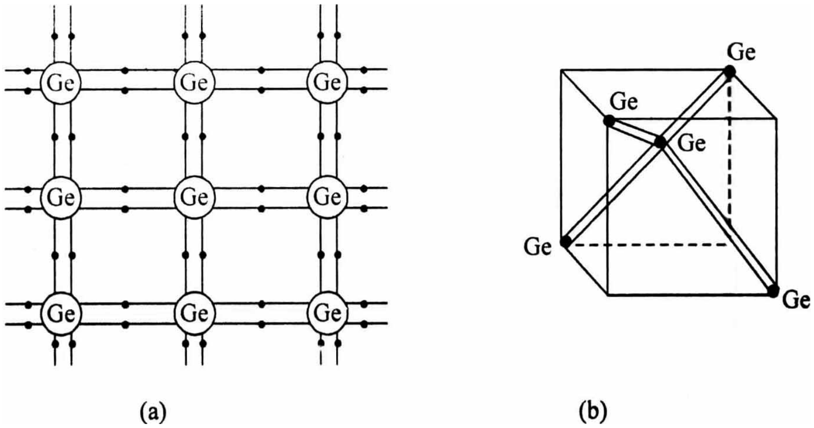
3. अर्धचालक कितने प्रकार के होते हैं?

11.3 नैज अर्धचालक (Intrinsic Semiconductor)

जैसा कि आप जानते हैं कि नैज अर्धचालक वह पदार्थ है जिनका वर्जित ऊर्जा अन्तराल लगभग 1eV होता है तथा इन पदार्थों की कलकता केवल ताप जनित आवेश वाहकों के कारण होती है । शुद्ध पदार्थ जैसे सिलीकॉन (Si) तथा जरमेनियम (Ge) (आवर्त सारणी के चतुर्थ वर्ग के तत्व), GaAS, InSb (III-V योगिक) SiC (IV- IV योगिक) तथा PbS (II-IV योगिक)

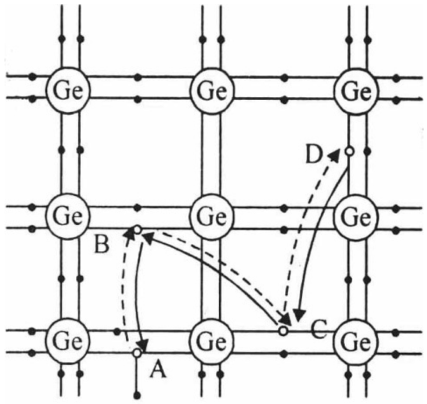
नैज अर्धचालकों के कुछ उदाहरण हैं । यहाँ आप केवल सिलीकॉन तथा जरमेनियम का विस्तृत अध्ययन करेंगे ।

सिलीकॉन तथा जरमेनियम की आन्तरिक कक्षायें आत: भरी होती हैं । इनमें उपस्थित इलेक्ट्रॉन नाभिक से दृढ़ता से बंधे होते हैं जबकि सबसे बाह्यतम कक्ष, जिसे कि संयोजकता कक्ष कहते हैं, में चार इलेक्ट्रॉन उपस्थित होते हैं । हम जानते हैं कि परमाणु को स्थायी अवस्था में आने के लिए बाह्यतम कक्ष पूर्ण होना चाहिये अर्थात् प्रत्येक परमाणु को चार इलेक्ट्रॉन की आवश्यकता होती है । इन इलेक्ट्रॉनों को प्राप्त करने के लिए प्रत्येक परमाणु के चारों इलेक्ट्रॉन निकटवर्ती चार परमाणु के एक-एक इलेक्ट्रॉन से साझेदारी कर सहसंयोजी आबंध का निर्माण करते हैं । प्रत्येक आबंध में दो इलेक्ट्रॉन होते हैं । इस प्रकार प्रत्येक परमाणु की बाह्यतम कक्ष में आठ इलेक्ट्रॉन आ जाते हैं, अर्थात् बाह्यतम कक्ष पूर्ण हो जाता हैं । जैसा कि चित्र 11.4 (a) में दर्शाया गया है Si तथा Ge की क्रिस्टलीय संरचना हीरक संरचना होती है । इनमें सहसयोजी आबंध चतुष्फलक का निर्माण करते हैं । चित्र 11.4 (a) में चतुष्फलकीय आबंध को प्रदर्शित किया गया हैं, जिसमें प्रत्येक परमाणु के चार निकटतम प्रतिवेशी होते हैं ।



चित्र 11.4

अर्धचालकों का वर्जित ऊर्जा अन्तराल ΔE_g बहुत कम होता है । कुछ इलेक्ट्रॉन जो कि संयोजकता बैण्ड के शीर्ष पर होते हैं, तापीय ऊर्जा ग्रहण कर, वर्जित ऊर्जा अन्तराल को पार कर चालन बैण्ड में पहुँच जाते हैं । जब इलेक्ट्रॉन संयोजकता बैण्ड से चालन बैण्ड में पहुँचता है तो संयोजकता बैण्ड में इलेक्ट्रॉन का स्थल रिक्त हो जाता है । इस रिक्त स्थल को कोटर या होल कहते हैं । ऊष्मीय साम्यावस्था में सभी नैज अर्धचालकों में चालन बैण्ड में इलेक्ट्रॉन की संख्या तथा संयोजकता बैण्ड में होलों की संख्या समान होती है क्योंकि ये दोनों एक साथ युग्मों में उत्पन्न होते हैं । ये होल इलेक्ट्रॉन को आकर्षित करते हैं तथा इस प्रक्रम में एक पास का इलेक्ट्रॉन इस रिक्त स्थल को पूर्ण कर देता है । इस प्रकार यह प्रक्रम चलता रहता है । इनकी गति यादृच्छिक गति होती है । चित्र 11.5 में इलेक्ट्रॉन ABCD दिशा में गति करता है जबकि होल DCBA दिशा में गति करता है अर्थात् इलेक्ट्रॉन तथा होल एक-दूसरे के विपरीत गति करते हैं । इस प्रकार नैज अर्धचालक में इलेक्ट्रॉन तथा होल दोनों आवेश वाहक का कार्य करते हैं तथा इसमें विद्युत चालन दोनों आवेश वाहकों के कारण होता हैं ।



चित्र 11.5

चित्र 11.5

साम्यावस्था में नैज अर्धचालक में इलेक्ट्रॉन-होल युग्म उत्पन्न होने की दर g(T) पदार्थ की प्रकृति तथा ताप पर निर्भर करती हैं । अत: ताप में वृद्धि करने पर इलेक्ट्रॉन-होल युग्मों में वृद्धि होती हैं । इलेक्ट्रॉन-होल युग्म की सान्द्रता को स्थिर रखने के लिए पुनर्योजन (recombination) की दर r(T), g(T) के बराबर होनी चाहिए अर्थात्

$$g(T) = r(T) = Kn_i p_i \qquad ...(11.1)$$

जहाँ n_i तथा p_i क्रमश: नैज इलेक्ट्रॉन तथा होल संख्या घनत्व है तथा K एक समानुपाती नियतांक है जो कि आवेश घनत्व तथा अर्धचालक पदार्थ के गुण पर निर्भर करता है।

अब युग्म उत्पादन के लिए

$$n_i = p_i$$

$$g(T) = r(T) = Kn_i p_i = Kn_i^2 \qquad ...(11.2)$$

तथा $$n_i p_i = n_i^2 \qquad ..(11.3)$$

दिये गये ताप पर घनत्व n_i व p_i अर्धचालक का अन्तर्निहित (inherent) गुण हैं । नैज आवेश घनत्व n_i^2भी दिये गये ताप पर एक स्थिर मान है जो कि केवल पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है ।

नैज अर्धचालक जैसे जरमेनियम में (वर्जित ऊर्जा अन्तराल 0.72eV) 300K पर नैज इलेक्ट्रॉन घनत्व 24 x 10^{19} इलेक्ट्रॉन/मी.^{3} होता है क्योंकि इसमें 4.4 x 10^{28} परमाणु प्रति मी^{3} होते हैं । यह स्पष्ट है कि कक्ष ताप पर Ge में प्रति 10^{10} परमाणु पर केवल 5 इलेक्ट्रॉन-होल युग्म उत्पन्न होते हैं । ताप में वृद्धि से इस संख्या में तीव्रता से (चरघातांकी) वृद्धि होती है । चूँकि n_i व p_i ताप पर अत्यधिक निर्भर करते हैं परन्तु किसी भी युक्ति का ताप एक सीमा से अधिक नहीं बढ़ाया जा सकता है । जरमेनियम के लिए अधिकतम प्रचालन ताप लगभग 85^0-100^0 C तथा सिलिकॉन के लिए 85^0-200^0 C होता है ।

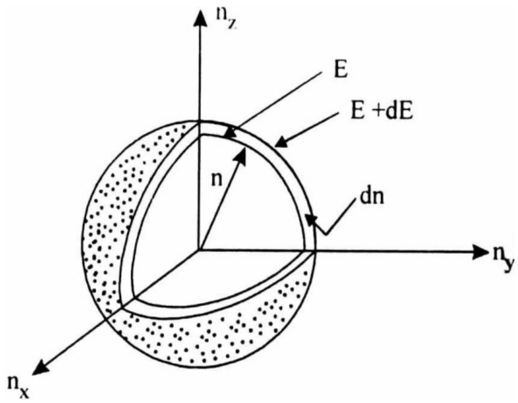
11.3.1 नैज अर्धचालक में आवेश वाहक सान्द्रता (Charge carrier concentration in internsic semiconductor)

किसी दी गई ऊर्जा अवस्था में मुक्त इलेक्ट्रॉन की वास्तविक संख्या ज्ञात करने के लिए निकाय (system) में अवस्थाओं की संख्या के बारे में जानना आवश्यक है । यह संख्या अवस्थाओं की ऊर्जा तथा प्रायिकता वितरण फलन का गुणनफल होती है । यदि ऊर्जा E तथा E+dE के मध्य अन्तराल में क्वांटम अवस्थाओं की संख्या g(E)dE तथा F(E) एक निश्चित ऊर्जा अवस्था को इलेक्ट्रॉन द्वारा ग्रहण करने का प्रायिकता फलन है, तब किसी ताप तथा दिये गये ऊर्जा अन्तराल में इलेक्ट्रॉन की वास्तविक संख्या N(E) dE (मुक्त/रिक्त अवस्था) निम्न सेमी.करण द्वारा दी जाती है

$$N(E)\,dE = F(E)\,g(E)\,dE \qquad ...(11.4)$$

अब E तथा E+dE ऊर्जा अन्तराल में अवस्था घनत्व g(E)dE ज्ञात करने के लिए n- समष्ठि में n तथा n+dn त्रिज्या के दो गोले खींचते हैं जैसा कि चित्र 11.6 में दर्शाया गया है । गोले का कोई भी बिन्दु (n_x, n_y, n_z) ऊर्जा अवस्था को प्रदर्शित करता है । इस प्रकार n (जहाँ $n^2=n^2_x + n^2_y + n^2_z$)त्रिज्या के गोले के पृष्ठ पर सभी बिन्दुओं की ऊर्जा समान होगी क्योंकि n_x, n_y, n_z का मान शून्य तथा ऋणात्मक नहीं हो सकता है । इसलिए E ऊर्जा से कम ऊर्जा अवस्थाओं की संख्या गोले के धनात्मक आठवें भाग (Octant) से दी जायेगी अर्थात्

$$g(E) = \frac{1}{8}.\frac{4}{3}\pi n^3$$



चित्र 11.6

हम जानते है कि किसी भी अवस्था में स्थित मुक्त इलेक्ट्रॉन की ऊर्जा सेमी.करण से दी जाती है ।

$$E = \frac{h^2 n^2}{8ma^2} \quad (\text{जहाँ } n^2=n^2_x + n^2_y + n^2_z)$$

सेमी.. (11.6) से n का मान सेमी.. (11.5) में रखने पर

$$g(E) = \frac{1}{8}.\frac{4}{3}\pi\left(\frac{8m^*_e a^2 E}{h^2}\right)^{3/2}$$

$$=\frac{4\pi V}{3h^2}(2m^*_e)^{3/2}E^{3/2} \qquad ...(11.7)$$

जहाँ m^*_e इलेक्ट्रॉन का प्रभावी द्रव्यमान, h प्लांक नियतांक तथा V = a^2 है अब सेमी.. (117) का E के सापेक्ष अवकलन करने पर ऊर्जा अन्तराल dE में अवस्था घनत्व का मान प्राप्त होता है ।

$$g(E)dE=\frac{2\pi V}{h^3}(2m^*_e)^{3/2}E^{1/2}dE \qquad ...(11.8)$$

परन्तु पाउली के अपवर्जन सिद्धान्त से प्रत्येक क्वान्टम अवस्था में विपरीत चक्रण के दो इलेक्ट्रॉन स्थित हो सकते हैं, अत: ऊर्जा अन्तराल dE में क्वान्टम अवस्थाओं की कुल संख्या '

$$g(E)dE=\frac{4\pi V}{h^3}(2m^*_e)^{3/2}E^{1/2} \qquad ...(11.9)$$

फर्मी-डिराक वितरण के अनुसार ताप T पर इलेक्ट्रॉन के ऊर्जा E की अवस्था में होने की प्रायिकता निम्न होती है

$$F(E)=\frac{1}{e^{(E-E_F)/k_BT}+1} \qquad ....(11.10)$$

अब सेमी..(11.9) से अवस्था घनत्व तथा सेमी.. (11.10) से प्रायिकता वितरण फलन का मान सेमी..(11.4) में रखने पर

$$N(E)dE=\frac{4\pi V}{h^3}(2m^*_e)^{3/2}\frac{\left(E^{1/2}\right)dE}{e^{(E-E_F)k_BT}+1} \qquad ...(11.11)$$

शोक्ले के अनुसार चालन बैण्ड का न्यूनतम स्तर E_c पर होता है अत: क्वांटम अवस्थाओं के घनत्व के सेमी.करण में $E^{1/2}$ के स्थान पर $(E- E_c)^{1/2}$ प्रयुक्त होना चाहिए ।

सेमी.करण (11.11) में $E^{1/2}$ के स्थान पर $(E -E_c)^{1/2}$ रखने पर

$$N(E)dE=\frac{4\pi V}{h^3}(2m^*_e)^{3/2}\frac{\left(E-E_c\right)^{1/2}}{e^{(E-E_F)k_BT}+1}dE \qquad ....(11.12)$$

अब चालन बैण्ड में किसी ताप T पर इलेक्ट्रॉन घनत्व प्राप्त करने के लिए सेमी.. (11.12) का अवकलन सीमा E_c से अनंत ∞ पर करते हैं ।

$$n'=\int N(E)dE=\int_{E_c}^{\infty}\frac{4\pi V}{h^3}(2m^*_e)^{3/2}\frac{\left(E-E_c\right)^{1/2}}{e^{(E-E_F)k_BT}+1}dE$$

$$n'=\frac{4\pi V}{h^3}(2m^*_e)^{3/2}\int_{E_c}^{\infty}\left(E-E_c\right)^{1/2}\exp[(E-E_F)k_BT]dE\{\because e^{(E-E_F)/k_BT}>>1\}$$

माना $(E-E_c)/k_BT=x$ तब

$$n'=\frac{4\pi V}{h^3}(2m^*_e)^{3/2}\int_{E_c}^{\infty}x^{1/2}\frac{(k_BT)^{3/2}e^{-x}dx}{e^{(E_c-E_F)/k_BT}}\left(E-E_c\right)^{1/2}$$

$$n' = \frac{4\pi V}{h^3}(2m^*_e k_B T)^{3/2} e^{-(E_c - E_F)/k_B T} \int_0^\infty x^{1/2} e^{-x} dx \quad ....(11.14)$$

समाकलन $\int_0^\infty x^{1/2} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ होता है अत:

$$n' = \frac{2V}{h^3}(2\pi m^*_e k_B T)^{3/2} \exp[-(E_c - E_F)/k_B T]$$

एकांक आयतन में इलेक्ट्रॉन संख्या घनत्व,

$$n = \frac{n'}{V} = \frac{2}{h^3}(2\pi m^*_e k_B T)^{3/2} \exp[-(E_c - E_F)/k_B T]$$

$$n = N_c \exp[-(E_c - E_F)/k_B T] \quad ....(11.15)$$

जहाँ $N_c = 2\left(\frac{2\pi m^*_e k_B T}{h^2}\right)^{3/2}$ ....(11.16)

ताप T= 300K पर

$N_c = 5x10^{25}$ m^{-3}जरमेनियम के लिए

$N_c = 2.86x$ 10^{25} m^{-3} सिलीकॉन के लिए

नैज अर्धचालक के लिए

$E_F = (E_c + E_v)/2$

अत: $E_c - E_F = \frac{(E_c - E_v)}{2} = \frac{\Delta E_g}{2}$

जहाँ E_v संयोजकता बैण्ड का उच्चतम स्तर है तथा vE_g वर्जित ऊर्जा - है ।

अत: सेमी.. (11.15) से

$$n = N_c \exp\left(\frac{-\Delta E_g}{2k_B T}\right) \quad ...(11.17)$$

सेमी. (11.17) से स्पष्ट है कि चालन बैण्ड में इलेक्ट्रॉन घनत्व ताप का है । ताप में वृद्धि से n में चरघातांकी रूप में वृद्‌वि होती है । इसी प्रकार संयोजकता बैण्ड में होल संख्या घनत्व चालन बैण्ड में इलेक्ट्रॉन संख्या घनत्व की तरह ही ज्ञात कर सकते.हैं । संयोजकता बैण्ड में E_V उच्चतम होता है तथा इससे कम ऊर्जा की विभिन्न अवस्थाऐं होगी । इस प्रकार शोक्ले के अनुसार अवस्था घनत्व के सेमी.करण में E के स्थान पर (E_V -E) प्रयुक्त करना चाहिए तथा ऊर्जा E की अवस्था में होल स्थित होने का अर्थ इस अवस्था में इलेक्ट्रॉन की अनुपस्थिति से है । इसके लिए प्रायिकता वितरण फलन F(E) के स्थान पर [1-F(E)] - अत: संयोजकता बैण्ड में होल घनत्व

$$p' = \int_0^{E_V} g(E)[1 - F(E)]dE$$

$$p' = \int_0^{E_V} \frac{4\pi V}{h^3}(2m^*_h)^{3/2}(E_V - E)^{1/2}\left[1 - \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_BT}}\right]dE$$

यहां m^*_h होल का प्रभावी द्रव्यमान हैं ।

परन्तु संयोजकता बैण्ड में $(E_p\text{-}E) >> k_BT$

अत: $e^{-(E-E_F)/k_BT} >> 1$

$$p' = \frac{4\pi V}{h^3}(2m^*_h)^{3/2}\int_0^{E_V}(E_V - E)^{1/2}e^{(E-E_F)/k_BT}dE$$

...(11.18)

सेमी.. (11.18) को सेमी.. (11.13) के समान हल कर सकते हैं ।

अत: सेमी.. (11.18) का हल

$$p' = \frac{4\pi V}{h^3}(2m^*_h k_BT)^{3/2}e^{(E-E_F)/k_BT}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

प्रति एकांक आयतन में होल संख्या घनत्व

$$p = \frac{p'}{V} = \frac{2}{h^3}(2m^*_h k_BT\pi)^{3/2}\exp\{-(E_F - E_V)k_BT\} \quad ....(11.19)$$

जहाँ $$N_v = 2\left(\frac{2\pi m^*_h k_BT}{h^2}\right)^{3/2} \quad ....(11.20)$$

नैज अर्धचालक के लिए

$$E_F - E_V = \frac{VE_g}{2}$$

∴ सेमी. (11.19) से

$$p = N_v \exp\left(\frac{-\Delta E_g}{2k_BT}\right)$$

सेमी. (11.17) तथा (11.21) से

$$np = N_c N_v \exp\left(\frac{-\Delta E_g}{k_BT}\right) \quad ....(11.21)$$

$$np = 4\left(\frac{2\pi k_BT}{h^2}\right)^{3/2}(m^*_h m^*_e)^{3/2}\exp\left(\frac{-\Delta E_g}{k_BT}\right) \quad ...(11.22)$$

हम जानते है कि नैज अर्धचालक के लिए

$$n_i = n = p_i = p$$

$$n_i^2 = 4\left(\frac{2\pi k_BT}{h^2}\right)^{3/2}(m^*_h m^*_e)^{3/2}\exp\left(\frac{-\Delta E_g}{k_BT}\right)$$

$$n_i = 2\left(\frac{2\pi k_BT}{h^2}\right)^{3/2}(m^*_h m^*_e)^{3/4}\exp\left(\frac{-\Delta E_g}{k_BT}\right)$$

...(11.23)

n_i को नैज आवेश वाहक घनत्व भी कहते हैं । यह ताप तथा वर्जित ऊर्जा अन्तराल पर निर्भर करता है।

11.3.2 नैज अर्धचालक में फर्मी स्तर (Fermi level in intrinsic semiconductor)

जैसा कि आप जानते है इलेक्ट्रॉन फर्मी-डिरॉक वितरण का पालन करते है । इसके अनुसार किसी ताप T पर इलेक्ट्रॉन का ऊर्जा E की अवस्था में स्थित होने की प्रायिकता F(E) निम्न होती है (सेमी.. व 11.10)

$$F(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_BT} + 1}$$

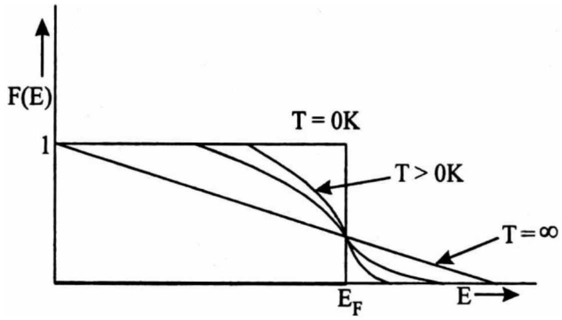
जहाँ k_B बोल्टमान नियतांक हैं (k_B=1.38 x 10^{-23}) तथा E_F नियतांक है जिसे फर्मी ऊर्जा कहते हैं ।

परम शून्य ताप T=0 पर $E<E_F$ के लिए F(E)=1 अर्थात् E_F से कम ऊर्जा क्रे लिए अधिष्ठान प्रायिकता 1 होगी । अत: ये सब ऊर्जा स्तर भरे होंगे । $E>E_F$ के लिए F(E)=0 होंगे । इस प्रकार T=0 पर $E=E_F$ तक सभी ऊर्जा स्तर भरे होगें तथा E_F से अधिक ऊर्जा के स्तर रिक्त होंगे अर्थात् T=0 पर फर्मी स्तर E_F ऊर्जा का वह अधिकतम स्तर है जिसमें इलेक्ट्रॉन स्थित हो सकते हैं ।

T>0 तथा E = E_F के लिए

$$F(E) = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$$

अर्थात् परम शून्य ताप से अधिक ताप पर फर्मी स्तर ऊर्जा का वह स्तर है अधिष्ठान प्रायिकता का मान 1/2 होता है (जैसा कि चित्र 11.7 में दर्शाया गया है) ।



चित्र 11.7

जब इलेक्ट्रॉन संयोजकता बैण्ड से चालन बैण्ड में संक्रमण करता है तो यह संयोजकता बैण्ड में एक रिक्त स्थान छोड़ देता है। माना कि संयोजकता बैण्ड के उच्चतम स्तर पर स्थित अवस्था से ये इलेक्ट्रान संक्रमण करता है तथा चालन बैण्ड के निम्नतम स्तर पर स्थित क्वान्टम अवस्था में स्थित होता हैं । किसी ताप T पर चालन बैण्ड में $E=E_c$ के निकट अध्यासित क्वान्टम अवस्थाओं का घनत्व तथा संयोजकता बैण्ड में $E=E_V$ के निकट रिक्त क्वान्टम अवस्थाओं का घनत्व सेमी.. (11.15) तथा सेमी.. (11.19) से ज्ञात कर सकते हैं ।

$$n = N_c \exp\left[-\frac{E_C - E_F}{k_B T}\right]$$

तथा
$$p = N_V \exp\left[-\frac{E_F - E_V}{k_B T}\right]$$

जहाँ N_c चालन बैण्ड में ऊर्जा E_c के निकट अध्यासित क्वान्टम अवस्थाओं का घनत्व तथा N_V संयोजकता बैण्ड में ऊर्जा E_V के निकट रिक्त क्वांटम अवस्थाओं का घनत्व है । परन्तु हम जानते हैं कि नैज अर्धचालक में होल तथा इलेक्ट्रॉन की संख्या समान होती है अर्थात्

$$n_i = n = p_i = p$$

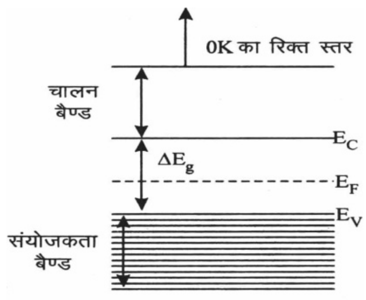
अतः
$$N_c \exp\left[-\frac{E_C - E_F}{k_B T}\right] = N_V \exp\left[-\frac{E_F - E_V}{k_B T}\right]$$

हल करने पर
$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_V}{N_c} \qquad ....(11.23)$$

सेमी. (11.23) में N_V तथा N_c का मान सेमी.. (11.16) तथा सेमी.. (11.20) से रखने पर

$$E_F = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{k_B T}{4} \ln \frac{m^*_h}{m^*_e} \qquad ....(11.24)$$

इस प्रकार सेमी.. (11.24) से स्पष्ट है कि यदि $m^*_h = m^*_e$ हो तो फर्मी स्तर संयोजकता बैण्ड तथा चालन बैण्ड के ठीक मध्य में स्थित होता है । परन्तु सामान्यतया $m^*_h > m^*_e$, ताप बढ़ने पर फर्मी स्तर हल्का-सा चालन बैण्ड की ओर स्थित होता है । चित्र 11.8 में नैज अर्धचालक में फर्मी स्तर की स्थिति को दर्शाया गया हैं ।

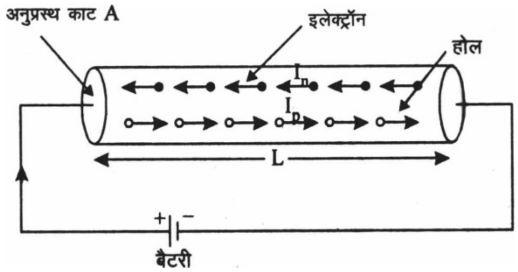


चित्र 11.8

11.3.3 नैज अर्धचालक की चालकता तथा गतिशीलता (Conductivity and mobility of intrinsic semiconductor)

चित्र 11.9 के अनुसार यदि नैज अर्धचालक के दोनों सिरों को एक बैटरी से जोड़ते हैं तो इलेक्ट्रॉन तथा होल की यादृच्छिक गति संशोधित हो जाती है तथा ये दोनों समूह के रूप में गति करते हैं । इलेक्ट्रॉन बैटरी के धन टर्मिनल की ओर तथा होल बैटरी के ऋण टर्मिनल की

ओर गति करते हैं । इस गति को अपवाह गति (drift motion) कहते हैं तथा यह प्रयुक्त विद्युत क्षेत्र ह के समानुपाती होती है, अर्थात्



चित्र 11.9

जहाँ v_n अतः v_p क्रमशः इलेक्ट्रॉन तथा होल अपवाह वेग है तथा μ_n and μ_p क्रमश इलेक्ट्रॉन तथा होल की गतिशीलता हैं । इसे मीटर²/वोल्ट-सेकण्ड में नापते हैं । गतिशीलता को निम्न मकार परिभाषित कर सकते हैं : अपवाह वेग तथा बाह्य विद्युत क्षेत्र की निष्पति नियत होती है इसे आवेश वाहक की गतिशीलता कहते हैं ।

$$\mu_n = \frac{v_n}{\in}$$ इलेक्ट्रॉन के लिए

$$\mu_p = \frac{v_p}{\in}$$ होल के लिए

चूँकि इलेक्ट्रॉन तथा होल विपरीत दिशा में गति करते हैं अत: इन दोनों के कारण धारा एक ही दिशा में होगी । अर्धचालक में अपवाह धारा का मान ज्ञात करने के लिए माना कि लम्बाई L अनुप्रस्थ काट A के बेलनाकार अर्धचालक छड़ में n इलेक्ट्रॉन प्रति एकांक आयतन आपतित हैं । अब अर्धचालक पर E विद्युत क्षेत्र आरोपित करते हैं तो इलेक्ट्रॉन आरोपित विद्युत क्षेत्र के विपरीत तथा होल इसकी दिशा में गति करते हैं । अत: इलेक्ट्रॉन को लम्बाई L तय करने में लगा समय

$$t = \frac{L}{v_n}$$

बेलन में कुल इलेक्ट्रॉन की संख्या

= n x बेलन का आयतन

= nAL

अत: बेलन में कुल इलेक्ट्रॉन आवेश

Q = nALe

∴ आवेश प्रवाह प्रति सेकण्ड अर्थात् धारा

$$I_n = \frac{nALe}{t}$$

$$I_n = \frac{nALe}{L / v_n} = neAv_n$$

अत: इलेक्ट्रॉन धारा घनत्व

$$J_n = \frac{I_n}{A} = nev_n$$

इसी प्रकार अर्धचालक में होल भी गति करते हैं । अत: होल धारा घनत्व भी इसी प्रकार ज्ञात कर सकते

$$J_p = pev_p$$

अर्धचालक में इलेक्ट्रॉन तथा होल के कारण धारा एक ही दिशा में प्रवाहित होती हैं । अत: कुल धारा घनत्व दोनों के धारा घनत्व के योग के बराबर होगा अर्थात्

$$J = J_n + J_p$$

$$J = nev_n + pev_p$$

$$= e(nv_n + pv_p) \quad ....(11.26)$$

सेमी.. (11.25) से v_n तथा v_p का मान सेमी.. (11.26) में रखने पर

$$J = e(n\mu_n + p\eta_p)\in$$

नैज अर्धचालक की वैद्युत चालकता

$$\sigma = \frac{J}{\in}$$

$$\sigma_i = e(n\mu_n + p\eta_p) \quad ...(11.28)$$

तथा प्रतिरोधकता

$$\rho_i = \frac{1}{\sigma_i} = \frac{1}{e(n\mu_n + p\mu_p)} \quad ....(11.29)$$

परन्तु नैज अर्धचालक के लिए

$$n_i = p = n$$

अत: सेमी.. (11.28) से

$$\sigma_i = en_i(\mu_n + \mu_p) \quad ...(11.30)$$

n_i का मान सेमी.. (11.23) से सेमी.. (11.30) में रखने पर

$$\sigma_i = 2e\left(\frac{2\pi k_B T}{h^2}\right)^{3/2} (m^*_h m^*_e)^{3/4}(\mu_n + \mu_p)\exp\left(-\frac{\Delta E_g}{2k_B T}\right) \quad ...(11.31)$$

$$\sigma_i = \sigma_i(0)\exp\left(-\frac{\Delta E_g}{2k_B T}\right) \quad ...(11.32)$$

जहाँ $$\sigma_i(0) = 2e\left(\frac{2\pi k_B T}{h^2}\right)^{3/2} (m^*_h m^*_e)^{3/4}(\mu_n + \mu_p)$$

$\sigma_i(0)$ एक नियतांक है तथा यह ताप पर निर्भर नहीं कर्ता हैं । इस प्रकार सेमी.. (11.32) नैज अर्धचालक की चालकता वर्जित ऊर्जा अन्तराल तथा ताप पर निर्भर करती है।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

4. नैज अर्धचालक में इलेक्ट्रॉन तथा की संख्या किस अनुपात में होती है?

----

5. नैज अर्धचालक के चालन बैण्ड में इलेक्ट्रॉन की संख्या किस पर निर्भर करती है

----

5. नैज अर्धचालक की चालकता किस पर निर्भर करती है

उदाहरण 11.1 नैज जरमेनियम में इलेक्ट्रॉन-होल प्रति घन मीटर की तुलना 27^0C तथा 47^0C पर करो (Ge के लिए $\Delta E_g = 0.75 eV$ तथा $k_B = 1.38\times10^{-23} J/K$)।

हल: नैज अर्धचालक में प्रति मी.^{3} इलेक्ट्रॉन-होल युग्मों की संख्या

$$n_i = AT^{3/2}\exp\left[\frac{-\Delta E_g}{2k_B T}\right]$$

T=27 + 273 = **300K** पर

$$(n_i)_1 = A(300)^{3/2}\exp\left(\frac{-\Delta E_g}{2k_B T}\right)$$

$$(n_i)_1 = A(300)^{3/2}\exp\left(\frac{-\Delta E_g}{2\times300k_B}\right)$$

तथा T=27 + 273 = 300 K पर

$$(n_i)_2 = A(300)^{3/2}\exp\left(-\frac{-\Delta E_g}{2\times320k_B}\right)$$

अब

$$\frac{(n_i)_2}{(n_i)_1} = \left(\frac{320}{300}\right)^{3/2}\exp\left\{\frac{\Delta E_g}{k_B}\left(\frac{1}{600}-\frac{1}{640}\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{32}{30}\right)^{3/2}\exp\left\{\frac{0.75\times1.6\times10^{-19}}{9600\times1.38\times10^{-23}}\right\}$$

$= (1.067)^{3/2}$ exp(0.905)

$$\log_{10}\left\{\frac{(n_i)_2}{(n_i)_1}\right\} = \frac{3}{2}\log(1.067)+\frac{0.905}{2.303}$$

$$\log_{10}\left\{\frac{(n_i)_2}{(n_i)_1}\right\} = 0.4501$$

$$\frac{(n_i)_2}{(n_i)_1} = 2.819$$

उदाहरण 11.2 नैज जरमेनियम अर्धचालक की चालकता 300K पर ज्ञात करो । 300K पर Ge के लिए $n_i = 2.5\times10^{13}$ /सेमी.^{3}, $\mu_n = 3900$ सेमी^{2}/वोल्ट-सेकण्ड तथा μ_p = 1900 सेमी.^{2} /वोल्ट-सेकण्ड

हल: नैज जरमेनियम अर्धचालक के लिए चालकता सूत्र से

$$\sigma_i = en_i(\mu_n + \mu_p)$$

$$= (1.6 \times 10^{-19} \times 2.5 \times 10^{13}(3900+1900)$$

$$= 4 \times 10^{-6}(5800)$$

$$= 23200 \times 10^{-6}$$

$\sigma_i = 0.023$ म्हो/सेमी.

अत: जरमेनियम अर्धचालक की चालकता $\sigma_i = 0.023$ म्हो/सेमी प्राप्त हुई ।

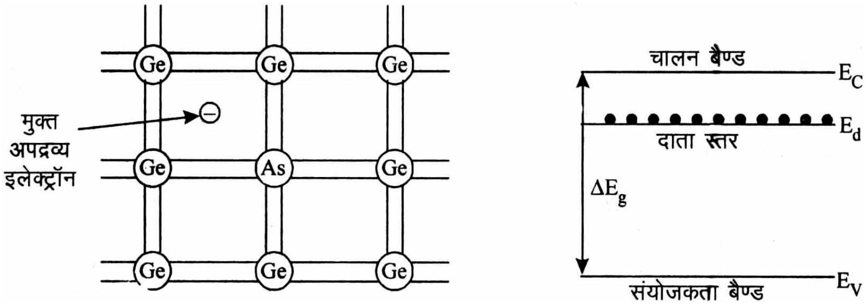
11.4 अपद्रव्यी अर्धचालक (Extrinsic semiconductor)

अनुच्छेद 11.3 से आप अध्ययन कर चुके है कि नैज अर्धचालकों की चालकता कम (अत्यल्प) होती है तथा यह ताप पर निर्भर करती हैं परन्तु ताप में वृद्धि से चालकता को एक सीमा ही बढ़ाया जा सकता है । अत: चालकता बढ़ाने के लिए नैज अर्धचालकों में अशुद्धि तत्व (अपद्रव्य) को मिलाया ज़ाता है । अपद्रव्य पदार्थ की मात्रा को नियंत्रित कर अपेक्षित चालकता प्राप्त कर सकते हैं । इस प्रकार प्राप्त अर्धचालक को अपद्रव्य अर्धचालक (extrinsic semiconductor) कहते हैं । इसमें अपद्रव्य की मात्रा अत्यल्प होती है । 10^{10} नैज अर्धचालक के परमाणुओं में एक परमाणु अशुद्धि तत्व होता है । इस प्रकार अपद्रव्यी तत्व के परमाणुओ की संख्या 10^{13}-10^{17} प्रति मील के लगभग होती है । अपद्रव्यी तत्व आवर्त सारणी के तृतीय या पंचम वर्ग के तत्वो में से होता है । इस प्रकार अपद्रव्यी अर्धचालक दो प्रकार के होते हैं. N -अर्धचालक तथा P -अर्धचालक । अब हम N तथा P -अर्धचालकों का अलग-अलग अध्ययन करेंगे ।

11.4.1 N-अर्धचालक (N-semiconductor)

नैज अर्धचालक (जरमेनियम या सिलीकॉन) चतुसंयोजी होते हैं । यदि इनमें पंचसंयोजी (पंचम वर्ग के तत्व फॉस्फोरस, आर्सनिक या एन्टीमनी) तत्व की अशुद्धि मिलायें तो प्राप्त अर्धचालक को N-अर्धचालक कहते हैं । जब पंच संयोजी तत्व का परमाणु नैज अर्धचालक के चतु:संयोजी परमाणु को प्रतिस्थापित करता है तो अपद्रव्य तत्व के चार इलेक्ट्रॉन निकटवर्ती नैज अर्धचालक जरमेनियम तथा सिलीकॉन के चार परमाणुओं से सह-संयोजी आबंध बना लेते हैं तथा पाँचवा इलेक्ट्रॉन मूल परमाणु से अत्यन्त दर्बल आबंध से बंधा होता है । यह इलेक्ट्रॉन परमाणु से मुक्त हो जाता है तथा यह नैज अर्धचालक के जालक में स्वतंत्र रूप से विचरण कर सकता है जैसा कि चित्र 11.10(a) में दर्शाया गया है । इस आबंध की ऊर्जा ऊष्मीय ऊर्जा से कम होती है अत: यह इलेक्ट्रॉन सामान्य ताप पर चालन बैण्ड में संक्रमण कर जाता है । इस प्रकार

पंचम वर्ग अशुद्धि तत्व का प्रत्येक परमाणु एक मुक्त इलेक्ट्रॉन को आवेश वाहक के रूप में प्रदान करता है अत: इस को दाता अशुद्धि कहते हैं



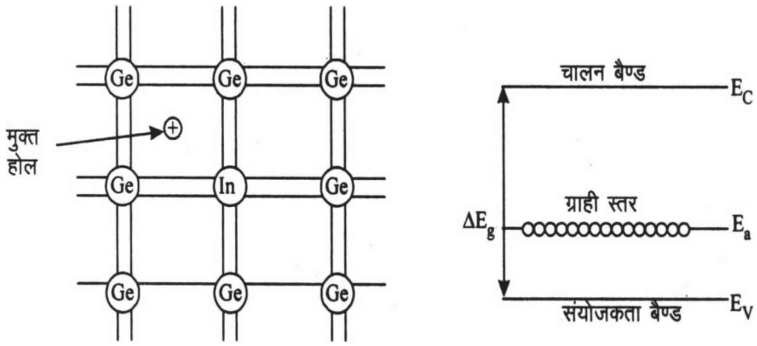
(a) **(b)**

चित्र 11.10

अशुद्धि तत्व के पाँचवें इलेक्ट्रॉन के ऊर्जा स्तर की स्थिति चालन बैण्ड तथा संयोजकता बैण्ड के मध्य होती है जैसा कि चित्र 11.10(b) में चालन बैण्ड के नीचे दर्शाया गया है । परमशून्य ताप पर ये सभी स्तर भरे होते हैं परन्तु सामान्य ताप पर अत्यल्प ऊर्जा के कारण उनमें से अधिकतर इलेक्ट्रॉन चालन बैण्ड में संक्रमण कर जाते हैं । इस प्रकार अपद्रव्यी अर्धचालक के चालन बैण्ड में इलेक्ट्रॉन अधिक होने के कारण वैद्युत चालन में प्रमुख होते हैं । इस प्रकार के अपद्रव्यी अर्धचालक को N -अर्धचालक कहते हैं ।

11.4.2 P -अर्धचालक (P-semiconductor)

इसी प्रकार यदि नैज अर्धचालक (जरमेनियम सिलीकॉन) में तृतीय वर्ग के तत्व (बोरोन, इंडियम या गेलियम) की अशुद्धि मिलायी जाये तो प्राप्त अर्धचालक को P- अर्धचालक कहते हैं । चित्र 11.1 (a) में जब तृतीय वर्ग के तत्व (त्रिसंयोजी तत्व) के णुमाणु चतु:संयोजी जरमेनियम या सिलीकॉन के परमाणु को प्रतिस्थापित करता है तो त्रिसंयोजी तत्व के तीन इलेक्ट्रॉन निकटवर्ती नैज अर्धचालक के तीन परमाणुओं से सहसंयोजी आबंध बना लेते हैं जबकि नैज अर्धचालक के चौथे निकटवर्ती परमाणु का आबंध पूर्ण नहीं हो पाता है । इसमें एक इलेक्ट्रॉन की न्यूनता रह जाती हैं । इस न्यूनता को होल या कोटर कहते हैं तथा इसकी इलेक्ट्रॉन ग्रहण करने की क्षमता होती है ।



(a) **(b)**

चित्र 11.11

त्रिसंयोजी तत्व मिलाने के कारण उत्पन्न होल का ऊर्जा स्तर वर्जित ऊर्जा अन्तराल में संयोजकता बैण्ड के कुछ ऊपर होता है । इसे ग्राही स्तर कहते है । जैसा कि चित्र व व 11.11(b) में दिखाया गया हैं । प्रत्येक त्रिसंयोजी परमाणु से एक होल उत्पन्न होता है । यह धनावेश वाहक की तरह कार्य करता है । इस प्रकार इस अपद्रव्यी अर्धचालक में होल मुख्य आवेश का कार्य करते हैं । अत: इस प्रकार के अर्धचालक को P- अर्धचालक कहते हैं ।

11.4.3 N व P अर्धचालकों में आवेश वाहक सान्द्रता (Charge carrier concentration in N and P -semiconductor)

हम देख चुके है कि यदि नैजं अर्धचालक में अत्यल्प मात्रा में आवर्त सारणी के तृतीय वर्ग के तत्व की अशुद्धि मिलायी जाती है तो P- अर्धचालक प्राप्त होता है । इसमें होल प्रमुख आवेश वाहक का कार्य करते हैं । इसी प्रकार यदि पंचम वर्ग के तत्व की अशुद्धि मिलायी जाती है तो P- अर्धचालक प्राप्त होता है । इसमें इलेक्ट्रॉन प्रमुख आवेश वाहक का कार्य करते हैं ।

दोनों N तथा P अर्धचालकों में इलेक्ट्रॉन जो कि आयन उत्पन्न करता है अर्थात् इलेक्ट्रॉन को दान करने के बाद दाता अशुद्धि परमाणु धनायन बनते हैं तथा ग्राही परमाणु इलेक्ट्रॉन को ग्रहण कर ऋणायन बनते हैं ।

इलेक्ट्रॉन ऊर्जा ग्रहण कर इलेक्ट्रॉन-होल युग्म उत्पन्न करता है । यह इलेक्ट्रॉन-होल युग्म उत्पन्न करने के लिए आवश्यक ऊर्जा से अधिक ऊर्जा ग्रहण करता है । इसलिए यह सम्भव है कि ताप जिस पर नैज अर्धचालक में इलेक्ट्रॉन तथा होल द्वारा चालन होता है से कम ताप पर N- अर्धचालक में इलेक्ट्रॉन द्वारा चालन की परिस्थिति कायम रहती है तथा P अर्धचालक में होल द्वारा चालन की परिस्थिति कायम रहती है । इस प्रक्रम के दौरान न तो आवेश जुडता है और न ही हटता है । अत: पूर्ण क्रिस्टल को विद्युत उदासीन माना जा सकता है क्योंकि जब इलेक्ट्रॉन दाता अशुद्धि परमाणु से चालन बैण्ड में संक्रमण करता है तो यह माना जा जाता है कि सभी दाता अशुद्धि परमाणु सामान्य ताप पर पूर्णत: आयनित होते हैं अर्थात् चालन बैण्ड इलेक्ट्रॉन घनत्व को दाता अशुद्धि परमाणुओं के घनत्व N_D के समान माना जा सकता है । इसी प्रकार सामान्य ताप पर P- अर्धचालक में ग्राही स्तर पूर्णत: भरा हुआ मान सकते हैं तथा संयोजकता बैण्ड में होल घनत्व को ग्राही परमाणुओं के घनत्व N_A के समान ले सकते हैं ।

वास्तव में नैज अर्धचालक के परमाणु की तुलना में अशुद्धि परमाणु[ओं की संख्या बहुत कम (एक परमाणु प्रति 10^6 -10^{10} नैज परमाणु होती है । इसलिए अशुद्धि अपमिश्रण (doping) का नैज अर्धचलक में इलेक्ट्रॉन होल के उत्पादन तथा पुनर्योजन प्रक्रम पर नगण्य प्रभाव पड़ता है, अर्थात् नैज अर्धचालक सेमी.., (11.3) में कोई परिवर्तन नहीं होता हैं ।

$$np = n_i^2$$

इस सेमी.करण से स्पष्ट है कि जब अधिसंख्यक वाहकों की संख्या में अपमिश्रण द्वारा नैज मान से वृद्धि n_i^2, को नियतांक रखने के लिए अल्प संख्यक आवेश वाहकों की संख्या में

स्वत: कमी हो जाती हैं । अल्प संख्यक आवेश वाहकों की संख्या में कमी को पदार्थ की पूर्णतया आवेश उदासीनता का उपयोग कर ज्ञात कर सकते हैं अर्थात्,

$$P+N_D = n+N_A \quad ...(11.33)$$

सेमी.. (11.3) से

$n = \frac{n_i^2}{p}$ तथा $p = \frac{n_i^2}{n}$ का मान सेमी.. (11.33) में रखने पर

$$p + N_D = \frac{n_i^2}{p} + N_A$$

$$p^2 - p(N_A - N_D) - n_i^2 = 0$$

तथा $$n^2 - n(N_D - N_A) - n_i^2 = 0 \quad ...(11.34)$$

सेमी. (11.34) को हल करने पर

$$p = \frac{N_A - N_D}{2} \pm \left(\frac{(N_A - N_D)^2}{4} + n_i^2 \right)^{1/2}$$

तथा $$n = \frac{N_D - N_A}{2} \pm \left(\frac{(N_D - N_A)^2}{4} + n_i^2 \right)^{1/2} \quad ...(11.35)$$

स्थिति -I नैज अर्धचालक के लिए

$$N_A = N_D = 0$$

सेमी.. (11.35) से

$$p = n = n_i$$

स्थिति -II P-अर्धचालक के लिए

$N_D \cong 0$ तथा $N_A >> n_i$

सेमी. (11.35) के हल से

$$p_p = \frac{+N_A + N_A\sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_A^2}}}{2}$$

तथा $$n_p = \frac{-N_A + N_A\sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_A^2}}}{2}$$

सेमी.. (11.34) के दूसरे हल से n तथा p के ऋणात्मक मान प्राप्त होते है, अत: इन्हें छोड़ देते हैं ।

$$n_p = \frac{N_A}{2} + \frac{N_A}{2}\left(1 + \frac{2n_i^2}{N_A^2}\right)$$

$$= N_A + \frac{n_i^2}{N_A^2}$$

$$p_p = N_A \; [\because n_i^2 << N_A] \qquad ...(11.36)$$

इसी प्रकार

$$n_p = \frac{-N_A}{2} + \frac{N_A}{2}\left(1 + \frac{2n_i^2}{N_A^2}\right)$$

$$n_p = \frac{n_i^2}{N_A} \qquad ....(11.37)$$

स्थिति -III N-अर्धचालक के लिए

N_A = 0 तथा $N_D >> n_i$

सेमी.. (11.34) के हल

$$p_n = \frac{-N_D}{2} + \frac{N_D}{2}\sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_D^2}}$$

इसी प्रकार

$$p_n = \frac{-N_D}{2} + \frac{N_D}{2}\left(1 + \frac{2n_i^2}{N_D^2}\right)$$

$$p_n = \frac{n_i^2}{N_D} \qquad [\because N_D >> n_i^2] \qquad ...(11.38)$$

$$n_n = \frac{N_D}{2} + \frac{N_D}{2}\sqrt{1 + \frac{4n_i^2}{N_D^2}}$$

$$= N_D + \frac{n_i^2}{N_D}$$

$$n_n = N_D \qquad [\because n_i^2 >> N_D] \qquad ...(11.39)$$

सेमी.. (11.36) व (11.39) से स्पष्ट है कि अधिसंख्यक आदेश वाहक घनत्व लगभग अशुद्धि परमाणु घनत्व के समान होता है तथा अल्प संख्यक आवेश वाहक घनत्व अपेक्षाकृत बहुत कम होता है । इस प्रकार P- अर्धचालक में होल आवेश वाहक का कार्य करते हैं जबकि N- अर्धचालक में इलेक्ट्रॉन आवेश वाहक का कार्य करते हैं ।

11.4.4 N व P- अर्धचालकों में फर्मी स्तर (Fermi level in N and P-semiconductor)

अपद्रव्यी अर्धचालकों (N व P) में अधिसंख्यक आवेश वाहक घनत्व, अशुद्धि परमाणु घनत्व के समान होता है । सेमी.. (11.36) व (11.39) से

$$p_p = N_A$$

तथा $n_n = N_D$

जिस प्रकार अनुच्छेद 11.3 में नैज अर्धचालक में फर्मी स्तर ज्ञात किया है, उसी प्रकार अपद्रव्यी अर्धचालकों के लिए भी फर्मी स्तर की स्थिति ज्ञात कर सकते हैं । कम ताप पर N-अर्धचालक के लिए फर्मी स्तर

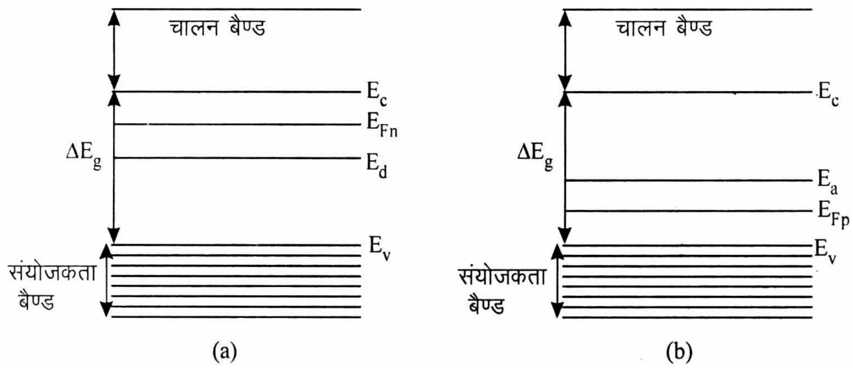
$$E_{F_n} = \frac{E_d + E_c}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_D}{N_c} \quad ...(11.40)$$

तथा P- अर्धचालक के लिए फर्मी स्तर

$$E_{Fp} = \frac{E_a + E_v}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \frac{N_A}{N_v} \quad ...(11.41)$$

जहाँ E_a तथा E_d क्रमशः ग्राही व दाता स्तरों की ऊर्जाएं तथा N_A, व N_D क्रमशः ग्राही व दाता परमाणु घनत्व है।

सेमी. (11.40) व (11.41) में यदि T = 0k हैं तो N- अर्धचालक के लिए फर्मी स्तर E_c तथा E_d के मध्य में होगा तथा P- अर्धचालक के लिए E_v तथा E_a के ठीक मध्य में होगा । चित्र 11.12 (a) तथा (b) में ट्रे N तथा P- अर्धचालकों के फर्मी स्तर को दर्शाया गया हैं ।



चित्र 11.12

11.5.5 N व P -अर्धचालकों की चालकता तथा गतिशीलता (conductivity and mobility of N and P-semiconductors)

पिछले खण्ड 11.3 में आप देख चुके है कि नैज अर्धचालक की चालकता निम्न सेमी.करण (11.28) से दी जाती हैं

$$\sigma_i = e(n\mu_n + p\mu_p)$$

अब हम N व P- अर्धचालक के लिए चालकता ज्ञात करेंगे ।

N - अर्धचालक के लिए

$$n = N_D \text{ तथा } p = \frac{n_i^2}{N_D}$$

तथा $$\therefore \sigma_n = e\left(N_D\mu_0 + \frac{n_i}{N_D}\mu_p\right)$$

या $$\sigma_n = e\left(\mu_n + \frac{n_i^2}{N^2_D}\mu_p\right)N_D$$

$$\sigma_n = eN_D\mu_n \quad \left[\because \frac{n_i^2}{N^2_D} << 1\right] \qquad ..(11.42)$$

P - अर्धचालक के लिए

$$p = N_A \text{ तथा } n = \frac{n_i^2}{N_A}$$

$$\therefore \sigma_n = e\left(\frac{n_i^2}{N_A}\mu_n + N_A\mu_p\right)$$

या $$\sigma_p = eN_A\left(\frac{n_i^2}{N^2_A}\mu_n + \mu_p\right)$$

$$\sigma_p = eN_A\mu_p \left[\because \frac{n_i^2}{N^2_A} << 1\right] \qquad ....(11.43)$$

इस प्रकार अपद्रव्यी अर्धचालक की चालकता दाता या ग्राही परमाणुओं के संख्या घनत्व पर निर्भर करती

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

7. अपद्रव्यी अर्धचालक किसे कहते है?

----

8. N--अर्धचालक में फर्मी स्तर कहाँ होता है?

----

9. अपद्रव्यी अर्धचालक की चालकता किस पर निर्भर करती है?

उदाहरण 11.3 जरमेनियम में प्रति घन सेमी दाता परमाणु की सान्द्रता कितनी होगी ताकि इसकी चालकता 300K पर 2 म्हो/सेमी हो । (μ_n = 3900 सेमी^{2} e= 1.6 x 10^{-19}कूलॉम)

हल : N- अर्धचालक की चालकता

$$\sigma = ne\mu_n$$

दिया है

σ =2 म्हो / सेमी

e=1.6x 10^{-19} कूलाम

μ_n =3900 सेमी^{2} / वोल्ट-सेकण्ड

अत: दाता परमाणु की सान्द्रता

$$n = \frac{\sigma}{e\mu_n}$$

$$n = \frac{2}{1.6 \times 10^{-19} \times 3900}$$

n=3.2 $n = 3.2 \times 10^{15}$ परमाणु / सेमी^{3}

उदाहरण 11.4 P - अर्धचालक में फर्मी स्तर संयोजकता बैण्ड के ऊपर 0.4eV पर स्थित है । यदि ग्राही परमाणु की सान्द्रता तीन गुणा कर देते हैं तो फर्मी स्तर की नयी स्थिति ज्ञात करो ।

हल : P - अर्धचालक के लिए होल संख्या घनत्व

$$p_p = N_A = N_v \exp\left(-\frac{E_F - E_V}{k_B T}\right)$$

दिया है $E_F - E_V = 0.4eV$

$N_A = 3N_A$

$k_B T = 0.030eV$

इसी प्रकार $p' = N'_A = 3N_A = N_V \exp\left(-\frac{E'_F - E_V}{k_B T}\right)$

दोनों सेमी.करणों की तुलना करने पर

$$(E'_F - E_V) = (E_F - E_V) - k_B T \ln 3$$

=0.4-0.03 x 1.098

=0.41 - 0.03294

$$(E'_F - E_V) = 0.367eV$$

अत: नये फर्मी स्तर की स्थिति 0.367 eV पर होगी ।

उदाहरण 11.5 एक सिलीकॉन के वेफर में फॉसफोरस मिलाया जाता है तथा उसकी मात्रा व 10^{13} परमाणु प्रति सेमी^{3} हैं । यदि सभी दाता परमाणु सक्रिय हो तो कमरे के ताप पर इसकी प्रतिरोधकता क्या होगी? (μ_n =1250 सेमी^{2} वो-से, e= 1.6 x 10^{-19} कूलॉम)

हल- दिया है

N_D = 10^{13} परमाणु /सेमी^{3}

μ_n =1250 सेमी^{2}/ वो-से

e=1.6 x 10^{-19} कूलाम

$\because$ N- अर्धचालक की प्रतिरोधकता

$$\rho = \frac{1}{N_D e \mu_n}$$

$$\rho = \frac{1}{10^{13} \times 1.6 \times 10^{-19} \times 1250}$$

$$\rho = \frac{1}{2000.0 \times 10^{-6}}$$

$$\rho = \frac{10^3}{2}$$

$$\rho = 500 \text{ ओम-सेमी}$$

अत: सिलीकॉन की प्रतिरोधकता 500 ओम-सेमी. प्राप्त होती है ।

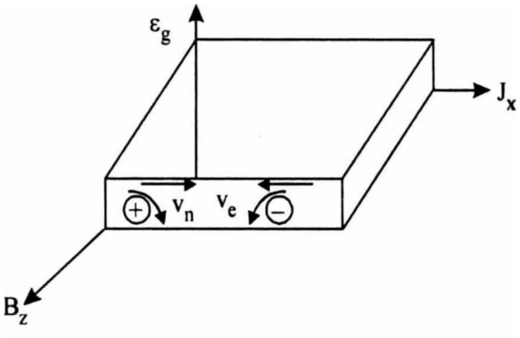
11.5 अर्धचालकों में हॉल प्रभाव (Hall effect in semiconductors)

हॉल के अनुसार जब चुम्बकीय क्षेत्र किसी धारा प्रवाहित चालक के लम्बवत आरोपित करते हैं तो यह धारा तथा चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा के लम्बवत् दिशा में विभवान्तर उत्पन्न करता है, इसे हॉल प्रभाव कहते हैं । विभवान्तर के कारण उत्पन्न क्षेत्र को हॉल क्षेत्र कहते हैं ।

अब हम नैज अर्धचालकों में हाल प्रभाव पर विचार करते हैं जिनमें दोनों प्रकार के आवेश वाहक उपस्थित हैं । इलेक्ट्रॉन तथा होल का आवेश विपरीत होता है अत: आरोपित विद्युत क्षेत्र के कारण ये दोनों विपरीत दिशा में गमन करते हैं तथा लॉरेन्ज बल($\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$) दोनों को एक ही दिशा में मोड़ता (deflect) है (अर्थात् पट्टी के ऊपर की दिशा में) जैसा कि चित्र 11.13 में दिखाया गया है । यद्यपि हॉल क्षेत्र जो कि इलेक्ट्रॉन तथा होल के मुड़ने के कारण उत्पन्न होता है वह विपरीत दिशा में होता है । यदि दो आवेश वाहक (इलेक्ट्रॉन, होल) विद्युत क्षेत्र $\in_x$ में x दिशा में प्रवाहित होते हैं तो इनके कारण धारा घनत्व (सेमी.. 11.27)

$$J_x = J_x(e) + J_x(h)$$

$$= e(n\mu_n + p\mu_p) \in_x \quad ...(11.44)$$



चित्र 11.13

y -दिशा में इलेक्ट्रॉन तथा होल पर दो क्षेत्र कार्य करते हैं । लोरेन्ज क्षेत्र $\in_L(e)$ इलेक्ट्रॉन पर, $\in_L(h)$

$\in_H$ होल पर तथा हॉल क्षेत्र $\in_H$ होल तथा इलेक्ट्रॉन पर कार्य करते हैं । अत: y-दिशा में धारा घनत्व

$$J_y = J_y(e) + J_y(h)$$

$$= ne\mu_n(\in_y - v_{ex}B_z) + pe\mu_p(\in_y - v_{hx}B_z) \quad ...(11.46)$$

जहाँ $\quad v_{ex} = -\mu_n \in_x$ तथा $v_{hx} = \mu_p \in_x$ ...(11.46)

परन्तु आदेश का y -दिशा में प्रवाह अनुमत नहीं हैं अत: $J_y = 0$ होता है इसलिए सेमी.. (11.45) $J_y = 0$) रखने पर

$$ne\mu_n \in_y + pe\mu_p \in_y = -ne\mu_n\mu_n \in_x B_z + pe\mu_p\mu_p \in_x B_z$$

$$\in_y = \frac{p\mu^2{}_p - n\mu^2{}_n}{(n\mu_n + p\mu_p)} . \in_x B_z \quad ...(11.47)$$

$\in_x$ का मान सेमी.. (11.44) से (11.47) में रखने पर

$$\in_y = \frac{p\mu^2{}_p - n\mu^2{}_n}{(n\mu_n + p\mu_p)^2} . \frac{J_x B_z}{e} \quad ....(11.48)$$

∴हॉल नियतांक

$$R_H = \frac{\in_y}{J_x B_z} = \frac{1}{e} . \frac{p\mu^2{}_p - n\mu^2{}_n}{(n\mu_n + p\mu_p)^2} \quad ...(11.49)$$

N - अर्धचालक के लिए

P << n

अतः सेमी.. (11.49) से

$$R_H = \frac{1}{e}\left(-\frac{n\mu^2{}_n}{(n\mu_n)^2} \right)$$

$$R_H = -\frac{1}{en} \quad ...(11.50)$$

इसी प्रकार P - अर्धचालक के लिए

p>>n

$$R_H = \frac{1}{ep} \quad ...(11.51)$$

सेमी.. (11.49) से इलेक्ट्रॉन तथा होल की होल गतिशीलता ज्ञात कर सकते है

$\mu_H = \sigma R_H$

$$= \frac{p\mu^2{}_p - n\mu^2{}_n}{(n\mu_n + p\mu_p)} \qquad \left[\because \sigma = \frac{J_x}{\in_y} \right] \quad ...(11.52)$$

नैज अर्धचालक के लिए $n=p=n_i$ अत: सेमी.. (11.52) से

$$\mu_H = \mu_p - \mu_n$$

सामान्यतया $\mu_n > \mu_p$, इसलिए μ_H का मान नैज अर्धचालक के लिए ऋणात्मक होता है । सेमी.. (11.50) तथा (11.51) से हॉल नियतांक का मान ज्ञात कर अर्धचालक में वाहक के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकते हैं । यदि R_H का मान ऋणात्मक है तो अर्धचालक में इलेक्ट्रॉन आवेश वाहक होंगे तथा यदि धनात्मक है तो अर्धचालक में होल मुख्य आवेश वाहक होंगे । इस प्रकार होल प्रभाव से हम आवेश वाहक घनत्व तथा आवेश वाहकों की गतिशीलता ज्ञात कर सकते हैं ।

11.6 सारांश (Summary)

- इलेक्ट्रॉन द्वारा बैण्ड में अध्यासित होने की प्रकृति तथा बैण्डों के बीच वर्जित ऊर्जा अन्तराल के आधार पर ठोसों को तीन भागों चालक, अर्धचालक तथा कुचालक में वर्गीकृत किया गया है ।
- अर्धचालक को नैज तथा अपद्रव्यी -अर्धचालक में वर्गीकृत किया गया हैं तथा अपद्रव्यी अर्धचालक दो प्रकार के होते हैं (i) N- अर्धचालक (ii) P- अर्धचालक ।
- नैज अर्धचालक में सामान्य ताप पर मुक्त आवेश वाहक सान्द्रता अत्यल्प होती है तथा ताप में वृद्धि से अत्याधिक बढ़ती हैं जबकि N तथा P - अर्धचालक में अधिसंख्यक आवेश वाहक घनत्व क्रमश: दाता तथा ग्राही अपद्रव्य परमाणु घनत्व के बराबर होता है अर्थात् $n_n=N_D$ तथा p_p-N_A,
- $m^*_{e=}$ m^*_h के लिए नैज अर्धचालक में फर्मी स्तर चालन बैण्ड तथा संयोजक बैण्ड के ठीक मध्य में होता है तथा ताप में वृद्धि से फर्मी स्तर चालन बैण्ड की ओर खिसक जाता है ।
- कम ताप पर N तथा P - अर्धचालकों में फर्मी स्तर क्रमश: चालन बैण्ड व दाता स्तर तथा संयोजकता बैण्ड व ग्राही स्तर के ठीक मध्य में होता हैं ।
- अर्धचालक में इलेक्ट्रॉन तथा होल के कारण धारा एक ही दिशा में होती हैं इनकी चालकता दोनों का योग होती है अर्थात्।

  $$\sigma = \sigma_e + \sigma_p = e(n\mu_n + p\mu_p)$$
- अर्धचालक की चालकता की ताप के साथ चरघातांकी रूप में वृद्धि होती है ।
- अर्धचालक की गतिशीलता अपवाह वेग तथा आरोपित विद्युत क्षेत्र की निष्पति होती है।
- नैज अर्धचालक में n = p=n_i अर्थात् दोनों आवेश वाहक इलेक्ट्रॉन तथा होल उपस्थित होने के कारण दोनों हॉल नियतांक में सहायक होते हैं ।

  $$R_H = \frac{1}{e}\cdot\frac{p\mu^2{}_p - n\mu^2{}_n}{(n\mu_n + p\mu_p)^2}$$

  $R_H = -\dfrac{1}{ne}$ (N - अर्धचालक के लिये)

  $R_H = -\dfrac{1}{pe}$ (N - अर्धचालक के लिये)

11.7 शब्दावली (Glossary)

अर्धचालक	Semiconductor
अन्तराल	Gap
अपद्रव्य	Impurity
अपमिश्रण	Doping
अवस्था	State
आवरणी प्रभाव	screening effect
ऊर्जा	Energy
ऊर्जा स्तर	Energy level
गतिशीलता	Mobility
ग्राही	Accepter
घनत्व	Density
सान्द्रता	Concentration
चालकता	conductivity
दाता	donor
नैज	Intrinsic
वर्जित	Forbidden
साम्यावस्था	Equilibrium
हीरक संरचना	Diamond structure

11.8 संदर्भ ग्रंथ (Reference books),

M.A.Wahab	Solid state Physics Structure and Properties of Materials	Narosa Publishing House, New Delhi
L.V.Azaroff	Introduction of Solids	Tata McGraw Hill, New Delhi
एम.पी.सक्सेना	परिपथ विश्लेषण एवं इलेक्ट्रॉनिकी	कॉलेज बुक हाउस, जयपुर

पीआरसिह एवं एसएस : रावत

11.9 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to self assessment questions)

1. ठोसों को ऊर्जा बैण्ड के आधार पर तीन भागों में वर्गीकृत किया गया है : चालक, अर्धचालक तथा
2. कुचालक अर्धचालक की चालकता 10^{-7} से 10^{1} म्हो / मी की कोटि की होती है।

3. अर्धचालक दो प्रकार के होते है (i) नैज तथा (ii) अपद्रव्यी अर्धचालक
4. नैज अर्धचालक में इलेक्ट्रॉन तथा होल का अनुपात व 1 एक होता हैं ।
5. नैज अर्धचालक में चालन बैण्ड में इलेक्ट्रॉन की संख्या ताप तथा वर्जित ऊर्जा अन्तराल पर निर्भर करती है ।
6. नैज अर्धचालक की चालकता इलेक्ट्रॉन तथा होल संख्या घनत्व पर निर्भर कारती है ।
7. नैज अर्धचालक में यदि पंच या त्रिसंयोजी तत्व के परमाणु की अशुद्धि मिलायी जाती है तो प्राप्त अर्धचालक को अपद्रव्यी अर्धचालक कहते है ।
8. N अर्धचालक में फर्मी स्तर चालन बैण्ड तथा दाता स्तर के मध्य में होता इं ।
9. अपद्रव्यी अर्धचालक की चालकता अधिसंख्यक आवेश वाहक घनत्व के सपनुपाती होती हैं ।

11.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type question)

1. आवेश वाहक सान्द्रता, ताप पर किस प्रकार निर्भर करती है?
2. अर्धचालक की चालकता तथा गतिशीलता में क्या सम्बंध होता है?.
3. अपद्रव्यी अर्धचालक कितने प्रकार के होते हैं?
4. अपद्रव्यी अर्धचालक में कौन-कौन से तत्व के परमाणु की अशुद्धि मिलायी जाती है
5. नैज अर्धचालक में फर्मी स्तर कहाँ स्थित होता है?
6. हॉल प्रभाव को परिभाषित कीजिए।
7. N - अर्धचालक के लिए हॉल नियतांक तथा इलेक्ट्रॉन संख्या घनत्व में क्या सम्बंध है?

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type question)

8. ऊर्जा बैण्ड के आधार पर चालकों, कुचालको तथा अर्धचालकों का वर्गीकरण कीजिए ।
9. नैज तथा अपद्रव्यी अर्धचालकों में अन्तर उदाहरणों सहित समझाइये ।
10. नैज अर्धचालक में इलेक्ट्रॉन तथा होल वाहक सान्द्रता ज्ञात कीजिए ।
11. नैज तथा अपद्रव्यी अर्धचालकों की चालकता का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए ।
12. N - अर्धचालक में आवेश वाहक सान्द्रता का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए
13. अर्धचालकों में हॉल प्रभाव का विस्तृत वर्णन कीजिए ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

14. एक सिलीकॉन के प्रतिदर्श की लम्बाई 2 सेमी तथा अनुप्रस्थ काट 4 मिमी है इस पर 1 वोल्ट विभान्तर लगाने से 8 mA की धारा प्रवाहित होती है । यदि इलेक्ट्रॉन की गतिशीलता 0.13 मी^{2}वो-से है, तो मुक्त इलेक्ट्रॉन संख्या घनत्व तथा अपवाह वेग ज्ञात करो ।

(**उत्तर :** $n=1.92 \times 10^{21}$/मी^{3}, v_n=6.51मी/से)

15. 300K पर नैज जरमेनियम अर्धचालक में इलेक्ट्रॉन -होल युग्म संख्या $2.5 x 10^{19}$/मी^{3} है 10 K ताप में वृद्धि करने पर इलेक्ट्रॉन होल युग्मों में वृद्धि की गणना करो ।
(ΔE_g = 0.72eV k=1.38 J/k)

(**उत्तर** : 1.61×10^{19}प्रति मी^{3})

16. सिलीकॉन में 300K नैज आवेश घनत्व 1.5×10^{16}मी^{3} है । यदि इलेक्ट्रॉन तथा होल की गतिशीलता
क्रमश: 0.13 तथा 0.05 मी^{2} है तो चालकता ज्ञात करो-
(a) नैज सिलीकॉन की ।
(b) सिलीकॉन एक दाता अपद्रव्य परमाणु 10^8 सिलीकॉन परमाणु धारण करता है ।

(**उत्तर:** σ_i=0.43×10^{-13} म्हो/मी, σ_{ext} = 10.4 म्हो/मी)

17. सिलीकॉन पदार्थ का ताप अन्तराल 100-400 K में हाल नियतांक -7.35×10^{-5} मी^{3} कूलाम प्राप्त होता है तथा विद्युत चालकता 200 म्हो/मी प्राप्त होती है । अर्धचालक की प्रकृति, आवेश वाहक घनत्व तथा गतिशीलता ज्ञात करो ।

(**उत्तर:** n -प्रकार का, 1.3×10^4 कूलॉम/मी^{3}, 1.47×10^{-2} मी^{2}/वोल्ट-सेकण्ड)

इकाई 12

परावैधुत गुण (Dielectric Properties)

इकाई की रूपरेखा

12.0 उद्देश्य

12.1 प्रस्तावना

12.2 दिध्रुव आघूर्ण

12.3 ध्रुवण

12.4 स्थानीय विद्युत क्षेत्र

12.5 परावैद्युतांक

12.6 ध्रुवणीयता व इसका चिरसम्मत सिद्धान्त

12.7 द्विध्रुवीय ध्रुवणीयता

12.8 सारांश

12.9 शब्दावली

12.10 सन्दर्भ ग्रन्थ

12.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

12.12 अभ्यासार्थ प्रश्न

12.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप -

- द्विध्रुव आघूर्ण के बारे में जान सकेंगे ।
- सुचालक एवं परावैद्युत पदार्थो में अन्तर जान सकेंगे ।
- माध्यम में बाहय विद्युत क्षेत्र आरोपित करने पर पदार्थ में उत्पन्न होने वाले ध्रुवण के सम्प्रत्य को समझ सकेंगे;
- माध्यम के स्थानीय विद्युत क्षेत्र को भी जान सकेंगे
- इलेक्ट्रॉनिक ध्रुवणशीलता एवं परावैद्युतांक के मध्य के सम्बन्ध को जान सकेंगे,
- ध्रुवणता के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे ।

12.1 प्रस्तावना (Introduction)

ठोस अवस्था भौतिकी के अन्तर्गत पदार्थो के परावैद्युत गुणों की जानकारी प्राप्त करना भौतिकी का एक महत्वपूर्ण विषय रहा है । कुछ पदार्थ ऐसे होते हैं जो विद्युत के सुचालक होते हैं' परन्तु प्रकृति में पाये जाने बहुत से ऐसे पदार्थ होते हैं जो कि विद्युत को प्रवाहित नहीं होने देते, परन्तु वे वैद्युतीय दृष्टिकोण से अपने अलग प्रकार के गुण दर्शाते हैं, ऐसे पदार्थो को परावैधुत पदार्थ कहते हैं । द्विध्रुव आघूर्ण इनका एक गुण होता है । अनुच्छेद 12.2 में द्विध्रुव आघूर्ण के बारे में विस्तार से चर्चा की गई है । इसी अनुच्छेद में सुचालक व परावैधुत पदार्थो

में अन्तर भी समझाया गया है । अनुच्छेद 12.3 में ध्रुवण का वर्णन किया गया है । अनुच्छेद 12.4 में पदार्थ में पाये जाने वाले स्थानीय विद्युत क्षेत्र का आकलन किया गया है । इलेक्ट्रॉनिक ध्रुवणशीलता एवं परावैधुतांक में सह सम्बन्ध होता है, जिसकी जानकारी आप अनुच्छेद 12.5 को पढ़कर कर सकेंगे । आगे के अनुच्छेदों 12.6 व 12.7 में अभिविन्यासी ध्रुवणशीलता एवं परावैद्युतांक, परावैद्युतांक एवं ध्रुवणीयता! एवं इसका चिरसम्मत सिद्धान्त समझाया गया है ।

12.2 द्विध्रुव आघूर्ण (diapole moment)

दो भिन्न विद्युतऋणता वाले परमाणुओं के मध्य बना सहसयोजन बंध ध्रुवी बंध कहलाता है । अणु की ध्रुवणता उसमें उपस्थित बंधों की ध्रुवणता व अणु की ज्यामिति पर निर्भर करती । किसी अणु की ध्रुवणता को उसके द्विध्रुव आघूर्ण (μ) के रूप में दर्शाया जाता है । द्विध्रुव आघूर्ण एक सदिश राशि है जो परिणात्मक तथा दिशात्मक होती है । किसी अणु AB के द्विध्रुव आघूर्ण को निम्न सेमी.करण द्वारा व्यक्त करते हैं-

$$\vec{\mu} = q\vec{r}$$

यहां q, A अथवा B पर उपस्थित आवेश की मात्रा

r, A तथा B के मध्य दूरी अर्थात A-B बंध की लम्बाई

चूंकि q का मान 10^{-10} स्थिर वै.ई. तथा r का मान 10^{-8} सेमी में होता है अतः μ का मान 10^{-18} सेमी स्थिर वै.ई.में होगा ।

द्वि ध्रुव आघूर्ण डिबाई इकाई (Debye unit) में दर्शाया जाता हैं तथा इसे D प्रकट करते हैं ।

1D = 10^{-18} सेमी स्थिर वै.ई.

सामान्यतया A व B में विद्युत ऋणता के अन्तर में वृद्धि के साथ-साथ आघूर्ण का मान भी बढ़ता हैं ।

अणु	विद्युत ऋणता के अन्तर	$\mu(D)$
H - I	0.4	0.38
H - Br	0.7	0.78
H - Cl	0.9	1.03
H - F	1.9	1.92

H_2और Cl_2, अणुओं का द्विध्रुव आघूर्ण शून्य होता है, क्योंकि इन अणुओं में परमाणु की, इलेक्ट्रॉनों को स्वयं अपनी ओर आकर्षित करने की समान प्रवृत्ति होती है । लेकिन हाइड्रोजन, फ्लोरीन और क्लोरीन की असमान ऋणता के कारण HF और HCl अणु बहुत उच्च द्विध्रुव आघूर्ण प्रदर्शित हैं ।

यद्यपि कार्बन और ऑक्सीजन की विद्युत ऋणता में भी अन्तर है, लेकिन CO_2 अणु में बन्धे हुए परमाणुओं की रेखीय ज्यामिति के कारण द्वि-ध्रुव आघूर्ण शून्य हो जाता है । O = C = O में दो C = O बंध का द्वि-ध्रुव आघूर्ण एक-दूसरे को संतुलित कर देता है, क्योंकि

वे परिमाण में समान हैं और एक-दूसरे के विपरीत हैं । इसी प्रकार समतलीय BF_4, चतुष्कफलकीय CH_4 और CCl_4 में व्यक्तिगत बंध ध्रुवीय है, परन्तु द्विध्रुव आघूर्ण शून्य होता है ।

विद्युत गुण के अनुसार माध्यम दो प्रकार के होते हैं -

(a) सुचालक

(b) डाइलेक्ट्रिक या कुचालक

इनका वर्णन अगले अनुच्छेद 12.2 में किया गया है । डाइइलेक्ट्रिक माध्यम ध्रुवीय दृष्टि से दो प्रकार के होते है:

(a) **ध्रुवी माध्यम (Polar medium) :** इस माध्यम के अणुओं में स्थायी द्विध्रुव आघूर्ण (dipole moment) होता है, जैसे H_20, NH_3, CH_3OH, आदि ।

(b) **अध्रुवी माध्यम (Nonpolar medium) :** इस माध्यम के अणुओं में स्थायी द्विध्रुव आघूर्ण (diapole moment) नहीं होता है अर्थात् अणु के सहित केन्द्र पर ही धन व ऋण आवेशों का केन्द्र होता है । ऐसे अणुओं के उदाहरण CH_4, CO_2,N_2 आदि होंगे ।

सुचालक और डाइलेक्ट्रिक (Good conductor and di electric)

वे माध्यम जिनमें विद्युत प्रवाह सुगमता से हो सके सुचालक होते हैं और जिनमें विद्युत प्रवाह न हो डाइलेक्ट्रिक या कुचालक होते हैं । धातुएं सुचालक होती हैं जबकि हवा कुचालक होती है । सुचालक को आवेशित करने पर आवेश सुचालक के पृष्ठ पर समान रूप से वितरित हो जाता है और यह पृष्ठ समविभव पृष्ठ (equipotential surface) कहलाता है । परन्तु डाइलेक्ट्रिक माध्यम में ऐसा नहीं होता है । डाइलेक्ट्रिक को आवेशित करने पर माध्यम ध्रुवित (polarised) हो जाता है, अत: डाइलेक्ट्रिक माध्यम के दो पृष्ठों के बीच विभव-अन्तर हो सकता है, पर इस विभव-अन्तर के कारण स्थायी धारा (steady current) प्रवाहित नहीं हो सकती है क्योंकि माध्यम विद्युत का कुचालक है ।

धातुएं विद्युत की सुचालक हैं । इनके परमाणुओं के बाहरी कक्ष के इलेक्ट्रॉन नाभि से इतनी कम ऊर्जा से बंधे होते हैं कि इन्हें मुक्त इलेक्ट्रॉन (free electron) कहते हैं । थोड़ा भी विद्युत बल लगाने से ये इलेक्ट्रॉन एक परमाणु से दूसरे परमाणु पर पहुंच जाते हैं, और स्थायी धारा प्रवाहित होने लगती है । यह धारा तब तक प्रवाहित होती है जब तक बाह्य बल लगा होता है । ऐसे माध्यम की प्रतिरोधकता (resistivity) बहुत कम (10^{-8}-10^3 ओम मी) होती है । ताप बढ़ाने से इन इलेक्ट्रॉनों की अनियमित गति (random motion) बढ़ जाती है, फलस्वरूप प्रतिरोधकता भी बढ़ जाती है । कुचालक माध्यम के इलेक्ट्रॉन को मुक्त करने के लिए अधिक ऊर्जा की आवश्यकता होती है । इनकी प्रतिरोधकता भी अधिक (10^8 - व 10^{12} ओम-मी) होती है । ताप बढ़ाने से इनकी प्रतिरोधकता कम हो जाती है क्योंकि अधिक ताप पर अधिक मुक्त इलेक्ट्रॉन हो सकते हैं, जिससे स्थायी धारा प्रवाहित हो सकती है । कुछ ऐसे भी पदार्थ हैं जिनकी प्रतिरोधकता (10^3- व 10^8 ओम-मी) सुचालक और कुचालक के बीच होती है, इन्हें विद्युत का अर्ध-चालक (semi conductor) कहते हैं । ताप बढ़ाने पर इनकी प्रतिरोधकता भी कम हो जाती है ।

जिस प्रकार मुक्त आकाश की विद्‌युतशीलता (electric permittivity) $\in_0$ = 8.85 x 10^{-12} फैरेड / मी है, इसी प्रकार यदि डाइलेक्ट्रिक माध्यम कि विद्‌युतशीलता $\in$ हो तो $K = \frac{\in}{\in_0}$ माध्यम की सापेक्ष विद्‌युतशीलता(relative permittvity) कहते हैं । सामान्यतया कुचालक माध्यम का स्थिरांक (1-6), अर्धचालक का डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक (1-6) और चालक का डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक (6-20)

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. द्‌विध्रुव आघूर्ण को परिभाषित कीजिये ।

----

2. द्‌विध्रुव आघूर्ण की इकाई क्या है

----

3. सुचालक व डाइलेक्ट्रिक में क्या अंतर है?

----

4. डाइलेक्ट्रिक माध्यम.ध्रुवीय दृष्टि से कितने प्रकार के होते है?

12.3 ध्रुवण (Polarisation)

डाइलेक्ट्रिक माध्यम में जब कोई बाह्य विद्‌युत क्षेत्र $\vec{E}$ लगाते हैं तो माध्यम के ध्रुवित अणु (polarised) हो जाते हैं ।

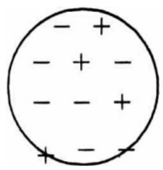
निम्न दो प्रकार के ध्रुवण (polarisation) संभव हैं :

इलेक्ट्रानिक ध्रुवण (Electronic polarisation)

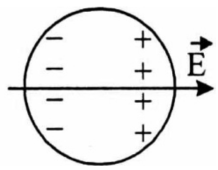
अभिविन्यासी ध्रुवण (Orientationalpolarisation)

(i) इलेक्ट्रानिक ध्रुवण (Electronic polarisation)

जब बाह्य क्षेत्र लगाते हैं तो अणु के धन आवेश व ऋण आवेश अपने स्थानों से हट जाते हैं । ऋण आवेश क्षेत्र तीव्रता के धन विभव की ओर और धन आवेश ऋण विभव की ओर हट जाता है जैसा कि चित्र 12.। एवं चित्र 12.2 में दिखाया गया है । -



चित्र 12.1

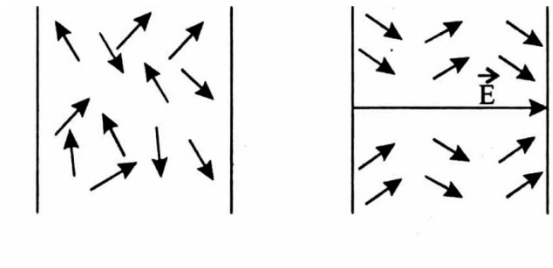


चित्र 12.2

ये आवेश अब भी अणु के अन्दर ही होते हैं जिससे आवेशों का बीजगणितीय योग शून्य रहता है क्योंकि इलेक्ट्रॉन की संहति प्रोटीन की संहति से बहुत कम होती है इसलिए प्रोटोन की तुलना में इलेक्ट्रॉन ही अपने स्थान से विस्थापित होते हैं । परिणामस्वरूप, अणु में प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण (induced dipole moment) उत्पन्न हो जाता हैं और इसे इलेक्ट्रॉनिक ध्रुवण कहते हैं । अध्रुवी माध्यम (non polar medium) में ध्रुवण प्रकिया का मुख्य कारण इलेक्ट्रॉनिक ध्रुवण ही है ।

(ii) अभिविन्यासी ध्रुवण (Orientational polarisation)

यह ध्रुवी माध्यम (polar medium) में होता है । ध्रुवी अणुओं के द्विध्रुव आधूर्ण (dipole moment) विद्युत क्षेत्र तीव्रता $\vec{E}$ लगाने से $\vec{E}$ की दिशा में घूम जाते हैं और माध्यम ध्रुवित हो जाता है जैसा कि चित्र 12.3 एवं चित्र 124.4 में प्रदर्शित है ।



चित्र 12.3 बिना क्षेत्र लगाये   चित्र 12.4 क्षेत्र लगाने के बाद

इस प्रकार बाह्य क्षेत्र 8 लगाने से माध्यम उपर्युक्त कारणो से ध्रुवित हो जाता है, पर अभिविन्यास ध्रुवण (orientation polarization) का मान सर्वाधिक होता है । यदि ध्रुवण के बाद प्रत्येक अणु में प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण (induced dipole moment) p हो तो इकाई आयतन में प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण $\vec{P}$ ध्रुवण वेक्टर कहलाता है ।

$$P=Np \qquad ...(12.1)$$

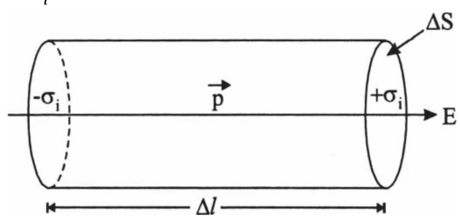
N, इकाई आयतन में अणुओ की संख्या है ।

चित्र 12.5 के अनुसार प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण

= आवेश x आवेशों के बीच की दूरी

$= (\sigma_i \Delta S).\Delta l$

$= \sigma_i \Delta V$



चित्र 12.5

σ_i, माध्यम के पृष्ठ पर प्रेरित आवेश क्षेत्र-घनत्व है और ΔV माध्यम का आयरन है। इसलिए इकाई आयतन में प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण ।

$$P = \sigma_i \qquad .....(12.2)$$

अर्थात ध्रुवण P, माध्यम के पृष्ठ पर प्रेरित आवेश क्षेत्र घनत्व (induced surface charge density) σ_i के बराबर होता है । इसकी इकाई कूलॉम /मी^{2} है ।

प्रत्येक अणु में प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण (p) बाह्य क्षेत्र की तीव्रता ($\vec{E}$) के अनुक्रमानुपाती है । इस समानुपाती स्थिरांक को अणु की ध्रुवणशीलता (polarizability)) α कहते हैं ।

$$p = \epsilon_0 \alpha E \qquad ...(12.3)$$

सेमी.. (12.1) से ध्रुवण वेक्टर P

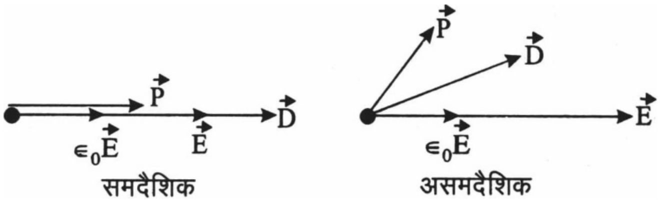
$$p = \epsilon_0 N\alpha E \qquad ...(12.4)$$

$N\alpha$ को χ_e भी लिखते हैं, χ_e माध्यम की विद्युत-प्रवृत्ति (electric susceptibility) है, डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक K की भांति इसकी भी कोई इकाई नहीं होती है ।

$$\chi_e = \frac{P}{\epsilon_0 E} \qquad ...(12.5)$$

या $$\frac{P}{E} = \epsilon_0 \chi_e \qquad ...(12.6)$$

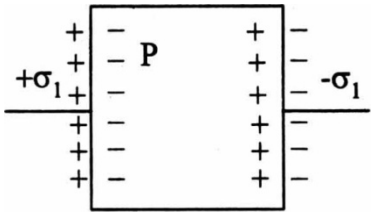
समदैशिक (isotropic) माध्यम में χ_e एक स्केलर राशि है, इसलिए P और' E एक ही दिशा में होते हैं जबकि असमदैशिक (anisotropic) माध्यम में χ_e का मान E की विभिन्न दिशाओं के लिंए अलग- अलग होता है इसलिए हम कह सकते हैं कि P और E की दिशा θ कोण पर हो सकती है, जैसा कि चित्र 12.6 में दिखाया गया है -



चित्र 12.6

$\vec{P}, \vec{E}$ और $\vec{D}$ में सम्बन्ध

यदि एक आवेशित समातंर प्लेट धारित्र में एक डाइलेक्ट्रिक माध्यम चित्र 12.7 के अनुसार रखें तो माध्यम ध्रुवित हो उठता है और उसके पृष्ठ पर आवेश क्षेत्र घनत्व (surface charge density) σ_i सेमी.. (12.2) के अनुसार P होता है । माध्यम में विद्युत क्षेत्र तीव्रता E प्लेट पर आवेश क्षेत्र घनत्व σ_1 के कारण है । प्लेट और डाइलेक्ट्रिक माध्यम के बीच अन्तराअणुक दूरी (intermolecular separation) के बराबर अन्तराल (spacing) सदैव रहता है । $+\sigma_1$ प्लेट के पास डाइलेक्ट्रिक माध्यम के पृष्ठ पर-P आदेश क्षेत्र घनत्व होगा जिससे +P आवेश घनत्व $+\sigma_1$ उस प्लेट पर प्रेरित हो जायेगा और प्लेट पर परिणामी आवेश क्षेत्र घनत्व



चित्र 12.7

$\sigma_2 = \sigma_1 + P$ ...(12.7)

यदि माध्यम के स्थान पर मुक्त आकाश ही होता तो

$$E = \frac{\sigma_1}{\in} \quad ....(12.8)$$

और डाइलेक्ट्रिक माध्यम के लिए भी क्षेत्र तीव्रता E ही हो तो

$$E = \frac{\sigma_2}{\in} \quad ...(12.9)$$

बाह्य क्षेत्र तीव्रता E लगाने से डाइलेक्ट्रिक माध्यम के कारण प्लेट पर आवेश क्षेत्र घनत्व सेमी.. (12.7) के अनुसार परिवर्तित हो जाता है । सेमी.. (12.8) व (12.9) को (12.7) में रखने पर

$$\in \vec{E} = \in_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D} \quad ....(12.10)$$

$\in \vec{E}$ वेक्टर को एक नये वेक्टर $\vec{D}$ से निरूपित करते हैं जिसे स्थानान्तरण वेक्टर (displacement vector) कहते हैं ।

सेमी. (12.10) को $\vec{E}$ से विभाजित करने से और $\frac{\vec{P}}{\vec{E}}$ का मान सेमी.. (12.6) से रखने पर

$$\in = \in_0 (1 + \chi_e) \quad ...(12.11)$$

या $$K = \frac{\in}{\in_0} = 1 + \chi_e = 1 + N\alpha \quad (\because \chi_e = N\alpha) \quad ...(12.12)$$

यह सेमी.. (12.12) एक महत्वपूर्ण सम्बन्ध है, जो डाइलेक्ट्रिक माध्यम के विभिन्न स्थिरांकों के पारपरिक सम्बन्ध को प्रदर्शित करता है । माध्यम की विद्युतशीलता (permitivity) हम निम्न प्रकार से भी परिभाषित कर सकते हैं $\in = \frac{\vec{D}}{\vec{E}}$, सदिश $\vec{D}$, $\in_0 \vec{E}$ व $\vec{P}$ का परिणामी सदिश है । समदैशिक माध्यम, (isotropic) में $\vec{D}$, $\vec{E}$ व $\vec{P}$ एक ही दिशा होते हैं जैसा कि चित्र 12.6 (समदैशिक) में दिखाया गया है, पर असमदैशिक माध्यम (an isotropic) में तीन अलग-अलग दिशाओं में होते हैं । असमदैशिक माध्यम में क्षेत्र तीव्रता $\vec{E}$ के अवयव E_x, E_y व E_z हों तो x- दिशा में ध्रुवण P_x केवल E_x के कारण ही नहीं होता वरन E_y व E_z के कारण भी x- दिशा में ध्रुवण हो सकता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

5. ध्रुवण क्या है?

----

6. पदार्थों में कितने प्रकार के ध्रुवण संभव है?

----

7. $\vec{P}, \vec{E}$ व $\vec{D}$ में सम्बन्ध लिखो।

उदाहरण 12.1 N.T.P. पर हीलियम गैस का परावैद्युतांक 1.000074 है । हीलियम परमाणुओ का द्विध्रुव आधूर्ण ज्ञात कीजिये जब इन पर 100 वोल्ट/मीटर का विद्युत क्षेत्र कार्यरत है ।

हल:-

प्रश्नानुसार K = $\in_r$ =1.00074

E = 100 वोल्ट /मीटर

तथा $\in_0$ = 8.85 x 10^{-12} फैरड/ मीटर

He गैस में प्रेरित ध्रुवण

$$P = \in_0 \chi E$$

$$= \in_0 (\in_r - 1)E \qquad [\because \in_r = (1+\chi)]$$

=8.85 x 10^{-12} x (74 x 10^{-6}) x 100

=6.55 x 10^{-14} कूलॉम / मीटर^2

1 मीटर^3 आयतन में He परमाणुओं की संख्या $N = \frac{6\times10^{23}}{22.4\times10^{-3}}$

$\therefore$ परमाणु का द्विध्रुव आधूर्ण $p = \frac{P}{N}$

$$p = \frac{6.55\times10^{-14}\times22.4\times10^{-3}}{6\times10^{23}}$$

=2.446 x 10^{-9} कूलॉम-मीटर

12.4 स्थानीय विद्युत क्षेत्र (Local electric field)

यह स्पष्ट है कि, ठोसों में- कोई भी अणु या परमाणु केवल बाहय विद्युत क्षेत्र का ही अनुभव नहीं करता है वरन् द्विध्रुवों से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र भी उस पर कार्यरत रहते हैं । इस अवस्था में हमें परिणामी क्षेत्र ज्ञात करना होता है । इस परिणामी या कुल क्षेत्र के मान को हम स्थानीय क्षेत्र कहते हैं ।

इस क्षेत्र के परिकलन के लिये द्विधुवु को एक त्रिज्या की गोलीय कोटर से घेरा हुआ माना जा सकता हैं । कोटर का केन्द्र A पर है (चित्र 12.8) तथा r का मान अन्तराअणुक दूरी

की तुलना में बहुत बड़ा है, जिससे गोलीय कोटर में बहुत से अणु विद्यमान माने जा सकें । यदि डाइलेक्ट्रिक को दो आवेशित पट्टिकाओं के बीच रखा गया हो और उसकी विभाएं r की तुलना में बहुत अधिक हों, तो डाइलेक्ट्रिक के एक अणु द्वारा अनुभव किया गया क्षेत्र (यदि अणु को कोटर के केन्द्र A पर माना जावे) होगा -

$E_{स्थानीय}$=E1+ E2+ E3+ E4 .....(12.13)

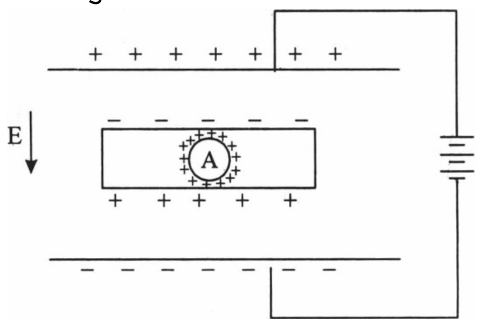
जबकि

i) E_1, संघारित्र की पट्टिकाओं पर उपस्थित आवेश घनत्व के कारण क्षेत्र की तीव्रता है

ii) E_2, डाइलेक्ट्रिक की सतह पर ध्रुवित आदेशों के कारण परमाणु पर क्षेत्र की तीव्रता है

iii) E_3, कोटर में उपस्थित सभी द्विध्रुवों के कारण क्षेत्र है

iv) E_4, कोटर की सतह पर ध्रुवित आवेशों के कारण क्षेत्र है ।



चित्र 12.8 स्थानीय क्षेत्र का परिकलन

हम जानते हैं

$$D = E_1 \in_0 = E \in_0 + P \quad ....(12.14)$$

$$E_1 = \frac{D}{\in_0} = \frac{E \in_0 + P}{\in_0} \quad ...(12.15)$$

$$= E + \frac{P}{\in_0} \quad ...(12.16)$$

$$E_2 = \frac{D}{\in_0} = \frac{-P}{\in_0} \text{ (जहां E=0 है)} \quad ...(12.17)$$

E_3, कोटर में उपस्थित अन्य परमाणुओं के कारण केन्द्र (A पर) पर क्षेत्र की तीव्रता है । धनीय संरचना के लिये E_3 = 0 (सममिति से) होगा ।

E_4 का मान लोरेन्ज ने ज्ञात किया जिससे

$$E_4 = \frac{P}{3 \in_0} \quad ...(12.18)$$

प्राप्त हुआ।

अतः $E_{स्थानीय} = E + \frac{P}{\in_0} - \frac{P}{\in_0} + 0 + \frac{P}{3 \in_0}$

$$= E + \frac{P}{3 \in_0} \qquad ...(12.19)$$

12.5 परावैधुतांक (dielectric constant)

(i) इलेक्ट्रॉनिक माध्यम (Electronic medium) यदि माध्यम का एक इलेक्ट्रॉन तीव्रता E का विद्युत क्षेत्र लगाने से अपनी साम्य अवस्था से x दूरी से विस्थापित हो जाये तो इलेक्ट्रॉन पर लगने वाला बल निम्न सेमी.करण से दिया जावेगा-?

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = eE \qquad ...(12.20)$$

जहां. m, इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान और e इसका आवेश है । इलेक्ट्रॉन को इसकी साम्य स्थिति में रखने के लिए आवश्यक बल स्थिरांक (force constant) k है । सेमी.. (12.20) को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं -

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m}E \left(\because \frac{k}{m} = \omega_0^2 \right) \qquad ...(12.21)$$

इस सेमी.करण का हल $x = Ae^{j\omega t}$ की तरह का होना चाहिए ।

अर्थात $$x = \frac{eE}{m(\omega_0^2 - \omega)} \qquad ...(12.22)$$

$\omega = \omega_0$ पर यह विस्थापन अधिकतम होगा और इस स्थिति को अनुनाद (resonance) कहते हैं । स्थिर विद्युत क्षेत्र के लिए $\omega = 0$, और $x = \frac{eE}{m\omega_0^2}$

...(12.23)

ω_0 अणु या परमाणु की लाक्षणिक कोणीय आवृत्ति है । बोहर के हाइड्रोजन परमाणु मॉडल में ω_0 इलेक्ट्रान की कक्षीय कोणीय आवृत्ति (orbital angular frequency) होगी । इस विस्थापन के फलस्वरूप परमाणु में प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण

$$p = ex = \frac{e^2E}{m\omega_0^2} \qquad ...(12.24)$$

परमाणु की ध्रुवणशीलता α के लिए

$$p = \in_0 \alpha E = \frac{e^2E}{m\omega_0^2} \qquad ...(12.25)$$

या $$\alpha = \frac{e^2}{\in_0 m\omega_0^2} \qquad ...(12.26)$$

सेमी..(12.12) से हाइड्रोजन परमाणु वाले माध्यम का डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक

$$K = 1 + \frac{Ne^2}{\in_0 m\omega_0^2} \qquad ...(12.27)$$

बोर सिद्धान्त से हाइड्रोजन परमाणु में इलेक्ट्रॉन को आयनीकृत करने के लिए आवश्यक ऊर्जा

$$W = \frac{1}{2}\frac{me^2}{h^2}\left(\frac{2\pi}{4\pi \in_0}\right)^2 = \frac{h\omega_0}{2\pi}$$

जिससे $$\omega_0 = \frac{1}{4}\frac{\pi me^4}{\in_0^2 h^3}$$

परन्तु, हाइड्रोजन परमाणु की त्रिज्या rH = 0.528 $\mathring{A}$

अतः $$K = 1 + \frac{Ne^2}{\in_0 m}\left(\frac{4\in_0^2 h^3}{\pi me^4}\right)^2$$

$$= 1 + 16\pi N\left(\frac{\in_0 h^2}{\pi me^4}\right)^3 = 1 + 16\pi N r_H^3 \qquad ..(12.28)$$

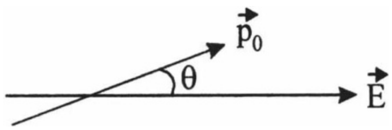
यदि N =2.69 x 10^{25} m^{-3} हो तो K = 1.00020 प्राप्त होता है ।

(ii) अभिविन्यासी माध्यम (configurational medium)

यदि अणु में स्थायी द्विध्रुव आघूर्ण p_0हो तो बाहरी क्षेत्र $\vec{E}$ लगाने से दोनों अन्योन्य ऊर्जा

$$u = -\vec{p}_0.\vec{E} = -p_0 E cos\theta$$

जहां p_0 और E के बीच कोण θ है, चित्र 12.9 में यह प्रदर्शित किया गया है । विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ द्विध्रुव को अपनी दिशा में लाने की कोशिश करता है जबकि निकाय की ऊष्मीय ऊर्जा (thermal energy) इसका विरोध करती है ।



चित्र 12.9

यदि इकाई धन कोण में अणुओं की संख्या n (θ) हो तो T K ताप पर यह मैक्सवेल- वोल्ट्जमान (Maxwell-Boltzmann) बंटन फलन (distribution function) से प्राप्त की सकती है,

$$n(\theta) = n_0 \exp\left[-\frac{u}{kT}\right] \qquad ...(12.30)$$

सेमी.. (12.29) से u का मान सेमी.. (12.30) में रखने पर

$$n(\theta) = n_0 \exp\left[p_0 E\cos\theta / k_B T\right] \qquad ...(12.31)$$

इकाई आयतन में अणुओं की संख्या

$$N = \int_0^{4\pi} n(\theta)d\theta = \int_0^{4\pi} n_0 \exp\left(\frac{p_0 E\cos\theta}{k_B T}\right)d\theta \qquad ...(12.32)$$

यदि $p_0 E<<kT$ तो

$$\exp\left(\frac{p_0 E\cos\theta}{k_B T}\right)=1+\frac{p_0 E\cos\theta}{k_B T}+...$$

$$N=n_0\int_0^{4\pi}\left(1+\frac{p_0 E\cos\theta}{k_B T}+...\right)d\theta=4\pi n_0 \qquad \left(\because \int_0^{4\pi}\cos\theta d\theta=0\right)$$

अतः $N=4\pi n_0$

ध्रुवण सदिश P इकाई आयतन में p_0 का मान है,

$$P=\sum p_0$$

इसे हल करने पर दै $P=\frac{Np_0{}^2E}{3k_BT}$ ..(12.33)

प्राप्त हो जाता है ।

परन्तु $\frac{P}{E}=\in_0 \chi_e = N\alpha_{\text{अभि}}\in_0$

$$\therefore K=1+\frac{P}{\in_0 E}=1+N\alpha_{\text{अभि}}$$

$$\therefore K=1+\frac{Np_0{}^2}{3\in_0 k_BT} \qquad ...(12.34)$$

इस प्रकार डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक ताप के व्युत्क्रमानुपाती होता है जो प्रयोग द्वारा सत्य पाया गया है । अतः अभिविन्यासी ध्रुवणशीलता ग्रम $\alpha_{\text{अभि}}=\frac{p_0{}^2}{3\in_0 k_BT}$ ....(12.35)

(iii) परावैधुत नियतांक एवं धुवणीयता (Dielectric Constant and polarizability)

निर्वात के सापेक्ष में समदैशिक या धनीय माध्यम का परावैधुत नियतांक K स्थूल विद्युत क्षेत्र E के रूप में निम्न सेमी.करण से सम्बन्धित होता है -

$$K=1+\frac{P}{3\in_0 E} \qquad ...(12.36)$$

या

$$\frac{P}{3\in_0 E}=\chi_e \qquad ...(12.37)$$

χ_e को माध्यम की विद्युत प्रवृत्ति या परावैधुत प्रवृत्ति (dielectric suspectibility) कहते हैं ।

χ_e - समदैशिक माध्यम में अदिश राशि तथा असमदैशिक (anisotropic) माध्यम में यह एक टेन्सर होती है ।

$$\chi_e = N\alpha \qquad ...(12.38)$$

जहाँ N - इकाई आयतन में अणुओं की संख्या एवं α - अणु की ध्रुवणशीलता या ध्रुवणीयता (polarizability) कहलाती है ।

12.6 ध्रुवणीयता एवं इसका चिरसम्मत सिद्धान्त (Polarizability and its classical theory)

परमाणु की ध्रुवणीयता (α) स्थानीय विद्युत क्षेत्र $E_{\text{स्था}}$ द्वारा परिभाषित की जाती है-

$$p = \alpha E_{\text{स्था}} \quad \text{...(12.39)}$$

जहाँ p द्विध्रुव आघूर्ण है ।

क्रिस्टल का द्विध्रुव आघूर्ण, परमाणुओं की ध्रुवणीयता एवं स्थानीय विद्युत क्षेत्र के गुणनफल से व्यक्त किया जाता है जबकि ।

$$E_{\text{स्था}} = E + \frac{P}{3e_0}$$

अत:

$$P = \left(\sum N_i \alpha_i\right)\left(E + \frac{P}{3e_0}\right) \quad \text{....(12.40)}$$

P के लिए हल करने पर हम पाते हैं कि

$$\chi = \frac{P}{E} = \frac{\sum N_i \alpha_i}{1 - \frac{1}{3}\sum N_i \alpha_i} \quad \text{...(12.41)}$$

चूंकि $K = 1 + \chi$

अत: सेमी.. (12.41) से

$$\frac{K-1}{K+2} = \frac{1}{3\in_0}\sum N_i \alpha_i \text{ (SI पद्धति में)} \quad \text{...(12.42)}$$

इसे क्लासियस-मोस्सोत्ती (Clausius -Mossotti relation) संबंध कहते हैं । यह सम्बन्ध उन क्रिस्टल संरचनाओं के लिए इलेक्ट्रॉनिक ध्रुवणता (electronic polarizability) एवं परावैधुतांक जोड़ता है जिनके लिए लॉरेन्ट्ज स्थानीय क्षेत्र प्राप्त होते हैं ।

12.7 द्विध्रुवीय ध्रुवणीयता (dipolar polarizability)

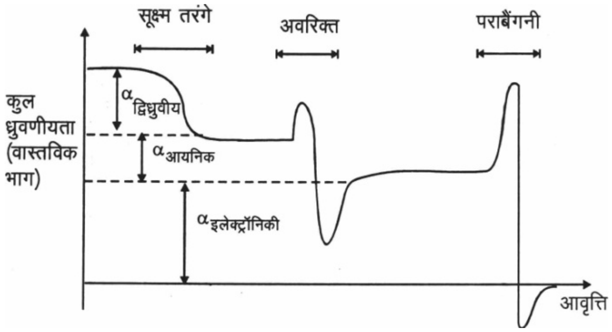
माध्यम की कुल ध्रुवणीयता को सामान्यतया तीन भागों में विभक्त किया जाता है-

(I) इलेक्ट्रॉनिक (Electronic)

(II) आयनिक (Ionic)

(III) द्विध्रुवीय (Dipolar)

उपरोक्त को निम्न चित्र में प्रदर्शित किया गया है- '



चित्र 12.9 कुल ध्रुवणीयता

नाभिक के सापेक्ष इलेक्ट्रॉन कोष्ठ के विस्थापन के कारण इलेक्ट्रॉनिक ध्रुवणता उत्पन्न होती है । इसका मान $\alpha_e = \frac{p_e}{E_o}$ से दिया गया है ।

माध्यम में अन्य आयनों के सापेक्ष आवेशित आयनों के विरथापन के कारण आयनिक ध्रुवणता उत्पन्न होती है । इसका मान $\alpha_i = \frac{p_i}{E_o}$ से दिया जाता है ।

माध्यम में उपस्थित ऐसे अणु जिनका स्थायी द्विध्रुव आघूर्ण होता है, ऐसे माध्यम में जब बाह्य विद्युत क्षेत्र लगाया जाता है तो इन अणुओं के स्थायी द्विध्रुव आपूर्णी का अभिविन्यास परिवर्तित हो जाता है, इस कारण से द्विध्रुवी ध्रुवणीयता उत्पन्न होती है । इसका मान $\alpha_d = \frac{p^2}{3k_B T}$ से दिया जाता है ।

प्रकाशिक आवृत्तियों (optical frequencies) पर परावैधुतांक मे इलेक्ट्रॉनिक ध्रुवणीयता का ही अंश होता है । उच्च आवृत्तियों पर आयनिक एवं द्विध्रुवीय ध्रुवणीयता अणुओं एवं आयनों के जडत्व के कारण अत्यल्प होती हैं ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

8. परावैद्युत नियतांक एवं ध्रुवणीयता में क्या सम्बन्ध है?

----

9. क्लॉसियस-मोस्सोत्ती संबंध लिखो ।

उदाहरण 12.2 किसी परावैद्युत माध्यम का परावैद्युतांक 1.005 है । इस माध्यम की आणविक ध्रुवणता तथा मोलर ध्रुवणता ज्ञात कीजिये । (मोलर आयतन 224 लीटर / मोल)

हल : प्रश्नानुसार, $\in_r = 1.0005$

मोलर आयतन $V_{A=}$ 22.4 लीटर /मोल

आवोगाद्रो संख्या N_A= 6 x 10^{23} अणु /मोल

क्लासियस - मोसोटी सम्बन्ध से

मोलर ध्रुवणता $\alpha_M = N_A\alpha = \frac{3\in_0 M_A}{\rho}\left(\frac{\in_r -1}{\in_r +2}\right)$

$\therefore \quad \alpha_M = 3\in_\circ V_A\left(\frac{\in_r -1}{\in_r +2}\right)$ $\left[\therefore \text{ घनत्व } P = \frac{M_A}{V_A}\right]$

तथा आणविक ध्रुवणता $\alpha = \frac{\alpha_M}{N_A} = \frac{3\in_0 M_A}{\rho}\left(\frac{\in_r -1}{\in_r +2}\right)$ होती है ।

मोलर ध्रुवणता $\alpha_M = 3\in_0 V_A\left(\frac{\in_r -1}{\in_r +2}\right)$

$= 3\times 8.85\times 10^{-12}\times 22.4\times 10^{-3}\left(\frac{5\times 10^{-4}}{3.0005}\right)$

$=9.910^{-18}$ फैरड - मी^{2} /मोल तथा

आणविक ध्रुवणता $\alpha = \frac{\alpha_M}{N_A} = \frac{9\times 10^{-18}}{6\times 10^{23}}$

$=1.65 \times 10^{-41}$ फैरड - मी^{2}

12.8 सारांश (Summary)

- किसी अणुओं के द्विध्रुव आघूर्ण को निम्न सेमी.करण द्वारा व्यक्त करते हैं- $\vec{\mu} = q\vec{r}$
- वे माध्यम जिनमें विद्युत प्रवाह सुगमता से हो सके सुचालक होते हैं और जिनमें विद्युत प्रवाह न हो डाइलेक्ट्रिक या कुचालक होते हैं ।
- डाइलेक्ट्रिक माध्यम में जब कोई बाहय दिष्ट क्षेत्र E लगाते हैं तो माध्यम के अणु ध्रुवित हो जाते हैं, इस परिघटना को ध्रुवण कहते हैं ।
- पदार्थ में इलेक्ट्रॉनिक एवं अभिविन्यासी ध्रुवण संभव है ।
- $\vec{D} = \vec{P} + \in_0 \vec{E}$
- डाइलेक्ट्रिक माध्यम में केवल $\in_0$ के स्थान पर $\in$ रखने से स्थिर-वैद्युत संबंधी सूत्र सरलता से प्राप्त किये जा सकते हैं ।
- हाइड्रोजन परमाणु वाले माध्यम का परावैधुतांक

  $$K = 1 + \frac{Ne^2}{\in_0 m\omega^2{}_0}$$

- परावैधुतांक एवं ध्रुवणीयता में निम्न संबंध होता है-

  $$K = 1 + \frac{P}{\in_0 E}$$

- क्लॉसियस- मोस्सोत्ती संबंध निम्न होता है-

  $$\frac{K-1}{K+2} = \frac{1}{3\in_0}\sum N_j\alpha_j$$

12.9 शब्दावली (Glossary)

अध्रुवी माध्यम	Non polar medium
असमदैशिक	Anisotropic
द्विध्रुव आघूर्ण	Dipole moment
ध्रुवण	Polarization
परावैद्युत	Dielectric
परावैद्युतांक	Dielectric constant
प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण	Induced dipole moment
विद्युतशीलता	Permittivity
समदैशिक	Isotropic

12.10 सन्दर्भ ग्रन्थ (Reference books)

R.L.Singhal	Solid State Physics	Kedar Nath Ram Nath & Co.
C. kitlel	Introduction to Solid State Physics, 5th edition	wiley Eastern

12.11 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to self assessment questions)

1. किसी अणु AB के द्विध्रुव आघूर्ण को निम्न सेमी.करण से व्यक्त करते हैं- $\vec{\mu} = q\vec{r}$
2. द्विध्रुव आघूर्ण की इकाई डिबाई होती है ।

   1 डिबाई = 10^{-18} सेमी स्थिर वै.ई.
3. वे माध्यम जिनमें विद्युत प्रवाह सुगमता से हो सके सुचालक होते है और जिनमें विद्युत प्रवाह न हो

   डाइलेक्ट्रिक या कुचालक कहलाते हैं ।
4. (अ) ध्रुवी माध्यम (ब) अध्रुवी माध्यम
5. डाइलेक्ट्रिक माध्यम में जब कोई बाह्य विद्युत क्षेत्र हे आरोपित की जाती है? माध्यम के अणु ध्रुवित हो जाते हैं, इस परिघटना को ध्रुवण कहते हैं ।
6. (अ) इलेक्ट्रॉनिक ध्रुवण(ब) अभिविन्यासी ध्रुवण
7. $\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}$
8. $K = 1 + \dfrac{P}{\epsilon_0 E}$
9. $\dfrac{K-1}{K+2} = \dfrac{1}{3\epsilon_0} \sum N_i \alpha_i$

12.12 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. पदार्थों में द्विध्रुव आघूर्ण क्यों पाया जाता है?
2. परावैद्युत पदार्थ के परावैद्युतांक की क्या परास होती है?
3. अध्रुवी माध्यम में ध्रुवणीयता का क्या कारण होता है?

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

4. परावैद्युत माध्यम में इलेक्ट्रॉनिक एवं अभिविन्यासी ध्रुवण को समझाते हुये, $\vec{P}, \vec{E}$ एवं $\vec{D}$ के मध्य सम्बंध स्थापित करो ।
5. डाइलेक्ट्रिक माध्यम के लिए स्थानीय विद्युत क्षेत्र के लिए व्यंजक प्राप्त करो ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

6. यदि 5 डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक वाले माध्यम पर 100 वोल्ट/सेमी की क्षेत्र तीव्रता लगाये तो इस माध्यम के निम्न स्थिरांक ज्ञात करिये: विद्युतशीलता $\in$; विद्युत प्रवृत्ति χ_e; ध्रुवण वेक्टर P; स्थानान्तरण सदिश $\vec{D}$

   (**उत्तर** : 44.25 x 10^{12} फैरेड/मी, 4; 35.40 x 10^{8} कूलॉम/मी; 44.25 x 10^{8} कूलॉमा/मी)

7. सिलिकन का डाड़लेक्ट्रिक स्थिरांक 12 और घनत्व 2.33 x 10^{3} किग्रा/मी^{3} है सिलिकन परमाणु की ध्रुवणशीलता α ज्ञात कीजिए । (**उत्तर :** 2212 $\overset{\circ}{A}$)

इकाई- 13

प्रकाशिक गुण (Optical Properties)

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य..

13.1 प्रस्तावना.

13.2 प्रकाशीय अवशोषण प्रक्रम

13.2.1 चालकों, अर्धचालकों व कुचालकों में प्रकाशीय अवशोषण

13.2.2 अवशोषण प्रक्रियाओं के प्रकार

13.3 प्रकाश संदीप्ति

13.3.1 संदीप्ति प्रक्रियाओं के प्रकार

13.3.2 संदीप्ति की सैद्धान्तिक व्याख्या

13.4 वर्ण-केन्द्र

13.4.1 वर्ण-केन्द्र उत्पन्न करने की विधियाँ

13.4.2 वर्ण-केन्द्रों के प्रकार

13.5 प्रकाशिक चालकता

13.6 प्रकाश-वोल्टीय प्रभाव

13.7 सारांश

13.8 शब्दावली

13.9 संदर्भ ग्रंथ

13.10 बोध प्रश्नों के उत्तर :

13.11 अभ्यासार्थ प्रश्न

13.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढने के पश्चात् आप -

- ठोसों में प्रकाशिक अवशोषण किन प्रक्रियाओं से होता है तथा यह पदार्थो के अध्ययन में कितना अधिक महत्वपूर्ण है जान सकेंगे
- प्रकाश संदीप्ति घटना के विषय में विस्तारपूर्वक जानकारी प्राप्त कर सकेंगे;
- ठोसों में वर्ण - केन्द्र बनने के कारणों तथा उनके प्रकारों के बारे में तथ्यों का ज्ञान प्राप्त कर सकेंगे;
- ठोसों में प्रकाशीय चालकता के विषय में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे; ।
- प्रकाश - वोल्टीय प्रभाव को समझ सकेंगे तथा इसकी क्रियाविधि व उपयोग की जानकारी भी प्राप्त कर सकेंगे ।

13.1 प्रस्तावना (Introduction)

ठोस अवस्था भौतिकी में पदार्थो के प्रकाशीय गुण अति महत्वपूर्ण होते हैं । गत वर्षा में प्रकाशीय गुणों वाली तकनीकों तथा उच्च विभेदन क्षमतावान तकनीकों का पूरी स्पेक्ट्रमी परास (दृश्य प्रकाश से लेकर सूक्ष्म तरंगों तक) में तीव्र गति से विकास व अनुसंधान हुआ है । ठोसों के कई महत्वपूर्ण गुणों तथा उनकी संरचना की खोजों में इनकी प्रमुख भूमिका रही है । उदाहरण के लिए, इनका एक प्रमुख योगदान संवेदी प्रकाश चालकीय संसूचकों के विकास में रहा है । ये संसूचक अर्धचालक तत्वों से बनाये जाते हैं जिन पर प्रकाश डालने पर उनकी चालकता में वृद्धि होती है । अशुद्धि परमाणु के प्रकार व सांद्रता का उचित चयन करके किसी भी इच्छित तरंगदैर्ध्य परास में सुग्राहिता से कार्य करने योग्य अति सुग्राही व संवेदनशील संसूचकों का विकास हो चुका है । इस इकाई में हम ठोस पदार्थो में अवशोषण की घटना.तथा संवधित अन्य प्रक्रियाओं जैसे कि प्रकाश-संदीप्ति, प्रकाश-चालकता, प्रकाश - वोल्टीय प्रभाव आदि के विषय में सविस्तार पढ़ेंगे । अनुच्छेद 13.2 में चालकों, कुचालकों तथा कुचालकों में अवशोषण प्रक्रिया को समझने के साथ ही इसके प्रमुख कारणों पर जानकारी दी जायेगी । अनुच्छेद 13.3 में अवशोषण प्रक्रम से संवद्ध प्रक्रिया प्रकाश संदीप्ति की व्याख्या की जायेगी । कई कारणों से ठोसों में वर्ण केन्द्रों की उत्पत्ति होती है, इनकी उत्पत्ति के कारणों तथा वर्ण केन्द्रों के प्रकारों की जानकारी अनुच्छेद 13.4 में दी जायेगी । अनुच्छेद 13.5 में प्रकाशिक चालकता गुण को समझाया गया है तथा अनुच्छेद 13.6 में प्रकाश - वोल्टीय प्रभाव तथा उसकी क्रिया विधि का वर्णन किया गया है ।

13.2 प्रकाशीय अवशोषण प्रक्रम (Optical absorption Process)

जब विद्युत चुंबकीय विकिरण एक माध्यम से दूसरे में प्रवेश करते हैं तो जो प्रमुख घटनाऐं हो सकती हैं वह हैं - परावर्तन, पारगमन तथा अवशोषण । अवशोषण होने पर विद्युत चुंबकीय कर्जा पदार्थो में अन्य रूपों में परिणित हो जाती है । यह आपतित विकिरण की आवृत्ति एवम् पदार्थो की प्रकृति दूर निर्भर करता है ।

13.2.1 चालको.अर्धचालकों व कुचालकों में प्रकाशीय अवशोषण (Optical absorption in conductors, semi conductors and insulators)

यह देखा गया है कि धातुऐं अल्प आवृत्तियों से लेकर परावैगनी क्षेत्र के मध्य भाग तक के विद्युत चुंबकीय विकिरणों के लिए प्राय: अपारदर्शक (opaque) होती है । इनसे उच्च आवृत्तियों के विकिरणों के लिए धातुऐं पारदर्शिता दर्शाती हैं जबकि कुचालक पदार्थ इस पूरे क्षेत्र में ही पारदर्शक रहते हैं। । धातुऐं अपारदर्शक होने के साथ ही उच्च परावर्तन गुण भी दर्शाती हैं।

क्वांटम सिद्घान्त के अनुसार धातुओं में संतत्कल्प (quasi continuous) ऊर्जा पाये जाते हैं । अत: फर्मी ऊर्जा स्तर के इलेक्ट्रॉन आपतित विकिरण ऊर्जा के किसी भी संभावित मान से अवस्थाओं में पहुंच जाते

हैं (क्वांटीकृत ऊर्जा की मात्रा आवश्यक नहीं है) । इस प्रक्रिया में दो स्थितियां संभावित हैं । यदि प्रघाती विकिरणों के तरंग काल के दौरान इलेक्ट्रॉन के जालक आयनों से टकराने की संभावना नगण्य हो तो अवशोषित विकिरण ऊर्जा का पुन: उत्सर्जन कर दिया जायेगा अर्थात् कोई ऊर्जा क्षय नहीं होगा । इस स्थिति में धातुऐं पारदर्शक रहेंगी । पराबैंगनी विकिरणों में या उससे उच्च आवृत्ति के विकिरणों में यही स्थिति उत्पन्न होती है । लेकिन यदि प्रघाती विकिरण तरंग काल का मान अधिक हो तथा इस दौरान इलेक्ट्रॉन जालक से टकरा जायें तो अवशोषित ऊर्जा का क्षय हो जायेगा । यह क्षय तब शत प्रतिशत होगा जब उत्तेजित अवस्था तथा उसकी अनुक्रिया (response) समान कला में दे, लेकिन अधिक संभावना इस बात की रहती है कि उत्तेजन अवस्था तथा उसकी अनुक्रिया विपरीत कला में होंगी । ये स्थिति एक ऋणात्मक परावैद्युतांक को इंगित करती है । इसके कारण अपवर्तनांक का सम्मिश्र मान प्राप्त होगा जो इंगित करता है कि आपतित तरंग का परावर्तन होगा । अधिकांश धातुओं में सम्मिश्र अपवर्तनांक प्राय: दृश्य क्षेत्र में आता है जिसके कारण धातुऐं दृश्य क्षेत्र में परावर्तक होती हैं ।

उत्तेजन अवस्था तथा उसकी अनुक्रिया के विपरीत कला के साथ-साथ विपरीत ध्रुवण अवस्था के कारण धातुऐं अपारदर्शक होती हैं । इसका अधिक विस्तार में वर्णन इस स्तर पर आवश्यक नहीं है ।

अचालक पदार्थ एक निश्चित आवृत्ति तक के सभी विकिरणों के लिए पारदर्शिता दिखाते हैं । इस निश्चित आवृत्ति को मूल अवशोषण आवृत्ति कहते हैं । इससे स्पष्ट है कि इन पदार्थो में धातुओं की तरह भरे हुए सर्वोच्च ऊर्जा बैंड के निकट अनुमत (allowed) ऊर्जा के मान संभव नहीं होते । मूल अवशोषण आवृत्ति के संगत ऊर्जा का मान लगभग 4eV या अधिक होता है जो पराबैंगनी क्षेत्र में आता है । अत: इन पदार्थो का बैंड अन्तराल 4eV या उससे अधिक होता है । मूल अवशोषण आवृत्ति से अधिक आवृत्तियों के विकिरणों के लिए ये पदार्थ अपारदर्शक रहते है ।

अर्धचालकों में बैड अंतराल काफी कम, लगभग 0.5 eV से 1 eV तक, होता है । उनकी मूल अवशोषण आवृत्ति का मान अवरक्त क्षेत्र में आता है (λ 2μm) जिनसे इलेक्ट्रॉन का संयोजी बैंड से चालन बैंड में संक्रमण होता है । इस तरंगदैर्ध्य से अधिक मानों पर ये पदार्थ पारदर्शक होते हैं । अर्धचालकों का अवरक्त अवशोषण स्पेक्ट्रम काफी जटिल होता है क्योंकि कई जटिल प्रक्रियाऐं इस अवशोषण क्रिया में योगदान करती हैं । मुक्त आवेश वाहक अवशोषण, जालक कंपनों के कारण अवशोषण वर्जित ऊर्जा अंतराल में अशुद्धियों की स्थानगत अवस्थाओं में अवशोषण, एक्साइटोन अवस्थाओं में अवशोषण आदि इन अर्धचालकों में जटिल अवशोषण प्रक्रियाओं के कुछ उदाहरण हैं जिनका बाद में विस्तार से वर्णन किया जायेगा ।

इलेक्ट्रॉन - फोनॉन अन्योन्य क्रिया तथा इसके फलस्वरूप होने वाली अवशोषण प्रक्रिया भी अर्धचालकों में अत्यन्त महत्वपूर्ण हैं । निम्न आवृत्तियों के फोटॉन, जिनकी ऊर्जा E_g से कम होती है, इस क्रिया में प्रमुखता से भाग लेते हैं । इलेक्ट्रॉन - फोनॉन अन्योय क्रिया में मुक्त इलेक्ट्रॉन एक रेखीय दोलित्र की तरह कार्य करते हैं तथा इनकी एक मूल आवृत्ति होती है । यदि आपतित विकिरणों की आवृत्ति भी इनके समान हो तो अनुनादी घटना के कारण

अवशोषण प्रक्रिया होगी । यदि इन पदार्थों में आयनिक बंध हों तो इनमें आयनिक ध्रुवण प्रक्रिया सक्रिय हो जायेगी जिसके फलस्वरूप अवरक्त क्षेत्र में अवशोषण शिखर प्राप्त होंगे । अवशोषण स्पेक्ट्रमों के अध्ययन इनकी विस्तृत विवेचना द्वारा अर्धचालकों की बैंड संरचना की महत्वपूर्ण जानकारियां प्राप्त की जा सकती हैं ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. धातुओं में ऋणात्मक परावैद्युतांक का होना किस प्रकाशिक गुण को इंगित करता है?

   ----

2. मूल अवशोषण आवृत्ति का मान अचालकों में कितना होता है व इसका क्या प्रकाशिक महत्व है?

13.2.2 अवशोषण प्रक्रियाओं के प्रकार (Types of absorption Processes)

ठोसों में प्रकाश अवशोषण निम्न प्रक्रियाओं के कारण संभव होता है :

a) संयोजी बैंड से चालन बैंड में इलेक्ट्रॉन संक्रमण के कारण अवशोषण (इस प्रक्रिया को 'मूल अवशोषण' कहते है)
b) एक्साइटॉनो के बनने के कारण अवशोषण ।
c) मुक्त आवेश वाहक इलेक्ट्रॉनों तथा होलों के अंतराबैंड संक्रमण के कारण अवशोषण ।
d) अशुद्धियों के कारण अवशोषण ।
e) क्रिस्टलीय कंपनों के कारण अवशोषण ।

इन प्रक्रियाओं का हम आगे विस्तार से वर्णन करेंगे ।

a) मूल अवशोषण (Fundamental absorption)

इस अवशोषण के लिए आपतित फोटान की ऊर्जा वर्जित ऊर्जा अंतराल (E_g) के समान या उससे अधिक होनी आवश्यक है । दूसरे शब्दों में, फोटॉन की आवृत्ति $\nu = \frac{E_g}{h}$ होनी चाहिए । इस को अवशोषण किनारा (absorption edges) कहते हैं । इस आवृत्ति पर इलेक्ट्रॉन का संयोजी बैंड से चालन में संकमण होता है । इस संक्रमण प्रक्रिया में इलेक्ट्रॉन फोटॉन निक़ाय की कुल ऊर्जा तथा संवेग का संरक्षण चाहिए जिसे इस प्रकार लिखा जा सकता है -

$$E_f = E_i + h\nu \quad ....(13.1)$$

$$\vec{K}_f = \vec{K}_i + q \quad ....(13.2)$$

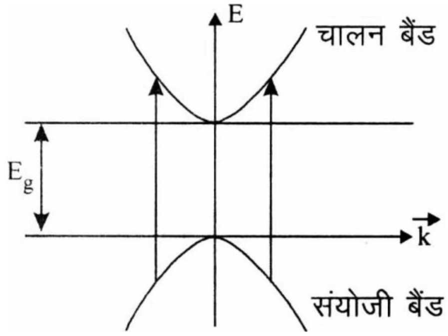
E_f तथा E_i क्रमश: इलेक्ट्रॉन की अंतिम अवस्था (चालन बैंड) तथा प्रारंभिक (संयोजी बैंड) में ऊर्जा के मान हैं तथा $\vec{k}_f$ व $\vec{k}_i$ उसके संवेग हैं । q अवशोषित फोटॉन का तुरंग

सदिश है प्रकाशीय क्षेत्र में q का मान नगण्य माना जा सकता है अत: सेमी.. (13.2) को इस प्रकार भी लिखा जा है -

$$\vec{k}_f = \vec{k}_i \qquad ....(13.3)$$

अत: इलेक्ट्रॉन का संवेग संरक्षित रहेगा ।

इसका अर्थ यह होगा कि k- आकाश में संयोजी तथा चालन बैंड के बीच केवल ऊर्ध्व सकगा ही अनुमत होंगे जैसा कि चित्र 13.1 में दर्शाया गया है ।



चित्र 13.1 प्रत्यक्ष - अंतराल में मूल अवशोषण प्रक्रिया

प्रत्यक्ष-अंतराल वाले अर्धचालक पदार्थ वह होते हैं जिनमें चालन बैंड का तल (bottom) संयोजी बैंड के शीर्ष (top) के ठीक ऊपर, k = 0 पर स्थित होती है । ऐसा होने पर संयोजी बैंड के शीर्ष के पास स्थित इलेक्ट्रॉन चालन बैंड के तल के पास की अवस्थाओं में आसानी से ऊर्ध्व संक्रमित हो सकेंगे । इन पदार्थों के उदाहरण हैं GaAs, InSb तथा कई अन्य III-IV तथा II-VI समूहों के यौगिक ।

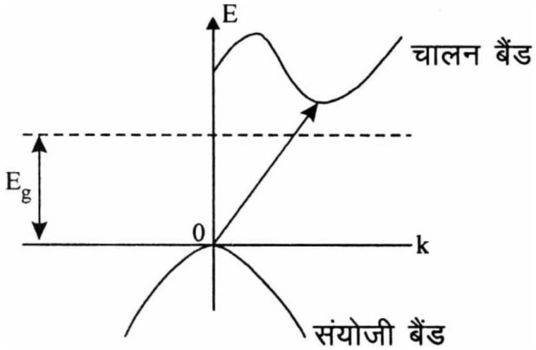
इन पदार्थो का अवशोषण गुणांक (μ_d) निम्न सूत्र से दिया जाता है -

$\mu_d = A(hv - E_g)^{1/2}$ (अनुमत संक्रमणों के लिए) ...(13.4)

तथा $\mu_d = A(hv - E_g)^{3/2}$ (वर्जित संक्रमणों के लिए) ...(13.5)

A नियतांक है जो बैंडों के गुणों पर निर्भर करता है जबकि E_g वर्जित ऊर्जा अंतराल तथा 64 फोटॉन की ऊर्जा है ।

कुछ अप्रत्यक्ष अंतराल वाले अर्धचालक भी होते हैं जिनके चालन बैंड का तल k = 0 पर स्थित नहीं होता (चित्र 13.2) । उदाहरण के लिए Si के चालन बैंड का तल (100) दिशा में होता है जबकि Ge का (111) दिशा में । इस स्थिति में इलेक्ट्रॉन का संयोजी बैंड से चालन बैंड में सीधा संक्रमण संभव नहीं होगा क्योंकि इस स्थिति में इलेक्ट्रॉन वरणक नियम (selection rule) (सेमी. (13.2)) का पालन नहीं करेगा ।



चित्र 13.2 अप्रत्यक्ष - अंतराल अर्धचालक में मूल अवशोषण प्रक्रिया

इस स्थिति में इलेक्ट्रॉन संक्रमण दो चरणों में होता है । इलेक्ट्रॉन एक फोटॉन तथा फोनॉन को एक साथ अवशोषित करता है । फोटॉन आवश्यक ऊर्जा तथा फोनॉन आवश्यक संवेग प्रदान करता है । फोनॉन की ऊर्जा (0.05eV)फोटॉन की ऊर्जा (~1eV)की तुलना में नगण्य होती है जबकि फोनॉन के संवेग को नगण्य नहीं मान सकते ।

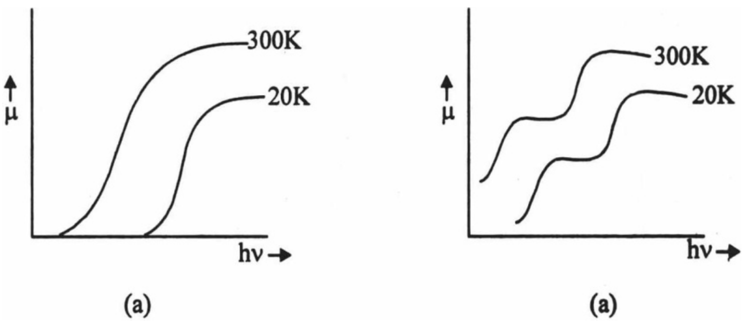
इन पदार्थो के अवशोषण गुणांक (μ_i)का सूत्र होगा -

$\mu_i = A(T)(h\nu - E_g)^2$ (अनुमत संक्रमणों के लिए) ...(13.6)

तथा $\mu_i = A(T)(h\nu - E_g)^3$ (वर्जित संक्रमणों के लिए) ...(13.7)

A(T) एक नियतांक है जिसमें पदार्थ के बैंडों के गुण तथा ताप संबन्धी प्राचल (parameters) निहित होते हैं ।

इन अप्रत्यक्ष अंतराल वाले पदार्थो का अवशोषण गुणांक प्रत्यक्ष अंतराल पदार्थो की तुलना में $(h\nu - E_g)$ के मान पर अधिक प्रभावी निर्भरता दर्शाता है । अत: चालकता पर निर्भर तकनीकों की अपेक्षा प्रकाशीय विधियों का उपयोग प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष अंतराल अर्धचालकों में विभेद करने में अधिक प्रभावी तरीके से किया जा सकता है । चित्र 13.3 में प्रत्यक्ष अंतराल (GaAs) तथा अप्रत्यक्ष अंतराल (Ge) अर्धचालकों के लिए अवशोषण गुणांक (μ) तथा फोटॉन ऊर्जा ($h\nu$) के मध्य खींचे गये ग्राफ दर्शाये गये हैं जिनमें अंतर स्पष्ट रूप से देखे जा सकते हैं ।



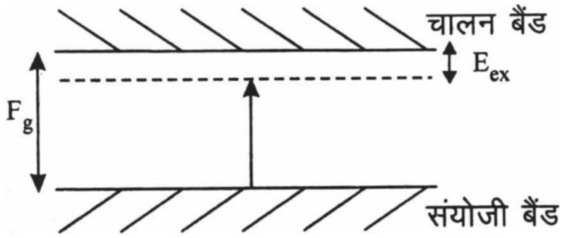
चित्र 13.3 (a) प्रत्यक्ष - अंतराल (b) अप्रत्यक्ष अंतराल अर्धचलकों के लिए अवशोषण गुणाक (u) व फोटोन ऊर्जा (hv) के मध्य ग्राफ

(b) एक्साइटॉन अवशोषण (Exciton absorption) - मूल अवशोषण प्रक्रिया में ये माना गया था कि संयोजी बैंड से चालन बैंड में उत्तेजित इलेक्ट्रॉन तथा संयोजी बैंड में उत्पन्न होल

दोनों ही मुक्त कणों की तरह व्यवहार करने लगते हैं । वास्तविकता में ये दोनों एक दूसरे को आकर्षित करते हैं तथा पुनर्योजित हुए बिना एक दूसरे के साथ बद्ध होकर हाइड्रोजन परमाणु जैसा एक उदासीन निकाय बना लेते हैं जिसे एक्साइटॉन कहते हैं ।

जिस प्रकार हाइड्रोजन परमाणु में विविक्त ऊर्जा स्तर होते है उसी प्रकार एक्साहटॉन में भी ऊर्जा स्तर होंगे । अधिक यथार्थ रूप में इलेक्ट्रॉन तथा होल दोनों अपने द्रव्यमान केन्द्र के परित: चक्कर लगाते हैं तथा एक बद्ध अवस्था उत्पन्न कर लेते हैं । यही एक्साइटॉन है । एक्साइटॉन निर्माण की ऊर्जा, बैंड हुं से कम होती है.अत: इसके ऊर्जा स्तर बैंड अंतराल में ही स्थित होते हैं ।

एक्साइटोन निर्माण के लिए माध्यम का परावैधुतांक काफी अधिक होना चाहिए ताकि इसके निर्माण की ऊर्जा कम हो । ये ऊर्जा, जिसे एक्साइटॉन की बंधन ऊर्जा भी कहते हैं, लगभग 0.01 eV की कोटि की होती है । अत: एक्साइटोन स्तर चालन बैंड के अति निकट स्थित होता है जैसा कि चित्र 13.4 में दर्शाया गया है ।



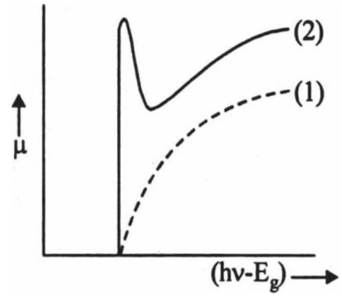
चित्र 13.4 संयोजी बैंड

एक्साइटॉन अवशोषण प्रक्रिया में फोटॉन की ऊर्जा का सूत्र है -

$$h\nu = E_g - E_{ex} \quad ...(13.8)$$

जहां E_{ex} एक्साइटॉन की बंधन ऊर्जा है ।

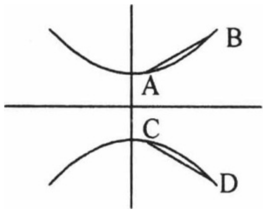
एक्साइटॉन स्पेक्ट्रम में मूल किनारे (edge) के ठीक नीचे एक तीक्ष्ण रेखा पायी जाती है (चित्र 13.5) । एक्साइटॉन के अशुद्धि परमाणुओं के साथ अन्योन्य क्रिया के कारण तथा अन्य कारणों से इस रेखा में प्राय: थोड़ी स्पेक्ट्रमी मोटाई देखी जाती है ।



चित्र 13.5 - Ge में अवशोषण (1) मूल अवशोषण का सैद्धांतिक ग्राफ (2) 20K पर लिए मूल अवशोषण

(c) मुक्त आदेश वाहक अवशोषण (Free charge carrier absorption) :- ये देखा गया है कि मुक्त आवेश वाहक इलेक्ट्रॉन तथा होल एक बैंड से दूसरे में संक्रमित हुए बिना भी

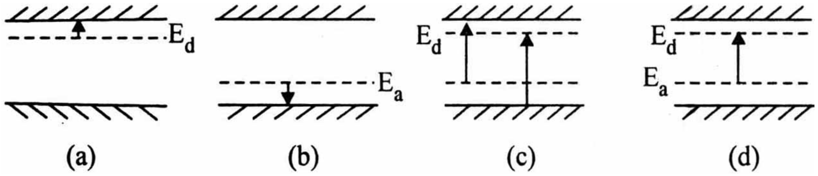
ऊर्जा अवशोषित कर सकते हैं । इस ऊर्जा का अवशोषण करके ये उसी बैंड की दूसरी अवस्था में उत्तेजित हो जाते हैं । इसे अंतर बैंड (Inter band) संक्रमण कहते हैं (चित्र 13.6) । अत: फोटॉन ऊर्जा $h\nu$ का मान E_g के कम होने पर भी ये संक्रमण संभव है तथा मूल अवशोषण किनारे के नीचे ये अवशोषण प्रभावी हो जाते हैं । $h\nu > E_g$ होने पर मूल तथा मुक्त आवेश वाहक संक्रमण साथ-साथ होंगे ।



चित्र 13.6

(d) अशुद्धियों के कारण अवशोषण (Absorption due to impurities) : अर्धचालकों में अशुद्धियों के कारण भी ऊर्जा अवशोषण की प्रक्रिया संभव होती है । अवशोषण की प्रकृति व तीव्रता अशुद्धि परमाणुओं की प्रकृति व उनकी सांद्रता पर निर्भर करती है । चित्र में इस प्रकार की अवशोषण घटनाओ को दर्शाया गया है ।

चित्र 13.7 में दिखाया गया है कि एक उदासीन दाता परमाणु एक फोटॉन अवशोषित करता है तथा इलेक्ट्रॉन का अशुद्धि के उच्च ऊर्जा स्तर में या फिर संयोजी बैंड में संक्रमण होता है इस संक्रमण के फलस्वरूप अवशोषण स्पेक्ट्रम में तीक्ष्ण रेखा प्राप्त होती है । चित्र 13.7(b) में संयोजी बैंड से उदासीन ग्राही अशुद्धि स्तर में संक्रमण होता है तथा चित्र 13.7(c) में संयोजी बैंड से आयनित दाता में या फिर आयनित ग्राही से चालन बैंड में संक्रमण दर्शाया गया है ।



चित्र 13.7 अशुद्धियों के कारण विभिन्न अवशोषण प्रक्रियाएँ

ये सभी प्रक्रियाऐं मूल अवशोषण प्रक्रिया जैसी ही हैं तथा इनका विभेदन कर पाना एक जटिल कार्य होता है ।

चित्र 13.7 (d) में एक आयनित ग्राही से आयनित दाता स्तर में संक्रमण की घटना को दर्शाया गया है । इस स्थिति में फोटॉन की ऊर्जा $h\nu = (E_g - E_d - E_a)$ द्वारा दी जाती है । ऊर्जा की दृष्टि से ये भी मूल अवशोषण प्रक्रिया के निकट होने के कारण आसानी से विभेदित नहीं हो पाती ।

अशुद्धियां दूसरे अप्रत्यक्ष तरीकों से भी अवशोषण स्पेक्ट्रम को प्रभावित करती है । उदाहरण के लिए प्राय: अशुद्धियाँ एक्साइटॉन को अधिग्रहित (trap) कर लेती हैं । ये अशुद्धि (परमाणु) पहले इलेक्ट्रॉन को अधिग्रहित करती है तथा आवेशित हो जाती है । इसके फलस्वरूप (कूलॉम बलों द्वारा) एक.भी इसकी ओर आकर्षित होगा । अत: एक एक्साइटॉन इस अशुद्धि परमाणु द्वारा अधिग्रहित कर लिया जाता है । इस एक्साइटॉन का स्पेक्ट्रम एक मुक्त

एक्साइटॉन से भिन्न होगा क्योंकि इस एक्साइटॉन की अशुद्धि परमाणु से क्रिया होती रहती है जिससे ऊर्जा स्तरों में भिन्नता आ जाती है । इन एक्साइटॉनों के स्पेक्ट्रमों का अध्ययन करके अशुद्धि परमाणुओं की प्रकृति का अध्ययन करने में सहायता मिलती है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

3. मूल अवशोषण प्रक्रिया में संक्रमण के लिए आवश्यक संरक्षण नियमों का उल्लेख कीजिये ।

----

4. एक्साइटॉन निर्माण के लिए परावैद्युतांक की क्या भूमिका होती है? एक्साइटॉन की बंधन ऊर्जा का क्या होता है?

उदाहरण 13.1 : एक प्रत्यक्ष अंतराल वाले अर्धचालक पर जिसका ऊर्जा अंतराल 0.8 इलेक्ट्रॉन-वोल्ट है, 2.8 इलेक्ट्रॉन-वोल्ट ऊर्जा का एकवर्णी प्रकाश डाला जाता है तथा अनुमत संक्रमण के लिए उसका अवशोषण गुणांक 300 सेमी$^{-1}$ प्राप्त होता है । यदि फोटॉन की ऊर्जा का मान 1.8 इलेक्ट्रॉन-वोल्ट कर दिया जाये तो अवशोषण गुणांक में कितना प्रतिशत परिवर्तन होगा?

हल : अर्धचालकों में अनुमत संक्रमणों के लिए अवशोषण गुणांक का सूत्र है -

$$\mu = A(h\nu - E_g)^{1/2}$$

जहां $h\nu$ फोटॉन की ऊर्जा तथा E_g ऊर्जा अंतराल है ।

अतः
$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \left(\frac{h\nu_2 - E_g}{h\nu_1 - E_g}\right)^{1/2}$$

या
$$\mu_2 = \mu_1\left(\frac{h\nu_2 - E_g}{h\nu_1 - E_g}\right)^{1/2}$$

दिया गया है कि

$\mu_1 = 300$ सेमी$^{-1}$, $h\nu_1$ 2.8 इलेंक्ट्रॉन - वोल्ट,

$h\nu_2$ =1.8 इलेंक्ट्रॉन- वोल्ट, तथा E_g =0.8 इलेंक्ट्रॉन- वोल्ट.

अत:
$$\mu_2 = 300\left[\frac{1.8-0.8}{2.8-0.8}\right]^{1/2}$$

$$= 300\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$$

अत: अवशोषण गुणांक में प्रतिशत परिवर्तन (कमी)

$$=\left(\frac{300-212.1}{300}\right)\times 100$$

=29.33% (कमी)

उदाहरण 13.2 : एक अर्धचालक मेंएक्साइटॉन अवशोषण प्रक्रिया में 3.4 -वोल्ट ऊर्जा का फोटॉन प्रयुक्त होता है । यदि ऊर्जा अंतुराल 3.42 इलेक्ट्रॉन-वोल्ट हो तो गणना कीजिये कि का एक्साइटान स्तर चालन बैंड से कितना नीचे स्थित होगा?

हल : फोटॉन की ऊर्जा का मान

$$h\nu = E_g - E_{ex}$$

जहां E_g , ऊर्जा अंतराल तथा E_{ex} एक्साइटॉन स्तर का चालन बैंड से अंतराल है ।

दिया गया है $h\nu = 3.4$ इलेंक्ट्रॉन-वोल्ट, तथा E_g =3.42 इलेंक्ट्रॉन?वोल्ट,

अत: $E_{ex} = E_g - h\nu$ से

$$E_{ex} = 3.42 - 3.4$$

E_{ex} =0.02 इलेंक्ट्रॉन-वोल्ट

13.3 प्रकाश-संदीप्ति (Poto-luminescence)

खंड 13.2.2 में हमने कुछ ऐसी विधियों के विषय में अध्ययन किया जिनके द्वारा इलेक्ट्रॉन को विकिरण ऊर्जा का अवशोषण कराके उच्च ऊर्जा अवस्थाओं में उत्तेजित किया जा सकता है । लेकिन उत्तेजित अवस्था इलेक्ट्रॉन की एक अस्थायी अवस्था होती है (आयुकाल 10^{-8} sec) अत: इलेक्ट्रॉन पुन: ऊर्जा उत्सर्जित करके अपनी मूल अवस्था में लौट आता हैं । उत्तेजित इलेक्ट्रॉन द्वारा दृश्य क्षेत्र में प्रकाश ऊर्जा उत्सर्जन करते हुए अपनी मूल अवस्था में लौटने की क्रिया को संदीप्ति कहते हैं । यह क्रिया अवशोषण प्रक्रिया की ठीक विपरीत दिशा में होती है तथा द्रव्य की तीनों अवस्थाओं ठोसों, द्रवों तथा गैसों में पायी जाती है । यह एक द्विचरण प्रक्रिया है -

(i) ऊर्जा अवशोषण करके इलेक्ट्रॉन का मूल अवस्था से उत्तेजित अवस्था में संक्रमण तथा

(ii) इलेक्ट्रॉन के अपनी मूल अवस्था में लौटने के परिणामस्वरूप प्रकाश का उर्त्सर्जन ।

संदीप्ति में उत्सर्जित ऊर्जा की मात्रा इलेक्ट्रोन को उत्तेजित करने के लिए अवशोषित फोटॉन की ऊर्जा से कम होती है । ये माना जाता है कि इन पदार्थो के बैंड अंतराल के अन्दर कुछ ऊर्जा स्तर निहित होते हैं जो अल्प मात्रा में अशुद्धि परमाणुओं के कारण निर्मित हो जाते है । इन अशुद्धि परमाणुओं को (activators) तथा सह-सक्रियक (co-activators) कहा जाता है । सक्रियको के ऊर्जा स्तर के ठीक उपर जबकि सहासक्रियकों के ऊर्जा स्तर चालन बैंड के ठीक नीचे स्थित होते है । उदाहरण के लिए Zn में Cu सक्रियक तथा Cl सह-सक्रियक की भूमिका निभाते हैं । सक्रियक मूल अवस्था में लौट रहे इलेक्ट्रॉन के लिए माध्यमिक (intermediate) ऊर्जा स्तर उपलब्ध कराते है जबकि सह-सक्रियक अधिग्रहक केन्द्र (trapping centre) का कार्य करते हैं । इसके कारण अवशोषण प्रक्रिया तथा उत्सर्जन प्रक्रिया के मध्य

समायातर (delay) उत्पन्न होता है । विभिन्न प्रकार के उपयोगों के लिए उचित सक्रियक तथा सह-सक्रियक के प्रकार व उनकी मात्रा का चयन करके इच्छित संदीप्ति युक्तियां बनाई जा सकती हैं ।

संदीप्ति दर्शाने वाले कुछ प्रमुख क्रिस्टलों के उदाहरण निम्नलिखित हैं -

(i) शुद्ध अवस्था में संदीप्ति दर्शाने वाले पदार्थ-मैग्नस हैलाइड, प्लेटिनो साइनाइड्स तथा गडोलिनियम सल्फेट आदि

(ii) थैलियम द्वारा सक्रियित क्षारीय हैलाइड जैसे कि थैलियम द्वारा सक्रियित हए।

(iii) Cu, Ag, Mn द्वारा सक्रियित ZnS तथा CdS

(iv) सिलिकेट फॉस्फर्स जैसे कि जिंक आर्थोसिलिकेट

(v) आक्साइड फारफर्स आदि ।

वह समय जिसके दौरान संदीप्ति घटना देखी जा सकती है इस बात पर निर्भर करता है कि उत्तेजन तथा उत्सर्जन क्रियाओं के बीच समयांतराल कितना है । यदि ऊर्जा का उत्सर्जन इलेक्ट्रॉन उत्तेजन के पश्चात् 10^{-8} सेकण्ड के अंदर हो जाये (उत्तेजित अवस्था का आयुकालु भी 10^{-8} से होता है) या फिर उत्सर्जन तब तक जारी रहे जब तक उत्तेजन प्रक्रिया चले तो घटना को प्रतिदीप्ति (fluorescence) कहा जाता है । दूसरी ओर यदि ऊर्जा का उत्सर्जन इस समय सीमा के पश्चात् भी चलता रहे तो घटना को स्फुरदीप्ति (phosphorescence) या उत्तर-दीप्ति (after glow) कहा जाता है । यह समय माइक्रो सेकण्ड से लेकर कुछ घंटों या दिनों अथवा कुछ वर्षो तक भी हो सकता है । अधिकांश क्रिस्टल स्फुरदीप्ति का गुण दर्शाते हैं अत: इन्हें फारफर्स कहा जाता है । कैरोसिन तेल पर प्रकाश डाला जाये तो हल्के नीले रंग की प्रतिदीप्ति उत्पन्न होती है जबकि ZnS क्रिस्टल पर एक्स-किरणें डाली जायें तो स्फुरदीप्ति उत्पन्न होती है ।

13.3.1 संदीप्ति प्रक्रियाओं के प्रकार (Types of luminescence processess)

खण्ड 13.2.2 में वर्णित प्राय: सभी अवशोषण विधियों अपनी विपरीत दिशाओं में घटित हो सकती हैं, जिनसे विभिन्न प्रकार की संदीप्ति घटना उत्पन्न होती हैं । इनमें से कुछ निम्नलिखित हैं -

1. **प्रकाश संदीप्ति (Photoluminescence) :** इस क्रिया में इलेक्ट्रॉन का उत्तेजन प्रकाशीय अवशोषण द्वारा कराया जाता है । प्रकाश के स्त्रोत, अवरक्त, दृश्य, पराबैंगनी अथवा एक्स-किरणें हो सकते हैं जो पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करेगा ।

2. **कैथोड संदीप्ति (cathode luminescence) :** इस क्रिया में इलेक्ट्रॉन का उत्तेजन उच्च ऊर्जा की इलेक्ट्रॉन पुंज द्वारा किया जाता है ।

3. **वैधुत संदीप्ति (Electro luminescence) :** इस विधि में P-N संधि में एक विद्युत धारा प्रवाह के द्वारा इलेक्ट्रॉन का उत्तेजन कराया जाता है ।

4. **ताप संदीप्ति (Thermo luminescence) :** इस क्रिया में इलेक्ट्रॉनों को निम्न तापों पर किसी भी विधि द्वारा उत्तेजित अवस्था में पहुंचा दिया जाता है । इस अवस्था में इलेक्ट्रॉन

अपनी अधिग्रहण अवस्था (trapping state) में जम जाते हैं (निम्न ताप के कारण) । जब क्रिस्टल को गर्म किया जाता है तो तापीय विछोभ (Thermal agitation) के कारण ये इलेक्ट्रॉन पुन: अपनी मूल अवस्थाओं में लौटते हैं तथा ऊर्जा उत्सर्जित करते हैं ।

इलेक्ट्रॉन उत्तेजन के लिए मुख्यतया उपरोक्त विधियां ही काम में ली जाती हैं यद्यपि कुछ अन्य विधियां भी हैं लेकिन उनका प्रचलन कम है ।

13.3.2 संदीप्ति की सैद्धान्तिक व्याख्या (Theoretical explanation of luminescence)

अब हम संदीप्ति घटना को समझाने के लिए प्रतिपादित किये गये सैद्धान्तिक मॉडलों के बारे में संक्षेप में पढ़ेगे । जिंक तथा कैडमियम सल्फाइडों में स्फुरदीप्ति की घटना प्रमुखता से पायी जाती है । मुख्यतया मुख्यतया ZnS:Ag ZnS : Cu तथा CdS : Ag प्रमुख स्फुरदीप्त पदार्थ है । हम इन्हीं पर विचार करेंगे । इनमें एक संयोजी तत्व Ag तथा Cu सक्रियको (activators) की भूमिका में होते हैं । इन पदार्थो में संदीप्ति प्रक्रिया को समझाने के लिए शॉन तथा क्लैसेन्स (schon & Klasens) द्वारा प्रस्तावित 'होल अभिगमन' (hole migration) सिद्धान्त काफी महत्वपूर्ण माना जाता है । इसके अनुसार संदीप्ति क्रिया निम्न चरणों में संपादित होती है -

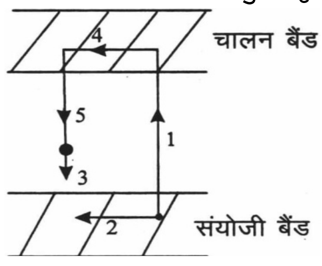
1. मूल अवशोषण प्रक्रिया द्वारा आपतित ऊर्जा का अवशोषण होता है । इसके फ़लस्वरूप इलेक्ट्रॉन तथा होल मुक्त होते हैं ।

2. उपरोक्त होल अशुद्धि केन्द्रों की ओर अभिगमन कर सकते हैं । उदाहरण के लिए, यदि CdS में Cd^{++} के स्थान Ag^{+}प्रतिस्थापित किया गया है तो केन्द्र पर एक नेट ऋणात्मक आवेश उत्पन्न होगा जो कूलम्बीय आकर्षण द्वारा होल को आकर्षित करेगा ।

3. ये होल उस अशुद्धि केन्द्र द्वारा अधिग्रहित कर लिया जायेगा तथा अल्प मात्रा में ऊर्जा का उत्सर्जन होगा ।

4. मुक्ता इलेक्ट्रॉन जालक में घूमता रहेगा लेकिन अंतत: वह भी अशुद्धि केन्द्र की ओर पहुंच जायेगा ।

5. ये इलेक्ट्रॉन भी अशुद्धि केन्द्र द्वारा अधिग्रहित कर लिया जायेगा जो पूर्व में अधिग्रहित होल से पुन:योजित होकर ऊर्जा का उत्सर्जन करेगा जिससे संदीप्ति पैदा होगी । इसे चित्र 13.8 (a) में दर्शाया गया है । इलेक्ट्रॉन का संक्रमण सीधे संयोजी बैंड से अशुद्धि केन्द्र की मूल अवस्था में हो सकता है अथवा कोई माध्यमिक उत्तेजित अवस्था भी इस संक्रमण किया में शामिल हो सकती है । इस संदीप्ति चक्र की बार- बार पुनरावृत्ति होती जाती है ।



चित्र 13.8 (a)

उपरोक्त मॉडल का बाद में दो अशुद्धि केन्द्रों के लिए भी सफलतापूर्वक विस्तार किया गया तथा ताप के बढ़ने के साथ संदीप्ति में आने वाले रंगों में होने वाले परिवर्तनों को भी सफलतापूर्वक समझाया गया ।

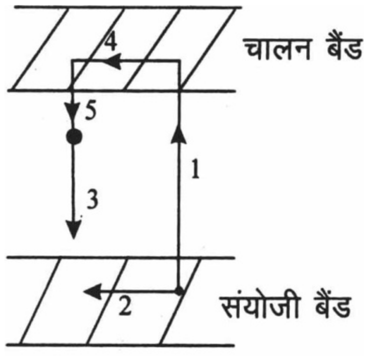
एक अन्य वैकल्पिक मॉडल भी बाद में प्रस्तावित किया गया है । ये मॉडल उपरोक्त माडल से एक बिंदु पर भिन्नता रखता है कि इसमें अशुद्धि केन्द्र द्वारा होल अधिग्रहण की क्रिया में उत्सर्जित वाली ऊर्जा की मात्रा अधिक है तथा यही संदीप्ति के लिए उत्तरदायी है । जबकि उपरोक्त मॉडल में ये ऊर्जा अल्प थी । इस मॉडल अनुसार जब एकल संयोजी अशुद्धि परमाणु को द्विसंयोजी आतिथ्य परमाणु के स्थान पर प्रतिस्थापित किया जाता है तो अशुद्धि केन्द्र के चारों ओर एक ऋणात्मक आवेशीय स्थान उत्पन्न हो जाता है । इसके दो प्रभाव होंगे-

(a) होल अधिग्रहण का परिच्छेद काफी बढ़ जाता है ।

(b) इसके परिणामस्वरूप होल अधिग्रहण की क्रिया में विमुक्त ऊर्जा की मात्रा भी काफी बढ़ जायेगी जिससे संदीप्ति प्रक्रिया उत्पन्न होगी ।

प्रस्तावित अभिक्रिया (Proposed mechanism) के निम्न चरण होंगे (चित्र 3.8(b)) :

1. प्रकाशीय अवशोषण के फलस्वरूप मुक्त इलेक्ट्रॉन व होल की उत्पत्ति होती है ।
2. ये दोनों अपने-अपने बैंडों में गतिशील रहते हैं । होल अपने अशुद्धि केन्द्र की ओर अभिगमन कर जाता है।
3. होल का अशुद्धि केन्द्र द्वारा अधिग्रहण कर लिया जाता है । इससे इतनी ऊर्जा विमुक्त होती है कि संदीप्ति उत्पन्न हो सके । अशुद्धि केन्द्र इस होल को आत्मसात् करके उदासीन हो जाता है ।
4. इलेक्ट्रॉन जालक में घूमता रहता है लेकिन अंततः वह भी अशुद्धि केन्द्र के निकट पहुंच जाता है ।
5. ये इलेक्ट्रॉन भी अशुद्धि केन्द्र द्वारा अधिग्रहित हो जाता है तथा अवरक्त विकिरण के रूप में अल्प ऊर्जा मुक्त होती है ।



चित्र 13.8(b)

दोनों मॉडलों में अंतर केवल इतना है कि पहले मॉडल में संदीप्ति की उत्पत्ति चालन इलेक्ट्रॉन के अधिग्रहण तथा उसके होल के साथ पुनःयोजन से होती है जबकि दूसरे मॉडल में संदीप्ति की उत्पत्ति होल के अधिग्रहण से मानी गई है । किसी एक मॉडल पर एकमतता नहीं है यद्यपि दूसरे को अधिक यथार्थ माना गया है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

5. संदीप्ति क्रिया अवशोषण प्रक्रिया की ठीक उल्टी होती है, इसे स्पष्ट कीजिये।

----

6. संदीप्ति में सक्रियंकों तथा सह- सक्रियंकों की क्या भूमिका होती है?

13.4 वर्ण-केन्द्र (colour Centrea)

अधिकांश अचालक क्रिस्टल तथा क्षारीय हैलाइड क्रिस्टल पूरे दृश्य प्रकाश।। स्पेक्ट्रम के लिए पारदर्शक होते हैं । इनका बैंड अंतराल काफी अधिक (4 - 007) होता है जिसके संगत तरंग दैर्ध्य का मान लगभग 2000 $\overset{\circ}{A}$ होता है जो पराबैंगनी क्षेत्र में आता है । अत: ये पूरे दृश्य प्रकाश क्षेत्र में पारदर्शक होते । इसी पारदर्शिता के गुण के कारण KCl, NaCl, LiF आदि क्रिस्टलों को प्रिज़्म लैंस तथा अन्य प्रकाशीय यंत्रों बनाने में काम में लिया जाता है । इनकी आयनिक ध्रुवणता भी लगभग 60 μm तरंगदैर्ध्य पर अनुनादित होती जो दूर अवरक्त क्षेत्र में आती है ।

प्रसिद्ध वैज्ञानिक वैकुरल न्‌ए पाया कि मूलत: पारदर्शी NaCl क्रिस्टल को यदि विसर्जन नलिका के पास रखा जाये तो ये हल्का पीला रंग दर्शाने लगता है । कुछ अन्य क्रिस्टलों में भी यही गुण गया । यदि इन पर प्रकाश डाला जाये तो ये क्रिस्टल दृश्य प्रकाश क्षेत्र में रंगीन दिखाई देने लगते हैं । क्रिस्टलों के ये रंग उनमें स्थित अशुद्धियों या दोषों के कारण उत्पन्न होते हैं । ये अशुद्धियाँ या दोष दृश्य प्रकाश स्पेक्ट्रम में से कुछ चुनी हुई आवृतियों का अवशोषण कर लेते हैं तथा पारगमित प्रकाश में इसके पूरक रंग दिखाई देने लगते हैं अत: क्रिस्टल रंगीन दिखने लगते हैं । इन अशुद्धियों या दोषों को ही वर्ण-केन्द्र कहा जाता है । 13.1 में स्पेक्ट्रमी रंगों को उनकी तरंग दैर्ध्य तथा पूरक रंगों के साथ दर्शाया गया है।

सारिणी 13.1 स्पेक्ट्रमी रंग व उनके पूरक रंग

स्पेक्ट्रमी रंग	तरंग दैर्ध्य ($\overset{\circ}{A}$)	पूरक रंग
बैंगनी	4100	लैमन-पीला
नीला	4800	नारंगी
नीला - हरा	5000	लाल
हरा	5300	बैंगनी
नारंगी	6100	नीला
लाल	6800	नीला - हरा

13.4.1 वर्ण-केन्द्र उत्पन्न करने की विधियाँ (Methods to produced colour centres)

क्रिस्टलों को रंगीन बनाने की कुछ विधियां निम्नलिखित हैं -

1. रासायनिक अशुद्धियां मिलाकर क्रिस्टलों में वर्ण केन्द्र उत्पन्न करने की प्रशिया काफी व्यापक है तथा प्रमुखता से काम में ली जाती है ।

2. धात्विक आयन की अधिकता उत्पन्न करके भी वर्ण केन्द्र उत्पन्न किये जा सकते हैं । इस प्रक्रिया में क्रिस्टल को क्षारीय धातु की वाष्प में गर्म करके तेजी से ठंडा किया जाता है । इससे क्रिस्टल में रंग उत्पन्न हो जाता है जो क्रिस्टल की प्रकृति पर निर्भर करता है । LiF को Li की वाष्प में गर्म पर गुलाबी, KCl को k की वाष्प में गर्म करने पर नीला तथा NaCl को Na की वाष्प में गर्म करने पर पीला रंग उत्पन्न होता है । रासायनिक विश्लेषण से पता चलता है कि इनमें 10^{16} से 10^{19} परमाणु प्रति इकाई घनसेमी तक का क्षारीय धातु आधिक्य उत्पन्न हो जाता है ।

3. एक्स-किरण, गामा किरण, न्यूट्रॉन अथवा इलेक्ट्रॉन पुंज की बौछार करके भी क्रिस्टलों को रंगीन बनाया जा सकता है तथा उनके रंगों को इच्छानुसार गहरा भी किया जा सकता है । उपरोक्त विकिरणों के प्रहार से क्रिस्टलों में प्रतिक्षिप्त इलेक्ट्रॉन उत्पन्न होते हैं । ये इलेक्ट्रॉन संयोजी बैंड के इलेक्ट्रॉनों के साथ अन्योय क्रिया करके इलेक्ट्रॉन होल युग्म उत्पन्न कर लेते हैं । इससे क्रिस्टलों से रंग उत्पन्न हो जाते हैं । उचित ताप पर कुछ समय के लिए दृश्य प्रकाश डालकर तथा फिर ठंडा करने पर इन क्रिस्टलों को पुन: रंगविहीन किया जा सकता है । ऐसा करने पर इलेक्ट्रॉन तथा होल पुनमोदित हो जाते हैं ।

4. वैद्युत अपघटन विधि से भी क्रिस्टलों को रंगीन बनाया जा सकता है । यदि एक क्रिस्टल पर लगभग 100^0C ताप पर (उसके गलनांक के नीचे) 100 वोल्ट/सेमी का विद्युत क्षेत्र आरोपित किया जाये तो क्रिस्टल में वर्ण-केन्द्र उत्पन्न हो जाते हैं । इस प्रक्रिया में M0 या W का तार क्रिस्टल के एक सिरे पर कैथोड के रूप में लगाया जाता है जबकि प्लेटीनम की पतली पन्नी का एनोड बनाया जाता है । वर्णकेन्द्रों का एक अग्र कैथोड पर उत्पन्न होता है तथा एनोड की ओर चलने लगता है । इस प्रकार क्रिस्टलों में इलेक्ट्रॉन पिंजरित वर्ण केन्द्र उत्पन्न हो जाते हैं । पिंजरित होल वर्ण-केन्द्र बनाने के लिए तार को एनोड के रूप में इस प्रक्रिया में भी लिया जाता है जबकि कैथोड को पन्नी के रूप में लेते हैं । इस प्रक्रिया में भी किसी एक तत्व की अधिकता के कारण वर्ण केन्द्रों का निर्माण होता है जैसा कि विधि (1) व (2) में होता है ।

13.4.2 वर्ण-केन्द्रों के प्रकार (Types of colour centres)

वर्ण-केन्द्रों को दो भागों में बांटा जा सकता है ।

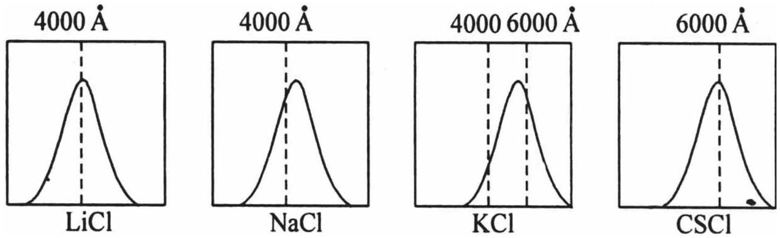
(a) इलेक्ट्रॉनिक वर्ण-केन्द्र-इनके उदाहरण हैं F केन्द्र, F_A, केन्द्र, R- केन्द्र तथा M- केन्द्र।

(b) होल वर्ण-केन्द्र - ये इलेक्ट्रॉनिक वर्ण केन्द्रों के ऐन्टिमोर्फस् (antimorphs) होते हैं जिन्हें V- केन्द्र कहा जाता है । उदाहरण के लिए F-केन्द्र के ऐन्टिमोर्फस्

(antimorphs) V_1, R केन्द्रों के एन्टिमोर्फस् (antimorphs) V_2, व V_3, तथा M - केन्द्र के एन्टिमोर्फस् (antimorphs) M केन्द्र हैं ।

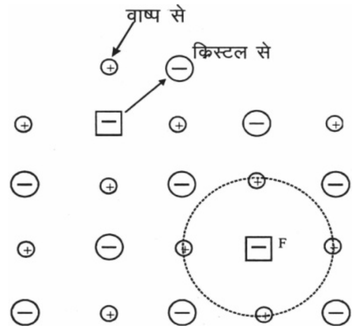
(i) F-केन्द्र-F-केन्द्र सबसे आसान तथा व्यापक होते हैं । इनका नाम जर्मन शब्द फार्व से निकला है जिसका अर्थ वर्ण है । ये वर्ण-केन्द्र क्रिस्टलों को क्षारीय धातु की वाष्प में गर्म करके अथवा एक्स-किरण विकिरणों के प्रहार से उत्पन्न किये जाते हैं, उदाहरण के लिए NaCl के अवशोषण स्पेक्ट्रम में 46564 $\overset{\circ}{A}$ पर मुख्य बैड प्राप्त होता है जो दृश्य स्पेक्ट्रम के नीले क्षेत्र में आता है तथा अपने पूरक नीले रंग के लिए उत्तरदायी होता है ।

यहां एक महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि KCl तथा NaCl का F- केन्द्र समान रंग उत्पन्न करता है चाहे उन्हें Na या फिर K की वाष्प में गर्म करके उत्पन्न किया जाये । इससे स्पष्ट है कि F- केन्द्र क्रिस्टल का लाक्षणिक गुण होता है न कि क्षारीय धातु की वाष्प का जिसमें क्रिस्टल को गर्म किया जाता है । क्षारीय धातु की भूमिका मात्र F- केन्द्र उत्पन्न करने तक ही सीमित है । कुछ क्षारीय हैलाइड क्रिस्टलों के F- बैंड चित्र 13.9 में दर्शाये गये हैं । यह भी देखा गया है कि रंगीन क्रिस्टलों का घनत्व उनकी पारदर्शक अवस्था के घनत्व से कम होता है । एक्स-किरण विवर्तन प्रयोगों से इसकी पुष्टि की जा चुकी है । धात्विक परमाणुओं की अधिकता के कारण इनमें ऋणात्मक आयनों की रिक्तियां उत्पन्न हो जाती हैं जिसके फलस्वरूप इसका घनत्व गिर जाता है ।



चित्र 13.9 विभिन्न हैलाइड क्रिस्टलों के F - केंद्र

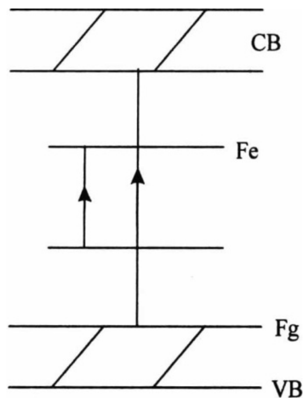
F- वर्ण केन्द्र की उत्पत्ति का कारण : क्रिस्टलों में वर्ण केन्द्रों की उत्पत्ति उनकी अरससेमी.करणमित (non-stoichometric) गुण के कारण होती है । उदाहरण के लिए जब NaCl को Na की वाष्प में गर्म किया जाता है तो क्रिस्टल द्वारा वाष्प से अवशोषित Na परमाणु एक इलेक्ट्रॉन तथा घनात्मक आयन में विभक्त हो जाता है (चित्र 13.10) जिससे क्रिस्टल अरससमीकरणमित हो जाता है । इस प्रक्रिया में तप्त आयनों का क्लोरीन की तुलना में अधिक्य हो जाता है तथा Cl रिक्तियाँ उत्पन्न हो जाती हैं । क्षारीय परमाणु का संयोजी इलेक्ट्रॉन उस विशिष्ट परमाणु से बद्ध नहीं रहकर जालक में आ जाता है तथा ये ऋणात्मक आयन रिक्तियों के साथ संबद्ध हो जाता है (रिक्त ऋणात्मक आयन एक विलगित धनात्मक आदेश की तरह व्यवहार करता है) । ये स्थानीय आवेश उदासीनता के लिए आवश्यक भी है ।



चित्र 13.10

ये इलेक्ट्रॉन अपने पड़ौसी धनात्मक धातु आयनों द्वारा बांट लिया जाता है । यह मॉडल डी-बोर (de-Boer) द्वारा प्रतिपादित किया गया था, जिसे बाद में मीट तथा गर्नी (Mott and Gurney) द्वारा विकसित किया गया ।

इस पिंजरित (trapped) इलेक्ट्रॉन की क्वांटम अवस्थाऐं वर्जित अंतराल के आदर स्थित होती हैं (चित्र 13.11) जिनकी ऊर्जा अवस्थाऐं इस बात पर निर्भर करेंगी कि इलेक्ट्रॉन के चारों और की क्रिस्टल जालक संरचना क्या है न कि इस बात पर कि इलेक्ट्रॉन किस परमाणु से उत्पन्न हुआ है । इससे स्पष्ट है कि इस बात का कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा कि मादित धातु परमाणु आतिथ्य परमाणु जैसा ही है या उससे भिन्न है । जब क्रिस्टल पर श्वेत प्रकाश डाला जाता है तो इस प्रकाश का कुछ घटक, जिसकी ऊर्जा इस इलेक्ट्रॉन को उत्तेजित अवस्था में संक्रमित कराने के लिए पर्याप्त होगी, अवशोषित हो जाता है । इससे यह इलेक्ट्रॉन वर्जित क्षेत्र स्थित किसी ऊर्जा स्तर में संक्रमित हो जाता है ।



चित्र 13.11 में क्षारीय हैलाइड क्रिस्टल की बैंड संरचना

चित्र 13.11 में क्षारीय हैलाइड क्रिस्टल की बैंड संरचना को अशुद्धि स्तरों की उपस्थिति के संगत संक्रमणों को दर्शाया गया है । F_g तथा F_e, F- केन्द्र की मूल तथा उत्तेजित अवस्थाऐं हैं।

यह पाया गया है कि इन क्रिस्टलों में कुल अवशोषण की तीव्रता क्रिस्टल में डाले गये धातु परमाणु आधिक्य अर्थात् उसमें उत्पन्न F- केन्द्रों की संख्या के समानुपाती होती है ।

(ii) **अन्य इलेक्ट्रानिक वर्ण केन्द्र:** यदि एक क्रिस्टल जिसमें कि F- केन्द्र स्थित हों के ऊपर प्रकाश डाला जाये तो F- बैंड के उच्च तरंगदैर्ध्यो पर नये अवशोषण बैंड प्राप्त होते हैं।

इन्हें F '- केन्द्र कहा जाता है । कुछ इलेक्ट्रॉन आपतित प्रकाश ऊर्जा का अवशोषण करके उत्तेजित हो जाते हैं तथा F -केन्द्रों के साथ जुड़कर F `- केन्द्रों का निर्माण कर लेते हैं । इस प्रकार F `- केन्द्र F - केन्द्र ही हैं जिसमें दो इलेक्ट्रॉन प्रग्रहित (trap) किये गये हैं । पुन: प्रकाश डालकर केन्द्र F `-केन्द्रों को F - केन्द्रों में बदला जा सकता है । अत: ये क्रिया उत्क्रमणीय होती है ।

(iii) **होल वर्ण-केन्द्र (V- केन्द्र).**यदि क्षारीय हैलाइड क्रिस्टलों को हैलोजन आयन आधिक्य वाले वातावरण में गर्म किया जाये तो इनमें धनात्मक आयन रिक्तिया उत्पन्न हो जाती है । इन रिक्तियों का व्यवहार एक विलगित ऋणात्मक आवेश की भांति होता है । अत: इनमें होल प्रग्रहित (trap) हो जाते हैं तथा V- केन्द्र बनाते हैं । ये V- केन्द्र पराबैंगनी क्षेत्र में प्रकाश का अवशोषण करते हैं । इस प्रकार के क्रिस्टलों के अवशोषण स्पेक्ट्रमों में कई अवशोषण शिखर प्राप्त होते हैं जो इंगित करते हैं कि इनमें एक से अधिक संक्रमण संभव होते हैं । इन शिखरों को V_1 -band , V_2 - band कहते हैं । V- केन्द्रों के कुछ उदाहरण निम्न हैं ।

(1) एक ऋणात्मक आयनों के युग्म में होल के अधिग्रहण होने से V_k केन्द्र बनता है ।

(2) यदि उदासीन क्लोरीन अणु एक ऋणात्मक आयन के द्वारा अधिग्रहित होता है तो V_Lकेन्द्र बनता है।

(3) यदि एकधा आयनित Cl_2^- अणु एक ऋणात्मक आयन द्वारा अधिग्रहित होता है तो H- केन्द्र बनता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

7. क्रिस्टलों में F- वर्ण केन्द्र बनने पर उनके घनत्व में क्या परिवर्तन होगा तथा क्यों?

----

8. वर्ण केन्द्रों के रंग उनको- उत्पन्न करने के लिए मिलाई गई अशुद्धि परमाणु पर निर्भर है अथवा क्रिस्टल पर?

13.5 प्रकाशिक चालकता (Photoconductivity)

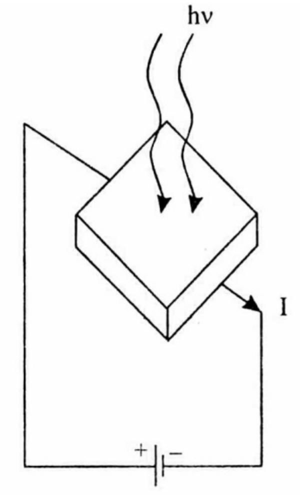
प्रकाश की अनुपस्थिति में तथा सामान्य अवस्थाओं में एक नैज अर्धचालक क्रिस्टल नगण्य विद्युत चालकता दर्शाता है, लेकिन उन पर यदि विद्युत चुंबकीय विकिरण डाले जायें तो विद्युत चालकता में काफी वृद्धि देखी जाती है । पूर्व में हम कह चुके हैं कि यदि क्रिस्टलों पर उनके बैंड अंतराल से अधिक ऊर्जा के विकिरण डाले जायें तो उनका अवशोषण करके क्रिस्टलों में इलेक्ट्रॉन तथा होल युग्म उत्पन्न होते हैं । ये दोनों मुक्त आवेश वाहकों की भूमिका में होते

हैं तथा विद्‌युत चालकता में योगदान करने लगते हैं । विकिरण डालने पर अर्धचालकों में होने वाली विद्‌युत चालकता की वृद्धि को ही प्रकाशिक चालकता कहते हैं । इस प्रक्रिया को प्रकाशमापी या ठोस अवस्था अवरक्त संसूचकों में प्रयुक्त किया जाता है ।

वर्ष 1873 में सर्वप्रथम स्मिथ ने सेलेनियम में प्रकाश चालकता का गुण देखा जिसके बाद सेलेनियम के फोटो सैल अस्तित्व में आने लग गये । इन सैलों में फोटो वोल्टीय प्रभाव का उपयोग किया गया बारे में हम अगले अनुच्छेद में पढ़ेंगे । प्रकाश चालकता के क्षेत्र में प्रारंभिक शोध कार्य केवल सेलेनियम सीमित थे । एफ.सी.ब्राउन तथा उसके सहयोगियों को विश्वास था कि सेलेनियम में यह गुण उस पर प्रकाश डालने पर उसके एक से अधिक रसायनिक अवस्थाओं में रह पाने की प्रवृत्ति (alltropy) उत्पन्न होने के कारण होता है । 1927 में स्थापित हो सका कि सेलेनियम में प्रकाश चालकता उसके अंदर इलेक्ट्रॉनों के मुक्तिकरण के फलस्वरूप संभव होती है । बाद में प्रकाशिक चालकता का गुण CuS, MoS, PbS, AgS, AgI_2, AgO तथा कई अन्य पदार्थो में भी पाया गया । 1940 तक फोटो सैलों के निर्माण में मुख्य रूप से Se, CuO तथा TaS ही उपयोग होता था ।

माना एक अर्धचालक पटीटका अंधकार में रखी हुई है । अंधकार में उसमें एक अति अल्प धारा बहती है

उसकी अदीप्त चालकता (dark conductivity) को इस प्रकार लिखा जा सकता है-



चित्र 13.12 एक प्रकाश चालक में आवेश वाहकों की उत्पत्ति

चित्र 13.12 एक प्रकाश चालक में आवेश वाहकों की उत्पत्ति

$$\sigma d = e\left(n_0 \mu + p \mu_h\right)$$

n0 तथा p0 इलेक्ट्रॉन तथा होल की साम्यस्थिति में सान्द्रताएँ तथा μ_e व μ_h इनकी गतिशीलताए है । यदि इस पट्टिका पर लम्बवत दिशा में प्रकाश डाला जाये तो नये इलेक्ट्रॉन तथा होलो के युग्म उत्पादन के कारण आवेश वाहको की संख्या क्रमश Δn तथा Δp परिणाम में बढ़ जाती है तथा चालकता का मान यकायक बढ़ जाता है । चूंकि इलेक्ट्रॉन तथा होल युग्म में उत्पादित होते है, अतः $\Delta n = \Delta p$ होगा ।इस अवस्था में चालकता -

$$\sigma = \sigma_d + e\Delta n(\mu_e + \mu_h) \quad ...(13.10)$$

या $$\sigma = \sigma_d + e\Delta n\mu_h(1+b)$$ ....(13.11)

जहां $b = \frac{\mu_e}{\mu_h}$ गतिशीलता अनुपात है।

चालकता में होने वाली आपेक्षिक वृद्धि

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_d} = \frac{e\Delta n\mu_h(1+b)}{\sigma_d}$$ ...(13.12)

यह स्थिति साम्यवस्था की नहीं है क्योंकि यह उत्तेजित अवस्था है अतः हम Δn का मान ज्ञात करने के लिए उन कारणों पर विचार करेंगे जिनके कारण n का मान समय के साथ परिवर्तित होता है। इसके लिए मुख्य रूप से दो कारण उत्तरदायी है। (a) प्रकाश आपतन के दौरान इलेक्ट्रॉन तथा होल निरंतर उत्पन्न होते रहेंगे तथा (b) कुछ इलेक्ट्रानों तथा होलो का पुनःयोर्जान (recombination) भी होता रहेगा।

अतः समय के साथ सांद्रता परिवर्तन निम्न सूत्र द्वारा दिया जाएगा -

$$\frac{dn}{dt} = g - \left(\frac{n-n_0}{\tau}\right)$$ ...(13.13)

g, प्रकाश अवशोषण के कारण इलेक्ट्रॉन की प्रति इकाई आयतन में उत्पादन की दर है जबकि दूसरा पद इनके पुन:र्योजन की दर को दर्शाता है । τ को पुन:र्योजन काल कहते हैं जो मुक्त आवेश वाहकों का आयुकाल ही होता है ।

स्थैतिक अवस्था में - $\frac{dn}{dt} = 0$ ....(13.14)

अत: $(n - n_0) = g\tau$ ...(13.15)

या $\Delta n = g\tau$ ...(13.16)

उत्पत्ति दर को पदार्थ के अवशोषण गुणांक तथा आपतित प्रकाश की तीव्रता से भी सबंधित किया जा सकता है । यदि d पदार्थ की मोटाई, μ मूल अवशोषण गुणांक हो तो μd पट्टिका द्वारा शक्ति का अंश होगा । यदि N(ω)आपतित फोटानों की प्रति सेकण्ड संख्या हो तो प्रति सेकण्ड में फोटानों की संख्या प्रति इकाई आयतन में इस प्रकार होगी!

$$g = \frac{\mu d N(\omega)}{V}$$ .....(13.17)

प्रत्येक फोटॉन के अवशोषण के फलस्वरूप एक इलेक्ट्रॉन होल युग्म उत्पादन है ।

$N(\omega)$ को आपतित प्रकाश की तीव्रता $I(\omega)$से इस प्रकार संबधित किया जा सकता है ।

$$N = \frac{I(\omega)A}{\hbar\omega}$$ ....(13.18)

जहां A पट्टिका का क्षेत्रफल तथा $\hbar\omega$ आपतित फोटान की ऊर्जा है ।

सेमी. (13.16) में g का मान सेमी.. (13.17) से लिखने पर

$$\Delta n = \frac{\mu d N(\omega)\tau}{V}$$ ...(13.19)

पुन: $N(\omega)$का मान सेमी.. (13.18) से लिखने पर

$$\Delta n = \frac{\mu d I(\omega)\tau A}{V\hbar\omega} \quad ...(13.20)$$

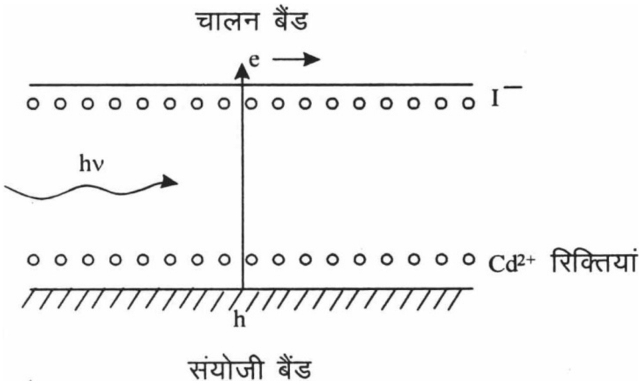
या $$\Delta n = \frac{\mu I(\omega)\tau}{\hbar\omega} \quad \text{(चूंकि V=Ad म मत)} \quad ...(13.21)$$

अत: सेमी.. (13.12) से $$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_d} = \frac{\mu I(\omega)\tau e\mu_h(1+b)}{\hbar\omega\sigma_d} \quad ...(13.22)$$

इस प्रकार $$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_d} \propto \tau \quad ...(13.23a)$$

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_d} \propto \mu \quad ...(13.23b)$$

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma_d} \propto I(\omega) \quad ...(13.23c)$$



चित्र 13.13 CdS में आयोडीन मिलाकर इलेक्ट्रॉन का आयुकाल बढ़ाने के लिए एक मांडल

स्पष्ट है कि चालकता में आपेक्षिक वृद्धि मूल अवशोषण गुणांक, पुन:र्योजन काल तथा आपतित प्रकाश तीव्रता के समानुपाती होगी । अत: आयुकाल के अधिक होने पर प्रकाश चालकता अधिक होगी लेकिन शुद्ध पदार्थो का आयुकाल काफी कम (10^{-6} सेकण्ड) होता है । अत: उचित अशुद्धियों का चयन करके पुनर्योजन की संभावना को काफी कम किया जा सकता है या आयुकाल को बढाया जा सकता है । उदाहरण के लिए CdS में I_2 की अशुद्धि मिलाकर आयुकाल को 10^{-3} सेकण्ड तक बढ़ाया जा सकता है । इस प्रक्रिया को चित्र 13.13 में दर्शाया गया है । जब S के स्थान पर I_2, को प्रतिस्थापित किया जाता है तो यह दाता की भूमिका में होता है । द्‌विसंयोजी जालक में आने वाले I_2 को जालक से दो इलेक्ट्रॉन ग्रहण करने होंगे । एक इलेक्ट्रॉन के साथ इसका बंध काफी मजबूती से बनता है जबकि दूसरे इलेक्ट्रॉन के साथ अपेक्षाकृत कमजोर रहता है । दूसरा बंध तापीय ऊर्जा के कारण टूट जाता है जिससे आवेश संतुलन बिगड़ जाता है । इसका संतुलन बनाये रखने के लिए जालक में Cd^{++} रिक्तिया उत्पन्न होती हैं । ये रिक्तियां दो I_2, दाताओं पर एक रिक्ति के अनुसार उत्पन्न होती है । फोटो उत्तेजन के दौरान होल आसानी से अधिग्रहित हो जाते हैं अत: इलेक्ट्रॉनों के साथ इनमें

पुनर्योजन की संभावना काफी घट जाती है तथा आयुकाल (τ) काफी बढ़ जाता है । CdS तथा CdTe ऐसे क्रिस्टल हैं जिनकी दृश्य प्रकाश के लिए अनुक्रिया (response) तथा सुग्रहिता काफी अधिक होर्ता है । अत: इन पदार्थो का प्रकाशिक चालकता में काफी अधिक प्रयोग किया जाता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

9. प्रकाश चालकता पदार्थो के भौतिक गुणों के अध्ययन में किस प्रकार महत्वपूर्ण है?

----

10. प्रकाश डालने पर पदार्थो की चालकता में वृद्धि किन-किन कारणों पर निर्भर करती है?

उदाहरण 13.3 एक अर्धचालक पदार्थ का सामान्य ताप पर अवशोषण 600 सेमी$^{-1}$ है । पदार्थ पर 1.5 इलेक्टॉन-वोल्ट ऊर्जा का 6 x 10^{-7} वाट / सेमी^{2} तीव्रता का प्रकाश डाला जाता है । पदार्थ पर आपतित फोटॉन फ्लक्स की गणना कीजिऐ ।

हल: फोटॉन फ्लक्स का मान ($I(\omega)/h\nu$) होता है ।

जहां $I(\omega)$ तीव्रता का मान तथा फोटॉन की ऊर्जा का मान है ।

मूल अवशोषण प्रक्रिया में फोटॉन की निम्नतम ऊर्जा का मान है।

अत: $h\nu = E_g$ =1.5eV =1.5 x 1.6 x 10^{-19} जूल

तथा $I(\omega)$= 6 x 10^{-7} वाट / सेमी^{2}

=6 x 10^{-7} x 10^{4} वाट / मी^{2}

अत: फोटॉन फ्लक्स $= \dfrac{6\times10^{-7}\times10^{4}}{1.5\times1.6\times10^{-19}}$

=2.5 x 10^{-16}

उदाहरण 13.4 यदि उपरोक्त उदाहरण में इलेक्ट्रॉन होल पुनर्योजन काल 3.5 x 10^{-4} सेकण्ड हो तो इलेक्ट्रॉन -होल युग्म उत्पादन दर की गणना कीजिये ।

हल : इलेक्ट्रॉन-होल उत्पादन की दर

$\Delta n = \dfrac{\mu I(\omega)\tau}{h\nu}$ जहां τ पुनर्योजन काल है ।

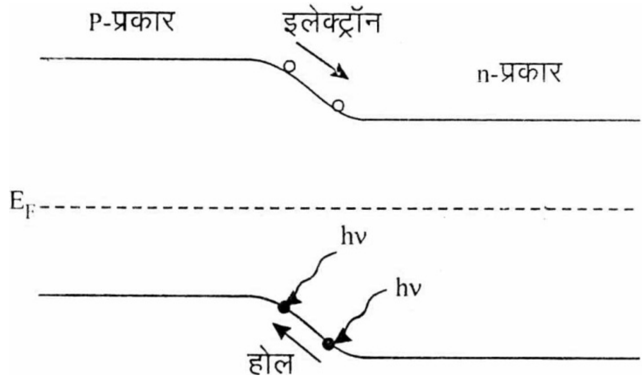
μ , τ तथा $\dfrac{I(\omega)}{h\nu}$ के मान रखने पर

$$\Delta n = 600\times2.5\times10^{16}\times2.5\times10^{-4}$$

=3.75 x 10^{15}सेमी$^{-3}$

13.6 प्रकाश वोल्टीय प्रभाव (Photovoltaic effect)

यदि एक P-N संधि पर उपयुक्त आवृत्ति का प्रकाश डाला जाये तो फोटॉनों के अवशोषण के द्वारा संधि के सिरों पर एक विभवांतर उत्पन्न हो जाता है । यह विभवान्तर इलेक्ट्रॉन तथा होल के आंतरिक अपवाह के कारण उत्पन्न होता है । इस घटना को प्रकाश वोल्टीय प्रभाव कहते हैं । यदि डाले गये प्रकाश की आवृति ν का मान $\frac{E_g}{h}$ से अधिक हो तो उसके अवशोषण से इलेक्ट्रॉन तथा होल का एक युग्म उत्पन्न होगा । इलेक्ट्रॉन प्राचीर के नीचे की ओर n क्षेत्र की तरफ तथा होल प्राचीर के ऊपर की ओर p-क्षेत्र की तरफ विसरित होना प्रारंभ कर देते हैं । इससे P-N संधि के सिरों पर एक विभवांतर उत्पन्न हो जाता है । इसे चित्र 13.14 में दर्शाया गया है । जब तक P-N संधि पर प्रकाश डालते रहते है उससे वोल्टता तथा धारा निरंतर मिलती रहती है । इस धारा को आपतित प्रकाश की तीव्रता मापन में प्रयुक्त किया जा सकता है । प्रकाश वोल्टीय प्रभाव के सिद्धान्त पर सौर सैलों में सौर ऊर्जा को विद्युत ऊर्जा में परिणित किया जाता है । 1839 में मात्र 19 वर्षीय फ्रांसीसी वैज्ञानिक एडमंड बैकुरल ने इन प्रभाव की खोज की थी । सर्वप्रथम बैकुरल ने ही देखा कि कुछ पदार्थो पर यदि प्रकाश डाला जाये तो उनमें अति अल्प धारा का प्रवाह होने लग जाता है ।



चित्र 13.14 P-N संधि पर इलेक्ट्रॉन तथा होलों का संचरण

बाहरी वोल्टता V लगाने पर P-N संधि में बहने वाली धारा का सूत्र इस प्रकार दिया जाता है-

$$I_v = I_0\left[\exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right)-1\right] \qquad ...(13.20)$$

I_0 को अदीप्त धारा (dark current) कहते है ।

यदि P-N संधि पर प्रकाश डाला जाये तो एक प्रकाश-विद्युत धारा I_L उत्पन्न होती है जिसकी दिशा I_v के विपरीत होती है । अत: प्रकाश की उपस्थिति में नैट धारा का मान होगा

$$I = I_L - I_V \qquad ...(13.21)$$

यदि बाहरी वोल्टता आरोपित नहीं की जाये तो P-N संधि एक प्रकाश वोल्टीय सैल की तरह कार्य करता है । लेकिन इस स्थिति में धारा का मान शून्य होगा अत:

I = 0

या $I_L - I_V = 0$

अत: $$I_L + I_0 + I_0 \exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right) = 0 \quad \text{...(13.22)}$$

अत: $$\exp\left(\frac{eV_{ph}}{k_B T}\right) = \frac{I_L + I_0}{I_0} = \left(1 + \frac{I_L}{I_0}\right)$$

अत: $$\frac{eV_{ph}}{k_B T} = \ln\left(1 + \frac{I_L}{I_0}\right)$$

या $$V_{ph} = \frac{k_B T}{e} \ln\left(1 + \frac{I_L}{I_0}\right) \quad \text{...(13.23)}$$

यदि आपतित प्रकाश की तीव्रता बहुत अधिक हो तो,

$$\left(\frac{I_L}{I_0} >> 1\right) \text{ अत: } V_{ph} = \frac{k_B T}{e} \ln\left(\frac{I_L}{I_0}\right) \quad \text{...(13.24)}$$

इस प्रकार प्रकाश-विद्युत वोल्टता, प्रकाश विद्युत धारा के साथ (अत: विकिरण के साथ) लौगीय रूप में बदलती है । अत: ये परिवर्तन काफी प्रभावी होंगे । यही कारण है कि प्रकाश वोल्टीय सैल साधारण प्रकाश तीव्रता मापन में अधिक उपयोगी माने जाते हैं ।

13.7 सारांश (Summary)

- ठोसों में प्रकाशीय अवशोषण जिन प्रमुख प्रक्रियाओं के द्वारा होता है वह हैं मूल अवशोषण, एक्साइटॉन अवशोषण तथा अशुद्धियों के कारण अवशोषण । ये अवशोषण प्रक्रियाऐ तभी संपन्न होंगी जबकि फोटॉन की ऊर्जा पदार्थो के ऊर्जा अंतराल से अधिक हो ($(h\nu >> E_g)$)। अवशोषण प्रक्रिया की व्याख्या से पदार्थो की बैंड संरचना तथा अन्य महत्वपूर्ण भौतिक गुणों की जानकारी प्राप्त की जा सकती है ।
- प्रकाशीय अवशोषण द्वारा उत्तेजित हुए इलेक्ट्रॉन पुन: ऊर्जा का उत्सर्जन करके मूल अवस्था में लौटते हैं तथा दृश्य क्षेत्र में प्रकाश उत्सर्जित करते हैं । यह प्रक्रिया अवशोषण के विपरीत है तथा संदीप्ति कहलाती है । संदीप्ति उत्पन्न करने वाले पदार्थो में सक्रियक तथा सह-सक्रियक अशुद्धि परमाणुओं की प्रमुख भूमिका रहती है ।
- अधिकांश अचालक तथा क्षारीय हैलाइड क्रिस्टल दृश्य प्रकाश क्षेत्र में पारपृर्शक होते हैं । यदि इन पर विकिरण डाले जायें तो ये रंगीन दिखाई देने लगते हैं, ऐसा इनमें उपस्थित वर्ण-केन्द्रों के कारण होता है । ये वर्ण-केन्द्र अशुद्धि या दोषों के कारण होते हैं। ये दो प्रकार के होते है - इलेक्ट्रॉनिक तथा होल केन्द्र । F - केन्द्र सबसे व्यापक होते हैं ।

- अर्धचालकों की प्रकाश - चालकता को उनके ऊपर प्रकाश डालकर बढ़ाया जा सकता है । प्रकाश पुंज से अतिरिक्त आवेश वाहक उत्पन्न होते हैं अत: चालकता में वृद्धि होती है। पदार्थो के भौतिक गुणों अध्ययन में महत्वपूर्ण होती है ।
- यदि P - N संधि पर उचित आवृति का प्रकाश $(\nu > E_g / h)$ डाला जाये तो संधि के सिरों के बीच एक वोल्टता उत्पन्न हो जाती है जिसे प्रकाश - वोल्टता कहते हैं । यह वोल्टता प्रकाशीय धारा पर लौगीय रूप में निर्भर करती है ।

13.8 शब्दावली (Glossary)

अदीप्त चालकता	Dark conductivity
अदीप्त धारा	Dark current
अनुक्रिया	Response
अनुमत संक्रमण	Allowed transition
अप्रत्यक्ष अंतराल	Indirect gap
अरससमीकरणमित	Non stoichimetric
अवशोषण गुणांक	Absorption coefficient
एक्साइटॉन	Exciton
अंतर बैंड	Inter - band
अंतरा बैंड	intra - band
पुनःर्योजन	Recombination
पिंजरित	Trapped
प्रग्रहित	captured
प्रकाश वोल्टीय	Photo voltaic
प्रकाशिक चालकता	Photoconductivity
प्रकाशीय गुण	Optical properties
प्रत्यक्ष अंतराल	Direct gap
प्रकाश संदीप्ति	Photoluminescence
मूल अवशोषण	Fundamental absorption
प्रतिदीप्ति	Fluorescence
वर्ण केन्द्र	Colour centre
वरणक नियम	selection rules
स्थानगत स्फुरदीप्ति	Localised phosphorescence
सक्रियक	Activators
सम्मिश्र	Complex
सह-सक्रियक	Co-activators

संक्रमण	Transition
संतत्कल्प	Quasicontinuous
संसूचक	Detector

13.9 सन्दर्भ ग्रंथ (Reference books)

C. Kittel	Introduction to Solid State Physics, 5th Edition	Wiley Eastern New Delhi
M.A. Wahab	Solid State Physics Structure and Proprerty of Materials	Narosa Publishing House, New Delhi
Saxena, Gupta and Saxena	Fundamental of Solid State Physics	Pragati Prakashan Meerut
S.L. Kakani C.Hemrajani	Solid State Physics	S. Chand & sons, New Delhi.
S. O. Pillai	Solid state Physics	New Age International Publisheres, New Delhi

13.10 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self-assessment questions)

1. ऋणात्मक परावैद्युतांक एक सम्मिश्र अपवर्तनांक को इंगित करता है जो आपतित विकिरणों के परावर्तन का संकेतक है । धातुओं में ऐसी स्थिति प्राय: दृश्य क्षेत्र के विकिरणों के आती है । स्पष्ट है कि धातुऐं दृश्य क्षेत्र में परावर्तक होंगी ।
2. अचालकों में मूल अवशोषण आवृत्ति के संगत ऊर्जा का मान लगभग 4 इलेक्ट्रॉन-वोल्ट होता है जो पराबैंगनी क्षेत्र में आता है । इस ऊर्जा तक के विकिरणों के लिए ये पारदर्शक, तथा इससे अधिक ऊर्जा विकिरणों के लिये ये अपारदर्शक रहते हैं ।
3. मूल अवशोषण प्रक्रिया में इलेक्ट्रॉन-फोनॉन निकाय की कुल ऊर्जा तथा संवेग का संरक्षण होना आवश्यक है ।
4. माध्यम का परावैद्युतांक अधिक होने पर एक्साइटॉन निर्माण के लिए कम ऊर्जा की आवश्यकता होगी अत: ये अच्छी स्थिति है । एक्साइटॉन की बंधन ऊर्जा लगभग 0.01 इलेक्द्रान-वोल्ट होती है जो काफी कम है ।
5. अवशोषण प्रक्रिया में इलेक्ट्रॉन ऊर्जा अवशोषित करके उच्च ऊर्जा अवस्थाओं में उत्तेजित किया जाता है । जबकि इलेक्ट्रॉन के मूल अवस्था में लौटने की क्रिया जिसमें

कि दृश्य प्रकाश उत्सर्जित होता है संदीप्ति कहलाती है । अत: ये अवशोषण की उल्टी प्रक्रिया है ।

6. ये अशुद्धि परमाणु होते हैं । सक्रियक के ऊर्जा स्तर संयोजी बैंड के ऊपर जबकि सह-सक्रियक के ऊर्जा स्तर चालन बैंड के नीचे होते हैं । सक्रियक मूल अवस्था में लौट रहे इलेक्ट्रॉन के लिए माध्यमिक ऊर्जा स्तर उपलब्ध कराते है जबकि सह-सक्रियक अधिग्रहक का कार्य करते हैं जिससे अवशोषण व उत्सर्जन प्रक्रियाओं में समयांतर उत्पन्न हो जाता है ।
7. F-केन्द्र बनने पर पदार्थ का घनत्व घट जायेगा क्योंकि इनके बनने पर क्रिस्टलों में ऋणात्मक रिक्तिया उत्पन्न हो जाती हैं ।
8. F-केन्द्र क्रिस्टल का ही अभिलाक्षणिक गुण होता है । उदाहरण के लिए NaCl को Na या Cl की वाष्प में गर्म करके F-केन्द्र उत्पन्न करने पर वह समान रंग (नीला) ही उत्पन्न करता है ।
9. इसका उपयोग प्रकाशमापी बनाने तथा संवेदी संसुचाको में तथा स्पेक्ट्रोस्कोपी तकनीकों में होता है जो पदार्थो की संरचना के अध्ययन में अति उपयोगी है ।
10. यह वृद्धि मूल अवशोषण गुणांक (μ), इलेक्ट्रॉन - होल के पुनर्योजन काल (τ) तथा आपतित प्रकाश की तीव्रता $I(\omega)$ के समानुपाती होती है ।

13.11 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुलरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. ठोसो में विकिरण अवशोषण प्रक्रियाओं के मुख्य कितने प्रकार होते हैं?
2. एक्साइटॉन क्या होते हैं?
3. उत्तेजित टावस्था का आयुकाल कितना होता है? स्फुरदीप्त पदार्थो में यह काल लगभग कितना होता है?
4. संदीप्ति प्रक्रियाओं की मुख्य विधियां लिखिये ।
5. वर्ण-केन्द्र क्या होते है?
6. ठोसों में वर्ण-केन्द्र उत्पन्न करने की मुख्य विधियां लिखिये ।
7. प्रकाश चालकता का गुण सर्वप्रथम किस पदार्थ में देखा गया?
8. प्रकाश वोल्टीय प्रभाव की खोज किस वैज्ञानिक ने की थी?
9. अदीप्त धारा का क्या अर्थ होता है?
10. प्रकाश - वोल्टीय सैलों का क्या उपयोग हो सकता है? 9

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

11. ठोसों में मूल अवशोषण की घटना को समझाइये । प्रत्यक्ष अंतराल तथा अप्रत्यक्ष अंतराल वाले अर्धचालकों में यह किस प्रकार भिन्न होती है? इन दोनों में अवशोषण गुणांक की फोटॉन ऊर्जा पर निर्भरता समझाइये ।

12. संदीप्ति, स्फुरदीप्ति तथा प्रतिदीप्ति क्रियाऐं क्या होती हैं? संदीप्ति की घटना के लिए होल अभिगमन सिद्धान्त को समझाइये ।

13. F-केन्द्र क्या होते हैं? इनकी उत्पत्ति के कारण की व्याख्या कीजिये ।

14. प्रकाशिक चालकता क्या है? प्रकाश डालने पर अर्धचालकों में चालकता में होने वाली वृद्धि के लिए सूत्र स्थापित कीजिये ।

15. प्रकाश-वोल्टीय प्रभाव को समझाइये तथा प्रकाश - वोल्टता व प्रकाश - धारा के मध्य सूत्र स्थापित कीजिऐ ।

यह भी स्पष्ट कीजिये कि प्रकाश - वोल्टीय सैल साधारण प्रकाश तीव्रता मापन में किस प्रकार अधिक उपयोगी है?

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

16. aAs जो एक प्रत्यक्ष अंतराल वाला अर्धचालक हैं पर यदि 2.4 इलेक्ट्रॉन वोल्ट ऊर्जा का फोटॉन डाला जाये तो उसका अवशोषण गुणांक 500 सेमी$^{-1}$ प्राप्त होता है । यदि फोटॉन की ऊर्जा 3.4 इलेक्ट्रान-वोल्ट पर दी जाये तो अवशोषण गुणांक कितना आयेगा? ऊर्जा अंतराल का मान 1.4 इलेक्ट्रान-वोल्ट तथा अनुमत संक्रमण मानकर गणना कीजिये।

(**उत्तर** : 282 सेमी$^{-1}$)

17. एक अर्धचालक पट्टिका पर जिसका अवशोषण गुणांक 500 सेमी.$^{-1}$ है पर 5 x I0^{-4} वाट / सेमी.^{2} का एकवर्णीय प्रकाश डाला जाता है । प्रकाश की ऊर्जा 1.4 इलेक्ट्रॉन-वोत्व है । यदि इलेक्ट्रॉन-होल का पुनर्योजन काल 2 x 10^{-4} सेकण्ड हो तो

(a) पट्टिका पर आपतित फोटॉन फ्लक्स कितना होगा?

(b) इलेक्ट्रॉन - होल युग्म उत्पादन दर क्या होगी ।

(c) चालकता में प्रकाश डालने पर कितनी वृद्धि होगी यदि अर्धचालक में इलेक्ट्रॉन तथा होलों की गतिशीलताए' क्रमश: 8500 सेमी^{2}/ वोल्ट तथा 400 सेमी^{2}/ वोल्ट हो

(**उत्तर :** (a) 2.2 x 10^{15} प्रति से.प्रति सेमी^{2}

(b) 2.2 x 10^{14} प्रति से.प्रति सेमी$^{-3}$ (c) 0.32 म्हो/सेमी)

इकाई- 14

चुंबकीय गुण

(Magnetic Properties)

इकाई की रूपरेखा

14.0 उद्देश्य

14.1 प्रस्तावना

14.2 चुंबकीय पारिभाषिक शब्दावली

14.3 चुंबकीय पदार्थो का वर्गीकरण

14.4 प्रतिचुम्बकत्व का लैंगविन का चिरसम्मत सिद्धान्त

14.5 अनुचुंबकत्व का लैंगविन का चिरसम्मत सिद्धान्त

14.6 लौह चुंबकत्व एवम् लौह चुंबकीय डोमेन सिद्धान्त

14.6.1 वाइस का आणविक विनिमय क्षेत्र सिद्धान्त

14.7 शैथिल्यता प्रभाव

14.7.1 शैथिल्य हानि

14.8 सारांश

14.9 शब्दावली

14.10 संदर्भ ग्रंथ

14.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

14.12 अभ्यासार्थ प्रश्न

14.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप -

- चुंबकत्व के आधार पर पदार्थो का वर्गीकरण समझ सकेंगे;
- प्रतिचुंबकत्व तथा अनुचुंबकत्व के चिरसम्मत सिद्धान्त को विस्तार से समझ सकेंगे;
- लौह चुंबकत्व के डोमेन संबंधी सिद्धान्त की व्याख्या समझेंगे तथा क्यूरी व नील ताप के विषय में जानकारी प्राप्त करेंगे;
- शैथिल्यता प्रभाव, शैथिल्य हानि व इससे जुड़े महत्वपूर्ण तथ्यों की जानकारी प्राप्त करेंगे ।

14.1 प्रस्तावना (Introduction)

पदार्थो में चुंबकत्व का गुण ठोस अवस्था भौतिकी का वह पहलू है जिससे मानव संभवतया सर्वाधिक प्राचीन काल से परिचित रहा है । लगभग 3000 वर्ष पूर्व से ग्रीक वासियों को लोड स्टोन (मैग्नेटाइट) नामक पदार्थ में लोहे के दुकड़ो को आकर्षित करने की प्रकृति का

भलीभांति ज्ञान था, जिसका प्रयोग जहाजी विद्याओं में होता था । चुंबकत्व के सिद्धान्तों की उचित एवम् योजनाबद्ध -सैद्धान्तिक व्याख्याऐं होने से क़ाफी पहले से प्रचुर मात्रा में प्रायोगिक तथ्यों की उपलब्धता थी । उदाहरण के लिए, इस तथ्य का अच्छी तरह ज्ञान था कि लोहे के टुकड़ों को चुंबक के साथ लंबे समय तक रखने पर अथवा उसे चुंबकीय याम्योत्तर में रखकर पीटने पर उसमें चुंबकीय गुण उत्पन्न हो जाते हैं । वास्तव मे, पदार्थो के चुंबकीय गुणों के सिद्धान्तों का ज्ञान प्रायोगिक खोजों तथा तथ्यों एवम् पूर्वानुमानों के आधार पर विकसित हुआ है । इसका प्रमुख कारण है कि चुंबकत्व की विशुद्ध परिणामात्मक व्याख्या के लिए बहु परमाणु निकाय क्वांटम यांत्रिकी एवम् विद्युत चुंबकीय सिद्धांतों के वृहद् ज्ञान की आवश्यकता होती है जो काफी जटिल है । अत: इस अध्याय में हम इस घटना का अति सरल एवम स्पष्ट तरीके से वर्णन करेगें । अनुच्छेद 14.2 में हम चुंबकत्व से सम्बन्धित महत्वपूर्ण पदों, विशेष तौर पर चुंबकीय प्रवृत्ति के बारे में बतायेंगे । अनुच्छेद 14.3 में चुंबकत्व के आधार पर पदार्थो का वर्गीकरण समझाया जायेगा । अनुच्छेदों 14.4 व 14.5 में प्रतिचुंबकत्व तथा अनुचुंबकत्व के लैंगविन द्वारा प्रतिपादित चिरसम्मत सिद्धांतों का विस्तार से वर्णन किया जायेगा । अनुच्छेद 14.6 में लौह चुबंकत्व के गुणों पर विस्तार से चर्चा की जायेगी एवम् डोमेन सिद्धान्त के आधार पर लौह चुंबकत्व की गुणात्मक व्याख्या की जायेगी । अनुच्छेद 14.7 में लौह चुंबकीय पदार्थो के शैथिल्यता प्रभाव को समझाया जायेगा तथा शैथिल्य हानि एवम् इसके महत्वपूर्ण पहलुओं का उल्लेख किया जायेगा । इसके अतिरिक्त विभिन्न उपयोगों में धातु के उचित चयन पर भी प्रकाश डाला जायेगा ।

14.2 चुंबकीय पारिभाषिक शब्दावली (Magnetic terminology)

जब एक पदार्थ को किसी चुंबकीय क्षेत्र में रखा जाता है तो वह चुंबकित होने लगता है जिसके परिणामस्वरूप पदार्थ के अंदर एक चुंबकीय आघूर्ण उत्पन्न होने लगता है । पदार्थ के इकाई आयतन में उत्पन्न चुंबकीय आघूर्ण को चुंबकन (magnetization) कहते हैं, जिसे M अथवा I से प्रदर्शित करते हैं । चुंबकत्व की दृष्टि से एक अन्य महत्वपूर्ण राशि और भी है जो पदार्थ की चुंबकीय गुणता (quality) की मापक है, को चुंबकीय प्रवृत्ति (magnetic suspectibility) कहा जाता है तथा χ से निरूपित किया जाता है । चुंबकन (M) तथा चुंबकन क्षेत्र तीव्रता (H), जिसे आरोपित चुंबकीय क्षेत्र भी कहते हैं, के अनुपात को चुंबकीय प्रवृत्ति कहते हैं, अर्थात्

$$\chi = M / H \qquad ...(14.1)$$

χ एक विमाहीन राशि है जिसका कोई मात्रक नहीं होता है । M तथा H सदिश राशियाँ है लेकिन इनकी दिशाऐं अलग-अलग हो सकती हैं अतः χ एक टेन्सर राशि होती है । यद्यपि एक समांगी (isotropic) माध्यम में M तथा H एक ही दिशा में होते हैं व χ एक अदिश राशि की तरह कार्य करती है ।

यदि चुंबकन (M) पदार्थ के ग्राम अणु से सम्बन्धित हो तो चुंबकीय प्रवृत्ति को मोलर चुंबकीय प्रवृत्ति कहते हैं तथा χ_M से निरूपित करते हैं । यदि एक मील का द्रव्यमान (अणु

भार) M है तो एक, मोल का आयतन A/ρ होगा (जहां ρ घनत्व है) तथा एक मोल के लिए चुंबकीय आघूर्ण $M_M = \frac{A}{\rho}M$ होगा ।

अतः $$M_M = \frac{A}{\rho}M$$

या $$M_M = \frac{A}{\rho}\chi H$$

$$\because \quad \chi_M = \frac{M_M}{H}$$

अतः $$\chi_M = \frac{A}{\rho}\chi \qquad ...(14.2)$$

यदि पदार्थ पर H तीव्रता का चुंबकीय क्षेत्र आरोपित किया जाये तो उसमें उत्पन्न चुंबकीय पलक्स घनत्व या चुंबकीय प्रेरण B इस प्रकार लिखा जायेगा

$$B = \mu_0(H + M) \qquad ...(14.3)$$

μ_0 निर्वात् की पारगम्यता (permeability) है तथा इसका मान 4π x10^{-7} हेनरी/मी है । B का मात्रक बेवर/मी^{2} (Wb m^{-2}) अथवा टेसला (T) होता है ।

सेमी. (14.3) में $\chi = \frac{M}{H}$ का प्रयोग करने पर

$$B = \mu_0(1+\chi)H \qquad ..(14.4)$$

या $$B = \mu H \qquad ...(14.5)$$

जहा $\mu = \mu_0(1+\chi)$ को पदार्थ की पारगम्यता कहते हैं ।

यदि पदार्थ की पारगम्यता को निर्वात् की पारगम्यता के सापेक्ष व्यक्त करें तो इसे आपेक्षिक पारगम्यता (μ_r) कहते हैं, अर्थात्

$$\mu_r = \mu / \mu_0 \qquad ...(14.6)$$

या $$\mu_r = \mu_0\mu_r \qquad ..(14.7)$$

अतः सेमी.. (14.5) को लिखा जा सकता है

$$B = \mu_0\mu_r H \qquad ...(14.8)$$

सेमी.. (14.4) व (14.8) से

$$\mu_r = 1+\chi \qquad ...(14.9)$$

जो आपेक्षिक पारगम्यता (μ_r) तथा चुंबकीय प्रवृत्ति (x) के बीच संबन्ध है। मुक्त आकाश के लिए

M= 0 तथा $\chi = 0$, अतः $\mu = \mu_0$ व $\mu_r = 1$

अतः $$B = \mu_0 H \qquad ....(40.10)$$

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. किसी पदार्थ की चुंबकीय प्रवत्ति का क्या अर्थ है?

 ----

2. आपेक्षिक पारगम्यता तथा चुंबकीय प्रवत्ति के बीच क्या सम्बन्ध है?

14.3 चुंबकीय पदार्थो का वर्गीकरण (Classification of magnetic materials)

परमाणुओं में इलेक्ट्रॉन की कक्षीय गति एक धारा लूप के समतुल्य होती है । हम जानते हैं कि धारा लूप के कारण एक चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है तथा इसका एक चुंबकीय आघूर्ण होता है । इसके अलावा इलेक्ट्रॉन की चक्रण या स्पिन गति (Spin motion) के कारण एक स्थाई चुंबकीय आघूर्ण होता बै । इस प्रकार इलेक्ट्रॉन की कक्षीय एवम् स्पिन दोनों गतियों के कारण चुंबकीय आघूर्ण उत्पन्न होता है । लेकिन इसके सम्पूर्ण चुंबकीय आघूर्ण का अधिकांश भाग इलेक्ट्रॉन की चक्रण गति के कारण ही होता है जबकि कक्षीय गति के कारण चुंबकीय आघूर्ण में योगदान बहुत कम रहता है । परमाणु के नाभिक का भी चुंबकीय आघूर्ण होता है लेकिन इलेक्ट्रॉनों के चुंबकीय आघूर्ण की तुलना में इसका मान कई हजारों गुना कम होता है । अत: उसके विषय में हम यहां चर्चा नहीं करेंगे ।

एक परमाणु में सभी इलेक्ट्रॉनों की गति के कारण चुंबकीय आघूर्णो का वेक्टर योग उसका सम्पूर्ण चुंबकीय आघूर्ण बताता है । कुछ परमाणुओं में इसका मान शून्य होता है जबकि कुछ परमाणुओं में यह अशून्य हो सकता है । इस प्रकार के परमाणु को एक द्विध्रुव (dipole) से प्रदर्शित कर सकते हैं जिसका एक स्थाई चुंबकीय आघूर्ण होता है । एक ठोस में बहुत बड़ी संख्या में परमाणु होते हैं और साधारणतया इनके द्विध्रुव अनियमित रूप से विन्यस्त (ramdomly oriented) होते हैं जिससे ठोस का परिणामी चुंबकीय आघूर्ण शून्य होता है । जब इस प्रकार का पदार्थ एक बाहरी चुंबकीय क्षेत्र में रखा जाता है तो परमाणुक द्विध्रुवों पर बलआघूर्ण (torgues) कार्य करने लगते हैं जो उन्हें क्षेत्र की दिशा में संरेखित करने का प्रयास करते हैं । इस प्रकार बाहरी क्षेत्र में रखने पर पदार्थ क्षेत्र की दिशा में या उसके विपरीत दिशा में अल्प चुंबकत्व प्राप्त कर लेता है । कुछ पदार्थो में उत्पन्न चुंबकत्व काफी अधिक होता है । इस आधार पर सभी ठोस निम्न प्रकार के चुंबकीय पदार्थो में विभाजित किये जा सकते हैं

(i) प्रतिचुंबकीय पदार्थ (Diamagnetic materials)

(ii) अनुचुंबकीय पदार्थ (Paramegnetic materials)

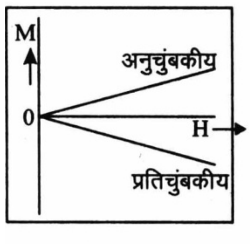
(iii) लौह चुंबकीय पदार्थ (Ferromagnetic materials)

(iv) प्रति-लौह चुंबकीय पदार्थ (Anti- Ferromagnetic materials)

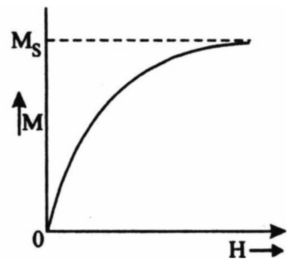
(v) फैरी-चुंबकीय पदार्थ (Ferri magnetic materials)

(i) **प्रतिचुंबकत्व :** वे ठोस पदार्थ जो बाह्य चुंबकीय क्षेत्र में रखे जाने पर उसकी विपरीत दिशा में अल्प चुंबकत्व प्राप्त कर लेते हैं प्रतिचुंबकीय कहलाते हैं । यह एक दुर्बल प्रभाव है तथा उन पदार्थो में प्राप्त होता है जिनके परमाणुओं का सामान्य अवस्था में स्थाई चुंबकीय आघूर्ण शून्य होता है । बाह्य क्षेत्र लगाने पर अल्प चुंबकन प्रभाव इलेक्ट्रॉनों की कक्षीय गति के आधार पर समझाया जाता है, जिसका वर्णन हम आगे करेंगे । इन पदार्थो के लिए चुंबकीय प्रवृत्ति χ का मान अल्प ऋणात्मक ($\chi<0$) होता है । Bi, Cu, Ag, Au, Ge, Si आदि इनके उदाहरण हैं । इन पदार्थो के लिए M तथा H के बीच खींचा गया ग्राफ ($M=\chi H$) एक ऋणात्मक ढाल की सरल रेखा आता है (चित्र 14.1) । χ का मान चुंबकन क्षेत्र की तीव्रता तथा ताप पर निर्भर नहीं करता ।

(ii) **अनुचुंबकत्व :** वे ठोस पदार्थ जो बाह्य चुंबकीय क्षेत्र में रखे जाने पर क्षेत्र की दिशा में अल्प चुंबकत्व प्राप्त कर लेते हैं, अनुचुंबकीय कहलाते हैं । यह भी एक दुर्बल प्रभाव है तथा उन पदार्थो में प्राप्त होता है जिनके परमाणुओं में एक स्थाई चुंबकीय आघूर्ण होता है । इनके लिए χ का मान अल्प धनात्मक ($\chi>0$) होता है । Pt, Al, Cr, Cao, Cuo आदि इनके उदाहरण हैं । इन पदार्थो के लिए M तथा H के मध्य खींचा गया ग्राफ एक धनात्मक ढाल की सरल रेखा आता है (चित्र 14.1) । χ का मान H पर निर्भर नहीं करता लेकिन पदार्थ के ताप पर निर्भर करता है, जिसे आगे समझाया जायेगा । बहुत शक्तिशाली चुंबकीय क्षेत्रों और बहुत कम ताप पर H बढ़ाने पर इन पदार्थो में चुंबकन संतृप्त मान की ओर अग्रसर हो जाता है (चित्र 14.2) अत: उस स्थिति में लगभग χ शून्य हो जायेगा ।

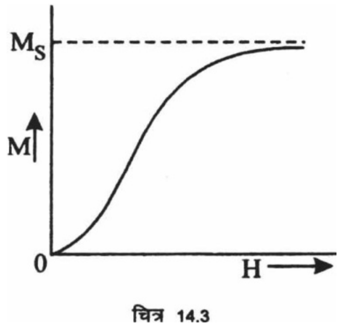


चित्र 14.1



चित्र 14.2

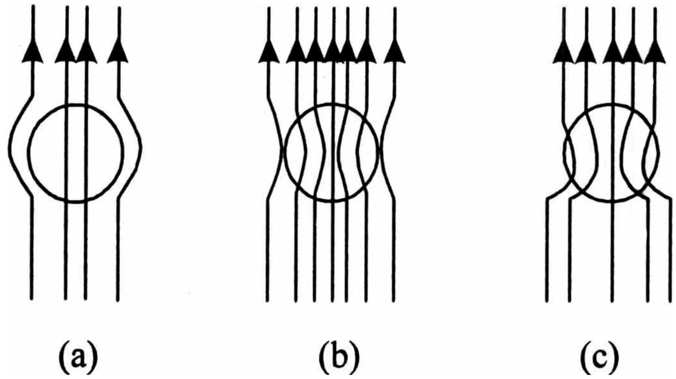
(iii) **लौह-चुंबकत्व :** वे ठोस पदार्थ जो बाह्य चुंबकीय क्षेत्र में रखे जाने पर क्षेत्र की दिशा में प्रबल चुंबकत्व प्राप्त कर लेते हैं, लौह चुंबकीय कहे जाते हैं । यह काफी प्रबल प्रभाव है तथा पड़ौसी चुंबकीय आपूर्णों के एक ही दिशा में संरेखण के कारण उत्पन्न होता है । इसका वर्णन आगे किया जायेगा । इन पदार्थो के लिए χ का मान धनात्मक तथा बहुत अधिक ($\chi>>1$) होता है । Fe, Ni, Co, स्टील तथा उनकी मिश्र धातुऐं इनके उदाहरण हैं । इनके लिए H बढ़ाने पर चुबकन M पहले तेजी से बढ़ता है और फिर H के बहुत अधिक मानों पर संतृप्त होकर स्थिर मान प्राप्त कर लेता है (चित्र 14.3)।



चित्र 14.3

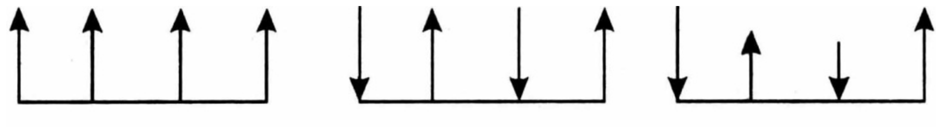
एक निश्चित ताप जिसे क्यूरी ताप (T_C) कहते हैं के ऊपर ये पदार्थ अनुचुंबकीय पदार्थो की तरह व्यवहार करने लगते हैं । लोहे के लिए T_C का मान 1000^0C, स्टील के लिए 770^0C तथा कोबाल्ट के लिए 11 50^0C होता है।

बाहरी चुंबकीय क्षेत्र लगाने पर तीनों प्रकार के पदार्थो का चुंबकीय बल रेखाओं पर क्या प्रभाव होता है, इसे चित्र 14.4 में दर्शाया गया है । प्रतिचुंबकीय पदार्थ रेखाओं को प्रतिकर्षित करते हैं (चित्र 4.4) । अनचुंबकीय पदार्थ चुंबकीय रेखाओं को अल्प आकर्षित करते हैं (चित्र 14.4b) जबकि लौह चुंबकीय पदार्थ बल रेखाओं को प्रबलता से आकर्षित करते हैं (चित्र 14.4c)।



चित्र 14.4

प्रति - लौहचुंबकीय पदार्थो के परमाणुओं का स्थाई चुंबकीय आघूर्ण अशून्य होता है, लेकिन इनके पड़ौसी आघूर्ण इस प्रकार व्यवस्थित रहते हैं कि इनका परिणामी चुंबकीय आघूर्ण का मान शून्य होता है । इसे चित्र 14.5 में दर्शाया गया है । इन पदार्थो के कुछ उदाहरण हैं Mn0 तथा MnF_2, क्रिस्टल । इन पदार्थो के परमाणुओं के आपूर्णो के मान बराबर होते हैं लेकिन उनकी दिशाऐं परस्पर विपरीत रूप में व्यवस्थित रहती हैं । बाहरी क्षेत्र लगाने पर ये अल्प चुंबकत्व दर्शाते हैं । फैरी-चुंबकीय पदार्थ प्रति लौह चुंबकीय पदार्थो की ही तरह होते हैं अंतर केवल इतना है कि इनके पड़ौसी आघूर्ण परिणाम में समान नहीं होते अत: इनके परिणामी चुंबकीय आघूर्ण का मान शून्य नहीं होता है । इनका एक उदाहरण Fe_3O_4 (मैग्नेटाइट) है । नील के आणविक क्षेत्र सिद्धांत से इन पदार्थो की सैद्धान्तिक व्याख्या की जाती है जिसका वर्णन यहां आवश्यक नहीं है ।



चित्र 14.5 लौह चुम्बकीय प्रति लौहचुम्बकीय तथा फैरी - चुम्बकीय पदार्थों में परमाणुओं द्विधुर्वों अथवा आघूर्णों की व्यवस्था

यहां एक तथ्य अति महत्वपूर्ण है कि एक निश्चित ताप से ऊपर विभिन्न प्रकार के चुंबकत्वों का अंतर समाप्त हो जाता है तथा सभी पदार्थ अनुचुंबकीय बन जाते हैं । उदाहरण के लिए लौह चुम्बकीय पदार्थ क्यूरी ताप (T_C) से ऊपर तथा प्रति-लौहचुंबकीय पदार्थ नील ताप (T_N) से ऊपर अनुचुंबकीय पदार्थो में परिणित हो जाते हैं ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

3. पदार्थो के चुंबकन का मूल कारण क्या है?

----

4. सभी पदार्थो में कौन सा चुंबकीय गुण सदैव विद्यमान होता है?

----

5. प्रतिचुंबकीय पदार्थो की चुंबकीय प्रवृति ऋणात्मक क्यों होती है?

----

6. अति उच्च तापों पर प्रत्येक चुंबकीय पदार्थ कौन सा गुण दर्शाने लगते?

14.4 प्रतिचुंबकत्व का लैंगविन का चिरसम्मत सिद्धान्त (Langevin's classical theory ofdiamagnetism)

जैसा कि पूर्व में कहा गया है कि किसी पदार्थ में प्रतिचुंबकत्व की उत्पत्ति का कारण लगाये गये चुंबकीय क्षेत्र से परमाण्वीय इलेक्ट्रॉनों की कक्षीय गति के परिवर्तन में संनिहित होता है । कक्षीय गति करता हुआ इलेक्ट्रॉन एक धारा i के समतुल्य होता है । यदि इससे संबद्ध चुंबकीय फ्लक्स में परिवर्तन होता है तो इसमें एक धारा प्रेरित होगी जिसकी दिशा इस प्रकार की होगी कि वह फ्लक्स परिवर्तन का विरोध करेगी (लैंज के नियमानुसार) । इस प्रकार प्रेरित धाराओं से उत्पन्न क्षेत्र आरोपित क्षेत्र के विपरीत दिशा में होगा तथा प्रति-चुंबकत्व की उत्पत्ति करता है । चुंबकीय प्रवृत्ति के अति अल्प तथा ऋणात्मक मान से प्रतिचुंबकत्व की पुष्टि होती

है । यह प्रभाव प्रत्येक पदार्थ में निहित होता है लेकिन अन्य तीव्र प्रभावों जैसे कि अनुचुंबकत्व तथा लौह चुंबकत्व के कारण आच्छादित (mask) या नगण्य हो जाता है

माना एक इलेक्ट्रॉन नाभिक के परित: ω_0 आवृत्ति से वृत्ताकार पथ में घूम रहा है । बाहर से चुंबकीय क्षेत्र लगाने पर ऊपर समझाये गये कारणों से एक धारा प्रेरित होगी जो फ्लक्स परिवर्तन का विरोध करेगी अत: इलेक्ट्रॉन की कक्षीय आवृत्ति में परिवर्तन होगा । यदि बिना चुंबकीय क्षेत्र लगाये इलेक्ट्रॉन की कक्षीय आवृत्ति फ़ हो तो गति के सेमी.करण से

$$m\omega_0{}^2 r = \frac{Ze^2}{4\pi \in_0 r^2} \qquad ...(14.11)$$

जहां r इलेक्ट्रॉन की कक्षीय त्रिज्या है । Ze नाभिकीय आवेश एवम् m इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान है ।

अत:
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 mr^3}} \qquad ...(14.12)$$

यदि चुंबकीय क्षेत्र (B) आरोपित किया जाये तो v वेग से गतिशील इलेक्ट्रॉनों पर लगने वाला चुम्बकीय बल

$$\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{B}) \qquad ...(14.13)$$

यदि चुंबकीय क्षेत्र की दिशा इलेक्ट्रॉन की कक्षा के तल के लम्बवत् मानी जाये तो इस बल का परिमाण होगा

F= evB

अर्थात् F= e ωr B ....(14.14)

जहां ω चुंबकीय क्षेत्र की उपस्थिति में इलेक्ट्रॉन की कक्षीय आवृत्ति है । इस चुंबकीय बल की दिशा त्रिज्यीय होगी, अत: वह अभिकेन्द्रीय बल $m\omega_0{}^2 r$ की दिशा में अथवा उसके विपरीत हो सकती है जो इस बात पर निर्भर करेगा कि इलेक्ट्रॉन की कक्षीय गति की दिशा क्या है । अत: चुंबकीय क्षेत्र की उपस्थिति में गति का सेमी.करण होगा

$$m\omega^2 r = m\omega_0{}^2 r \pm e\omega r B \qquad ...(14.15)$$

या
$$mr(\omega^2 - \omega_0{}^2) = \pm e\omega r B$$

या
$$(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) = \frac{\pm eB\omega}{m} \qquad ...(14.16)$$

$\omega - \omega_0 = \Delta\omega$ लिखा जा सकता है जो इलेक्ट्रॉन की आवृत्ति में परिवर्तन है । यह देखा गया है कि $\Delta\omega$ मान अति अल्प होता है, चाहे कितना भी तीव्र चुंबकीय क्षेत्र आरोपित किया जाये । अत: $\omega + \omega_0$ को 2ω लिखा जा सकता है । इस प्रकार उपरोक्त सेमी.. (14.16) से,

$$\Delta\omega = \pm \frac{eB}{2m} \qquad ...(14.17)$$

अत: इलेक्ट्रान की आवृत्ति में चुंबकीय क्षेत्र आरोपित करने पर $eB/2m$ का परिवर्तन आ जायेगा ।

$\pm$ चिन्ह का अर्थ है कि जिन इलेक्ट्रॉनों का कक्षीय चुंबकीय आघूर्ण आरोपित क्षेत्र की दिशा में होगा उनकी गति कम हो जायेगी तथा उनके जिनके आघूर्ण विपरीत दिशा में होंगे वह तीव्र हो जायेंगे । इस परिणाम को लारमर प्रमेय (Larmour theorem) कहते हैं । इस आवृत्ति परिवर्तन के कारण एक अतिरिक्त धारा की उत्पत्ति होगी जिसका मान है

I= आवेश x परिक्रमण आवृति

या $$I = (-e) \times \left(\frac{1}{2\pi} \frac{eB}{2m} \right)$$

अत: $$I = -\frac{e^2 B}{4\pi m} \quad ..(14.18)$$

धारा लूप का चुंबकीय आघूर्ण धारा के परिमाण तथा लूप के क्षेत्रफल के गुणनफल के बराबर होता है अंत:

$$M_e = -\frac{e^2 B}{4\pi m} \times \pi r^2$$

अतः $$M_e = -\frac{e^2 B r^2}{4m} \quad ...(14.19)$$

ऋणात्मक चिन्ह दर्शाता है कि प्रेरित चुंबकीय आघूर्ण की दिशा आरोपित क्षेत्र की दिशा के विपरीत होती है । यदि परमाणु में z इलेक्ट्रॉन हों तो z इलेक्ट्रॉन कक्षाऐं होंगी और ये कक्षाऐं चुंबकीय क्षेत्र B के लम्बवत् न होकर उसके सापेक्ष किसी कोण पर झुकी हुई होंगी । अत: r^2 के स्थान पर r^2 का माध्य (average) या $\langle r^2 \rangle$ लेना होगा अर्थात्

$$M_a = -\frac{e^2 BZ}{4m} \langle r^2 \rangle \quad ...(14.20)$$

यदि चुंबकीय क्षेत्र z - अक्ष के अनुदिश है तो इलेक्ट्रॉन कक्षाओं के प्रक्षेप x -y तल में लेने होंगे

अत: $$\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle \quad ...(14.21)$$

जिसमें $\langle r^2 \rangle$ इलेक्ट्रॉनों की कक्षाओं का चुंबकीय क्षेत्र B के लम्बवत् तल में प्रक्षेपों के वर्ग का माध्य मान है ।

यदि परमाणु में इलेक्ट्रॉन आवेश वितरण गोलीय सममिति (Spherical symmetry) में मान लिया जाये तो किसी बिंदु पर

$\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ के लिए

$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$

तथा $\langle R^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle = R_0^2$ माना

लेकिन गोलीय सममिति में

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$$

अत: $$R_0^2 = \langle x^2 \rangle$$

और तब $$\langle r^2\rangle = \langle x^2\rangle + \langle y^2\rangle = 2\langle x^2\rangle$$

या $$\langle r^2\rangle = \frac{2}{3}R_0^{\,2}$$ ....(14.22)

अतः $$M_a = -\frac{Ze^2B}{6m}R_0^{\,2}$$ ...(14.23)

यहां $R_0^{\,2}$ परमाणु के केन्द्र (नाभिक) से इलेक्ट्रॉनों की दूरी के वर्ग का माध्य (mean square distance) है । यदि पदार्थ में N परमाणु हों तो

$$M_a = \frac{-Ze^{\cdot}\mu_\circ HN}{6m}R_\circ^{\,2}$$ ...(14.24)

जहां $B = \mu_0 H$ प्रयोग किया गया है ।

अतः चुंबकीय प्रवृत्ति $\chi = \frac{M}{H}$ सूत्र से

$$\chi_{dia} = \frac{-N\mu_0 Ze^2}{6m}R_0^{\,2}$$ ....(14.25)

यही लैगविन का चिरसम्मत परिणाम है जो दर्शाता है कि प्रतिचुंबकीय पदार्थो प्रवृत्ति का मान ऋणात्मक है तथा ताप या क्षेत्र की प्रबलता पर निर्भर नहीं करता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

7. बाहरी क्षेत्र लगाने पर प्रतिचुंबकीय पदार्थो के परमाण्विक इलेक्ट्रॉनों की कक्षीय आवृत्ति किस प्रकार प्रभावित होती है?

----

8. प्रति - चुंबकीय पदार्थो की चुंबकीय प्रवृत्ति पर ताप का क्या प्रभाव पड़ता है?

उदाहरण 14.1 : कापर की चुंबकीय प्रवृत्ति -0.5 x 10^{-5} है । यदि उसे 10^4 एम्पियर/मीटर के चुंबकीय क्षेत्र में रखा जाये तो उसमें चुंबकीय आघूर्ण प्रति इकाई आयतन कितना उत्पन्न होगा?

हल : हम जानते हैं कि पदार्थ की चुंबकीय प्रवृत्ति

$$\chi = I/H$$

दिया गया है कि χ =-0.5 x 10^{-5} तथा H = 10^4 एम्पीयर/मीटर

अतः $I = \chi H$ से

$$I = -0.5\times10^{-5}\times10^4$$

I = -0.05 एम्पीयर/मीटर

ऋण चिन्ह दर्शाता है कि पदार्थ प्रतिचुंबकीय है ।

14.5 अनुचुबंकत्व का लैंगविन का चिरसम्मत सिद्धान्त (Langvin's classical theory of paramagnetism)

अनुचुंबकत्व का गुण उन पदार्थो में पाया जाता है जिनमें परमाणुओं का कुछ स्थाई चुंबकीय आघूर्ण होता है । इस मान्यता के आधार पर लैंगविन ने अनुचुंबकत्व का सिद्धान्त प्रतिपादित किया ।

माना कि एक अनुचुंबकीय पदार्थ के एकांक आयतन में N परमाणु हैं तथा प्रत्येक परमाणु का स्थाई चुंबकीय आघूर्ण का मान M है । यदि बाहरी चुंबकीय क्षेत्र की दिशा आघूर्ण की दिशा से θ कोण बनाये तो चुंबकीय द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा होगी

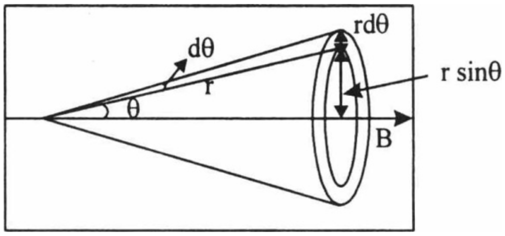
$$U_m = -MB\cos\theta \qquad ...(14.26)$$

मैक्सबैल - वोल्टजमान सांख्यिकी के अनुसार परमताप T पर बाह्य क्षेत्र B की दिशा से θ कोण पर चुंबकीय द्विध्रुव के पाये जाने की प्रायिकता $e^{-U_m} / k_B T$ व $e^{-MB\cos\theta} / k_B T$ के समानुपाती होगी ।

अत: बाह्य क्षेत्र से θ व $\theta + d\theta$ कोण के बीच परमाण्विक द्विध्रुवों की संख्या निम्न प्रकार दी जायेगी

$$dN = Ce^{-MB\cos\theta/k_B T} d\omega \qquad ...(14.27)$$

जिसमें C एक समानुपाती नियतांक एवम् $d\omega$ कोण θ तथा $\theta + d\theta$ के बीच अंतरित किया गया घन कोण (solid angle)है।



चित्र 14.6

हम जानते हैं कि घन कोण

$$d\omega = \frac{\text{क्षेत्रफल (ds)}}{\text{दूरी2}} \qquad ...(14.28)$$

यहां पर ds, θ और $\theta + d\theta$ के बीच बनी वलय या रिंग का क्षेत्रफल है ।

अत: $\quad ds = (2\pi \sin\theta) r d\theta$

अतः $\quad d\omega = \dfrac{(2\pi \sin\theta) r d\theta}{r^2}$

या $\quad d\omega = (2\pi \sin\theta) r d\theta \qquad ...(14.29)$

सेमी.. (14.27) में $d\omega$ का मान रखने पर

$$dN = 2\pi Ce^{-MB\cos\theta/k_B T} \sin\theta d\theta \qquad ...(14.30)$$

लेकिन पदार्थ के इकाई आयतन में परमाणुओं की संख्या N है जो उपरोक्त सेमी.. (14.30) का $\theta = 0$ से $\theta = \pi$ तक समाकलन करने पर प्राप्त होगी । अत:

$$N = 2\pi C \int_0^{\pi} e^{MB\cos\theta / k_B T} \sin\theta d\theta$$

जिससे $$C = \frac{N}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{MB\cos\theta / k_B T} \sin\theta d\theta$$

सेमी. (14.30) में नियतांक का मान रखने पर

$$dN = \frac{N e^{MB\cos\theta / k_B T} \sin\theta d\theta}{\int_0^{\pi} e^{MB\cos\theta / k_B T} \sin\theta d\theta} \quad .....(14.31)$$

चुंबकीय द्विध्रुव का आघूर्ण (M) क्षेत्र B से θ कोण पर माना है अत: उसका B के अनुदिश घटक $B\cos\theta$ देगा । चुंबकीय क्षेत्र B से θ तथा $\theta + d\theta$ कोण के बीच चुंबकीय द्विध्रुवों की संख्या dN है ।

अत: इनका कुल चुंबकीय आघूर्ण $M\cos\theta dN$ होगा । इस प्रकार पदार्थ के इक़ाई आयतन का चुंबकीय आघूर्ण का मान होगा -

$$\int_0^{\pi} M \cos\theta dN \quad ...(14.32)$$

सेमी.. (14.31) तथा (14.32) से

$$I = \frac{N \int_0^{\pi} M \cos\theta e^{MB\cos\theta / k_B T} \sin\theta d\theta}{\int_0^{\pi} e^{MB\cos\theta / k_B T} \sin\theta d\theta}$$

या $$I = \frac{NM \int_0^{\pi} e^{\alpha\cos\theta} \cos\theta \sin\theta d\theta}{\int_0^{\pi} e^{\alpha\cos\theta} \sin\theta d\theta} \quad ...(14.33)$$

जिसमें $\frac{MB}{k_n T} = \alpha$ लिखा गया है।

माना $\cos\theta = x$ तो $-\sin\theta d\theta = dx$ अत:

$$I = \frac{NM \int_{+1}^{-1} x e^{\alpha x} (-dx)}{\int_{+1}^{-1} e^{\alpha x} (-dx)}$$

अत: $$I = \frac{NM\int_{+1}^{-1} xe^{\alpha x}(dx)}{\int_{+1}^{-1} e^{\alpha x}(dx)}$$

$$= \frac{NM\left[\frac{xe^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}\right]_{+1}^{-1}}{\left[\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right]_{+1}^{-1}}$$

$$= \frac{NM\left[\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{\alpha^2}\right]}{\left[\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{\alpha}\right]}$$

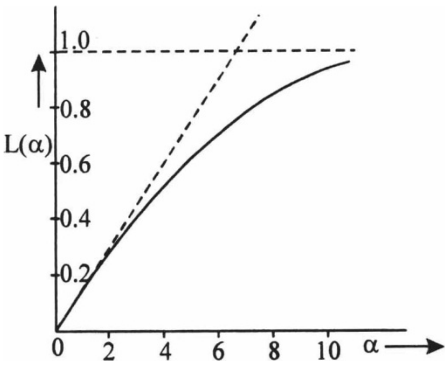
या $$I = NM\left[\frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}} - \frac{1}{\alpha}\right]$$

या $$I = I_0\left[\coth\alpha - \frac{1}{\alpha}\right] \qquad ...(14.34)$$

यहां I_0=NM संतृप्त चुंबकन का मान है जबकि सभी परमाण्वीय द्विध्रुव, क्षेत्र B की दिशा में संरेखित होते हैं । सेमी..(14.34) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$I = NML(\alpha) \qquad ...(14.35)$$

जहां $L(\alpha) = \coth\alpha - \frac{1}{\alpha}$ को लैंगविन फलन कहते हैं । इस फलन का $\alpha\left(= \frac{MB}{k_B T}\right)$ के साथ परिवर्तन चित्र 14.7 में दर्शाया गया है।



चित्र 14.7

अब हम दो स्थितियों पर विचार करते हैं;

जब $\alpha\left(= \frac{MB}{k_B T}\right)$ का मान बहुत अधिक हो अर्थात् ताप काफी कम हो या काफी प्रबल हो तो

$$L(\alpha)\rightarrow 1 \text{ अतः } I\rightarrow I_0 \quad ...(14.36)$$

अर्थात् निम्न तापों पर या प्रबल क्षेत्र लगाने पर सभी परमाण्वीय द्विध्रुव बाहय क्षेत्र की दिशा के अनुदिश संरेखित हो जाते हैं तथा पदार्थ चुंबकीय संतृप्ति की अवस्था प्राप्त कर लेता है ।

जब $\alpha\left(=\frac{MB}{k_BT}\right)$ बहुत कम है अर्थात् ताप अति उच्च अथवा बाहय क्षेत्र निर्बल है तो

$$e^{\alpha}=1+\alpha+\frac{\alpha^2}{\lfloor 2}+\ldots \text{ तथा } e^{-\alpha}=1-\alpha+\frac{\alpha^2}{\lfloor 2}-\ldots$$

अतः $$L(\alpha)=\coth\alpha-\frac{1}{\alpha}=\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha} \text{ से}$$

$$L(\alpha)=\frac{2\left(\alpha+\frac{\alpha^2}{\lfloor 2}+\ldots\right)}{2\left(\alpha+\frac{\alpha^3}{\lfloor 3}+\ldots\right)}-\frac{1}{\alpha}$$

α की उच्च घातों की उपेक्षा करने पर

$$L(\alpha)=\frac{1+\frac{\alpha^2}{\lfloor 2}}{\alpha\left(1+\frac{\alpha^2}{6}\right)}-\frac{1}{\alpha}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)\left(1+\frac{\alpha^2}{6}\right)^{-1}-\frac{1}{\alpha}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{6}\right)-\frac{1}{\alpha}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{6}\right)-\frac{1}{\alpha} \quad ...(14.37)$$

इस प्रकार $L(\alpha)=\frac{\alpha}{3}=\frac{MB}{3k_BT}$

तथा सेमी.. (14.35) से

$$I=NM\left(\frac{MB}{3k_BT}\right)=\frac{NM^2}{3k_BT}\text{B}$$

या $$I=\frac{\mu NM^2B}{3kT} \quad ....(14.38)$$

जहां $B=\mu H$ प्रयोग किया गया है ।

चूंकि चुंबकन $I=\chi H$ अत:

$\chi = I/H$ से

$$\chi = \frac{\mu N M^2}{3k_B T} \quad \text{....(14.39)}$$

$$\therefore \chi = \frac{C}{T} \quad \text{......(14.40)}$$

जिसमें $C = \frac{\mu N M^2}{3k_B}$ एक स्थिरांक है ।

स्थिरांक C को क्यूरी नियतांक कहते हैं । उपरोक्त सेमी.. (14.40) को क्यूरी नियम (curie law) कहते हैं । इस सेमी.करण से स्पष्ट है कि अनुचुंबकीय पदार्थो की चुंबकीय प्रवृत्ति परम ताप के व्युतक्रमानुपाती होती है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

9. अनुचुंबकीय पदार्थो की चुंबकीय प्रवृत्ति का मान ताप के साथ किस प्रकार प्रभावित होता है?

----

10. अति निम्न तापों पर अति प्रबल चुंबकीय क्षेत्र लगाने पर अनुचुंबकीय की चुंबकन स्थिति स्पष्ट कीजिये ।

----

11. एक पदार्थ की चुंबकीय प्रवृत्ति का मान +0.5 x 10^{-4} है तो पदार्थ की क्या प्रकृति संभावित है?

उदाहरण 14.2 : एक अनुचुंबकीय पदार्थ की चुंबकीय प्रवृत्ति का मान 27^0C पर 0.3 x 10^{-4} है । यदि ताप 127^oC कर दिया जाये तो प्रवृत्ति पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

हल : हम जानते हैं कि अनुचुंबकीय पदार्थो के लिए $\chi = \frac{c}{T}$ है, जहां T पदार्थ का परम ताप है ।

अतः $\frac{\chi_2}{\chi_1} = \frac{T_1}{T_2}$

दिया है $T_{1=}$ 27+273 =300 K

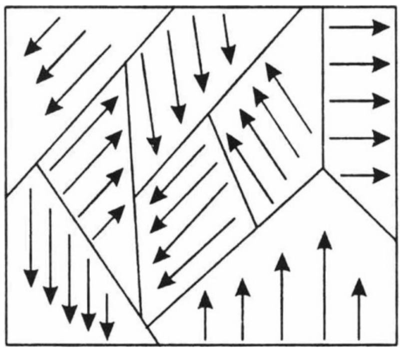
$T_{2=}$ 127+273 =400 K

χ_1 =0.3 x 10^{-4}

अतः χ_2 =(300 x 0.3 x 10^{-4})/400 =0.225 x 10^{-4}

14.6 लौह चुंबकत्व एवम् लौह चुंबकीय डोमेन सिद्धान्त: (Ferro magnetism and ferro- magnetic domain theory)

सामान्यतया जब हम एक चुंबक की बात करते हैं तो हमारा आशय लौह चुंबकत्व से ही होता है । उदाहरण के लिए, एक लोहे का टुकड़ा जिसमें अन्य लोहे के टुकड़ों को आकर्षित करने की प्रवृत्ति होती है, में एक स्थाई चुंबकीय आघूर्ण होता है तथा वह स्थाई चुंबक कहलाता है । इस प्रकार, बिना बाह्य चुंबकीय क्षेत्र लगाये पदार्थो में उपस्थित चुंबकत्व का यह गुण ही लौह चुंबकत्व कहलाता है । इन पदार्थो में अनुसुंबकीय पदार्थो की तरह प्रत्येक परमाणु का एक स्थाई चुंबकीय आघूर्ण होता है । वाइस ने इन पदार्थो की व्याख्या के लिए एक अति सरल डोमेन सिद्धान्त प्रतिपादित किया । इसके अनुसार लौह चुंबकीय पदार्थो में परमाणुओं के यीच कुछ ऐसी अन्योन्य क्रियाऐं (interactions) होता हैं जिसके फलस्वरूप परमाण्वीय चुंबकीय द्विध्रुवी के कुछ ऐसे समूह निर्मित हो जाते हैं जिनमें चुंबकीय आघूर्ण एक ही दिशा में संरेखित हो जाते हैं । द्विध्रुवों के इन समूहों को लौह-चुंबकीय डोमेन कहते हैं (चित्र 14.8) । प्रत्येक डोमेन का आकार लगभग 10^{-6} सेमी^{3} से 10^{-2} सेमी^{3} होता है जिनमें 10^9 से 10^{15} तक की संख्या में परमाणु होते हैं । पदार्थ का कुल चुंबकीय आघूर्ण प्रत्येक डोमेन के आघूर्ण के वेक्टर योग के बराबर होता है । अचुम्बकित पदार्थो में ये डोमेन अव्यवस्थित व अनियमित रूप में विन्यस्त रहती हैं जिससे उनका परिणामी चुंबकीय आघूर्ण शून्य रहता है । इस दशा में क्रिस्टल अचुम्बकित रहेगा (चित्र 14.9 a)



चित्र 14.8

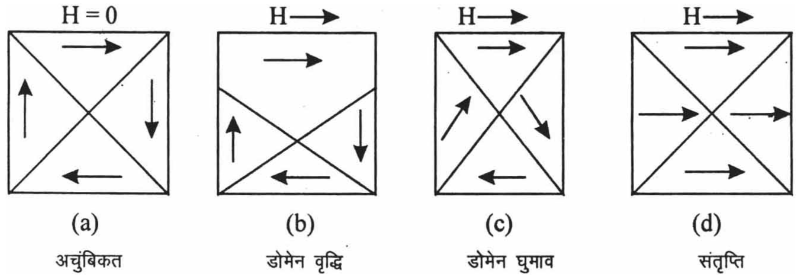
जब पदार्थ को एक चुंबकीय क्षेत्र में रख दिया जाता है तो परिणामी चुंबकन दो प्रक्रियाओं से बढ़ सकता

(a) उन डोमेनों का आयतन बढ़ जायेगा जो क्षेत्र के अनुकूल दिशा में है तथा विपरीत दिशा में स्थित डोमेनों का आयतन घटेगा (चित्र 14.9b) । दुर्बल क्षेत्र लगाने पर यह प्रक्रिया होती है।

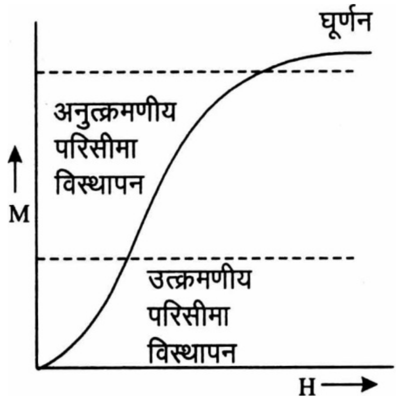
(b) आरोपित क्षेत्र की दिशा में डोमेन चुम्बकन का घुमाव (rotation of domain) हो जायेगा (चित्र 14.9c) । प्रबल क्षेत्र लगाने पर यह विधि प्रभावी हो जाती है ।

एक लौह - चुंबकीय पदार्थ के लिए चुंबकन वक्र चित्र 14.10 में दर्शाया गया है । कम मान के क्षेत्रों में उस्कमणीय परिवर्तन होते हैं अर्थात् बाहरी क्षेत्र हटाने पर डोमेन परिसीमाऐ अपनी पूर्ववत् स्थिति में लौट आती हैं । चुंबकीय क्षेत्र की तीव्रता बढ़ाने पर अनुत्कमणीय

परिवर्तन प्रारंभ हो जाता है तथा चुंबकन तेजीसे बढ़ता है । प्रबल क्षेत्र लगाने पर डोमेन वेक्टर घुमाव द्वारा क्षेत्र की दिशा में चुंबकन बढ़ता है तथा फिर चुंबकन का संतृप्त मान प्राप्त हो जाता है (चित्र 14.9d) ।



चित्र 14.9



चित्र 14.10

14.6.1 वाइस का आणविक विनमय क्षेत्र सिद्धान्त (The Weiss molecular exchange field theory)

लौह - चुंबकीय पदार्थों में स्वाभाविक चुंबकन को समझाने के लिए वाइस ने 1907 में प्रतिपादित किया कि इन पदार्थों में एक आंतरिक आणविक क्षेत्र, जिसे विनिमय क्षेत्र H_{ex} भी कहते हैं, पाया जाता है जो पदार्थ के परमणिवक द्विधुवी पर कार्य करता है । इसे निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$$H_{ex} = H + \lambda M \qquad \text{....(14.41)}$$

यहां λ एक वाइस नियतांक है जो ताप पर निर्भर नहीं करता तथा H आरोपित क्षेत्र है । इन पदार्थों में क्यूरी नियम इस विनिमय क्षेत्र के लिए भी मान्य होता है, अत:

$$\frac{M}{H_{ex}} = \frac{C}{T} \qquad \text{...(14.42)}$$

सेमी..(14.41) व (1442) को हल करने पर

$$M = \frac{CH}{T - C\lambda} \qquad \text{...(14.43)}$$

इस प्रकार चुंबकीय प्रवृत्ति का मान होगा -

$$X = \frac{M}{H} = \frac{CH}{T - C\lambda} = \frac{C}{T - T_c} \qquad ...(14.44)$$

जहां $T = C\lambda$ को क्यूरी ताप कहते हैं । उपरोक्त समीकरण को 'क्यूरी-वाइस नियम' कहते हैं । $T > T_c$ पर पदार्थ अनुचुंबकीय बन जायेगा । $T < T_c$ पर यह नियम लागू नहीं होता । $T < T_c$ होने की दशा लौह चुंबकत्व से सम्बन्ध रखती है । इस दशा में बाहरी चुंबकीय क्षेत्र न रहने पर भी पदार्थ चुम्बकित होने लगता है । इसे पदार्थ का क्षणिक या स्वाभाविक चुंबकन (spontaneous magnetization) कहते हैं ।

लैंडो तथा लिफ्शिज ने विस्तृत गणनाओं के आधार पर सिद्ध किया है कि लौह चुंबकीय पदार्थो की ऊर्जाओं और ऊष्पागातिकी की दृष्टि से डोमेन संरचना ही इन पदार्थो की एक उपयुक्त व स्वाभाविक परिणति / अनुकृति है । विनिमय ऊर्जा, चुंबकीय ऊर्जा व असंगामी ऊर्जा इस संरचना को ही यथार्थ सिद्ध करती हैं ।

14.7 शैथिल्यता प्रभाव (Hysterisis effect)

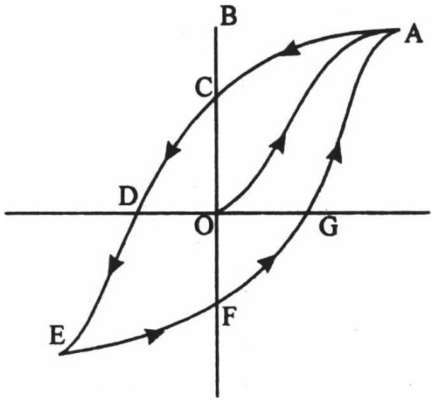
शैथिल्यता प्रभाव वह है जिसमें किसी लौह चुंबकीय पदार्थ पर यदि बाह्य चुंबकीय क्षेत्र लगाया जाये और फिर हटा दिया जाये तो पदार्थ का चुंबकन शून्य मान को नहीं लौटता बल्कि पदार्थ में कुछ अवशिष्ट चुंबकत्व (residual magnetism) रह जाता है । एक लौह-चुंबकीय पदार्थ के लिए B-H वक्र चित्र 14.11 में दर्शाया गया है । प्रारम्भ में (0 बिंदु पर) पदार्थ अचुम्बकित है (अर्थात् B=0 जब H=0) । H को बढ़ाने पर B का मान बढ़ने लगता है लेकिन वृद्धि दर असमान रहती है । बिंदु A पदार्थ की संतृप्ति अवस्था को दर्शाता है । इसके बाद H को हटाने पर B भी घटने लगता है लेकिन यह परिवर्तन वक्र A0 के अनुदिश नहीं होता बल्कि एक नया वक्र AC प्राप्त होता है । H का मान शून्य करने पर भी B शून्य नहीं होता बल्कि B का मान 0C के बराबर होता है । यह "अवशिष्ट चुंबकत्व' कहलाता है तथा पदार्थ के इस गुण को उसकी धारणशीलता (retentivity) अथवा चुंबकत्वाशेष (remanence-magnetism) कहते हैं । अत: लौह चुंबकीय पदार्थ की धारणशीलता उस चुम्बकन के बराबर है जो चुंबकन क्षेत्र H को हटा देने पर उसमें शेष रह जाता है ।

यदि H को विपरीत दिशा में बढ़ाया जाये तो B का मान और घटता है तथा H के एक निश्चित मान (0D) पर B का मान शून्य हो जाता है । H के इस ऋणात्मक मान 0D को "निग्राहिता" (coercitivity) या 'निग्रह बलं' (Coercive force) कहते हैं । अत: किसी लौह चुंबकीय पदार्थ की निग्राहिता विपरीत दिशा में उस चुंबकन क्षेत्र की माप है जिसे उसमें अवशिष्ट चुम्बकत्व को समाप्त करने के लिए लगाया जाता है ।

यदि H को विपरीत दिशा में ही अधिक बढ़ाया जाये तो पदार्थ विपरीत दिशा में चुंबकित होने लगता है (वक्र DE) और अंत में विपरीत दिशा में बिंदु D पर चुंबकीय संतृप्ति को प्राप्त कर लेता है ।

पुन: H को उसके अधिकतम ऋणात्मक मान से शून्य तक घटाने पर वक्र EF प्राप्त होता है । B=-0F विपरीत दिशा में अवशिष्ट चुम्बकत्व है । फिर H को प्रारम्भिक दिशा में

शून्य से 0G तक बढ़ाने पर विपरीत दिशा में B घटता जाता है और अंततः बिंदु G पर पदार्थ का विपरीत दिशा में अवशिष्ट चुंबकत्व समाप्त हो जाता है । ध्यान रहे कि 0G=0D होता है । H को और अधिक बढ़ाने पर पदार्थ वक्र GA के अनुदिश चुंबकित होता है तथा बिन्दु A पर पुनः चुंबकीय संतृप्ति प्राप्त कर लेता है । इस पूरे चक्र को चित्र 14.11 में दर्शाया गया है । चुंबकन क्षेत्र H के पीछे चुंबकीय क्षेत्र B के पिछड़े रहने को ही शैथिल्यता कहते हैं ।



चित्र 14.11 : B-H वक्र

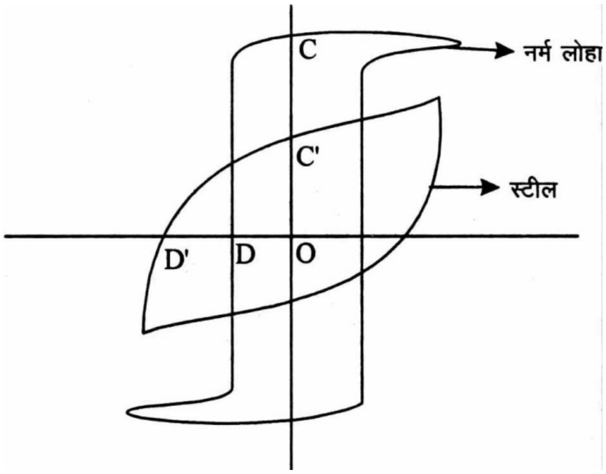
14.7.1 शैथिल्य हानि (Hysterisis loss)

जब एक लौह चुंबकीय पदार्थ को चुंबकित करते हैं तो डोमेनों के क्षेत्र की दिशा में घूमने के कारण क्षेत्र द्वारा पदार्थो पर कार्य किया जाता है । अतः पदार्थ द्वारा ऊर्जा ली जाती है । जब क्षेत्र को हटाते हैं तो डोमेन परिसीमाऐं पूर्णतः पूर्व स्थिति में नहीं आ पातीं और पदार्थ में कुछ चुंबकन अवशिष्ट रह जाता है । अतः विचुंबकन के समय ऊर्जा पुनः प्राप्त नहीं हो पाती और प्रत्येक शैथिल्य लूप में ऊर्जा की एक निश्चित हानि होती है जो पदार्थ में ऊष्मा के रूप में प्रकट होती है ।

गणनाओं द्वारा दर्शाया जा सकता है कि यह हानि B - H लूप के क्षेत्रफल के बराबर होती है । शैथिल्य लूपों की आकृति व आकार के आधार पर लौह-चुंबकीय पदार्थो के चुंबकीय गुणों का ज्ञान होता है तथा इस आधार पर विभिन्न कार्यो के लिए जैसे कि विद्युत चुंबक, ट्रांसफार्मर की क्रोड, स्थाई चुंबक आदि बनाने के लिए उचित धातु का चयन किया जाता है ।

नर्म लोहा तथा स्टील दोनों लौह चुंबकीय है लेकिन नर्म लोहे का B-H वक्र लम्बा। तथा पतला जबकि स्टील के लिए यह बड़े आकार का एवम् मोटा होता है (चित्र 14.12) ।

इससे पता चलता है कि नर्म लोहे की चुंबकीय प्रवृत्ति स्टील से अधिक है इसी प्रकार नर्म लोहे की धारणशीलता (0C) भी स्टील से अधिक है । जबकि इसकी निग्रहिता स्टील की अपेक्षा कम होती है ।



चित्र 14.12

B-H लूप का क्षेत्रफल स्टील में अधिक होने के कारण उसमें नर्म लोहे की अपेक्षा ऊर्जा हानि अधिक होती है ।

विभिन्न कार्यो के लिए लौह-चुंबकीय पदार्थो के चयन में इन वक्रों का उपयोग किया जाता है । उदाहरण के लिए स्थाई चुंबक के लिए पदार्थ की धारणशीलता व निग्राहिता दोनों अधिक होनी चाहिए । लेकिन इनको बार बार चुंबकित विचुंबकित नहीं किया जाता अत: शैथिल्य हानि का विशेष महत्व नहीं है अत: इसके लिए स्टील प्रयोग करते हैं । इसी प्रकार विद्युत चुंबक तथा ट्रांसफार्मर की क्रोड बनाने के लिए शैथिल्य हाप्ति कम से कम होनी चाहिए अत: नर्म लोहा अधिक उपयुक्त होता है।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

12. क्यूरी वाइस नियम क्या है, तथा यह किन पदार्थो के लिए लागू होता है?

----

13. क्यूरी ताप का क्या तात्पर्य है?

----

14. ट्रांसफार्मर की क्रोड के लिए किस पदार्थ का चयन करना चाहिए तथा क्यों?

उदाहरण 14.3 : एक लौहचुंबकीय पदार्थ की चुंबकीय प्रवृत्ति का मान 1200^0C पर 5000^0C है । यदि ताप 1280^0C कर दिया जाये तो उसकी चुंबकीय प्रवृत्ति पर क्या प्रभाव पड़ेगा? दिया गया है कि पदार्थ का क्रांतिक ताप 1180^0C हैं ।

हल : हम जानते हैं कि लौह चुंबकीय पदार्थ की चुंबकीय प्रवृत्ति $\chi = \frac{C}{T - T_c}$

$$\frac{\chi_2}{\chi_1} = \frac{T_1 - T_c}{T_2 - T_c}$$

दिया गया है कि $T_1 = 1200^oC$, $T_2 = 1280^oC$ तथा $T_c = 1180^oC$ इस समीकरण में तापों को K स्केल पर बदलने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि तापों के अंतर $T-T_C$ के कारण स्केल का प्रभाव महत्वहीन है । अत:

$$\chi_2 = \chi_1\left(\frac{T_1 - T_c}{T_2 - T_c}\right) = 5000 \times \left(\frac{1200-1180}{1280-1180}\right) = 1000$$

अत: $\chi_2 = 1000$

14.8 सारांश (Summary)

- पदार्थ के इकाई आयतन में उत्पन्न चुंबकीय आघूर्ण को चुंबकन कहते हैं जिसे M अथवा I से निरूपित करते हैं ।
- चुंबकन (M) तथा आरोपित चुंबकीय क्षेत्र (H) के अनुपात को चुंबकीय प्रवृत्ति (χ) कहते हैं । यह पदार्थ की गुणता की मापक है तथा विमाहीन राशि है ।
- पदार्थो में चुंबकत्व का मुख्य कारण इलेक्ट्रॉनों का चक्रण है । अन्य निर्बल कारण हैं इलेक्ट्रॉनों की कक्षीय गति एवम् नाभिकीय चक्रण ।
- प्रतिचुंबकीय पदार्थो में एक अल्प ऋणात्मक चुंबकीय प्रवृत्ति पायी जाती है।

  $$\chi_{dia} = -\frac{N\mu_0 Ze^2}{6m} < r^2 >$$
- जहां N परमाणुओं का सांख्यिक घनत्व, Z परमाणु में इलेक्ट्रॉनों की संख्या, e इलेक्ट्रॉनिक आवेश तथा m, इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान है । $< r^2 >$ इलेक्ट्रॉनों की नाभिक से वर्ग माध्य दूरी है ।
- अनुचुंबकीय पदार्थो के परमाणु एक अल्प स्थाई चुंबकीय आघूर्ण दर्शाते हैं ये अनियमित रूप से फैले रहते हैं । चुंबकीय प्रवृत्ति अल्प धनात्मक होती है ।
- सामान्य तापों तथा चुंबकीय क्षेत्रों पर अनुचुंबकीय पदार्थो की चुंबकीय क्यूरी नियम का पालन करती है

  $$\chi_{para} = \frac{\mu_0 NM^2}{3k_B T} = \frac{C}{T}$$
- जहां C क्यूरी नियतांक है । M प्रत्येक परमाणु का चुंबकीय आघूर्ण है, k_B नियतांक तथा T पदार्थ का ताप है ।
- लौह - चुंबकीय पदार्थो में अनियमित रूप से विन्यस्त डोमेन पाये जाते हैं जिनमें प्रत्येक परमाणु का चुंबकीय द्विध्रुव संरेखित होता है ।
- क्यूरी ताप से ऊपर गर्म करने पर इनका स्वाभाविक चुंबकत्व समाप्त हो जाता है तथा पदार्थ अनुचुंबकीय बन जाता है । क्यूरी ताप से ऊपर लौह-चुंबकीय पदार्थ क्यूरी - वाइस का पालन करते हैं

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}$$

- लौह चुंबकीय पदार्थो में शैथिल्यता प्रभाव पाया जाता है । चुंबकन क्षेत्र (H) के पीछे चुंबकीय क्षेत्र (B) के पिछड़े रहने की प्रवृत्ति ही शैथिल्यता कहलाती है । यदि इन पदार्थो को बारबार चुंबकित तथा विचुंबकित किया जावे तो शैथिल्य लूप में ऊर्जा की हानि होती है जो B-H के क्षेत्रफल के बराबर होती है ।
- शैथिल्य लूप की आकृति व आकार के आधार पर विभिन्न उपयोगों के लिये उचित धातु का चयन किया जाता है ।

14.9 शब्दावली (Glossary)

अनुचुंबकत्व	Paramagnetism
अवशिष्ट चुंबकत्व	Residual magnetism
असमांग	Anistropic
आणविक विनिमय	Molecular exchange
क्यूरी ताप	cuire temperature
चुंबकन	Magnetization
चुंबकत्वावशेष	Remanence
चुंबकीय आघूर्ण	Magnetic Moment
चुंबकीय प्रवृत्ति	Magnetic susceptibility
पारगम्यता	Magnetic permeability
धारणशीलता	Retentivity
निग्रह बल	Coercive force
निग्राहिता	Coercivity
बहु परमाणुनिकाय	Many atom system
प्रतिचुंबकत्व	Dia magnetism
प्रतिलौह चुंबकत्व	Antiferro magnetism
लौह चुंबकत्व	Ferro magnetism
शैथिल्यता	Hysterisis
शैथिल्य हानि	Hysterisis loss
विन्यस्त	Oriented
समांगी	Isotropic
संरेखित	Aligned

14.10 संदर्भ ग्रंथ (Reference books)

S.O. Pillai	Solid State Physics	New Age International

		Publishers, Delhi
R.K. Puri, V. K. Babbar	Solid State Physics	S. Chand & Company, New Delhi
M.A. Wahab	Solid State Physics Structure and Property of Materials	Narosa Publishing House, New Delhi
जे.सी.उपाध्याय व हरि काश	ठोस अवस्था भौतिकी	रामप्रसाद एण्ड संस, आगरा

14.11 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to self assessment questions)

1. चुंबकीय प्रवृत्ति पदार्थ की चुंबकीय गुणता मापती है । यह चुंबकन (I) तथा आरोपित क्षेत्र (H) के अनुपात (I/H) के बराबर होती है । यह विमाहीन राशि है ।
2. आपेक्षिक पारगम्यता $(\mu_0) = 1 + \chi$ (चुंबकीय प्रवृत्ति)
3. परमाण्विक इलेक्ट्रॉनों का स्पिन ।
4. प्रतिचुंबकत्व
5. बाहरी क्षेत्र लगाने पर इसके परमाण्विक इलेक्ट्रॉनों की गति चुंबकीय बल के कारण इस प्रकार प्रभावित होती है कि क्षेत्र को दिशा में चुंबकीय आघूर्ण वाले इलेक्ट्रॉन मंद तथा विपरीत दिशा वाले इलेक्ट्रॉन तीव्र हो जाते है । इस प्रकार क्षेत्र की विपरीत दिशा में चुंबकन के कारण k ऋणात्मक होता है ।
6. अनुचुंबकीय गुण ।
7. क्षेत्र की दिशा में समांतर आघूर्ण वाले इलेक्ट्रॉनों की आवृत्ति घट जाती है तथा प्रति समान्तर वाले इलेक्ट्रॉनों की आवृति बढ़ जाती है । यह अंतर $\pm\frac{eB}{2m}$ होता है ।
8. ताप के साथ χ अप्रभावित रहती है ।
9. ताप बढ़ने के साथ χ का मान घटता है । χ ताप के व्यत्क्रमानुपाती होती है ।
10. अति निम्न तापों पर प्रबल चुंबकीय क्षेत्र लगाया जाये तो अनुचुंबकीय पदार्थो की चुंबकीय संतृप्ति अवस्था आ जाती है ।
11. अनुयुंबकीय प्रकृति ।
12. क्यूरी - वाइस नियम $\chi = \frac{C}{T - T_c}$; यह लौह - चुंबकीय पदार्थो के लिए लागू होता है ।
13. क्यूरी ताप के ऊपर लौह चुंबकीय पदार्थ अनुचुंबकीय बन जाते हैं ।

14. नर्म लोहा ट्रांसफार्मर की क्रोड में प्रत्यावर्ती धारा प्रवाह के कारण बार-बार चुम्बकित तथा विचुंबकित होता है । अत: शैथिल्य हानि कम करने के लिए नर्म लौहे प्रयोग करते हैं ।

14.12 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. क्यूरी ताप क्या है?
2. प्रतिचुंबकीय पदार्थो की चुंबकीय प्रवृत्ति ताप के साथ किस प्रकार परिवर्तित होती है?
3. ट्रांसफार्मर की क्रोड के लिए किस पदार्थ का चयन करते हैं
4. पदार्थ की पारगम्यता तथा चुंबकीय प्रवृत्ति में क्या सम्बन्ध है?
5. प्रतिचुंबकीय अनुचुंबकीय, लौह चुंबकीय व प्रति - लौह चुंबकीय पदार्थो, के दो-दो उदाहरण लिखिये।
6. निग्रहिता का अर्थ समझाइये ।

निबन्धात्मक प्रश्न (Eassy type questions)

7. प्रतिचुंबकीय पदार्थ की प्रकृति स्पष्ट कीजिये तथा उनकी चुंबकीय प्रवृति के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिये ।
8. चुंबकीय डोमेन से क्या तात्पर्य है? इसे गुणात्मक रूप से समझाइये । चुंबकीय डोमेन सिद्धान्त के आधार पर लौह-चुंबकत्व की व्याख्या कीजिऐ ।
9. अनुचुंबकत्व का लैगविन का सिद्धान्त समझाइये । सिद्ध कीजिये कि इनकी चुंबकीय प्रवृति पदार्थ के परम ताप के व्युत्क्रमानुपाती होती है ।
10. क्यूरी नियम तथा क्यूरी वाइस नियम में अंतर समझाइये । ये किन-किन पदार्थो पर लागू होते हैं?
11. लौह चुंबकीय पदार्थो के लिए B-H वक्र की रचना कीजिये । शैथिल्यता समझाते हुए, चुंबकत्व अवशेष, निग्रह बल तथा शैथिल्य हानि को भी स्पष्ट कीजिये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

12. किसी अनुचुंबकीय पदार्थ में 2×10^{28} परमाणु/मी^{3} उपस्थित हैं । यदि 270^oC ताप पर पदार्थ की अनुचुंबकीय प्रवृत्ति 2.3×10^{-2} हो तो परमाणुओं के द्विध्रुव आघूर्ण की गणना कीजिये । दिया है $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$जूला/के ।

(**उत्तर :** 3×10^{-24} ऐ./मी.^{2})

13. एक प्रतिचुंबकीय पदार्थ जिसका Z=30 है, के परमाणुओं में इलेक्ट्रॉनों की वर्ग माध्य दूरी का मान $1.22\ a_0^2$ है (जहां $a_o = 0.528\ \mathring{A}$ है), परमाण्विक सांद्रता 3×10^{30} प्रति मी.^{3} तथा पारगम्यता 2×10^{-7} न्यूटन/ से.^{2} है तो पदार्थ की चुंबकीय प्रवृत्ति की गणना कीजिये।

(**उत्तर :** -2.87×10^{-4})

14. एक पदार्थ पर 5.40 ऐ/मीटर का चुंबकन क्षेत्र लगाने पर उसमें 27 x 10^{-3} ऐ./मीटर का चुंबकन उत्पन्न होता है । पदार्थ की चुंबकीय प्रवृत्ति तथा पारगम्यता की गणना कीजिये तथा पदार्थ की क्या चुंबकीय प्रकृति होगी स्पष्ट कीजिये

(**उत्तर** : 5 x 10^{-4} ,1.0005, अनुचुंबकीय)

15. एक अनुचुंबकीय पदार्थ की चुंबकीय प्रवृत्ति 227^{0}C पर 0.4 x 10^{-5} है । यदि पदार्थ का ताप 27^{0}C कर दिया जाए तो चुंबकीय प्रवृत्ति का क्या मान होगा?

(**उत्तर** : 0.67 x 10^{-5})

इकाई - 15

अतिचालकता
(Superconductivity)

इकाई की रूपरेखा

15.0 उद्देश्य
15.1 प्रस्तावना
15.2 अतिचालकता की खोज व ऐतिहासिक पृष्ठभूमि
15.3 क्रांतिक ताप तथा संबद्ध असामान्य घटनाऐं
15.3.1 शून्य प्रतिरोध
15.3.2 माइसनर प्रभाव या पूर्ण प्रतिचुंबकत्व
15.3.3 क्रांतिक चुंबकीय क्षेत्र तथा क्रांतिक ताप
15.3.4 चुंबकीय क्षेत्र का वेधन
15.4 अतिचालक संक्रमण से संबद्ध ऊष्मागतिक प्रभाव
15.5 समस्थानिक प्रभाव
15.6 ऊर्जा अंतराल
15.7 अतिचालकों का वर्गीकरण
15.8 अतिचालकों के उपयोग
15.9 सारांश
15.10 शब्दावली
15.11 संदर्भ ग्रंथ
15.12 बोध प्रश्नों के उत्तर
15.13 अभ्यासार्थ प्रश्न

15.0 उद्देश्य (Objectivity)

इस इकाई को पढने के पश्चात् आप-

- यह जान सकेंगे कि अतिचालकता क्या होती है;
- अतिचालकता से संबद्ध महत्वपूर्ण गुणों जैसे कि वैद्‌युत प्रतिरोध, माइसनर प्रभाव, ऊष्मागतिकीय प्रभावों की जानकारी कर सकेगे;
- इन पदार्थो में भी एक ऊर्जा अंतराल पाया गया है, इसकी प्रकृति व इससे संबन्धित जानकारी प्राप्त करेंगे:
- इनके वर्गीकरण तथा उसके महत्व का बोध कर सकेंगे
- इनके उपयोग के विषय में समझ सकेंगे ।

15.1 प्रस्तावना (Introduction)

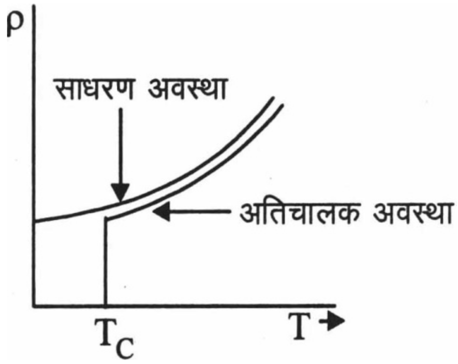
अतिचालकता विगत शताब्दी की अत्यधिक महत्वपूर्ण एवम् एक असाधारण वैज्ञानिक खोज है । परमशून्य ताप के समीप कई धातुओं, यौगिकों, मिश्र धातुओं तथा अर्धचालकों की दिष्ट धारा के लिऐ वैद्युत प्रतिरोधकता एकाएक शून्य हो जाती है । इस ताप को "क्रांतिक ताप' कहा जाता है । इस ताप पर या उसके नीचे इस प्रकार के पदार्थो की वलयों में विद्युत धारा अनन्तकाल तक बिना हास के प्रवाहित हो सकती है । अतिचालकता पदार्थो की एक अत्यधिक उपयोगी अवस्था है जिसके आज महत्वपूर्ण उपयोग होने लगे हैं, यद्यपि आज भी वैज्ञानिक कमरे के ताप पर अतिचालकता प्राप्त करने की चुनौती से जूझ रहे हैं । अतिचालकता की खोज, इसके संक्षिप्त इतिहास की जानकारी इस इकाई के अनुच्छेद 15.2 में दी जायेगी । क्रांतिक ताप तथा इससे संबद्ध महत्वपूर्ण गुणों जैसे कि शून्य प्रतिरोध अवस्था, पूर्ण प्रति चुंबकत्व, क्रांतिक चुम्बकीय क्षेत्र आदि के विषय अनुच्छेद 15.3 में विस्तार से वर्णन किया गया है । क्रांतिक तापों पर इन पदार्थो के ऊष्मागतिकीय गुणों, जैसे कि ऊष्मा धारिता, विशिष्ट ऊष्मा, एन्ट्रापी आदि में भी एकाएक परिवर्तन होते हैं जिनका अनुच्छेद 15.4 में वर्णन किया गया है । अनुच्छेद 15.5 में समस्थानिक प्रभाव की व्याख्या की गई है । इन पदार्थो में भी एक अतिचालक 'ऊर्जा अंतराल" पाया जाता है जिसका प्रायोगिक सत्यापन हो चुका है इसका वर्णन अनुच्छेद 15.6 में किया गया है । अतिचालकों को I व II प्रकार के पदार्थो में वर्गीकृत किया जा सकता है, इनके प्रमुख गुणों की जानकारी अइच्छेद 15.7 में दी जाएगी । अंत में इन पदार्थो के उपयोगों पर अनुच्छेद 15.8 में प्रकाश डाला जायेगा ।

15.2 अतिचालकता की खोज व पृष्ठभूमि (Discovery of superconductivity and historical background)

सन् 1911 में डच भौतिक शास्त्री कामरलिग ऑन्स ने शुद्ध पारे के साथ प्रयोग करते समय पाया कि लगभग 4.2 k तापमान से नीचे पारे की विद्युत प्रतिरोधकता एकाएक शून्य हो जाती है (चित्र 15.1) तथा इस ताप के नीचे पारे की प्रतिरोधकता शून्य ही बनी रहती है, जबकि 4.2 K से ऊपर के तापों पर पारे का व्यवहार सामान्य धातु की तरह ही होता है । इस असाधारण घटना को ऑन्स ने "अतिचालकता' (superconductivity) नाम दिया । यधपि अतिचालकों के अधिकांश मुख्य गुणों की स्थापना अब तक हो चुकी है तथा कई नये अतिचालक पदार्थो की खोज अब तक कर ली गई है लेकिन इस घटना की उत्पत्ति के कारणों का कोई सन्तोषजनक हल अब तक प्राप्त नहीं हो सका है । खोज के एक शताब्दी बाद भी यह घटना आज तक भौतिकी की अति जटिल तथा अनुत्तरित समस्याओं में से एक बनी हुई है ।

अतिचालकता की खोज के पश्चात् इस क्षेत्र में बड़ी तेजी से शोध गतिविधियां बढ गई क्योंकि इनके शून्य प्रतिरोध के कारण (अत: नगण्य ऊष्मा हानि के कारण) काफी शक्तिशाली तथा अल्पव्यय की युक्तियाँ इनसे बनाई जा सकती थीं । उदाहरण के लिए अतिचालक पदार्थ

की बनी वैद्यत चुंबक में एक बार धारा प्रवाहित करके छोड़ दें तो वह बिना किसी वोल्टता लगाये हजारों वर्षो तक कार्य करती रहेगी ।



चित्र 15.1

लेकिन अतिचालकता के लिए अति निम्न तापों की आवश्यकता के कारण ऐसी युक्तियों का निर्माण अव्यावहारिक व असुविधाजनक था । द्रव हीलियम ताप (4.2K) प्राप्त करना तथा लंबे समय तक इसे बनाये रखना कठिन तथा अधिक व्यय का कार्य था । अत: शोध गतिविधियाँ क्रांतिक ताप को अधिक से अधिक ऊंचा प्राप्त करने की दिशा में केन्द्रित हो गई तथा सभी गतिविधियों का अंतिम लक्ष्य था कमरे के ताप पर अतिचालकता की उत्पत्ति । कई धातुओं, मिश्र धातुओं, यौगिकों सिरेमिक्स आदि पर गहन प्रयोग हुए लेकिन तीव्र प्रयासों के बावजूद 1977 तक अधिकतम क्रांतिक ताप 23K ही पहुंच सका जो Nb_3, Ge पदार्थ में पाया गया । 1966 में स्विश वैज्ञानिकों बैडनोर्ज तथा मूलर (Bednorz and Muller) ने La-Ba-Cu-O सिरेमिक पदार्थ में अतिचालकता का गुण पाया जिसका क्रांतिक ताप 34 K था । सिरेमिक अचालक पदार्थ में अतिचालकता का पाया जाना अति विस्मयकारी था । इस पदार्थ को उच्च ताप अतिचालक सिरेमिक कहा गया । इस खोज के बाद सारे विश्व में इन आक्साइड सिरेमिक पदार्थो की खोज में एक क्रांति सी आ गई क्योंकि ऐसा विश्वास किया जाने लगा कि इन्हीं पदार्थो में कमरे के ताप पर अतिचालकता प्राप्त होगी । 1987 में एक और सिरेमिक पदार्थ $YBa_2Cu_3O_7$ बनाया गया जिसका क्रांतिक ताप 91k था । यह खोज इसलिए अति महत्वपूर्ण थी क्योंकि यह ताप द्रव नाइट्रोजन के ताप (77 K) से ऊँचा है जो आसानी से प्रयोगशाला में मिलता है । 1988 में क्रांतिक ताप 125 K तक पहुंच गया जो थैलियम युक्त सिरेमिक्स में पाया गया । वर्तमान में अधिकतम क्रांतिक ताप लगभग 160 K है जो अभी भी कमरे के ताप से काफी नीचे है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. पदार्थ की चालक अवस्था तथा अतिचालक अवस्था में ताप के साथ प्रतिरोधक में परिवर्तनो में क्या अंतर है।

----

2. सिरेमिक ऑक्साइड में अतिचालकता की खोज क्यों माना गया?

15.3 क्रांतिक ताप तथा संबद्ध असामान्य घटनाएं (Critical temperature and related anomalous phenomena)

जब एक अतिचालकता दर्शाने वाले पदार्थ को एक निश्चित तापमान से कम तक ठंडा किया जाता है तो उसका विद्‌युत प्रतिरोध ही शून्य नहीं होता (जैसा कि ऑन्स ने प्रेक्षित किया था) बल्कि ऐसे पदार्थ के अन्य महत्वपूर्ण गुणों में भी एकाएक परिवर्तन देखे जाते हैं । वैद्‌युत प्रतिरोध की शून्यता सहित ये सभी परिवर्तन एक ही ताप पर एकाएक होते हैं । इसी ताप को 'क्रांतिक ताप' कहते हैं और इसे T_c से प्रदर्शित करते हैं ।। कुछ विशिष्ट महत्वपूर्ण गुणों का विवरण निम्न प्रकार है ।

15.3.1 शून्य प्रतिरोध (Zero resistance)

जैसा कि पहले कहा जा चुका है क्रांतिक ताप पर प्रतिरोध एकाएक शून्य (नगण्य) हो जाता है । यह देखा गया है धातुओं का प्रतिरोध उनकी सामान्य अवस्था की तुलना में 10^{17} वें भाग तक गिर जाता है जिसे शून्य माना जा सकता है । कुछ पदार्थो का क्रांतिक ताप सारणी 15.1 में दर्शाया गया है ।

15.3.2 पूर्ण प्रतिचुंबकत्व या माइसनर प्रभाव (Perfect diamagnetism or Meissner effect)

1933 में माइसनर तथा आशनफील्ड ने प्रयोगों द्‌वारा ज्ञात किया कि अगर अतिचालक को क्रांतिक ताप से नीचे किसी ताप तक चुंबकीय क्षेत्र में ठंडा किया जाये तो पदार्थ द्‌वारा चुंबकीय फ्लक्स रेखाओं को बाहर की ओर धकेल दिया जाता है (चित्र 15.2) । इस घटना को 'माइसनर प्रभाव' कहा जाता है । यदि अतिचालक पदार्थ को पहले क्रांतिक ताप से नीचे ठंडा किया जाये तथा फिर चुंबकीय क्षेत्र में रखा जाये तो भी रेखाऐं बाहर की ओर धकेल दी जाती है । इससे स्पष्ट है कि प्रतिचुंबकत्व का यह व्यवहार अपने इतिहास पर निर्भर नहीं करता न उसे याद रखता है ।

चित्र 15.2 (a) $T > T_c$ पर चुम्बकीय क्षेत्र का पदार्थों में बेधन (b) $T < T_c$ पर चुम्बकीय रेखाओं का बाहर की ओर प्रतिकर्षण

सारणी 15.1 : कुछ अतिचालकों के गुण

वर्ष	T_c(K)	पदार्थ	क्रिस्टल संरचना	वर्ग प्रकार	प्रकृति	H_c (MAm^{-1})
1911	4.2	Hg	Tetragonal	I	Metal	0.033
1913	6.2	Pb	fcc	I	Metal	0.064
1930	9.25N	b	bcc	II	Metal	0.164
1940	15	NbN	NaCl	II	Interstitial	12.2

1950	17	V_3Si	β-tungston(W_3O)	II	Intermetallic	12.4
1954	18	Nb_3Sn	W_3O	II	Intermetallic	18.5
1960	10	Nb-Ti	bcc	II	Alloy	11.9
1964	0.7	$SrTiO_3$	Perovskile	II	Ceramic	Small
1970	20.7N	b_3(Al, Ge)	W_3O	II	Intermetallic	34.0
1977	23	Nb_3Ge	W_3O	II	Intermetallic	29.9
1986	34	$La_{1.85}Ba_{0.15}CuO_4$	Tetragonal	II	Ceramic	43
1987	90	$YBa_2Cu_3O_7$	Orthorhombic	II	Ceramic	111
1988	108	Bi Cuperates	Orthorhombic	II	Ceramic	-
1988	125	Ti Cuperates	Orthorhombic	II	Ceramic	-

चूंकि अतिचालक पदार्थों के अंदर चुंबकीय प्रेरण का मान शून्य होगा,

अत: $$B = \mu_0 (M + H) = 0 \quad ....(15.1)$$

या $$H = -M \quad ...(15.2)$$

अत: चुंबकीय प्रवृत्ति (susceptibility) का मान होगा

$$\chi = \frac{M}{H} = -1 \quad ...(15.3)$$

जो पूर्ण प्रतिचुंबकत्व के लिए सत्य होता है । अतिचालकों का यह पूर्ण प्रतिचुंबकत्व व्यवहार इसके शून्य प्रतिरोध द्‌वारा नहीं समझाया जा सकता है । चूंकि एक पूर्णचालक (perfect conductor) में प्रतिरोधकता (ρ) का मान शून्य होता है, अत: ओम के नियमानुसार (E= ρ J) इनके अंदर E का मान शून्य हो जायेगा । अत: मैक्सवैल समीकरण के प्रयोग से

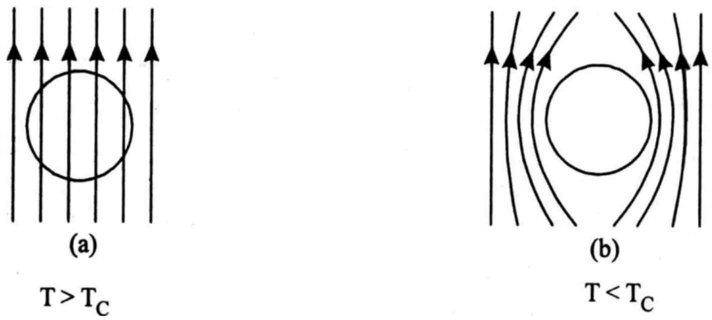
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ...(15.4)$$

से B एक नियतांक प्राप्त होगा अत: पूर्ण चालक के अंदर चुंबकीय प्रेरण का मान नियत हो जायेगा । इसका अर्थ यह होगा कि यदि पूर्ण चालकों को चुंबकीय क्षेत्र की उपस्थिति में तब तक ठंडा किया जाये, जब तक कि उसका प्रतिरोध शून्य नहीं हो जाये तो आरोपित चुंबकीय क्षेत्र पदार्थ के अंदर स्थाई रूप से जम जायेगा । लेकिन यह माइसनर प्रभाव के विपरीत तथ्य है । इससे निष्कर्ष निकलता है कि अतिचालकों का व्यवहार पूर्ण चालकों से अलग होता है तथा अतिचालकीय अवस्था पदार्थ की एक विशिष्ट ऊष्मागतिकीय स्थिति (phase) होगी जिसमें वह पदार्थ विद्‌युत व चुंबकीय क्षेत्र दोनों को ही समाहित नहीं करेगा । अत: अतिचालकों के दो स्वतंत्र गुण होंगे, उनका शून्य प्रतिरोध तथा पूर्ण प्रतिचुंबकत्व । यह स्पष्ट

कर देना आवश्यक है कि क्रांतिक ताप पर प्रतिरोधकता का एकाएक लुप्त होना और चुंबकीय प्रेरण का पूर्ण बहिष्करण यद्यपि दो स्वतंत्र घटनाऐं हैं लेकिन अतिचालकता दूसरी घटना को बनाये रखने के लिए पहली घटना पर निर्भर है ।

15.3.3 क्रांतिक चुंबकीय क्षेत्र तथा क्रांतिक ताप (Critical field and critical temperature)

सन् 1913 में कामरलिंग ऑन्स ने अनुभव किया कि यदि अतिचालक पदार्थ को क्रांतिक ताप के नीचे प्रबल चुंबकीय क्षेत्र में रखा जाये तो उसकी अतिचालकता लुप्त हो जाती है तथा पदार्थ सामान्य अवस्था प्राप्त कर लेता है । चुंबकीय क्षेत्र का वह न्यूनतम मान जिस पर अतिचालकता का गुण लुप्त हो जाये 'क्रांतिक चुंबकीय क्षेत्र' कहा जाता है । इसे H_c से दर्शाते हैं तथा इसका मान अधिकांश अतिचालकों के लिए कुछ सौ ऑरस्टेड कोटि का होता है । इसका मान ताप के साथ परिवर्तित भी होता है, जिससे स्पष्ट होता है कि अतिचालक अवस्था चुंबकीय क्षेत्र तथा ताप की एक निश्चित सीमाओं के अंदर ही स्थाई होती है । उच्च ताप तथा चुंबकीय क्षेत्रों पर पदार्थ की सामान्य अवस्था ही अधिक स्थाई है । क्रांतिक चुंबकीय क्षेत्र तथा ताप के मध्य एक ग्राम चित्र 15.3 में दर्शाया गया है । इसे चुंबकीय कला आरेख भी कहा जाता है । यह ग्राफ निम्न समीकरण से प्राप्त होता है ।



चित्र 15.3 Pb के लिए क्रांतिक क्षेत्र (H_c) में ताप के साथ परिवर्तन

$$H_c = H_c(0)\left[1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right] \quad ....(15.5)$$

$H_c(0)$, 0K ताप पर क्रांतिक क्षेत्र है । स्पष्ट है कि $T=T_c$ पर H_c का मान शून्य हो जायेगा ।

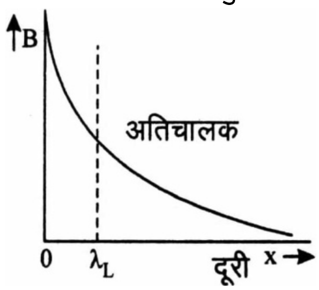
15.3.4 चुंबकीय क्षेत्र का वेधन (Magnetic field penetration)

माइसनर प्रभाव से दर्शाया जा सकता है कि अतिचालकों में पृष्ठीय धाराऐं बहती हैं । यदि धाराऐं आंतरिक होती तो ये अतिचालकों के अंदर भी क्षेत्र उत्पन्न करती । लेकिन सूक्ष्म दृष्टिकोणों के आधार पर प्रतीत होता है कि ये धाराऐं पूर्ण रूप में पृष्ठीय नहीं होती । धारा की कक्षा को जिसमें इलेक्ट्रॉन विधमान होते हैं, पदार्थ में एक परिमित दूरी तक वेधन करना ही चाहिए । अत: चुंबकीय क्षेत्र भी अतिचालकों की सतहों के अंदर बेधन करेगा ।

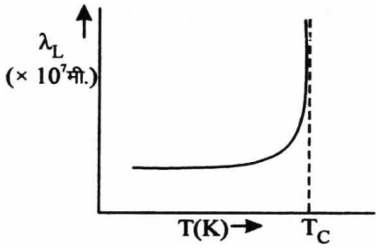
यद्यपि क्षेत्र की यह गहराई परमाणु दूरियों की तुलना में बहुत अधिक होती है लेकिन इतनी अधिक भी नहीं कि यह माइसनर प्रभाव की वैधता को चुनौती दे सके । प्रयोगों के आधार पर परम ताप की सीमा में बेधन गहराई (λ)का मान लगभग 10^{-5} सेमी की कोटि का होता है । प्रयोगों से यह भी निष्कर्ष निकला है कि λ का मान ताप के साथ भी परिवर्तित होता है । अतिचालक में चुंबकीय क्षेत्र का वेधन चित्र 15.4 में दर्शाया गया है । क्षेत्र का मान पदार्थ में चर घातांकी रूप में कम होता है । लंडन समीकरण के अनुसार

$$H_e(x) = H_e(0)\exp\left(\frac{x}{\lambda_L}\right) \qquad ...(15.6)$$

जहां $H_e(0)$, अतिचालक के पृष्ठ पर चुंबकीय क्षेत्र को दर्शाता है तथा λ_L को आभिलाक्षणिक दूरी या वैध गहराई (penetration depth) कहते हैं । अत: बेधन गहराई अतिचालकों के अंदर उस हरी को कहते हैं जिस पर चुंबकीय क्षेत्र का मान उसके पृष्ठ मान का $\frac{1}{e}$ गुना (या ~37%) रह जाये । क्रांतिक, तापों के नीचे λ_L का मान 10^3 से 10^4 $\mathring{A}$ देखा गया है । ताप के साथ λ_L में होने वाले परिवर्तन को चित्र 15.5 में दर्शाया गया है । यदि टिन के एक नमूने को दुर्बल चुंबकीय क्षेत्र में रखा जाये तो बेधन क्षमता का मान ताप बढ़ने के साथ अल्प मात्रा में ही बदलता है तथा क्रांतिक ताप पर एकाएक बढ़ जाता है । इससे स्पष्ट है कि क्रांतिक ताप पर या उससे उच्च तापों पर क्षेत्र धातुओं में आसानी से बेधन कर जाता है ।



चित्र 15.4 चुम्बकीय क्षेत्र का पदार्थ के अंदर बेधन



चित्र 15.5 टिन के लिए बेधन गहराई का ताप के साथ परिवर्तन

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

3. अतिचालकों के दो प्रमुख तथा आवश्यक स्वतंत्र गुण कौन से होते हैं?

----

4. अतिचालकों में $T \le T_c$ के लिए क्रांतिक चुंबकीय क्षेत्र (H_c) का मान ताप के साथ किस प्रकार परिवर्तित होता है?

----

5. अतिचालकों में चुंबकीय क्षेत्र की बेधन गहराई किस कोटि की होती है तथा बेधन गहराई का क्या भौतिक अर्थ है?

उदाहरण 15.1 लैड का क्रांतिक ताप 6.2 K है तथा 0K ताप पर उसका क्रांतिक क्षेत्र 0.064 मेगा एम्पियर/मी है । 4K ताप पर क्रांतिक क्षेत्र का क्या मान होगा?

हल : हम जानते हैं कि

$$H_c = H_c(0)\left[1 - \frac{T^2}{T_c^{\,2}}\right]$$

दिया गया है कि $H_c(0)$= 0.064 मेगा एम्पियर/मी, T_c=6.2 K

तथा T = 4 K अत:

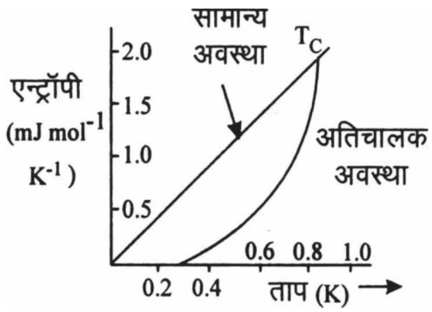
$$H_c = 0.064\left[1 - \left(\frac{4}{6.2}\right)^2\right]$$

= 0.037 मेगा एम्पियर/मी

15.4 अतिचालक संक्रमण से संबद्ध ऊष्मागतिक प्रभाव (Thermodynamic properties related to superconducting transition)

कुछ ऊष्मागतिक प्रभाव अतिचालकता के आधारभूत सिद्धांतों की दृष्टि से अति महत्वपूर्ण हैं । इन पर हम संक्षेप में विचार करेंगे

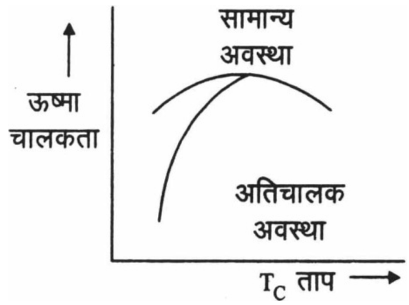
(i) **एन्ट्रॉपी (Entropy) :** जब क्रांतिक ताप पर पदार्थ सामान्य अवस्था से अतिचालक अवस्था में संक्रमण करता है तो उसकी एन्ट्रॉपी में काफी कमी होती है । इससे प्रदर्शित होता है कि अतिचालक अवस्था सामान्य अवस्था की तुलना में अधिक क्रमित होती है । सामान्य अवस्था तथा अतिचालक अवस्था में एन्ट्रॉपी को चित्र 15.6 में प्रदर्शित किया गया है । यह स्थापित किया जा चुका है कि अतिचालक अवस्था में प्रवेश करने पर पदार्थो की इलेक्ट्रॉनिक सरंचना में परिवर्तन होता है । सामान्य अवस्था के दौरान तापीय ऊर्जाओं के कारण उत्तेजित रहने वाले इलेक्ट्रॉन अतिचालक अवस्था में पुनर्विन्यास करके क्रमित हो जाते हैं । यह पुनर्विन्यास (या क्रमित अवस्था) लगभग 10^{-6} मीटर की कोटि तक का हो सकता है । इस दूरी को संसक्तता लंबाई (coherence length) कहा जाता है।



चित्र 15.6 सामान्य एवं अतिरिक्त परिचालक अवस्थाओं में एल्यूमिनियम के लिए एन्ट्रोपी- ग्राफ

(ii) ऊष्मा चालकता (Thermal conductivity)

पदार्थ की सामान्य अवस्था तथा अतिचालक अवस्था में ऊष्मा चालकताओं में अविरत परिवर्तन पाये जाते हैं । प्रयोगों से देखा गया है कि अतिचालक अवस्था में ऊष्माचालकता सामान्य अवस्था से काफी कम होती है । इसे चित्र 1.57 में प्रदर्शित किया गया है ।



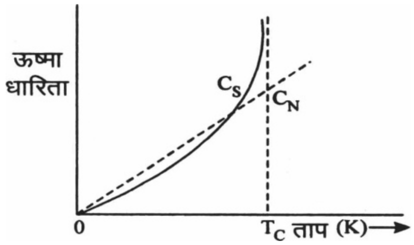
चित्र 15.7

उदाहरण के लिए टिन की सामान्य अवस्था में ऊष्मा चालकता 34 वाट/सेमी-K है जबकि अतिचालक अवस्था में इसका मान आधे से भी कम 16 वाट/सेमी-K हो जाता है । इसी प्रकार सीसे के लिए सामान्य अवस्था में ऊष्मा चालकता व 8 वाट/सेमी-K होती है जबकि अतिचालक अवस्था में इसका मान 3 वाट/सेमी-K है ।

(iii) ऊष्मा धारिता (Heat capacity)

सामान्य और अतिचालक अवस्थाओं की ऊष्मा धारिता में पर्याप्त अंतर होता है । अलग - अलग अतिचालकों में यह अंतर अलग-अलग प्रकार से होता है । टिन के लिए इसे चित्र 15.8 में प्रदर्शित किया गया है । अतिचालक अवस्था में ऊष्मा धारिता ताप के साथ चरघातांकी रूप में परिवर्तित होती है । इसका रूप $e^{-\Delta}/k_B T$ होता है ।

यहां $\Delta = bk_B T_c$ तथा b एक नियतांक है ।

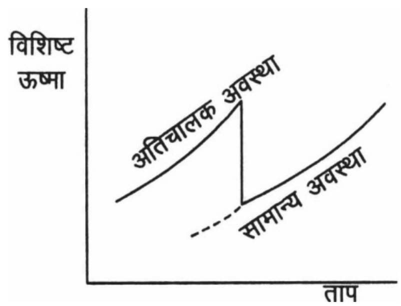


चित्र 15.8

गैलियम के लिए b का मान लगभग 1.4 होता है । यह चरघातांकी रूप मूल अवस्था से निम्नतम उत्तेजित अवस्था को पृथक करने वाले इलेक्ट्रॉनों के ऊर्जा स्पेक्ट्रम में एक सीमित ऊर्जा अन्तराल के अस्तित्व को इंगित करता है तथा ऊर्जा अंतराल के पार (across) ऊष्मीय उत्तेजन के संगत प्रतीत है । इस ऊर्जा अंतराल के अस्तित्व को पुष्टि क्रांतिक ताप पर ऊष्मा धारिता में प्लुति भंग (discontinuity) से भी होती है । ऊर्जा अंतराल के विषय में हम आगे विचार करेंगे ।

(iv) विशिष्ट ऊष्मा (Specific Heat)

क्रांतिक ताप के ठीक नीचे अतिचालक पदार्थो की विशिष्ट ऊष्मा का मान असंततीय रूप से बढ़ जाता है । इसे चित्र 15.9 में दर्शाया गया है । उदाहरण के लिए टिन की विशिष्ट उष्मा क्रांतिक ताप के ऊपर 1.9 x 10^{-4}वाट से./ग्राम- के. तथा अतिचालक अवस्था में इसका मान 2.79 x 10^{-4} वाट से./ ग्राम-केल्विन हो जाता है ।



चित्र 15.9 टिन + 4% विस्मथ मिश्र धातु के लिए विशिष्ट ऊष्मा का ताप के साथ परिवर्तन

15.5 समस्थानिक प्रभाव (Isotope effect)

सन् 1950 में प्रयोगों के आधार पर पाया गया कि अतिचालक पदार्थ का क्रांतिक ताप समस्थानिक के द्रव्यमान के साथ परिवर्तित होता है । प्रायोगिक प्रेक्षणों को निम्न रूप से व्यक्त का सकते हैं :

$$T_c \propto M^{\alpha} \qquad ...(15.7)$$

या $$T_c M^{-\alpha} = \text{स्थिरांक} \qquad ...(15.8)$$

α एक संख्या है जिसका मान 0.5 के आसपास पाया गया है । कुछ पदार्थो के लिए इसका मान इससे भिन्न भी हो सकता है । स्पष्ट है कि जितना अधिक समस्थानिक द्रव्यमान होगा, क्रांतिक ताप उतना ही कम होगा । उदाहरण के लिए पारे का औसत परमाणु भार 199.5 से 203.4 a.m.u. (परमाणु द्रव्यमात इकाई) परिवर्तित करने पर क्रांतिक ताप का मान 4.185 K से 4.146 K परिवर्तित हो जाता है । एक ही तत्व के विभिन्न समस्थानिकों को मिलाकर क्रांतिक ताप में सहजता (Smoothly) से परिवर्तन किया जा सकता है ।

$\alpha = 0.5$ के लिए (जो अधिकांश पदार्थो के लिए सत्य है) सेमी.. (15.8) को इस प्रकार लिख सकते हैं -

$$T_c M^{-1/2} = \text{स्थिरांक} \qquad ...(15.9)$$

$\alpha = 0.5$ के लिए सेमी.. (15.9) का अन्य रूप इस प्रकार भी है

$$\frac{T_c}{\theta_D} = \text{स्थिरांक} \qquad ...(15.10)$$

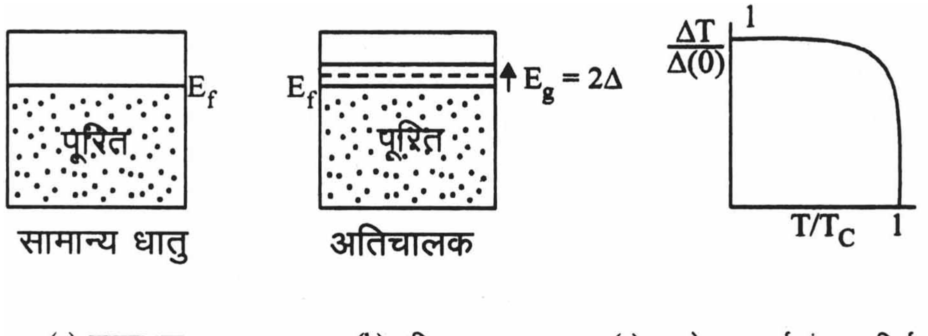
जहां θ_D डिबाई ताप है । उपरोक्त दोनों समीकरणों से स्पष्ट है कि डिबाई ताप तथा क्रांतिक ताप समस्थानिक द्रव्यमान के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती है, अर्थात्

$$T_c \propto \theta_D \propto M^{-1/2} \qquad ...(15.11)$$

उपरोक्त समीकरण से यह संकेत मिलता है कि जालक कंपन या इलेक्ट्रॉन फोनॉन अन्योन्य क्रियाएँ अतिचालकता उत्पन्न करने के लिए प्रमुख रूप से उत्तरदायी हैं । इसी से इलेक्ट्रॉन युग्मन के आधार पर अतिचालकता की सैद्धान्तिक व्याख्या की जा सकी ।

15.6 ऊर्जा अंतराल (Energy gap)

ऊष्मा धारिता की ताप पर निर्भरता से संकेत मिलते हैं कि अतिचालक पदार्थो में एक ऊर्जा अंतराल E_g पाया जाता है । ये ऊर्जा अंतराल कुचालकों के ऊर्जा अंतराल की प्रकृति से पूर्णतया भिन्न प्रकार का होता है । कुचालकों में ऊर्जा अंतराल जालक से सहबद्ध होता है जबकि एक अतिचालक में ऊर्जा अंतराल फर्मी तल से सहबद्ध रहता है । यह विश्वास किया जाता है कि ऊर्जा अंतराल अतिचालक अवस्था का एक विशिष्ट लक्षण है जो सभी अतिचालकों के ऊष्मीय गुणों और उच्चावृत्ति विद्युत-चुंबकीय अनुक्रियाओं को निर्धारित करता है । अतिचालकों में ऊर्जा अंतराल के अस्तित्व की पुष्टि विभिन्न प्रयोगों से भी की जा चुकी है तथा अतिचालकों में इस ऊर्जा अंतराल का उतना ही महत्व है जितना कि शून्य प्रतिरोधकता तथा माइसनर प्रभाव का है । अतिचालक पदार्थो में ऊर्जा अंतराल अतिचालक इलेक्ट्रॉन अवस्थाओं (जो इसके नीचे स्थित होती है) को सामान्य इलेक्ट्रॉन अवस्थाओं (जो इसके ऊपर स्थित होती हैं) से पृथक करती हैं । यह उल्लेखनीय हैं कि ताप में क्रांतिक ताप तक वृद्धि करने पर अतिचालकों का ऊर्जा अंतराल सतत रूप से घटता जाता है तथा क्रांतिक ताप पर शून्य हो जाता है । (अधिक परिशुद्ध रूप में पहले ऊर्जा अंतराल धीरे-धीरे तत्पश्चात् अतिप्रवण रूप में तथा अंत में प्रपातीय रूप में (चित्र 15.10(c)) घटता है । इसके विपरीत कुचालकों में ऊर्जा अंतराल पूरित संयोजक बैड को रिक्त चालक बैंड से पृथक करता है और प्राय: ताप पर निर्भर करता है । चित्र 15.11(b) में ऊर्जा अंतराल को प्रदर्शित किया गया है ।



(a) सामान्य धातु (b) अतिचालक (c) ताप के साथ ऊर्जा अंतराल परिवर्तन

चित्र 15.10

ऊर्जा अंतराल का मान सैद्धान्तिक रूप में निम्न सूत्र से दिया जाता है

$$E_g = 2\Delta \qquad ...(15.12)$$

Δ को सामान्यतया ऊर्जा अंतराल प्राचल कहते हैं ।

उदाहरण के लिए गैलियम के लिए

$$E_g = 2 \times 1.4 k_B T$$

$$E_g = 2.8 k_B T$$

10^{-4} eV

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

6. पदार्थ के अतिचालकीय अवस्था में प्रवेश करने पर एन्ट्रॉपी तथा ऊष्मा चालकता पर क्या प्रभाव होता है?

----

7. अतिचालकों में बैंड अंतराल लगभग किस कोटि का होता है? यह किस ताप पर उत्पन्न होता है तथा क्यों उत्पन्न होता है?

----

8. पारे का समस्थानिक द्रव्यमान बढ़ाने पर उसके क्रांतिक ताप पर क्या प्रभाव होगा?

उदाहरण 15.2 पारे का औसत परमाणु द्रव्यमान 200.59 a.m.u. तथा क्रांतिक ताप 4.153 K है। पारे के एक समस्थानिक जिसका परमाणु द्रव्यमान 204 है का क्रांतिक ताप क्या होगा?

हल : हम जानते हैं कि अतिचालक का क्रांतिक ताप (10) उसके समस्थानिक द्रव्यमान से इस प्रकार संबन्धित होता है

$$T_c \propto \frac{1}{\sqrt{M}}$$

अतः $$\frac{T_{c_2}}{T_{c_1}} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}$$

अतः $$T_{c_2} = T_{c_1}\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}$$

दिया गया है कि M_1 = 200.59, T_{c_1} =4.153K, M_2 = 204

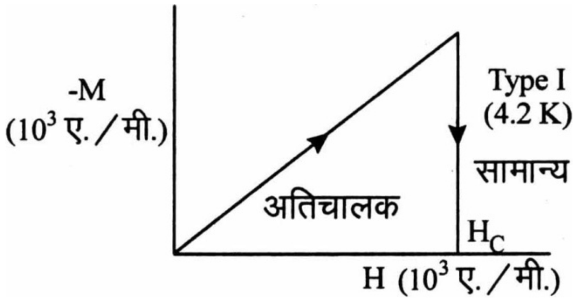
अतः $T_{c_2} = 4.153\sqrt{200.59/204}$ =4.118 K

15.7 अतिचालकों का वर्गीकरण (Classification of superconductors)

बाह्य चुंबकीय क्षेत्र लगाने पर अतिचालकों द्वारा दर्शाये गये प्रतिचुंबकन व्यवहार (माइसनर प्रभाव) के आधार पर इनको दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता है ।

(i) वर्ग I के अतिचालक या कोमल अतिचालक (Type I or superconductors) :

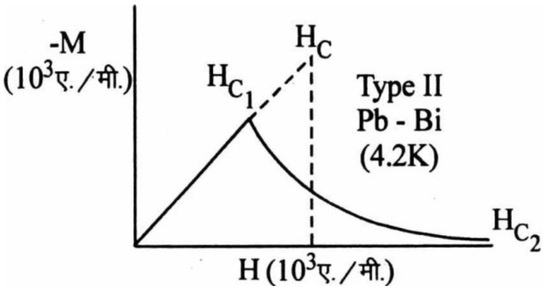
इस श्रेणी में वे अतिचालक पदार्थ आते हैं जो माइसनर प्रभाव का दृढ़ता से पालन करते हैं । लैड इस श्रेणी में आता है जिसका व्यवहार चित्र 15.12 में दर्शाया गया है । ये पदार्थ एक निश्चित चुंबकीय क्षेत्र (H_c) से नीचे पूर्ण प्रति चुंबकन दर्शाते हैं । इस क्षेत्र को क्रांतिक क्षेत्र कहा जाता है । इसका मान अधिकांश पदार्थो के लिए 0.1 टेसला आता है । यदि H_c से अधिक क्षेत्र आरोपित किया जाये तो क्षेत्र पदार्थ में पूरी तरह प्रविष्ट हो जाता है तथा पदार्थ अपनी सामान्य अवस्था में लौट आता है । चूंकि ये पदार्थ काफी कम तीव्रता के चुंबकीय क्षेत्रों में अतिचालकता का गुण खो देते हैं अत: इनको "कोमल अतिचालक" कहा जाता है । यह देखा जाता है कि अधिकांश धातुओं के तत्व जो अतिचालकता दर्शाते हैं इसी श्रेणी में आते हैं । क्रांतिक चुंबकीय क्षेत्रों का मान काफी कम होने से इनका अधिक लाभदायक तकनीकी उपयोग संभव नहीं होता ।



चित्र 15.12

(ii) वर्ग II के अतिचालक या कठोर अतिचालक (Type II or hard superconductors)

इस श्रेणी में वे अतिचालक आते हैं जो माइसनर प्रभाव का दृढ़ता से पालन नहीं करते हैं । Pb -Bi मिश्र धातु इसका उदाहरण है जिसे चित्र 15.13 में दर्शाया गया है ।



चित्र 15.13

इन अतिचालकों में प्रयुक्त बाह्य चुंबकीय क्षेत्र H_c मान से नीचे पूर्ण प्रतिचुंबकत्व व्यवहार देखा जाता है । अत: इस परास में चुंबकीय अभिवाह का पूर्ण बहिष्करण हो जाता है ।

H_{c_1} को निम्न क्रांतिक क्षेत्र कहते हैं । H_{c_1} के ऊपर अभिवाह अतिचालक में बेधन प्रारम्भ कर देता है । इसमें तब तक वृद्धि होती रहती है जब तक क्षेत्र का मान H_{c_2} को प्राप्त नहीं कर लेता है । H_{c_2} पर चुंबकन पूर्णतया नष्ट हो जाता है तथा पदार्थ सामान्य अवस्था में लौट आता है । H_{c_2} को ऊपरी क्रांतिक क्षेत्र कहते हैं । इस वर्ग के अतिचालक या तो मिश्र धातुऐं होती हैं या संक्रमण धातुऐं जिनकी विद्युत प्रतिरोधकता सामान्य अवस्था में बहुत अधिक होती है । वर्ग I के अतिचालकों की तुलना में वर्ग II के अतिचालक तकनीकी दृष्टि से काफी उपयोगी होते हैं क्योंकि इनके लिए H_{c_2} का मान अपेक्षाकृत काफी अधिक होता है । उदाहरण के लिए नये सिरेमिक कापर आक्साइड अतिचालक प्रतिरूपों का प्त0 का मान लगभग 150 टेसला होता है । H_{c_1} तथा H_{c_2} के नीचे पदार्थ का प्रतिचुंबकीय व्यवहार धीरे-धीरे समाप्त होता है तथा माइसनर प्रभाव का दृढ़ता से पालन नहीं होता है । इस अवस्था में अतिचालक पदार्थ एक मध्यवर्ती या वार्टक्स (vortex) अवस्था में कहा जाता है । दूसरे शब्दों में पदार्थ सामान्य तथा अतिचालक क्षेत्रों के जटिल मिश्रण के रूप में उपलब्ध होता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

9. वर्ग II के अतिचालकों में क्रांतिक चुंबकीय क्षेत्र किस प्रकार परिभाषित होता?

----

10. तकनीकी उपयोगों की दृष्टि से किस प्रकार के अतिचालक अधिक उपयोगी हैं, वर्ग I अथवा वर्ग II के तथा क्यों?

15.8 अतिचालकों के उपयोग (Applications of Super conductors)

अब अतिचालकता मात्र सैद्धान्तिक रूचि का ही विषय नहीं रहा बल्कि अतिचालकों का उपयोग अनेक महत्वपूर्ण युक्तियों जैसे कि विद्युत चुंबक, परिकलन यंत्रों के तत्वों, विद्युत उत्पादन, अतिचालक ऊष्मा वाल्व इत्यादि में होने लगा है । निम्न तापी इलेक्ट्रॉनिकी में इनका महत्व और भी अधिक है । इसके अतिरिक्त इनका उपयोग विद्युत-चुंबकीय परिरक्षक (shield) तथा चुंबकीय उच्छलन (levitation) ट्रेनों में भी किया जाने लगा है । अतिचालकीय चुंबकों का उपयोग NMR स्पेक्ट्रोमीटरों तथा NMR प्रतिरूपण (imaging) में भी किया जाता है जो चिकित्सकीय निदानों (diagnosis) में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है । अतिचालक क्यांटम प्रभावों के सिद्धांत पर SQUID's (superconducting Quantum Interference Devices) बनाये गये हैं जो अति अल्प चुंबकीय क्षेत्र ($10^{-4}Am^{-1}1$) की पहचान काफी दक्षता व यथार्थता से कर सकते हैं । पारम्परिक अतिचालकों में द्रव हीलियम का प्रयोग किया जाता था जो काफी

खर्चीला था । उच्च ताप सिरेमिक आक्साइड अतिचालकों की खोज के पश्चात् जिनका क्रांतिक ताप द्रव नाइट्रोजन के क्वथनांक 77K से ऊपर है, में यह लाभ है कि इनमें द्रव नाइट्रोजन शीतलक के रूप में प्रयोग किया जाता है जिससे कीमत काफी कम तथा रख रखाव काफी आसान हो जाता है । इसके अतिरिक्त द्रव नाइट्रोजन की ऊष्मा धारिता हीलियम की तुलना में काफी अधिक होती है । परन्तु इन उच्च ताप अतिचालकों का धारा घनत्व कम होने के कारण एवम् इनकी सिरेमिक प्रकृति के कारण इनका प्रयोग सीमित क्षेत्रों में ही किया जा सकता है ।

इनका प्रयोग द्रव नाइट्रोजन शीतलित मोटरों तथा जनरेटरों में किया जाता है जो निम्न धारा व निम्न क्षेत्रों पर कार्य करते हैं । इनसे बने SQUID's का चिकित्सकीय निदानों (diagnosis), समुद्रों के अंदर संचार प्रणाली, पनडुब्बी संसूचन (detection) तथा भूगर्भ भौतिकी में उपयोग किया जा रहा है । स्पष्ट है कि कमरे के ताप पर अधिक धारा घनत्व वाले अतिचालकों की खोज संभव हुई तो अतिचालकता मानव व पर्यावरण के लिए वरदान साबित होगी । ऊर्जा इस विश्व के सामने आज सबसे बड़ी चुनौती है लेकिन उत्पन्न की गई ऊर्जा का काफी भाग शक्ति संचरण में जूल ऊष्मा के रूप में नष्ट हो जाता है । अतिचालकों के प्रयोगों से इस क्षेत्र में सबसे महत्वाकांक्षी उपयोग होंगे क्योंकि इनमें धारा बिना हास के बहती है । प्रत्यावर्ती धारा संचरण के लिए इनके उपयोग पर प्रयोग हो रहे हैं ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

11. अतिचालकों के 5 प्रमुख उपयोग लिखिये ।

    ----

12. उच्च ताप अतिचालकों के आर्थिक क्रांतिक ताप के बाद भी इनके तकनीकी उपयोगों में क्या परेशानियाँ है।

15.9 सारांश (Summary)

- निम्न तापों पर कई धातुओं, यौगिकों, अर्धचालकों तथा अचालकों का वैद्यत प्रतिरोध एकाएक शून्य हो जाता है । सन् 1911 में केमरलिंग ऑन्स द्वारा इस घटना की खोज की गई जिसे "अतिचालकता' नाम दिया गया ।
- वह ताप जिस पर पदार्थ सामान्य अवस्था से अतिचालक अवस्था में प्रवेश करता है, क्रांतिक ताप (T_c) कहलाता है । अब तक सबसे उच्च क्रांतिक ताप जिस पर अतिचालकता पाई गई है 160K के आसपास है जो सिरेमिक आक्साइडों में प्राप्त हुआ है ।
- क्रांतिक ताप पर अतिचालकों का दिष्ट धारा वैद्युत प्रतिरोध ही शून्य नहीं होता परन्तु इनके अनेक गुणों में भी एकाएक परिवर्तन हो जाते हैं जैसे कि ऊष्माचालकता, विशिष्ट ऊष्मा), एन्ट्रॉपी, चुंबकीय गुण आदि ।

- जब पदार्थ अतिचालक अवस्था में प्रवेश करता है तो आरोपित चुंबकीय क्षेत्र को बाहर की ओर धकेल देता है, इस गुण को पूर्ण प्रतिचुंबकत्व या 'माइसनर प्रभाव' कहते हैं । अत: इस अवस्था में इनकी चुंबकीय प्रवृत्ति (χ) का मान -1 होता है ।
- अतिचालकों को तीव्रचुंबकीय क्षेत्र में रखने पर इनकी अतिचालक अवस्था समाप्त हो जाती है एवम् पदार्थ सामान्य अवस्था में लौट आता है.। चुंबकीय क्षेत्र के उस मान को जिस पर अतिचालकता समाप्त हो जाती है चुंबकीय क्षेत्र का क्रांतिक मान (H_c) कहते हैं, इसका मान निम्न है ।

$$H_c = H_c(0)\left[1-\frac{T^2}{T_c{}^2}\right]$$

$H_c(0)$, 0K पर क्रांतिक क्षेत्र है ।

- प्रयोगों द्वारा प्रदर्शित किया जा चुका है कि अतिचालक अवस्था में क्रांतिक ताप समस्थानिक के द्रव्यमान के साथ $M^{0.5}T_c$ = नियतांक सूत्र के अनुसार परिवर्तित होता है । 'समस्थानिक प्रभाव' कहते हैं ।
- बाहरी चुंबकीय क्षेत्र लगाने पर अतिचालकों द्वारा दर्शाये गये प्रतिचुंबकन (माइसनर प्रभाव) के आधार पर इनको वर्ग I तथा वर्ग II प्रकार के दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता है । वर्ग I के अतिचालक कोमल तथा वर्ग II के अतिचालक कठोर अतिचालक कहलाते हैं । वर्ग II के अतिचालक तकनीकी उपयोगों की दृष्टि से अधिक महत्वपूर्ण होते हैं ।
- अब अतिचालकता केवल सैद्धान्तिक रूचि का विषय ही नहीं रहा बल्कि इनके विद्युत चुंबक, विद्युत् संचरण, स्किविड (SQUID), चिकित्सकीय तकनीकों में उपयोग होने लगा है । थदि कमरे के ताप पर' अतिचालकता ही खोज संभव हुई तो यह मानव के लिये वरदान सिद्ध होगी ।

15.10 शब्दावली (Glossary)

अतिचालकता	superconductivity
कठोर अतिचालक	Hard superconductivity
मृदु अतिचालक	soft superconductivity
माइसनर प्रभाव	Meissner effect
प्रति चुम्बकन	Diamegnetism
समस्थानिक प्रभाव	Isotope effect

15.11 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

C Kittle	Introduction to solid state Physics5th Edition	Wiley Easteren Ltd. New Delhi
R.K. Puri, V. K.	Solid State Physics	S. Chand & Co.

Babbar		New Delhi
M.A. Wahab	Solid State Physics Structure and Properties of Materials	Narosa Publishing House, New Delhi
S.O. Pillai	Solid State Physics	New age International Publishers Delhi
श्यामलाल काकानी	अतिचालकता	राजस्थान हिंदी ग्रंथ अकादमी, जयपुर

15.12 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to self assessment questions)

1. चालकों में ताप घटाने पर प्रतिरोधकता धीरे-धीरे घटती है तथा 0K पर शून्य हो जाती है जबकि अतिचालक अवस्था में प्रतिरोधकता एक निश्चित ताप (T_c) पर एकाएक शून्य हो जाती है।
2. परम्परागत अतिचालकों का अधिकतम क्रांतिक ताप 23 k था जिसके लिए द्रव हीलियम की आवश्यकता होती थी जिसकी कीमत बहुत अधिक तथा रखरखाव जटिल होता है । सिरेमिक पदार्थो में क्रांतिक ताप द्रव नाइट्रोजन के क्वथनांक (77K) से अधिक था जो अपेक्षाकृत सस्ता व कई उत्तम गुणों वाला होता है । इनका अधिकतम क्रांतिक ताप 160K है । इन पदार्थो में कमरे के ताप पर अतिचालकता मिलने की संभावनाओं से इस क्षेत्र में एक क्रांति सी आ गई ।
3. शून्य दिष्ट वैद्युत प्रतिरोध तथा माइसनर प्रभाव ।
4. $T = T_c$ पर H_c का मान शून्य होता है । ताप घटाने पर H_c का मान बढ़ने लगता है। (परवलयाकार रूप में) तथा T = 0K पर इसका मान $H_c(0)$ पहुंच जाता है ।
5. बेधन गहराई का मान काफी कम ($10^{4}\ \mathring{A}$) के आसपास होता है । बेधन गहराई अतिचालकों के अंदर उस दूरी को कहते है जिस पर चुंबकीय क्षेत्र का मान पृष्ठ मान का ~37% रह जाता है ।
6. एन्ट्रॉपी तथा ऊष्मा चालकता दोनों के मान सामान्य अवस्था से कम हो जाते हैं ।
7. बैंड अंतराल 10^{-4} eV कोटि का पाया गया है । सामान्य अवस्था के मुक्त इलेक्ट्रॉनों की तुलना में

अतिचालक अवस्था के इलेक्ट्रान युग्मित हो जाते हैं । अत: इन अतिचालक पदार्थो में एक ऊर्जा अंतराल उत्पन्न हो जाता है जो इस युग्मित अवस्था के इलेक्ट्रॉनों को सामान्य अवस्था पृथक करता है, प्रयोगों से इसकी पुष्टि हो चुकी है ।

8. समस्थानिक द्रव्यमान बढ़ाने पर क्रांतिक ताप का मान घटने लगेगा, क्योंकि $T_c \propto \frac{1}{\sqrt{M}}$
9. वर्ग II के अतिचालक माइसनर प्रभाव का दृढ़ता से पालन नहीं करते । एक निश्चित बाह्य चुंबकीय क्षेत्र H_{c_1} से नीचे ये पदार्थ पूर्णप्रतिचुंबकत्व दर्शाते हैं । H_{c_1} से ऊपर चुंबकीय पदार्थ में बेधन प्रारम्भ कर देता है तथा एक निश्चित मान H_{c_2} पर पदार्थ सामान्य अवस्था में लौट आता है ।
10. वर्ग II के अतिचालको के लिए ऊपरी क्रांतिक क्षेत्र H_{c_2}, का मान काफी अधिक होता है जो इनको तकनीकी उपयोगों की दृष्टि से उपयोगी बनाता है ।
11. NMR तकनीक, SQUID, अतितीव्र गामी ट्रेनें, चुंबकीय परिरक्षण, विद्युत-संचरण ।
12. उच्च ताप अतिचालकों का धारा घनत्व काफी कम तथा भंगुर प्रकृति सबसे बडी समस्याऐं हैं ।

15.13 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type question)

1. अचालकों तथा अतिचालकों के बैंड अंतरालों में क्या अंतर है?
2. अतिचालक पदार्थो के प्रमुख चिकित्सकीय तथा औद्योगिक उपयोग लिखिये । ।
3. पदार्थ की सामान्य अवस्था अधिक व्यवस्थित है अथवा उसकी अतिचालक अवस्था स्पष्ट कीजिये।
4. अतिचालकता की खोजों से सम्बन्धित दो सर्वाधिक प्रमुख वर्षो का उल्लेख कीजिये ।
5. क्रांतिक ताप पर अतिचालक पदार्थो के किन गुणों में एकाएक परिवर्तन होते हैं?

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type question)

6. अतिचालकता क्या है? माइसनर प्रभाव को समझाइये । अतिचालकों के प्रमुख उपयोगों पर प्रकाश डालिये ।
7. क्रांतिक चुंबकीय क्षेत्र क्या है? इसके आधार पर अतिचालकों का वर्गीकरण समझाइए ।
8. अतिचालक संक्रमण से सम्बद्ध ऊष्मागतिक परिवर्तनों पर प्रकाश डालिये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

9. लैड का क्रांतिक ताप 7.26 K है । यदि शून्य परम ताप पर क्रांतिक क्षेत्र का मान 8 x 10^5 A/m है। तो 5K ताप पर इसके लिए क्षेत्र की गणना कीजिये ।

(**उत्तर** : 4.2 x 10^5A/m.)

10. एक अतिचालक के पृष्ठ पर चुंबकीय क्षेत्र का मान 200 A/m है । यदि पदार्थ की बेधन गहराई का मान 5 x 10^4 $\mathring{A}$ हो तो पदार्थ के अंदर $10^5 \mathring{A}$ की गहराई पर स्थित चुंबकीय क्षेत्र का परिकलन कीजिये ।

(**उत्तर :** 27.7 A/m)

11. एक अतिचालक के समस्थानिक द्रव्यमान में 4% वृद्धि होने पर उसके क्रांतिक ताप में कितनी कमी आयेगी?

(**उत्तर :** 2% कमी)

12. पारे का समस्थानिक द्रव्यमान 199.5 a..m.u.होने पर इसका क्रांतिक ताप 4.185K देखा गया । यदि इसका समस्थानिक द्रव्यमान 203.4 a..m.u. कर दिया जाये तो इसका क्रांतिक ताप कितना होगा ।

(**उत्तर :** 4.139 K)

ISBN - 13/978-81-8496-126-3