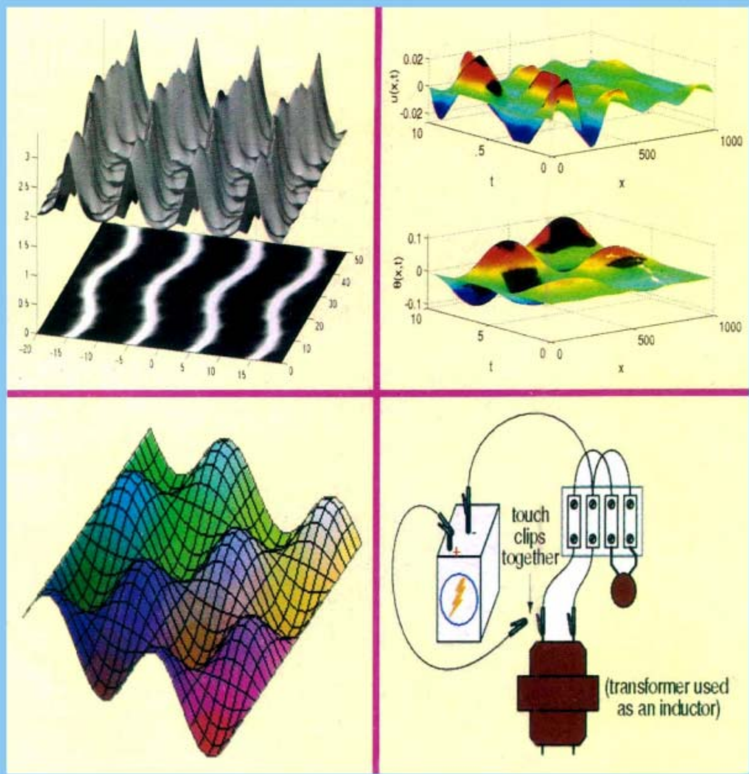
PH-02

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा



दोलन एवं तरंगें

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालया, कोटा PH-02

भौतिक विज्ञान

दोलन एवं तरंगे

इकाई सं	इकाई	पृष्ठ सं
1	दोलन - I	6
2	दोलन - II	24
3	आवर्त दोलनों का अद्यारोपण - I	42
4	आवर्त दोलनों का अद्यारोपण - II	54
5	अवमंदित दोलन - I	68
6	अवमंदित दोलन - II	80
7	प्रणोदित आवर्ती दोलन	105
8	अनुनाद	124
9	अनावर्ती दोलक	151
10	युग्मित दोलक - I	165
11	युग्मित दोलक - II	180
12	तरंगें	196
13	माध्यम में तरंग गति	216
14	विद्युत चुम्बकीय तरंगें	235
15	तरंग एवं समूह वेग	257

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

अध्यक्ष

प्रोफेसर (डॉ.) नरेश दाधीच
कुलपति
वर्धमान महावीर विश्वविद्यालय, कोटा

विषय समन्नवयक

प्रोफेसर एन. एस. सक्सेना
भौतिक विज्ञान विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

सदस्य सचिव / समन्वयक

डॉ. अशोक शर्मा
सह आचार्य, राजनीति विज्ञान
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

सदस्य

1. **प्रो. आर. के पाण्डेय,**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   वर्कतुल्ला विश्वविद्यालय, भोपाल
2. **प्रो. एम. हु सैन,**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   जामिया मिलिया इस्लामिया, नई दिल्ली
3. **प्रो. पी. प्रदीप,**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   राष्ट्रीय तकनीकी संस्थान, कालीकट
4. **डॉ. डी. सी. जैन,**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
5. **डॉ. के. बी. शर्मा,**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   एस. एस. जैन सुबोध (पी. जी) कॉलेज, जयपुर
6. **डॉ. आर. एन. शर्मा,**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   एम. एस. जे. कॉलेज, भरतपुर
7. **श्री. बी. एस. शर्मा,**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   राजकीय महाविद्यालय, कोटा
8. **श्री अनिल कुमार गुप्ता**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   डी. ए. वी. कॉलेज, अजमेर

सम्पादक एवं पाठ लेखन

सम्पादक

डॉ. आर. एन. शर्मा
भौतिक विज्ञान विभाग
एम. एस. जे. कॉलेज, भरतपुर

लेखक

1. प्रो. एन. एस. सक्सेना,
   भौतिक विज्ञान विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
2. डॉ. डी. सी. जैन,
   भौतिक विज्ञान विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
3. डॉ. रीटा शर्मा,
   भौतिक विज्ञान विभाग,
   एस. एस. जैन सुबोध (पी. जी) कॉलेज, जयपुर
4. श्री रोशन नेपालीय,
   भौतिक विज्ञान विभाग
   एस. एस. जैन सुबोध (पी. जी.) कॉलेज, जयपुर

पाठ्यक्रम निर्देशक एवं उत्पादन

निर्देशक (अकादमिक)

प्रोफेसर (डॉ.) अनाम जेटली
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

निदेशक (सामाग्री उत्पादन एवं वितरण)

प्रोफेसर (डॉ.) पी. के. शर्मा
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

उत्पादन-जुलाई, 2007

सर्वाधिकार सुरक्षित : इस सामाग्री के किसी भी एसएनएसएच के वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा के लिखित अनुमति के बिना किसी भी रूप में 'मिमियोग्राफी' (चक्रमुद्रण) के द्वारा या अन्यथा पुन: प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।

निदेशक (अकादमिक) द्वारा वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा के लिय मुद्रित एवं प्रकाशित।

आमुख

आपकी आध्ययन-सामाग्री भौतिकी के क्षेत्र के विद्यानों के एक टिम द्वारा विकसित के गई है। यह आपके स्वतंत्र आध्ययन में सहायता प्रदान करने के लिये दिया गया एक ढाँचा है। निम्नलिखित पर ध्यान देने से आप इस अध्ययन सामग्री का सर्वोतम लाभ ले सकेगें। इस पुस्तक को बी. एससी. पार्ट-I की भौतिक विज्ञान के पत्र-2 (PH-02), दोलन एवं तरंगें, के पाठ्यक्रम को ध्यान में रखकर तैयार किया गया है पुस्तक को कुल 5 खण्डों व 15 इकाइयों में विभक्त किया गया है तथा प्रत्येक खण्ड में पाठ्यक्रम के सार्थकता को ध्यान में रखकर 2, 3, व 4 इकाइयों आईए समावेशन किया गया है। प्रत्येक इकाई (पाठ) के प्रारम्भ में पाठ का शीर्षक हिन्दी एवं अग्रेंजी में दिया गया है। यह आपको पाठगत सामग्री के विषय में एक सामान्य विचार प्रदान करेगा। शीर्षक के पश्चत् प्रत्येक इकाई (पाठ) की रूपरेखा दी गई है जो की सम्पूर्ण पाठ का दर्पण है तथा पाठ में सम्मिलित सभी अनुच्छेदो का क्रमचार उल्लेख करती है। प्रत्येक इकाई के पाठ्य सामग्री को सरलतम् भाषा में सुगम एवं सुस्पष्ट रूप से लिखने का प्रयास किया गया है। प्रत्येक पाठ (इकाई) में एक अवधारणा (concept) पूर्ण होने के पश्चात कुछ बोध प्रश्न व हल किये गये उदाहरण दिये गये है। इनका उद्देश्य आपके द्वारा सीखिए गई अवधारणा को पुष्ट करना और समस्या हल करने की तकनीक सीखना है जो भौतिकी के अध्ययन का एक अनिवार्य अंग है।

प्रत्येक पाठ के अन्त में सारांश, शब्दावली, संदर्भ ग्रन्थ तथा अभ्यासार्थ प्रश्न दिये गए है।

हमें आशा है कि इस पुस्तक के अध्ययन सामग्री अपने उद्देश्य में सफल होगी तथा विद्यार्थियों के लिये उपयोगी सिद्ध होगी।

हम, अपने साथियों एवं विद्यार्थियों से यह अनुरोध करते है कि वे इस पुस्तक कि छपाई के त्रुटियों एवं अपने बहुमूल्य सुझावों से अवगत कराकर हमें अनुग्रहित करें जिससे पाठ्य-सामग्री को आपकी आशा के अनुरोध बनाया जा सके।

इकाई 1

दोलन-I
(Oscillations-I)

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य
1.1 प्रस्तावना
1.2 आवर्ती घटनाऐं
1.3 सरल आवर्त गति का वर्णन
1.4 सरल आवर्त गति के अभिलक्षण
1.5 गति का समीकरण
1.6 सामान्य हल
1.7 सरल आवर्त गति में कण का
 1.7.1 वेग एंव त्वरण
 1.7.2 उर्जा
 1.7.3 औसत स्थितिज एवं गतिज ऊर्जाएं
1.8 सारांश
1.9 शब्दावली
1.10 संदर्भ ग्रन्थ
1.11 बोध प्रश्नों के उत्तर
1.12 अभ्यासार्थ प्रश्न

1.0 उद्देश्य (Objectives)

आप इस इकाई को पढ्ने के बाद

- दोलन क्या है, यह जान सकेगें;
- तरंग गति के उदगम का बोध कर सकेगें;
- आदर्श दोलक की गति, जो कि सरल आवर्त गति होती है, की जानकारी प्राप्त कर सकेगें;
- सरल आवर्त गति के लिये आवश्यक शर्तो एवं इसके महत्व की जानकारी कर सकेगें;
- सरल आवर्त गति कर रहे कण के वेग एवं त्वरण समय के साथ किस प्रकार परिवर्तित होते है, जान सकेगें
- सरल आवर्त गति में उर्जा संरक्षण का अध्ययन कर इस गति में गतिज और स्थितिज उर्जा का विस्थापन और समय के साथ परिवर्तन को समझ सकेंगे।

1.1 प्रस्तावना (Introduction)

आपने अपनी प्रथम पुस्तक (पत्र-1)में विभिन्न प्रकार की गतियो के बारे में पढ़ा है, जैसे सरल रेखा में गति, प्रक्षेप्य गति (projectile motion)तथा वृताकार गति जो गति के पथ से निर्धारित होती है। परन्तु कुछ गतियाँ ऐसी भी है जो एक नियत कालान्तर बाद दुहराती है। उदाहरण के लिए घड़ी की सुइयों की गति, झुले तथा लोलक के गोलक की इधर-उधर की गति। दैनिक जीवन में घटित विभिन्न आवर्त घटनाओं का सबसे सरलीकृत रूप सरल आवर्त गति का अध्ययन इस इकाई में करेंगे। आप अनुच्छेद 1.2 में आवर्ती घटनाओं के बारे में सामान्य जानकारी प्राप्त करोगे। अनुच्छेद 1.3 में दोलन के बारे में पढेंगे। यहाँ यह भी समझने का अवसर मिलेगा कि किस प्रकार सरल आवर्त गति कर रहे कण के विस्थापन को, वृताकार गति कर रहे कण के सदिश त्रिज्य का व्यास पर प्रक्षेप के रूप में प्रदर्शित किया जाता है। अनुच्छेद 1.4 में सरल आवर्त गति के अभिलक्षणों के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे। आगामी अनुच्छेद 1.5 में सरल आवर्त गति कर रहे कण की अवकल समीकरण को व्युत्पन्न करना सीखोगे। अवकल समीकरण को दो अलग-अलग विधियों से हल किया गया है। यह आप अनुच्छेद 1.6 में पढेंगे। दूसरी विधि का उपयोग इकाई 5 व 7 में भी होगा। अन्तिम अनुच्छेद 1.7 में सरल आवर्त गति कर रहे कण या वस्तु के वेग, त्वरण एवं उर्जा के व्यजंक समय व विस्थापन के फलन के रूप में लिखना सीख सकोगे। विभिन्न प्रकार के अन्य दोलनों को आगामी इकाइयो में अध्ययन करोगे।

1.2 आवर्ती घटनाऐं (Periodic events)

दैनिक जीवन में आप कई ऐसी घटनाऐं देखते हैं जिनकी निश्चित समय बाद पुनरावृत्ति होती है। जैसे निश्चित समय बाद साइरन का बजना। समय के बढते क्रम में रविवार के दिन की हर 7 दिन बाद पुनरावृत्ति होती है। प्राकृतिक एवं कृत्रिम ऐसी कई घटनाऐं हैं जिनकी एक निश्चित समयान्तराल बाद पुनरावृत्ति होती है आवर्ती (periodic)घटनाऐं कहलाती हैं।

पिछली कक्षाओं में आपने कण या वस्तु की गति (motion)के बारे में पढ़ा होगा। वस्तु अथवा कण की स्थिति (position)समय के साथ निरन्तर बढे या घटे, तो यह कण की स्थानान्तरण गति कहलाती है। कुछ वस्तुऐं अथवा कण एक निश्चित पथ पर चलकर, एक निश्चित समय बाद अपने प्रारम्भिक बिन्दु पर आ जाते है, और इस प्रकार अनवरत गति करते रहते हैं। जैसे पृथ्वी का सूर्य का परिक्रमण (orbiting)करना, सेकण्ड की सूई का घड़ी में घूमना। पृथ्वी या सूई की यह गति घूर्णन (rotational)गति होते हुये भी आवर्त गति (periodic motion)है क्योंकि इनके परिक्रमण समय क्रमश: 364¼ दिन व 60 सेकण्ड हैं।

अब आपका ध्यान ऐसी घटना की ओर आकर्षित करते हैं जिसमें वस्तु पूरा गोल चक्कर लगाने के स्थान पर अपनी विरामावस्था (equilibrium position)के ईद-गिर्द दोनों तरफ एक निश्चित दूरी तक निश्चित पथ पर गति करती है। जैसे - व्यक्ति की चलने से पहले भुजाऐं उर्ध्वाधर स्थिर रहती है, जो चलने पर मध्यमान स्थिति के सापेक्ष गतिमान हो जाती है; दिल की

धड़कन के उदाहरण में दिल अपनी माध्यावस्था के सापेक्ष सिकुड़ता और फैलता है; स्वरित्र के उदाहरण में, इसकी भुजाऐं सामान्य स्थिति में स्थिर रहती है जो बल लगाने पर सामान्य स्थिति के सापेक्ष दोनों तरफ गति करने लगती हैं। इस प्रकार की गति को दोलनी (oscillatory)गति कहते है। कण या वस्तु का विरामावस्था के सापेक्ष दाँयी तरफ गति कर, पुन: बाँयी तरफ लौटना और बाँयी तरफ के अन्तिम छोर से पुन दाँयी तरफ गति करते विरामावस्था से गुजरना वस्तु या कण का दोलन (oscillation)कहलाता है। एक दोलन की समाप्ति पर दूसरा दोलन, फिर तीसरा, और यह क्रम चलता रहता है। वस्तुओं या कणों की इस दोलन गति को आवर्त गति (harmonic motion)कहते है।

अब हम कुछ अन्य उदाहरणों का उल्लेख करेंगे, जिन्हें आप आगामी कक्षाओं में पढ़ेंगे, जैसे ठोसों में परमाणुओं के कम्पन (vibration), विकिरत (radiating)या ग्राही (receiving)ऐन्टिना में इलेक्ट्रोनों के दोलन, दृश्य प्रकाश में चुम्बकीय और विद्युतीय क्षेत्रों के कम्पन इत्यादि।

कण के दोलन के कारण माध्यम में एक विक्षोभ (disturbance)उत्पन्न होता है और यह विक्षोभ माध्यम में वेग विशेष से गति करने लगता है। यदि दोलन लगातार हो रहे हों तो विक्षोभ भी निरन्तर उत्पन्न होकर गमन करता रहेगा। इसे ही माध्यम में विक्षोभ का संचरण (propogation)अथवा तंरग (wave)गति कहते हैं। इस सम्बन्ध में विस्तृत जानकारी आपको इकाई 12 में मिलेगी।

विभिन्न दोलनी गतियों (जो आप आगे पढेगें)में सरल आवर्त गति (simple harmonic motion)का विशिष्ट स्थान है, क्योंकि:-

1. सभी भौतिक तंत्रों में दोलन सरल आवर्त होते हैं अथवा इसके निकट होते हैं;

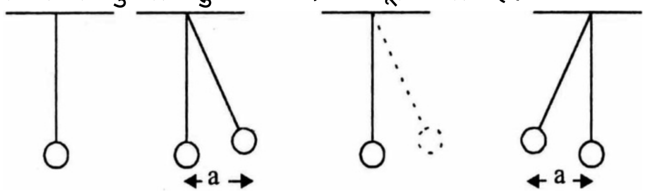
2. जटिल दोलनों (complex oscillations)को सरल आवर्त दोलनों द्वारा समझाया जा सकता है;

3. तरंग गति को समझने या समझाने के लिये इसका ज्ञान आवश्यक है। अगले अनुच्छेद 1.3 में आप सरल आवर्त गति के बारे में विस्तार से पढ़ेंगे।

1.3 सरल आवर्त गति का वर्णन (Description of simple harmonic motion)

सरल आवर्त गति दोलन तंत्र की प्रत्यास्थता (elastisity)और जडत्व (inertia)जैसे गुणों पर आधारित है। इसे समझने के लिये एक गोलक (bob)का उदाहरण लेते है जो एक द्रव्यमान रहित डोरी से लटका हुआ है। चित्र 1.1(a)में इसे साम्यावस्था (विरामावस्था)में दिखाया गया है। लोलक पर कार्य कर (बल प्रदान कर)इसे एक अन्य स्थिति $x = a$ पर लाया जाता है, चित्र 1.1(b)। इस स्थिति में लोलक की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि हो जाती है। जैसे ही लोलक को इस स्थिति ($x = a$)से छोड़ा जाता है, यह प्रत्यानयन बल के कारण अपनी न्यूनतम उर्जा की स्थिति ($x = 0$)की ओर अग्रसित होने लगता है। प्रत्यानयन बल उचित मात्रा में ऋणात्मक वेग प्रदान करता है। साम्यावस्था की स्थिति ($x = 0$)पर पहुँचने पर लोलक का वेग अधिकतम हो

जाता है और गति के जडत्व के कारण इस स्थिति पर रूकने में असमर्थ रहता है, चित्र 1.1 (c)। परिणामस्वरूप, लोलक बाँयी और अग्रसित होने लगता है। इस स्थिति में लोलक पर लगने वाला प्रत्यानयन बल धनात्मक होकर इसकी गति के जडत्व का विरोध करता है, जिसके कारण अन्ततः वेग घटकर शून्य हो जाता है। अब तक लोलक बाँयी दिशा में विस्थापन a तय कर चुका होता है चित्र 1.1(d)। इस समय तंत्र की उर्जा पुनः वह ही हो जाती है जो लोलक को प्रारम्भ में a दूरी से विस्थापित करने में दी गयी थी (यह तब ही संभव है जब लोलक की स्थिति +a से -a के बीच गति में किसी प्रकार की उर्जा हानि न हों)। लोलक, स्थिति -a से +a तक पुनः उसी प्रकार गति करता हुआ माध्य स्थिति से गुजरता हुआ एक दोलन पूरा करता है।

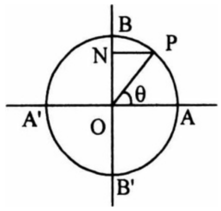


चित्र 1.1

यदि इस एक दोलन में किसी प्रकार की ऊर्जा हानि न हो तो लोलक सदैव एक नियत आयाम से दोलन करता रहेगा। इस प्रकार के दोलन को स्वतन्त्र दोलन कहते हैं और यह इसकी आदर्श अवस्था है।

उपरोक्त विश्लेषण से आपको यह ज्ञात हुआ कि प्रत्यास्थता और गति का जड़त्व जैसे गुण लोलक की दोलनी गति के लिये किस प्रकार आवश्यक है। लोलक की यह गति सरल आवर्त गति कहलाती है। साम्यावस्था कें सापेक्ष लोलक की किसी क्षण स्थिति को x(t)या x से प्रदर्शित करते है। उपरोक्त विवरण में आपने यह भी देखा कि अधिकतम विस्थापन a है, इस अधिकतम विस्थापन को लोलक का आयाम (amplitude)कहते हैं। एक दोलन में जितना समय लगता है, उसको लोलक का दोलन काल या आर्वत काल (time period)कहते हैं। एक सेकण्ड में सम्पन्न दोलनों की संख्या लोलक की आवृत्ति (frequency)कहलाती है।

सरल आर्वत गति को, एक समान वेग से वृत्ताकार पथ पर गति कर रहे कण का, उसके व्यास पर प्रक्षेप (projection)के रूप में भी प्रदर्शित किया जा सकता हैं। मान लीजिये कि कोई कण P, समान चाल v से a त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर गति करता है। चित्र 1.2 देखें। P से एक लम्ब PN, व्यास BOB’ पर डाला जाता है। अब आप N की गति पर विचार करें, जब कण P वामावर्त (anticlockwise)दिशा में A से प्रारम्भ होकर वृत्ताकार पथ पर गति करता है। जब बिन्दु P, A पर होता है तब N की स्थिति O पर है, जब कण P, B पर पहुँचता है तब N भी OB के अनुदिश चलकर B से सम्पाती हो जाता है। इसी प्रकार, जब कण P परिधि पर गति कर B से B' पर पहुँचता है, बिन्दु N भी व्यास BB' के अनुदिश चलकर B' पर पहुँच जाता है। अन्त में, कण P के B' से A पर पहुँचने पर, N भी व्यास के अनुदिश चलकर B' से प्रारम्मिक बिन्दु O पर पहुँच जाता है।



चित्र

उपरोक्त विवरण से आपको स्पष्ट हो गया होगा कि जब कण P वृत्ताकार पथ पर A से चलकर एक पूर्ण चक्कर लगाता है, उसी समय बिन्दु N, O से प्रारम्भ होकर व्यास BB' के अनुदिश दो बार गति कर पुन: O पर पहुँच जाता है। बिन्दु N की O के सापेक्ष यह गति N की सरल आवर्त गति है।

एक दोलन काल के समय में कण P का व्यास BB' पर प्रक्षेप, ON का मान ज्ञात करते है। माना कि किसी समय t पर घूर्णन सदिश OP, रेखा OA के साथ θ कोण बनाती है। अत: प्रक्षेप ON जिसे बिन्दु N का O के सापेक्ष विस्थापन y लिखें तो

$$y = a\sin\theta \qquad ...(1.1)$$

यदि कण का कोणीय वेग ω हो तो, $\theta = \omega t$

अत: $$y = a\sin\omega t \qquad ...(1.2)$$

स्पष्ट है कि यहाँ a, N का आयाम है। समी. (1.2)N बिन्दु के विस्थापन की समय पर निर्भरता को प्रदर्शित करती है।

यदि t=0 समय पर कण A पर न होकर किसी अन्य बिन्दु पर होता तब समय t पर कोण का मान $\omega t \pm \phi$ होता और विस्थापन

$$y = \sin(\omega t \pm \phi) \qquad ...(1.3)$$

+ चिन्ह तब प्रयुक्त होगा जब प्रारम्भ में बिन्दु P, A से आगे हो तथा - चिन्ह, जब A के पीछे हो। कोण ϕ जिसका मापन OA रेखा के सापेक्ष किया जाता है, कण की प्रारम्भिक कला (phase)के रूप में जाना जाता है।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

1. आवर्तकाल और आवृत्ति में क्या संबंध है?

1.4 सरल आवर्त गति के अभिलक्षण (Characteristies of simple harmonic motion)

अब आप सरल आवर्त गति के लिये आवश्यक शर्ते एवं अभिलक्षणों के बारे में जानकारी करेंगे। ये निम्न है :-

(i) सरल आवर्त गति करते हुए कण की गति आवर्ती होती है।

(ii) सरल आवर्त गति कर रहे कण का त्वरण अथवा बल इसके विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है।

त्वरण $\propto$ विस्थापन

(iii) सरल आवर्त गति कर रहे कण के त्वरण या बल की दिशा सदैव ही साम्यावस्था के बिन्दु की तरफ होती है।

(iv) सरल आवर्त गति में आयाम का मान +a या -a होता है, जो समय के साथ नही बदलता है।

(v) सरल आवर्त गति कर रहे कण का आवर्तकाल, वह न्यूनतम समय है, जिसके बाद कण अपनी पूर्व स्थिति में आ जाता है।

यदि समी. (1.3)में समय t से बढकर $t' = \left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$ हो जावें तो विस्थापन का मान

$$\begin{aligned} y(t') &= a\sin\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi\right] \\ &= a\sin\left[2\pi + \omega t + \phi\right] \\ &= a\sin\left[\omega t + \phi\right] \\ &= y(t) \end{aligned}$$

अर्थात $\frac{2\pi}{\omega}$ वह समय है जब कण अपनी पूर्व स्थिति में आ जाता है। अत: कण का आवर्तकाल

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{...(1.4)}$$

T का मान भी नियत रहता है। यहाँ ω को सरल आवर्त गति की कोणीय आवृत्ति कहते है।

(vi) समी. (1.3)में $\omega t + \phi$ को गति की कला कहते हैं। नियतांक ϕ को प्रारम्भिक कला या कला नियतांक कहते है। किसी भी क्षण, दोलनी तंत्र की कला हमें इस बात से अवगत कराती है कि उस समय इसकी स्थिति और गति की दिशा क्या हैं? नियतांक ϕ इस बात का ज्ञान कराता है कि समय $t = 0$ पर कण साम्यावस्था के सापेक्ष कहाँ पर स्थित है।

1.5 गति का समीकरण (Equation of motion)

सरल आवर्त गति की परिभाषानुसार, कण पर लगने वाले प्रत्यानयन (restoring)बल F को निम्न रूप में लिखा जा सकता है;

$$F = -ky \qquad \text{...(1.5)}$$

यहाँ y, कण का विस्थापन है तथा k एक बल नियतांक है जिसका मान दोलक (oscillator)के प्रत्यास्थता गुण पर निर्भर करता है। स्वाभाविक है, कि इस k का मान अलग अलग दोलक के लिये भिन्न भिन्न होगा। उपरोक्त समी. (1.5)से आप देख सकते हैं कि इसकी इकाई न्यूटन / मीटर है।

आप न्यूटन के द्वितीय नियम से जानते हैं कि द्रव्यमान m वाली वस्तु पर लग रहे बल F के कारण इसमें त्वरण f उत्पन्न हो जावे तो इन राशियों को निम्न संबंध से लिखा जाता है।

$$F = mf$$

$$F = m\frac{d^2y}{dt^2} \quad \text{...(1.6)}$$

त्वरण $f = \frac{dv}{dt}$

वेग $v = \frac{dy}{dt}$

अंतत्वरण : $f = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)$

d^2y

समी. (1.6)का मान समी. (1.5)में प्रतिस्थापित करने पर

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0 \quad \text{...(1.7)}$$

यह सरल आवर्त गति की अवकल समीकरण है।

अनुच्छेद 1.3 में समी. (1.3)द्वारा सरल आवर्त गति को प्रदर्शित किया गया था, अत: यह समी. (1.7)का हल होना चाहिए।

$y = a\sin\omega t$

$\frac{dy}{dt} = a\omega\cos\omega t$

$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 a\sin\omega t$

$= -\omega^2 y$

समी. (1.3)को t के सापेक्ष दो बार अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y \quad \text{...(1.8)}$$

समी. (1.8)से $\frac{d^2y}{dt^2}$ का मान समी. (1.7)में रखने पर

$$-\omega^2 y + \frac{k}{m}y$$

या $\omega^2 = \frac{k}{m}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{...(1.9)}$$

समी. (1.9)से, समी. (1.7)को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad \text{...(1.10)}$$

यह सरल आवर्त गति की अवकल समीकरण है।

1.6 अवकल समीकरण का सामान्य हल (General solution of differential equation

अनुच्छेद 1.3 में हमने पढ़ा कि कण की सरल आवर्त गति को कण की वृत्ताकार पथ पर गति के उसी वृत्त पर प्रक्षेपों की गति के रूप में समझा जा सकता है, तथा किसी क्षण इस गति में कण के विस्थापन का मान निम्न समीकरण द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।

$$y = a\sin(\omega t + \phi)$$

यह एक सरलीकृत व्यवस्था है। अब हम अवकल समीकरण को हल करने की दो विधियों का वर्णन करेंगे।

प्रथम विधि

सरल आवर्त गति की अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

को $2\left(\frac{dy}{dt}\right)$ से गुणा करने पर

$$2\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + 2\omega^2 y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \omega^2\frac{d}{dt}\left(y^2\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^2\omega^2\right] = 0$$

आप जानते है कि $\frac{dy}{dt} = 0$ तब $y =$ नियतांक

अतः $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^2\omega^2 =$ नियतांक ` ...(1.11)

जब कण का विस्थापन $y = a$ हो तब इसका वेग $\frac{dy}{dt}$ शून्य होता है। इनका समी. (1.11)में उपयोग करने पर

नियतांक $= a^2\omega^2$ ...(1.12)

समी. (1.12)से नियतांक का मान समी. (1.11)में रखने पर

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y^2\omega^2 = a^2\omega^2$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (a^2 - y^2)\omega^2$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega\sqrt{a^2 - y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \omega dt$$

या $\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \omega dt$ ...(1.13)

समी. (1.13)का समाकलन करने पर

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{y}{a}\right)$$

$$\int \omega dt = \omega t + \phi$$

$$\sin^{-1}(y/a) = \omega t + \phi$$

$$y = a\sin(\omega t + \phi)$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{y}{a}\right) = \omega t + \phi$$

या $y = a\sin(\omega t + \phi)$ ...(1.14)

यह सरल आवर्त गति के अवकल समीकरण का हल है।

द्वितीय विधि

माना समी. (1.10)का हल

$y = c\exp(\alpha t)$ है। ...(1.15)

exp (αt)समय की सभी घातों को समाविष्ट कर लेता है। सीमा बंधन लगाने पर मात्र वे घातें शेष रह जाती हैं जो हल में उपयोगी है ।

यहाँ c व α दोनों ही नियतांक है जिन्हें हमें ज्ञात करना है।

$$\frac{dy}{dt} = \alpha c \exp \alpha t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \alpha^2 c \exp \alpha t$$
$$= \alpha^2 y$$

समी. (1.15)का दो बार अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \alpha^2 y \qquad ...(1.16)$$

समी. (1.16)से $\frac{d^2y}{dt^2}$ का मान समी. (1.10)में रखने पर

$$\alpha^2 y + \omega^2 y = 0$$

या $\alpha = \pm i\omega$

α के दो मान +iω व -iω, ज्ञात राशि (ω) के रूप में प्राप्त हुये है, अंत: हल में दोनों का ही प्रयोग करने पर

$$y = c_1 \exp(i\omega t) + c_2 \exp(-i\omega t) \quad ...(1.17)$$

c_1 व c_2 नियतांक हैं, और इन्हें ज्ञात करने के लिये सीमा बंधन (boundary condition)का उपयोग करेगें। दोलक की स्थिति $y = 0$ से समय की गणना करें तो सीमा बंधन होगा

$t = 0$ पर $y = 0$

इसका उपयोग समी. (1.17)में करने पर

$c_1 + c_2 = 0$ या $c_1 = -c_2$

इसका उपयोग पुनः समी. (1.17)में करने पर

$\exp i\omega t =$
$\cos \omega t + i \sin \omega t$

$$y = c_1 \left[\exp(i\omega t) - \exp - (i\omega t)\right]$$

$$y = 2ic_1 \sin \omega t \qquad ...(1.18)$$

तथा exp-iωt=
Cos ωt- i sin ωt

$$\omega t = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$$

अंत: $\sin\frac{\pi}{2} - 1$

दोलक के अधिकतम विस्थापन की स्थिति $y = a$ पर पहुँचने पर समय $\frac{T}{4}$ गुजर चुका है, अतः ωt का मान $\frac{\pi}{2}$ हो जायेगा, इस सीमा बंधन का उपयोग समी. (1.18)में करने पर

$$a = 2ic_1 \sin\frac{\pi}{2} = 2ic_1$$

समी. (1.18)में $2ic_1$ के स्थान पर a लिखने पर

$$y = a \sin \omega t \qquad ...(1.19)$$

यदि समय की गणना अधिकतम विस्थापन की स्थिति से की जावें तो समी. (1.10)का हल $y = a\cos\omega t$ प्राप्त किया जा सकता है।

यदि समय की गणना माध्य स्थिति से ठीक पीछे या आगे वाली स्थिति से किया जावे तो समी. (1.10)का हल $y = a\sin(\omega t \mp \phi)$ प्राप्त होगा।

1.7 सरल आवर्त गति का वेग, त्वरण एवं ऊर्जा (Velocity, acceleration and energy of simple harmonic motion)

1.7.1 वेग एवं त्वरण (Velocity and acceleration)

आप स्वंय सरल आवर्त गति की अवकल समीकरण को हल कर चुके हैं और जानते हैं कि कण का विस्थापन निम्न समीकरण से दिया जाता है।

$$y = a\sin(\omega t + \phi)$$

इस समीकरण का समय के साथ अवकलन करने पर आप सरल आवर्त गति कर रहे कण का वेग प्राप्त कर सकते हैं।

$a\cos(\omega t + \phi)$

$\pm\sqrt{a^2 - a^2\sin^2(\omega t + \phi)}$

$\pm\sqrt{a^2 - y^2}$

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega a\cos(\omega t + \phi) \quad ...(1.20)$$

$$= \pm\omega\sqrt{a^2 - y^2} \quad ...(1.21)$$

समी. (1.20)व समी. (1.21)कण के वेग को क्रमशः समय व विस्थापन के पदों में व्यक्त करता है। यहाँ आप देख सकते हैं कि माध्य स्थिति $(y = 0)$ पर वेग $\pm\omega a$ है जो अधिकतम है, तथा अधिकतम विस्थापन की स्थिति में वेग शून्य है।

समी. (1 .20)का समय के साथ एक बार और अवकलन करने पर त्वरण

$$f = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 a\sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 y \quad ...(1.22)$$

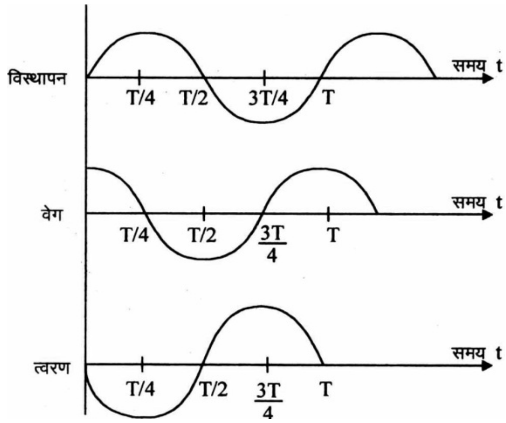
त्वरण का अधिकतम मान $y = \pm a$ तथा न्यूनतम मान साम्यावस्था की स्थिति $(y = 0)$ पर प्राप्त होगा। यहाँ समी. (1.22)से स्पष्ट है कि त्वरण सदैव ही कण के विस्थापन से विपरीत दिशा में कार्यकारी रहेगा। इसके अधिकतम व न्यूनतम मान क्रमशः $\pm\omega^2 a$ व शून्य होंगे।

सरल आवर्त गति कर रहे कण के विस्थापन, वेग व त्वरण को चित्र 1.3 में समय के साथ प्रदर्शित किया गया है। चित्र 1.3 से तथा इनकी निम्न समीकरणों

$$y = a\sin\omega t$$

$$v = a\omega\cos\omega t = \omega a\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

तथा $f = -\omega^2 a\sin\omega t = \omega^2 a\sin(\omega t + \pi)$



चित्र 1.3 विस्थापन, वेग व त्वरण का समय के साथ आलेख

से स्पष्ट है कि वेग व विस्थापन में कलान्तर $\frac{\pi}{2}$ है, अर्थात वेग की कला विस्थापन की कला से $\frac{\pi}{2}$ आगे है। इसी प्रकार, त्वरण व विस्थापन की कलाओं में π का अन्तर है, अर्थात त्वरण की कला विस्थापन की कला से π आगे है।

उदाहरण 1.1 एक सरल आवर्त गति कर रहे कण का आयाम 0.1 सेमी व साम्यावस्था से गुजरते समय वेग 3 मी / से है। इसकी आवृत्ति क्या होगी?

हल: हम जानते हैं कि $v_{\max} = a\omega$

दिया हुआ है, $v_{\max}$ = 3 मी / से तथा $a = 0.1$ सेमी $= 10^{-3}$ मी

अतः $v_{\max} = 10^{-3} \times \omega$

$3 = 10^{-3}\omega$

$\omega = 3\times10^{3}$ रेडियन /से

अत: आवृत्ति $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3\times10^{3}}{2\pi} = 477.3$ हर्ट्ज

उदाहरण 1.2 एक पिण्ड निम्न संबंध के अनुसार सरल आवर्त गति करता है।

$$y = 10\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$ मिमी

इसकी कोणीय आवृति, आयाम व प्रारम्भिक कला बताइये। समय $t = 2$ सेकण्ड पर विस्थापन, वेग एवं त्वरण क्या हैं?

हल: प्रश्न में दी गयी समीकरण को $y = a\sin(\omega t + \phi)$ से तुलना करने पर

$a = 10$ मिमी

$\omega = 2\pi$ रेडियन/से

$\phi = \frac{\pi}{6}$ (साम्यावस्था से दाँयी तरफ)

अतः $t=2$ सेकंड पर, विस्थापन

$$y = 10\sin\left(2\pi\times 2+\frac{\pi}{6}\right) \text{ मिमी}$$

$$= 10\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right) \text{ मिमी}$$

$\{\sin(4\pi+\theta)=\text{si}$

$$= 10\sin\frac{\pi}{6} \text{ मिमी}$$

$\left\{\sin\frac{\pi}{6}=\sin 30 =\right.$

$$= 10\times\frac{1}{2} \text{ मिमी} = 5 \text{ मिमी}$$

$t=2$ सेकण्ड पर वेग $v=\omega\sqrt{a^2-y^2}$

$$= 2\pi\sqrt{100-25} = 2\pi\sqrt{75}$$

$$= 10\pi\sqrt{3} \text{ मिमी/से}$$

$$= \pi\sqrt{3}\times 10^{-2} \text{ मी/से}$$

$t=2$ सेकण्ड पर त्वरण $a=-\omega^2 y$

$$= -(2\pi)^2(5)$$

$$= -20\pi^2 \text{ मिमी/से}^2$$

$$= -2\pi^2\times 10^{-2} \text{ मी/से}^2$$

1.7.2 उर्जा (Energy)

सरल आवर्ती दोलक को प्रारम्भ में दी गयी उर्जा ही इसकी कुल उर्जा है, जो इसमें स्थितिज उर्जा के रूप में संग्रहित रहती है। इस उर्जा का मान ज्ञात करने के लिये हम दोलक को साम्यावस्था $(y=0)$ की स्थिति से आयाम $y=a$ तक विस्थापित करने में किये गये कार्य W की गणना करेंगे।

अर्थात् $$W=\int_0^a F.dy=\int_0^a kydy=\left|\frac{1}{2}ky^2\right|_0^a=\frac{1}{2}ka^2$$

(कार्य करने के लिये दोलक के प्रत्यानयन बल $F=-ky$ के विरूद्ध $F=ky$ बल लगाना होगा तब ही कार्य कर पाना संभव है)। अत: प्रारम्भ में संग्रहित उर्जा $\frac{1}{2}ka^2$ है। जैसे ही दोलक को अधिकतम विस्थापन $(y=a)$ वाली स्थिति से छोड़ा जाता है, इस स्थितिज उर्जा का मान $\frac{1}{2}ka^2, y$ के घटने के साथ कम होता जाता है, परन्तु साथ ही दोलक की गतिज उर्जा $\frac{1}{2}mv^2$ वेग बढने से बढती चली जाती है। माध्य स्थिति $(y=0)$ पर स्थितिज उर्जा शून्य व गतिज उर्जा अधिकतम हो जाती है। इस साम्यावस्था की स्थिति से आगे दोलक के बढने पर

विस्थापन ऋणात्मक (दूसरी ओर या पहले विस्थापन से विपरीत दिशा में विस्थापन)होने पर भी स्थितिज उर्जा बढती हुई अधिकतम तथा गतिज उर्जा घटती हुई शून्य हो जाती है।

अत: आप देख सकते हैं कि पथ के प्रत्येक बिन्दु पर विस्थापन y के कारण स्थितिज उर्जा $\frac{1}{2}ky^2$, तथा वेग v के कारण गतिज उर्जा $\frac{1}{2}mv^2$ होती है। अब हम पहले स्थितिज उर्जा का मान ज्ञात करेंगे।

$$PE = U = \frac{1}{2}ky^2$$

$$= \frac{1}{2}k\left[a\sin\left(\omega t+\phi\right)\right]^2 \qquad \text{(समी. (1.14)से)}$$

$$= \frac{1}{2}ka^2\sin^2\left(\omega t+\phi\right) \qquad \left(\because \omega^2 = \frac{k}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\left(\omega t+\phi\right)$$

चित्र 1.4 में स्थितिज ऊर्जा का विस्थापन के साथ परिवर्तन को दर्शाया गया है। इसी प्रकार, गतिज उर्जा K

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(a^2-y^2\right)$ को चित्र 1.4 में विस्थापन के साथ परिवर्तन (......)से दर्शाया गया है

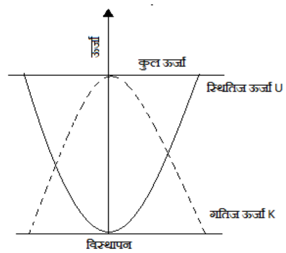
$$= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2\left(\omega t+\phi\right)$$

अत: दोलक की कुल उर्जा $E = KE + PE$

$$= \frac{1}{2}ma^2\omega^2\left[\sin^2\left(\omega t+\phi\right)+\cos^2\left(\omega t+\phi\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 = \frac{1}{2}ka^2$$

आप जानते है कि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ इस तथ्य का अध्ययन आप पत्र-I की इकाई में 4 और विस्तार से कर सकेंगे।



चित्र 1.4

इससे आपको यह स्पष्ट हो गया होगा कि सरल आवर्त गति में कुल उर्जा संरक्षित रहती है, परन्तु स्थितिज व गतिज उर्जा आपस में स्थान्तरित होती रहती हैं।

उदाहरण 1.3 एक दो किलोग्राम द्रव्यमान के सरल आवर्त दोलक की विरामावस्था में उर्जा 5 जूल है। यदि इसकी कुल उर्जा 9 जूल तथा आयाम 0.01 मी है तो दोलन के आवर्त काल की गणना करो।

हल: दिया हुआ है

आयाम $a = 0.01$ मी

विरामावस्था में उर्जा = 5 जूल

कुल उर्जा = 9 जूल

अत: दोलक की उर्जा = $= 9 - 5 = 4$ जूल

$$\frac{1}{2}ka^2 = 4$$

$$\frac{1}{2}k\left(0.01\right)^2 = 4$$

$$k = 8\times10^4$$ न्यूटन / मी

दोलनकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2}{8\times10^4}}$$

$$= 2\pi\frac{1}{2\times10^2}$$

$$= 3.14\times10^{-2}$$

$$= .0314$$ सेकण्ड

1.7.3 औसत स्थितिज एवं गतिज ऊर्जाएं (Average potential and kinetic energies)

एक दोलन में स्थितिज / गतिज उर्जा का मान शून्य से अधिकतम दो बार हो जाता है। हर क्षण इनका मान बदलता रहता है। यदि आप से कहा जाये कि एक दोलन में औसत स्थितिज / गतिज उर्जा का मान कितना होगा? आप क्या करेंगे? संभवतया आप एक दोलन काल के प्रत्येक क्षण की स्थितिज / गतिज उर्जा का योग कर, एक आवर्त काल का भाग लगायेंगे।

ऐसा करने पर एक आवर्त काल या एक दोलन में औसत स्थितिज उर्जा

$$\langle U\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}m\omega^2a^2\sin^2\omega t dt$$

$$= \frac{1}{2T}\left(m\omega^2a^2\right)\int_0^T \sin^2\omega t dt$$

$$= \frac{1}{2T}\left(m\omega^2a^2\right).\frac{T}{2} = \frac{1}{4}m\omega^2a^2$$

$$\int \sin^2\omega t dt$$

$$\int_0^T \frac{(1-\cos2\omega t)dt}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin2\omega t}{2\omega}\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2}[T] = \frac{T}{2}$$

तथा औसत गतिज उर्जा

$$\langle K\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T K(t)dt$$

$$\int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{T}{2}$$

आप स्वयं हल करे

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \cos^2 \omega t dt$$

$$= \frac{1}{2T}\left(m\omega^2 a^2\right)\int_0^T \cos^2 \omega t dt$$

$$= \frac{1}{2T}\left(m\omega^2 a^2\right).\frac{T}{2} = \frac{1}{4} m\omega^2 a^2$$

इससे आप स्वंय समझ गये होंगे कि एक दोलन काल में औसत गतिज व स्थित उर्जा बराबर है तथा इनका मान कुल उर्जा का आधा है।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

2. सरल आवर्ती दोलक को प्रारंभ में दी गयी उर्जा उसमें किस रूप में संग्रहित होती है?

_ _

_ _ _ _ _ _ _ _ __ _

1.8 सारांश (Summary)

- सरल आवर्त गति के लिये तंत्र के जड़त्व एवं प्रत्यास्थता जैसे गुण आवश्यक है।
- सरल आवर्त गति कर रहे कण का त्वरण इसके विस्थापन के समानुपाती एवं विपरीत दिशा में होता है।
- उपरोक्त गुण रखने वाले तंत्र को सरल आवर्ती दोलक कहते हैं।
- सरल आवर्ती दोलनों को वृताकार पथ पर समान चाल से गति कर रहे कण के सदिश त्रिज्य के वृत के व्यास पर प्रक्षेपों की गति के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है।
- सरल आवर्त गति कर रहे कण का

  आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega}$

  आवृत्ति $v = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

  विस्थापन $y = a\sin(\omega t + \phi)$

  वेग $v = \omega a\cos(\omega t + \phi) = \omega\sqrt{a^2 - y^2}$

  त्वरण $f = -\omega^2 a\sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 y$

  स्थितिज उर्जा $U = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} k y^2$

  गतिज उर्जा $T = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} m v^2$
- सरल आवर्ती गति में कण की यांत्रिक उर्जा संरक्षित रहती है।

- समय के सापेक्ष एक आवर्तकाल में औसत स्थितिज उर्जा और गतिज उर्जा का मान समान होता है।
- औसत गतिज उर्जा = औसत स्थितिज उर्जा $= \frac{1}{4}ka^2$
- आवर्तकाल T का मान आयाम पर निर्भर नहीं करता है।

1.9 शब्दावली (Glossary)

अवकल	Differential
आवर्तकाल	Time period
आवृत्ति	Frequency
आवर्ती	Periodic, harmonic
आयाम	Amplitude
कम्पन	Vibration
कला	Phase
गति	Motion
गतिज उर्जा	Kinetic energy
ग्राही	Receiving
गोलक	Bob
घूर्णन	Rotational
जड़त्व	Inertia
त्वरण	Acceleration
तरंग	Wave
दोलन	Oscillation
दोलक	Oscillator
दोलनी	Oscillatory
प्रत्यानयन बल	Restoring force
प्रत्यास्थता	Elastic
परिक्रमण	Orbiting
वामावर्त	Anticlockwise
वेग	Velocity
विकिरत	Radiating
विरामावस्था	Rest position
विस्थापन	Displacement
विक्षोभ	disturbance
संचरण	Propogation

सरल आवर्त गति	Simple harmonic motion
स्थितिज उर्जा	Potential energy

1.10 संर्दभ ग्रंथ (Reference books)

1.	N. K. Bajaj	The Physics of WavesTata and Oscillations	McGraw-Hill Publishing Co. Ltd, New Delhi
2.	D.S. Mathur	Elements of Properties of Matter	S. Chand & Company Ltd, New Delhi
3.	एम.पी सक्सेना, पी.आर. सिंह, एस.एस. रावत	दोलन एवं तरंगें	कॉलेज बुक हाउस, जयपुर

1.11 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment questions)

1. $v = \dfrac{1}{T}$
2. सरल आवर्ती दोलक के प्रारम्भ में दी गयी ऊर्जा उसमें स्थितिज ऊर्जा के रूप में संग्रहित होती है।.

1.12 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. एक दोलन में लगे समय को क्या कहते है?
2. सरल आवर्त गति करते हुए कण का माध्य स्थिति पर त्वरण क्या होगा?
3. सरल आवर्त गति करते हुए कण की अवकल समीकरण का सरलतम हल लिखिये।
4. सरल आवर्त गति में कण की एक आवर्तकाल में औसत स्थितिज व गतिज ऊर्जाएं क्या होंगी?
5. दोलन किसे कहते है? किसी भी दोलन करते तंत्र में प्रत्यास्थता व जड़त्व का गुण किस प्रकार सहायक है, समझाइये।
6. सरल आवर्त गति के लक्षण क्या है?
7. सरल आवर्ती दोलक क्या होता है? इसके लिये अवकल समीकरण की स्थापना करो।
8. सिद्ध कीजिये कि $y = a\sin(\omega t + \phi)$ सरल आवर्ती दोलक की अवकल समीकरण का हल है।

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

9. सरल आवर्ती दोलक के वेग, त्वरण एवं आवर्तकाल के लिये सुत्र व्युत्पन्न कीजिये।

10. सरल आवर्त गति कर रहे कण की गतिज उर्जा और स्थितिज उर्जा को समय और विस्थापन के फलन के रूप में व्युत्पन्न करो। यह भी सिद्ध किजिये कि कण की यांत्रिक उर्जा सरंक्षित रहती है।

11. (a) सिद्ध करो कि आवर्ती दोलक की औसत स्थितिज और औसत गतिज उर्जा एक आवर्त काल में बराबर होती है।

(b) यदि औसत समय के स्थान पर स्थिति के सापेक्ष लिया जावें तो स्थितिज उर्जा $\frac{1}{3}ka^2$ तथा गतिज उर्जा $\frac{1}{6}ka^2$ होती है, सिद्ध कीजिये।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

12. किसी सरल आवर्ती दोलक का अधिकतम त्वरण α तथा अधिकतम वेग β है तो दोलक का आयाम व आर्वतकाल क्या होगा?

(उत्तर: $a = \frac{\beta^2}{\alpha}, T = \frac{2\pi\beta}{\alpha}$ **)**

13. t तथा $2t$ समय पर सरल आवर्ती गति कर रहे कण का विस्थापन. क्रमश : P व Q है। दोलन के आवर्तकाल की गणना करो।

(उत्तर: $T = \frac{2\pi t}{\cos^{-1}(Q/2P)}$ **)**

14. सरल आवर्त गति करते एक कण का आयाम 4 सेमी तथा आवृत्ति 5 हर्टज है। समय $t = 0$ पर कण साम्यावस्था में है।

(i) विस्थापन का समीकरण समय के फलन के रूप में लिखिये।

(ii) विस्थापन, वेग व त्वरण का मान $t = \frac{10}{3}$ सेकण्ड पर क्या होगा?

(उत्तर: $(i) y = 4\sin 4\pi t$ सेमी; $(ii) -2\sqrt{3}$ सेमी; -20π सेमी/से; $200\pi\sqrt{3}$ सेमी/से^{2}**)**

इकाई-2

दोलन-II
(Oscillations - II)

इकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य
2.1 प्रस्तावना
2.2 एक स्वेच्छ विभवकूप में दोलन
2.3 स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय - क्षैतिज अवस्था
2.4 स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय - उर्ध्वाधर अवस्था
2.5 साधारण लोलक
2.6 मरोड़ी दोलक
2.7 सारांश
2.8 शब्दावली
2.9 संदर्भ ग्रन्थ
2.10 बोध प्रश्नों के उत्तर
2.11 अभ्यासार्थ प्रश्न

2.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप

- एक स्वेच्छ विभवकूप में होने वाले दोलनों की प्रकृति का ज्ञान प्राप्त कर सकेंगे;
- अल्प आयाम के दोलनों के लिये कण की गति (जिसे सरल आवर्त गति माना जा सकता है)का बोध भी कर सकेंगे;
- स्थितिज ऊर्जा वक्र के उन बिन्दुओं को जिन पर स्थित कण पर बल शून्य है, ज्ञात कर सकेंगे;
- स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय (क्षैतिज एवं उर्ध्वाधर)में दोलन किस प्रकार से होते है, को समझने तथा इस निकाय की आवृति एवं आवर्तकाल की गणना करने में सक्षम हो सकेंगे;
- सरल लोलक एवं मरोडी दोलक की जानकारी प्राप्त कर इनकी अवकल समीकरणें, आवर्तकाल एवं आवृति ज्ञात करने में समर्थ हो सकेंगे।

2.1 प्रस्तावना (Introduction)

इकाई-1 में आप सरल आवर्ती गति कर रहे कण का आवर्तकाल, विस्थापन, वेग, त्वरण और ऊर्जा के बारे में विस्तार से अध्ययन कर चुके हैं। यह गति प्रत्यानयन बल $F = -ky$ के प्रभाव में होती है। बल की इस प्रकृति के कारण ही इसकी स्थितिज ऊर्जा

$\frac{1}{2}ky^2$ होती है तथा इसका विस्थापन y के साथ लेखाचित्र एक परवलय (parabola)होता है। यदि लेखाचित्र परवलय से भिन्न हो तो उस स्थिति में क्या कण की गति सरल आवर्ती गति होगी? यदि नहीं तो किन परिस्थितियों में इस स्थितिज ऊर्जा फलन में कण सरल आवर्ती गति कर सकेगा? इन परिस्थितियों का अध्ययन आप अनुच्छेद 2.2 में करेंगे। आप पढ़ेंगे कि किसी भी स्थितिज ऊर्जा फलन में अल्प आयामी दोलनों (small oscillations)के लिये कण की गति सरल आवर्ती गति मानी जा सकती है। सरल आवर्ती दोलनों के उदाहरण - स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय (क्षैतिज अवस्था), स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय (उर्ध्वाधर अवस्था), सरल लोलक (simple pendulum), मरोडी दोलक (torsional pendulum)के बारे में आप क्रमशः अनुच्छेद 2.3, 2.4, 2.5 व 2.6 में अध्ययन कर सकेंगे। उपरोक्त सभी उदाहरणों में इन तंत्रों की गति की समीकरण व्युत्पन्न की गयी हैं जिनसे यह स्पष्ट होता है कि अल्प आयामी दोलनों के लिये इनकी गति सरल आवर्ती गति होती है। इसके अतिरिक्त उपरोक्त सभी उदाहरणों मे सम्बन्धित निकाय (दोलक)के आवर्तकाल, आवृति एवं कोणीय आवृति का परिकलन किया गया है।

2.2 एक स्वेच्छ विभवकूप में दोलन (Oscillations in arbitrary potential well)

पिछली कक्षाओं में आप यह अध्ययन कर चुके हैं कि संरक्षी बल क्षेत्र में कण पर लग रहे बल $\vec{F}$ एवं उसकी स्थितिज ऊर्जा U के बीच निम्न संबंध होता है-

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \quad \text{... (2.1)}$$

या

$$\vec{F} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) \quad \text{... (2.2)}$$

यह संबंध कण की त्रिविमीय गति (three dimensional)से संबंधित है यदि कण की गति त्रिविमीय न होकर केवल एक ही दिशा y के अनुदिश हो तो समी. (2.2)का स्वरूप निम्न होगा -

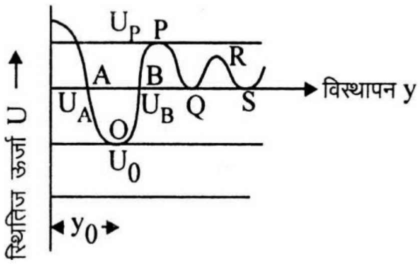
$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} \quad \text{...(2.3)}$$

समी. (2.3)को अदिश रूप में लिखने पर

$$F = -\frac{\partial U}{\partial y} \simeq -\frac{dU}{dy} \quad \text{...(2.4)}$$

उपरोक्त समी. (2.4)से स्पष्ट है कि स्थितिज ऊर्जा U, दूरी y का कोई सतत फलन होना चाहिये। चित्र 2.1 में संरक्षी बल क्षेत्र में स्थितिज ऊर्जा U का दूरी y के साथ एक स्वेच्छ फलन दिखाया गया है। वक्र (curve)के किसी बिन्दु पर प्रवणता (slope)उस बिन्दु पर स्थित कण पर लग रहे कार्यकारी बल के परिमाण के बराबर है। क्या आप बता सकते हैं कि वक्र के O, P, Q, R व S बिन्दुओं पर स्थित कणों की प्रवणता का मान कितना होगा? इन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाएं (tangent lines) y अक्ष

के समान्तर होने के कारण निकटस्थ बिन्दुओं के मध्य दूरी dy होते हुये भी ऊर्जा dU में कोई परिवर्तन न होने से $\frac{dU}{dy}$ का मान शून्य होगा। अर्थात, कण यदि इन बिन्दुओं में से किसी एक पर स्थित है तो उस पर बल शून्य होगा। यहाँ यह तथ्य विचारणीय है कि इन बिन्दुओं पर ऊर्जा या तो अधिकतम है अथवा न्यूनतम। कण की वे स्थितियाँ जिन पर कण पर लग रहे बल का मान शून्य हो, सन्तुलन की स्थितियाँ (equilibrium positions)कहलाती हैं।



चित्र 2.1 स्थितिज उर्जा वक्र

यदि कण बिन्दु P पर स्थित है और इसे दाँयी और विस्थापित किया जाये तो कण पर एक बल $F = -\frac{dU}{dy}$ लगेगा। यहाँ $\frac{dU}{dy}$ का मान ऋणात्मक होने से F का मान धनात्मक होगा। इस कारण कण Q की ओर बढने लगेगा। इसी प्रकार यदि कण को बिन्दु P से बाँयी ओर विस्थापित किया जावें तो कण पर बल ऋणात्मक दिशा में लगेगा और कण बिन्दु O की तरफ गति करेगा। R बिन्दु पर स्थित कण के लिये भी ऐसा ही होगा। अत: वक्र के P व R बिन्दुओं पर कण की स्थितियों को अस्थायी सन्तुलन की स्थितियाँ (positions of unstable equilibrium)कहते हैं। इन बिन्दुओं पर स्थित कण पर किसी भी दिशा में अतिअल्प मात्रा में बल लगने पर भी कण अपनी पूर्व स्थिति पर कभी वापिस नहीं आता है, इसी कारण इन संतुलन की स्थितियों को अस्थायी कहा गया है। ये वे बिन्दु हैं जहाँ पर स्थिति ऊर्जा का मान अधिकतम है। इसके ठीक विपरीत, O,Q और S बिन्दुओं पर स्थित कण को किसी भी दिशा में विस्थापित कर छोड़ने पर बल इस प्रकार कार्य करता है कि कण पुन: अपनी पूर्व स्थिति की ओर गति करने लगता है। इस कारण O,Q व S बिन्दुओं की स्थितियों को स्थायी संतुलन की स्थितियाँ (positions of stable equilibrium)कहते हैं। ऐसे बिन्दुओं पर कण की स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होती है। उपरोक्त विवरण से आप इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि कण की दोलनी गति के लिए कण की स्थायी सन्तुलन की स्थिति ही उपयोगी है।

इसकी और स्पष्टता के लिये आप कल्पना कीजिये कि कण स्थायी संतुलन की स्थिति O पर है। अब कण को विस्थापित कर बिन्दु B तक ले जाते हैं। ऐसा करने पर कण की ऊर्जा U_B न्यूनतम ऊर्जा U_O (माना कि कण की बिन्दु O पर ऊर्जा U_O है।)से अधिक होगी। बिन्दु B पर स्थित कण पर लग रहा ऋणात्मक बल इसे स्थायी संतुलन की स्थिति O की ओर गति प्रदान करता है। बिन्दु O पर आने पर कण का वेग अधिकतम होने से कण बाँयी ओर गति करता हुआ स्थिति A तक पहुँच जाता है जहाँ इसकी ऊर्जा U_A, U_B के बराबर है। यह क्रम

निरन्तर बना रहता है और कण बिन्दु A व B के बीच निश्चित आवर्तकाल से गति करता रहता है। इस परिबद्ध क्षेत्र (bound region) AOB को एक विमीय विभवकूप कहते हैं। यदि कण विभवकूप में ही सीमित है तो यह कण की बद्ध अवस्था कहलाती है। कण को बद्ध अवस्था से मुक्त करने के लिये विभवकूप के शीर्ष (top)व तल (bottom)की स्थितिज ऊर्जाओं के अन्तर के बराबर ऊर्जा चाहिये। अत: विभवकूप के शीर्ष व तल की स्थितिज ऊर्जाओं के अन्तर को कण की बन्धन ऊर्जा कहते हैं। चित्र 2.1 देखकर आप कह सकते है कि AOB विभवकूप में गति कर रहे कण की बंधन ऊर्जा $U_P - U_O$ है।

न्यूनतम ऊर्जा U_O के बिन्दु O के पास के बिन्दुओं पर स्थितिज ऊर्जा $U(y-yo)$ को टेलर प्रमेय (Taylor’s theorem)से प्रसार करने पर

$$U\left(y-y_0\right)=U_0(Y_0)+\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=y_0}(y-y_0)+\frac{1}{\lfloor 2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_{y=y_0}(y-y_0)^2$$

$$+\frac{1}{\lfloor 3}\left.\frac{\partial^3 U}{\partial y^3}\right|_{y=y_0}(y-y_0)^3+........ \quad ...\ (2.5)$$

बिन्दु $O(y-yo)$ पर

$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=y_0}$ का मान शून्य है;

$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_{y=y_0}$ का मान सदैव धनात्मक है;

$\left.\frac{\partial^3 U}{\partial y^3}\right|_{y=y_0}$ का मान धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।

इनके मान क्रमश: 0, k तथा k_1 लिखने पर समी. (2.5)का स्वरूप निम्न होगा-

$$U\left(y-y_0\right)=U_0(y_0)+\frac{1}{\lfloor 2}k\left(y-y_0\right)^2+\frac{1}{\lfloor 3}k_1\left(y-y_0\right)^3 \quad ...(2.6)$$

मूल बिन्दु को बिन्दु O पर स्थानान्तरित करने पर $y_0=0$ तथा U_O को भी शून्य मानने पर समी. (2.6)को लिखा जा सकता है।

$$U\left(y\right)=\frac{1}{\lfloor 2}ky^2+\frac{1}{\lfloor 3}k_1y^3 \quad ...\ (2.7)$$

उपरोक्त समी. (2.7)से यह पूर्ण रूपेण स्पष्ट है कि स्थितिज ऊर्जा $U\left(y\right)$ को मूल बिन्दु (साम्यावस्था बिन्दु)से विस्थापन y की विभिन्न घातों के पदों के योग के रूप में लिखा जा सकता है। यदि विस्थापन y का मान कम हो, अल्प हो, उस स्थिति में y^3 व अन्य उच्च घातों के पदों को छोड़ा जा सकता है।

अत: कण के अल्प विस्थापन के लिये

$$U\left(y\right)=\frac{1}{2}ky^2 \quad ...\ (2.8)$$

समी. (2.8)से स्पष्ट है कि यह एक परवलय का समीकरण है। अतः $U(y)=\frac{1}{2}ky^2$ एक परवलयिक विभवकूप को प्रदर्शित करता है। इसे सरल आवर्ती विभवकूप भी कहते है। ऐसे विभवकूप में कण सरल आवर्ती गति करता है।

अतः विभवकूप की स्थितिज ऊर्जा $U(y)$, विस्थापन y का कैसा भी फलन क्यों न हो, यदि दोलन आयाम लघु या अल्प है तो कण की गति को सरल आवर्त गति माना जा सकता है।

उदाहरण 2.1 यदि किसी कण की स्थितिज ऊर्जा को

$$U=a-\frac{b}{y}+\frac{c}{y^2}$$

के रूप में व्यक्त किया जा सके तो स्थायी साम्य स्थिति तथा लघु आयाम के दोलनों के लिये बल नियतांक ज्ञात कीजिये। a,b व c सभी धनात्मक है।

हल: प्रश्न में दी गयी स्थितिज ऊर्जा से, कण पर लग रहा

बल $$F=-\left[\frac{b}{y^2}-\frac{2c}{y^3}\right]$$

साम्य स्थिति $(y-y_0)$ के लिये आवश्यक है कि यह बल शून्य हो, अतः

$$\frac{b}{y^2}-\frac{2c}{y^3}=0$$

या $$y_0=\frac{2c}{b}$$

समी. (2.6)पर ध्यान दें तो आप देखेंगे कि बल नियतांक

$$k=\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_{y=y_0}$$

अतः $$k=\left.\left[-\frac{2b}{y^3}+\frac{6c}{y^4}\right]\right|_{y=\frac{2c}{b}}$$

$$k=\frac{1}{8}\frac{b^4}{c^3}$$

अतः स्थायी साम्य की स्थिति $y_0=\frac{2c}{b}$ तथा लघु आयामों के लिये बल नियतांक $k=\frac{1}{8}\frac{b^4}{c^3}$ है।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

1. उपरोक्त उदाहरण 2.1 में $y_0=\frac{2c}{b}$ पर कण पर लग रहे बल का मान तो शून्य है परन्तु क्या यह स्थायी संतुलन की अवस्था में है?

_ _

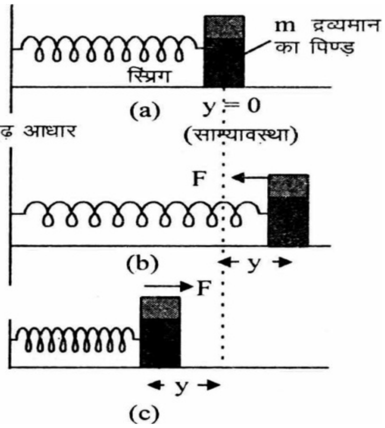
_ _

2.3 स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय-क्षैतिज अवस्था (spring mass system- horizontal position)

सरल आवर्ती दोलक की भाँति व्यवहार करने वाले भौतिक निकायों के बारे में आप इस व आगामी अनुच्छेदों में पढेंगे। इस अनुच्छेद में स्प्रिंग द्रव्यमान (क्षैतिज अवस्था)निकाय के बारे में विस्तार से अध्ययन करेंगे।

एक घर्षण रहित (frictionless)क्षैतिज तल पर रखे m द्रव्यमान के ब्लॉक (block)को एक द्रव्यमान रहित स्प्रिंग से जोड़ रखा है। स्प्रिंग का दूसरा सिरा दृढ़ आधार से बंधा हुआ है। यह निकाय स्प्रिंग द्रव्यमान तंत्र कहलाता है। देखिये चित्र 2.2 (a)। यह निकाय इस तल पर स्प्रिंग की लम्बाई l के अनुदिश (along)गति करने को स्वतन्त्र है। चित्र 2.2 (a)की स्थिति में स्प्रिंग तनावरहित (relaxed or stretchless)है, अर्थात् अतानित (unstretched)है। ब्लॉक की यह स्थिति, इसकी साम्य स्थिति कहलाती है तथा इस स्थिति को $y = 0$ से निरूपित करते हैं। यदि ब्लॉक को स्प्रिंग लम्बाई के अनुदिश थोड़ा खींचा अर्थात विस्थापित किया जाता है (देखें चित्र 2.2(b))तब रैखिक स्प्रिंग में उत्पन्न प्रत्यानयन बल F को विस्थापन y के पद में निम्न रूप से व्यक्त किया जा सकता है।

चित्र 2.2(a) में ब्लाक पर क्षैतिज दिशा में कोई बल नहीं लग रहा हैं । ऊर्ध्वाधर दिशा में ब्लाक द्वारा लगाया गया गुरुत्वीय बल mg, तल द्वारा प्रतिक्रिया)reac-tionary)बल से संतुलित है।

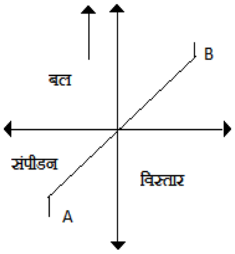


चित्र 2.2

$$F = -ky \qquad ...(2.9)$$

यहाँ k को स्प्रिंग नियतांक या कठोरता (stiffness)नियतांक कहते है। इसकी इकाई न्यूटन/मीटर है। ऋणात्मक चिन्ह से स्पष्ट होता है कि प्रत्यानयन बल (F) की दिशा विस्थापन की दिशा के विपरीत है।

ब्लॉक को इसकी विस्थापित स्थिति से मुक्त करने पर प्रत्यानयन बल के कारण अपनी साम्यावस्था$(y = 0)$ की ओर गति करने लगता है। ब्लॉक, वेग के कारण साम्यावस्था पर न रूककर बाँयी तरफ स्प्रिंग को संपीडित (compressed)करता हुआ एक अन्य स्थिति में पहुँच जाता है जहाँ इसका वेग शून्य हो जाता है। (देखें चित्र 2.2(c))। यहाँ से पुन: दाँयी ओर गति करता है तथा साम्यावस्था $(y = 0)$ से गुजरता हुआ चित्र 2.2(b)की स्थिति में पहुँच जाता है। इस प्रकार पिण्ड अपनी साम्यावस्था के इधर-उधर क्षैतिज दिशा के अनुदिश गति करता है। चूंकि



चित्र 2.3

जब स्प्रिंग को बल आरोपित कर संपीडित या विस्तरित किया जाता है तब आरोपित बल का संपीडन एवं विस्तारण के मध्य संबध चित्र में दर्शाया गया 2.3 है आम तौर पर संबध रैखिक नहीं है, परन्तु अल्प विस्थापन AB के लिये रैखिक लिया जा सकता है ।

ब्लॉक प्रत्यानयन बल $F=-ky$ के प्रभाव में गति करता है अत: यह गति सरल आवर्ती गति है। यदि ब्लॉक के त्वरण को $\frac{d^2y}{dt^2}$ से व्यक्त करे तो न्यूटन के नियम से

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky$$

या
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{-k}{m}y$$

$\frac{k}{m}=\omega^2$ मान लिये जाने पर

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=0 \qquad ...(2.10)$$

उपरोक्त समी. (2.10)ब्लॉक की गति का अवकल समीकरण है, जो द्रव्यमान- स्प्रिंग निकाय की सरल आवर्ती गति को दर्शाता है।

इस समीकरण का हल (प्रथम इकाई के अनुच्छेद 1.6 से)होगा,

$$y=a\sin(\omega t+\phi) \qquad ...(2.11)$$

(यहाँ a स्प्रिंग का अधिकतम विस्थापन है, इसे आयाम कहते है);

आवर्तकाल

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \qquad ...(2.12)$$

आवृत्ति

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}; \qquad ...(2.13)$$

तथा कोणीय आवृत्ति

$$\omega=2\pi\nu=\sqrt{\frac{k}{m}}; \qquad ...(2.14)$$

होगी।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

2. यदि स्प्रिंग द्रव्यमान तंत्र में द्रव्यमान का विस्थापन अल्प न होकर अधिक हो तो क्या यह तंत्र सरल आवर्ती गति करेगा?

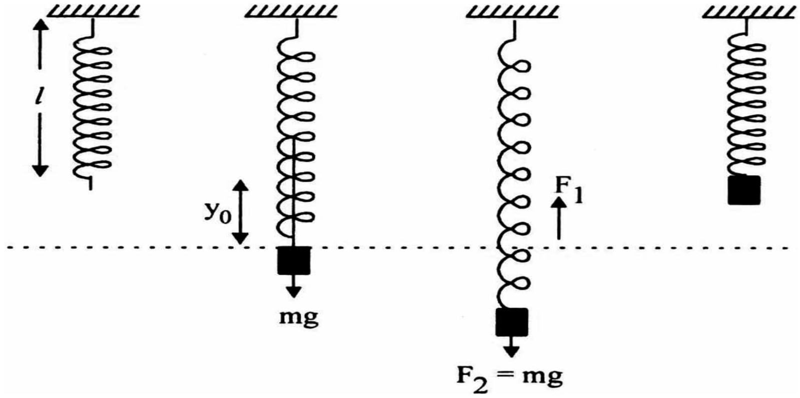
_ __

_ __

2.4 स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय- ऊर्ध्वाधर अवस्था (Spring mass system vertical position)

अनुच्छेद 2.3 में आपने स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय को क्षैतिज अवस्था में रखकर इसके सरल आवर्ती दोलनों का अध्ययन किया। अब इस निकाय को उर्ध्वाधर अवस्था में रखकर इसमें

चित्र 2.4(b) में दर्शायी साम्य स्थिति जे सापेक्ष उर्ध्वाधर दिशा के अनुदिश नीचे वाले विस्थापन को घनात्मक एवं उधर वाली विस्थापन को ऋणात्मक दिशा माना गया है।



चित्र 2.4

मानाकि एक द्रव्यमान रहित स्प्रिंग, जिसकी लम्बाई l तथा स्प्रिंग नियतांक k है, को दृढ आधार से लटकाया जाता है। यह स्प्रिंग उर्ध्वाधर अवस्था में स्थिर रहेगी। आप देखें चित्र 2.4(a)। स्प्रिंग को द्रव्यमान रहित मानने से इस पर गुरूत्वीय बल कार्य न करने के कारण इसमे कोई प्रसरण नहीं होगा। अब स्प्रिंग के स्वतन्त्र सिरे से m द्रव्यमान का कोई एक पिण्ड लटाकते हैं। आप का यह सोचना सही है कि ऐसा करने से स्प्रिंग की लम्बाई में निश्चित ही प्रसार हो गया है। इस निकाय में बलों का विश्लेषण करने पर आप देखेंगे कि पिण्ड द्वारा गुरूत्वीय बल mg नीचे की तरफ कार्य करने से स्प्रिंग प्रसारित होने लगती है और तब तक प्रसार होता रहता हे जब तक प्रसरण के कारण उत्पन्न प्रत्यानयन बल, गुरूत्वीय बल mg के बराबर नहीं हो जाता। स्पष्ट है कि प्रत्यानयन बल उर्ध्व दिशा में उपर की ओर है। अतः यदि प्रसारित लम्बाई y_0 है तो बलों के संतुलन की इस साम्यावस्था में

$$ky_0 = mg$$

या
$$\frac{k}{m} = \frac{g}{y_0} \qquad \text{... (2.15)}$$

यह द्रव्यमान m की स्थैतिक (static)साम्य स्थिति है। देखिये चित्र 2.4(b)। द्रव्यमान पिण्ड को इस साम्य अवस्था से y दूरी तक नीचे की तरफ खींचकर छोड़ने पर क्या होगा? देखिये चित्र 2.4(c)। y दूरी (विस्थापन)तक खींचने के कारण स्प्रिंग द्वारा पिण्ड पर एक प्रत्यानयन बल $F = -ky$ इसकी स्थैतिक साम्यावस्था की ओर आरोपित होगा जो इसे ऊपर ले जायेगा। चित्र 2.4(b)की स्थिति से गुजरता हुआ चित्र 2.4(d)की स्थिति में पहुँच जायेगा। पुन: प्रत्यानयन बल $F = -ky$ के प्रभाव में पिण्ड स्थैतिक साम्यावस्था से गुजरता हुआ 2.4(c)वाली

स्थिति में पहुँचेगा। यह क्रम निरन्तर चलता रहेगा। अर्थात, आपने देखा कि y दूरी के विस्थापन के कारण पिण्ड अपनी स्थैतिक साम्य स्थिति के सापेक्ष दोलन करने लगता है।

अब हम चित्र 2.4(c)वाली स्थिति में पिण्ड पर आरोपित बलों का विश्लेषण करते हैं।

पिण्ड पर लगने वाला कुल प्रत्यानयन बल

$$F_1 = -k\left(y_0 + y\right)$$

पिण्ड पर गुरूत्वीय बल

$$F_2 = mg$$

पिण्ड पर परिणामी बल

$$F = F_1 + F_2$$

$$= -k\left(y_0 + y\right) + mg$$

समी. (2.15)से हम जानते है कि $mg = ky_0$, अत:

$$F = -k\left(y_0 + y\right) + ky_0$$

$$F = -ky \qquad ...(2.16)$$

अत: द्रव्यमान पिण्ड की गति प्रत्यानयन बल $F = -ky$ के प्रभाव में इसकी स्थैतिक साम्यावस्था के सापेक्ष होगी।

पिण्ड में उत्पन्न त्वरण $\frac{d^2y}{dt^2}$ हो तो न्यूटन के द्वितीय नियम से

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$$

या

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

$\frac{k}{m}$ के स्थान पर ω^2 लिखने पर

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \qquad ... (2.17)$$

यह सरल आवर्ती गति का समीकरण है अत: आप कह सकते है कि स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय उर्ध्वाधर अवस्था में हो तो इसमें उत्पन्न दोलन सरल आवर्ती दोलन होंगे। पिछली इकाई में अनुच्छेद 1.6 से आप जानते हैं कि इस समीकरण का हल

$$y = a\sin\left(\omega t + \delta\right) \qquad ... (2.18)$$

(यहाँ a इसका अधिकतम विस्थापन है, जिसे आयाम कहतें हैं);

आवर्तकाल

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \qquad ...(2.19)$$

आवृत्ति $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}};$ ...(2.20)

तथा कोणीय आवृत्ति

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad ...(2.21)$$

होगी।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

3. उपरोक्त स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय में आवर्तकाल ज्ञात करने के लिये द्रव्यमान m तथा स्प्रिंग नियतांक k का मान ज्ञात होना चाहिये। m द्रव्यमान पिण्ड को लटकाने पर स्प्रिंग में विस्तरण y_0 है। मात्र यह ज्ञात होने पर भी क्या आवर्तकाल ज्ञात किया जा सकता है? यदि हाँ, तों इसका मान ज्ञात कीजिये।

_ _

_ _

उदाहरण 2.2 द्रव्यमान रहित एक स्प्रिंग की उर्ध्वाधर अवस्था में 0.2 किग्रा का द्रव्यमान लटकाकर इसमें दोलन कराये जाते है। 0.2 किग्रा का द्रव्यमान लटकाने पर स्प्रिंग में विस्थापन 0.1 मीटर हो तथा $g = 10$ मी/से^{2} हो तो आवर्तकाल की गणना कीजिये।

हल: हम जानते है कि आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{y_0}{g}} \qquad \left\{\begin{array}{l} \because mg = ky_0 \\ \text{अत: } \dfrac{k}{m} = \dfrac{y_0}{g} \end{array}\right\}$$

प्रश्नानुसार – $y_0 = 0.1$ मीटर, तथ

$g = 10$ मी/से^{2},

अत: $T = 2\pi\sqrt{\frac{.1}{10}}$

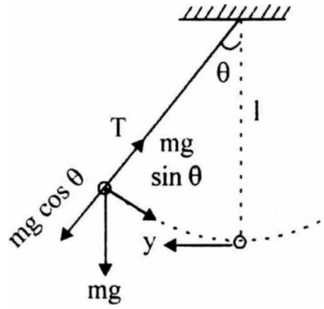
$$= \frac{2\pi}{10}$$

$$= \frac{2\times 3.14}{10} = 0.628 \text{ सेकण्ड}$$

अतः आवर्तकाल का मान 0.628 सेकण्ड होगा।

2.5 साधारण लोलक (Simple pendulam)

स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय की भाँति ही साधारण लोलक भी लघु आयामी दोलनों के लिये सरल आवर्त गति का एक उत्तम उदाहरण है। यहाँ इसकी गति रैखिक (liner)पथ पर न होकर वृत्ताकार चाप के अनुदिश (कोणीय गति)होती है साधारण लोलक एक बिन्दु द्रव्यमान वाला आदर्श पिण्ड है जो एक हल्की अवितान्य (inextensible)डोरी से लटका रहता है। जब इसे इसकी साम्यावस्था से एक ओर विस्थापित कर छोड़ा जाता है तो लोलक गुरूत्वीय बल के प्रभाव में एक उर्ध्वाधर तल में गति करने लगता है। इसकी यह गति आवर्ती तथा दोलनीय होती है। अब आप इसकी गति का समीकरण, आवर्तकाल इत्यादि ज्ञात करने के बारे में पढेगें।



चित्र 2.5

समी॰ में प्रत्यानयन(2.22) बल F कोणीय विस्थापन θ के समानुपाती न होकर $\sin\theta$ के है । अतइस बल के प्रभाव में : गति सरल आवर्त गति नहीं हो सकती हैं। θ के न्यून मानों के लिये ही $\sin\theta$ को θ के(रेडियन) रूप में लिखा जा सकता है ।

चित्र 2.5 में एक l लम्बाई का लोलक जिसके कण या गोलक का द्रव्यमान m है, को उर्ध्वाधर से θ कोण पर दर्शाया गया है। m द्रव्यमान पर लगने वाले बल गुरूत्वीय बल mg तथा डोरी में तनाव T है। अब गुरूत्वीय बल को दो लम्बवत अक्षों (चाप के अनुदिश तथा त्रिज्या के अनुदिश)में वियोजित (resolve)करते हैं। इसकी त्रिज्य घटक (radial component)परिमाण में $mg\cos\theta$ व स्पर्श रेखीय घटक $mg\sin\theta$ होगा। बल का त्रिज्य घटक वृत्ताकार चाप पर चलने के लिये आवश्यक अभिकेन्द्रीय त्वरण प्रदान करता है। स्पर्श रेखीय घटक, कण पर लगने वाला प्रत्यानयन बल है जो इसे विरामावस्था में लाने का प्रयास करता है। अत: प्रत्यानयन बल

$$F = -mg\sin\theta \qquad ...(2.22)$$

आप निम्न सारणी का अवलोकन करें और देखें कि $\sin\theta \simeq \theta, \theta$ के अल्प मानों के लिये कितना सत्य है।

सारणी-1

θ°	θ(रेडियन)	$\sin\theta$	प्रतिशत अन्तर
5°	0.0873	0.0872	0.11
10°	0.1745	0.1736	0.51
15°	0.2618	0.2588	1.14
20°	0.3490	0.3420	2.00
25°	0.4363	0.4226	3.14

यदि कोणीय विस्थापन θ अल्प हो तो $\sin\theta \simeq \theta$ (रेडियन), तथा चाप के अनुदिश विस्थापन y के पद में $\theta = \frac{y}{l}$ लिखने पर

$$F = \frac{-mgy}{l} = -\frac{mg}{l}y \qquad ...(2.23)$$

अत: लघु आयामी दोलनों के लिये प्रत्यानयन बल F रैखिक विस्थापन y के समानुपाती एवं इसके विपरीत दिशा में है। यह सरल आवर्त गति के लिये शर्त है।

यदि लोलक का त्वरण $\frac{d^2y}{dt^2}$ हो तो न्यूटन के द्वितीय नियम से

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{mg}{l}y$$

या $$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{g}{l}y=0$$

$\frac{g}{l}$ का मान ω^2 मानने पर उपरोक्त समीकरण को

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega^2 y=0 \quad ...(2.24)$$

ध्यान देने योग्य तथ्य यह है कि आवर्तकल या आवृत्ति का मान गोलक के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है । किसी स्थान पर इसका मान लम्बाई पर निर्भर करता है।

लिखा जा सकता है जो सरल आवर्ती गति की समीकरण है पिछली इकाई के अनुच्छेद 1.6 से हम जानते है की इस समी. (2.24)का हल होगा,

$$y=a\sin(\omega t+\delta) \quad ...(2.25)$$

(यहाँ a लोलक अधिकतम विस्थापन या आयाम कहलता है);

आवर्तकाल

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}; \quad ...(2.26)$$

आवृत्ति

$$v=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad ...(2.27)$$

तथा कोणीय आवृत्ति

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}} \quad ...(2.28)$$

है।

उदाहरण 2.3 एक 0.2 मीटर लम्बाई के सरल लोलक की आवृत्ति की गणना कीजिये, (g=9.8 मी/से^{2})यदि आयाम 0.1 मीटर हो तो विस्थापन समय संबंध ज्ञात कीजिये।

हल: प्रश्नानुसार $l=0.2$ मी

$g=9.8$ मी/से^{2}

$a=0.1$ मी

अतः कोणीय आवृत्ति $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

$$=\sqrt{\frac{9.8}{0.2}}=7 \text{ रेडियन / सेकण्ड}$$

तथा विस्थापन $y=0.1\sin(7t+\delta)$ मीटर

अतः कोणीय आवृत्ति 7 रेडियन/सेकण्ड तथा विस्थापन समय संबंध $y=0.1\sin(7t+\delta)$ मी है।

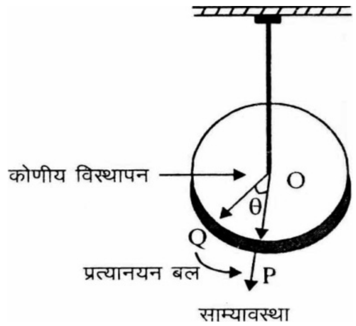
बोध प्रश्न (Self assessment question)

4. सरल लोलक की लम्बाई बढ़ाने पर आवर्तकाल किस प्रकार प्रभावित होगा?

_ _

2.6 मरोड़ी दोलक (Torsional oscillator)

मरोड़ी दोलक की गति के अध्ययन से पहले यह जानना आवश्यक है कि यह किस प्रकार का दोलक है, तथा किस प्रकार सरल लोलक से भिन्न है। इसमें किसी चकती के द्रव्यमान केन्द्र को डोरी के स्थान पर घात्विक (metallic)तार से जोड़कर दृढ़ आधार से लटकाया जाता है। तार को उर्ध्वाधर अक्ष में रखते हुये चकती को किसी कोण से मरोड़ (twist)देकर छोड़ा जाता है। इसके परिणामस्वरूप इसमें घूर्णी दोलन (rotatory oscillations)उत्पन्न होते हैं। इस तरह के दोलक को मरोड़ी दोलक कहते हैं। यह दोलक किस प्रकार की गति करता है, यह आपको निम्न विश्लेषण से स्पष्ट होगा।



चित्र 2.6

मरोड़ी दोलक की साम्यावस्था में चकती पर एक त्रिज्य रेखा इसके केन्द्र O से P तक खींचते है जैसा कि चित्र 2.6 में दर्शाया गया है अब इसे θ कोणीय विस्थापन देकर नयी स्थिति Q पर ले आते है ऐसा करने पर तार में मरोड़ी उत्पन्न हो जाती हैं, जिसके कारण इसमें एक बलयुग्म (torque)लगता है, जो इसे छोड़ते ही प्रभावी हो जाता है। बलयुग्म मरोड़ी दोलक को साम्यावस्था P में लाने का प्रयत्न करता है। यह प्रत्यानयन बल आघूर्ण है। कम कोणीय विस्थापनों के लिये प्रत्यानयन बल आघूर्ण τ, कोणीय विस्थापन के अनुक्रमानुपाती (हुक का नियम)होता है।

$$\tau = -C\theta \quad ...(2.29)$$

यहाँ C प्रति एकांक ऐंठन (मरोड़)के लिये बलयुग्म का मान है, तथा यह तार के गुण पर निर्भर करता हैं, इसे मरोड़ी नियतांक कहते है। ऋणात्मक चिन्ह यह प्रदर्शित करता है कि बलयुग्म कोणीय विस्थापन के विपरीत दिशा में है। चूंकि यह घूर्णी दोलन है अत. बलयुग्म को दोलक के जडत्व आघूर्ण I एवं θ विस्थापन की स्थिति में उत्पन्न कोणीय त्वरण $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है।

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{I}\theta = 0 \quad ...(2.30)$$

$\frac{C}{I}$ के स्थान पर ω^2 लिखने पर

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0 \qquad ...(2.31)$$

यह समी. (2.31)सरल आवर्ती गति के अवकल समीकरण के तुल्य है, अत: मरोड़ी दोलक के दोलन सरल आवर्त होते हैं। आप जानते हैं कि इस तरह के समीकरण का हल

$$\theta=\theta_0\sin(\omega t+\delta) \qquad ...(2.32)$$

से व्यक्त किया जा सकता है। (यहाँ θ_0, अधिकतम कोणीय विस्थापन अथवा कोणीय आयाम है);

आवर्तकल

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}; \qquad ...(2.33)$$

आवृत्ति

$$v=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{I}}; \qquad ...(2.34)$$

तथा कोणीय आवृत्ति

$$\omega=\sqrt{\frac{C}{I}} \qquad ...(2.35)$$

होगी

बोध प्रश्न (Self assessment question)

5. मरोड़ी दोलक में कोणीय विस्थापन θ यदि अल्प न हो, तब भी क्या उपरोक्त हल को सही माना जाये अथवा नहीं? कारण भी लिखें।

_ _

_ _

उदाहरण 2.4 - एक चकती जिसका द्रव्यमान 0.025 किग्रा तथा अर्धव्यास 0.1 मीटर है, को एक तार से लटकाकर मरोड़ी दोलन करवाने पर इसका आवर्तकाल एक सेकण्ड प्राप्त होता है। यदि इस चकती को हटाकर इसी द्रव्यमान की दूसरी चकती जिसका अर्धव्यास 0.2 मीटर हो, ली जावे तो अब आवर्तकाल कितना होगा?

हल: प्रथम चकती का जडत्व आघूर्ण

$$I_1=\frac{1}{2}mr^2$$

$$=\frac{1}{2}(0.025)(0.1)^2$$

$$=1.25\times10^{-4}$$ किग्रा × मी^{2}

द्वितीय चकती का जड़त्व आघूर्ण

$$I_2 = \frac{1}{2}(0.025)(0.2)^2$$
$$= 5\times10^{-4} \text{ किग्रा} \times \text{मी}^2$$

मरोड़ी दोलक के लिये

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$$

दोनों चकतियों के लिये एक ही तार प्रयुक्त हुआ है अत: C समान रहेगा। यदि हम इनका आवर्तकाल क्रमश: T_1 व T_2 ले तों

$$T_2 = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}\times T_1$$
$$= \sqrt{\frac{5\times10^{-4}}{1.25\times10^{-4}}}\times1 = 2 \text{ सेकण्ड}$$

अब आवर्तकाल का मान 2 सेकण्ड होगा।

2.7 सारांश (Summary)

- संरक्षी बल क्षेत्र में कण पर लग रहे बल F व स्थितिज ऊर्जा U में एक विमीय संबंध
  $$F = -\frac{dU}{dy}$$
- स्थितिज ऊर्जा - विस्थापन वक्र में कणों की वह स्थितियाँ जहाँ पर कण पर लगने वाला बल शून्य हो संतुलन की स्थितियाँ कहलाती हैं। विरामावस्था से अल्प विस्थापन के बाद कण अपनी पूर्व स्थिति में आ सके तो यह संतुलन की स्थायी स्थिति कहलाती है। यदि कण अपनी पूर्व स्थिति में न आ सके तो यह संतुलन की अस्थायी स्थिति कहलाती है।
- एक विमीय विभवकूप में कण की स्थितिज ऊर्जा, विस्थापन y का कैसा भी फलन क्यों न हो, लघु आयामी दोलनों के लिये कण सरल आवर्ती गति करेगा।
- सरल लोलक बिन्दु द्रव्यमान का एक आदर्श पिण्ड है जो एक हल्की अवितान्य (inextensible)डोरी से लटका हो।
- स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय एक ऐसा निकाय है जिसमें स्प्रिंग का एक सिरा दृढ आधार से तथा दूसरा सिरा किसी द्रव्यमान से जुड़ा हो।
- मरोड़ी दोलक एक ऐसा दोलक है जिसमें किसी चकती का द्रव्यमान केन्द्र एक दृढ आधार से एक धात्विक तार द्वारा जुड़ा रहता है।

2.8 शब्दावली (Glossary)

अतानित	Unstretched

अभिकेन्द्रीय	Centripetal
अवितान्य	Inextensible
अस्थायी	Unstable
घूर्णी	Rotational
चकती	Disc
टेलर प्रमेय	Talyor's Theorem
धात्विक	Metallic
परवलय	Parabola
परिबद्ध क्षेत्र	Bound region
प्रवणता	Slope
बल युग्म	Torque
मरोड़ी	Twist
मरोड़ी दोलक	Torsional oscillator
लघु दोलन	small oscillation
वियोजन	Resolve
विश्लेषण	Analysis
सरल लोलक	Simple pendulum
संरक्षी	Conservative
स्थायी	Stable
स्पर्श रेखीय घटक	Tangential component
स्पर्शज्या	Tangent
स्वेच्छ	Arbitrary
त्रिज्य घटक	Radial component
त्रिविमीय	Three-dimensional

2.9 संदर्भ ग्रंथ (Reference books)

1.	Robert Resnick and David Halliday	Physics Part I	Wiley Eastern Ltd, New Delhi
2.	N.K. Bajaj	The Physics of Waves and Oscillations	TataMcGraw- Hill publishing Company Ltd, New Delhi
3.	एम. पी. सक्सेना, पी. आर. सिंह एस. एस. रावत	दोलन व तरंगे	कॉलेज बूक हाउस, जयपुर

2.10 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to self assessment questions)

1. $y = \frac{2c}{b}$ पर बिन्दु स्थायी संतुलन अवस्था में है क्योंकि $\frac{d^2y}{dt^2}$ का मान धनात्मक है। (यदि मान ऋणात्मक होता तो उस स्थिति में इस बिन्दु की अवस्था को अस्थाई संतुलन अवस्था कहते है।)

2. स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय में द्रव्यमान का विस्थापन यदि अल्प न होकर अधिक हो तो निकाय की गति सरल आवर्ती गति नहीं होगी। अधिक विस्थापन की स्थिति में स्प्रिंग का प्रत्यानयन बल $F = -ky$ नहीं होता है। चित्र 2.3 देखें।

3. हाँ, चूँकि आवर्तकल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

समी. (2.15)से आप जानते है कि

$$\frac{m}{k} = \frac{g}{y_0}$$

अतः $T = 2\pi\sqrt{\frac{y_0}{g}}$ से आवर्त काल की गणना की जा सकती है।

4. लम्बाई बढाने पर आवर्तकाल के मान में वृद्धि होगी।

5. नहीं, कोणीय विस्थापन अधिक होने की स्थिति में मरोड़ी दोलक सरल आवर्ती गति नहीं करेगा। ऐसी परिस्थिति में $\tau = -C\theta$ की पालना नहीं होती है।

2.11 अभ्यसार्थ प्रश्न (Exercises)

अति लघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. सरल आवर्त गति करने वाले किन्ही दो निकायों के नाम लिखिये।
2. कण के स्थायी संतुलन की स्थिति में कण की स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होती है अथवा अधिकतम?
3. द्रव्यमान - स्प्रिंग निकाय के लिये आवर्तकाल का सूत्र लिखिये।

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

4. क्षैतिज अवस्था में रखें स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय की सरल आवर्ती गति का वर्णन करते हुये इसकी अवकल समीकरण व्युत्पन्न कीजिये। इसका आवर्तकाल भी ज्ञात कीजिये।
5. सरल लोलक क्या है? सरल लोलक की गति का वर्णन करते हुये अवकल समीकरण व्युत्पन्न कीजिये। इसका आवर्तकाल भी ज्ञात कीजिये।
6. मरोड़ी दोलक क्या है? मरोड़ी दोलक की गति का वर्णन करते हुये अवकल समीकरण व्युत्पन्न कीजिये। यह स्पष्ट कीजिये कि
$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \delta)$

इसका एक हल है। इसका आवर्तकाल, जडत्व आघूर्ण पर किस प्रकार निर्भर करता है?

7. विभवकूप में कण की बन्धन ऊर्जा से क्या तात्पर्य है? स्थितिज ऊर्जा-विस्थापन वक्र में कण की स्थायी तथा अस्थायी संतुलन की स्थितियों की विवेचना कीजिये।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

8. एक 0.01 किग्रा द्रव्यमान का कण निम्न स्थितिज ऊर्जा क्षेत्र में गतिशील है-
$V(y) = 0.08y^2$ जूल/किग्रा
यहाँ y मीटर में है। यदि कण की कूल ऊर्जा 8×10^{-6} जूल हो तो समय विस्थापन संबंध ज्ञात कीजिये।

(उत्तर- $y = 0.1\sin(.4t + \phi)$ **)**

9. उस सरल लोलक की लम्बाई ज्ञात कीजिये जिसका आवर्तकाल एक सेकण्ड है।

(उत्तर - 0.25 मीटर**)**

10. एक 4.0 किग्रा द्रव्यमान के पिण्ड को एक स्प्रिंग पर लटकाने से इसकी लम्बाई में 0.16 मीटर की वृद्धि हो जाती है। इस पिण्ड को हटाकर 0.5 किग्रा के अन्य द्रव्यमान को इसी स्प्रिंग से लटकाया जाता है। इसे दोलित करे तो इसका आवर्तकाल क्या होगा?

(उत्तर - 0.28 सेकण्ड**)**

इकाई - 3

आवर्त दोलनों का अध्यारोपण -1
(Superpostion of Harmonic Oscillations-I)

इकाई की रूपरेखा

3.0 उद्देश्य
3.1 प्रस्तावना
3.2 अध्यारोपण सिद्धान्त एवं रैखिकता
3.3 समान आवृत्ति वाले दो संरेख आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण
3.4 असमान आवृत्तियों वाले दो संरेख आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण
3.5 सारांश
3.6 शब्दावली
3.7 संदर्भ ग्रंथ
3.8 बोध प्रश्नों के उत्तर
3.9 अभ्यासार्थ प्रश्न

3.0 उद्देश्य (Objectives)

आप इस इकाई को पढ़ने के बाद

- रैखिक व अरैखिक अवकल समीकरण में भेद करना सीख सकोगे;
- अध्यारोपण का सिद्धान्त क्या है तथा यह किस प्रकार की अवकल समीकरण के लिये यथार्थ है, समझ सकोगे;
- दो समान या असमान आवृत्तियों की दो संरेख आवर्ती दोलनों के अध्यारोपण के फलस्वरूप उत्पन्न परिणामी गति का विश्लेषण करने में सक्षम हो सकेंगे।

3.1 प्रस्तावना (Introduction)

प्रथम दो इकाइयों में आपने कण की एक विमीय सरल आवर्त गति के बारे में उदाहरणों सहित विस्तार से अध्ययन किया। प्रकृति में कई ऐसी घटनाऐं है जिनमें कण पर दो या दो से अधिक सरल आवर्त दोलन एक साथ कार्यरत रहते हैं। ध्वनिकी में ऐसे चिरपरिचित उदाहरण माइक्रोफोन डायाफ्राम (microphone diaphragm)या मानव कर्णड्रम (eardrum)है। इन पर विभिन्न आवृत्तियों के दोलन एक साथ पहुँचते हैं। डायाफ्राम अथवा कर्णड्रम की परिणामी गति इन विभिन्न दोलनों के अध्यारोपण (superposition)के कारण होती है। अत: इन्हें समझने के लिये अध्यारोपण सिद्धान्त और उसके अनुप्रयोग (application)का ज्ञान आवश्यक है। इस इकाई में इसी से सम्बन्धित ज्ञान अर्जित करेगें।

अध्यारोपण सिद्धान्त क्या है? इसका प्रयोग किस प्रकार की अवकल समीकरणों के लिये किया जा सकता है? इन प्रश्नों के उत्तर आप अनुच्छेद 3.2 में जान सकेगें। अनुच्छेद 3.3 में अध्यारोपण सिद्धान्त का प्रयोग करते हुये दो संरेख (collinear)सरल आवर्त गतियों के प्रभाव में

कण की परिणामी गति का अध्ययन कर सकोगे। यहाँ इन दोनों सरल आवर्त गतियाँ की आवृत्तियाँ समान है। अन्तिम अनुच्छेद 3.4 में उपरोक्त विश्लेषण उन स्थितियों के लिये किया गया है जब दोनों सरल आवर्त गतियों की आवृत्तियाँ असमान हैं। आप यह भी पढ़ेंगे कि यदि असमान आवृत्तियों में अन्तर न्यून है तो यह विस्पन्द की स्थिति उत्पन्न करते हैं।

3.2 अध्यारोपण का सिद्धान्त एबं रैखिकता (Superposition principle and linearity)

पूर्व इकाइयों 1 व 2 में आप ने एक विमीय दोलन करने वाले निकायों का विश्लेषण किया जिसमें गतिशील कण या पिण्ड सदैव साम्यावस्था के इर्द-गिर्द गति करता है। लघु आयामी दोलनों के लिये प्रत्यानयन बल F सदैव विस्थापन y के समानुपाती एवं विपरीत दिशा में रहने के कारण परिणामी दोलन सरल आवर्ती रहते हैं। दोलनों की अवकल गति समीकरणों में आपने देखा होगा कि इन में मात्र दो ही पद है, और कोई अन्य पद नहीं है जो y या $\frac{d^2y}{dt^2}$ की उच्चतम घात (higher power)को प्रदर्शित करता हो। इस प्रकार की समीकरण को रैखिक (linear)समीकरण कहा जाता है। इकाई-2 में सरल लोलक के उदाहरण में यदि आयाम लघु न हो तो उस स्थिति में $\sin\alpha$ के स्थान पर α नहीं लिखा जा सकता है। $\sin\alpha$ को α के पदों में निम्न तरीके से लिखा जाता है।

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{\lfloor 3} + \frac{\alpha^5}{\lfloor 5} - ......$$

अर्थात, प्रत्यानयन बल का मान α के अतिरिक्त α की उच्च घातों पर भी निर्भर करेगा। इस स्थिति में प्रत्यानयन बल रैखिक न होकर अरैखिक (nonlinear)हो जायेगा तथा गति की समीकरण को अरैखिक समीकरण कहेंगे।

रैखिक अवकल समीकरण का एक महत्वपूर्ण गुण यह है कि "इसके किन्हीं दो हलों का योग भी इसका एक हल होता है।" यह अध्यारोपण सिद्धान्त का कथन है। अध्यारोपण सिद्धान्त रैखिक अवकल समीकरण के लिये ही वैध है। इसे अरैखिक अवकल समीकरण के लिये लागू नहीं कर सकते हैं। अर्थात् अरैखिक अवकल समीकरण के दो विभिन्न हलों का योग इसी समीकरण का एक अन्य हल नहीं हो सकता है। इन कथनों को सिद्ध करने के लिये आप एक साधारण अरैखिक अवकल समीकरण का अवलोकन करें। माना एक तंत्र के दोलन एक दिशा में निम्न अरैखिक अवकल समीकरण से दिये जाते हैं।

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y + \alpha y^2 + \beta y^3 \qquad ...(3.1)$$

समी. (3.1)एक अरैखिक समीकरण है क्योंकि इसमें y के उच्च घात वाले पद y^2 व y^3 उपस्थित हैं। α व β नियतांक हैं। इस समीकरण को हल करना आसान नहीं है, फिर भी यदि किसी जटिल तरीके से हल कर लिया जाये और प्राप्त दो हल क्रमश: y_1 और y_2 है तो ये दोनों हल समी. (3.1)को संतुष्ट करेंगे। अत:

$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} = -\omega^2 y_1 + \alpha y_1^2 + \beta y_1^3$$

तथा $$\frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\omega^2 y_2 + \alpha y_2^2 + \beta y_2^3$$

इनका योग करने पर हमें निम्न समीकरण प्राप्त होती है।

$$\frac{d^2(y_1+y_2)}{dt^2} = -\omega^2(y_1+y_2) + \alpha(y_1^2+y_2^2) + \beta(y_1^3+y_2^3) \quad ...(3.2)$$

अब हम इसके एक अन्य हल y जो कि हल y_1 व y_2 के योग के बराबर है, पर विचार करते हैं। यदि $y = y_1 + y_2$ समी. (3.1)का हल है तो यह समी. (3.1)को संतुष्ट करेगा।

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2(y_1+y_2)}{dt^2} = -\omega^2(y_1+y_2) + \alpha(y_1+y_2)^2 + \beta(y_1+y_2)^3 \quad ...(3.3)$$

उपरोक्त समी. (3.2)व (3.3)की यर्थातथा मात्र तब ही संभव है जब निम्न शर्ते पूरी हों।

$$\frac{d^2(y_1+y_2)}{dt^2} = \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{d^2 y_2}{dt^2} \quad ...(3.4a)$$

$$-\omega^2(y_1+y_2) = -\omega^2 y_1 - \omega^2 y_2 \quad ...(3.4b)$$

$$\alpha(y_1+y_2)^2 = \alpha(y_1^2+y_2^2) \quad ...(3.4c)$$

$$\beta(y_1+y_2)^3 = \beta(y_1^3+y_2^3) \quad ...(3.4d)$$

प्रथम दो शर्ते जो समी. (3.4a)तथा (3.4b)में दर्शायी गयी हैं, सत्य है। शेष दो शर्त जो समी. (3.4c)व (3.4d)द्वारा दर्शायी गयी हैं, केवल तब ही सत्य होंगी जब α व β के मान शून्य हों।

दूसरे शब्दों में, हमारी यह अभिकल्पना कि $y_1 + y_2$ भी एक अरैखिक समीकरण का हल है, तब तक संभव नहीं है, जब तक कि अरैखिक समी. (3.1)में α व β का मान शून्य न हो। अत: हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते है कि किसी समीकरण के दो हलों का अध्यारोपण अपने आप में एक अन्य हल तब ही हो सकता है जब समीकरण रैखिक हों। अरैखिक समीकरण के लिये अध्यारोपण का सिद्धान्त लागू नहीं किया जा सकता है।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

1. अवकल समीकरण में किन पदों के कारण इसे रैखिक तथा अरैखिक कहते है?

_ _

_ _

_ _

3.3 समान आवृत्ति वाले दो संरेख आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण(Superposition of two collinear harmonic oscillation of same frequency)

मानाकि एक कण दो सरल आवर्त गतियों के प्रभाव में गति करता हैं। सरलता की दृष्टि से इन दोनों आवर्त गतियों के कारण कण का विस्थापन एक ही दिशा के अनुदिश लेते हैं, और यह दिशा y अक्ष के अनुदिश है। इन दोलनों की आवृत्तियाँ समान हैं परन्तु आयाम व कला नियतांक अलग अलग है। इन आवर्त गतियों के कारण विस्थापन क्रमश: y_1 व y_2 हो तो विस्थापन-समय संबंध निम्न तरीके से लिखे जा सकते हैं।

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \quad \text{...(3.5)}$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi_2) \quad \text{...(3.6)}$$

यहाँ A_1, A_2 आयाम व ϕ_1, ϕ_2 कला नियतांकों को प्रदर्शित करते हैं।

कण की परिणामी गति ज्ञात करने के लिये अध्यारोपण सिद्धान्त का उपयोग करने पर, परिणामी विस्थापन

त्रिकोणमिति से
$\sin(\alpha+\beta)$
$= \sin\alpha\cos\beta$
$+ \cos\alpha\sin\beta$

$$y = y_1 + y_2$$

समी. (3.5)तथा (3.6)से

$$y = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

$$= A_1 \sin\omega t \cos\phi_1 + A_1 \cos\omega t \sin\phi_1 + A_2 \sin\omega t \cos\phi_2 + A_2 \cos\omega t \sin\phi_2$$

$$= [A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2]\sin\omega t + [A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2]\cos\omega t \quad \text{...(3.7)}$$

मानकि $A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2 = A\cos\phi$ ...(3.8)

तथा $A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2 = A\sin\phi$ ...(3.9)

A व ϕ नियतांक है जिन्हें ज्ञात करना है।

समी. (3.8)व (3.9)का उपयोग कर समी. (3.7)को लिख सकते है

$$y = A\sin\omega t\cos\phi + A\cos\omega t\sin\phi$$

$$y = A\sin(\omega t + \phi) \quad \text{...(3.10)}$$

समी. (3.10)सरल आवर्त गति को प्रदर्शित करता है। अज्ञात नियतांक A ज्ञात करने के लिये समी. (3.8)व (3.9)का वर्ग कर योग करने पर

$$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2) = A^2$$

या $$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)} \quad \text{...(3.11)}$$

समी. (3.9)में समी. (3.8)का भाग लगाने पर नियतांक ϕ का मान ज्ञात किया जाता है।

$$\tan\phi = \frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2}$$

या $$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2}\right] \quad ...(3.12)$$

अत: एक ही आवृति की दो संरेख सरल आवर्त गतियों के प्रभाव में कण की गति एक सरल आवर्त गति है जिसका विस्थापन - समय संबंध निम्न है।

$$y = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)}.\sin\left[\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2}\right)\right] \quad ...(3.13)$$

समी. (3.13)से स्पष्ट है कि कण के आयाम और कला में परिवर्तन है परन्तु आवृति का मान अपरिवर्तनीय' है।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

2. दो संरेख सरल आवर्त गतियों के प्रभाव में गति कर रहे कण का अधिकतम आयाम कितना हो सकता है?

_ __

_ _

_ _

उदाहरण 3.1 एक कण दो समान आवृति वाले दो सरल आवर्त गतियों के प्रभाव में एक ही दिशा में गति करता है, प्रत्येक की आवृति 5 हर्टज है। यदि इनके आयाम क्रमश: 0.005 मीटर व 0.002 मीटर हों तथा कलान्तर 45° हो तो परिणामी गति का आयाम तथा कलान्तर ज्ञात कीजिये। परिणामी विस्थापन - समय संबंध का व्यंजक भी लिखिये।

हल: मानाकि प्रथम सरल आवर्त गति की कला शून्य है, अत: प्रश्नानुसार द्वितीय सरल आवर्त गति की कला 45° होगी।

अर्थात $\phi_1 = 0$

$\phi_2 = 45^\circ$

प्रश्नानुसार, प्रथम गति का आयाम $A_1 = 0.005$ मीटर

द्वितीय गति का आयाम $A_2 = 0.002$ मीटर

परिणामी गति का आयाम

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)}$$

$$= \sqrt{(0.005)^2 + (0.002)^2 + 2\times 0.005\times 0.002\times \cos 45^\circ}$$

$$= \sqrt{43.14\times 10^{-6}}$$

अतः $A = 6.57\times 10^{-3}$ मीटर

परिणामी गति का कला नियतांक

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{0.005\times\sin 0 + 0.002\times\sin 45}{0.005\times\cos 0 + 0.002\times\cos 45}\right]$$
$$= \tan^{-1}[0.2205]$$
$$\phi = 12.5^\circ = \frac{\pi}{14.4}$$

प्रत्येक आवर्त गति की आवृत्ति 5 हर्टज है, अत: परिणामी गति की आवृत्ति भी 5 हर्टज ही होगी।

$v = 5$ हर्टज

कोणीय आवृत्ति $\omega = 2\pi v$
$$= 2\pi\times 5$$
$= 10\pi$ रेडियन सेकण्ड$^{-1}$

A, ϕ व ω के इन मानों से कण का विस्थापन - समय संबंध निम्न होगा -

$$y = 6.57\times 10^{-3}\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{14.4}\right)$$

यहाँ विस्थापन y मीटर में तथा समय t सेकण्ड में है।

3.4 असमान आवृत्तियों वाले दो संरेख आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण (Superposition of two collinear harmonic oscillations for unequal frequencies)

आगामी इकाइयों में आप कई भौतिक घटनाओं से अवगत होगें जिसमें तंत्र का गतिशील भाग विभिन्न आवृत्तियों के दो सरल आवर्ती गतियों के प्रभाव में गति करता है। तंत्र की परिणामी गति का विश्लेषण करने हेतु हम दो आवर्ती दोलनों पर विचार करते है। सरलता की दृष्टि से इन गतियों के कला नियंताक शून्य लेते है। मानाकि इनके आयाम क्रमश: A_1 तथा A_2 है तथा कोणीय आवृत्तियाँ क्रमश: ω_1 व ω_2 हैं।

इन दो आवर्ती गतियों को आप निम्न प्रकार से लिख सकते है-

$$y_1 = A_1 \sin\omega_1 t \quad ...(3.14)$$
$$y_2 = A_2 \sin\omega_2 t \quad ...(3.15)$$

अध्यारोपण सिद्धान्त से, कण की परिणामी गति के लिये निम्न समीकरण लिखी जा सकती है।

$$y = y_1 + y_2$$
$$= A_1\sin\omega_1 t + A_2\sin\omega_2 t \quad ...(3.16)$$

समी.(3.16)को हल करने के उद्देश्य से

$\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = \omega_a$ (औसत आवृत्ति)(average frequency)

तथा $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \omega_m$ (मॉडुलित आवृत्ति)(modulate frequency)

मानने पर

$$\omega_1 = \omega_a - \omega_m$$

तथा $\omega_2 = \omega_a + \omega_m$

ω_1 व ω_2 के ये मान समी. (3.16)में रखने पर

$$y = A_1 \sin(\omega_a - \omega_m)t + A_2 \sin(\omega_a + \omega_m)t$$

$$= (A_1 + A_2)\sin\omega_a t \cos\omega_m t + (A_2 - A_1)\cos\omega_a t \sin\omega_m t \quad ...(3.17)$$

$Cos2\omega mt-sin2\omega mt = cos\ 2\omega mt$

मानाकि $(A_1 + A_2)\cos\omega_m t = A_m \cos\delta_m$ ...(3.18)

तथा $(A_2 - A_1)\sin\omega_m t = A_m \sin\delta_m$ ...(3.19)

अतः $y = A_m \sin(\omega_a t + \delta_m)$ ...(3.20)

समी. (3.18)व (3.19)का वर्ग कर योग करने पर

$$A_m = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos 2\omega_m t} \quad ...(3.21)$$

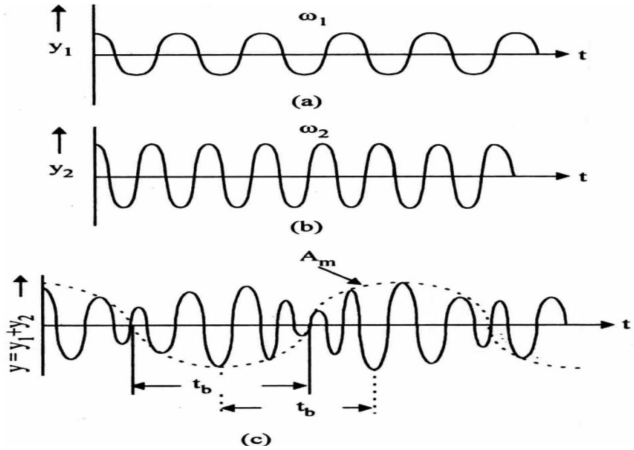
तथा समी. (3.19)में समी. (3.18)से भाग देने पर

$$\delta_m = \tan^{-1}\left[\left(\frac{A_2 - A_1}{A_2 + A_1}\right)\tan\omega_m t\right] \quad ...(3.22)$$

का मान प्राप्त किया जा सकता है। यहाँ A_m को मॉडुलित आयाम(modulate amplitude)तथा δ_m का मॉडुलित कला (modulate phase)कहते हैं। समी. (3.20)को देखने पर ऐसा प्रतीत होता है कि यह एक सरल आवर्त गति के लिये विस्थापन - समय संबंध है, परन्तु यह यर्थाथ (correct)नहीं है। इसका क्या कारण हो सकता है? वस्तुत: इसका मूल कारण मॉडुलित आयाम A_m तथा मॉडुलित कला δ_m में निहित हैं। A_m तथा δ_m एक नियतांक न होकर क्रमश: समी. (3.21)तथा समी. (3.22)के अनुसार समय के फलन है, जो समय के साथ परिवर्तित होते रहते हैं। हाँ, इस दोलन को औसत आवृत्ति ω_a का आवर्त (periodic)फलन अवश्य ही समझा जा सकता है।

चित्र 3.1 में (a)व (b)में दो आवृत्तियों ω_1 व ω_2 के लिये विस्थापन-समय वक्र दर्शाया गया है। चित्र 3.1 (c)में इन दोनों के अध्यारोपण के कारण उत्पन्न दोलन दर्शाये गये हैं। ये दोलन आवर्त (periodic)तो है पर सरल आवर्त (harmonic)नहीं।

c



चित्र 3.1

यदि $\omega_m = 2\pi$ तथा $\omega_a = 200\pi$ हो तो इनके आवर्त्तकाल क्रमश : $T_m =$ 1 से तथा 01.सेकण्ड होंगें । माडुलित आयाम A_m के आवर्त्तकाल सेकण्ड की 0.5 तुलना में औसत आवृत्ति ω_a से संबधित आवर्त्तकाल 0.01सेकण्ड हैं। अत:0.01 सेकण्ड से कम समय के लिये माडुलित आयाम को नियत माना जा सकता है ।

समी.(3.16) $y = y_1 + y_2 = A_1 \sin\omega_1 t + A_2 \sin\omega_2 t$

का समी. (3.20) $y = A_m \sin\left(\omega_a t + \delta_m\right)$

में रूपान्तरण की भौतिकी में उपोयोगिता पर विचार कीजिये। यदि कोणीय आवृत्तियाँ ω_1 व ω_2 लगभग बराबर परंतु ω_2 , ω_1 से अधिक हो तब

$$\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2 + \omega_1,$$

या
$$\omega_m \ll \omega_a$$

अर्थात इन परिस्थितियों में मॉडुलित आयाम A_m तथा मॉडुलित कला δ_m जो कि मॉडुलित आवृत्ति ω_m के फलन हैं, का समय (t) के साथ परिवर्तन अति न्यून होगा। इन्हें अल्प समयान्तराल $\dfrac{2\pi}{\omega_a}$ के लिये नियत माना जा सकता है। अत: समी. (3.20), कोणीय औसत आवृत्ति ω_a से आवर्त दोलन को प्रदर्शित करेगा। जब दो सरल आवर्त गतियाँ जिनकी कोणीय आवृतियां लगभग समान हो, एक दूसरे पर अध्यारोपित होती है तो इनके द्वारा परिणामी गति जिस घटना को प्रदर्शित करते हैं, विस्पन्द (beats)की घटना कहलाती है।

परिणामी गति का आयाम A_m अधिकतम $\left(A_1 + A_2\right)$ होगा जब

$$\cos 2\omega_m t = 1 = \cos 2\pi m$$ (m का मान 0,1,2...आदि)

या
$$2\omega_m t = 2\pi m$$

$$\left(\omega_2 - \omega_1\right)t = 2\pi\left(v_2 - v_1\right)t = 2\pi m$$

$$t = \frac{m}{v_2 - v_1} \qquad \left(\frac{1}{v_2 - v_1}, \frac{2}{v_2 - v_1}, \frac{3}{v_2 - v_1}, \ldots\right)$$

अतः उपरोक्त समयों पर आयाम का मान अधिकतम $\left(A_1+A_2\right)$ होता है। किन्हीं भी दो क्रमागत उच्चिष्ठों (maximas)में समयान्तराल $\frac{1}{v_2-v_1}$ है। अत: अधिकतम आयाम की आवृत्ति v_2-v_1 है।

परिणामी गति का आयाम निम्न अवस्थाओं में न्यूनतम $\left(A_2-A_1\right)$ रहता है।

जब $\cos 2\omega_m t=-1=\cos\left(2\pi+1\right)\pi$ {m=0,1,2.....}

$$2\omega_m t=\left(2m+1\right)\pi$$

$$t=\frac{2m+1}{2}\frac{1}{v_2-v_1} \qquad \left\{\frac{1}{2}\frac{1}{v_2-v_1},\frac{3}{2}\frac{1}{v_2-v_1},\ldots\right\}$$

उपरोक्त सभी समयों पर आयाम का मान न्यूनतम होगा। किन्ही भी दो क्रमागत निम्निष्ठों (minimas)के मध्य समयान्तर $\frac{1}{v_2-v_1}$ है। अत: न्यूनतम आयाम की आवृत्ति v_2-v_1 है।

आप देख सकते है कि किन्ही दो उच्चिष्ठों के बीच एक निम्निष्ठ है। दो सरल आवर्ती गतियों के अध्यारोपण के कारण परिणामी गति के आयाम में आवर्त (periodic)परिवर्तन की घटना को विस्पन्द कहते है। आयाम के एक उच्चिष्ठ के बाद एक निम्निष्ठ आने की घटना को वैज्ञानिक शब्दावली में विस्पन्द कहा जाता है। दो क्रमानुगत विस्पन्दों के समयान्तराल को विस्पन्द काल कहते है और इसे निम्न व्यंजक से लिखते है

$$t_b=\frac{1}{v_2-v_1}$$

तथा विस्पन्द आवृत्ति

$$v_b=v_2-v_1$$

अत: उपरोक्त विवरण से आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हो कि विस्पन्द आवृत्ति घटक आवर्त गतियों की आवृत्तियों के अन्तर के तुल्य है।

उदाहरण 3.2 एक रेखा के अनुदिश दो दोलनों को निम्न समीकरणों से प्रदर्शित किया जाता है।

$$y_1=0.03\sin 10\pi t$$
$$y_2=0.03\sin 12\pi t$$

$\because \sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

यहाँ y_1 व y_2 मीटर में तथा t सेकण्ड में है। परिणामी गति को प्रदर्शित करने वाली समीकरण प्राप्त कीजिये। विस्पन्द आवृत्ति का मान कितना होगा?

हल: अध्यारोपण सिद्धान्त से परिणामी गति को निम्न समीकरण से लिखा जा सकता है

$$y=y_1+y_2$$
$$=0.03\left(\sin 10\pi t+\sin 12\pi t\right)$$

$$= 0.06 \sin 11\pi t \cos \pi t$$

$$= 0.06 \cos \pi t \sin 11\pi t$$

यह समीकरण $y = A_m \sin \omega_a t$ के तुल्य है जिसमें

$$A_m = 0.06 \cos \pi t$$

$$\omega_a = 11\pi$$

विस्पन्द आवृत्ति = $\nu_2 - \nu_1$

$$= \frac{1}{2\pi}(\omega_2 - \omega_1)$$

$$= \frac{1}{2\pi}[12\pi - 10\pi] = 1 \text{ हर्ट्ज}$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{प्रश्नानुसार} \\ \omega_2 = 12\pi \\ \omega_1 = 10\pi\end{array}\right\}$

अतः परिणामी गति का समीकरण

$$y = (0.06 \cos \pi t) \sin 11\pi t$$

तथा विस्पन्द आवृत्ति 1 हर्ट्ज।

3.5 सारांश (Summary)

- अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुसार किसी रैखिक अवकल समीकरण के दो हलों का योग भी इस समीकरण का अन्य हल होता हैं।
- अरैखिक अवकल समीकरण में पद y के अतिरिक्त y के उच्च घातों वाले पद भी उपस्थित रहते है, तथा इसके लिये अध्यारोपण का सिद्धान्त लागू नहीं किया जा सकता है।
- दो समान आवृत्ति वाले दो संरेख आवर्ती दोलनों के अध्यारोपण के फलस्वरूप परिणामी गति सरल आवर्त गति होती है। इसकी आवृत्ति घटक गतियों की आवृत्ति के तुल्य होती है परन्तु आयाम व कला में परिवर्तन समी. (3.11)व समी. (3.12)के अनुसार होते है।
- असमान आवृति वाले दो संरेख आवर्ती दोलनों के अध्यारोपण के फलस्वरूप परिणामी गति सरल आवर्त गति नहीं होती है।
- यदि असमान आवृत्तियों में अन्तर इनके योग की तुलना में न्यून हो, उस स्थिति में विस्पन्द की घटना घटित होती है।
- विस्पन्द आवृत्ति, असमान आवृतियों के अन्तर के तुल्य होती है।

3.6 शब्दावली (Glossary)

अध्यारोपण	Superposition
अनुप्रयोग	Application
अरैखिक	Non linear
उच्चतम घात	Higher power
उच्चिष्ठों	Maximas

औसत आवृत्ति	Average frequency
कर्णड्रम	Eardrum
निम्निष्ठों	Minimas
माइक्रोफोन डायाफ्राम	Microphone diaphragm
मॉडुलित आवृत्ति	Modulate frequency
रैखिक	Linear
विस्पन्द	Beat
संरेख	Collinear

3.7 संदर्भ ग्रन्थ (Refrence books)

1.	N.K. Bajaj	The Physics of Waves and Oscillation	TataMcGraw- Hill publishing Company Ltd, New Delhi.
2.	M. Alonso And E.J.Finn	Fundamental University Physics vol I	Addison - Wesley Publishing Company
3.	एम. पी. सक्सेना,	दोलन व तरंगे	कॉलेज बूक हाउस,
4.	पी. आर. सिंह		जयपुर
5.	एस. एस. रावत		

3.8 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment questions)

1. यदि अवकल समीकरण में $\frac{d^2y}{dt^2}$ पद के अतिरिक्त एक अन्य पद में y हो तो रैखिक समीकरण कहलाती है। यदि y के अतिरिक्त y^2 या / और y^3 जैसे अन्य उच्च घात वाले पद भी उपस्थित हों तो ऐसी अवकल समीकरण अरैखिक कहलाती हैं।

2. दो संरेख सरल आवर्त गतियों के प्रभाव में गति कर रहे कण का अधिकतम आयाम घटक आवर्त गतियों के आयाम के योग के बराबर होता है। यह तब प्राप्त होता है जब घटक आवर्त गतियाँ का प्रारम्मिक कलान्तर शून्य हो।

3.9 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (very short answer type questions)

1. विस्पन्द आवृत्ति को घटक आवृत्तियों के पदों में लिखिये।
2. विस्पन्द काल का सूत्र लिखिये।
3. रैखिक व अरैखिक अवकल समीकरणें लिखिये।
4. विस्पन्द किसे कहते हैं?

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

5. अध्यारोपण सिद्धान्त का कथन लिखिये तथा सिद्ध कीजिये कि यह मात्र रैखिक अवकल समीकरण के लिये ही सत्य है।

6. दो संरेख सरल आवर्त गतियों को निम्न रूप से दिया जाता है।

$$y_1 = A_1 \sin \omega t, \quad y_2 = A_2 \sin(\omega t + \phi)$$

सिद्ध कीजिये कि इनके द्वारा किसी कण की परिणामी गति सरल आवर्त गति है। परिणामी गति के आयाम और कला नियतांक के लिये भी व्यंजक A_1, A_2 व ϕ के पदों में ज्ञात कीजिये।

7. एक समान आयाम एंव अल्पान्तर वाली आवृत्तियों की दो सरल आवर्त गतियाँ समय $t = 0$ पर एक ही कला में किसी कण पर कार्यरत है।

(a)परिणामी विस्थापन-समय संबंध ज्ञात कीजिये।

(b)प्रत्येक सरल आवर्त गति तथा परिणामी गति के विस्थापन - समय वक्र बनाइये तथा इसमें विस्पन्दकाल दर्शाइये।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

8. एक कण पर एक साथ कार्यरत दो संरेख सरल आवर्त गतियाँ निम्न रूप से दी जाती हैं-

$$y_1 = 0.3 \sin 2\pi t$$
$$y_2 = 0.2 \sin(2\pi t - \pi/3)$$

यहाँ y सेमी में तथा t सेकण्ड में है। कण के लिये परिणामी विस्थापन - समय संबंध ज्ञात कीजिये। **(उत्तर:** $y = 0.44 \sin\left(2\pi t - \frac{77\pi}{180}\right)$ सेमी**)**

9. एक ही दिशा के अनुदिश दो दोलनों को निम्न समीकरणों से प्रदर्शित किया जाता है-

$$y_1 = 0.05 \sin 8\pi t$$
$$y_2 = 0.05 \sin 10\pi t$$

यहाँ y मीटर में तथा t सेकण्ड में है। परिणामी गति की समीकरण प्राप्त कीजिये। विस्पन्द काल का मान भी ज्ञात कीजिये। **(उत्तर:** $y = (0.1 \cos \pi t) \sin 9\pi t$ मीटर,1 हर्टज**)**

10. निम्न में से प्रत्येक की संयुक्त गति की कोणीय आवृत्ति ज्ञात कीजिये।

(a) $\sin(2\pi t - \pi/4) + \cos 2\pi t$

(b) $\sin(10\pi t) + \cos(11\pi t + \pi/4)$

(c) $a \cos 2\pi v t + b \sin(2\pi v t + \pi/3)$ **(उत्तर:** (a) 2π ,(b) 10.5π ,(c) $2\pi v$ **)**

इकाई-4

आवर्त दोलनों का अध्यारोपण - 11
(Superposition of Harmonic Oscillations-II)

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य

4.1 प्रस्तावना

4.2 समान आवृत्तियों के दो लम्बवत आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण

4.3 असमान आवृत्तियों के दो लम्बवत आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण

4.4 सारांश

4.5 शब्दावली

4.6 संदर्भ ग्रन्थ

4.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

4.8 अभ्यासार्थ प्रश्न

4.0 उद्देश्य (Objectives)

आप इस इकाई को पढ़ने के बाद

- कण पर आरोपित समान आवृत्ति की दो लम्बवत सरल आवर्त गतियों के कारण कण की परिणामी गति के पथ (जो कि सामान्य रूप से दीर्घवृत्त होता है)को समझ सकेंगे;
- दो लम्बवत् सरल आवर्त गतियों के अध्यारोपण से प्राप्त परिणामी पथ की आकृति पर दोनो सरल आवर्त गतियों के मध्य कलान्तर के प्रभाव की जानकारी कर सकेंगे;
- सरल आवर्त गतियों की आवृत्तियों का अनुपात 2 : 1 होने पर परिणामी गति का समीकरण ज्ञात करने में सक्षम हो सकेंगे;
- परिणामी गति का पथ ज्ञात करने के लिए ग्राफीय विधि का प्रयोग करना सीख सकोगे ।

4.1 प्रस्तावना (Introduction)

पिछली इकाई-3 में आपने पढ़ा था कि किसी कण पर दो सरल आवर्त गतियाँ एक साथ किसी एक दिशा विशेष में कार्यरत हो तो परिणामी गति भी एक सरल आवर्त गति होती हैं । यहाँ इसका आयाम व कला प्रारम्भिक स्थितियों पर निर्भर करता है । यदि सरल आवर्त गतियाँ कण पर एक दिशा के अनुदिश न होकर लम्बवत दिशा में हो तब परिणामी गति किस प्रकार की होगी? इस प्रश्न का उत्तर जानने के लिये आवश्यक है कि इस तरह की स्थिति का गणितीय विश्लेषण किया जावे । इस इकाई में आप दो लम्बवत् सरल आवर्त गतियों के कण पर एक साथ

कार्यरत रहने पर कण की परिणामी गति का विस्तार से अध्ययन करेंगे । परिणामी गति से बनी आकृतियों को लिसाजू आकृतियाँ कहते हैं ।

अनुच्छेद 4.2 में कण पर समान आवृत्तियों की दो सरल आवर्त गतियों के परस्पर लम्बवत् दिशा में एक साथ कार्य करने पर कण की परिणामी गति ज्ञात करने के लिये आवश्यक समीकरण व्युत्पन्न करेंगे । यदि आवर्त गतियों में कलान्तर हो तो पथ किस प्रकार से परिवर्तित होता है यह भी आप पढ़ेंगे । आगामी अनुच्छेद 4.3 में सरल आवर्त गतियों की आवृत्ति का अनुपात 2 : 1 होने की स्थिति में गणितीय विश्लेषण के साथ-साथ ग्राफीय विधि द्वारा परिणामी पथ ज्ञात करेगें ।

4.2 समान आवृतियों के दो लम्बवत आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण (Superposition of two perpendicular harmonic oscillations having equal frequencies)

मान लीजिये कि बराबर आवृत्ति के दो लम्बवत् आवर्त गतियों के समक्षणिक (simultaneous)प्रभाव में कोई कण गति करता है । इसमें एक x अक्ष के तथा दूसरी y अक्ष के अनुदिश है तथा इनके आयाम क्रमश: a तथा b हैं । सरलता की दृष्टि से हम यह मान लेते हैं कि x अक्ष के अनुदिश दोलन का कला नियतांक δ है तथा y अक्ष के अनुदिश दोलन का कला नियतांक शून्य है । अत: आप यह कह सकते हैं कि इन दोलनों के मध्य कलान्तर है । इन दो लम्बवत सरल आवर्त गतियों को निम्न रूप से व्यक्त किया जाता है ।

$$x = a \sin(\omega t + \delta) \qquad \text{....(4.1)}$$

$$Y = b \sin \omega t \qquad \text{......(4.2)}$$

यहाँ x व y दो परस्पर लम्बवत् दिशाओं में सरल आवर्त गति कर रहे कण के विस्थापनों का मान है । अब आप कण की परिणामी गति के बारे में अध्ययन करेगें । कण द्वारा अनुगमित (followed)पथ समीकरण (4.1)तथा (4.2)में समय t को विलोपित कर अनुरेखित (trace)किया जा सकता है । ऐसा करने पर आपको एक ऐसा व्यंजक प्राप्त होगा जिसमें x, y व δ होंगे । समी (4.1)में ज्या (sine)के कोणांक (argument)का विस्तार करने पर

∵ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$\frac{x}{a} = \sin \omega t \cos\delta + \omega t \cos \sin\delta \qquad \text{.....(4.3)}$$

परन्तु समी (4.2)से $\sin \omega t = \frac{y}{b}$

अत: $\cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$

Sin ωt तथा cos ωt के ये मान समी. (4.3)मे रखने पर

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}\cos\delta + \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}\sin\delta}$$

$\because \sin^2\delta + \cos^2\delta = 1$

या $$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\cos\delta+\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\sin\delta$$

दोनो तरफ वर्ग करने पर

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\cos^2\delta-\frac{2xy}{ab}=\cos\delta\sin^2\delta-\frac{y^2}{b^2}\sin^2\delta$$

या $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\delta=\sin^2\delta \quad ...(4.4)$$

यह एक ऐसे दीर्घवृत्त (ellipse)की सामान्य समीकरण है जिसकी अक्ष निर्देशांक अक्ष से δ कोण पर आनत (inclined)है । अत: हम कह सकते है कि समान आवृतियों की दो लम्बवत् सरल आवर्त गतियों के प्रभाव में कण द्वारा अनुगमित पथ, सामान्य रूप, से एक दीर्घवृत्त होता है ।

अब आप कला नियतांक δ के कुछ विशिष्ट मानों के लिये इन बन्द वक्रों की आकृति के सम्बन्ध में अध्ययन करेंगे ।

(a) δ = 0

इस स्थिति में समी. (**4.4**)निम्न समीकरण में लघुकृत/परिवर्तित हो जाती है ।

(cos δ=1,sin δ=0)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2xy}{ab}=0$$

या $$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=0$$

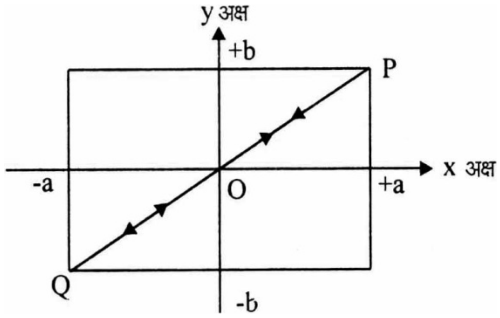
या $$\left(y-\frac{b}{a}x\right)^2=0 \quad ...(4.5)$$

यह समी (4.5)संपाती (coincidence)सरल रेखाओं के युग्म (pair)को प्रदर्शित करती है, जिसकी प्रवणता (slope) $\frac{b}{a}$ धनात्मक है तथा मूल बिन्दु से गुजरती है । परिणामी गति सरल रेखीय (rectilinear)तथा 2a व 2b भुजाओं वाले आयत के विकर्ण (diagonal)के अनुदिश होती है । गति इस प्रकार होती है कि विस्थापन x व y के चिन्ह एक जैसे होते है, दोनो धनात्मक अथवा दोनों ऋणात्मक । यहाँ आप चित्र 4.1 देखें । क्या आप यह बता सकते है कि कण रेखा PQ पर किस समय कहाँ रहता है? यह जानने के लिये समीकरण (4.1)व (4.2)को δ=0 रखने के बाद पुन: लिखते हैं तो,

X= a sin ωt

Y= b sin ωt

इनसे पुन: आप $y=\frac{b}{a}x$ प्राप्त कर सकते हैं, जो कि $\frac{b}{a}$ प्रवणता वाली सरल रेखा का समीकरण है । समय t = 0 पर x व y का मान शून्य है, अत: समय t = 0 पर कण की स्थिति O पर है ।



चित्र 4.1

जैसे जैसे समय व्यतीत होता है ज्या (sine)का मान बढ़ता जाता है और $\omega t=\frac{\pi}{2}$ पर x का मान a तथा y का मान

b हो जाता है । अत: इस समय कण O से प्रारम्भ होकर P तक पहुँचता है । इस समय के बाद, x व y का मान कम होने लगता है और $\omega t=\pi$ पर पुन: बिन्दु O पर पहुँच जाता है । ωt = π से $\frac{3\pi}{2}$ समय में कण O से Q तक पहुँचता है और ωt का मान $\frac{3\pi}{2}$ से 2π होने पर कण पुन: Q से O बिन्दु पर आ जाता है । इस प्रकार कण सरल रेखा POQ के अनुदिश गति करता है । इसे ही प्रकाशिकी में रेखा ध्रुवित कम्पन (linearly polarized vibration)कहते हैं ।

(b) $\delta=\frac{\pi}{2}$

इस स्थिति में समीकरण (4.4)निम्न रूप ले लेती है-

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (4.6)$$

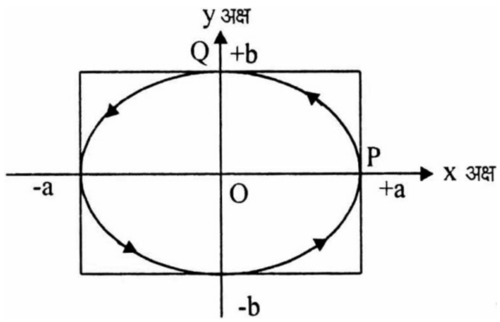
यह समी (4.6)एक दीर्घवृत्त की है जिसकी मुख्य (principal)अक्ष [दीर्घ (Mojor)एवं लघु (minor)अक्ष] x व y अक्ष के अनुदिश है, जैसा कि चित्र 4.2 में दर्शाया गया है । कण दीर्घवृत्तीय पथ पर गति करता है । इसकी गति की दिशा ज्ञात करने के लिये समीकरण (4.1)

तथा 4).(2में $\delta=\frac{\pi}{2}$ रखने पर

$$X = a \sin=(\omega t + \pi/2)=a \cos\omega t$$

$$Y = b \sin=\omega t$$

इन समीकरणों से भी दीर्घवृत्त की समीकरण (4.6)पुन: प्राप्त की जा सकती है । समय t = 0 पर x = a तथा y = 0 है, अत: कण समय t=0 पर बिन्दु P पर है । अब समय के बढ़ने पर x के मान में कमी तथा y के मान में वृद्धि होने लगती है और $\omega t = \pi/2$ पर इनके मान क्रमश: 0 व 3 हो जाते हैं ।



चित्र 4.2

इस समय में कण P से बिन्दु Q पर पहुँच गया है । कण की परवर्ती (subsequent)ए गति को चित्र 4.2 में तीर से दिखाया गया है । कण वामावर्त (anticlockwise)दिशा में एक दीर्घवृत्त अनुरेखित करता है, इसे ही प्रकाशिकी में वामावर्त दीर्घवृत्तीय ध्रुवित कम्पन (left handed elliptically polarized vibration)कहते हैं । विद्युत चुम्बकीय तरंग का घूर्णी विद्युत सदिश (rotating electric field vector)ही एक तल में सीमित रहते हुये इसकी नोक (tip)वामावर्त दिशा में एक दीर्घवृत्त अनुरेखित करती है ।

यदि x दिशा के अनुदिश आयाम a,y दिशा के अनुदिश आयाम b के बराबर हो तब कण के पथ में किस प्रकार का परिवर्तन अपेक्षित है?

समीकरण (4.6)में a=b रखने पर

$$X^2+y^2=a^2 \quad \text{...(4.7)}$$

प्राप्त होगा । यह एक वृत्त का समीकरण है, तथा कण वामावर्त वृत्ताकार पथ पर गति करेगा ।

अत: “समान आयामों एंव आवृत्तियों के दो लम्बवत आवर्त दोलनों, जो $\pi/2$ कलान्तर में है, अध्यारोपण के कारण उत्पन्न गति, एक समान वृत्ताकार गति के तुल्य. है जिसमें वृत्त की त्रिज्या दोलन के आयाम के बराबर है" । विलोमत: (conversely), एक समान वृत्ताकार गति को ऐसे दो लम्बवत सरल आवर्त गतियों में वियोजित किया जा सकता है जिनके आयाम व आवृतियाँ बराबर हैं परन्तु कला में $\pi/2$ का अन्तर है ।

(c) $\delta = \pi$

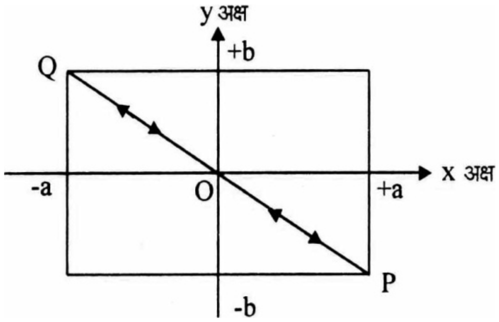
इस स्थिति में समीकरण (4.4)निम्न रूप में परिवर्तित हो जाती है-

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{2xy}{ab}=0$$

या

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=0 \quad \text{...(4.8)}$$

समीकरण (4.8)संपाती सरल रेखाओं के युग्म को प्रदर्शित करती है, जिनकी प्रवणता $-\frac{b}{a}$ है, जो ऋणात्मक है । ये मूल बिन्दु से गुजरती है । परिणामी गति सरल रेखीय है ।



चित्र 4.3

चित्र 4.2 में दर्शाया गया कण का दीर्घवृत्ताकार पथ, सरल रेखा में परिवर्तित हो गया है, देखें 4.3।

(d) $\delta = \frac{3\pi}{2}$

इस स्थिति में समीकरण (4.4)निम्न समीकरण में परिवर्तित हो जाती है-

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

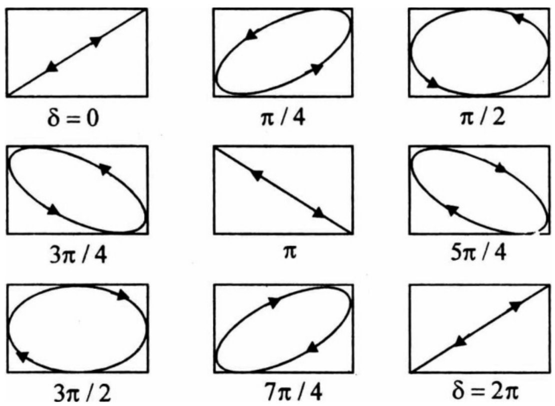
तथा समी. (4.1)और (4.2)से

$$x = a\sin\left(\omega t+\frac{3\pi}{2}\right) = -a\cos\omega t$$

$$y = b\sin\omega t$$

से भी इसे प्राप्त किया जा सकता है । यहाँ भी स्थिति (b)δ+π/2 की तरह कण का पथ एक दीर्घवृत्त है परन्तु इसकी गति की दिशा दक्षिणावर्त है । प्रकाशिकी में इस तरह के कम्पन को दक्षिणावर्त दीर्घवृत्तीय ध्रुवित (right handed elliptically polarised)कम्पन कहते है ।

शून्य से 2π कलान्तर परास δ के कुछ अन्य मानों के लिये बढ़ते क्रम में कण का गति पथ चित्र 4.4 में दर्शाया गया है ।



चित्र 4.4

बोध प्रश्न (Self assessement questions)

1. दो लम्बवत सरल आवर्त गतियों के प्रभाव में एक कण गति कर रहा है । इनका प्रारम्भिक कलान्तर α है तथा वामावर्त दिशा में कण की गति है । कितने न्यूनतम कलान्तर के बाद कण दक्षिणावर्त दिशा में उसी प्रकार के पथ पर गति करेगा?

- -
- -
- -

2. एक कण x2+y2=a2 पथ पर गति कर रहा है । क्या इसे दो लम्बवत सरल आवर्त गतियों का संयोजन माना जा सकता है? यदि हीं तो संभावित घटकों के समीकरण लिखिये ।

- -
- -
- -

उदाहरण 4.1 दो लम्बवत् सरल आवर्त गतियों x= 4 sinωt मीटर तथा y= 3sin(ωt+ α)के परिणामी गति पथ का समीकरण ज्ञात कीजिये जब α=0, $\pi/2$ तथा π हो ।

हल : प्रश्नानुसार सरल आवर्त गतियों के समीकरण है-

$$X = 4 \sin \omega t$$

$$Y = 3 \sin(\omega t+ \alpha)$$

$$Y =(\sin\omega t \cos\alpha +\cos \omega t \sin\alpha)$$

$$y = 3(\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha)$$

$$y = 3\left[\frac{x}{4}\cos\alpha + \sqrt{1-\frac{x^2}{16}}.\sin\alpha\right]$$

$$\left(y-\frac{3x}{4}\cos\alpha\right) = 3\left(1-\frac{x}{16}\right)^{1/2} \sin\alpha$$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$$\left(y-\frac{3x}{4}\cos\alpha\right)^2 = 9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)\sin\alpha$$

α=0 पर

$$\left(y-\frac{3x}{4}\right)^2 = 9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)\times 0 = 0$$

या $$y-\frac{3x}{4}=0$$

या $$y-\frac{3}{4}x$$

अत: α=0 पर एक सरल रेखा प्राप्त होगी जिसकी प्रवणता $\frac{3}{4}$ है ।

α= π/2 पर

$$\left(y-\frac{3x}{4}\times 0\right)^2=9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)\times 1$$

या $$y^2=9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)$$

या $$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{16}=1$$

α= π/2 पर एक दीर्घवृत्त प्राप्त होता है जिसकी अर्द्ध दीर्घ अक्ष *4* मीटर व अर्द्ध लघु अक्ष *3* मीटर है ।

***α= π* पर**

$$\left[y-\frac{3x}{4}(-1)\right]^2=9\left(1-\frac{x^2}{16}\right)\times 0$$

या $$\left(y+\frac{3x}{4}\right)^2=0$$

या $$y=-\frac{3x}{4}$$

अत: α= π पर एक सरल रेखा प्राप्त होती है, जिसकी प्रवणता $-\frac{3}{4}$ है ।

4.3 असमान आवृत्तियों के दो लम्बवत् आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण (Superposition of two perpendicular harmonic oscillations having unequal frequencies)

जब दो लम्बवत सरल आवर्त गतियों की आवृत्तियाँ बराबर होती है तब कण का पथ सरल रेखा या दीर्घवृत्त या तिर्यक दीर्घवृत्त हो सकता है । यह इस बात पर निर्भर करेगा कि दोनों गतियों में प्रारम्भिक कलान्तर कितना है? परन्तु यदि आवृत्तियाँ असमान हों तो परिणामी गति बहुत ही जटिल होती है जिसका गणितीय विश्लेषण कठिन है तथापि हम कुछ विशिष्ट उदाहरणों से यह प्रदर्शित करेगें कि कण द्वारा तय किया गया पथ किस प्रकार का है । जे. ए लिसाजू (1822-1880)ने इस तरह की गतियों पर विस्तृत अध्ययन किया था । उस के नाम पर

इन पथों को लिसाजू आकृतियाँ कहते है । अब आप उस स्थिति में अध्यारोपण का अध्ययन करेगें जब दो सरल आवर्त गतियों की आवृत्तियों का अनुपात 2 : 1 है ।

जब आवृत्तियों का अनुपात 2 : 1 हो-

हम यहाँ यह मानते है कि x-अक्ष के अनुदिश सरल आवर्त गति की आवृत्ति ω_2,y अक्ष के अनुदिश सरल आवर्त गति की आवृत्ति ω_1 से दो गुना है । अथार्त् $\omega_1 = \omega$ और $\omega_2 = 2\,\omega$

अब दो सरल आवर्त गतियों को निम्न रूप में लिखा जा सकता है:-

$$X = a \sin (2\,\omega t + \delta) \qquad ...(4.10)$$

$$Y = b \sin \omega t \qquad ...(4.11)$$

यहाँ a व b क्रमश: उनके आयाम है तथा δ उनके मध्य कलान्तर है । लिसाजू आकृति का चित्र विश्लेषीय (analytical)विधि या आलेखी/ग्राफी (graphical)विधि से ज्ञात किया जा सकता है । विश्लेषीय विधि में उपरोक्त समी. (4.10)व समी. (4.11)से समय t को विलोपित करते हैं । समी. (4.10)में ज्या के कोणांक का विस्तार करने पर

$$\frac{x}{a} = \sin 2\omega t \cos \omega t \cos\delta + \cos 2\,\omega t\ \sin\delta$$

$$= 2\sin\omega t \cos \omega t \cos\delta + (2\cos^2 \omega t - 1)\sin\delta$$

समी. (4.11)से

$$\sin \omega t = \frac{y}{b} \text{ तथा } \cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

अत:

$$\frac{x}{a} = 2\frac{y}{b}\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\cos\delta + \left[2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) - 1\right]\sin\delta$$

$$\left(\frac{x}{a} - \sin\delta\right) = \frac{2y}{b}\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}\cos\delta - \frac{2y^2}{b^2}\sin\delta$$

$$\left(\frac{x}{a} - \sin\delta\right) + \frac{2y^2}{b^2}\sin\delta = \frac{2y}{b}\sqrt{1 - y^2/b^2}.\cos\delta$$

दोनो तरफ वर्ग कर सरल करने पर

$$\left(\frac{x}{a} - \sin\delta\right)^2 + \frac{4y^4}{b^4}\sin^2\delta = \frac{4y^2}{b^2}\left(\frac{x}{a} - \sin\delta\right)\sin\delta$$

$$= \frac{4y^2}{b^2}\cos^2\delta - \frac{4y^4}{b^4}\cos^2\delta$$

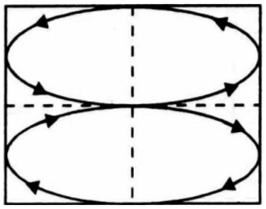
$$\left(\frac{x}{a} - \sin\delta\right)^2 + \frac{4y^4}{b^4} + \frac{4y^2}{b^2}\left(\frac{x}{a}\sin\delta - \sin^2\delta - \cos^2\delta\right) = 0$$

$$\left(\frac{x}{a} - \sin\delta\right)^2 + \frac{4y^2}{b^2}\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{x}{a}\sin\delta - 1\right) = 0 \qquad ...(4.12)$$

यह समी. (4.12)चतुर्थ कोटि की है । आम तौर पर, ऐसी समीकरण दो बन्द पाशों (loops)को प्रदर्शित करती है । δ के किसी भी मान के लिये समी. (4.12)को निर्देशांक ज्यामिती की सहायता से अनुरेखित किया जा सकता है । $\delta = 0$ मान के लिये समीकरण एक सरल रूप ले लेती है ।

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{b^2}\left(\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0 \qquad ....(4.13)$$

यह समी (4.13)अंग्रेजी के आठ के अंक (8)जैसा चित्र बनाते हुये 2 पाश बनाती है (चित्र 4.5 देखें)।



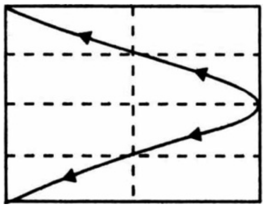
चित्र 4.5

$\delta = \pi$ तथा 2π पर भी परिणामी गति $\delta = 0$ जैसा ही चित्र (आठ का अंक)बनाती है ।

$\delta = \pi/2$ पर समी (4.12)निम्न समीकरण में रूपान्तरित हो जाती है ।

$$y^2=\frac{-b^2}{2a}(x-a) \qquad ......(4.14)$$

जो एक परवलय का समीकरण है जिसका शीर्ष (vertex)(a,0)है । देखें चित्र 4.6 ।



चित्र 4.6

जैसा कि आपने देखा कि विश्लेषीय विधि अत्यन्त कठिन है अत: कुछ स्थितियों ($\delta=0$ व $\delta = \pi/2$)के लिये हम ग्राफीय विधि से परिणामी गति को समझने का प्रयास करते हैं ।

ग्राफीय विधि (Graphical method)

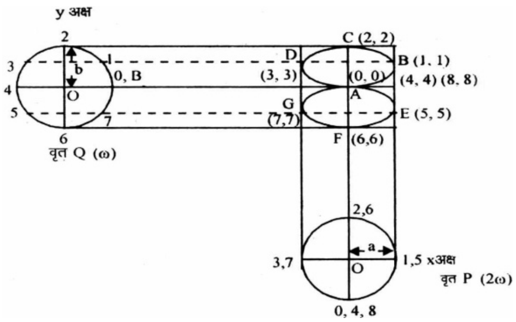
इकाई-1 में आपने पढ़ा था कि एक समान कोणीय चाल से गति करते कण की वृत्तीय गति के, वृत्त के व्यास पर प्रक्षेप सरल आवर्त गति करते हैं । सरल आवर्त गति का आयाम वृत्त की त्रिज्या द्वारा तथा सरल आवर्त गति की आवृत्ति कण की कोणीय चाल द्वारा प्रदर्शित होती है । समय के साथ दोनों वृत्तों में कण की स्थिति के संयुक्त रूप से x-y तल पर निरूपित करने की विधि को ग्राफीय विधि कहते हैं ।

मान लीजिये कि एक सरल आवर्त गति x अक्ष के अनुदिश है जिसका आयाम a तथा कोणीय आवृत्ति 2ω है । दूसरी सरल आवर्त गति y अक्ष के अनुदिश है जिसका आयाम b तथा कोणीय आवृत्ति ω है । इनको क्रमश: a त्रिज्या के वृत्त P तथा b त्रिज्या के वृत्त Q से चित्र

4.7 में दिखाया गया है । वृत्त P को चार बराबर भागों में तथा वृत्त Q को आठ बराबर भागों में बाँटा गया है । विभिन्न कलान्तर की स्थितियाँ निम्न प्रकार से हैं ।

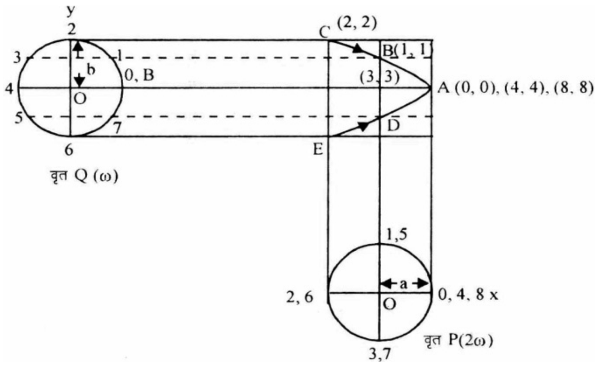
(a) शून्य कलान्तर (δ=0)

प्रारम्भ में दोनों गतियों में कलान्तर शून्य होने के कारण t=0 समय पर दोनों वृत्तों पर कण अपनी-अपनी शून्य स्थिति में है, इसके कारण संयोजित गति करने वाले कण की स्थिति A(0,0)बिन्दु पर होगी ।



चित्र 4.7

समय जैसे-जैसे बढ़ता है कण की स्थिति दोनों वृत्तों में 0 से बढ़कर 1 हो जाती है । वृत्त P में कोणीय चाल वृत्त Q की तुलना में दो गुना है अत: वृत्त P की परिधी पर तय की गयी दूरी वृत्त Q की तुलना में दो गुना होगी । इस प्रकार वृत्तों पर कण की स्थिति (1,1)होगी जिसके कारण संयुक्त गति को B पर दर्शाया गया है । समय गुजरने पर जब वृत्त P में कण अर्धवृत्त पार कर लेता है, वृत्त Q में कण चौथाई वृत्त ही पार करता है । चित्र में यह स्थिति (2,2)है । इसके कारण संयुक्त गति को C बिन्दु से दर्शाया गया है । इस प्रकार वृत्तों P व Q की (3,3), (4,4)... स्थितियों से बना वक्र ABCDEFGA, जिसकी आकृति अंक 8 की जैसी है, चित्र 4.7 में देखा जा सकता है ।

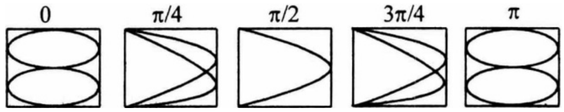


चित्र 4.8

(a) π/2 कलान्तर

यदि दोनों गतियों में कलान्तर $\pi/2$ हो तो इस स्थिति को चित्र 4.8 में दर्शाया गया है । चित्र 4.7 से तुलना करने पर आप पायेगें कि वृत्त P में दर्शायी कण की (x की दिशा में)गति वामावर्त दिशा में वृत्त Q में दर्शायी कण की (x दिशा में)आवर्त गति से $\pi/2$ कलान्तर में अधिक

है । प्रारम्भ में कण वृत्तों पर 0 की स्थिति में होते है । इस कारण परिणामी गति को A(0,0)से दर्शाया गया है । इस प्रकार, समय व्यतीत होने के साथ वृत्त पर स्थितियां (1,1), (2,2), (3, 3)......(8, 8)होती हैं जिससे कम्पित कण की स्थितियाँ B,C,B,A,D,E,D तथा A होगी । इस परिस्थिति में लिसाजू आकृति दो संपाती परवलयों को प्रदर्शित करती है । शून्य से π कलान्तर परास में δ के कुछ अन्य मानों के लिये बढ़ते क्रम में कण की गति का पथ आवृत्ति अनुपात 2 : 1 के लिये निम्न चित्र 4.9 में दर्शाया गया है ।



चित्र 4.9 आवृत्ति 2:1

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

3. उपरोक्त चित्र 4.9 से कौनसा एक विशेष तथ्य दृष्टिगोचर होता है, बताइये ।

   -

   -

4. अनुच्छेद 4.3 में 2 : 1 अनुपात वाली सरल आवर्त गतियों की परिणामी गति का विश्लेषण किया गया है यदि अनुपात 1 : 2 हो तो किस प्रकार का परिवर्तन अपेक्षित है?

   -

   -

4.4 सारांश (Summary)

- समान आवृत्तियों की दो लम्बवत सरल आवर्त गतियों के प्रभाव कण द्वारा अनुगमित पथ, सामान्य रूप से एक दीर्घवृत्त होता है ।
- समान आवृत्तियों की दो लम्बवत् सरल आवर्त गतियों के मध्य विशेष कलान्तर (δ=0 या π)होने पर दीर्घवृत्त एक रेखा में रूपान्तरित हो जाता है ।
- समान आवृत्तियों की दो लम्बवत् सरल आवर्त गतियों की परिणामी गति में, दीर्घवृत्त पर कण की गति का वामावर्त या दक्षिणावर्त होना, दोनों आवर्त गतियों के कलान्तर पर निर्भर करता है ।
- यदि आवृत्तियाँ 2 : 1 अनुपात में हो तो ऐसी स्थिति में दो लम्बवत् सरल आवर्त गतियों की परिणामी गति दो बन्द पाश (लूप)बनाती है ।
- यदि आवृत्तियाँ 2 : 1 अनुपात में हो तथा लम्बवत सरल आवर्त गतियों में कलान्तर प्र π/2 हो तो परिणामी गति का पथ एक संपाती परवलय होता है ।

4.5 शब्दावली (Glossary)

अनुरेख	Trace

अनुगमित	Followed
आनत	Inclined
कोणांक	Argument
ग्राफीय	Graphical
ज्या	Sine
दीर्घ	Major
दीर्घवृत्त	Ellipse
परवर्ती	Subsequent
प्रवणता	Slope
पाश	Loop
मुख्य	Principal
युग्म	Pair
लघु	Minor
रेखा ध्रुवित प्रकाश	Linearly polarised light
वामावर्त	Anticlockwise, left handed
विकर्ण	Diagonal
विद्‌युत क्षेत्र सदिश	Electric field vector
विलोमत:	Conversely
विश्लेषात्मक	Analytical
शीर्ष	Vertex
समक्षणिक	Simultaneous
सरलरेखीय	Rectilinear
संपाती	Coincident

4.6 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

N.K Bajaj	The Physics of Waves and Oscillations	Tata Mc Graw-Hill Publishing Company Ltd.New Delhi.
N. Subrahmanyam and Brij Lal	A Text Book of Sound	Vikash Publishing HousePvt Ltd., New Delhi.

4.7 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to Self assessment questions)

1. यदि प्रारम्भिक कलान्तर α है तो $\alpha+\pi$ कलान्तर पर उसी प्रकार का पथ प्राप्त होगा परन्तु कण की दिशा पहले से विपरीत हो जायेगी। अत: यदि α कलान्तर पर वामावर्त दिशा है तो $\alpha+\pi$ पर उसी तरह के पथ क लिए दक्षिणावर्त दिशा होगी ।

2. हाँ, संभावित घटक निम्न होगें ।

   $X = a \sin \omega t$

   $Y = a \sin (\omega t + \pi/2)$
3. 4.9 चित्र से यह स्पष्ट होता है कि आवृति अनुपात 2 : 1 होने पर y-दिशा में कण का पथ प्रत्येक कलान्तर के लिये y अक्ष पर दो बार स्पर्श करता है ।
4. यदि आवृति अनुपात 2 : 1 के स्थान पर 1 : 2 कर दिया जावे तो कण का पथ चित्र 4.9 में दिखाये पथ जैसा ही होगा परन्तु 90^0 से घूर्णित होगा ।

4.8 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

लघुत्तरात्मक प्रश्न (Short answer type questions)

1. एक ही दिशा में कार्यरत समान आवृत्ति की दो सरल आवर्त गतियों की समीकरण लिखिये जो $\frac{\pi}{4}$ कलान्तर में हों ।
2. लम्बवत दिशा में कार्यरत दो समान आवृत्ति की सरल आवर्त गतियों की समीकरण लिखिये जिनका कलान्तर π हो ।
3. लम्बवत दिशा में कार्यरत दो सरल आवर्त गतियों की समीकरण लिखिये जिनके आयाम व आवृति दोनों का अनुपात 2 : 1 तथा कलान्तर $\frac{\pi}{4}$ हो ।

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

4. समान आवृत्ति की दो लम्बवत सरल आवर्त गतियों की परिणामी गति की व्याख्या कीजिये ।
5. 2 : 1 अनुपात आवृत्ति की दो लम्बवत सरल आवर्त गतियों की परिणामी गति की विवेचना कीजिये ।
6. सिद्ध कीजिये कि किसी कण पर समान आवृत्ति एवं समान आयाम की लम्बवत् दो सरल आवर्त गतियों की परिणामी गति का पथ वृत्ताकार होगा ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

7. दो लम्बवत सरल आवर्त गतियों के आयाम 1 : 2, आवृत्ति 1 : 2 अनुपात में हैं तथा कलान्तर ना $\pi/2$ है । इनके द्वारा परिणामी गति का पथ ज्ञात कीजिए ।
8. दो लम्बवत सरल आवर्त गतियों $x=4\cos\omega t$ मीटर तथा $y=3\cos(\omega t+\alpha)$के परिणामी गति की पथ की समीकरण ज्ञात कीजिये जब $\alpha=0$, $\pi/2$ तथा $\pi/$ हो ।

   $$\text{(उत्तर } \alpha = 0 : y = \frac{3}{4}, \alpha = \pi/2 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1, : \alpha = \pi : y = \frac{-3}{4} x)$$
9. उपरोक्त प्रश्न में प्रत्येक स्थिति के लिये कण के पथ कौ आलेखित कीजिये और बताइये कि कण पथ पर किस दिशा में गति करता है?

इकाई-5

अवमंदित दोलन-I

(Damped Oscillations-I)

इकाई की रूपरेखा

5.0 उद्देश्य
5.1 प्रस्तावना
5.2 अवमंदन बल
5.2.1 अवमंदन बल के प्रभाव में कण की गति
5.3. अवमंदित आवर्ती दोलक
5.4 अवमंदित आवर्ती दोलक की गति का समीकरण व इसका हल
5.5 सारांश
5.6 शब्दावली
5.7 संदर्भ ग्रन्थ
5.8 बोध प्रश्नों के उत्तर
5.9 अभ्यासार्थ प्रश्न

5.0 उद्देश्य (Objective)

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप

- अवमंदन बलों की अवधारणा के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे;
- अवमंदन बलों के प्रभाव में कण की गति के अवमंदन की व्याख्या कर सकेंगे;
- आवर्त गति करते हुए पिण्ड या कण (आवर्ती दोलक)की अवमंदित गति का अध्ययन कर सकेंगे;
- अवमंदित आवर्ती दोलक की विभिन्न अवमंदन की स्थितियों में गति की विशेषताओं की जानकारी प्राप्त कर सकेंगे ।

5.1 प्रस्तावना (Introduction)

पिछली इकाईयों में आपने आवर्ती, सरल आवर्ती गति तथा दोलन के बारे में जानकारी प्राप्त की है । यह सभी गतियां एक नियत कालान्तर के बाद दुहराती है । इकाई-3 व इकाई-4 में आपने इन सरल आवर्त गतियों के अध्यारोपण के प्रभाव का भी अध्ययन किया । इस इकाई में आप अवमंदित दोलनों की जानकारी कर उनकी गति का विभिन्न परिस्थितियों में अध्ययन करेंगे। इसी संदर्भ में अनुच्छेद 5.2 में अवमंदन बल जैसे-श्यान बल, घर्षण बल की व्याख्या कर उनके प्रभाव में कण की गति का विवेचन किया गया है । अनुच्छेद 5.3 में आप अवमंदित आवर्ती दोलक की गति का अध्ययन करेंगे, जबकि अनुच्छेद 5.4 में इस आवर्ती दोलक की गति का अध्ययन विभिन्न अवमंदन की स्थितियों में किया गया है ।

5.2 अवमन्दन बल (Damping force)

जिन बलों के प्रभाव में, आवर्ती दोलन करते हुए कणों या पिण्डों की गति का अवमन्दन (damping)हो जाता है या यह कहें कि उनके आयाम समय के साथ धीरे-धीरे कम होते जाते हैं, तो इन बलों को अवमन्दन बल कहते हैं ।

सामान्य रूप से जब कोई कण या पिण्ड किसी माध्यम में गति करता है तो माध्यम के सम्पर्क में आते ही उस कण या पिण्ड पर घर्षण बल (frictional force)व श्यान बल (viscous force)लगने लगते हैं । ये बल असंरक्षी प्रकृति के होते हैं तथा पिण्ड की गति में अवरोध या प्रतिरोध उत्पन्न करते हैं । पिण्ड को अपनी पूर्व गति बनाये रखने के लिये इन बलों के विरूद्ध कुछ कार्य करना पड़ता है । इस प्रक्रिया में पिण्ड के वेग व गतिज ऊर्जा में सतत् कमी होती रहती है और अन्ततः पिण्ड अपनी गति की अवस्था से स्थिर अवस्था में आ जाता है । यही कारण है कि श्यान बल व घर्षण बलों को अवमन्दन बल भी कहा जाता है ।

घर्षण बल का मान कण या पिण्ड के वेग पर निर्भर करता है । परन्तु अल्प वेग वाले पिण्डों के लिये इन अवमन्दन बलों का मान पिण्ड के वेग के अनुक्रमानुपाती होता है । यदि किसी क्षण पिण्ड पर लगने वाले अवमन्दन बल का मान F व उसका वेग v हो तो

$$F \propto v$$

या $$F = -\lambda v \qquad ....(5.1)$$

यहाँ λ एक धनात्मक नियतांक है । इसे अवमन्दन गुणांक कहते हैं । समी. (5.1)में ऋण चिन्ह यह दर्शाता है कि अवमन्दन बल, गति के विपरीत दिशा में कार्य करता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. अवमंदन बल क्या होते हैं?

- -

- -

2. किसी पिण्ड के वेग बढ़ने का उस पर लगने वाले अवमंदन बलों पर क्या प्रभाव पड़ता है?

- -

- -

- -

5.2.1 अवमन्दन बलों के प्रभाव में कण की गति (Motion of paricle under the influence of damping forces)

यदि किसी v वेग से गति करते हुए m द्रव्यमान के कण पर घर्षण या श्यान बल के अतिरिक्त कोई अन्य बल न लग रहा हो तो समी (5.1)से ।

$$F = -\lambda v$$

या $$m\frac{dv}{dt} = -\lambda v$$

या $$\frac{dv}{v} = -\frac{\lambda}{m}dt$$

समाकलन करने पर

$$\log_e v = \frac{-\lambda}{m}t - c \qquad ....(5.2)$$

यहाँ C एक समाकलन नियतांक है ।C का मान ज्ञात करने के लिये प्रारम्भ में अर्थात् t = 0 पर कण के वेग के मान $v=v_0$ का प्रयोग करेंगे ।

समी. (5.2)से,

$$C=\log_e v_0$$

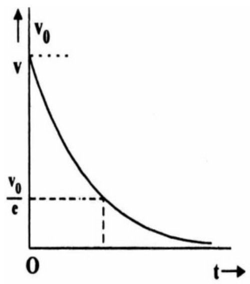
C का मान समी. (5.2)में रखने पर

$$\log_e v = -\frac{\lambda}{m}t + \log_e v_0$$

या $$\log_e\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{\lambda}{m}t \quad \left(\begin{matrix}\because y = \log_e x \\ x = e^y\end{matrix}\right)$$

या $$v = v_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t} \quad ...(5.3)$$

समी. (5.3)से यह ज्ञात होता है कि अवमन्दन बल के प्रभाव में पिण्ड का वेग समय के साथ चरघातांकी (exponential)रूप से कम होता है । चित्र 5.1 में वेग के समय के साथ परिवर्तन को दर्शाया गया है ।



चित्र 5.1 वेग का समय के साथ परिवर्तन

समी. (5.3)में $\frac{m}{\lambda}$ की विमा समय आती है ।

अत यदि : $t = \frac{m}{\lambda}$ हो तो $v = v_0 e^{-1} = \frac{v_0}{e}$ होगा ।

अत: समय का वह मान जिसके लिये कण के वेग का मान अपने प्रारम्भिक मान (v_0)का $\frac{1}{e}$ हो जाता है, विश्रान्ति काल (relaxation time)कहलाता है । अत: जितने समय में पिण्ड का वेग अपने प्रारम्भिक वेग का 36.8% रह जाता है, वह विश्रान्ति काल कहलाता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

3. विश्रान्ति काल किसे कहते है ?

- -

- -

5.3 अवमंदित आवर्ती दोलक (Damped harmonic oscillator)

पिछली इकाई में आपने पढ़ा है कि घर्षण व श्यान बल की अनुपस्थिति में जब कोई कण या दोलक गतिमान होता है तो उसका आयाम तथा ऊर्जा दोनो ही समय के सापेक्ष नियत रहते हैं। आपने यह भी पढ़ा कि वास्तव मे किसी भी माध्यम (वायु या द्रव)में गति करने वाले दोलक या कण पर प्रत्यानयन बल, जो कि उसकी गति बनाये रखने के लिये उत्तरदायी होता है के साथ-साथ घर्षण व श्यान बल भी कार्य करते हैं । इन बलों के प्रभाव में दोलक के आयाम तथा ऊर्जा में निरन्तर कमी होती जाती है । इस प्रकार के दोलक को अवमंदित आवर्ती दोलक कहते है ।

5.4 अवमंदित आवर्ती दोलक की गति का समीकरण व इसका हल (Equation of motion of damped harmonic oscillator and its solution)

अवमंदित आवर्ती दोलक पर स्पष्टत: उपरोक्त वर्णित दो बल कार्यरत है:-

(i) प्रत्यानयन बल (Restoring force)

यह बल F_R दोलक के विस्थापन, y, के समानुपाती होता है तथा सदैव माध्य स्थिति की ओर लगता है,

अर्थात् $F_R = -ky$

यहाँ k दोलक का बल नियतांक है ।

(ii) अवमंदन बल (Damping force)

यह बल सदैव माध्यम के घर्षण व श्यानता के कारण दोलक पर कार्यरत रहते हैं तथा दोलन में सदैव रूकावट डालते हैं । ये बल F_r वेग v के अनुक्रमानुपाती होते हैं, अर्थात्

$\because v = \frac{dy}{dt}$
विस्थापन के परिवर्तन की दर वेग के बराबर होगी

$$F_d = -\lambda v$$

यहाँ λ अवमन्दन गुणांक है ।

∴ दोलक पर कार्यरत परिणामी बल

$$F = F_R + F_d$$

$$F = -ky - \lambda \frac{dy}{dt}$$

अत: सरल आवर्त गति करते m द्रव्यमान के दोलक (कण)पर अवमंदन बल की उपस्थिति में गति का समीकरण निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :-

बल= द्रवमान x तथा

त्वरण $= \frac{dy}{dt}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^1 y}{dt^2}$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda\frac{dy}{dt}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = 0 \qquad ...(5.4)$$

समी. (5.4)मे $\frac{\lambda}{m} = \frac{1}{\tau} = 2r$

तथा $\frac{k}{m} = \omega_0^2 =$ रखने पर

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2r\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 \qquad ....(5.5)$$

यहाँ τ विश्रान्तिकाल, r अवमन्दन नियतांक व ω_0 दोलक की आवृत्ति है ।

समी. (5.5)अवमंदित सरल आवर्ती दोलक का अवकल समीकरण है । इस प्रकार का समीकरण अन्य निकायों जैसे: वायु में सरल दोलक का दोलन, बैलेस्टिक गैल्वनोमीटर की कुण्डली का दोलन इत्यादि में भी प्राप्त किया जा सकता है ।

समी. (5.5)का हल प्राप्त करने के लिये मान लीजिये दोलन के किसी समय पर विस्थापन y को निम्न रूप से प्रदर्शित किया जाता है:

$$y = e^{\alpha t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \alpha e^{\alpha t} = \alpha y$$

तथा $\frac{d^2y}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t} = \alpha^2 y$

उपरोक्त समी. (5.5)में $y, \frac{dy}{dt}$ व $\frac{d^2y}{dt^2}$ के मान रखने पर

$$\left(\alpha^2 + 2r\alpha + \omega_0^2\right)e^{\alpha t} = 0 \qquad ...(5.6)$$

समी. (5.6), t के सभी मानों के लिये यथार्थ है । अत: $e^{\alpha t} \neq 0,$ जिससे

$$\alpha^2 + 2r\alpha + \omega_0^2 = 0 \qquad ...(5.7)$$

∵ समीकरण

$\alpha x^2 + bx + c = 0$ मे

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

या $\alpha = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega_0^2}$

यहाँ α के दो मान सम्भव है

$$\alpha_1 = -r + \sqrt{r^2 - \omega_0^2}$$

तथा $\alpha_1 = -r - \sqrt{r^2 - \omega_0^2}$

अत: समी.(5.5)का व्यापक हल निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$y = Ae^{\left(-r+\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t} + Be^{\left(-r-\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t} \qquad ...(5.8)$$

यहाँ A व B दो नियतांक है, जिनके मान दोलक की प्रारम्भिक स्थिति से ज्ञात किये जा सकते हैं ।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

4. अवमन्दित आवर्ती दोलक किसे कहते हैं?

- -
- -
- -

r तथा ω_0 के विभिन्न मानों के लिये निम्नलिखित तीन महत्वपूर्ण सम्भावनाऐं हो सकती हैं:

(i) $r > \omega_0$ (ii) $r \approx \omega_0$ (iii) $r < \omega_0$

(i) अति-अवमंदन गति (Over damped motive)

जब $r > \omega_0$ हो तो दोलक पर लगने वाला अवमंदन बल उस पर कार्यरत प्रत्यानयन बल से अधिक होगा । इस स्थिति मे $\sqrt{r^2 - \omega_0^2}$ का मान धनात्मक होता है ।

यदि $\sqrt{r^2 - \omega_0^2} = \gamma$ हो तो समी.) 5.8)से

$$y = Ae^{(-r+\gamma)t} + Be^{(-r-\gamma)t}$$

$$= e^{-rt}\left[Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}\right] \quad ...(5.9)$$

या $$y = e^{rt}\left[(A+B)\frac{\left(e^{\gamma t} + e^{-\gamma t}\right)}{2} + (A+B)\frac{\left(e^{\gamma t} - e^{\lambda t}\right)}{2}\right]$$

या $$y = e^{-rt}\left\{(A+B)\cosh\gamma t + (A-B)\sinh\gamma t\right\} \quad ...(5.10)$$

$$\therefore y = y_0 e^{-\gamma t}\sinh(\gamma t + \phi) \quad ...(5.11)$$

समी.(5.10)मे यदि

$A + B = y_0 \sinh\phi$

$A - B = y_0 \cosh\phi$ हो तो,

$y_0\begin{pmatrix}\sinh\phi\cosh\gamma t + \\ \cosh\phi\sinh\gamma t\end{pmatrix}$

$= y_0 \sinh(\gamma t + \phi)$

समी. (5.11)यह स्पष्ट है कि अति अवमन्दन की स्थिति में विस्थापन चरघांताकी (exponential)रूप में कम होता जाता है अर्थात् दोलनी गति नहीं होती है और विस्थापन प्रारम्भ में शीघ्रता से कम होकर तत्पश्चात् धीरे-धीरे कम होता है । इस प्रकार की गति अदोलनी (aperiodic)या रूद्वरोल (deed beat)गति कहलाती है । चित्र 5.2 में विस्थापन को समय के साथ दर्शाया गया है [वक्र (a)] ।

(ii) क्रान्तिक-अवमन्दन गति (Critically damped motion)

जब $r \approx \omega_0$ हो-

इस स्थिति में अवमंदन नियतांक r लगभग ω_0 के बराबर होता है तथा $\sqrt{r^2 - \omega_0^2}$ के मान को हम अति लघु राशि $h \approx 0$ के रूप में लिख सकते हैं । अत: समी. (5.8)से-

$$y = e^{-rt}\left[Ae^{ht} + Be^{-ht}\right] \quad ...(5.12)$$

या $$y = e^{-rt}\left[A(1 + ht + ...) + B(1 - ht - ...)\right]$$

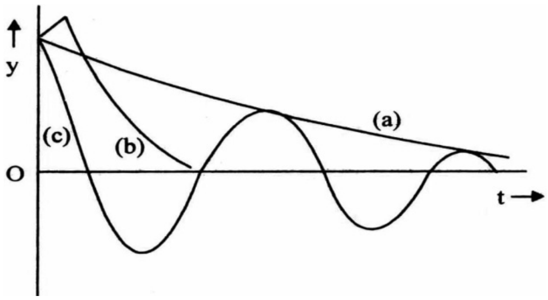
$$\therefore \quad y = e^{-rt}\left[C + Dt\right] \quad ...(5.13)$$

यहां C+(A+B)

तथा D=(A-B)h

h के अति लघु होने के कारण h^2, h^3 ... आदि को छोड़ा जा सकता है ।

समी (5.13)से प्रकट होता है कि दोलनों के प्रारम्भ में t के लघुमानों के लिये, विस्थापन का मान इस समीकरण के द्वितीय पद (D t)के कारण थोड़ा बढ़ता है तथा t के अधिक मान के लिये e^{-rt} प्रभावी होने लगता है तथा विस्थापन शीघ्रता से कम होता हुआ शून्य हो जाता है । इस दशा में दोलन की गति अदोलनी (aperiodic)होती है जिसे चित्र 5.2 में वक्र (b)से दर्शाया गया है ।



चित्र 5. विस्थापन व 2समय में अवमंदित दोलक के लिये आलेख

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

5. अति अवमंदन की स्थिति में दोलक का विस्थापन समय के साथ किस प्रकार परिवर्तित होता है ।

- -

- -

6. क्रान्तिक अवमन्दन आप किसे कहते हैं?

- --

- -

उदाहरण 5.2 एक दोलक का दोलन काल 2 सेकण्ड तथा उसका आयाम 8^0 है । 5.0 सेकण्ड पश्चात् उसका आयाम 4^0 रह जाता है, तो अवमंदन नियतांक की गणना कीजिये ।

हल: प्रश्नानुसार प्रारम्भिक आयाम $a_0 = 8^0$

5.0 सेकण्ड पश्चात् आयाम $a = 4^0$

अवमंदन नियतांक (r)

t सेकण्ड पश्चात् दोलन का आयाम

$$a = a_0 e^{-rt}$$

अर्थात् $4 = 8_e^{-5r}$

$$e^{5r} = 2$$

$5r = \log_e 2 = 0.693$

$$r = \frac{0.693}{5} \text{/सेकण्ड}$$

=0.14 प्रति सेकण्ड

न्यून अवमन्दन गति (Under damped motion)

जब, $r < \omega_0$ हो-

इस स्थिति में दोलक पर कार्यशील अवमंदन बल का मान या अवमंदन नियतांक r का मान ω_0 से कम होता है तथा

$$\sqrt{r^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2 - r^2} = i\omega$$

जबकि एक धनात्मक राशि है । समी. (5.8)का मान रखने पर $\sqrt{r^2 - \omega^2}$ का मान रखने पर

$$y = Ae^{(-r+i\omega)t} + Be^{(-r-i\omega)t} \quad ...(5.14)$$

$$= e^{-rt}\left[Ae^{i\omega t} + Be^{(-r-i\omega)t}\right]$$

$$= e^{-rt}\left[A(\cos\omega t + i\sin\omega t) + B(\cos\omega t - i\sin\omega t)\right]$$

$$y = e^{-rt}\left[(A+B)\cos\omega t + i(A+B\sin\omega t)\right] \quad ...(5.15)$$

यहाँ y एक वास्तविक राशि (real quantity)है इसलिये (A+B)व i(A-B)भी वास्तविक राशियाँ होनी चाहिये ।

माना A + B =y_0 sinϕ ...(5.16)

-i (A + B)= y_o cosϕ ...(5.17)

समी. (5.16)व (5.17)के मान समी (5.15)में प्रतिस्थापित करने पर

$$Y = y_0 e^{-rt}\sin(\omega t + \phi)) \quad ...(5.18)$$

समी. (5.18)से यह स्पष्ट है कि न्यून अवमन्दन की स्थिति में दोलक सरल आवर्त गति करता है तथा दोलक का आवर्तकाल

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - r^2}} \quad ...(5.19)$$

होगा ।

समी. (5.19)से ज्ञात होता है कि न्यून अवमंदन की स्थिति में दोलक का आवर्तकाल, मुक्त दोलक के आवर्तकाल $\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right)$ की तुलना में अधिक होता है अर्थात् अवमन्दन के कारण आवृत्ति घटती है । यदि अवमन्दन का मान अत्यल्प हो तो $\omega \approx \omega_0$ होगा ।

समी. (5.18)में विस्थापन (y)को यदि समय (t)के साथ आलेखित किया जाये तो चित्र 5.2(c)में दर्शाया गया वक्र प्राप्त होगा । इस वक्र से यह ज्ञात होता है कि दोलक का आयाम जो कि $y_0 e^{-rt}$ के बराबर है, समय के साथ चरघातांकी रूप से कम होता है यद्यपि दोलक की गति सरल आवर्त है ।

पुन: समी (5.18)में यदि

$t = \frac{1}{r} = 2\tau$ हो तो इस समय पर अवमंदित दोलक का आयाम होगा-

$$a = \frac{y_0}{e} = 0.368 y_0$$

अत: जितने समय में दोलक का आयाम अपने प्रारम्भिक मान का 36.8% रह जाता है, उस समय को आयाम का विश्रान्तिकाल (-amplitude relaxation time)कहते हैं ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

7. न्यून अवमन्दन की स्थिति मे दोलक की गति होती है ?

- -

8. न्यून अवमन्दित दोलक के आयाम मे समय के साथ किस प्रकार परिवर्तन होता है ?

- --

- -

उदाहरण 5.3 समीकरण

$$.\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y + 0$$

का हल ज्ञात कीजिये, जबकि t =0 पर y =5 तथा $\frac{dy}{dt} = -3$

हल: प्रश्न में दिया गया समीकरण एक अवमंदित दोलक- की गति का समीकरण है जिसमें

$$\frac{\lambda}{m} = 2r = 2$$

तथा ω_0^2 =5

माना समीकरण का हल

$$y = e^{-rt}\left[A\cos\omega t + B\sin\omega t\right]$$ है

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - r^2} = \sqrt{5-1} = 2$$

सीमान्त प्रतिबन्ध के अनुसार t = 0 पर y = 5 से

A = 5

इसी प्रकार t =0 पर $\frac{dy}{dt} = -3$ से B=1

$\therefore \quad y = e^{-1}\left[5\cos 2t + \sin 2t\right]$

$5 = e^{-t}\begin{bmatrix} A\cos 0 + \\ B\sin 0 \end{bmatrix}$

$\because \frac{dy}{dt} = -3$ तथा A=5

-3=-A×O + 2B -A

2 = 2B

या B=1

5.5 सारांश (Summary)

- अवमंदन बल वह बल है जिनके प्रभाव में कण या दोलन का आयाम समय के साथ धीरे-धीरे कम होता जाता है ।
- घर्षण व श्यान बल असंरक्षी प्रकृति के होते हैं तथा पिण्ड की गति में अवरोध या अवमंदन उत्पन्न करते हैं ।
- अवमंदन बल का मान पिण्ड के वेग के अनुक्रमानुपाती होता है ।

- अवमंदन बलों के प्रभाव में पिण्ड का वेग समय के साथ चरघातांकी रूप से कम होता है।
- समय का वह मान जिसके लिये कण या पिण्ड के वेग का मान अपने प्रारम्भिक मान का $\frac{1}{e}$ हो जाता है, विश्रान्ति काल कहलाता है ।
- अवमंदित आवर्ती दोलक की ऊर्जा एवं आयाम निरन्तर समय के साथ कम होते जाते हैं।
- अति अवमंदन की स्थिति में अवमंदित आवर्ती दोलक का विस्थापन चरघातांकी रूप में कम होता जाता है और गति दोलनी नहीं होती है । यह गति अदोलनी गति या रूद्धदोल गति भी कहलाती है ।
- क्रान्तिक अवमंदन की स्थिति में दोलक का विस्थापन प्रारम्भ में थोडा बढ़ता है तत्पश्चात् समय के साथ शीघ्रता से कम होता हुआ शून्य हो जाता है ।
- न्यून अवमंदन की स्थिति में अवमंदित आवर्ती दोलक का आयाम समय के साथ चरघातांकी रूप से कम होता जाता है तथा दोलक की गति सरल आवर्त गति होती है ।
- न्यून अवमंदन की स्थिति में किसी अवमंदित आवर्ती दोलक का आयाम जितने समय में अपने प्रारम्भिक आयाम का 36.8% हो जाता है वह आयाम का विश्रान्ति काल कहलाता है ।

5.6 शब्दावली (Glossary)

अवमन्दन बल	Damping force
अतिअवमंदित	Overdamped
आयाम	Amplitude
क्रांतिक	Critical
घर्षणबल	Frictional force
चरघातांकी	Exponential
विश्रान्तिकाल	Relaxation time
न्यूनअवमंदन	Under damped
श्यानबल	Viscous force

5.7 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

H.S Hans & S.P. Puri	Mechanics	Tata Mc Graw Hill, New Delhi.
N.K.Bajaj	The Physics of Waves and Oscillation	Tata Mc Graw Hill Pub slishing Company Ltd., New Delhi
एमआर सिंह.सक्सेना पी.पी., एस . रावत .एस	दोलक एवं तंरगें	कॉलेज बुक हाउस, जयपुर

5.8 बोध प्रश्न के उत्तर (Answers to self assessment questions)

1. जिस बलों के प्रभाव मे पिण्ड की गति का अवमंदन हो जाता है, अवमंदन बल कहलाते है ।
2. किसी पिण्ड के वेग बढ़ने की स्थिति मे उस पर लगने वाले भी लगते है, क्यों कि यह बल वेग के अनुक्रमानुपाती होते है
3. किसी गतिशील कण या पिण्ड का वेग जिस समय मे अपने प्रारम्भिक मान का 36.8% रह जाये वह समय विश्रान्ति काल कहलाता है
4. अवमंदित आवर्ती दोलक वह दोलक है जिसका आयाम व ऊर्जा समय के साथ निरन्तर कम होते जाते हैं ।
5. अतिअवमंदन की स्थिति में दोलक का विस्थापन समय के साथ चरघातांकी रूप से कम होता जाता है ।
6. क्रांतिक अवमंदन की स्थिति में दोलक का विस्थापन पहले थोड़ा बढ़ता है तत्पश्चात शीघ्रता से कम होकर शून्य हो जाता है ।
7. न्यून अवमंदन की स्थिति में दोलक की गति सरल आवर्त होती है ।
8. न्यून अवमंदित दोलक का आयाम समय से साथ चरघातांकी रूप से कम होता जाता है ।

5.9 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type question):

1. अवमंदन बलों का एक उदाहरण दीजिये?
2. अवमंदन बलों के प्रभाव में पिण्ड की गति में कौन-कौन सी राशियों समय के साथ कम होती जाती है?
3. किसी पिण्ड के वेग बढ़ने पर उस पर लगने वाला अवमंदन, बल घटता है या बढ़ता है?
4. वह समय, जिसमें किसी पिण्ड का वेग अपने प्रारम्मिक मान का 38.8% हो जाये, क्या कहलाता है?
5. अतिमंदन की स्थिति में आवर्ती दोलक की गति किस प्रकार की होती है?
6. न्यून अवमंदन की स्थिति में आवर्ती दोलक किस प्रकार की गति करता है?

निबन्धात्मक प्रश्न (Easy type questions)

7. सिद्व कीजिये कि अवमंदन बलों के प्रभाव में किसी कण या पिण्ड का वेग चरघातांकी रूप में कम होता है ।
8. अवमंदित सरल आवर्ती दोलक किसे कहते हैं? इसके लिये अवकल समीकरण की स्थापना कीजिये ।
9. एक अवमंदित दोलक के लिये अति-अवमंदन व क्रांतिक अवमंदन की स्थितियों में दोलन की गति की विवेचना कीजिये ।

10. एक अवमंदित आवर्ती दोलक की गति की व्याख्या न्यून-अवमंदन की स्थिति में कीजिये।
11. सिद्ध कीजिये कि अतिन्यून-अवमंदन की स्थिति में अवमंदित आवर्ती दोलक का विस्थापन $y = y_0 e \frac{-t}{2\tau} \sin \omega_0 t$ से दिया जाता है, जबकि ω_0 दोलक की स्वाभाविक आवृत्ति तथा τ विश्रान्ति काल है ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

12. एक 10 ग्राम के गतिशील कण का वेग अवमंदन बलों के प्रभाव में 20 सेकण्ड में 4 सेमी/से. से 2 सेमी/से. हो जाता है । अवमन्दन नियतांक का मान ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर:** 0.346 ग्राम से)

13. एक सरल दोलक का अवर्तकाल 1 सेकण्ड व आयाम 10^0 है । 10 दोलनों के पश्चात् इसका आयाम 5^0 हो जाता है । इस दोलक का विश्रान्ति काल ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर:** 14.43 सेकण्ड)

14. एक अवमंदित दोलक विरामावस्था से प्रारम्भ करके पहला आयाम 50 सेमी प्राप्त करता है और 100 दोलन के पश्चात् यह 5 सेमी हो जाता है । यदि दोलन का अवमंदन नियतांक 00.1 प्रति सेकण्ड हो तो अवमंदन की अनुपस्थिति में आवर्तकाल तथा आयाम का परिकलन कीजिये ।

(**उत्तर:** 2.3 से, 50.29 सेमी)

15. एक किलोग्राम का एक द्रव्यमान एक 24 न्यूटन / मी बल नियतांक वाली स्प्रिंग से लटकाया गया है । यदि दोलक की अवमंदित आवृत्ति, अनवमदित आवृत्ति की $\frac{\sqrt{3}}{2}$ गुना है तो अवमंदन गुणांक ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर:** 5 किग्रा / सेकण्ड)

इकाई-6

अवमंदित दोलन-II

(Damped Oscillations-II)

इकाई की रूपरेखा

6.0 उद्देश्य
6.1 प्रस्तावना
6.2 अल्प अवमंदित दोलक की ऊर्जा
6.3 विशेषता गुणांक के रूप में अवमंदन
6.4 अवमंदित दोलनों के उदाहरण
6.4.1 **L C R** परिपथ
6.4.2 चल कुण्डली गैल्वनोमीटर
6.5 सारांश
6.6 शब्दावली
6.7 संदर्भ ग्रन्थ
6.8 बोध प्रश्नों के उत्तर
6.9 अभ्यासार्थ प्रश्न

6.0 उद्देश्य (Objectives)

आप इस इकाई को पढ़ने के बाद

- अल्प अवमंदित दोलक की गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा तथा कुल माध्य ऊर्जा का ज्ञान अर्जित कर सकेंगे;
- दोलक के विशेषता गुणांक एवं अवमंदन के बीच सम्बन्ध स्थापित कर सकेंगे;
- अवमंदित दोलनों के उदाहरण के रूप में एक **L-C-R** परिपथ की आवेशन विधा में आवेश के दोलनी व्यवहार का अध्ययन कर सकेंगे;
- चल कुण्डली प्रक्षेप गेल्वनोमीटर की कुण्डली के दोलनों के आयामों में समय के साथ निरन्तर आने वाली कमी के प्रकार की जानकारी कर सकेंगें;
- लोगेरिथ्मीय अपक्षय की जानकारी भी कर सकेंगे ।

6.1 प्रस्तावना (Introduction)

इकाई-5 में आपने अवमंदन बलों व उनके प्रभाव में दोलक की आवर्ती गति का अध्ययन किया । आपने इस इकाई में यह समझने का प्रयास भी किया कि किस प्रकार किसी अवंमदित आवर्ती दोलक के आयाम का समय के साथ चरघांताकी क्षय होता है । इकाई-6 में आप इसी अवंमदित आवर्ती दोलक से सम्बन्धित अन्य राशियों का अध्ययन करेगें। इसी संदर्भ में इकाई के अनुच्छेद 6.2 में अल्प अवंमदित दोलक की ऊर्जा (गतिज, स्थितिज तथा कुल)का वर्णन किया

गया है तथा इसी अनुच्छेद में कुल ऊर्जा के औसत (माध्य)मान का परिकलन भी किया गया है । अनुच्छेद 6.3 में दोलक के विशेषता गुणांक का सम्बन्ध अवमंदन से जुड़ी राशि (विश्रान्ति काल)से व्युत्पन्न किया गया है । अवमंदित दोलक के उदाहरणों के रूप में अनुच्छेद **6.4** में **L-C-R** परिपथ का आवेशन व निरावेशन विधा में व चलकुण्ली प्रक्षेप गेल्वनोमीटर की कुण्डली के दोलनों का विस्तार से वर्णन किया गया है ।

6.2 अल्प अवमंदित दोलक की ऊर्जा (Energy of a weakly damped oscillator)

इकाई-5 में आपने यह पढ़ा कि अवमंदित आवर्ती दोलक के लिए न्यून-अवमंदन की स्थिति में दोलक का आयाम, जो कि $Y_o e^{-rt}$ के बराबर होता है, समय के साथ चरघातांकी रूप से कम होता है यद्यपि दोलक की गति सरल आवर्ती रहती है । इसके अतिरिक्त इस स्थिति में दोलक का आवर्तकाल, मुक्त दोलक के आवर्तकाल की तुलना में अधिक होता है, अर्थात् न्यून अवमंदन के कारण दोलक की आवृत्ति भी मुक्त दोलक की आवृत्ति की तुलना में कम होती है । इस अनुच्छेद में हम अल्प अवमंदित दोलक की गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा व कुल ऊर्जा का वर्णन करेंगे ।

आप जानते हैं कि अल्प (न्यून)अवमंदन की स्थिति में दोलक का विस्थापन निम्न सम्बन्ध द्वारा व्यक्त किया जाता है-

$$Y = y_o e^{-rt} \sin(\omega t + \phi) \quad \text{....(6.1)}$$

जहाँ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - r^2}$ है ।

(i) गतिज ऊर्जा (Kinetic energy)

समी. (6.1)का समय के साथ अवकलन करने पर अल्प अवमंदित दोलक के लिये समय के पदों में वेग प्राप्त किया जा सकता है ।

$$\therefore \frac{dy}{dt} = y_o . e^{-rt}[\omega\cos(\omega t + \phi) - r.\sin(\omega t + \phi)]$$

चूंकि अल्प अवमंदित आवर्ती दोलक की गतिज ऊर्जा (k)का वेग $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ के पदों में मान

$$K = \frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \quad \text{...(6.2)}$$

होता है ।

$\because 2\cos(\omega t + \phi)\sin(\omega t + \phi) = \sin(2\omega t + 2\phi)$

अतः
$$K = \frac{1}{2} m y_0^2 e^{-2r.t}\left[\omega^2 \cos^2(\omega t + \phi) + r^2 \sin^2(\omega t + \phi) - \omega . r \sin(2\omega t + 2\phi)\right] \quad \text{...(6.3)}$$

अब यदि अवमंदन का मान न्यून है तो एक दोलन काल में दोलक के आयाम $y_o e^{-r.t}$ के मान में होने वाली कमी को उपक्षेणीय (negligible)माना जा सकता है । इस परिस्थिति में

$$\therefore <\sin 2\theta> = \frac{\int_{o}^{2\pi} \sin 2\theta d\theta}{\int_{o}^{2\pi} d\theta} = \frac{1}{2} - [-\cos 2\theta]_0^{2\pi} = 0$$

$$\because <\cos^2\theta> = \frac{\int_0^{2x} \cos^2\theta d\theta}{\int_0^{2x} d\theta} = \frac{\int_0^{2x} \frac{(1+\cos 2\theta)}{2} d\theta}{\int_0^{2x} d\theta} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi}{2}\right] + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\theta}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

दोलक के एक दोलन काल में आयाम का मान लगभग स्थिर रहता है । अतः एक दोलन में लगे समय के लिये माध्य गतिज ऊर्जा

$$<K> = \frac{1}{2} m y_0^2 e^{-2r.t} \left[\omega^2 <\cos^2(\omega t + \phi)> + r^2 <\sin^2(\omega t + \phi)> - \omega . r <\sin(2\omega t + 2\phi)> \right] \quad ...(6.4)$$

हम जानते हैं कि एक दोलन काल के लिये

$$<\cos^2\theta> = <\sin^2\theta> = \frac{1}{2}$$

इसी प्रकार $<\sin 2\theta>=0$

$\therefore$ माध्य गतिज ऊर्जा $<K> = \frac{1}{4} m y_0^2 e^{-2r.t} (\omega^2 + r^2)$ ...(6.5)

आप यह भी जानते हैं कि

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - r^2}$$

या $\omega^2 + r^2 = \omega_0^2$ .....(6.6)

$$<K> = \frac{1}{4} m y_0^2 \omega_0^2 . e^{-2r.t} \quad ...(6.7)$$

समी. (6.7)से स्पष्ट है कि अल्प अवमंदित दोलक की माध्य गतिज ऊर्जा भी समय के सापेक्ष चरघांताकी रूप से कम होती जाती है ।

(ii) स्थितिज ऊर्जा (Potential energy)

अब हम अल्प अवमंदित आवर्ती दोलक के लिये माध्य स्थितिज ऊर्जा का मान ज्ञात करेंगे । अवमंदित आवर्ती दोलक की स्थितिज ऊर्जा (U)का मान विस्थापन (y)के पदों में निम्न सम्बन्ध से दिया जाता है :-

$$U = \frac{1}{2} m \omega_0^2 y^2$$

y का मान समी. (6.1)से प्रतिस्थापित करने पर

$$U = \frac{1}{2} m \omega_0^2 y_0^2 e^{-2r.t} \sin^2(\omega t + \phi) \quad ....(6.8)$$

चूँकि अवमंदित आवर्ती दोलक के आयाम में एक दोलन काल में होने वाली कमी को उपेक्षणीय माना जा सकता है, इसलिए एक दोलन काल में दोलक के आयाम को नियत मान सकते हैं । अतः एक दोलन काल में माध्य स्थितिज ऊर्जा का मान

$$<U> = \frac{1}{2} m \omega_0^2 y_0^2 e^{-2r.t} <\sin^2(\omega t + \phi)>$$

पुनः $<\sin^2\theta> = \frac{1}{2}$

$$<U>=\frac{1}{4}m\omega_0^2 y_0^2 e^{-2r.t}$$ ....(6.9)

समी. (6.7)व (6.9)के निरीक्षण से यह स्पष्ट है कि न्यून अवमंदन की स्थिति में अवमंदित दोलक की माध्य गतिज ऊर्जा उसकी माध्य स्थितिज ऊर्जा के बराबर होती है ।

या $$<K>=<U>=\frac{1}{4}m\omega_0^2 .y_0^2 e^{-2rt}$$ ...(6.10)

(iii) कुल ऊर्जा (Total energy)

हम अब माध्य गतिज व स्थितिज ऊर्जाओं की सहायता से अवमंदित आवर्ती दोलक की कुल माध्य ऊर्जा <E> का मान ज्ञात करेंगे ।

हम जानते हैं कि कुल माध्य ऊर्जा का मान माध्य गतिज ऊर्जा व माध्य स्थितिज ऊर्जा के योग के बराबर होता है ।

$$\therefore <E>=<K>+<U>$$ ...(6.11)

समी. (6.7)व (6.9)से

$$<E>=\frac{1}{4}m\omega_0^2 y_0^2 .e^{-2rt}+\frac{1}{4}m\omega_0^2 y_0^2 e^{-2rt}$$

$$=\frac{1}{2}m\omega_0^2 y_0^2 .e^{-2r.t}$$ ....(6.12)

समी (6.12)से यह स्पष्ट है कि अवंमदित दोलक की कुल औसत ऊर्जा भी समय के साथ चर घातांकी रूप से कम होती जाती है ।

समी. (6.12)में $t=\frac{1}{2r}=\tau$ हो तो

या $$<E>=\frac{<E>_{\max}}{e}=0.368<E>_{\max}$$

अर्थात् जितने समय में दोलक की कुल ऊर्जा अपने प्रारम्भिक मान की $\frac{1}{e}$ या 36.8% रह जाती है, वह समय ऊर्जा विश्रान्ति काल कहलाता है ।

$\therefore$ ऊर्जा विश्रान्ति काल = $\tau=\frac{1}{2r}$ ...(6.13)

अब यदि आप समी. (6.7), (6.9)व (6.12)को ध्यान से देखें तो आपको आश्चर्य होगा कि इन समीकरणों द्वारा व्यक्त किये गये गतिज, स्थितिज व कुल ऊर्जा के औसत मानों में समय (t)का पद ($e^{-2r.t}$के रूप में)समाहित है, जबकि यह औसत मान विभिन्न समयों पर ऊर्जाओं के मानों का औसत लेकर ही ज्ञात किया गया हैं । ऐसा इसलिये हैं कि हम अवमंदित दोलक की गति को कई दोलन-चक्रों पर प्रेक्षित कर केवल एक चक्र के लिये किसी समय t पर औसत मान ज्ञात कर रहें हैं ।

चूँकि दोलक की कुल ऊर्जा का क्षय, ऊष्मा के रूप में प्रकट होता है, इसलिए यह अपेक्षित है कि ज्यों-ज्यों दोलक अधिक चक्र पूरे करता जायेगा त्यों-त्यों ही दोलक की एक चक्र पर औसत ऊर्जा का मान कम होता जायेगा ।

(iv) शक्ति ह्रास (Power dissipation)

पिछली कक्षाओं में आप पढ़ चुके हैं कि कार्य करने की दर शक्ति (Power)के बराबर होती है, अत: शक्ति का ह्रास, ऊर्जा के मान में होने वाली कमी की दर से व्यक्त किया जाता हैं।

अवमंदित दोलक की कुल औसत ऊर्जा के मान में समय के सापेक्ष कमी हो रही है तथा यह दोलक की माध्य शक्ति के ह्रास को निरूपित करती हैं,

∴ दोलक की माध्य शक्ति का ह्रास

$$<P> = -\frac{d}{dt}<E> \qquad ...(6.14)$$

समी. (6.12)से <E> का मान समी (6.14)में रखनें पर,

$$<P> = -\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m\omega_0^2 y_0^2 . e^{-2r.t}\right\}$$

$$= 2r\left(\frac{1}{2}m\omega_0^2 y_0^2 . e^{-2r.t}\right)$$

$$= 2r<E> \qquad ....(6.15)$$

परन्तु समी. (6.13)से विश्रान्ति काल

$$\tau = \frac{1}{2r}$$

$$\therefore <P> = \frac{<E>}{\tau}$$

समी. (6.16)से यह स्पष्ट है कि अवमंदित दोलक के लिये एक दोलन काल में हो रही औसत शक्ति का ह्रास कुल ऊर्जा के माध्य के $\frac{1}{\tau}$ गुना के बराबर होता है । अत: दोलक का शक्ति , अवमंदन नियतांक r के अनुक्रमानुपाती तथा विश्रान्ति काल के व्युत्क्रमानुपाती होता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. ऊर्जा विश्रान्ति काल से आप क्या समझते है?

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

2. अवमंदित दोलक की ऊर्जा के औसत मान में भी समय का पद उपस्थित रहता है, क्यों?

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

6.3 विशेषता गुणांक के रूप में अवमंदन (Damping in the form of quality factor)

अनुच्छेद 6.2 में आपने अल्प अवमंदित दोलक की कुल औसत ऊर्जा तथा दोलक के माध्य शक्ति के ह्रास के बारे में अध्ययन किया । अब हम इस प्रकार के दोलक के लिये अवमंदन का अध्ययन विशेषता गुणांक (Q)के रूप में करेंगें । किसी दोलनी निकाय के लिए विशेषता गुणांक (quality factor)एक व्यापक रूप में उपयोगी (widely used)पद (term)है । यह विशेष रूप से प्रत्यावर्ती धारा वैद्युत (electrical)निकायों की शब्दावली (terminology)में प्रचलित है, परन्तु सभी अल्प अवमंदित दोलनी तन्त्रों के लिए उपयोज्य (applicable)है ।

किसी दोलक तन्त्र का विशेषता गुणांक, Q, उसके- द्वारा एक आवर्तकाल में संग्रहित औसत ऊर्जा हानि के अनुपात के 2π गुने के बराबर होता है, अर्थात्

$$Q = 2\pi . \frac{\text{संग्रहित औसत ऊर्जा}}{\text{एक आवर्त काल में माध्य ऊर्जा की हानि}}$$

या $$Q = \frac{2\pi < E >}{T < P >} \quad ....(6.17)$$

परन्तु समी. (6.16)से हम जानते हैं कि

$$< P > = \frac{< E >}{\tau}$$

$$\therefore \quad Q = \frac{2\pi\tau}{T} \quad ....(6.18)$$

उपरोक्त विवेचना अल्प मंदित दोलक के लिये यथार्थ है तथा इस स्थिति में

$$\omega \approx \omega_0 \quad ...(6.19)$$

अत: $$Q = \omega_0 \tau \quad ....(6.20)$$

समी. (6.20)एक अल्प अवमंदित दोलक के विशेषता गुणांक को व्यक्त करता है । अब यदि दोलक पर लगने वाले अवमंदन बल के मान में कमी होती है तो विश्रान्ति काल (τ)व विशेषता गुणांक (Q)दोनों के ही मान में वृद्धि होगी । यदि अवमंदन का मान नगन्य या शून्य ($r \approx 0$)है तो τ व Q दोनों ही अनन्त होंगे । इस प्रकार का दोलक मुक्त दोलक (free oscillator)कहलाता है । इस दोलक का आयाम व ऊर्जा दोनों ही समय के सापेक्ष नियत हैं । परन्तु जैसे-जैसे दोलक पर अवमंदन (damping)बढ़ता जाता है, उसका विश्रान्ति काल व विशेषता गुणांक कम होता जाता है तथा उसके आयाम व ऊर्जा में कमी उतनी ही शीघ्रता से होती जाती है । दूसरे शब्दों में यह कहा जा सकता हैं कि दोलक का विशेषता गुणांक (Q)उसके दोलनों के अवमंदन से मुक्त होने की सीमा (extent)को दर्शाता है ।

उदाहरण के लिये पियानों (Piano), उत्तेजित परमाणु (excited atom)व Fe^{57} के उत्तेजित नामिक (excited nucleus)के लिये Q के मान क्रमश: 10^3, 10^{7}' तथा $3\text{x}10^{12}$ होते हैं ।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

3. यदि अवमंदन का मान नगन्य या शून्य हो तो इस प्रकार के दोलक को क्या कहते हैं?

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

उदाहरण 6.2 एक सरल लोलक का आवर्त काल 1 सेकण्ड तथा आयाम 10^o है । 10 दोलन पूर्ण कर लेने के पश्चात् इसका आयाम 5^o हो जाता है । इस लोलक के लिये विश्रान्ति काल व विशेषता गुणांक क्या होंगे?

हल : अवमंदित सरल आवर्ती दोलक का आयाम = $y_0.e^{-r.t}$

$\because$ दोलक को 10 दोलन पूर्ण करने में लगा समय =10$\times$आवर्तकाल =10$\times$1 = 10 से

प्रश्नानुसार t= 0 पर आयाम $y_0 = 10^o$

t = 10 पर आयाम = $y_0.e^{-10r} = 5^o$

अत: $5\ 10e^{-10.r}$

या $e^{10.r} = 2$

या $10r = 2.303\log_{10} 2 = 0.693$

$r = 0.0693$

अत: विश्रान्ति काल $\tau = \frac{1}{2r} = \frac{14.43}{2} = 7.21$ सेकण्ड

$\therefore$ विशेषता गुणांक $Q = \frac{2\pi \times 7.21}{1} = 45.33$

6.4 अवमंदित दोलनों के उदाहरण (Examples of damped oscillations)

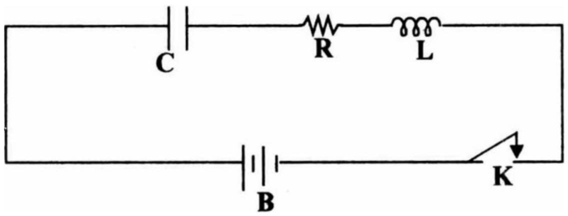
किसी झूले (swing)पर झूलता बच्चा, जबकि झूले का आयाम अपनी माध्य स्थिति के साक्षेप निरन्तर कम होता जाता है, अवमंदित आवर्ती दोलक का एक सरलतम उदाहरण है । इसी प्रकार एक स्वरित्र की भुजाऐं असमान आयाम से कम्पन करती है जो कि अवमंदित कम्पनों को दर्शाती हैं । कम्पनों के आयाम में स्थायी रूप से (steadily)निरन्तर कमी का कारण स्वरित्र की धातु में आन्तरिक घर्षण तथा कम्पन गति पर माध्यम (वायु जल इत्यादि)की मंदक क्रिया (retarding action)का उपस्थित होना है ।

इसके अतिरिक्त विद्युत दोलनी परिपथ, जिसमें एक प्रेरकत्व (L)व एक संधारित्र (C)समान्तर क्रम में जुडे होते है, अवमंदित आवर्ती दोलनों का एक उदाहरण है । इस परिपथ में यदि संधारित्र (C)व प्रेरकत्व (L)आदर्श हों एवं संयोजन तारों का प्रतिरोध भी शून्य हो तो सिद्धान्ततः इससे प्रवाहित दोलनी धारा नियत आयाम की होती है । परन्तु व्यवहार में प्रेरकत्व व संयोजन तारों के कारण परिपथ में प्रतिरोध उपस्थित रहता है जिससे ऊर्जा के ऊष्मा के रूप में हानि के कारण परिपथ में धारा का आयाम समय के साथ घटता जाता है और इस प्रकार की

धारा अवमंदित दोलनी धारा कहलाती है । अत: एक परिपथ जिसमें प्रेरकत्व (L), संधारित्र (C)व प्रतिरोध (R)श्रेणीक्रम में जुड़े हो अवश्य रूप से एक अवमंदित दोलक की भाँति ही व्यवहार करेगा। एक चल-कुण्डली गैल्वनोमीटर में भी कुण्डली के दोलनों के आयाम में समय के साथ कमी भी अवमंदित दोलनों को ही परिलक्षित करती है । इस अनुच्छेद 6.4 में अब हम अवमंदित दोलनों के उदाहरण के रूप में L-C-R परिपथ व चल कुण्डली गैल्वनोमीटर का विस्तृत वर्णन करेंगे ।

6.4.1 प्रेरकत्व. संधारित्र व प्रतिरोध श्रेणी परिपथ (Inductance, capacitance and resistance series circuit)

अब हम एक ऐसे परिपथ (चित्र 6.1)के संदर्भ में विचार करेंगे, जिसमें प्रेरकत्व (L), संधारित्र (C), व प्रतिरोध (R), श्रेणी कम में लगे हुए हैं तथा परिपथ को एक कुंजी की सहायता से एक नियत विद्युत वाहक बल के स्रोत से जोड़ा गया है । इस परिपथ के व्यवहार का अध्ययन आप दो भागों में करेंगे । पहले भाग,



चित्र 6.1

जिसे आवेशन विधा (charging mode)कहेंगे, में कुंजी (K)को दबाकर बैटरी (B)के द्वारा परिपथ में धारा प्रवाहित करेंगे । दूसरे भाग में कुंजी (K)को हटाकर हम बैटरी को परिपथ से अलग कर देगें । इस अवस्था को निरावेशन विधा (discharging mode)कहेंगे ।

(a) जब परिपथ आवेशन विधा में है -:

आवेशन विधा में परिपथ (चित्र 6.1)में धारा प्रवाहित की जाती है जिससे संधारित्र (C)आवेशित होने लगता है तथा L,C,R के सिरों पर विभवान्तरों का योग बैटरी के विद्युत वाहक बल के बराबर होता है । यदि परिपथ में बहने वाली धारा का मान I, संधारित्र पर आवेश का मान Q तथा इसकी धारिता C हो, तो विद्युत वाहक बलों का निम्न समीकरण होगा -

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C}=E \qquad ...(6.21)$$

यहाँ $L\frac{dI}{dt}$ प्रेरकत्व के किनारों पर उत्पन्न विभवान्तर है । आवेश प्रवाह की दर परिपथ में प्रवाहित धारा के तुल्य होती है,

अर्थात $I=\frac{dQ}{dt}$

तथा $\frac{dI}{dt}=\frac{d^2Q}{dt^2}$

I व $\frac{dI}{dt}$ के मान समी. (6.21)में रखने पर

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E \quad ...(6.22)$$

या $$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{LC}=\frac{E}{L}$$

या $$\frac{d^2Q}{dt^2}+2r\frac{dQ}{dt}+\omega_0^2Q=\frac{E}{L} \quad ...(6.23)$$

जबकि $2r=\frac{R}{L}$ तथा $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$ (6.24)

समी. (6.23)को पुन लिखने पर

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+2r\frac{dQ}{dt}+\omega_0^2\left(Q-\frac{E}{\omega_0^2L}\right)=0 \quad ...(6.25)$$

समी. (6.25)में यदि

$$y=Q-\frac{E}{\omega_0^2L}' \frac{dy}{dt}=\frac{dQ}{dt} \text{ तथा } \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2Q}{dt^2}$$

हो तो इसका रूप होगा -

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2r\frac{dy}{dt}+\omega_0^2y=0 \quad ....(6.26)$$

समी. (6.26), 'इकाई-5 में प्राप्त समी. (5.5)जैसा ही है जो कि अवमंदित सरल आवर्ती दोलक का अवकल समीकरण हैं । समी (6.26)का हल ठीक उसी प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है जिस प्रकार समी. (5.5)के लिये ज्ञात किया गया था । अर्थात् समी (6.26)का व्यापक हल भी निम्न रूप से लिखा जा सकता है -

$$y=A.e^{\left(-r+\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t}+B.e^{\left(-r-\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t} \quad ...(6.27)$$

यहाँ A व B दो स्वेच्छ नियतांक हैं जिनके मान आप परिसीमा प्रतिबन्ध (boundary conditions)लगाकर ज्ञात करेंगें।

$$\therefore y=Q-\frac{E}{\omega_0^2.L}$$

$$\therefore Q=y-\frac{E}{\omega_0^2.L}$$

$$=\frac{E}{\omega_0^2.L}+Ae^{\left(-r+\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t}+Be^{\left(-r-\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t}$$

$$=EC+A.e^{\left(-r+\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t}+B.e^{\left(-r-\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t}$$

अब यदि कुछ समय पश्चात स्थायी आवेश Q_0 हो जाता है तो

$$Q_0=EC$$

अत: $Q = Q_0 + A.e^{\left(-r+\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t} + B.e^{\left(-r-\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t}$ ...(6.28)

$\because \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

अब t=0, पर Q=0

$\therefore 0 = Q_0 + A + B$ या $A + B = -Q_0$

$\omega_0^2.L = \frac{1}{C}$

समी. (6.28)का समय के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$I = \frac{dQ}{dt} = A\left(-r+\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right).e^{\left(-r-\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t} + B\left(-r-\sqrt{r^2}-\omega_0^2\right).e^{\left(-r-\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t}$$

तथा t=0, I =0

$$\therefore 0 = A\left(-r+\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right) + B\left(-r-\sqrt{r^2}-\omega_0^2\right)$$

$$= -r(A+B) + (A-B)\sqrt{r^2-\omega_0^2}$$

$$= rQ_0 + (A-B)\sqrt{r^2-\omega_0^2}$$

$$A - B = -\frac{rQ_0}{\sqrt{r^2\omega_0^2}} \text{ तथा } A + B = -Q_0$$

$\therefore$

तथा $B = -\frac{Q_0}{2}\left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2-\omega_0^2}}\right)$

$$\therefore \quad Q = Q_0 - \frac{1}{2}Q_0\left(1+\frac{r}{\sqrt{r^2-\omega_0^2}}\right).e^{\left(-r+\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t}$$

$$-\frac{1}{2}Q_0\left(1+\frac{r}{\sqrt{r^2-\omega_0^2}}\right).e^{\left(-r+\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t} \quad ....(6.29)$$

यहाँ भी इकाई-5 के समान ही r तथाω_o के विभिन्न मानों के लिये निम्नलिखित तीन स्थितियाँ सम्भव हो सकती है :-

(i)r > ω_o (ii)r ≈ ω_o तथा (iii)r < ω_o

स्थिति I- जब $r^2 > \omega_o^2$, या $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC'}$ तो समी (6.29)को Q के लिये और आगे सरल नहीं बनाया जा सकता तथा आवेश समय के साथ निरन्तर बढ़ता जाता है जब तक कि यह स्थायी मान Q_0 प्राप्त नहीं कर लेता है। [चित्र 6.2 (a)] ।

स्थिति II- $r^2 = \omega_o^2$,यह अवस्था क्रांतिक अवस्था है, जबकि आवेश न तो रूद्धदोल (dead beat)और न ही दोलनी (oscillatory)होगा [चित्र 6.2(b)] ।

स्थिति III- जब $r^2 < \omega_o^2$,यह स्थिति बहुत महत्वपूर्ण है, क्योंकि इस स्थिति में दोलन प्रारम्भ हो जाते है [चित्र 6.2(a)] । यहाँ $r^2 - \omega_o^2$ ऋणात्मक होगा, अत: $\sqrt{r^2-\omega_0^2}$ काल्पनिक (imaginary)राशि है ।

$\therefore \sqrt{-1}$ = i

$$\sqrt{r^2-\omega_0^2} = \sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2-r^2} = i\sqrt{\omega_0^2-r^2}$$

इस स्थिति में,

$$Q = Q_0 - \frac{1}{2}Q_0\left(1+\frac{r}{i\sqrt{\omega_0^2-r^2}}\right).e^{\left(-r-i\sqrt{\omega_0^2-r^2}\right)t}$$

$$-\frac{1}{2}Q_0\left(1-\frac{r}{i\sqrt{\omega_0^2-r^2}}\right).e^{\left(-r-i\sqrt{\omega_0^2-r^2}\right)t}$$

$$= Q_0\left\{1-e^{-n}\left[\left(\frac{e^{i\sqrt{\omega_0^2-r^2}.t}+e^{i\sqrt{\omega_0^2-r^2}.t}}{2}\right)\right.\right.$$

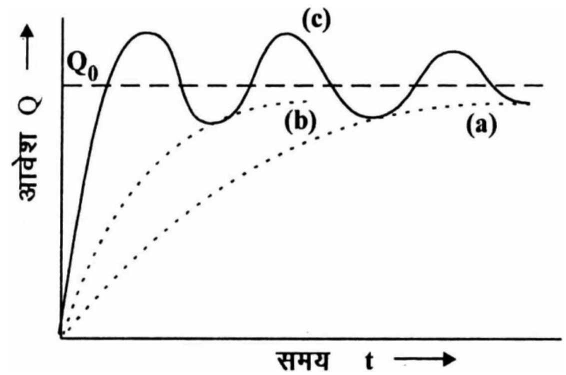
$$\left.\left.+\frac{r}{\sqrt{\omega_0^2-r^2}}\left(\frac{e^{i}\sqrt{\omega_0^2-r^{2.t}}-e^{i}\sqrt{\omega_0^2-r^{2.t}}}{2i}\right)\right]\right\}$$

$$= Q_0\left[1-\frac{\omega_0.e^{-rt}}{\sqrt{\omega_0^2-r^2}}\left\{\frac{\sqrt{\omega_0^2-r^2}}{\omega_0}\cos\sqrt{\omega_0^2-r^2}.t+\frac{r}{\omega_0}\sin\sqrt{\omega_0^2-r^2}.t\right\}\right]$$

$$= Q_0\left[1-\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2-r^2}}e^{-rt}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-r^2}.t-\theta\right)\right] \quad ...(6.30)$$

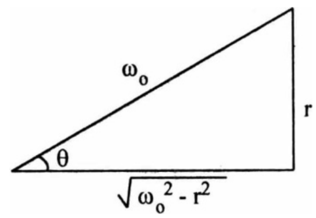
जहाँ $$\tan\theta = \frac{r}{\sqrt{\omega_0^2-r^2}} \quad ...(6.31)$$

समी. (6.30)एक अवमंदित दोलनी आवेश को निरूपित करता है, जिसके अनुसार आवेश बारी- बारी (alternately)से Q_0 से अधिक व कम होता रहता है जब तक कि यह स्थायी मान Q_0 प्राप्त नहीं कर लेता है । आवेश के दोलन के आयाम $\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2-r^2}}e^{-rt} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2-r^2}}e^{-\frac{R}{2L}.t}$ होगें तथा अल्प प्रतिरोध के परिपथ में आयाम का क्षय बहुत धीरेधीरे होगा, R=0 पर $e^{-\frac{R}{2L}.t}$ = 1 होगा व दोलन सरल आवर्ती हो जायेंगे । यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि अधिकतम आदेश का मान स्थायी (steady)आवेश Q_0 से बहुत अधिक होगा तथा संधारित्र की प्लेटों के विभवान्तर को इतना अधिक बढ़ा देगा कि प्लेटों के बीच के रोधन का भंजन हो सकता है । इस स्थिति को रोकने के लिये परिपथ में प्रारम्भ में एक प्रतिरोध को सम्मिलित किया जाता है जिसे बाद में हटाया जा सकता है, परन्तु यह दोलनों का अवमंदन करेगा ।



चित्र 6.2 L,C व R परिपथ में आदेश का समय के साथ परिवर्तन

धारा :- किसी क्षण परिपथ में प्रवाहित धारा का मान, आवेश के व्यंजक का समय के साथ अवकलन करके प्राप्त किया जा सकता है ।



$$I = \frac{dQ}{dt} = Q_0 \omega_0 e^{-rt} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - r^2}.t - \theta\right)$$

$$+ Q_0 \frac{\omega_0 . r}{\sqrt{\omega_0^2 - r^2}} e^{-rt} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - r^2 .t} - \theta\right)$$

$$\frac{Q_0 \omega_0^2 e^{-r.t}}{\sqrt{\omega_0^2 - r^2}} \left[\frac{\omega_0^2 - r^2}{\omega_0} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - r^2}\ .t - \theta\right)\right.$$

$$\left. + \frac{r}{w_0} \cos\left(\sqrt{w_0^2 - r^2}\ .t - \theta\right)\right]$$

$$= \frac{Q_0 \omega_0^2 e^{-r.t}}{\sqrt{\omega_0^2 - r^2}} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - r^2}.t\right) \qquad \text{...(6.32)}$$

क्योंकि $\tan\theta = \frac{r}{\sqrt{\omega_0^2 - r^2}}$

दोलन काल - चूँकि आवेश व धारा के व्यजंक ज्या व कोज्या फलन के रूप में व्यक्त किये गये है तथा इनका पुनरावर्तन कला में 2π परिवर्तन के साथ होगा । आवर्तकाल

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - r^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \qquad \text{....(6.33)}$$

होगा । यदि R = 0 हो तो T = $2\pi\sqrt{LC}$ तथा आवृत्ति

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad ...(6.34)$$

(b) जब परिपथ निरावेशन विधा में है -:

चित्र 6.1 में जब परिपथ से बैटरी (B)को हटा दिया जाता है, तो विद्युत बाहक बल का समीकरण होगा-

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C}=0 \quad ...(6.35)$$

या $$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

या $$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{CL}=0$$

या $$\frac{d^2Q}{dt^2}+2r\frac{dQ}{dt}+\omega_0^2Q=0 \quad ...(6.36)$$

जहाँ $2r=\frac{R}{L}$ तथा $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$

समी. (6.36)का स्वरूप समी. (5.5)जैसा है । इस समीकरण का हल हम समी. (5.5)के हल के रूप में ज्ञात कर चुके हैं । इस हल के अनुसार

$$Q=A.e^{\left(-r+\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t}+B.e^{\left(-r-\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t} \quad ...(6.37)$$

हम जानते हैं कि निरावेशन के समय, t=0 पर परिपथ में आवेश का मान $Q=Q_0$ होगा । t=0 समय वह समय है जब संधारित्र निरावेशित होने लगता हैं तथा परिपथ की धारा शून्य हो जाती है ।

अब t=0 $Q=Q_0$ (नियत)...(i)

तथा $$I=\frac{dQ}{dt}=\frac{dQ_0}{dt}=0 \quad ...(ii)$$

समी.(6.37)में प्रतिबन्ध (i)व (ii)करने पर

A- B = Q_0

$$A-B=\frac{rQ_0}{\sqrt{r^2-\omega_0^2}}$$

$$A=\frac{Q_0}{2}\left(1+\frac{r}{\sqrt{r^2-\omega_0^2}}\right)$$

या

$$=\frac{Q_0}{2}\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2-\omega_0^2}}\right)$$

A व B के मान समी. (6.37)में रखने पर समीकरण का हल होगा -

$$Q=\frac{Q_0}{2}\left[\left(1+\frac{r}{\sqrt{r^2-\omega_0^2}}\right)e^{\left(-r+\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t}+\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2-\omega_0^2}}\right)e^{\left(-r\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t}\right] \quad ...(6.38)$$

यहां भी सभी. (6.29)के समान ही r तथाω_0 के विभिन्न मानों के लिये निम्न लिखित तीन स्थितियाँ सम्भव हो सकती है :-

(i)r > ω_o , (ii)r ≈ ω_o तथा (iii)r < ω_o

स्थिति I - जब r > ω_o या $\frac{R^2}{4L^2}>\frac{1}{LC'}$ तो समी. (6.38)को Q के लिये और आगे सरल नहीं बनाया जा सकता तथा आवेश समय के साथ निरन्तर कम होता जावेगा जब तक कि यह शून्य नहीं हो जाता । [चित्र 6.3(b)]

स्थिति II- जब r = ω_o या $\frac{R^2}{4L^2}=\frac{1}{LC}$ तो यह क्रांतिक स्थिति हैं और आवेश न तो दोलनी होगा और नहीं रूद्धदोल। इस स्थिति में । [चित्र 6.3(b)] आवेश न्यूनतम समय में शून्य हो जाता है ।

स्थिति III- जब r < ω_o या $r^2<\omega_0^2$ या $\frac{R^2}{4L^2}<\frac{1}{LC}$ हो तो यह स्थिति बहुत महत्वपूर्ण है क्योकि इस स्थिति में दोलन प्रारम्भ हो जाते हैं (चित्र 6.3 (c))।

यहीं, $r^2-\omega_0^2$ ऋणात्मक होगा, अत: $\sqrt{r^2-\omega_0^2}$ एक काल्पनिक राशि होगी -

$$\because \sqrt{r^2-\omega_0^2}=\sqrt{-1}\sqrt{\omega_0^2-r^2}=i\sqrt{\omega_0^2-r^2}$$

इस स्थिति में,

$$Q=Q_0\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{r}{i\left(\sqrt{\omega_0^2-r^2}\right)}\right)e^{\left(-r+i\sqrt{\omega_0^2-r^2}\right)t}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{r}{i\sqrt{\omega_0^2-r^2}}\right).e^{\left(-r-i\sqrt{\omega_0^2-r^2}\right)t}\right\}$$

$$=Q_0.e^{-rt}\left\{\left(\frac{e^{i\sqrt{\omega_0^2-r^2}t}+e^{-i\sqrt{\omega_0^2-r^2}.t}}{2}\right)+\frac{r}{\sqrt{\omega_0^2-r^2}}\left(\frac{e^{i\sqrt{\omega_0^2-r^2}.t}-e^{-i\sqrt{\omega_0^2-r^2}.t}}{2i}\right)\right\}$$

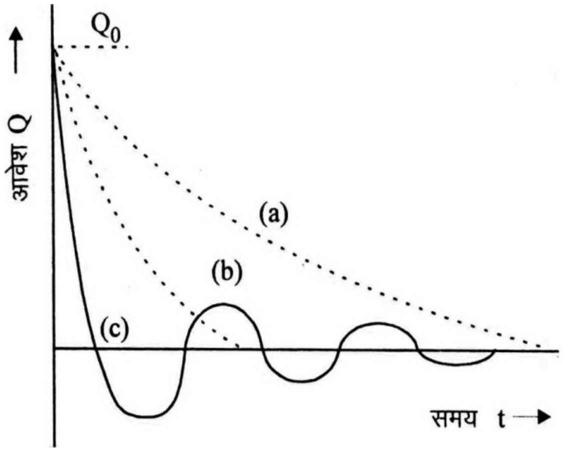
$$=Q_0.e^{-rt}\left\{\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-r^2}\right)t+\frac{r}{\sqrt{\omega_0^2-r^2}}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-r^2}\right)t\right\}$$

$$=\frac{Q_0.e^{-rt}.\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2-r^2}}\left\{\frac{\sqrt{\omega_0^2-r^2}}{\omega_0}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-r^2}\right)t+\frac{r}{\omega_0}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2-r^2}\right)t\right\}$$

$$=\frac{Q_0\omega_0e^{-rt}}{\sqrt{\omega_0^2-r^2}}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-r^2}.t-\theta\right) \qquad ...(6.39)$$

जबकि $\tan\theta=\frac{r}{\sqrt{\omega_0^2-r^2}}$ ...(6.40)

समी. (6.39)अवमंदित दोलनी निरावेशन को व्यक्त करता है तथा चित्र 6.3(c)में दर्शाया गया है ।



चित्र 6.3 निरावेशन स्थिति में आवेश का समय के साथ परिवर्तन

धारा - किसी क्षण धारा का मान ज्ञात करने के लिए आवेश के व्यंजक को समय के सापेक्ष अवकलन करने पर ।

$$I = \frac{dQ}{dt} = Q_0 \omega e^{-rt} \left\{ \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - r^2}.t - \theta\right) + \frac{Q_0 \omega_0 r e^{-rt}}{\sqrt{\omega_0^2 - r^2}} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - r^2}.t - \theta\right) \right\}$$

दोलन काल:- उपरोक्त विवरण में चूँकि आवेश व धारा के व्यजंक ज्या व कोज्या फलना के पदों में व्यक्त किये गये हैं जिनका पुनरावर्तन 2π कला परिवर्तन के पश्चात् होगा ।

अत: दोलन काल,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - r^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \quad ...(6.41)$$

जब $R = 0, T = 2\pi\sqrt{LC}$

तथा आवृत्ति $f = \frac{1}{T} = \frac{t}{2\pi\sqrt{LC}}$

इस स्थिति में आवेश का समीकरण

$$Q_0 = Q_0 \cos \omega_0 t = Q_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} \quad ...(6.42)$$

होगा तथा दोलन सरल आवर्ती होंगे ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

4. यदि L,C व R परिपथ में आवेशन कि विधा में R=O हो जावे तो क्या होगा?
....
....
....

5. L,C व R परिपथ में निरावेशन कि विधा में यदि R का मान शून्य हो जावे तो आवेश के दोलन किस प्रकार के होंगे?
....

उदाहरण 6.2 एक 0.25 माइक्रो फैरड के संधारित्र को पहले एक निश्चित विभव तक आवेशित किया जाता है तब उसे $\frac{1}{10}$ हेनरी के प्रेरकत्व तथा 100 ओम के प्रतिरोध के द्वारा निरावेशित किया जाता है । निरावेशन की आवृत्ति ज्ञात कीजिये।

हल : यहाँ $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{(100)^2}{4\times(0.1)^2} = 2.5\times10^5$

तथा $\frac{1}{LC} = \frac{1}{0.1\times0.25\times10^{-6}} = 4.0\times10^7$

$\therefore \quad \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$

अत: निरावेशन दोलनी है तथा उसकी आवृत्ति

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\times10^7 - 2.5\times10^5}$$

= 1000 कम्पन /सेकण्ड

उदाहरण 6.3 यदि एक L-C-R परिपथ में R= 400 ओम, L= 0.1 हेनरी तथा C=1 माइक्रो फैरड हो तो बताइये कि क्या संधारित्र का निरावेशन दोलनी होगा ?

हल: यहाँ $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{400\times400}{4\times0.1\times0.1} = 4\times10^6$

तथा $\frac{1}{LC} = \frac{1}{0.1\times1\times10^{-6}} = 10^7$

$\therefore \quad \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$

अत: निरावेशन दोलनी होगा ।

6.4.2 चल कुण्डली प्रक्षेप गैल्वनोमीटर (Moving coil ballistic galvanometer)

चल कुण्डली प्रक्षेप गैल्वनोमीटर अवमंदित आवर्ती दोलक का एक महत्वपूर्ण उदाहरण है । इस गैल्वनोमीटर में एक कुण्डली फॉस्फर-ब्रांज के तार द्वारा चुम्बकीय ध्रुवों के मध्य अन्तराल में लटकी होती है । चालक (conducting)कुण्डली में जब आवेश प्रवाहित किया जाता है तो क्षण-मात्र के लिये कुण्डली में घूर्णन उत्पन्न हो जाता हैं । इस घूर्णन के फलस्वरूप लटकन तार में घूर्णन के विपरीत दिशा में मरोड़ी बलयुग्म उत्पन्न हो जाता है । इसे प्रत्यानयन बल-युग्म (restoring couple)कहते है । यदि लटकन तार में एकांक ऐंठन (twist)के लिये बल युग्म का मान C हो तथा तार में ऐंठन का का मान θ हो तो ऐंठन बल-युग्म आघूर्ण -C θ होगा । यहाँ

$$C = \frac{\pi\eta r^4}{21} \qquad ...(6.43)$$

जबकि 1 तार की लम्बाई, r उसकी त्रिज्या तथा η तार के पदार्थ का दृढ़ता गुणांक (modulus of rigidity)है । कुण्डली में प्रत्यानयन बल युग्म के अतिरिक्त दो अन्य बल-युग्म

भी विक्षेपक बल युग्म (deflecting couple)के विपरीत दिशा में कार्य करते हैं । इन बल युग्मों का वर्णन हम अब करेंगे ।

(i) खुले परिपथ में कुण्डली की गति का अवमंदन करने वाले वायु प्रतिरोध एवं श्यान बलों के कारण बल युग्म लगते हैं । इन बलों का आघूर्ण (moment of forces)कुण्डली की गति के कोणीय वेग के अनुक्रमानुपाती होता है, अर्थात्

कोणीय वेग $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$$\text{यांत्रिक अवमंदन बलाघूर्ण} = -\gamma \frac{d\theta}{dt}$$

यहाँ γ अवमंदन गुणांक है । यह अवमंदन यांत्रिक अवमंदन कहलाता है ।

(ii) बन्द परिपथ में कुण्डली की गति का अवमंदन विद्युत-चुम्बकीय बल के कारण लगने युग्म यह वाले बल से होता है । विद्युत-चुम्बकीय बल कुण्डली में प्रेरण-धाराओं से उत्पन्न होते हैं । इन बलों का बलापूर्ण परिपथ के प्रतिरोध (R)के व्युत्क्रमानुपाती तथा कोणीय वेग अनुक्रमानुपाती होता है । अतः विद्युत-चुम्बकीय बलाघूर्ण का मान $-\frac{m}{R}\frac{d\theta}{dt}$ होगा, जहाँ m एक नियतांक है जो कुण्डली के क्षेत्रफल तथा चुम्बकीय फ्लक्स पर निर्भर करता है । यह अवमंदन विद्युत-चुम्बकीय अवमंदन (electro-magnetic damping)कहलाता है ।

अतः कुण्डली पर लगने वाला परिणामी बलाघूर्ण (τ),

$$\tau = -C\theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} - \frac{m}{R}\frac{d\theta}{dt} \qquad ....(6.44)$$

यदि कुण्डली का जड़त्व आघूर्ण I हो तो कुण्डली के घूर्णन गति का समीकरण होगा-

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} - \frac{m}{R}\frac{d\theta}{dt}$$

या $$\frac{d^2\theta}{dt^2} = +\frac{C}{1}\theta + \frac{1}{I}\left(\gamma + \frac{m}{R}\right)\frac{d\theta}{dt} = 0$$

या $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{I}\left(\gamma + \frac{m}{R}\right)\frac{d\theta}{dt} + \frac{C}{I}\theta = 0$$

माना $$\frac{1}{I}\left(\gamma + \frac{m}{R}\right) = 2r \text{ तथा } \frac{C}{I} = \omega_0^2$$

$$\therefore \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2r\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad ...(6.45)$$

समी. (6.45)का स्वरूप इकाई-5 की समी (5.5)जैसा ही है केवल रेखिक विस्थापन y का स्थान, कोणीय विस्थापन θ ले लेता है अतः समी. (6.45)का हल भी समी. (5.5)के प्रकार का ही होगा ।

माना समी. (6.45)का हल निम्न है-

$$\theta = Ae^{\left(-r+\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t} + Be^{\left(-r-\sqrt{r^2-\omega_0^2}\right)t} \qquad ...(6.46)$$

यहाँ A व B पुन: दो स्वेच्छ नियतांक हैं जिनके मान आप परिसीमा प्रतिबन्ध लगाकर ज्ञात करेंगे ।

यदि यह माना जाये कि t=0 पर θ=0 है तो समी. (6.46)से

A+B=0 या B= -A

$$\therefore \quad \theta = Ae^{-n}\left[e^{t\sqrt{r^{2-\omega_0^2}}} e^{-t\sqrt{r^{2-\omega_0^2}}}\right] \qquad ...(6.47)$$

अब पुन: यहाँ तीन स्थितियाँ उत्पन्न होती हैं,

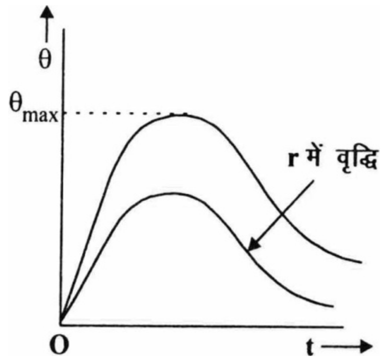
अर्थात् (i)r > ω_o , (ii)r $\approx \omega_o$ तथा (iii)r < ω_o

स्थिति I- $r^2 > \omega_0^2$ या $r > \omega_0$

या $$\left(\gamma + \frac{m}{R}\right) > 2\sqrt{CI}$$

इस स्थिति में कुण्डली की गति अदोलनी या रूद्धदोलित (dead beat)होती है और उसके पश्चात् कुण्डली बिना दोलन किये चरघातांकी-विस्थापन क्षय के द्‌वारा स्थिर अवस्था में आ जाती है । (चित्र 6.4)

चित्र 6.4 से स्पष्ट है कि अवमंदन के बढ़ने से अधिकतम कोणीय विस्थापन (θ_{max}) का मान पहले के मान से कम हो जायेगा ।



चित्र 6.4

स्थिति II- जब r = ω_o, गैल्वनोमीटर की कुण्डली क्रांतिक रूप से अवमंदित होगी । क्रांतिक अवमंदन के लिये

$$\left(\gamma + \frac{m}{R}\right) = 2\sqrt{CI}$$

इस स्थिति में कुण्डली अधिकतम θ से विक्षेपित होकर न्यूनतम समय में बिना दोलन किये स्थिर अवस्था में आ जाती है ।

स्थिति III- जब r < ω_o या न्यून अवमंदन के लिये

$$\left(\gamma . + \frac{m}{R}\right) < 2\sqrt{CI}$$

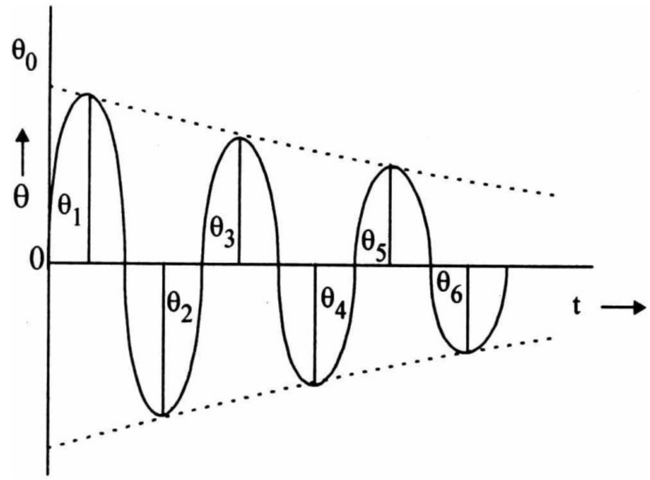
इस स्थिति में

$$\theta = Ae^{-rt}\left[e^{i\left(\sqrt{\omega_0^2-r^2}\right)t} - e^{-i\left(\sqrt{\omega_0^2-r^2}\right)t}\right]$$

$$= Ae^{-rt}\left[e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right]$$

$$= \theta_0.e^{-rt}\sin\left(\omega t\right) \quad ...(6.48)$$

जहाँ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - r^2} = \frac{2\pi}{T}$ तथा θ_0 अवमंदन की अनुपस्थिति में कुण्डली की आवर्ती गति का आयाम है । अत: इस स्थिति में कुण्डली आवेश प्रवाहित हो जाने के पश्चात् दोलन प्रारम्भ कर देती है । परन्तु यह तभी सम्भव है जब r का मान नगन्य हो, अर्थात कुण्डली का जड़त्व आघूर्ण (I)व प्रतिरोध (R)अधिक होना चाहिये । इसके अतिरिक्त यांत्रिक तथा विद्युत चुम्बकीय नियतांक γ तथा m दोनों कम होने चाहिये ।



(चित्र 6.5)

समी. (6.36)से दोलनी (प्रक्षेप)गति में आयाम $\theta_0.e^{-rt}$ है । अत: t=0 पर आयाम $=\theta_0$ इसी प्रकार -

$t = \frac{T}{4}$ पर आयाम $\theta_1 = \theta_0.e^{-\frac{rT}{4}}$

$t = \frac{3T}{4}$ पर आयाम $\theta_2 = \theta_0.e^{-\frac{3rT}{4}}$

$t = \frac{5T}{4}$ पर आयाम $\theta_3 = \theta_0.e^{-\frac{5rT}{4}}$

यदि चित्र 6.5 में देखा जाये तो विभिन्न समयों पर कोणीय आयाम का मान समय बढ़ने के साथ निरन्तर कम होता जा रहा है,

अर्थात् $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3 > ...... > \theta_n$

अत: $\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\theta_2}{\theta_3} = \frac{\theta_3}{\theta_4} = ...e^{\frac{rT}{2}} = d$ ...(6.49)

जहाँ d अवमंदित दोलनों में दो क्रमागत आयामों का अनुपात है । इसे अपक्षय (decrement)कहते है । इस अपक्षय का यदि लॉग (log)ले लिया जाये तो यह लोगेरिथ्मीय अपक्षय (logarithmic decrement)कहलाता हैं । यदि $\log_e d$ को λ से निरूपित करें तो -

$$\lambda = \log_e d = \log_e e^{\frac{rT}{2}} = \frac{rT}{2}$$

$$\lambda = \frac{T}{4\tau} \qquad ...(6.50)$$

यदि प्रथम आयाम θ_1, ज्ञात कर लिया जाये तो अवमंदन की अनुपस्थिति में θ_0 भी ज्ञात किया जा सकता है ।

हम जानते है की

$$t = \frac{T}{4} \text{ पर, } \theta = \theta_1 = \theta_0 e^{\frac{T}{8\tau}}$$

$$\therefore \quad \frac{\theta_0}{\theta_1} = e^{\frac{T}{St}} = e^{\lambda/2} \qquad ...(6.51)$$

$$\theta_0 = \theta_1\left(1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2!}\frac{\lambda^4}{4} + _ ....\right)$$

या
$$\theta_0 \approx \theta_1\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \qquad ...(6.52)$$

हम जानते है

$$\because 2\tau \frac{1}{\tau}$$

$$\therefore \frac{r}{2} = \frac{1}{4\tau}$$

τ यहाँ विश्रान्ति काल है।

लोगेरिथ्मीय अपक्षय (λ)का मान ज्ञात करने के लिये हम प्रथम व n वा आयाम ज्ञात करेंगे ।

$$\frac{\theta_1}{\theta_n} = \frac{\theta_1}{\theta_2} \times \frac{\theta_2}{\theta_3} \times \frac{\theta_3}{\theta_4} ...... \frac{\theta_{n-1}}{\theta_n} = e^{(n-1)\lambda}$$

या
$$(n-1)\lambda = \log_e \frac{\theta_1}{\theta_n}$$

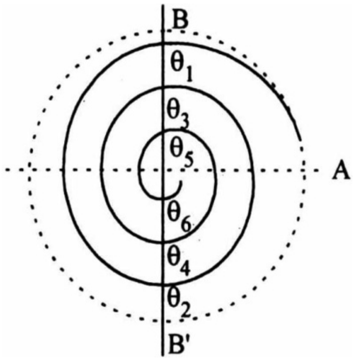
$$\therefore \quad \lambda = \frac{1}{(n-1)}\log_e \frac{\theta_1}{\theta_n} = \frac{2.303}{(n-1)}\log_{10}\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) \qquad ...(6.53)$$

प्रयोगशाला में λ का मान ज्ञात करने के लिये प्रथम व ग्यारहवें आयाम के प्रेक्षण लेते है,

तब
$$\lambda = \frac{1}{10}\log_e\left(\frac{\theta_1}{\theta_{11}}\right)$$

उत्तरोत्तर आयामों $\theta_1, \theta_2, \theta_3 .....$ को सबसे अच्छी तरह से एक समकोणिक सर्पिल (equiangular spiral)के द्वारा ग्राफीय रूप में व्यक्त किया जा सकता है । जब दोलन सरल आवर्ती होते है, तो इनको एक घूर्णी सदिश $\overline{OA}$ के एक नियत व्यास (BOB')के वृत पर प्रक्षेपों के द्वारा निरूपित किया जाता है । इस स्थिति में OB,OB',OB इत्यादि उत्तरोत्तर

आयाम होंगे । परन्तु यदि दोलनों के आयाम निरन्तर कम हो रहे हैं तो घूर्णी सदिश $\overline{OA}$ में एक नियत दर से सिकुड़न होती जायेगी और आयाम चित्र 6.6 में दिखाये अनुसार होंगे।



चित्र 6.6

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

6. चल कुण्डली प्रक्षेप गैल्वनोमीटर की कुण्डली की गति अति अवमंदन की स्थिति में किस प्रकार की होती है?

....

....

....

7. एक प्रक्षेप गैल्वनोमीटर की कुण्डली की, अवमंदन की अनुपस्थिति में, गति किस प्रकार की होती है?

....

8. प्रक्षेप गैल्वनोमीटर की कुण्डली के अवमंदित दोलन के दो क्रमागत आयामों के अनुपात का लॉग (log)क्या कहलाता है?

....

उदाहरण 6.4 एक दोलन कर रही प्रक्षेप धारामापी कुण्डली के प्रथम व ग्यारहवें विक्षेप क्रमशः 25 सेमी तथा 5 सेमी है। लोगेरिथ्मीय अपक्षय ज्ञात कीजिये ।

हल : प्रश्नानुसार, θ_1=25 सेमी

θ_{11}=5 सेमी

$$\therefore \quad \lambda = \frac{2.303}{(n-1)}\log_{10}\left(\frac{\theta_1}{\theta_{11}}\right)$$

$$= \frac{2.303}{10}\log_{10}\frac{25}{5}$$

$$= 0.23.3\log_{10}(5)$$

$$= 0.16$$

उदाहरण 6.5 एक प्रक्षेप गैल्वनोमीटर के लोगेरिथ्मीय अपक्षय का मान 0.30 है तथा प्रथम विक्षेप 10 सेमी हैं । t=0 पर विक्षेप का मान ज्ञात कीजिये ।

हल : प्रश्नानुसार, $\lambda = 0.30$

$$\theta_1 = 10 \text{ सेमी}$$

$$\therefore \quad \theta_0 = \theta_1\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$= 10\left(1+\frac{0.30}{2}\right)$$

=10(1+0.15)

=10 × 1.15

= 11.5 सेमी

6.5 सारांश (Summary)

- अल्प अवमंदित दोलक की माध्य गतिज ऊर्जा समय के साथ चरघांताकी रूप से कम होती है ।
- न्यून अवमंदन की स्थिति में दोलक की माध्य स्थितिज ऊर्जा उसकी माध्य गतिज ऊर्जा के बराबर होती है ।
- जितने समय में दोलक की कुल ऊर्जा अपने प्रारम्भिक मान की 36.8% रह जाती है, वह समय ऊर्जा विश्रान्ति काल कहलाता है । इसे τ से प्रदर्शित करते है, जबकि

  $$\tau = \frac{1}{2r}$$ ।
- किसी अल्प अवमंदित दोलक का शक्ति ह्यास, अवमंदन नियतांक r अनुक्रमानुपाती तथा विश्रान्ति काल (τ)के व्युत्क्रमानुपाती होता है ।
- दोलक का विशेषता गुणांक (Q)उसके दोलनों के अवमंदन से मुक्त होने की सीमा को दर्शाता है ।
- L-C-R परिपथ की आवेशन विधा में, r $<\omega$ स्थिति में, आवेश के अवमंदित दोलन होते है । दोलनों का आयाम बारी-बारी से एक स्थायी मान Q_0 से तब तक अधिक व कम होता रहता है जब तक यह स्थायी मान Q_0 प्राप्त नहीं कर लेता।
- चल कुण्डली प्रक्षेप गैल्वनोमीटर में क्षणिक आवेश प्रवाहित करने पर कुण्डली की गति यांत्रिक व विद्युत-चुम्बकीय बलाघूर्णो के प्रभाव में अवमंदित हो जाती है तथा, r $<\omega_0$ की स्थिति में ये कुण्डली अवमंदित आवर्ती गति करने लगती है। कुण्डली के क्रमागत आयामों का अनुपात अपक्षय कहलाता है तथा इसके लॉग को लोगेरिथ्मीय अपक्षय (logarithmic decrement)कहते हैं ।

6.6 शब्दावली (Glossary)

अपक्षय	Decrement

अवमंदन	Damping
आयाम	Amplitude
आवेशन विधा	Charging mode
उपक्षेणीय	Negligible
गतिज ऊर्जा	Kinetic energy
चरघातांकी	Exponential
निरावेश्न विधा	Discharging mode
प्रतिरोध	Resistance
प्रेरकत्व	Inductance
मंदक क्रिया	Retarding action
रूद्ध दोल	Dead beat
विशेषता गुणांक	Quality factor
विश्रान्ति काल	Relaxation time
शक्ति	Power
संग्रहित	Stored
संधारित्र	Condenser
स्थायी रूपसे	Steadily
स्थितिज ऊर्जा	Potential energy

6.7 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

N.S. Khare & S.S. Srivastava	Test Book of Magnetism & Electricity	Atma Ram & Sons New Delhi
F.S. Craw Ford Jr,	Waves & Oscillations Berkeley Physics Course Vol III	Mc-Graw-Hill Intenational Book Co., Singapore
एम. पी. सक्सेना, पी. आर. सिंह व एस. एस. रावत	दोलन व तरंगे	कॉलेज बुक हाउस, जयपुर

6.8 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to self assessment questions)

1. जितने समय में दोलक की कुल ऊर्जा अपने प्रारम्भिक मान का 36.3 प्रतिशत रह जाती है, वह समय ऊर्जा विश्रान्ति काल कहलाता है ।

2. अवमंदित दोलक की ऊर्जा के औसत मान में भी समय का पद उपस्थित रहता है क्योंकि अवमंदित दोलक की गति को कई दोलन-चक्रों पर प्रेक्षित कर केवल एक चक्र पर किसी समय t पर औसत मान ज्ञात करते है ।

3. यदि अवमंदन का मान नगण्य या शून्य हो तो इस प्रकार के दोलक को मुक्त दोलक (free oscillator)कहते है ।

4. यदि L,C, व R परिपथ में आवेशन की विधा में R=0 हो जावे तो आवेश के दोलन सरल आवर्ती हो जाते हैं । अधिकतम आवेश का मान स्थायी आवेश Q_0 बहुत अधिक होगा तथा संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवान्तर को इतना अधिक बढ़ा देगा कि प्लेटों के बीच का रोघन रू सकता है ।

5. दोलन सरल आवर्ती होंगे ।

6. अति अवमंदन की स्थिति में प्रक्षेप गैल्वनोमीटर की कुण्डली की गति अदोलनी या रूद्ध दोल होगी तथा कुण्डली अधिकतम विक्षेप प्राप्त करने के पश्चात् स्थिर अवस्था में आ जावेगी ।

7. कुण्डली की गति आवर्ती होगी ।

8. लोगेरिथ्मीय अपक्षय (logarithmic decrement)कहलाता है ।

6.9 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. अल्प अवमंदित दोलक की ऊर्जा किस रूप में कम होती है?
2. किसी अल्प अवमंदित दोलक का विशेषता गुणांक क्या दर्शाता है ?
3. अवमंदन का मान शून्य होने पर दोलक को क्या कहते हैं?
4. चल कुण्डली प्रक्षेप गेल्वनोमीटर की कुण्डली के अवमंदित दोलन के दो क्रमागत आयामों का अनुपात क्या कहलाता है ?

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

5. एक अल्प अवमंदित दोलित्र के दोलनों की माध्य गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जाएं ज्ञात कीजिये ।
6. एक अल्प अवंमदित दोलित्र के Q से क्या तात्पर्य है? यह अवमंदन से किस प्रकार प्रभावित होता है?
7. विश्रान्ति काल से आप क्या समझते है? अल्प अवमंदित दोलक के लिये सिद्ध कीजिये कि विशेषता गुणांक $Q = \omega_0 . \tau$ जबकि ω_0 दोलक की स्वाभाविक आवृत्ति तथा τ विश्रान्ति काल है ।
8. अवमंदित दोलनों के उदाहरण के रूप में एक L,C व R परिपथ के आवेशन विधा में आवेश की वृद्धि के (i)r > ω_0, (ii)r $\approx \omega_0$ तथा)iii(r < ω_0 स्थितियों में व्यजंक प्राप्त कीजिये?
9. एक L,C व R परिपथ के निरावेशन विधा में आवेश के समय के साथ परिवर्तन को समझाइये । दोलन का आवर्तकाल भी ज्ञात कीजिये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

10. एक लोलक का आवर्तकाल 2 सेकण्ड है तथा आयाम 4^{o} है । 100 सेकण्ड पश्चात् उसका आयाम 2^{0} रह जाता है तो विश्रान्ति काल व विशेषता गुणांक की गणना कीजिये।

(उत्तर :72.6 सेकण्ड, 227.52**)**

11. एक 5.0 माइक्रो फैरड के संधारित्र को पहले एक निश्चित विभव तक आवेशित किया जाता है तब उसे 1 हेनरी के प्रेरकत्व तथा 100 ओम के प्रतिरोध के द्वारा निरावेशित किया जाता है । निरावेशन की आवृत्ति ज्ञात कीजिये ।

(उत्तर :71 कम्पन/से**)**

12. यदि एक L-C-R परिपथ में R = 100 ओम, L = 1 हेनरी तथा C= 10 माइक्रोफैरड तो बतलाइये कि क्या संधारित्र का निरावेश दोलनी होगा?

(उत्तर :हाँ दोलनी होगा**(**

13. एक दोलन कर रही प्रक्षेप गेल्वनोमीटर कुण्डली की माध्य स्थिति के एक ही तरफ दो सतत् विक्षेप क्रमश :25 तथा 24.9 सेमीहै । लोगेरिथ् .मीय अपक्षय ज्ञात कीजिये ।

(उत्तर :$1.96x10^{-3}$**)**

14. एक प्रक्षेप गैल्वनोमीटर के लोगेरिथ्मीय अपक्षय का मान 0.01 है तथा प्रथम विक्षेप 25 सेमी है । .t=0 पर विक्षेप का मान ज्ञात कीजिये ।

(उत्तर :25.125 सेमी**(**

इकाई7-

प्रणोदित आवर्ती दोलक
(Driven Harmonic Oscillator)

इकाई की रूपरेखा

7.0 उद्देश्य

7.1 प्रस्तावना

7.2 अल्प अवमंदित प्रणोदित दोलक

7.2.1 गति का समीकरण एवं इसका हल

7.2.2 आयाम की चालक बल की आवृत्ति पर निर्भरता

7.2.3 कला की चालक बल की आवृत्ति पर निर्भरता

7.3 सारांश

7.4 शब्दावली

7.5 संदर्भ ग्रन्थ

7.6 बोध प्रश्नों के उत्तर

7.7 अभ्यासार्थ प्रश्न

7.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- अवमंदित दोलक पर बाह्य आवर्ती बल के प्रभाव को समझ सकेंगे;
- प्रणोदित दोलक की कला की बाह्य आवर्ती बल की आवृत्ति पर निर्भरता की व्याख्या कर सकेंगे;
- प्रणोदित दोलक की गति का समीकरण व्युत्पन्न कर इसका हल ज्ञात कर सकेंगे;
- प्रणोदित दोलक के आयाम की बाह्य आवर्ती बल (external periodic force)कि आवृत्ति पर निर्भरता का अध्ययन कर सकेंगे ।

7.1 प्रस्तावना (Introduction)

आपने इकाई-5 व 6 में एक विमीय आवर्ती दोलक एवं इसकी गति का समीकरण, इसका हल तथा कुछ उदाहरणों का अध्ययन किया है । आपने देखा है कि अल्प अवमंदित दोलक का आयाम व उर्जा अवमंदन के कारण चरघांताकी रुप से कम होते जाते है, एवम् दोलक की आवृत्ति, स्वभाविक आवृत्ति से कम हो जाती है तथा कुछ समय पश्चात् दोलक विराम अवस्था में आ जाता है । आयाम व उर्जा का नियत मान प्राप्त करने के लिये यदि आप दोलक पर बाह्य आवर्ती बल (यह आवश्यक नहीं है कि आवर्ती बल की आवृत्ति दोलक की स्वाभाविक आवृत्ति के

बराबर ही हो)आरोपित करें तो आप देखेंगे कि संक्रमण काल (transient period)से गुजरने के पश्चात् स्थायी अवस्था में दोलक नियत आयाम से दोलन करता है ।

इस इकाई के अनुच्छेद 7.2 में आप अल्प अवमंदित आवर्ती दोलक पर बाह्य आवर्ती बल, जिसे चालक बल (driving force)भी कहते हैं, के प्रभाव का अध्ययन करेंगे । यहाँ दोलक प्रत्यानयन, अवमंदन व बाह्य आवर्ती बलों के प्रभाव में गति करता है । इस दोलक के आयाम की बाह्य आवर्ती बल की आवृत्ति पर निर्भरता का अध्ययन अनुच्छेद 7.2 में करेंगे और आप देखेंगे कि दोलक का आयाम चालक बल की आवृत्ति में वृद्धि करने पर (i)आवृत्ति के न्यूनमानों पर प्रत्यानयन बल पर (ii)स्वाभाविक आवृत्ति के पास अवमंदन बल पर तथा (iii)आवृत्ति के अधिक मानों के लिये दोलक के द्रव्यमान तथा आवृत्ति पर निर्भर करता है । इसी अनुच्छेद में दोलक की कला का चालक बल की आवृत्ति के साथ परिवर्तन का अध्ययन करेंगे जिसमें आप देखेंगे कि संपूर्ण आवृत्ति परास में कलान्तर शून्य से बढ़कर π हो जाता है ।

दोलक के आयाम तथा कला की बाह्य बल की आवृत्ति पर निर्भरता का अध्ययन भी आप दोलक की विभिन्न अवमंदन परिस्थतियों में इन अनुच्छेदों में कर सकेंगे ।

7.2 अल्प अवमंदित प्रणोदित दोलक (weakly damped forced harmonic oscillator)

आपने इकाई-5 में पढ़ा है कि अल्प अवमंदित दोलक का आयाम, अवमंदन के प्रभाव में समय के साथ कम होता हुआ अन्ततः शून्य हो जाता है व उसकी आवृत्ति स्वभाविक आवृत्ति से कम हो जाती है । बाहय आवर्ती बल आरोपित करने पर इस दोलक में दो प्रभाव दृष्टिगोचर- एक आयाम में व दूसरा इसकी आवृत्ति में । अवमंदन बल गति में अवरोध उत्पन्न कर आयाम को कम करता है तथा बाहय आवर्ती बल गति में सहायक बनकर इसमें वृद्धि* करता है । अवमंदन के कारण दोलक की आवृत्ति स्वभाविक आवृत्ति से कम हो जाती है तथा बाह्य आवर्ती बल की आवृत्ति से प्रभावित होने लगती, है । उपरोक्त दो प्रक्रियाओं के फलस्वरूप आयाम व आवृत्ति नियत होने में कुछ समय लगता है । दोलक की वह अवस्था जिसमें दोलक का आयाम व आवृत्ति परिवर्तित होते रहते हैं अर्थात् नियत नहीं हो पाते, क्षणिक अवस्था (transient state)कहलाती है । जब आयाम व आवृत्ति का मान नियत हो जाता है तो उस अवस्था को स्थायी अवस्था कहते हैं । स्थायी अवस्था में इस दोलक की आवृत्ति बाह्य आवर्ती बल की आवृत्ति के बराबर हो जाती है, इस प्रकार के दोलक को चालित अथवा प्रणोदित दोलक (Driven or forced) (oscillator)कहते है । बाह्य बल जिसके प्रभाव में दोलक नियत आयाम के दोलन करता है, चालक बल (driving froce)कहते हैं ।

(*सामान्यत: दोलक कि कला बाह्य आवर्ती बल की से भिन्न होती है ।)

झूले पर झूलता बच्चा अवमंदित आवर्ती दोलक का सरलतम उदाहरण है । इस उदाहरण में झूले का आयाम नियत रखने के लिये, आपको जमीन पर खड़े रहकर बार बार झूले को यथोचित धक्के के रूप में बाह्य आवर्ती बल आरोपित करना होता है । इस उदाहरण में आपके

द्वारा दिया गया धक्का चालक बल का कार्य करता है तथा झूला चालित (प्रणोदित)दोलक की तरह ।

बोध प्रशन (Self assessment questions)

1. अल्प अवमंदित दोलक पर एक निश्चित आवर्ती का बाह्य आवर्ती बल लगाने पर दोलक के आयाम में क्या परिवर्तित होगा ?

----

2. यदि प्रणोदित दोलक आर कार्यरत बाह्य आवर्ती बल हटा दिया जाए तो दोलक के दोलनों पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

----

3. प्रणोदित दोलक की स्थायी अवस्था से आप क्या समझते हैं ?

7.2.1 गति का समीकरण एवं इसका हल (Equation of motion and its solution)

एक m द्रव्यमान वाले अवमंदित दोलक पर आप विचार कीजिये । आप जानते हैं कि इस प्रकार का दोलक दो बलों के प्रभाव में गति करता है- प्रत्यानयन बल तथा अवमंदन बल । अब इस दोलक परω कोणीय आवृत्ति का एक बाह्य आवर्ती बल आरोपित करते है । इन तीनों बलों के प्रभाव में दोलक की गति के समीकरण के अध्ययन से पूर्व इन बलों की प्रकृति समझना आवश्यक है ।

(i) प्रत्यानयन बल

$$F_R = -Ky$$

यहाँ k बल नियतांक है । यह बल विस्थापन y, के विपरीत दिशा में कार्य करता है ।

(ii) अवमंदन बल

$$Fd = -\lambda v = -\lambda \frac{dy}{dt}$$

यहा λ अवमंदन नियतांक व v दोलक का वेग है । यह बल भी वेग की दिशा के विपरीत दिशा में कार्य करता है ।

(iii) बाह्य आवर्ती बल (चालक बल)

$$F_e = F_0 \sin \omega t$$

यहीं F_0 बाह्य बल का आयाम तथा ω इसकी आवृत्ति है । F_e,sin ωt का फलन है जो कि आवर्ती फलन होने का प्रतीक है ।

दोलक की गति का समीकरण ज्ञात करने के लिये दोलक पर कार्यरत परिणामी बल होगा -

$$F = F_R + F_d + F_e \quad .....(7.1)$$

चूंकि दोलक का द्रव्यमान m है अत: न्यूटन के नियमानुसार उस पर लगने वाले परिणामी बल का मान

$$F=m\frac{d^2y}{dt^2} \quad ...(7.2)$$

होगा । समी (7.1)तथा (7.2)की सहायता से दोलक की गति के समीकरण को आप निम्न प्रकार से लिख सकते हैं-

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky\lambda\frac{dy}{dt}+F_0\sin\omega t \quad ...(7.3)$$

या

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}\frac{dy}{dt}+\frac{k}{m}y=\frac{f_o}{m}\sin\omega t \quad ...(7.4)$$

माना

$$\frac{\lambda}{m}=2r=\frac{1}{\tau},\frac{k}{m}=\omega^2{}_0 \text{ तथा } \frac{F_0}{m}=f_0 \quad ...(7.5)$$

यहाँ τ विश्रान्ति काल ω_0 दोलक की स्वाभाविक आवृत्ति व f_0 बाह्य आवर्ती बल के कारण उत्पन्न अधिकतम त्वरण है ।

अत: समी. (7.4)से

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+\omega_0{}^2y=f_0\sin\omega t \quad ....(7.6)$$

यह समीकरण प्रणोदित दोलक का अवकल समीकरण कहलाता है ।

समीकरण का हल-

मान लीजिये कि चालित दोलक के स्थायी अवस्था में समी (7.6)का हल निम्न है:

$$Y=yo\sin(\omega t-\phi) \quad ...(7.7)$$

यहाँ y_o चालित दोलक का आयाम है तथा ϕ आवर्ती बल व विस्थापन के मध्य कलान्तर है । आयाम y_0 व कलान्तर ϕ ज्ञात करने के लिये समी (7.7)को समय के साथ अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dt}\omega y_o\cos(\omega t-\phi) \quad ....(7.8)$$

समी. (7.8)का एक बार पुन: अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2y_2\sin(\omega t-\phi) \quad ...(7.9)$$

y, $\frac{dy}{dt}$ तथा $\frac{d^2y}{dt^2}$ - के मान समी. (7.6)में रखने पर

$$-\omega^2y_o\sin(\omega t-\phi)+2r\omega y_o\cos(\omega t-\phi)$$
$$+\omega^2o\ y_0\sin(\omega t-\phi) = f_o\sin(\omega t) \quad ...(7.10)$$
$$= f_o\sin(\omega t-\phi+\phi)$$

या

$$(\omega^2{}_0-\omega^2)y_o\sin(\omega t-\phi)+2r\omega y_0\cos(\omega t-\phi)$$
$$= fo\sin(\omega t-\phi)\cos\phi+f_o\cos(\omega t-\phi)\sin\phi \quad ...(7.11)$$

यह समीकरण समय t से सभी मानों के लिये यथार्थ है । अत: उपरोक्त समी ... (7.11) के दोनों ओर $\sin(\omega t-\phi)$व $\cos(\omega t-\phi)$के गुणांकों की तुलना करने पर

$$(\omega_o^2 - \omega^2)y_o = f_o \cos\phi \qquad ....(7.12)$$

$$2r\omega y_o = f_o \sin\phi \qquad ...(7.13)$$

समी. (7.13)में (7.12)का भाग देने पर

$$\tan\phi = \frac{2r\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad ....(7.14)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2r\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \qquad ...(7.15)$$

समी.(7.12)व (7.13)का वर्ग करके जोड़ने पर

$$\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4r^2\omega^2\right]y_0^2 = f_0^2 \qquad ...(7.16)$$

अत: $$y_0 = \frac{f_0}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4r^2\omega^2\right]^{1/2}} \qquad ....(7.17)$$

समी. (7.17)से (7.15)से ϕ का मान समी (7.7)में रखने पर

$$y = \frac{f_0}{\left[\left(\omega^2 - \omega^2\right)^2 + 4r^2\omega^2\right]^{1/2}} \sin\left(\omega t - \tan\frac{2r\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \qquad ...(7.18)$$

समी (7.18)प्रणोदित दोलक के स्थायी अवस्था में विस्थापन को व्यक्त करता है । इस समीकरण से हम निम्न निष्कर्ष प्राप्त करते हैं:

(i) स्थायी अवस्था में प्रणोदित दोलक की आवृत्ति दोलक की स्वभाविक आवृत्ति ω_o के बराबर न होकर, चालक बल की आवृत्ति के बराबर हो जाती है ।

(ii) दोलक का आयाम समय t पर निर्भर नहीं होने के कारण आयाम समय के सापेक्ष नियत रहता है परन्तु चालक बल के कारण उत्पन्न त्वरण f_o, चालक बल की आवृत्ति ω तथा अवमंदन बल पर निर्भर करता है ।

(iii) दोलक के विस्थापन व आरोपित बल के मध्य कलान्तर का मान $\phi = \tan^{-1}\frac{2r\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ के बराबर है तथा यह अवमंदन व चालक बल की आवृत्ति पर निर्भर करता

बोध प्रश्न)Self assessment questions)

4. प्रणोदित दोलक पर कार्यरत बलों के नाम बताइये।

----

5. प्रणोदित दोलक की अवकल समीकरण लिखिये।

	--
	--
	--
6	प्रणोदित दोलक की स्थायी अवस्था में प्राप्त विस्थापन के सूत्र को विश्रान्ति कल के पदों में लिखिये।
	--
	--
	--

उदाहरण 7.1 प्रणोदित दोलक की गति के समीकरण का पूर्ण हल लिखिये तथा उसकी व्याख्या कीजिये ।

हल: आप जानते हैं कि प्रणोदित आवर्ती दोलक के गति का अवकल समीकरण निम्न होता है-

$$\frac{d^2y}{dt^2}2r+\frac{dy}{dt}+\omega^2{}_0y=f_0\sin\omega t$$

इस समीकरण का पूर्ण हल निम्न प्रकार से दिया जा सकता है-

$Y=y_1+y_2$

यहाँ y_1 क्षणिक अवस्था में अवमंदित दोलक के गति का विस्थापन तथा y_2 स्थायी अवस्था में दोलक के विस्थापन को व्यक्त करता है तथा इनका मान

$$y_{1=}ce^{-rt}\left\{\sqrt{\left(\omega_0{}^2-r^2\right)}t+\psi\right\}$$

तथा $y_2=y_0\sin\left(\omega t-\phi\right)$

Y_1 व y_2 का मान रखने पर पूर्ण हल

$$y=ce^{-rt}\sin\left\{\sqrt{\left(\omega_0{}^2-r^2\right)}t+\psi\right\}+y_0\sin\left(\omega t-\phi\right)$$

द्वारा दिया जा सकता है ।

चरघातांकी प्रकृति के कारण y_1 का मान समय के साथ कम होने लगता है । अत: दोलक के विस्थापन का मान y_2 के द्वारा ही निर्धारित होता है । इस स्थिति में दोलक चालक बल की आवृत्ति ω से दोलन करता है ।

उदाहरण 7.2 एक किलोग्राम द्रव्यमान के एक पिंड को 1000 न्यूटन /मीटर बल नियतांक वाली स्प्रिंग से लटकाते हैं । यदि दोलक का अवमंदन गुणांक 50 X 10^{-3} किग्रा / सेकण्ड है तथा । $F=25\sin 2\omega_0 t$ न्यूटन बल द्वारा दोलित करायें तो दोलनों के आयाम तथा कलान्तर का परिकलन कीजिये ।

हल: प्रश्नानुसार

M= 1 किग्रा

k $=10^3$न्यूटन / मी

λ= 50 X 10^{-3}, किग्रा / से ।

$F = 25 \sin 200\, \omega_0 t$

अत: $\omega_0^{\,2} = \frac{k}{m} = 10^3$

तथा $\frac{\lambda}{m}$ =2r= 50X10-^{3}

r= 25X10^{-3}

चालक बल F =25 sin2 ω_0t F= F_0 sinωt से तुलना करने पर

F_o=25 तथा ω =2 ω_0

अत: $F_0 = \frac{F_0}{m} = 25$

आप जानते हैं कि प्रणोदित दोलक का विस्थापन

$$y_0 = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right)^2 + 4r^2\omega^2}}$$

$$= \frac{25}{\sqrt{\left(\omega_0^{\,2} - 4\omega_0^{\,2}\right)^2 + 2500 \times 10^{-6} \times 4 \times \omega_0^{\,2}}}$$

$$= \frac{25}{\sqrt{9\omega_0^{\,4} + 10^{-2}\omega_0^{\,2}}}$$

$$= \frac{25}{\sqrt{9 \times 10^6 + 10^{-2} \times 10^3}}$$

$$= \frac{25}{\sqrt{9 \times 10^6 + 10}}$$

$$= \frac{25}{3 \times 10^3}$$

=8.33X10^{-3} मी

कलान्तर ϕ= tan-^{1} = $\frac{2r\omega}{\omega_0^{\,2} - \omega^2}$

चूंकि $\frac{2r\omega}{\omega_0^{\,2} - \omega^2} = \frac{4r\omega_0}{\omega_o^{\,2} - 4\omega_0^{\,2}} = \frac{-4r}{3\omega_0}$

$$= -\frac{4 \times 25 \times 10^{-3}}{3\sqrt{1000}} = -\frac{1}{30 \times 31.6} = -1.05 \times 10^{-3}$$

अत: ϕ=tan -1(-1.05X10^{-3})=0.1^{0}

प्रणोदित दोलक का विस्थापन 8.33 X 10^{-3} मी. तथा कलान्तर - tan-^{1}(-105 X10-^{3})या

0.1^{0} हैं ।

7.2.2 आयाम की चालक बल की आवृत्ति पर निर्भरता (Dependence of amplitude on frequency of driving force)

समी (7.17)से आप जानते हैं कि चालित दोलक का आयाम

$$y_0 = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right)^2 + 4r^2\omega^2}} \qquad ...(7.19)$$

समय पर निर्भर नहीं करने के कारण चालक बल की निश्चित आवृत्ति पर नियत रहेगा । अवमंदन को नियत परन्तु न्यून मानकर हम दोलक के आयाम का चालक बल की आवृत्ति परिवर्तित करके भी अध्ययन कर सकते हैं ।

विश्लेषण की दृष्टि से चालक बल की आवृत्ति को तीन भागों में विभाजित करते हैं ।

$(i)\omega << \omega_{0,} (ii)\omega \simeq \omega_{0,} (iii)\omega >> \omega_0$

इन विभिन्न स्थितियों में आयाम की चालक बल पर निर्भरता निम्न प्रकार समझायी जा सकती हैं ।

(i) न्यून आवृत्ति की स्थिति ($\omega << \omega_0$):

इस स्थिति में ω_0^2की तुलना में ω^2 नगण्य है तथा $4r^2\omega^2$भी न्यून अवमंदन तथा न्यून आवृत्ति के कारण नगण्य है अत: समी. (7.19)से दोलक का आयाम

$$\left(y_0\right)_{\omega<\omega_o} = \frac{f_0}{\omega_0^{\,2}}$$

$$= \frac{mf_0}{m\omega_0^{\,2}} = \frac{F_0}{k} \qquad (7.20)$$

अर्थात् इस स्थिति में दोलक का आयाम चालक बल के आयाम F_o तथा बल नियतांक k पर निर्भर करता है ।

(ii) क्रांतिक आवृत्ति की स्थिति ($\omega = \omega_0$):

इस स्थिति में समी. (7.19)से दोलक का आयाम

$$y_0 = \frac{f_0}{2r\omega} = \frac{mf_0}{2mr\omega} = \frac{F_o}{\lambda\omega} = \frac{f_0}{\lambda\omega_0} \qquad (7.21)$$

($\therefore mf_0=F_0, 2rm=\lambda$ तथा$\omega=\omega_0$)

समी. (7.21)से स्पष्ट है कि $\omega = \omega_0$ स्थिति में दोलक का आयाम मात्र अवमंदन पर निर्भर करता है । अवमंदन गुणाक λ न्यून होने पर आयाम अधिकतम होगा ।

(iii) अति आवृत्ति की स्थिति ($\omega >> \omega_0$)

इस स्थिति ($\omega >> \omega_0$)में

$$(\omega^2_O - \omega^2)^2 \simeq \omega^4$$

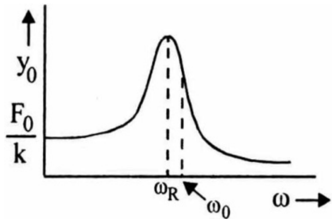
तथा $4r^2\omega^2 \simeq 0$ (क्योंकि r अल्प है)

अत: समी. (7.19)से दोलक का आयाम

$$y_0 = \frac{f_0}{\omega^2} = \frac{F_0}{m\omega^2} \qquad ...(7.22)$$

यहाँ दोलक का आयाम दोलक के द्रव्यमान के व्युत्क्रमानुपाती तथा चालक बल की आवृत्ति के वर्ग के है । व्युत्क्रमानुपाती अर्थात् आप देख सकते है कि दोलक का विस्थापन, दोलक के प्रत्यानयन बल से अप्रभावित है । बाह्य आवर्ती बल की आवृत्ति अधिक होने पर आयाम कम होगा ।

न्यून अवमंदन को स्थिति में चालक बल की आवृत्ति के साथ प्रणोदित दोलक के आयाम में परिवर्तन को चित्र 7.1 द्वारा प्रदर्शित किया गया है ।



चित्र 7.1 आयाम का चालक बल की आवृत्ति के साथ परिवर्तन

उपरोक्त चित्र 7.1 से स्पष्ट है कि चालक बल की आवृत्ति शून्य होने पर भी दोलक का आयाम F_0/k है जो कि शून्य नहीं है । अब चालक बल की आवृत्ति ω का मान धीरे-धीरे बढ़ाने पर आयाम में वृद्धि होती है तथा एक आवृत्ति पर अधिकतम हो जाता है । जिस आवृत्ति पर आयाम का मान अधिकतम हो जाता है, अनुनादी आवृत्ति कहलाती है । ω का मान और अधिक बढ़ाने पर आयाम का मान तेजी से कम हो जाता है ।

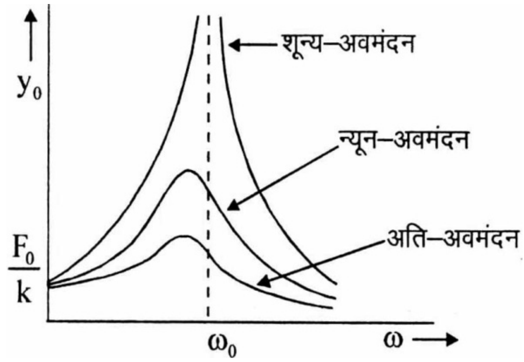
अधिकतम आयाम प्राप्त 'करने के लिये समी (7.19)पर विचार करते हैं । अधिकतम आयाम की स्थिति में $\left\{\left(\omega^2{}_0 - \omega^2\right)^2 + 4r^2\omega^2\right\}$ का मान न्यूनतम होना चाहिये, अर्थात ω के सापेक्ष अवकलन करने पर इसका मान शून्य होना चाहिये ।

$$\frac{d}{d\omega}\left\{\left(\omega^2{}_0 - \omega^2\right)^2 + 4r^2\omega^2\right\} = 0$$

$$2\left(\omega^2{}_0 - \omega^2\right)\left(-2\omega\right) + 8r^2\omega = 0$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\omega^2{}_0 - 2r^2}$$

ω के इस मान ω_R प्रदर्शित करते हैं । अत' ω_R $\therefore = \sqrt{\omega^2{}_0 - 2r^2}$ आवृत्ति पर प्रणोदित दोलक का आयाम अधिकतम होता है । समी. (7.23)से यह स्पष्ट होता है कि प्रणोदित दोलक के लिये अधिकतम आयाम का मान $\omega = \omega_0$ पर प्राप्त न होकर (जिसका मान ω_0 कम होता हैं)पर प्राप्त होता है । आवृत्ति ω_R को अनुनादी आवृत्ति (resonant frequency) कहते हैं । अवमंदन गुणांक के मान में वृद्धि होने पर अनुनादी आवृत्ति न्यून आवृत्ति की ओर विस्थापित होती है जैसा कि चित्र 7.2 में प्रदर्शित किया गया है ।



चित्र 7.2 आयाम का विभिन्न अवमंदन स्थितियों में चालक बल की आवृत्ति के साथ परिवर्तन

अधिकतम आयाम ज्ञात करने के लिये समी. (7.19)में रखने पर

$$\omega - \omega_R = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - 2r^2}$$

$$(y_o)_{\max} = \frac{f_0}{2r\sqrt{\omega_0^{\ 2} - r^2}} \qquad .....(7.24)$$

$$(y_0)_{\max} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2{}_0 - \omega_R{}^2\right)^2 + 4r^2\omega^2}}$$

$$= \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2{}_0 - \omega_0{}^2 + 2r^2\right)^2 + 4r^2\left(\omega_0{}^2 - 2r^2\right)}}$$

$$= \frac{f_0}{\sqrt{4r^4 + 4r^2\omega^2{}_o - 8r^4}}$$

$$= \frac{f_0}{\sqrt{4r^2\left(\omega^2{}_o - r^2\right)}}$$

इकाई-6 में अपने पढ़ा हैं

$$Q = \frac{\omega_0}{2Q}$$

$$r = \frac{\omega_2}{2Q}$$

या

r का मान समी .(7.24)में रखने पर

$$(y_0)_{\max} = \frac{f_0}{\frac{\omega}{Q}\left(\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{4Q^2}\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{f_0 Q}{\omega_0^2}\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-1/2}$$

Q का मान अधिक होने पर द्विपद प्रमेय से

$$(y_0)_{\max} \frac{f_0 Q}{\omega^2{}_0}\left(1 + \frac{1}{8Q^2} + ...\right)$$

$$(y_0)_{\max} \frac{f_0 Q}{k}\left(1 + \frac{1}{8Q^2}\right) \qquad ......(7.25)$$

$\therefore$ समी (7.20)से

$$(y_0)_{\omega << \omega_0} = \frac{F_0}{k} \qquad .....(7.26).$$

$\therefore$ समी (7.25)से

$$\left(y_0\right)_{max}\left(y_0\right)_{\omega<<\omega_0}\left\{Q\left(1+\frac{1}{8Q^2}\right)\right\} \qquad \text{... (7.27)}$$

यदि Q अत्यधिक हो अर्थात् अत Q>>1 तो

$$\therefore \qquad \left(y_0\right)_{max}\simeq\frac{F_0Q}{k}\simeq\left(y_0\right)_{\omega<<\omega_0}Q \quad \text{...(7.28)}$$

अत: अधिकतम आयाम का मान (जो कि अनुनादी आवृत्ति पर प्राप्त होता है)न्यून चालक आवृत्ति ($\omega<<\omega_0$)की स्थिति में आयाम का Q गुना होता है ।

शून्य अवमंदन की स्थिति में (r=O), Q का मान अनंत होता है इसलिये समी. (7.25)से दोलक का आयाम अनन्त होगा । परन्तु जैसे जैसे अवमंदन गुणांक में वृद्धि होती है, Q के मान में कमी होती है और दोलक का अधिकतम आयाम कम हो जाता है ।

उपरोक्त सभी परिणामों के आधार पर प्रणोदित दोलक के आयाम की चालक बल की आवृत्ति पर निर्भरता चित्र 7.2 द्वारा प्रदर्शित की जा सकती है ।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

7. प्रणोदित दोलक का आयाम $\omega>>\omega o$ की स्थिति में चालक बल की आवृत्ति पर किस प्रकार निर्भर करता है?

----

8. अवमंदन बल में वृद्धि होने पर अनुनादी आवृत्ति के मान में क्या परिवर्तन होता है?

उदाहरण 7.3 एक प्रणोदित दोलक का विशेषता गुणांक 50 है, ω=0.99 ω_0 आवृत्ति पर दोलक का आयाम तथा अधिकतम आयाम के अनुपात की गणना कीजिये ।

हल : हम जानते हैं कि प्रणोदित दोलक का आयाम

$$y_0=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2-\omega^2\right)^2=4r^2\omega^2}}$$

तथा अवमंदन गुणांक 2r= $\frac{\omega_0}{Q}$

ω =0.99 ω_0 आवृत्ति पर दोलक का आयाम

$$y_0=\frac{f_0}{\sqrt{\left\{\omega_0{}^2-\left(0.99\omega_0\right)^2\right\}^2+\frac{\omega_0{}^2}{Q^2}\left(0.99\omega_0\right)^2}}-$$

$$= \frac{f_0}{\omega_0^{\,2}\sqrt{\left\{1-(0.99)^2\right\}^2+\left(\frac{0.99}{Q}\right)^2}}$$

समी. (7.28)से आप जानते हैं कि अधिकतम आयाम

$$(y_0)_{\max} = \frac{F_0}{k}Q = \frac{mf_0Q}{m\omega^2_{\ 0}} = \frac{f_0Q}{\omega^2_{\ o}}$$

$$\frac{(y_0)}{(y_0)_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1-(0.99)^2+\left(\frac{0.99}{Q}\right)^2\right\}}}$$

प्रश्नानुसार Q= 50

$$\frac{(y_0)}{(y_0)_{\max}} = \frac{1}{50\sqrt{\left\{1-(0.99)\right\}^2+\left(\frac{0.99}{50}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{50\sqrt{(0.000396)+0.000392}}$$

$$\simeq 0.72$$

अत: वांछित अनुपात 0.72 है ।

उदाहरण 7.4 एक प्रणोदित दोलक का न्यून चालक आवृत्ति पर आयाम 0.01 मिलीमीटर है । 100 दोलन प्रति सेकण्ड पर इसका मान 5 मिलीमीटर हो जाता है, जो अधिकतम है । निम्न की गणना कीजिये: (i)विशेषता गुणांक (ii)विश्रान्ति काल ।

हल : (i)Q>>1 की स्थिति में समी. (7.28)से हम जानते हैं कि'

$$\frac{(y_0)_{\max}}{(y_0)_{\omega<<\omega_0}} = Q$$

प्रश्नानुसार $(y_o)_{max}$ = 5 मिमी

तथा $(y_o)\,\omega << \omega_0$ = 0.01 मिमी

अत: Q $\frac{5}{0.01}$=500

(ii) $\therefore$ $Q = \omega_0\tau \therefore \tau = \frac{Q}{\omega_0}$

$$\tau = \frac{500}{2\pi\times100}\{\therefore \omega_0 = 2\pi\times100\}$$

$$= \frac{5}{2\pi} \simeq 0.8 \text{ सेकण्ड}$$

अत: Q = 500 तथा τ 0.8 सेकण्ड

7.2.3 कला की चालक बल की आवृत्ति पर निर्भरता (Dependence of phase on frequency of driving force)

समी (7.7)से आप जानते हैं कि प्रणोदित दोलक की गति में विस्थापन का मान

$$y = y_0 \sin(\omega t - \phi)$$

से दिया जाता है, जब कि उस पर कार्यरत बाह्य आवर्ती बल का मान $F=F_o \sin \omega t$ आ द्वारा दिया जाता है ।

उपरोक्त समीकरणों के आधार पर आप यह कह सकते हैं कि दोलन के विस्थापन व चालक बल में कलान्तर ϕ है, जहाँ ϕ का मान समी. (7.15)1] होगा-

$$\tan\phi \frac{2r\omega}{\omega^2{}_0 - \omega^2} \qquad ...(7.29)$$

न्यून अवमंदन की स्थिति में कलान्तर ϕ की चालक बल की आवृत्ति ω पर निर्भरता का विश्लेषण करने के लिये आवृत्ति को अनुच्छेद की भाँति आवृत्ति को तीन भागों में 7.2.2 विभाजित करते हैं ।

(i) न्यून आवृत्ति. की स्थिति ($\omega << \omega_0$):

इस स्थिति में ω व 2r दोनों अल्प हैं अत: $2r\omega = 0$

अब समी (7.29)से, $\tan \phi$ = अत: .....(7.30)

अर्थात इस स्थिति में प्रणोदित दोलक व चालक बल एक ही कला में होंगे ।

(ii) क्रांतिक आवृत्ति की स्थिति ($\omega \simeq \omega_0$)_

इस स्थिति में $\omega^2{}_o \simeq \omega^{2=0}$

अत: समी. (7.29)से

$$\tan\phi = \infty$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \qquad ... (7.31)$$

इस स्थिति में दोलक के विस्थापन की कला चालक बल से $\pi/2$ पीछे रहती है ।

(iii) अति आवृत्ति की स्थिति ($\omega >> \omega_0$):

इस स्थिति में $\omega^2{}_0$ को ω^2 की तुलना में नगण्य माना जा सकता है । अत: समी. (7.29)से

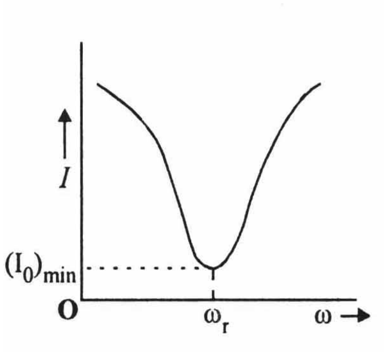
$$\tan\phi \simeq \frac{-2r}{\omega} \simeq -0$$

या $\phi = \pi$ ...(7.32)

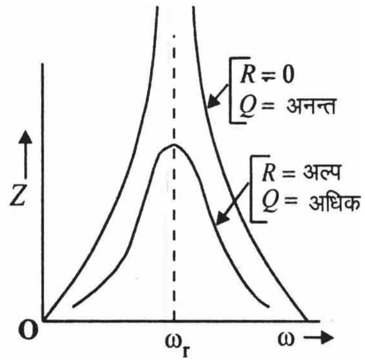
*विस्थापन चालक बल से कला में पीछे रहता है।

इस स्थिति में विस्थापन की कला चालक बल से π कोण से पीछे रहती है । अत: सम्पूर्ण आवृत्ति परास में दोलक के विस्थापन की कला ϕ का मान शून्य से बढ़कर π हो जाता है तथा हमेशा धनात्मक होता हैं । जब आवृत्ति का मान शून्य से ω_0 के मध्य परिवर्तित होता है तब कलान्तर ϕ का मान शून्य से बढ़कर आवृत्ति $\omega = \omega^0$ पर $\frac{\pi}{2}$ हो जाता है । ω का मान ω_0 से

अधिक बढ़ाने पर ϕ का मान $\frac{\pi}{2}$ से बढ़कर आवृत्ति $\omega=\infty$ पर π हो जाता है इस परिवर्तन कला में पीछे रहता को (न्यून अवमंदन के लिये)चित्र 7.3 द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है ।।



चित्र 7.3 कलान्तर का चालक बल की आवृत्ति के साथ परिवर्तन



चित्र 7.4 कलान्तर का विभिन्न अवमंदन की स्थितियों में चालक बल की आवृत्ति के साथ परिवर्तन

इसके अतिरिक्त इस परिवर्तन को विभिन्न अवमंदन की स्थितियों में चित्र 7.4 के

(i) जब अवमंदन का मान शून्य होता है तो ω के मान में वृद्धि करने पर ϕ का मान ω_0 आवृत्ति से ठीक पहले तक शून्य रहता है फिर एकाएक π हो जाता है तथा ω_0 से और अधिक बढ़ाने पर भी π ही रहता है ।

(ii) अल्प अवमंदन की स्थिति में कला में यह परिवर्तन (0 से π)ω_0 आवृत्ति पर एकाएक न होकर धीरे होता है ।

(iii) अति अवमंदन की स्थिति में अल्प अवमंदन की अपेक्षा यह परिवर्तन कम आवृत्ति पर ही प्रारम्म हो जाता है तथा $\omega=\omega_0$ पर $\frac{\pi}{2}$ से होता हुआ उच्च आवृत्ति पर π हो जाता है ।

अत: सभी अवमंदन स्थितियों में विस्थापन, चालक बल से कला में पीछे रहता है तथा यह कलान्तर 0 से π के मध्य परिवर्तित होता है ।

बोध प्रश्न (Self assessement questions)

9. अवमंदन गुणांक न्यून होने पर न्यून आवृत्ति की स्थिति में प्रणोदित दोलक व बाह्य चालक बल के मध्य कलान्तर का मान क्या होता है?

----

10. उपरोक्त प्रश्न में न्यून आवृत्ति के स्थान पर क्रांतिक तथा अति चालित आवृत्ति हो तो कलान्तर का मान क्या होगा?

7.3 सारांश (Summary)

- अवमंदित आवर्ती दोलक पर बाह्य आवर्ती बल लगाकर नियत आयाम के दोलन प्राप्त कर सकते हैं ।
- जब किसी अवमंदित आवर्ती दोलक पर बाह्य आवर्ती बल लगाया जाता है तो वह कुछ समय पश्चात् आवर्ती बल की आवृत्ति से दोलन करने लग जाता है तथा उसका आयाम नियत हो जाता है इस प्रकार के दोलक को प्रणोदित दोलक कहते हैं।
- दोलक पर बाह्य चालक बल आरोपित करने के क्षण से दोलक के स्थायी अवस्था प्राप्त करने तक के समय अंतराल को संक्रमण काल कहते हैं ।
- आवर्ती बल लगाने के पश्चात् दोलक जब आवृत्ति बल की आवृत्ति से दोलन करने लग जाता है, उस अवस्था, को स्थायी अवस्था कहते हैं ।
- प्रणोदित दोलक की गति का समीकरण निम्न होता है

  $$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda\frac{dy}{dt} + F_0 \sin\omega t$$

  यहाँ F_0 sin ωt बाह्य आवर्ती बल (चालक बल)है ।

- स्थायी अवस्था में चालित दोलक का स्थायी हल निम्न समीकरण द्वारा दिया जाता है।

  $$y = y_0 \sin(\omega t - \phi)$$

  यहाँ y_0 चालित दोलक का आयाम है जिसका मान

  $$y_0 = \frac{f_0}{\left[\left(\omega_0{}^2 - \omega^2\right)^2 + 4r^2\omega^2\right]^{1/2}}$$

  होता है । ϕ आवर्ती बल व विस्थापन के मध्य कलान्तर को व्यक्त करता है तथा इसका मान $\phi \tan^{-1}\frac{2r\omega}{\omega^2{}_o - \omega^2}$ होता है ।

- स्थायी अवस्था में दोलक का आयाम
  (i) समय के साथ नियत रहता है ।
  (ii) चालक बल की आवृत्ति ω व अवमंदन r पर निर्भर करता है ।
- तीन विभिन्न आवृत्ति परिस्थितियों (ω<< ω, ω= ω_0)तथा ω >> ω_0 में न्यून अवमंदन की स्थिति में दोलक के आयाम की चालक बल की आवृत्ति पर निर्भरता के अध्ययन से निम्न निष्कर्ष प्राप्त होते हैं-
  (i) न्यून आवृत्ति की स्थिति में दोलक का आयाम चालक बल के आयाम F_0 तथा बल नियतांक k पर निर्भर करता है ।
  (ii) क्रांतिक आवृत्ति की स्थिति में अवमंदन में वृद्धि होने पर आयाम कम हो जाता है ।

(iii) अति आवृत्ति की स्थिति में प्रत्यानयन बल दोलक की गति को प्रभावित नहीं करता है तथा आयाम चालित आवृत्ति ω के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है ।

- चालक बल की एक विशिष्ट आवृत्ति के मान ω= $\omega = \sqrt{\omega^2_0 - 2r^2} = \omega_R$ पर दोलक का आयाम अधिकतम होता है । इस आवृत्ति को अनुनादी आवृत्ति कहते हैं। अवमंदन अल्प होने पर ω_R का मान न्यून आवृत्ति को ओर अग्रसर होता है तथा इस आवृत्ति पर अधिकतम आयाम का मान -

  $(y_0)_{\max} = \dfrac{f_0}{2r\sqrt{\omega_0^2 - r^2}}$ होता है ।

- प्रणोदित दोलक की कला ϕ का मान 0 से π के मध्य परिवर्तित होता है व हमेशा धनात्मक होता है ।
- अवमंदन को न्यून मानकर विभिन्न आवृत्ति स्थितियों में प्राप्त दोलक के विस्थापन व चालित बल के मध्य कलान्तर के अध्ययन से निम्न निष्कर्ष प्राप्त होते हैं ।

  (i) न्यून आवृत्ति की स्थिति (ω<< ω_0)में प्रणोदित दोलक व चालक बल एक 'ही कला में होते हैं ।

  (ii) क्रांतिक आवृत्ति की स्थिति में (ω= ω_0)दोलक का विस्थापन चालक बल से π/2 पीछे रहता है ।

  (iii) अति आवृत्ति की स्थिति (ω>> ω_0)में विस्थापन चालक बल से π कोण से पीछे रहता है ।

- अवमंदन शून्य होने पर, ω के मान में धीरे-धीरे वृद्धि करने पर ϕ का मान ω= ω_0 तक शून्य रहता है फिर एकाएक π हो जाता है तथा ω< ω_0 पर भी ही r रहता है । अल्प अवमंदन पर यह परिवर्तन धीरे-धीरे होता है तथा अति अवमंदन पर अल्प अवमंदन की अपेक्षा परिवर्तन शीघ्रता से होता है ।

7.4 शब्दावली (Glossary)

अनुनाद	Resonance
क्रांतिक	Critical
चालक बल	Driving force
चालित या प्रणोदित दोलक	Driven or forced oscillator
प्रणोदित आवृत्ति	Forced Frequency
प्रणोदित दोलन	Forced oscillation
बाह्य आवर्ती बल	External periodic force
स्थायी अवस्था	Steady state
क्षणिक अवस्था	Transient state

7.5 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1.	N.K Bajaj	The Physics of Waves and Oscillations	Tata Mc Graw -Hill Publishing Company Ltd Delhi
2.	A.P French	Vibrations and Waves The MIT Introductory Physical Series	CBS Publishers and Distributors Delhi.
3.	शर्मा, सक्सेना व छाबड़ा	दोलन एवम् तरंगें	राजस्थान हिन्दी ग्रंथ अकादमी, जयपुर
4.	एम. पी. सक्सेना,		कॉलेज बुक हाउस जयपुर।
5.	पी. आर. सिंह व		
6.	एस. एस. रावत		

7.6 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment questions)

1. अल्प अवमंदित दोलक पर एक निश्चित आवृत्ति का बाह्य बल आरोपित करने पर दोलक का आयाम नियत हो जाता है ।
2. यदि प्रणोदित दोलक पर से बाह्य चालक बल हटा दिया जाये तो दोलक के दोलन अवमंदन के कारण क्षयित हो जाते हैं ।
3. यह वह अवस्था है, जिसमें प्रणोदित दोलक, चालक बल की आवृत्ति से दोलन करता है तथा उसका आयाम नियत रहता है ।
4. प्रणोदित दोलक पर प्रत्यानयन बल, अवमंदन बल तथा बाह्य आवर्ती बल कार्य करते हैं।
5. प्रणोदित आवर्ती दोलक का अवकल समीकरण
$$\frac{d_2 y}{dt^2}+2r\frac{dy}{dt}=\omega^2{}_0 y = f_0 \sin \omega t$$
6. प्रणोदित दोलक की स्थायी अवस्था में विस्थापन को विश्रान्ति काल τ के पदों में निम्न प्रकार से लिखते हैं ।
$$y=\frac{f_0}{\left[\left(\omega^2{}_0-\omega^2\right)+\omega^2/\tau^2\right]^{1/2}}\sin\left(\omega t-\tan^{-1}\frac{\omega/\tau}{\omega_o{}^2=\omega^2}\right)$$
7. प्रणोदित दोलक का आयाम, $\omega >> \omega_0$ स्थिति में चालक बल की आवृत्ति के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है ।
8. अवमंदन बल के मान में वृद्धि होने पर अनुनादी आवृत्ति कम हो जाती है तथा न्यून आवृत्ति की ओर विस्थापित हो जाती है ।

9. अवमंदन न्यून होने पर, न्यून आवृत्ति की स्थिति में प्रणोदित दोलक व बाह्य चालक बल के मध्य य कलान्तर शून्य होता है अर्थात दोलक व चालक बल एक ही कला में दोलन करते हैं।
10. क्रांतिक व अति आवृत्ति की स्थितियों में कलान्तर क्रमश: $\pi/2$ व π होगें ।

7.7 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. प्रणोदित दोलक पर किस प्रकार का बाह्य बल लगाया जाता है?
2. प्रणोदित दोलक में चालक बल की क्या उपयोगिता है?
3. स्थायी अवस्था में प्रणोदित दोलक किस आवृत्ति से दोलन करता है?
4. प्रणोदित दोलक की अनुनादी आवृत्ति का स्वभाविक आवृत्ति व अवमंदन गुणांक में संबध लिखिये ।

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

5. प्रणोदित दोलक को परिभाषित कर उदाहरण सहित समझाइये ।
6. प्रणोदित दोलक के विस्थापन का पूर्ण समीकरण लिखिये ।
7. स्थायी अवस्था में प्राप्त प्रणोदित दोलक के विस्थापन से आप क्या निष्कर्ष प्राप्त करते हैं?
8. प्रणोदित दोलक की गति के अवकल समीकरण का स्थायी हल प्राप्त कीजिये ।
9. सिद्ध कीजिये कि प्रणोदित दोलक के लिये अधिकतम आयाम का मान $\omega = \omega_0$ पर प्राप्त न होकर अनुनादी आवृत्ति ω_R (जिसका मान स्वभाविक आवृत्ति के कम है)पर प्राप्त होता है
10. प्रणोदित दोलक के आयाम $\omega << \omega$, $\omega = \omega_0$ तथा $\omega >> \omega_0$ आवृत्ति सीमाओं में प्राप्त मानों की व्याख्या कीजिये । इस परिवर्तन को विभिन्न आवृत्ति सीमाओं में आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिये ।
11. सिद्ध कीजिये कि अनुनाद पर अधिकतम आयाम, अल्प आवृत्ति परास सीमा में आयाम का Q गुना होता है ।
12. प्रदर्शित कीजिये कि विभिन्न आवृत्ति परासों में चालक बल सदैव विस्थापन से कला में पीछे रहता है । इस परिवर्तन को विभिन्न आवृत्ति परासों में आरेख द्वारा भी प्रदर्शित कीजिये ।
13. विभिन्न अवमंदन स्थितियों में प्रणोदित दोलक के आयाम व कला की आवर्ती चालक बल की आवृत्ति पर निर्भरता आरेखों द्वारा समझाइये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

14. एक कमानी का बल नियतांक 10+ डाईन / सेमी. है । इसके एक सिरे से 1 ग्राम द्रव्यमान का कण जब दोलन करता है तो उसका विश्रान्ति काल 1/2 सेकण्ड है । यदि

स्प्रिंग द्रव्यमान निकाय पर एक बाह्य आवर्ती बल 10 cas(90t)डाइन का आरोपित किया जाये तो दोलक का आयाम व कला कोण ज्ञात कीजिये ।

(उत्तर : y_0= 5.26x10-^{3} सेमी, ϕ =tan -^{1} (-0.1))

15. एक 10 ग्राम के प्रणोदित दोलक का अत्यल्प अवृर्तियों पर आयाम 0.01 सेमी । हैं। 512 हर्टज आवृत्ति पर यह बढ़ कर महत्तम मान 1 सेमी. प्राप्त कर लेता है । दोलित के लिये विशेषता गुणांक ज्ञात कीजिये ।

(उत्तर : 19)

16. एक प्रणोदित दोलक के विस्थापन का आयाम निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है ।

$$y_0 = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2{}_0 - \omega^2\right)^2 + 4r^2\omega^2}}$$

यदि Q=100 हो तो निष्पति $\frac{y_0}{(y_0)_{\max}}$ का मान $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ तथा 0.99के लिये ज्ञात कीजिये ।

(उत्तर. 1,0.450)

इकाई 8-

अनुनाद (Resonance)

इकाई की रूपरेखा

8.0 उद्देश्य
8.1 प्रस्तावना
8.2 अनुनाद व अनुनाद की तीक्ष्णता
8.3 वेग अनुनाद
8.4 उर्जा अनुनाद
8.5 शक्ति अनुनाद
8.6 L-C-R परिपथ में अनुनाद
8.6.1 श्रेणी L-C-R परिपथ
8.6.2 समान्तर L-C-R परिपथ
8.7 सारांश
8.8 शब्दावली
8.9 संदर्भ ग्रन्थ
8.10 बोध प्रश्नों के उत्तर
8.7.1 अभ्यासार्थ प्रश्न

8.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- अनुनाद की घटना को समझ सकेंगे;
- प्रणोदित दोलक में वेग, ऊर्जा व शक्ति के लिए अनुनाद, आवृत्ति $\omega = \omega_0$ लग पर प्राप्त होते हैं, यह समझ सकेंगे;
- अनुनाद की स्थिति में प्रणोदित दोलक द्वारा शक्ति का अवशोषण अधिकतम होता है, यह जान सकेंगे;
- प्रणोदित दोलक के उदाहरण के रूप में वैद्युत दोलनों (L-C-R परिपथ)को अध्ययन कर उसकी अनुनादी आवृत्ति ज्ञात करने में सक्षम हो सकेंगे तथा ग्राही एवम् अस्वीकारी परिपथ के रूप में इसका प्रयोग समझ सकेंगे ।

8.1 प्रस्तावना (Introduction)

आपने इकाई-7 में प्रणोदित दोलक (forced oscillator)की स्थायी अवस्था में इसकी गति का हल प्राप्त कर, दोलक के आयाम तथा कला का अध्ययन किया है । आपने यह भी देखा है कि बाह्य आवर्ती बल की आवृत्ति में परिवर्तन करने पर किस प्रकार आयाम व कला में परिवर्तन होता है । बाह्य आवृत्ति बल की किसी एक आवृत्ति पर दोलक के आयाम का मान

अधिकतम हो जाता है जिसे अनुनादी आवृत्ति कहते हैं । यह आवृत्ति व इस आवृत्ति पर प्राप्त अधिकतम आयाम अवमंदन पर निर्भर करता है ।

इस इकाई में वेग, शक्ति का बाहय बल की आवृत्ति के साथ परिवर्तन का अध्ययन कर-अनुनाद पर विस्तृत विवेचना करेंगे । इस इकाई के अनुच्छेद 8.2 में आप अनुनाद की घटना का अध्ययन करेंगे । अनुच्छेद 8.3 में प्रणोदित दोलक के वेग समीकरण से वेग आयाम व कला का बाहय आवर्ती बल की आवृत्ति के साथ परिवर्तन का अध्ययन करेंगे । अनुच्छेद 8.4 में वेग अनुनाद की भांति ऊर्जा अनुनाद का अध्ययन करेंगे । प्रणोदित दोलक द्वारा अवशोषित शक्ति का मान आप अनुच्छेद 8.5 में ज्ञात करेंगे और देखेंगे कि किस आवृत्ति पर शक्ति अनुनाद प्राप्त होता है?

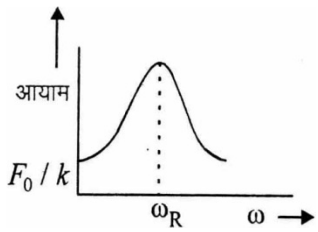
अंतिम अनुच्छेद 8.6 में प्रणोदित दोलक के दो उदाहरण श्रेणी व समान्तर L-C-R परिपथ में वैद्युत दोलन (electrical oscillations)का विस्तार से अध्ययन कर इनकी तुलना करेंगे । आप देखेंगे कि ये परिपथ किस प्रकार ग्राही (acceptor)अथवा अस्वीकारी परिपथ (rejector circuit)के रूप में कार्य करते हैं ।

8.2 अनुनाद व अनुनाद की तीक्ष्णता (Resonance and sharpness of resonance)

अल्प अवमंदन की स्थिति से हमारा तात्पर्य हैं कि r का मान ω_0 से बहुत कम हैं।

इकाई-7 में आप अध्ययन कर चुके हैं कि प्रणोदित दोलक का आयाम चालक बल की आवृत्ति पर निर्भर करता है तथा इसका आरेख चित्र 8.1 के अनुसार प्राप्त होता है । इस वक्र से स्पष्ट है कि आवृत्ति ω_R गम पर आयाम का मान अधिकतम होता है जिसे अनुनादी आवृत्ति (resonant frequency)कहते हैं व इसका मान निम्न होता है

$$\omega_R = \sqrt{\omega^2_0 - 2r^2}$$



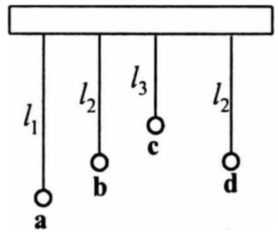
चित्र 8.1 आयाम का चालक बल की आवृत्ति के साथ परिवर्तन

अल्प अबमंदन की स्थिति में r का मान नगण्य होता है इसलिये अनुनादी आवृत्ति का कम है । मान उपरोक्त समीकरण से

$$\omega_R = \omega_0$$

यहाँ हम सिर्फ अनुवाद की बात दोलक के विस्थापन के आयाम के सन्दर्भ में कर रहें हैं।

अत: हम देखते हैं कि अल्प अवमंदन की स्थिति में दोलक का आयाम अधिकतम तभी प्राप्त होता है जब कि $\omega_R = \omega_0$हो । इस स्थिति को अनुनाद (resonance)की स्थिति कहते हैं । यदि अनुनाद को आपको शब्दों में परिभाषित करना हो तो आप कह सकते हैं कि अनुनाद चालित दोलक की एक स्थिति है जिसमें चालक बल की आवृत्ति दोलक की स्वभाविक आवृत्ति के बराबर होती है तथा दोलक का आयाम अधिकतम होता है ।



चित्र 8.2

अनुनाद को आप निम्न उदाहरण से अच्छी तरह समझ सकेंगे । चित्र 8.2 में एक तनी हुई डोरी पर (a), (b), (c)तीन सरल लोलक जिनकी लम्बाईयाँ क्रमशः $l_{1,}$ l_2, l_3 हैं, लटकाये गये हैं । यदि आप उसी धागे से उपरोक्त दोलकों के समीप एक अन्य दोलक (d)जिसकी लम्बाईL_2, है, लटका कर बाह्य आवर्ती बल द्वारा चालित दोलन उत्पन्न करते हैं तो डोरी के सभी दोलक दोलन करने लग जाते हैं । आप देखेंगे कि सभी दोलकों का आयाम भिन्न भिन्न होता है परन्तु दोलक (b)का आयाम अधिकतम होता है । क्या आप इसका कारण बता सकते हैं। आपने इकाई-2 में पढ़ा है कि सरल दोलक की आवृत्ति उसकी लम्बाई के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होती है । समान लम्बाई के दोलकों की आवृत्ति समान होती है इसलिये दोलक (b)की स्वभाविक आवृत्ति चालक बल की आवृत्ति (दोलक (d)की आवृत्ति)के बराबर होने के कारण अनुनाद की घटना होती है तथा दोलक (b)अधिकतम आयाम के दोलन करता है ।पिछली कक्षाओं में आपने अनुनाद की घटना का उपयोग मेल्डीज के प्रयोग द्वारा प्रत्यावर्ती धारा की आवृत्ति ज्ञात करने में किया है ।

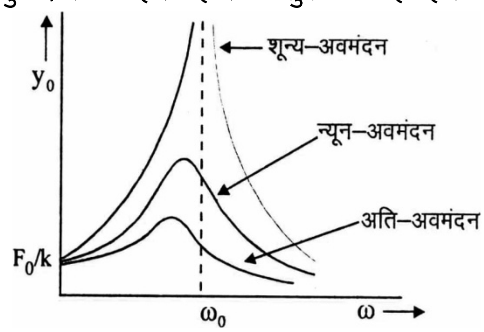
LCR परिपथ में अनुनाद की घटना का विस्तृत अध्ययन आप अनुच्छेद 8.6 में करेंगे ।

अनुनाद की तीक्ष्णता) Sharpness of resonance(

यहाँ ध्यान देने योग्य हैं कि $\frac{dy_0}{d\omega}$ वक्र की प्रवणता के बराबर होता हैं ।

चित्र 8.1 में दर्शाये वक्र से स्पष्ट है कि चालक बल की आवृत्ति ω_R से कम या अधिक होने पर (अर्थात् ω_R विचलित होने पर)दोलक का आयाम इसके अधिकतम आयाम से कम होता जाता है । अनुनादी आवृत्ति के दोनो ओर चालक बल की आवृत्ति के साथ दोलक के आयाम के कम होने की दर $\frac{dy_0}{d\omega}$ को अनुनाद की तीक्ष्णता कहते हैं।

अनुनादी आवृत्ति से किसी भी ओर चालक बल की आवृत्ति में न्यून परिवर्तन करने से यदि आयाम में परिवर्तन अधिक होता है तो उस अनुनाद को तीक्ष्ण (sharp)अनुनाद कहते हैं । चित्र 8.3 से स्पष्ट है कि (1)न्यून अवमंदन की स्थिति में तीक्ष्ण अनुनाद प्राप्त होता है (ii)अति अवमंदन की स्थिति में अनुनाद सपाट होता है तथा सुस्पष्ट नहीं होता है ।



चित्र आयाम 8.3का चालक बल की आवृत्ति के साथ परिवर्तन

सोनोमीटर तार में स्वरित्र की सहायता से उत्पन्न अनुनाद तीक्ष्ण अनुनाद का एक उदाहरण है । सोनोमीटर द्वारा किसी अज्ञात स्वरित्र की आवृत्ति ज्ञात करने वाले प्रयोग मे आपने देखा होगा कि तार की एक निश्चित लम्बाई पर ही अनुनाद की स्थिति प्राप्त होती है । इस निश्चित लम्बाई में थोड़ा भी परिवर्तन होने पर सोनोमीटर में अनुनाद प्राप्त नहीं होता है । सोनोमीटर के तार में कम अवमंदन के कारण ही अनुनाद तीक्ष्ण होता है ।

इसके विपरीत वायु स्तम्भ में प्राप्त अनुनाद सपाट अनुनाद का एक उदाहरण है । वायु स्तम्भ की अनुनादित लम्बाई में अल्प परिवर्तन करने पर भी ध्वनि की तीव्रता में अल्प परिवर्तन होता है । वायु स्तम्भ में अवमंदन अधिक होने के कारण ही इसमें सपाट अनुनाद प्राप्त होता है।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. अनुनाद से आपका क्या अभिप्राय है?

----

2. अनुनाद की तीक्ष्णता से आप क्या समझते हैं?

----

3. अनुनाद की तीक्ष्णता अवमंदन पर किस प्रकार निर्भर करती है?

8.3 वेग अनुनाद (Velocity resonance)

आप जानते हैं कि स्थायी अवस्था में प्रणोदित दोलक का किसी क्षण विस्थापन

$$Y=y_0 \sin(\omega t-\phi) \qquad ...(8.1)$$

द्वारा दिया जाता है जहाँ दोलक का आयाम

$$y_0=\frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega^2{}_o-\omega^2\right)^2+4r^2\omega^2}} \qquad ...(8.2)$$

तथा आवर्ती बल व विस्थापन के मध्य कलान्तर

$$\phi=\tan^{-1}\frac{2r\omega}{\omega^2{}_0-\omega^2} \qquad ...(8.3)$$

अतः दोलक का वेग समी (8.1)को समय के सापेक्ष अवकलित करके प्राप्त किया जा सकता है।

$$v=\frac{dy}{dt}=\omega y_0\cos\left(\omega t-\phi\right) \qquad ...(8.4)$$

$$v=\omega y_0\sin\left(\omega t-\phi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$\phi = \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$ तथा $\omega y_0 = v_0$ रखने पर

V=$v_0$sin (ωt-δ) ...(8.5)

यह प्रणोदित दोलन में वेग व समय के बीच संबंध है । उपरोक्त समी. (8.5)से स्पष्ट, है कि δ बाह्य आवर्ती बल F=F_0sin (ωt)v = v_0 sin (ωt -δ)के मध्य कलान्तर है, तथा v_o प्रणोदित दोलक के वेग का आयाम है ।

वेग आयाम (Velocity amplitude)

प्रणोदित दोलक का वेग आयाम

$V_0 = \omega y_0$

समीकरण (8.2)से y_0 का मान रखने पर ...(8.6)

$$= \frac{\omega f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^{\,2} - \omega^2\right)^2 + 4r^2\omega^2}}$$

$$vo = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + 4r^2}} \quad ...(8.7)$$

इस समीकरण से आप देख सकते हैं कि वेग-आयाम अल्प अवमंदन की स्थिति में आरोपित बाह्य बल की आवृत्ति पर निर्भर करता है । समी (8.7)से ही ज्ञात होता है कि ω =0 तो v_0=0 यदि होगा तथा ω के मान में वृद्धि करने पर v_0 के मान में वृद्धि होती है । ω के एक निश्चित मान पर V_0 का अधिकतम मान प्राप्त होता है । ω का मान इस, I

निश्चित आवृत्ति से और अधिक बढ़ाने पर v_0 का मान लगभग $\frac{f_0}{\omega} = \frac{F_0}{m\omega}$ प्राप्त होता है तथा यदि $\omega \longrightarrow \infty$ तो $v_0 \longrightarrow 0$, इस परिवर्तन को चित्र द्वारा प्रदर्शित किया गया है 8.4 जिससे यह स्पष्ट होता है किजैसे-जैसे ωका मान शून्य की ओर या अनन्त की ओर अग्रसर होता है v_0 का मान शून्य की ओर अग्रसर होता जाता है तथाω के एक निश्चित मान पर अधिकतम हो जाता है । इस आवृत्ति से अधिक आवृत्ति पर इसका मान $F_/ m\omega$ प्राप्त होता है।

अधिकतम वेग आयाम की स्थिति में समी (8.7)का हर (denominator)न्यूनतम होना चाहिये ।

$$\left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2} + 4r^2\right] = \text{न्यूनतम}$$

अत: इस पद का ω से सापेक्ष अवकलन करने पर इसका मान शून्य होना चाहिये ।

$$\frac{d}{d\omega}\left[\left(\frac{\omega_0^{\,2} - \omega^2}{\omega}\right) + 4r^2\right] = 0$$

या $$\frac{2\left(\omega_0^0-\omega^2\right)(-2\omega)}{\omega^2}-\frac{2\left(\omega_0^0-\omega^2\right)}{\omega^3}=0$$

या $$\frac{2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\omega^2}\left[-2\omega\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}{\omega}\right]=0$$

या $$2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left(\omega_0^2+\omega^2\right)=0$$

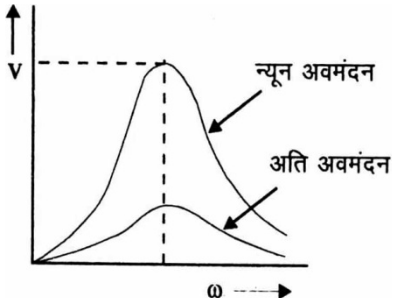
या $$\omega^2=\omega_0^2$$

या $$\omega=\omega_0$$

अत: अधिकतम वेग का मान आवृत्ति $\omega = \omega_0$ पर प्राप्त होता है । इस अवस्था को वेग अनुनाद (velocity resonance)की अवस्था कहते हैं । इस स्थिति में अधिकतम वेग आयाम समी. (8.7)से

$$\left(V_0\right)_{\max}\frac{f_0}{2r}=\frac{F_0 m}{m\lambda}=\frac{F_0}{\lambda} \qquad ...(8.8\ )$$

होगा । समीकरण (8.8)से स्पष्ट होता है कि अधिकतम वेग आयाम अवमंदन नियंताक के व्युत्क्रमानुपाती होता है अर्थात् न्यून अवमंदन की स्थिति में अनुनादी वेग का मान अति अवमंदन की अपेक्षा अधिक होता है जैसा कि चित्र 8.4 में भी दर्शाया गया है



चित्र 8.4 वेग आयाम का चालक बन की आवृत्ति के साथ परिवर्तन

वेग की कला (Phase of velocity)

समी. (8.5)से स्पष्ट है कि आरोपित चालक बल के सापेक्ष दोलक के वेग की कला δ कोण से पीछे रहती है तथा कलान्तर का मान

$$\delta=\phi-\frac{\pi}{2} \qquad (8.9)$$

δ का मान हम अलग-अलग आवृत्ति क्षेत्र (स्थितियों)में ज्ञात कर सकते हैं

(i) आवृत्ति $\omega << \omega_0$ (न्यून आवृत्ति की स्थिति)

इस स्थिति में आप जानते हैं (अनुच्छेद 7.2.3)कि आवर्ती बल व विस्थापन के मध्य कलान्तर ϕ का मान शून्य होता है इसलिये समी (8.9)से

$$\delta=-\frac{\pi}{2}$$

अत: इस स्थिति में वेग, आरोपित चालक बल के सापेक्ष $\frac{\pi}{2}$ कला कोण से आगे रहता।

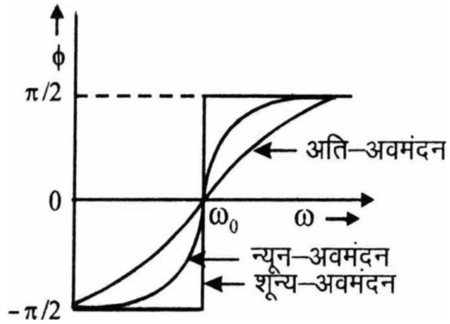
है (क्योंकि $F=F_0 \sin \omega t$ तथा $v= v_0 \sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$

(ii) $\omega=\omega_0$ (क्रांतिक आवृत्ति की स्थिति)

अनुच्छेद 7.2.3 से इस स्थिति में $\phi= \pi/2$ इसलिये समी. (8.9)से $\delta=0$ अर्थात् वेग अनुनाद की स्थिति में चालक बल व दोलक का वेग समान कला में रहते है ।

(iii) $\omega>>\omega_0$ (अति आवृत्ति की स्थिति)अनुच्छेद 7.3.3 से ϕ इसलिये $=\delta=\frac{\pi}{2}$ अर्थात् दोलक का वेग चालक बल से $\frac{\pi}{2}$ कला कोण पीछे रहता है ।

वेग व चालक बल के मध्य कलान्तर δ की बाहय चालक बल की आवृत्ति ω के साथ निर्भरता चित्र 8.5 में प्रदर्शित की गई है ।



चित्र 8.5 बेग व बल के मध्य कलान्तर का चालक बल की आवृत्ति के साथ परिवर्तन

बोध प्रशन (Self assessment question)

4. वेग अनुवाद से आप क्या समझते हैं ?

----

5. वेग अनुवाद की स्थिति में अधिकतम वेग आयाम अवमंदन पर किस प्रकार निर्भर करता हैं ?

----

6. वेग अनुवाद की स्थिति में चालक बल व वेग के मध्य कलान्तर का मान क्या होता हैं ?

8.4 ऊर्जा अनुवाद (Energy resonance)

आपने इकाई 5 व 6 में पढ़ा है कि अवमंदित दोलक की ऊर्जा चरघांताकी रूप से कम होती है । ऐसे दोलक की स्थायी दोलन की अवस्था प्राप्त करने के लिये चालक बल प्रणोदित

दोलक को आवश्यक उर्जा प्रदान करता है । इस अनुच्छेद में हम प्रणोदित दोलक द्वारा चालक बल से अवशोषित ऊर्जा का अध्ययन करेंगे ।

आप जानते हैं कि यदि अवमंदित दोलक पर बाह्य चालक बल F= $F_0 \sin \omega t$ लगाया जाता है तो स्थायी अवस्था में प्रणोदित दोलक का विस्थापन समी. (8.1)से

$$y = y\sin\left(\omega t - \phi\right)$$

जहाँ $$y_0 = \frac{fo}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4r^2\omega^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2r\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

तथा दोलक का वेग समी (8.4)से

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega y_0 \cos\left(\omega t - \phi\right)$$

दिया जाता है । प्रणोदित दोलक की गतिज उर्जा k का मान निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं-

$$k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}my_0^2\omega^2\cos^2\left(\omega t - \phi\right)$$

K के मध्य परिवर्तित 0 $\frac{1}{2}$ $my_0^2\omega^2$ के मध्य होता है ।

एक दोलन के लिये दोलक की माध्य गतिज ऊर्जा. <k>

$$< k > = \frac{1}{T}\int_0^T kdt \qquad ......(8.10)$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T my_0^2\cos^2\left(\omega t - \phi\right)dt$$

$$< K > = \frac{1}{2}my_0^2\omega^2\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\omega t - \phi\right)dt$$

$$< K > = \frac{1}{2}my_0^2\omega^2.\frac{1}{2} \qquad \left(\therefore \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\left(\omega t = \phi\right)dt\frac{1}{2}\right)$$

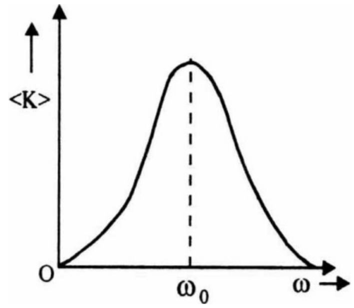
$$< K > = \frac{1}{4}my_0^2\omega^2 \qquad .....(8.11)$$

Y_0 का मान समी। (8.2)से रखने पर मध्य गतिज ऊर्जा

$$< k > = \frac{1}{4}\frac{F_0^2}{4m}\frac{\omega^2}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4r^2\omega^2\right]} \qquad ......(8.12)$$

$$< k >= \frac{F_o^2}{4m} \frac{1}{\left[\left(\frac{\omega_o^2 - \omega^2}{\omega}\right)^2 + 4r^2\right]}$$ ......(8.13)

इस समीकरण से आप देखते हैं कि प्रणोदित दोलक की माध्य गतिज ऊर्जा बाह्य चालक बल की आवृत्ति ω पर निर्भर करती है । जैसे जैसे चालक बल की आवृत्ति ω शून्य से बढायी जाती है तो $\omega < \omega_0$ क्षेत्र में माध्य गतिज ऊर्जा का मान बढ़ने लगता है तथा एक निश्चित आवृत्ति के मान $\omega = \omega_0$ पर इसका माने अधिकतम हो जाता है । तत्पश्चात् आवृत्ति ω में वृद्धि करने पर माध्य गतिज ऊर्जा का मान कम होता जाता है । चित्र 8.6 में आवृत्ति ω के साथ दोलक की माध्य गतिज ऊर्जा में परिवर्तन को प्रदर्शित किया गया हैं ।



चित्र 8.6 माध्य ऊर्जा का बालक बल की आवृत्ति के साथ परिवर्तन

माध्य गतिज ऊर्जा के अधिकतम मान के लिये समी. (8.13)के हर का मान न्यूनतम होना चाहिये ।

या $$\frac{d}{d\omega} = \left[\left(\frac{\omega_o^2}{\omega} - \omega\right)^2\right] = 0$$

या $$2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)\left(\frac{-\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right) = 0$$

$$\therefore \omega = \omega_0$$

अत: जब दोलक की आवृत्ति $\omega = \omega_0$ होती है तब प्रणोदित दोलक की माध्य ऊर्जा अधिकतम होती है अर्थात् दोलक चालक बल से अधिकतम ऊर्जा का अवशोषण करता है । दोलक की अधिकतम ऊर्जा के अवशोषण की स्थिति को ऊर्जा अनुनाद कहते हैं ।

समी. (8.12)में $\omega = \omega_0$ रखने पर दोलक की अधिकतम माध्य गतिज ऊर्जा या उसके द्वारा अधिकतम ऊर्जा अवशोषण होगा-

$$< k >_{\max} = \frac{F_0^2}{4m} \cdot \frac{1}{4r^2}$$ ....(8.14)

$\therefore Q = \omega\tau$

$k = m\omega_0^2$

$$= \frac{F_0^2}{4m}\tau^2$$

$$< k >_{\max} = \frac{F_0^2 Q^2}{4k}$$ ...(8.15)

बोध प्रश्न (self assessment question)

7. ऊर्जा अनुनाद से आप क्या समझते हैं?

8.5 शक्ति अनुनाद (Power resonance)

जब कोई अवमंदित दोलक दोलन करता है तो अवमंदन के कारण उसका आयाम समय के साथ कम होता रहता है । नियत आयाम के दोलन प्राप्त करने के लिये बाह्य आवर्ती बल द्वारा दोलक को ऊर्जा प्रदान की जाती है । एकांक समय में प्रणोदित दोलक द्वारा अवशोषित ऊर्जा सके द्वारा अवशोषित शक्ति के बराबर होती है ।

$$p=\frac{d}{dt}(F.dy)$$
$$=F.\frac{dy}{dt}$$
$$=F.v$$

दोलक द्वारा एकांक समय में अवशोषित ऊर्जा (energy adsorbed)अथवा शक्ति (power)

$$P=Fv \qquad ...(8.16)$$

यदि किसी अवमंदित दोलक पर आवर्ती बल $F=F_0 \sin \omega t$ आरोपित करते हैं तो प्रणोदित दोलक वेग $v= \omega y \cos (\omega t -\phi)$से गति करने लगता है ।

$<\sin\omega t \cos\omega t>=0$

$<\sin 2\omega t>=\frac{1}{2}$

अत: दोलक द्वारा अवशोषित शक्ति

$$P = F_0\omega y_0 \sin \cos (\omega t -\phi)$$

$$= \omega y_0 F_0 [\sin\omega t \cos \phi + \sin^2 \phi] \qquad ...(8.17)$$

उपरोक्त समी (8.17)शक्ति के तात्क्षणिक मान को व्यक्त करता है जो कि समय का आवर्त फलन है, परन्तु अधिकतर शक्ति का प्रति दोलन औसत मान ज्ञात करना अधिक उपयुक्त रहता है । अत: प्रति दोलन माध्य शक्ति अवशोषण

$$< p >= \omega y_0 F_0 \left[\cos\phi < \sin\omega t > \sin\phi < \sin^2 \omega t > \right]$$

$$=\frac{1}{2}\omega y_0 F_0 \sin\phi \qquad ....(8.18)$$

समी.(8.3)से

$$\tan\phi \frac{2r\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}$$

अत: $$\sin\phi=\frac{\tan\phi}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}=\frac{2r\omega}{\left[\left(\omega_0^2-\omega^2+4r^2\right)\right]^{1/2}} \qquad ...(8.19)$$

समी.(8.2)से y_o तथा (8.19)से $\sin\phi$ का मान समी. (8.18)में रखने पर प्रति दोलन माध्य शक्ति अवशोषण

$$< p >= \frac{1}{2}\frac{F_0^2}{m}\frac{2r\omega^2}{\left[\left(\omega_0^0-\omega^2\right)^2+4r^2\omega^2\right]} \quad ....(8.20)$$

$$< p >= \frac{F_0^2}{m}\frac{r}{\left[\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)^2+4r^2\right]} \quad ....(8.21)$$

समी. 8.21 से स्पष्ट है कि औसत अवशोषण शक्ति का मान चालक बल की आवृत्ति ω पर निर्भर करता हैं ।

जब आवृति ω का मान शून्य होता है तो <p> का मान शून्य होता है तथा जैसे आवृत्ति ω का मान बढ़ाया जाता है तो ω< ω क्षेत्र में प्रति दोलन माध्य शक्ति अवशोषण <p> का मान बढ़ने लगता है तथा आवृति ω के एक निश्चित मान पर <p> का मान अधिकतम हो जाता है । इस निश्चित आवृत्ति से अधिक ω का मान बढ़ाने पर ($\omega > \omega_0$ क्षेत्र) <P> का मान वापस कम होने लगता है । आवृत्ति ω के साथ दोलक की प्रति दोलन माध्य शक्ति अवशोषण में परिवर्तन चित्र 8.7 में प्रदर्शित किया गया है । यह वक्र शक्ति अनुनाद वक्र (Power resonance curve)कहलाता है ।

<p> का जिस निश्चित आवृत्ति पर मान अधिकतम होता है उसे ज्ञात करने के लिये हम <p>, का मान अधिकतम होने की शर्त का अध्ययन करेंगे ।

<p> का मान अधिकतम होने के लिये समी. (8.21)का हर (denominator)न्यूनतम होना चाहिये अर्थात् .

$$\frac{1}{2r}=\tau$$

$$(v_0)_{\max}=\frac{f_0}{2r}$$

$$=\frac{F_0}{2mr}$$

$$\left[\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)^2+4r^2\right] = \text{न्यूनतम}$$

अत: इस पद का ω के सापेक्ष अवकलन करने पर इसका मान शून्य होना चाहिये ।

या $$\frac{d}{d\omega}\left[\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)^2+4r^2\right]=0$$

या $$2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)\left(-\frac{\omega_o^2}{\omega^2}-1\right)=0$$

या $$\omega=\omega_0$$

अत: जब बाह्य चालक बल की आवृत्ति ω दोलक की स्वभाविक आवृत्ति ω_0 के बराबर होती है तो बाह्य आवर्ती बल द्वारा प्रणोदित दोलक अधिकतम शक्ति का अवशोषण करता है अर्थात् इस स्थिति में बाह्य चालक बल दोलक को अधिकतम शक्ति का हस्तान्तरण करता है तथा इस समय बाह्य बल F व वेग V भी एक ही कला में होते हैं ।

अत: अधिकतम हस्तान्तरित शक्ति (maximum transferred power)का मान होगा-

$$< p >_{\max} \frac{F_0^2}{m}.\frac{1}{4r}=\frac{1}{2}\frac{F_0}{2rm}.F_0 \quad ... (8.22)$$

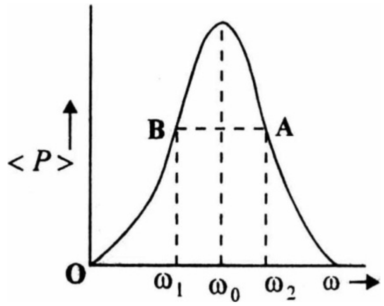
$$=\frac{1}{2}\frac{F_0}{\lambda}.F_0 \qquad ...(8.23)$$

$$<P>_{\max}=\frac{1}{2}(v_o)_{\max}F_o$$

$$<P>_{\max}=\frac{1}{2}\frac{F_o^{\ 2}}{\lambda} \qquad ....(8.24)$$

समी(8.24) .से स्पष्ट है कि जब V_o का मान अधिकतम होता है तब शक्ति का अधिकतम हस्तान्तरण)transfer)होता है ।

अब हम अनुनाद में अर्द्ध शक्ति आवृत्तियों तथा विशेषता गुणांक का अध्ययन करेंगे ।



चित्र 8.7 मध्य शक्ति अवशोषण का चालक बल की आवृत्ति के साथ परिवर्तन

चित्र 8.7 को देखकर आप कह सकते हैं कि अनुनादी आवृत्ति के दोनो ओर अनुनादी वक्र सममित (symmetrical)होता है इस वक्र पर ऐसे दो बिन्दु A व B हैं जहाँ पर अवशोषित शक्ति के मान अधिकतम अवशोषित शक्ति के मान का आधा होता है अर्थात् इन बिन्दुओं पर

$$<P>=\frac{1}{2}<P>_{\max} \qquad ...(8.25)$$

इन बिन्दुओं को अर्ध शक्ति बिन्दु (half power points)कहते हैं । इस बिन्दुओं के संगत आवृत्तियों को अर्ध शक्ति आवृत्तियाँ (half power frequencies)कहते हैं । इनका मान ज्ञात करने के लिये $<P>$ व $<P>_{max}$ का मान समी. (8.21)व (8.22)से (8.25)में रखने पर

$$\frac{F_o^{\ 2}}{m}\frac{r}{\left[\left(\frac{\omega_o^{\ 2}}{\omega}-\omega\right)^2+4r^2\right]}=\frac{1}{2}\frac{F_o^{\ 2}}{m}\frac{1}{4r}$$

या $$\left[\left(\frac{\omega_o^{\ 2}}{\omega}-\omega\right)^2+8r^2\right]=8r^2$$

या $$\frac{\omega_0^{\ 2}}{\omega}-\omega=\pm 2r$$

या $(\omega_0-\omega)(\omega_0+\omega)=\pm 2r\omega$ ...(8.26)

यदि अर्ध शक्ति बिन्दुओं की आवृत्तियाँ ω_0 आवृत्ति के निकट है तो

$\omega_0+\omega=2\omega$ ...(8.27)

समीकरण (8.27)व (8.26)से

$(\omega_0-\omega)2\omega = \pm 2r\omega$

या $\omega_0-\omega = \pm r$ ..(8.28)

अत: अर्ध शक्ति बिन्दुओं की आवृत्तियाँ

$$\omega_1 = \omega_0 - r \quad ...(8.29)$$

तथा $\omega_2 = \omega_0 + r$ ...(8.30)

अर्थ शक्ति आवृत्तियों का अंतर

$$\omega_2 - \omega_1 = 2r = \frac{\lambda}{m} \quad ...(8.31)$$

इस अर्ध शक्ति आवृत्तियों के अंतर को बैंड विस्तार (band width)कहते हैं ।

आप जानते हैं कि दोलक का विशेषता गुणांक

$$Q = \omega_0 \tau$$

$$= \frac{\omega_0}{2r} \quad ...(8.32)$$

समी (8.31)से 2r का मान समी. (8.32)में रखने पर

$$Q = \frac{\omega_0}{|\omega_2 - \omega_1|} = \frac{f_0}{|f_2 - f_1|} \quad ...(8.33)$$

स्वाभाविक आवृत्तिअनुनादी आवृत्ति

विशेषता गुणांक = $\frac{\text{स्वाभाविक आवृति}}{\text{बैंड विस्तार}} = \frac{\text{अनुनादी आवृति}}{\text{बैंड विस्तार}}$

अत: विशेषता गुणांक अनुनादी आवृत्ति व बैंड विस्तार के अनुपात के बराबर होता है । बैंड विस्तार का मान जितना कम होता है, Q का मान उतना ही अधिक होता है तथा अनुनाद भी उतना ही अधिक तीक्ष्ण होता है इसलिये अनुनाद की तीक्ष्णता अर्थात् Q का मापन बैंड विस्तार से भी कर सकते हैं ।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

8. शक्ति अनुनाद वक्र से आप क्या समझते हैं?

----

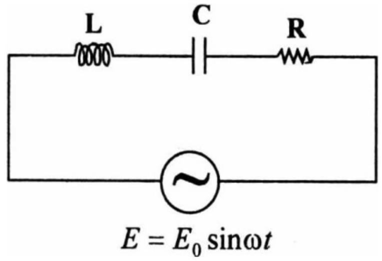
9. अर्ध शक्ति बिन्दु व आवृत्ति को परिभाषित कीजिये ।

8.6 L-C-R परिपथ में अनुनाद (Resonance in L-C-R circuit)

L-C-R परिपथ (श्रेणी व समान्तर)अवमंदित दोलक का उदाहरण है । L-C-R परिपथ में प्रत्यावर्ती स्रोत (बाह्य चालक बल)लगाने पर यह प्रणोदित दोलक के रूप में कार्य करने लगता है। इस अनुच्छेद में आप इसमें उत्पन्न विद्युत दोलनों का अध्ययन करेंगे ।

8.6.1 श्रेणी L-C-R परिपथ (Series L-C-R circuit)

चित्र 8.8 में दिखाये अनुसार प्रेरकत्व L, धारिता C व प्रतिरोध R के श्रेणी क्रम में क्रम प्रत्यावर्ती विद्युत वाहक बल जनित्र (alternating source of e.m.f)जोड़ते है जिसका वि.वा.बल E = E_0 sin ωt है । इसके कारण परिपथ में प्रत्यावर्ती धारा I प्रवाहित होती है ।



चित्र 8.8

प्रत्यावर्ती धारा I के कारण प्रेरक कुण्डली में प्रेरित वि.वा.बल $-L\dfrac{dI}{dt}$ उत्पन्न होता है जिसके कारण परिपथ में परिणामी वि.वा. बल $\left[E - L\dfrac{dI}{dt}\right]$ शेष रह जाता है जो इस परिपथ के दो अन्य अवयव C व R पर उत्पन्न विभवान्तर क्रमश: V_C ($V_c = \dfrac{q}{c}$ जहाँ q समय t पर धारिता C पर आवेश का मान है)व विभवान्तर V_R(VR= IR)के योग के तुल्य होता है अर्थात्

$$E - L\frac{dI}{dt} = \frac{q}{c} + RI \qquad ...(8.34)$$

या $$L - L\frac{dI}{dt} = \frac{q}{c} + RI = E$$

I के स्थान पर $\dfrac{dq}{dt}$ व $\dfrac{dI}{dt}$ के स्थान पर $\dfrac{d^2q}{dt^2}$ लिखने पर

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{c} + R\frac{dq}{dt} = E = E_o \sin \omega t$$

या $$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} = \frac{E_o}{L}\sin \omega t$$

या $$\frac{d^2q}{dt^2} + 2r\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \alpha_0 \sin \omega t \qquad ...(8.35)$$

जहाँ $\dfrac{R}{L} = 2r = \dfrac{1}{\tau}, \dfrac{1}{LC} = \omega_0^2$ तथा $\dfrac{E_0}{L} = \alpha_o$ है ।

समी. (8.35)प्रणोदित दोलक के गति समीकरण

$\frac{d_2 y}{dt^2}+2r\frac{dy}{dt}+\omega_0^2 y=F_0\sin\omega t$ के तुल्य है जिसका हल y = y_0 sin (ωt - ϕ)द्वारा दिया जाता है ।

अत: समी (8.35)का हल निम्न प्रकार से लिख सकते हैं-

$$q\frac{\alpha_0}{\left\{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+4r^2\omega^2\right\}^{1/2}}\sin\left(\omega t-\phi\right)$$

या q = q_o sin (ωt-ϕ)...(8.36)

यहाँ q_0, संधारित्र पर अधिकतम आवेश का मान है ।

$$q_0\frac{\alpha_0}{\left\{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+4r^2\omega^2\right\}^{1/2}}\sin\left(\omega t-\phi\right) \qquad ...(8.37)$$

$\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\omega t$

आवेश व वि.वा. बल E के मध्य कलान्तर

$$\phi=\tan^{-1}\frac{2r\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \qquad ....(8.38)$$

समी. (8.36)का समय के सापेक्ष अवकलन करने पर धारा का मान

$$I=\frac{dq}{dt}=\omega q_o\cos\left(\omega t-\phi\right)$$

$$=\omega q_0\sin\left(\omega t-\phi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$\alpha_0=\frac{E_0}{L}$

=I_o sin (ωt-δ) (∴δ=ϕ-π/2) ...(8.39)

$\omega^2{}_0=\frac{1}{LC}$

यहाँ परिपथ में अधिकतम धारा का मान

I_0 = ωq_0

$\frac{R}{L}=2r$

समीकरण (8.37)से q_0 का मान (8.40)में रखने पर

$$I_0=\frac{\omega\alpha_0}{\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4r^2\omega^2\right]^{1/2}}$$

$\delta = \phi-\frac{\pi}{2}$

$$I_0=\frac{E_0}{\left[\left(\frac{1}{\omega C}-\omega L\right)^2+R^2\right]^{1/2}} \qquad ...(8.41)$$

tan δ= cot ϕ

$=\frac{1}{\tan\phi}$

$=\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2r\omega}$

तथा $\delta = \phi-\frac{\pi}{2}$ परिपथ में धारा व प्रत्यावर्ती वि.वा.बल के मध्य कलान्तर है जिसका मान

$$\delta = \tan^{-1}\left\{\frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}\right\} \qquad ....(8.42)$$

समी. (8.41)को निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं-

$$I_o = \frac{E_o}{Z} \qquad ...(8.43)$$

जहाँ $$Z = \left[\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 + R^2\right]^{1/2}$$

समी. (8.41)उस परिपथ के लिये ओम के नियम को प्रदर्शित करती है जिसमें R के साथ L व C भी सम्मिलित हैं। केवल प्रतिरोध युक्त परिपथ में इस नियम को $I_o = \frac{E_o}{R}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है ।

अत: समी. (8.41)का हर L-C-R परिपथ का प्रभावी प्रतिरोध है जिसे L-C-R परिपथ की प्रतिबाधा (impedance)भी कहते हैं ।

अत: समी. (8.43)से L-C-R परिपथ की प्रतिबाधा

$$Z = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2} \qquad ...(8.44)$$

श्रेणी अनुनाद (Series resonance)

परिपथ में प्रवाहित धारा अधिकतम होने के लिये यह आवश्यक है कि परिपथ में प्रतिबाधा Z का मान न्यूनतम हो अर्थात् न्यूनतम हो अर्थात्

$$Z = \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega L}\right)^2 + R^2\right]^{1/2} = \text{न्यूनतम}$$

या $$\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega L}\right)^2 + R^2\right] = 0$$

$$2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\left[L + \frac{1}{\omega^2 C}\right] = 0$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \qquad .....(8.45)$$

$$\omega \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \qquad ...(8.46)$$

यहाँ $\omega_0 = \omega \frac{1}{\sqrt{LC}}$ पर धारा का मान अधिकतम है अत: यह आवृत्ति L-C-R श्रेणी परिपथ की अनुनादी आवृत्ति कहलाती है । इस स्थिति को श्रेणी अनुनाद कहते हैं और परिपथ श्रेणी अनुनादी परिपथ (series resonant circuit)कहलाता है ।

अनुनाद की स्थिति में ($\omega = \omega_0$ पर)समी.(8.43)से

$$(I_o)_{max} = \frac{E_o}{R} \quad .....(8.47)$$

अर्थात् अधिकतम धारा आयाम केवल प्रतिरोध R ही निर्भर करता है तथा प्रतिबाधा का मान अनुनाद की अवस्था में

$$Z = R$$

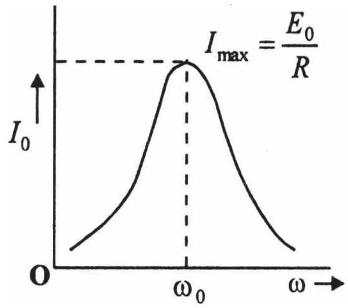
जो कि Z का न्यूनतम मान है ।

समी. (8.45)व (8.42)से, $\tan\delta = 0$

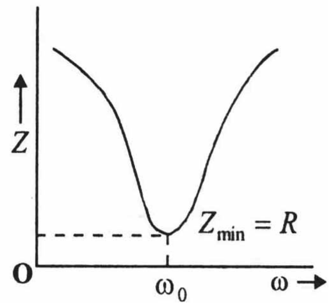
$$\text{या} \quad \delta = 0 \quad ...(8.48)$$

अर्थात् अनुनाद की स्थिति में विद्युत वाहक बल व धारा एक ही कला में होते हैं तथा परिपथ का शक्ति गुणांक एकांक)unity(होता है ।

धारा I_0 व प्रतिबाधा Z का आवृत्ति ω के साथ परिवर्तन क्रमशः चित्र 8.9 व 8.10 में दर्शाया गया है । अनुनादी आवृत्ति पर धारा का मान अन्य आवृत्तियों की तुलना में अत्यधिक होता है । अनुनादी आवृत्ति पर प्रतिबाधा न्यूनतम होने के कारण धारा परिपथ में सुगमता से प्रवाहित होती है इसलिये इस श्रेणी L-C-R परिपथ को ग्राही परिपथ (acceptor circuit)भी कहते हैं ।



चित्र 8.9 धारा का चालक बल की आवृत्ति के साथ परिवर्तन



चित्र 8.10 प्रतिबाधा का चालक बल की आवृत्ति के साथ परिवर्त

$$\tau = \frac{1}{2r}$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{LC}$$

विशेषता गुणांक)Quality factor)

आप जानते हैं कि विशेषता गुणांक

$$Q = \omega_0 \tau$$

$$= \frac{\omega_o}{2r} \quad ......(8.49)$$

समी. (8.35)के अनुसार

$$2r\frac{L}{R} \quad ...(8.50)$$

समी. (8.50)से 2r का मान (8.49)में रखने पर

शक्ति ,गुणांक $=\cos\delta$

यदि $\delta=0$ तो $\cos\delta=1$

$$Q = \frac{\omega_o L}{R} \quad ...(8.51)$$

या $$Q=\frac{1}{\omega_o CR}$$ ....(8.52)

अनुनादी अवस्था में प्रेरक कुंडली पर विभवान्तर का आयाम

$E_L = \omega_o L(I_o)_{max}$ .....(8.53)

समी. (8.47)से $(I_o)_{max}$ का मान रखने पर

$$E_L=\frac{\omega_o L}{R}E_o$$ ...(8.54)

समी. (8.51)से $\frac{\omega_o L}{R}$ का मान (8.54)में रखने पर

$E_L = QE_o$ ....(8.55)

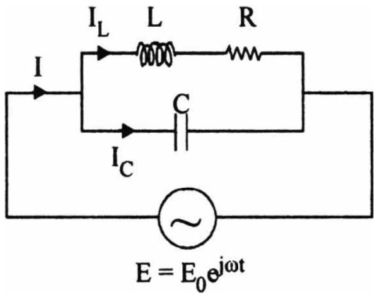
इस अनुछेद मे विद्युत वाहक बल $E = E_o e^{j\omega t}$ से प्रदर्शित किया गया है । यहां j का तात्पर्य i $(=\sqrt{-1})$ ही है । आर्थत् j = $i=\sqrt{-1}$

अत: आप समझ सकते हैं कि अनुनादी अवस्था में प्रेरक कुंडली पर विभवान्तर आयाम आरोपित विभवान्तर आयाम का Q गुना होता है ।

8.6.2 L-C-R समान्तर परिपथ (L-C-R parallel circuit)

चित्र 8.11 व के अनुसार किसी परिपथ में प्रतिरोध R, प्रेरकत्व L वाली कुंडली के समान्तर क्रम में धारिता C के संधारित्र पर प्रत्यावर्ती विद्युत वाहक बल (alternating electromotion force)$E = E_o e^{j\omega t}$ लगाया जाता है तो इसमें भी विद्युत दोलन उत्पन्न हो जाते हैं । इस प्रकार के परिपथ को समान्तर परिपथ कहते है

यहां प्रत्यावर्ती वि. वा. बल $E=E_o \sin \omega t$ के स्थान पर $E = E_o e^{j\omega t}$ गणितीय गणना को सरल करने की दृष्टि से लिया गया है । दोनों ही विधियों से समान परिणाम प्राप्त होते हैं।



चित्र 8.11

प्रत्यावर्ती वि.वा.बल $E = E_o e^{j\omega t}$ के कारण परिपथ में प्रवाहित कुल धारा I दो भागों में विभक्त हो जाती है माना कुंडली व प्रतिरोध वाली शाखा में धारा का मान I_L तथा संधारित्र वाली शाखा में धारा का मान I_C है,

अत: $I = I_L = I_C$ ...(8.56)

कुंडली प्रतिरोध शाखा के सिरे पर विभवान्तर प्रत्यावर्ती विद्युत वाहक बल के समान होगा ।अत:

$$L\frac{dI_L}{dt}+RI_L=E_o e^{j\omega t}$$ ...(8.57)

समी. (8.57)को $e^{Rt/L}$ से गुणा करने पर

$$\frac{dI_L}{dt}e^{Rt/L}+\frac{R}{L}I_Le^{Rt/L}=\frac{E_o}{L}e^{(j\omega+R/L)t}$$

या

$$\frac{d}{dt}\left(I_Le^{Rt/L}\right)=\frac{E_o}{L}e^{(j\omega+R/L)t}$$

समाकलन करने पर

$$I_L=\frac{E_oe^{j\omega t}}{(R+j\omega L)} \quad ...(8.58)$$

संधारित्र शाखा के सिरे पर भी विभवान्तर प्रत्यावर्ती वि.वा.बल के बराबर होगा, अर्थात्

$$\frac{q}{C}=\frac{1}{C}\int_0^t I_Cdt=E_oe^{j\omega t}$$

अवकलन करने पर

$$\frac{I_C}{C}=jE_o\omega e^{j\omega t}$$

या $I_C=J\omega CE_oe^{j\omega t}$ 8.59)...

समी. (8.58)व (8.59)से I_L व I_C का मान समी. (8.65)में रखने पर

$$I=\left(\frac{1}{R+j\omega L}+j\omega C\right)E_oe^{j\omega t} \quad ...(8.60)$$

$\therefore Z=\frac{E}{I}$

$$I=\frac{\left(1-\omega^2LC\right)+j\omega CR}{R+j\omega L}E_oe^{j\omega t} \quad .....(8.61)$$

$$I=\frac{\left(1-\omega^2LC\right)+j\omega CR}{R+j\omega L}\times\frac{R-j\omega L}{R-j\omega L}E_oe^{j\omega t}$$

$$I=\frac{R-j\omega\left\{L-C\left(R^2+\omega^2L^2\right)\right\}E_oe^{j\omega t}}{R^2+\omega^2L^2} \quad ....(8.62)$$

$\therefore Y=\frac{1}{Z}$

समी. (8.62)की तुलना ओम के नियम से करने पर समान्तरL-C-R परिपथ में प्रभावी प्रतिरोध एक समिश्र फलन (Complex function)प्राप्त होता है । इसे परिपथ की प्रतिबाधा Z कहते हैं । जिसका मान

$$Z=\frac{R^2+\omega^2L^2}{R-j\omega\left\{L-C\left(R^2+\omega^2L^2\right)\right\}} \quad ....(8.63)$$

प्रतिबाधा Z के व्युत्क्रम को प्रवेश्यता (admittance)कहते हैं । इसका मान

$$Y=\frac{R-j\omega\left\{L-C\left(R^2+\omega^2L^2\right)\right\}}{R^2+\omega^2L^2} \quad ....(8.64)$$

$$|Y| = \left\{ \frac{\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 C^2 R^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \right\}^{1/2} \qquad .....(8.65)$$

अनुनाद के लिये परिपथ में कुल धारा, I, व वि.वा.बल, E, समान कला में होने चाहिये इसलिये परिपथ की प्रतिबाधा अथवा प्रवेश्यता वास्तविक होनी चाहिये अर्थात् समी(8.63) .अथवा (8.64)से

$$L - C\ (R^2 + \omega^2 L^2) = 0$$

या $$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = \omega_r \qquad ....(8.66)$$

आवृत्ति ω_r, को समान्तर परिपथ की अनुनादी आवृत्ति कहते हैं । इस आवृत्ति पर प्रतिबाधा अधिकतम तथा प्रवेश्यता न्यूनतम होती है एवम् परिपथ में प्रवाहित होने वाली धारा का मान न्यूनतम होता है ।

आवृत्ति $\omega = \omega_r$ पर परिपथ की प्रवेश्यता समी. (8.64)से

$$Y_{\min} = \frac{R}{R^2 + \omega_r^2 L^2} \qquad ...(8.67)$$

समी. (8.66)से (8.67)में ω_r, का मान रखने पर

$$Y_{\min} = \frac{R}{R^2 \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \right) L^2}$$

$$= \frac{RC}{L} \qquad ....(8.68)$$

तथा $$Z_{\max} = \frac{1}{Y_{\min}} = \frac{L}{RC} \qquad ....(8.69)$$

अनुनादी आवृत्ति पर धारा का आयाम

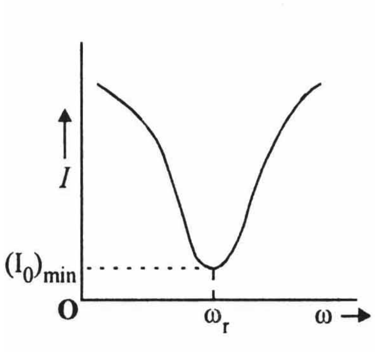
$$(I_o)_{\min} = E_o Y_{\min}$$

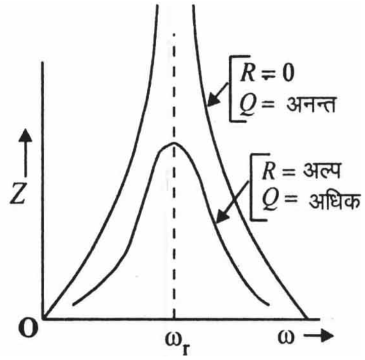
$$(I_o)_{\min} = \frac{RE_o}{R^2 + \omega_r^2 L^2}$$

या $$(I_o) = \frac{RCE_o}{L} \qquad ...(8.70)$$

समान्तर परिपथ के लिये प्रवाहित धारा I तथा प्रतिबाधा Z का आवृत्ति ω के सापेक्ष परिवर्तन चित्र 8.12 व 8.13 में दिखाया गया है । समान्तर L-C-R परिपथ में अनुनादी आवृत्ति पर धारा का मान अन्य आवृत्तियों की तुलना में न्यूनतम होता है । यदि समान्तर L-C-R परिपथ में विभिन्न आवृत्तियों की धाराओं को प्रवाहित करें तो अनुनादी आवृत्ति वाली धारा को परिपथ प्रवाहित नहीं होने देता है (क्यों कि यहाँ Z अधिकतम है)और इस परिपथ को अस्वीकारी परिपथ (rejector circuit)कहते है ।

अर्ध शक्ति बिन्दु व विशेषता गुणांक (Half power points and quality factor)





चित्र धारा का चालक बल की 8.12 आवृत्ति के साथ परिवर्तन

चित्र प्रतिबाधा का चालक 8.13 बल की आवृत्ति के साथ परिवर्तन

समान्तर परिपथ में प्रतिबाधा, Z, अथवा प्रवेश्यता, Y, तथा आवृत्ति ω के मध्य खींचे अनुनाद वक्र में भी ऐसे दो बिंदु होते हैं जिन पर प्रवेश्यता का मान अपने न्यूनतम मान Y_{min} का $\sqrt{2}$ गुना होता है ।

अर्थात इन दोनों बिन्दुओं पर

$$\therefore \quad |Y| = \sqrt{2} Y_{min} \quad ...(8.71)$$

समी (8.65)व (8.68)से

$$\left[\frac{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \right]^{1/2} = \sqrt{2} \frac{RC}{L}$$

$$(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2 = 2\omega^2 C^2 R^2 + \frac{2R^4 C^2}{LC}$$

$$(1-\omega^2 LC)^2 = \omega^2 C^2 R^2 + \frac{2R^4 C^2}{L^2}$$

अल्प प्रतिरोध की स्थिति में $\frac{R^4 C^2}{L^2}$ को अन्य पदों की अपेक्षा नगण्य मान सकते हैं,

$$\therefore \quad (1-\omega^2 LC)^2 = \omega^2 C^2 R^2$$

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)^2 = \omega^2 C^2 R^2$$

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right) = \pm \omega CR$$

$$\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r^2}\right) = \pm CR \quad ....(8.72)$$

माना A व B बिन्दुओं पर आवृतियाँ ω_1 व ω_2 हैं तो

$$\frac{1}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_r^2} = +CR \quad ...(8.73)$$

$$\frac{1}{\omega_2}-\frac{\omega_1}{\omega_r^2}=-CR \quad ...(8.74)$$

समी. (8.73)व (8.74)को जोडने पर

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1\omega_2}-\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_r^2}=0$$

$$\omega_1\omega_2=\omega_r^2 \quad ...(8.75)$$

समी (8.73)को (8.74)में से घटाने पर

$$\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_1\omega_2}+\frac{\omega_2+\omega_1}{\omega_r^2}=2CR \quad ....(8.76)$$

समी. (8.75)से $\omega_1\omega_2 = \omega_r^2$ रखने पर

$(\omega_2-\omega_1)= \omega_r^2CR$ ...(8.77)

अत: बैंड विस्तार $(\omega_1-\omega_2)= \omega_r^2CR$ ....(8.78)

विशेषता गुणांक $Q=\frac{\omega_r}{\omega_r^2CR}=\frac{1}{\omega_rCR}$ ...(8.79)

समी. (8.70)व (8.68)से

$$(I_o)_{\min}=Y_{\min}E_o$$

$$(I_o)_{\min}=\frac{RC}{L}E_o$$

तथा संधारित्र में प्रवाहित धारा का आयाम

$$I_c=\omega_rCE_o$$

$$=\frac{\omega_r^2L}{R}I_{\min}$$

$$=Q(I_o)_{\min} \quad ....(8.80)$$

अत: अनुनादी अवस्था में संधारित्र में से प्रवाहित होने वाली धारा $(I_o)_{min}$ का Q गुना होती है ।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

10. L-C-R श्रेणी परिपथ में अनुनादी आवृत्ति किस पर निर्भर नहीं करती हैं?

----

11. L-C-R श्रेणी व समान्तर अनुनादी परिपथ में प्रतिबाधा व धारा का मान क्या होता है?

उदाहरण 8.1 एक लेजर स्त्रोत के उत्तेजित परमाणु को प्रणोदित दोलक मानकर उससे उत्सर्जित 8000 A तरंगदैर्ध्य वाली तरंग के संगत अनुनादी अवस्था में यदि Q का मान 10^8 हो तो उत्सर्जित बैंड की चौड़ाई ज्ञात कीजिये ।

हल : $Q = \frac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{v_o}{v_2 - v_1} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_0(\lambda_1 - \lambda_2)}$

$\omega_0 = 2\pi v_o$

$v_0 = \frac{c}{\lambda_0}$

$\lambda_1\lambda_2 \cong \lambda_o^2$ लेने पर

λ_0 माध्य तरंग दैर्ध्य है ।

$$Q = \frac{\lambda_0^2}{\lambda_0(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

$$\therefore \quad \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\lambda_o}{Q}$$

$$= \frac{8000 \times 10^{-10}}{10^8}$$

$$\Delta\lambda = .00008A$$

उदाहरण 8.2 100 माइक्रो हेनरी की प्रेरक कुंडली तथा 0.0001 माइक्रो फैरड के संधारित्र को श्रेणीक्रम में संयोजित किया जाता है जिसका विशेषता गुणांक 100 है । परिपथ का प्रभावी प्रतिरोध ज्ञात कीजिये ।

हल : प्रश्नानुसार $L = 100 \times 100^{-6} = 10^{-4}$ हेनरी

$C = 0.0001 \times 10^{-6} = 10^{-10}$ फैरड

$Q = 100$

$\therefore$ अनुनादी आवृत्ति $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-4} \times 10^{-10}}}$

$= 10^7$ रेडियन / से.

$\therefore$ विशेषता गुणांक $Q = \frac{\omega_o L}{R}$

$$\therefore \quad R = \frac{\omega_o L}{Q}$$

$$= \frac{10^7 \times 10^{-4}}{100} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ ओम}$$

दोलक का प्रभावी प्रतिरोध 10 ओम है ।

8.7 सारांश (Summary)

- अनुनाद प्रणोदित दोलक की एक ऐसी स्थिति है जिसमें बाह्य चालक बल की आवृत्ति दोलक की स्वाभाविक आवृत्ति के बराबर होती है तो दोलक का आयाम अधिकतम होता है ।
- अनुनादी आवृत्ति के दोनों ओर चालक बल की आवृत्ति के साथ दोलक के आयाम के कम होने की दर को अनुनाद की तीक्ष्णता कहते हैं ।
- प्रणोदित दोलक का वेग, आवृत्ति $\omega = \omega_0$ पर अधिकतम होता है । इस स्थिति में वेग व बाह्य चालक बल एक ही कला में होते हैं जिसे वेग अनुनाद की स्थिति कहते हैं ।
- अधिकतम वेग आयाम, अवमंदन नियतांक के व्युत्क्रमानुपाती होता है ।
- प्रणोदित दोलक आवृत्ति $\omega = \omega_0$ पर आरोपित बाह्य चालक बल से अधिकतम ऊर्जा का अवशोषण करता है व इसकी माध्य ऊर्जा इस स्थिति में अधिकतम होती है । दोलक की इस स्थिति को ऊर्जा अनुनाद कहते हैं।
- प्रणोदित दोलक आवृत्ति $\omega = \omega_0$ पर बाह्य चालक बल द्वारा अधिकतम शक्ति का अवशोषण करता है व इस स्थिति में बाह्य बल F व वेग V एक ही कला में होते हैं इस स्थिति को शक्ति अनुनाद कहते हैं ।
- अनुनादी वक्र पर (अनुनादी आवृत्ति के दोनों ओर)ऐसे दो बिन्दु पाये जाते हैं जहाँ अवशोषित शक्ति का मान अधिकतम अवशोषित शक्ति के मान का आधा होता है, अर्ध शक्ति बिंदु कहलाते हैं तथा इस बिन्दुओं के संगत आवृत्तियों के अंतर को बैंड विस्तार कहते हैं ।
- विशेषता गुणांक Q का मापन बैंड विस्तार से भी कर सकते है क्योंकि बैंड विस्तार का मान जितना कम होता है Q का मान उतना ही अधिक होता है व अनुनाद भी उतना ही अधिक तीक्ष्ण होता है ।
- L-C-R श्रेणी अनुनादी परिपथ में अनुनादी आवृत्ति प्रतिरोध पर निर्भर नहीं करती है व प्रतिबाधा केवल R पर निर्भर करती है । अनुनाद की अवस्था में परिपथ की प्रतिबाधा न्यूनतम व प्रवेश्यता एवम् धारा का मान अधिकतम होता है । यह परिपथ ग्राही परिपथ कहलाता है ।
- L-C-R समान्तर अनुनादी परिपथ में अनुनाद आवृत्ति प्रतिरोध पर निर्भर करती है व प्रतिबाधा का मान L, C व R तीनों पर निर्भर करता है । अनुनाद की स्थिति में प्रतिबाधा का मान अधिकतम होता है तथा प्रवेश्यता व धारा का मान न्यूनतम होता है । यह परिपथ अस्वीकारी परिपथ कहलाता है ।

8.8 शब्दावली (Glossary)

अनुनाद	Resonance
अनुनाद की तीक्ष्णता	Sharpness resonance

अर्थ शक्ति बिंदु	Half points
अस्वीकारी	Rejector
ऊर्जा अनुनाद	Energy resonance
ग्राही परिपथ	Acceptor circuit
तीक्ष्ण	Sharp
प्रतिबाधा	Impedence
प्रवेश्यता	Admittance
बैंड विस्तार	Band width
वेग अनुनाद	Velocity
शक्ति अनुनाद	Power resonance

8.9 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

(i) A.P French	Vibrations and Waves	C.B.S Publishers, Dehli
(ii) N.K. Bajaj	The Physics of Waves and Oscillations	Tata Mc Graw- Hill Publishing Company Ltd., Delhi.
(iii) S.P. Puri	Fundamentals of Vibrations and Waves	Tata Mc Graw- Hill Publishing Company Ltd., Delhi.
(iv) शर्मा, सक्सेना (v) व छाबड़ा	दोलन एवम् तरंगे	राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी जयपुर
(vi) एमसक्सेना .पी ., (vii) पीसिंह व .आर .	दोलन एवम् तरंगे	कॉलेज बुक हाउस, जयपुर
(viii)एसरावत .एस .		

8.10 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to Self-assessment questions)

1. अनुनाद प्रणोदित दोलक की एक स्थिति है जिसमें बाहय आवर्ती बल की आवृत्ति दोलक की स्वभाविक आवृत्ति के बराबर होती है तथा दोलक का आयाम अधिकतम होता है ।
2. अनुनादी आवृत्ति के दोनों ओर चालक बल की आवृत्ति के साथ प्रणोदित दोलक के आयाम के कम होने की दर को अनुनाद की तीक्ष्णता कहते हैं ।
3. न्यून अवमंदन की स्थिति में अनुनाद तीक्ष्ण व अति अवमंदन की स्थिति में अनुनाद सपाट होता है ।
4. वेग अनुनाद की स्थिति में आवृत्ति $\omega = \omega_0$ पर वेग आयाम अधिकतम होता है ।
5. अधिकतम वेग आयाम अवमंदन के व्युत्क्रमानुपाती होता है ।
6. वेग अनुनाद की स्थिति में आरोपित बाहय आवर्ती बल व बेग के मध्य कलान्तर शून्य होता है ।

7. ऊर्जा अनुनाद की स्थिति में प्रणोदित दोलक आवृत्ति $\omega = \omega_0$ पर बाह्य आवर्ती बल से अधिकतम ऊर्जा का अवशोषण करता है ।
8. बाह्य आवर्ती बल की आवृत्ति के साथ दोलक की प्रति दोलन माध्य शक्ति अवशोषण में परिवर्तन प्रदर्शित करने वाले वक्र को शक्ति अनुनाद वक्र कहते हैं ।
9. अनुनादी वक्र पर ऐसे दो बिंदु जिन पर प्रणोदित दोलक द्वारा अवशोषित शक्ति का मान उसके द्वारा अधिकतम अवशोषित शक्ति का आधा होता है, अर्द्ध शक्ति, बिंदु कहलाते हैं।
10. L-C-R श्रेणी परिपथ में अनुनादी आवृत्ति प्रतिरोध पर निर्भर नहीं करती है ।
11. L-C-R अनुनादी श्रेणी परिपथ में प्रतिबाधा का मान न्यूनतम तथा धारा का मान अधिकतम होता है इसके विपरीत L-C-R अनुनाद समान्तर परिपथ में प्रतिबाधा का मान अधिकतम व धारा का मान न्यूनतम होता है ।

8.11 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type question)

1. अनुनाद की अवस्था में बाह्य आवर्ती बल की आवृत्ति का मान क्या होता है?
2. तीक्ष्ण अनुनाद से आप क्या समझते हैं?
3. बाह्य आवर्ती बल से प्रणोदित दोलक द्वारा अधिकतम ऊर्जा अवशोषण का सूत्र लिखिये।
4. विशेषता गुणांक व बैंड विस्तार में संबध लिखिये ।
5. L-C-R श्रेणी परिपथ में प्रेरक कुंडली पर विभवान्तर व आरोपित विभवान्तर में क्या संबंध है?

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type question)

6. अनुनाद व अनुनाद की तीक्ष्णता की व्याख्या कीजिये ।
7. सिद्ध कीजिये वेग अनुनाद की स्थिति में प्रणोदित दोलक का अधिकतम वेग का आयाम अवमंदन नियतांक के व्युत्क्रमानुपाती होता है तथा आवर्ती बल व वेग समान कला में होते हैं।
8. सिद्ध कीजिये कि प्रणोदित दोलक की माध्य ऊर्जा आरोपित बाह्य बल की आवृत्ति पर निर्भर करती है तथा इसके द्वारा अनुनाद की स्थिति में अधिकतम ऊर्जा अवशोषण का मान $F_o^2Q^2 / 4K$ के बराबर होता है । यहाँ F_O बाह्य आवर्ती बल का आयाम, Q विशेषता गुणांक तथा K बल स्थिरांक है ।
9. सिद्ध कीजिये कि जब कोई प्रणोदित दोलक स्वभाविक आवृत्ति से दोलन करता, है तो बाह्य आवर्ती बल द्वारा ही $F_o^2\tau / 2m$ के बराबर महत्तम शक्ति का हस्तांतरण होता है यहाँ F_o चालक बल का आयाम तथा क्रमशः m व τ दोलक का आयाम एवम् विश्रान्तिकाल है ।

10. प्रणोदित दोलक के बैंड विस्तार से आप क्या समझते हैं? सिद्ध कीजिये कि दोलक का विशेषता गुणांक स्वभाविक आवृत्ति के अनुक्रमानुपाती तथा बैंड विस्तार के व्युत्क्रमानुपाती होता है ।
11. एक श्रेणीक्रम में जुड़े L-C-R परिपथ में वि.वा.बल $E=E_0 \sin\omega t$ ला लगाया जाता है । परिपथ के अवकल समीकरण की सहायता से किसी क्षण धारा के मान का व्यंजक प्राप्त कीजिये । इस व्यंजक की सहायता से वि. वा. बल की आवृत्ति ज्ञात कीजिये जब कि परिपथ अनुनाद की स्थिति में है ।
12. एक श्रेणी L-C-R परिपथ के लिये प्रतिबाधा व विशेषता गुंणाक का सूत्र व्युत्पन्न कीजिये।
13. समान्तर अनुनादी L-C-R परिपथ के अनुनाद से आप क्या समझते हैं? इस परिपथ में अनुनाद की अवस्था के लिये प्रतिबंध ज्ञात कीजिये ।
14. श्रेणी अनुनादी परिपथ की समान्तर अनुनादी परिपथ से तुलना कीजिये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical question)

15. यदि श्रेणी L-C-R परिपथ में L = 10 मिली हेनरी, C = 1 माइक्रो फैरड व R = 0.1 ओम हो तो परिपथ की अनुनादी वृत्ति व विशेषता गुणांक ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर:** 10^4 रेडियन / से, Q=1000)

16. एक ओम प्रतिरोध व 2 हेनरी प्रेरकत्व वाली कुंडली में से 2 माइक्रो फैरड के संधारित्र को अनावेशित किया जाता है परिकलन कीजिये (i)अनुनादी आवृत्ति (ii)विशेषता गुणांक ।

(**उत्तर:** 500 रेडियन / से, Q = 1000)

इकाई-9

अनावर्ती दोलक(Anharmonic Oscillator)

इकाई की रूपरेखा

9.0 उद्देश्य
9.1 प्रस्तावना
9.2 अनावर्ती दोलक तथा अनावर्ती पद
9.3 सरल लोलक एक अनावर्ती दोलक के रूप में
9.4 सारांश
9.5 शब्दावली
9.6 संदर्भ ग्रन्थ
9.7 बोध प्रश्नों के उत्तर
9.8 अभ्यासार्थ प्रश्न

9.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप

- सरल आवर्त गति में दोलक का आयाम अल्प न होने पर उस पर कार्यरत प्रत्यानयन बल का साम्यावस्था से विस्थापन का रेखीय फलन नहीं होना तथा स्थायी अवस्था के दोनों ओर अधिकतम विस्थापन व प्रत्यानयन बल का मान बराबर नहीं होना समझ सकेंगे
- ठोसों के रेखीय प्रसार को समझ सकेंगे;
- सरल लोलक के आयाम में वृद्धि करने पर उसके आवर्त काल में होने वाली अल्प वृद्धि के बारे में जान सकेंगे ।

9.1 प्रस्तावना (Introduction)

आपने इकाई-1 में सरल आवर्त गति का अध्ययन किया है जिसमें आपने देखा कि दोलक का आयाम अल्प होने पर दोलक पर कार्यरत बल विस्थापन के समानुपाती होता है तथा कण का विभव कूप परवलीय होता है । इकाई-2 में आपने सरल लोलक के बारे में अध्ययन किया है । सरल आवर्त गति में आयाम अल्प होने पर आवृत्ति अथवा आवर्तकाल आयाम पर निर्भर नहीं करते हैं ।

इस इकाई के अनुच्छेद 9.2 में आप अध्ययन करेंगे कि यदि दोलक का आयाम अल्प नहीं है तो दोलक की गति आवर्त गति तो होती है परंतु सरल आवर्त गति नहीं होती है । इस प्रकार के दोलक को अनावर्ती दोलक (anharmonic oscillator)कहते हैं । इसी अनुच्छेद में आप अनावर्ती दोलक की गति समीकरण स्थापित करके उसके विस्थापन का समीकरण ज्ञात करेंगे तथा अध्ययन करेंगे कि इसमें साम्यावस्था के दोनों ओर विस्थापन व प्रत्यानयन बल का

मान समान होता है अथवा नहीं । इसी अनुच्छेद में ठोसों के रेखीय प्रसार के बारे में आपको जानकारी दी जाएगी ।

इसी इकाई के अनुच्छेद 9.3 में आप अधिक आयाम से दोलन करने वाले सरल लोलक का अनावर्ती दोलक के रूप में अध्ययन कर सकेंगे व दीर्घ आयामों के लिये लोलक का आवर्तकाल ज्ञात कर सकेंगे तथा देखेंगे कि दीर्घ आयाम से दोलन करने वाले लोलक के आवर्तकाल में अल्प वृद्धि हो जाती है ।

9.2 अनावर्ती दोलक तथा अनावर्ती पद (Anharmonic oscillator and anharmonic terms)

कण की दोलनी गति में यदि दोलन का आयाम अल्प न हो तो प्रत्यानयन बल साम्यावस्था बिन्दु से विस्थापन का रेखीय (linear)फलन नहीं होता है । दोलक की गति आवर्त गति तो होगी परन्तु सरल आवर्त गति नहीं होगी । ऐसे दोलक को अनावर्ती दोलक कहते हैं।

आपने इकाई - 2 के अनुच्छेद.2.2 में पढ़ा है कि किसी स्वेच्छिक विभव-कूप की स्थायी साम्यावस्था के इर्द-गिर्द दोलन करने वाले दोलक की स्थितिज ऊर्जा U को विस्थापन Y के पदों में [समी. (2.7)] निम्न प्रकार से लिखा जाता है-

$$U = U_o + \frac{ky^2}{\lfloor 2} + \frac{k_1 y^3}{\lfloor 3} + \frac{k_2 y^4}{\lfloor 4} + ... \qquad ...(9.1)$$

जहाँ U_o साम्यावस्था स्थिति पर दोलक की स्थितिज ऊर्जा तथा K, K_1, K_2 ... नियतांक हैं । अत: कण पर कार्यरत बल

$$F = \frac{dU}{dy} = -ky - \frac{k_1 y^2}{\lfloor 2} - \frac{k_2 y^3}{\lfloor 3} \qquad ......(9.2)$$

कण की सरल आवर्त गति के लिये नियतांक K_1, K_2 ....आदि के मान शून्य होने चाहिये। इस स्थिति में कण की स्थितिज ऊर्जा का मान $U_o + \frac{1}{2}ky^2$ तथा स्थितिज ऊर्जा - दूरी वक्र एक परवलय (parabola(होता है । नियतांक K_1, K_2इत्यादि के मान शून्य न होने की स्थिति में .. कण की गति आवर्त(periodic(गति तो होती है परन्तु सरल आवर्त गति नहीं ।

इस स्थिति में स्थितिज ऊर्जा वक्र परवलय न होकर इसका कुछ विकृत (distorted)रूप प्राप्त होता है जिसे चित्र 9.1 में प्रदर्शित किया गया है ।

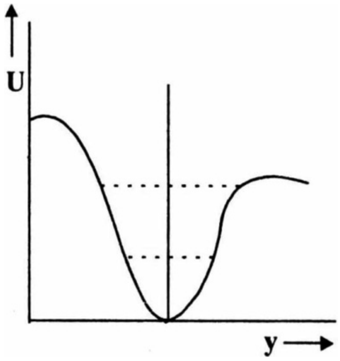
समी. (9.2) $\frac{k_1 y^2}{\lfloor 2}, \frac{k_2 y^3}{\lfloor 3}$ क्रमश: प्रथम तथा द्वितीय अनावर्ती पद (anharmonic terms)कहलाते हैं । समी. (9.2)से m द्रव्यमान अनावर्ती दोलक के गति का समीकरण निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$m = \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - \frac{k_1 y_2}{\lfloor 2} - \frac{k_2 y^3}{\lfloor 3} - \frac{k_3 y^4}{\lfloor 4} ....$$

या $$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k}{m}y=-\frac{k_1y^2}{2m}-\frac{k_2y^3}{6m}-\frac{k_3y^4}{24m}....$$

यदि $\frac{k}{m}=\omega_o^2, \frac{k_1}{2m}=\alpha, \frac{k_2}{6m}=\beta$ तथा $y=\frac{k_3}{24m}$ मान लें तो गति का समीकरण होगा-

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2=-\alpha y^2-\beta y^3-y\lambda^4 \qquad .....(9.3)$$



चित्र 9.1 स्थितिज उर्जा का विस्थापन के साथ परिवर्तन

समी. (9.3)का सामान्य हल (general solution)ज्ञात करना कठिन है परन्तु कुछ विशिष्ट परिस्थितियों में इसका सन्निकट (approximate)हल ज्ञात कर सकते हैं । Y^4या इससे उच्च घात वाले पदों का मान नगण्य मान लें तो समी. (9.3)का सन्निकट हल प्राप्त किया जा सकता है । इस स्थिति में

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2 y=-\alpha y^2-\beta y^3 \qquad ....(9.4)$$

उपरोक्त समी. (9.4)में उच्च घाती पदों की उपस्थिति के कारण इसका हल एक एकल (single)आवृत्ति $\omega = \omega_0$ भी शुद्ध सरल आवर्त गति न होकर इस आवृत्ति के सन्नादियों (harmonics motion)से युक्त एक सम्मिश्र गति होती है जिसे अनावर्ती गति (anharmonic motion)कहते हैं । अत: समी. (9.4)का हल विस्थापन तथा समय का जटिल (complex)आवर्ती फलन होता है । समी. (9.4)को हल करने के लिये फूरिये प्रमेय (Fourier theorem)का उपयोग करते हैं, जिसके अनुसार किसी जटिल आवर्ती दोलक की गति को सरल आवर्त गतियों के योग से व्यक्त कर सकते हैं जिनकी आवृत्तियाँ मूल आवृत्ति (fundamental frequency)के पूर्ण गुणज (integral multiple)के बराबर होती है।

फूरिये प्रमेय के अनुसार किसी जटिल अनावर्ती दोलक का विस्थापन y निम्न होता हैं -

$$y=A_o+\sum_n A_n \sin n\omega t+\sum_n B_n \cos n\omega t \qquad ...(9.5)$$

यहाँ A_o,A_n तथा B_n गति के अज्ञात नियतांक हैं जिन्हें फूरिये गुणांक (Fourier's coefficient)कहते हैं तथा ω अनावर्ती दोलक की मूल आवृत्ति हैं ।

न पर
पर
का
nωt
।

iωt
sin
ह ही
। गति
न हैं ।

आप देखेंगे कि कई नियतांकों को सममित (symmetrical)गति के आधार पर हम शून्य के बराबर कर सकते हैं । यदि हम समय की गणना इस प्रकार करें कि समय t व -t के लिये विस्थापन y का मान समान हो अर्थात् गति समय का एक सम फलन (even function)हो तो समी. (9.5)में sin का कोई भी पद नहीं होगा । क्योंकि sin nωt समय t का विषम फलन होता है इसलिये A_n गुणांकों का मान शून्य होगा । समी. (9.5)मे A_n रखने पर

$$y = A_o + \sum_n B_n \cos n\omega t \qquad ....(9.6)$$

अब हम A_o, B_1, B_2.... आदि फूरिये गुणांकों व मूल आवृत्ति ω का मान ज्ञात करेंगे । समी (9.4)में यदि α = β = 0 हो तो इस समीकरण का हल y = B_1 cos ωt सरल आवर्त गति के समान प्राप्त होगा। गुणांक B_1 को दोलक के मूल घटक का आयाम (amplitude of the fundamental component of oscillation)कहते हैं । α व β के अल्प मानों के लिये B_1 के सापेक्ष अन्य सभी गुणांकों A_o, B_2, B_3 इत्यादि का मान अति अल्प होता है अत: α या β के अल्प मानों के लिये B_1 के अतिरिक्त सभी गुणांकों की उच्च घातों व इनके गुणनफलों के मान नगण्य माने जा सकते हैं ।

समी. (9.4)में समी. (9.6)से y का मान रखने पर

$$-\sum (n\omega)^2 B_n \cos n\omega t + \omega_o^2 \left(A_o + \sum_n B_n \cos n\omega t \right)$$

$$= -\alpha \left\{ A_o + \sum_n B_n \cos n\omega t \right\}^2 - \beta \left\{ A_o + \sum_n B_n \cos n\omega t \right\}$$

या $\omega_0^2 A_o + (\omega_0^0 - \omega^2) B_1 \cos \omega t + (\omega_0^2 - 4\omega^2) B_2 \cos 2\omega t$

$+ (\omega_0^2 - 9\omega^2) B^3 \cos 3\omega t + (\omega_0^2 - 16\omega^2) B_4 \cos 4\omega t...$

$= -\alpha B_1^2 \cos^2 \omega t = \beta B_1^3 \cos^3 \omega t \ \{\therefore A_o < B_1\}$ .....(9.7)

या $\omega_0^2 A_0 + (\omega_0^2 - \omega^2) B_1 \cos \omega t + (\omega_0^2 - 4\omega^2) B_2 \cos 2\omega t$

$+ (\omega_0^2 - 9\omega^2) B_3 \text{ Cos } 3\omega t + (\omega_0^2 - 16\omega^2) B_4 \cos 4\omega t....$

$$= -\frac{\alpha B_1^2}{2}(1 + \cos 2\omega t) - \frac{\beta B_1^3}{4}(3\cos \omega t + \cos 3\omega t) \qquad ...(9.8)$$

समी. (9.8)के मान्य (valid)होने के लिये, समय के सभी मानों के लिये दोनों तरफ के पद समान होने चाहिये । अत: दोनों तरफ cos ωt, cos2ωt... आदि के गुणांकों की तुलना करने पर

$$\omega_0^2 A_0 = -\frac{\alpha B_1^2}{2} \qquad ... (9.9)$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) B_2 = -\frac{3}{4}\beta B_1^3 \qquad ..(9.10)$$

$$\left(\omega_0^2 - 4\omega^2\right) B_2 = -\frac{\alpha B_1^2}{2} \quad .....(9.11)$$

$$(\omega_0^2 - 9\omega^2) B_3 = -\frac{\beta B_1^2}{4} \quad ...(9.12)$$

$$\left(\omega_0^2 - 16\omega^2\right) B_4 = 0 \quad ....(9.13)$$

अनावर्ती दोलक की मूल आवृत्ति, ω, ज्ञात करने के लिये समी.(9.10)से

$$\omega_0^{2-}\omega^2 = -\frac{3}{4}\beta B_1^2$$

$$\omega^2 = \left(\omega_0^2 + \frac{3}{4}\beta B_1^2\right)$$

या
$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{4}\frac{\beta B_1^2}{\omega_0^2}\right)^{1/2} \quad ......(9.14)$$

चूँकि $\frac{3}{4}\frac{\omega B_1^2}{\omega_0^2}$ का मान की तुलना में बहुत कम है 1, इसलिये द्विपद प्रमेय)Binomial theorem)से

$$\omega \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{3}{8}\frac{\beta B_1^2}{\omega_0^2}\right) \quad ...(9.15)$$

समी. (9.9),(9.11)तथा (9.12)से फूरिये गुणांकों के निम्न मान होंगे-

$$A_o = -\frac{\alpha B_1^2}{2\omega_0^2} \quad ...(9.16)$$

$$B_2 = -\frac{\alpha B_1^2}{2\left(\omega_0^2 - 4\omega^2\right)} \quad ...(9.17)$$

$$B_3 = -\frac{\beta B_1^3}{4\left(\omega_0^2 - 9\omega^2\right)} \quad ...(9.18)$$

समी. (9.16), (9.17)व (9.18)से A_o,B_2व B_3 का मान समी. (9.6)में रखने पर

$$y = -\frac{\alpha B_1^2}{2\omega_0^2} + B_1 \cos\omega t - \frac{\alpha B_1^2}{2\left(\omega_0^2 - 4\omega^2\right)}\cos 2\omega t$$

$$-\frac{\beta B_1^2}{4\left(\omega_0^2 - 9\omega^2\right)}\cos 3\omega t \quad ....(9.19)$$

जहाँ, मूल आवृत्ति ω का मान समी) .9.15)द्वारा ज्ञात किया जा सकता है ।

समी. (9.19)अनावर्ती दोलक के विस्थापन का समीकरण है । इस समीकरण से हम अनावर्ती दोलक के लिये निम्न निष्कर्ष प्राप्त करते हैं ।

(i) अनावर्ती पदों की उपस्थिति के कारण दोलक ω मूल आवृत्ति से दोलन करने के अतिरिक्त द्वितीय (second)तथा तृतीय (third)संनादियों (harmonics)से भी दोलन करता है जिनके आयाम घटते क्रम में होते हैं (जब ω व β के मान न्यून हों)।

(ii) यदि गुणांक B_1 का मान अल्प है तो B_1^2 तथा B_1^3 का मान B_1 की तुलना में नगण्य माना जा सकता है । इस स्थिति में दोलक के विस्थापन का समीकरण $y = B_1 \cos \omega t$ प्राप्त होता है । अत: हम कह सकते हैं कि कम आयाम के लिये अनावर्ती दोलक की गति सरल आवर्त गति होती है ।

(iii) समी. (9.17)व (9.18)में आपने देखा है कि उच्च संनादियो के आयाम B_1^2 व B_1^3 के समानुपाती होते हैं । अत: मूल संनादी के आयाम B_1 में वृद्धि होने पर उच्च संनादियो के, आयामों में अधिक तेजी से वृद्धि होती हैं ।

(iv) समी. (9.15)से आप देखते हैं कि जैसे-जैसे आयाम B_1 में परिवर्तन होता है वैसे-वैसे दोलक की आवृत्ति में भी परिवर्तन होता है अर्थात् आवर्तकाल T भी परिवर्तित हो जाता है ।

अनावर्ती दोलक का आवर्तकाल ज्ञात करने के लिये समी. (9.15)से ω का मान सूत्र $T = \frac{2\pi}{\omega}$ में रखने पर

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{\beta B_1^2}{\omega_0^2}\right)$$

$$\simeq \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 - \frac{3}{8}\frac{\beta B_1^2}{\omega_0^2}\right)$$

$$T \simeq T_0\left(1 - \frac{3}{8}\frac{\beta B_1^2}{\omega_0^2}\right)$$

या

$$T \simeq T_0\left(1 - \frac{3}{8}\frac{\beta B_1^2}{\omega_0^2}\right)$$

$$T \simeq T_o\left(1 - \frac{3}{8}\frac{\beta B_1^2 T_0^2}{4\pi^2}\right) \qquad ...(9.20)$$

यहाँ $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$ सरल आवर्त गति करने वाले दोलक का आवर्तकाल है ।

(v) $\alpha \neq 0$ होने पर दोलक अपनी माध्य स्थिति से दूरी $A_o\left(= -\frac{\alpha B_1^2}{2\omega_0^2}\right)$ से विस्थापित हो जाता है अत(आयाम) स्थायी संतुलन की अवस्था के दोनों ओर अधिकतम विस्थापन :का मान बराबर नहीं होता है ।

(vi) चूँकि एक आवर्तकाल के बराबर समय में $\cos \omega t$, $\cos 2\omega t$ आदि पदों का औसत मान शून्य होता है अत: अनावर्ती दोलक का माध्य विस्थापन

$$< y > -\frac{\alpha B_1^2}{2\omega_0^2}$$

अर्थात अनावर्ती दोलक का माध्य विस्थापन आयाम B_1 के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होता है तथा नयी साम्यावस्था की स्थिति पूर्व साम्यावस्था से $-\frac{\alpha B_1^2}{2\omega_0^2}$ दूरी पर होती है ।

साम्यावस्था के विस्थापन का कारण साम्यावस्था के दोनों ओर असमान कार्यरत प्रत्यानयन बल है (यदि $\alpha \neq 0$)। कम प्रत्यानयन बल वाली दिशा में अधिक आयाम होने के कारण इसका स्थितिज ऊर्जा-दूरी वक्र भी सममित (symmetrical)नहीं होता है ।

ठोसों में ऊष्मीय प्रसार को इसके अणुओं के अनावर्ती दोलनों से समझाया जाता है । ठोसों के अणु अपनी माध्य अवस्था के इर्द गिर्द कंपन करते हैं । जब कोई कंपन करता हुआ अणु किसी अन्य अणु के निकट आता है तो वह आकर्षण की अपेक्षा अधिक प्रतिकर्षण बल का अनुभव करता है जिससे वह बाहर की ओर अपनी माध्य स्थिति से विस्थापित हो जाता है अतः यह अनावर्ती दोलक की भाँति व्यवहार करता है ।

जब ठोसों को गर्म किया जाता है तो आप जानते हैं कि अणुओं के कंपन का आयाम और अधिक बढ़ जाता है जिससे अणु अपनी माध्य स्थिति से बाहर की ओर अधिक विस्थापित हो जाता है अर्थात् उसका रेखीय प्रसार होता है । ठोस का ताप जितना अधिक बढ़ाया जाता है उसका उतना ही अधिक रेखीय प्रसार होता है । यह प्रसार अणुओं के माध्य स्थिति से विस्थापन A_0 के समानुपाती होता है । आप जानते हैं कि दोलक की ऊर्जा आयाम के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होती है अर्थात माध्य स्थिति का विस्थापन दोलक की ऊर्जा के समानुपाती होता है। हम यह भी जानते हैं कि दोलक की माध्य ऊर्जा ताप के भी अनुक्रमानुपाती होती है जिससे हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि ठोसों का रेखीय प्रसार ताप के अनुक्रमानुपाती होता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. अनावर्ती दोलक किसे कहते हैं ?

----

2. अनावर्ती दोलक का स्थितिज ऊर्जा वक्र किस प्रकार का होता है -----------------

----

----

3. अनावर्ती दोलक के अवकल समीकरण का हल किस प्रमेय द्वारा ज्ञात कर सकते हैं?

----

4. अनावर्ती दोलक का माध्य विस्थापन A1,आयाम B1 पर किस प्रकार निर्भर करता है?

9.3 सरल लोलक एक अनावर्ती दोलक के रूप में (Simple pendulum as an anharmonic oscillator)

दीर्घ आयाम के लिये सरल लोलक की गति एक सरल आवर्त गति न होकर अनावर्ती गति होती है इस गति का विस्तृत अध्ययन आप इस अनुच्छेद में करेंगे ।

आप जानते हैं कि m द्रव्यमान व l लंबाई के सरल लोलक के गति का समीकरण निम्न होता है -

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\sin\theta$$

यहाँ $I=ml^2$ लटकन बिन्दु (point of suspension)के सापेक्ष दोलक का जड़त्व आघूर्ण है, g गुरूत्वीय त्वरण तथा θ किसी क्षण t पर दोलक का कोणीय विस्थापन है ।

$$\therefore \quad I\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{ml^2}\sin\theta = 0$$

या $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\sin\theta = 0 \quad .....(9.21)$$

यहाँ $$\frac{g}{l} = \omega_0^2$$

आप जानते हैं कि

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{\lfloor 3} + \frac{\theta^5}{\lfloor 5} + ...$$

$$\therefore \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + ...\right)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} + ...\right)$$

θ के किसी भी मान के लिये उसके उच्च घातों के मानों को नगण्य माना जा सकता है। अत:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2 + \frac{\omega_0^2\theta^3}{6} \quad ...(9.22)$$

$$\therefore \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = +\omega_0^2\theta = -\beta\theta^3 \quad ....(9.23)$$

जहाँ $\alpha = 0$ तथा $\beta = -\frac{\omega_0^2}{6}$ है ।

समी. (9.23)अनावर्ती दोलक की अवकल समीकरण है । इसका हल समी. (9.19)में y के स्थान पर θ तथा B_1 के स्थान पर θ_1 रखने पर निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है-

$$\theta = \theta_1 \cos \omega t - \frac{\beta \theta_1^3}{4\left(\omega_0^2 - 9\omega^2\right)} \cos 3\omega t \qquad ....(9.24)$$

समी. (9.24)में β का मान रखने पर

$$\theta = \theta_1 \cos \omega t + \frac{\omega_0^2}{6\times 4} \frac{\theta_1^3}{\left(\omega_0^2 - 9\omega^2\right)} \cos 3\omega t$$

$\omega \simeq \omega_0$ मानने पर तृतीय संनादी का आयाम $\frac{\theta_1^3}{192}$ है अत: अनावर्ती दोलक का विस्थापन

$$\theta = \theta_1 \cos \omega t - \frac{\theta_1^3}{192} \cos 3\omega t \qquad ....(9.25)$$

तथा अनावर्ती दोलक की आवृत्ति ω ज्ञात करने के लिए समी. (9.15)में B_1 स्थान पर θ_1लिखने पर

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3}{8} \frac{\beta \theta_0^1}{\omega_0^1}\right) \qquad ....(9.26)$$

β तथा ω_0 का मान समी. (9.26)में रखने पर

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 - \frac{\theta_1^2}{16}\right)$$

अत: अनावर्ती दोलक का आवर्तकाल

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

या $$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 - \frac{\theta_1^2}{16}\right)^{-1}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 - \frac{\theta_1^2}{16}\right) \qquad ....(9.27)$$

आप जानते हैं कि अल्प आयाम वाले सरल लोलक का आवर्तकाल

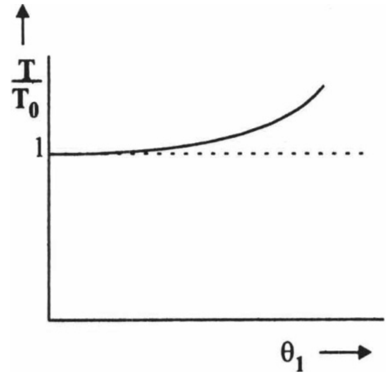
$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad ....(9.28)$$

$$\therefore \quad T = T_o \left(1 + \frac{\theta_2^2}{16}\right) \qquad ....(9.29)$$

अत: समी. (9.29)से स्पष्ट है कि सरल दोलक के आयाम θ_1 में वृद्धि करने पर उसके आवर्तकाल में वृद्धि हो जाती है ।

α शून्य होने के कारण अनावर्ती सरल दोलक की साम्यावस्था मे कोई परिवर्तन नहीं होता है ।

चित्र 9.2 में $\frac{T}{T_o}$ का θ_1 के साथ परिवर्तन प्रदर्शित किया गया है । ।



चित्र -9.2

बोध प्रश्न (Self assessment question)

5. सरल लोलक के कोणीय आयाम में वृद्धि करने पर आवर्तकाल पर क्या प्रभाव होता है ।

उदाहरण 9.1 एक सरल लोलक की लम्बाई 1000 सेमी है तथा g का मान 10 मी ^{2}से / है ।

(i) अल्प आयाम के दोलनों के लिये लोलक का आवर्त काल ज्ञात कीजिये ।

(ii) यदि दोलक का कोणीय आयाम 60° हो तो इसके आवर्तकाल में हुए प्रतिशत परिवर्तन की गणना कीजिये ।

हल : दिया हुआ है l = 1000 सेमी = 10 मी,g =10 मी / से^{2} θ = 60^o

(i) अल्प आयाम के लोलक का आवर्तकाल

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\times 3.14\sqrt{\frac{10}{10}} = 6.28 \text{ से.}$$

(ii) कोणीय आयाम 60° के लिये आवर्तकाल

$$T = T_o\left(1+\frac{\theta^2}{16}\right)$$ रेडियन

$$\theta = 60^o = \frac{\pi}{3}$$

$$T = 6.28\left(1+\frac{\pi^2}{9\times 16}\right)$$

= 6.28(1+0.0685)=6.709 से.$\simeq$ 6.71से.

प्रतिशत परिवर्तन $= \frac{T - T_o}{T_o} \times 100$

$$= \frac{6.71 - 6.28}{6.28} \times 100 = 6.85\%$$

उदाहरण 5 ग्राम द्रव्यमान वाले कण की स्थितिज ऊर्जा 1 **9.2**$y^2$2 + x10^3y^4 जूल है । लघु आयामों के दोलनों के लिये आवृत्ति ज्ञात कीजिये । यदि मूल आवृत्ति के दोलन का आयाम 2 सेमी है तो दोलक की आवृत्ति क्या होगी? प्रथम अधिस्वर की आवृत्ति व आयाम का परिकलन कीजिये ।

हल: दोलक की स्थितिज ऊर्जा U = $5y^2 + 2\times10^3y^4$ जूल

$\therefore$ बल $F = -\frac{dU}{dy} = -10y - 8\times10^3 y^3$

या $10^{-3} \frac{d^{2y}}{dt^2} = -10y - 8\times10^3 y^3$

या $\frac{d^{2y}}{dt^2} = -10^4 y - 8\times10^6 y^3$

$$\frac{d^{2y}}{dt^2} = +10^4 y = -8\times10^6 y^3$$

समी. (9.3)से तुलना करने पर

$\omega^2_0 = 10^4, \alpha = 0$ तथा $\beta = 8 \times 10^6$

अत: ω_0 = 100 रे/से

$\therefore$ रेखीय आवृत्ति $v_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{100}{2\pi} = 15.9$ हर्टज्

दोलक की कोणीय आवृत्ति

$$\omega = \omega_o + \frac{3}{8}\frac{\beta B_1^2}{\omega_o}$$

प्रश्नानुसार $B^1 = 2\times10^{-2}$ मीटर अत:

$$\omega = 100 + \frac{3}{8} \times \frac{8\times10^6 \times \left(2\times10^{-2}\right)^2}{100}$$

ω = 122 रे / से

$\therefore$ रेखीय आवृत्ति $v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{112}{2\times3.14} = 17.8$ हर्टज्

प्रथम अधिस्वर की आवृत्ति 3v = 3 x 17.8

53.4 हर्टज्

प्रथम अधिस्वर का आयाम $= \frac{\beta B_1^2}{32\omega_0^2}$

$$= \frac{8\times10^{6}\times\left(2\times10^{-2}\right)^{3}}{32\times10^{4}}$$

$= 2\times10^{-4}$ मीटर

9.4 सारांश (Summary)

- सरल आवर्त गति में यदि दोलक का आयाम अल्प नहीं होता है तो प्रत्यानयन बल, साम्यावस्था से विस्थापन का रेखीय फलन नहीं होता है इस प्रकार के दोलक को अनावर्ती दोलक कहते हैं ।
- अनावर्ती दोलक की स्थिति ऊर्जा-दूरी वक्र परवलय न होकर विकृत परवलय प्राप्त होता है ।
- अनावर्ती दोलक की गति आवर्त (periodic)गति तो होती है परन्तु सरल आवर्त (simple harmonic)गति नहीं ।
- अनावर्ती दोलक का विस्थापन समय का जटिल आवृत्ति फलन होता है अत: इस अनावर्ती दोलक के गति की समीकरण का हल फूरिये प्रमेय द्‌वारा ज्ञात किया जाता है ।
- फूरिये प्रमेय के अनुसार किसी जटिल आवृत्ति दोलक की गति को सरल आवृत्ति गतियों के योग से व्यक्त कर सकते हैं जिनकी आवृत्तियाँ न्यूनतम या मूल आवृत्ति (ω)के पूर्ण गुणज (integral multiple)होती हैं ।
- अनावर्ती दोलक मूल आवृत्ति से दोलन करने के अतिरिक्त द्‌वितीय व तृतीय संनादियों से भी दोलन करता है जिनकी आवृत्तियाँ मूल आवृत्ति की क्रमश: दो गुनी व तीन गुनी होती है ।
- उच्च संनादियो के आयाम मूल संनादी के आयाम में वृद्धि होने पर बढ़ते हैं ।
- अनावर्ती दोलक के आयाम में परिवर्तन होने पर उसका आवर्तकाल भी परिवर्तित हो जाता है ।
- अनावर्ती दोलक में माध्यावस्था के दोनों ओर विस्थापन व प्रत्यानयन बल का मान बराबर नहीं होता है ।
- ठोसों में अणु अनावर्ती दोलक के रूप में व्यवहार करते हैं तथा गर्म करने पर उनके अणुओं का अपनी माध्य स्थिति से विस्थापन (बाहर को ओर)होता है जिसके कारण उनका प्रसार होता है ।
- दीर्घ आयाम से दोलन करने वाला सरल लोलक अनावर्ती दोलक की तरह व्यवहार करता है ।
- सरल लोलक के आयाम में वृद्धि करने पर उसके आवर्तकाल में अल्प वृद्धि होती है ।

9.5 शब्दावली (Glossary)

अनावर्ती पद	Anharmonic terms
अनावर्ती दोलक	Anharmonic

घटक	Component
जटिल आवृत्ति फलन	Complex periodic function
फूरिये प्रमेय	Fourier theorem
पूर्ण गुणज	Integral multiple
मूल आवृत्ति	Fundamental frequency
रेखीय प्रसार	Linear expansion
संनादियों	Harmonics
सममिति	symmetry

9.6 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1. N.K. Bajaj	The Physics of Waves and Oscillations	Tata Mc Graw- Hill Publishing Company Ltd., Delhi
2. A.P French	Vibrations and Waves	C.B.S Publishers, Dehli
3. S.P. Puri	Fundamentals of Vibrations and Waves	Tata Mc Graw- Hill Publishing Company Ltd., Delhi.
4. शर्मा, सक्सेना व छाबड़ा	दोलन एवम् तरंगे	राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी, जयपुर
5. एम. पीसक्सेना .	दोलन एवम् तरंगें	कॉलेज बुक हाऊस जयपुर
6. पीसिंह व .आर .		
7. एसरावत .एस .		

9.7 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to self assessment question)

1. सरल आवर्त गति में यदि दोलक के दोलन का आयाम अल्प नहीं होता है तो प्रत्यानयन बल साम्यावस्था बिन्दु से विस्थापन के अनुक्रमानुपाती नहीं होता है तथा दोलक की गति आवर्त गति तो होती है परन्तु सरल आवर्त गति नहीं । ऐसे दोलक को अनावर्ती दोलक कहते हैं ।
2. अनावर्ती दोलक का स्थितिज ऊर्जा-दूरी वक्र परवलय आकृत्ति से कुछ विकृत प्राप्त होता है ।
3. अनावर्ती दोलक के अवकल समीकरण का हल फूरिये प्रमेय द्वारा ज्ञात किया जाता है ।
4. अनावर्ती दोलक का माध्य विस्थापन A_1, आयाम B_1 के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होता है।
5. सरल लोलक के कोणीय आयाम में वृद्धि करने पर उसके आवर्तकाल में वृद्धि हो जाती है।

9.8 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type question)

1. अनावर्ती गति से आप क्या समझते है?
2. फूरिये प्रमेय का गणितीय कथन लिखिये ।
3. अनावर्ती दोलक के आयाम में वृद्धि करने पर उच्च संनादियो के आयाम तथा उसकी आवृत्ति पर क्या प्रभाव पड़ता है?
4. अनावर्ती दोलक का स्थितिज ऊर्जा-दूरी वक्र सममित न होने का क्या कारण है?
5. सरल लोलक को अनावर्ती दोलक के रूप में किस स्थिति में माना जा सकता है?

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

6. अनावर्ती दोलक से आपका क्या तात्पर्य है? इसके माध्यावस्था से विस्थापन का व्यंजक प्राप्त कीजिये ।
7. माध्यावस्था से प्राप्त अनावर्ती दोलक के विस्थापन के व्यंजक से प्राप्त निष्कर्षों की व्याख्या कीजिये ।
8. सिद्ध कीजिये कि अनावर्ती दोलक में दोलक अपनी माध्यावस्था से विस्थापित हो जाता है तथा यह विस्थापन दोलक के आयाम के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होता है ।
9. दीर्घ आयाम वाले सरल लोलक को अनावर्ती लोलक के रूप में समझाइये तथा इसके लिये आवर्तकाल का व्यंजक प्राप्त कीजिये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

10. एक ग्राम द्रव्यमान वाले कण की स्थितिज ऊर्जा $U = 10^3y^2+10^5y^4$ जूल है । लघु आयामों के दोलनों के लिये आवृत्ति क्या होगी? प्रथम अधिस्वर की आवृत्ति व आयाम का परिकलन कीजिये ।

(उत्तर: 225 हर्टज्, 696 हर्टज्, 5 x 10-5 मीटर)

11. एक ग्राम के दोलक की स्थितिज ऊर्जा $5000y^2+200y^4$ अर्ग है । लघु आयाम के दोलनों के लिये आवृत्ति ज्ञात कीजिये। यदि मूल आवृत्ति के दोलन का आयाम 3 सेमी है तो दोलक की आवृत्ति क्या होगी । प्रथम अधिस्वर की आवृत्ति तथा आयाम का परिकलन कीजिये ।

(उत्तर: 100 रे/से., 381 रे/से, 0.04 सेमी)

12. किसी सरल लोलक के आवर्तकाल में प्रतिशत परिवर्तन की गणना कीजिये यदि उसका कोणीय आयाम 30^o हो ।

(उत्तर: 1.7%)

13. एक 100 सेमी लम्बाई के सरल लोलक के एक सिरे से 100 ग्राम का द्रव्यमान लटकाया गया है । यदि लोलक अपनी संतुलन की स्थिति के इधर उधर 45° कोणीय आयाम से दोलन करता है तो इसके दोलनों की आवृत्ति ज्ञात कीजिये ।

(उत्तर: 0.48 हर्टज)

इकाई-10

युग्मित दोलक-(Coupled Oscillator-I)

इकाई की रूपरेखा

10.0 उद्देश्य
10.1 प्रस्तावना
10.2 युग्मित दोलक
10.3 युग्मित दोलक की गति एवं इसकी समीकरण
10.4 प्रसामान्य विधाएं
10.5 प्रसामान्य विधाएं ज्ञात करने की व्यापक वैश्लेषिक विधि
10.6 सारांश
10.7 शब्दावली
10.8 संदर्भ ग्रन्थ
10.9 बोध प्रश्नों के उत्तर
10.10 अभ्यासार्थ प्रश्न

10.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- युग्मित दोलक के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे;
- युग्मित दोलक से सम्बंधित प्रसामान्य निर्देशांक, प्रसामान्य विधा एवं विन्यास समझ सकेंगे;
- वैश्लेषिक विधि समझने के बाद किसी भी युग्मित दोलक की विधाएं ज्ञात करने में सक्षम हो सकेंगे ।

10.1 प्रस्तावना (introduction)

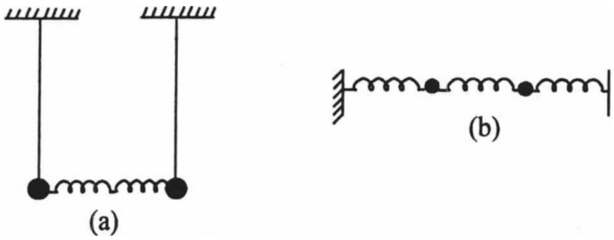
इकाई 1 से 9 तक आपने एक दोलक के दोलनों का स्वतन्त्र अवस्था, अवमंदन अवस्था एवं चालित बल के प्रभाव में विस्तृत अध्ययन किया है । दो एक जैसे दोलकों को यदि युग्मित कर दे तब इस तंत्र के दोलन किस प्रकार के होंगे? इसकी गति की समीकरण किस प्रकार से लिखना उचित होगा? प्रकृति में युग्मित दोलकों के उदाहरण में आप पायेंगे कि दोलकों की संख्या दो न होकर अत्यधिक होती है, जिनका विश्लेषण सरल नहीं है । सरलता की दृष्टि से, प्रारम्भ में दो सरल लोलकों के युग्मन से बने युग्मित दोलक के बारे में अध्ययन करना उपयोगी होगा ।

सबसे पहले अनुच्छेद 10.2 में यह समझेंगे कि युग्मित दोलक क्या है ? इसके विभिन्न उदाहरणों से आपको अवगत कराया जायेगा । आगामी अनुच्छेद 10.3 में युग्मित दोलक के एक सरल उदाहरण युग्मित लोलक के बारे में वर्णन करेंगे और इसकी गति की समीकरणों को साधारण रूप में लिखेंगे । इन्हें हल करने के लिये प्रसामान्य निर्देशांकों (normal

coordinates)का प्रयोग करेंगे । अनुच्छेद 10.4 में युग्मित दोलक की प्रसामान्य विधाएं (normal coordinates), एवं विन्यास के बारे विस्तार से समझेंगे । अन्तिम अनुच्छेद व 10.5 में हम वैश्लेषिक विधि का वर्णन करेंगे ताकि आप किसी भी प्रकार के युग्मित दोलक की प्रसामान्य विधाओं की आवृत्तियाँ एवं विन्यास ज्ञात कर सकें ।

10.2 युग्मित दोलक (Coupled oscillator)

इकाई 1 तथा 2 में आपने निकायों के स्वतन्त्र दोलनों का अध्ययन किया था । इस प्रकार के निकायों के दोलन एकल प्राकृतिक आवृत्ति द्वारा अभिलक्षित होते है तथा इनकी गति प्रदर्शित करने के लिये एक चर की आवश्यकता होती है । यदि दो एक समान दोलकों का किसी तरह से युग्मन किया जाये तो इस प्रकार के निकाय को युग्मित दोलक कहते हैं । युग्मित दोलक के कतिपय उदाहरण निम्न चित्र 10.1 में दर्शाये गये हैं ।



चित्र 10.1 युग्मित दोलकों के उदाहरण

चित्र 10.1 (a)में दो साधारण लोलकों के गोलकों (bobs)को एक स्प्रिंग के माध्यम से युग्मित किया गया है । चित्र 10.1(b)में दो द्रव्यमानों को एक दूसरे से तीन स्प्रिगों के माध्यम से जोड़ा गया है, बीच वाली स्प्रिंग युग्मन का कार्य करती है ।

इस तरह के तंत्रों की स्वतन्त्रता की कोटि (degree of freedom)दो होती हैं जब इन निकायों के गतिशील भाग एक तल में दोलन करते है तो इनकी गति को पूर्ण विनिर्दिष्ट (specify)करने के लिये दो चरों (variables)की आवश्यकता होती । युग्मित दोलक के उपरोक्त उदाहरणों में दो चर दो लोलकों या दो द्रव्यमानों के विस्थापन है । इन उदाहरणों में दोलक आपस में दृढ़ता से युग्मित है । अत: दोनों ही दोलकों को एक जैसा मानकर ही विश्लेषण करना चाहिये।

प्रकृति में आपको विभिन्न प्रकार के युग्मित निकायों के बारे में ही वृतान्त मिलता है । पूर्ण विलगित (isolated)अवस्था में दोलक के उदाहरण नाम मात्र को ही मिलेंगे । उदाहरण के लिये डोरी के बारे में सोचे, तो आप कह सकते है कि इसमें अनेकानेक कण है जो आपस में एक दूसरे से युग्मित हैं । इसी प्रकार क्रिस्टल जालक (crystal lattice)में भी इसके परमाणु विभिन्न तरह के दोलन ठीक उसी प्रकार से करते हैं जैसे डोरी में दोलन होते हैं । तरंग गति भी एक और अन्य उदाहरण है जिसके बारे में आप इकाई 12-13 में अध्ययन करेंगे ।

स्वतन्त्रता को कोटि से यह तात्पर्य हैं कि तंत्र कि गति को व्यक्त करने चरों कि आवश्यकता हैं उदाहरण: एक विभीय दोलक की स्वतन्त्रता की कोटि एक हैं । यदि तंत्र वृताकार पाठ पर गति करे तो इसकी स्वतन्त्रता की कोटि दो होगी ।

जैसा कि आप जानते हैं कि डोरी कई विभिन्न तरीकों से कम्पन करने में सक्षम है । किसी निकाय के विभिन्न तरीके से कम्पन करने को निकाय की विधा (mode)कहते हैं । हर विधा की अपनी विशिष्ट आवृत्ति होती है । विभिन्न विधाओं के होने तथा प्रत्येक विधा की आवृत्ति की गणना किस प्रकार से करेंगे ? इसी प्रकार ठोस भी कई परमाणुओं से बने हैं जो अपनी साम्यवस्था के इर्द-गिर्द कम्पायमान रहते हैं । हर परमाणु एक दोलक की तरह कार्य करता

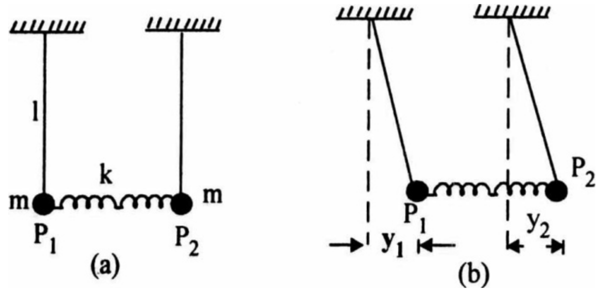
है । परमाणु की यह गति पड़ोसी परमाणु को प्रभावित करती है । इस प्रकार ठोसों में परमाणु युग्मित होते हैं । अत: हमें इस विशिष्ट प्रश्न का उत्तर चाहिये कि युग्मन का प्रभाव व्यक्तिगत (individval)दोलक पर किस प्रकार से होता है? इनका उत्तर जानने के लिये हमें युग्मित - दोलकों का विस्तार से अध्ययन करना होगा ।

बोध प्रश्न(self question)

1. युग्मित दोलक की स्वतन्त्रता की कोटि कितनी होती हैं?

10.3 युग्मित दोलक की गति एवं इसकी समीकरण (Motion of coupled oscillator and its equation)

एक अति सरल उदाहरण से प्रारम्भ करते हैं । एक तंत्र की कल्पना करते हैं जिसमें दो समरूप साधारण लोलक P_1 व P_2 हैं, तथा प्रत्येक का द्रव्यमान m तथा लम्बाई l है । इन्हें बल नियतांक K वाली एक स्प्रिंग से युग्मित कर रखा है। तंत्र के दोनों गोलों के मध्य दूरी इस प्रकार से है कि स्प्रिंग सामान्य (relaxed)अवस्था में रहे, जैसा कि चित्र 10.2(a)में दर्शाया गया है, अर्थात स्प्रिंग की प्राकृतिक लम्बाई दोनों सरल लोलकों के मध्य दूरी के बराबर है । संतुलन अवस्था में लोलकों में विस्थापन शून्य है । यदि तंत्र को इसकी साम्यावस्था से थोड़ा सा विक्षुब्ध (disturbed)किया जाये तो यह चित्र 10.2(b)जैसा प्रतीत होगा । माना कि किसी क्षण t पर इन लोलकों का संतुलन अवस्था के सापेक्ष विस्थापन क्रमश: y_1 और y_2 हैं ।



चित्र 10.2दो एक समान युग्मित दोलक

स्प्रिंग का तानित (stretched)अथवा सम्पीड़ित (compressed)होना, इस शर्त पर निर्भर करेगा कि $y_2>y_1$ या $y_2<y_1$। स्प्रिंग में तनाव का परिमाण $k(y_2-y_1)$होगा । यदि $y_2>y_1$ हो तो तनाव, लोलक P_2 के त्वरण के विपरीत तथा लोलक P_1 के त्वरण की दिशा में कार्य करेगा । किसी तल में लघु दोलनों के लिये लोलक P_1 व P_2, की गति समीकरणें निम्न होंगी ।

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\frac{mgy_1}{I} + k\left(y_2 - y_1\right) \quad ....(10.1)$$

$$m\frac{d^2y_2}{dt^2} = -\frac{mgy_2}{I} - k\left(y_2 - y_1\right) \quad ....(10.2)$$

उपरोक्त समी. (10.1)तथा (10.2)सरल आवर्त गति को प्रदर्शित नहीं करती हैं क्योंकि लोलक का त्वरण इसके स्वंय के विस्थापन के समानुपाती न होकर दूसरे लोलक के विस्थापन पर भी निर्भर करता है । यदि लोलकों के मध्य स्प्रिंग न हो तो दोनों लोलक सरल आवर्त गति करेंगे तथा इनकी कोणीय आवृत्ति होगी -

$$\omega_o = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

कोणीय आवृत्ति ω_o के पदों में समी. (10.1)व (10.2)को निम्न रूप से लिखा जा सकता है ।

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\omega_0^2 y_1 + \frac{k}{m}(y_2 - y_1) \qquad \text{... (10.3)}$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = -\omega_0^2 y_2 - \frac{k}{m}(y_2 - y_1) \qquad \text{....(10.4)}$$

प्रत्येक लोलक पर युग्मन का प्रभाव ज्ञात करने के लिये उपरोक्त समीकरणों को y_1 और y_2 के लिये हल करना होगा । इन समीकरणों को सीधे हल करने के अपेक्षाकृत हम दो नये निर्देशांकों का चयन करते हैं ।

$X = y_1 + y_2$

तथा $Y = y_2 - y_1$

इस उपगमन)approach(का महत्व आपको स्वतही इस इकाई में स्पष्ट हो जायेगा । : (10.3) .समीव (10.4)का योग करने पर

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{d^2y^2}{dt^2} = +\omega_0^2 (y_2 - y_1) = 0$$

या
$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2 X = 0 \qquad \text{....(10.5)}$$

समीं. (10.3)के समी. (10.4)में से घटाने पर

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} - \frac{d^2y_1}{dt^2} = -\omega_0^2 (y_2 - y_1) = -\frac{2k}{m}(y_2 - y_1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_0^2 Y - \frac{2k}{m} Y$$

या

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \left(\omega_0^2 \frac{2k}{m}\right) y = 0 \qquad \text{....(10.6)}$$

समी. (10.5)तथा (10.6)सरल आवर्त गति की चिर-परिचित समीकरणें हैं, जिनकी आवृत्तियाँ क्रमशः $\omega_1 = \omega_0$ तथा $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2k}{m}}$ हैं ।

अतः आप कह सकते हैं कि युग्मित तंत्र की गति को दो प्रसामान्य निर्देशांको (narmal coordinates)X व Y के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है, जिसमें प्रत्येक एक सरल आवर्त गति का वर्णन करती है । ये दोनों गतियाँ एक दूसरे से पूर्ण रूप से अयुग्मित तथा स्वतन्त्र हैं

यद्यपि तंत्र के गतिशील भाग नहीं हैं । अर्थात्, एक प्रकार की गति (X या Y)दूसरे प्रकार की गति (Y या X)के बिना भी अस्तित्व में रह सकती है ।

यदि Y = 0 हो तो हर समय $y_2 = y_1$ रहेगा । इसलिये तंत्र की गति समी (10.5)द्वारा प्रदर्शित होगी । इसके दोलनों की कोणीय आवृत्ति

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

है जो कि किसी भी लोलक की विलगित अवस्था में दोलन की आवृत्ति के बराबर है । स्प्रिंग का प्रभाव यहाँ अनुपस्थित है । यह इसलिये है क्योकि दोनों लोलक एक ही कला में हैं और पूरे गति काल में स्प्रिंग अपनी प्राकृतिक लम्बाई में रहती है । देखिये चित्र 10.3 (a)।

यदि X = 0 हो तो, हर समय $y_1 = y_2$ रहेगा और गति समी. (10.6)द्वारा निर्धारित होगी । इस स्थिति में कोणीय आवृत्ति

$$\omega_2 = \left(\omega_0^2 + \frac{2k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ω_1 की तुलना में अधिक है । दोनों लोलक कोणीय आवृत्ति ω_2 से सरल आवर्त गति कर रहे हैं तथा सदैव ही विपरीत कला में हैं । गति के दौरान स्प्रिंग या तो तानित (extended)है अथवा सम्पीड़ित (compressed), अत: कहा जा सकता है कि इस गति में युग्मन प्रभावी है ।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

2. युग्मित दोलक एवं एकल दोलक में प्रमुख अन्तर लिखिये ।

उदाहरण 10.1 दो एक समान द्रव्यमान (m)व लम्बाई (l)के दो लोलकों को एक k बल नियतांक की स्प्रिंग से युग्मित किया गया है । यदि m = 0.1 किलोग्राम, l = 1 मीटर तथा k = 0.1 न्यूटन / मीटर हो तो दोनों विधाओं की आवृत्तियाँ ज्ञात करो ।

हल: प्रथम विधा के लिये $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9.8}{0.1}} = 7\sqrt{2} = 9.9$ रेडियन / से

द्वितीय विधा के लिये $\omega_2 = \left(\omega_1^2 + \frac{2k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$= \left(98 + \frac{2\times 0.1}{0.1}\right)^{\frac{1}{2}} = 10 \text{ रेडियन / से}$$

अत: विधाओं की कोणीय आवृत्तियाँ क्रमश: 99 तथा 10 रेडियन / से हैं ।

10.4 प्रसामान्य विधाएं (Normal modes)

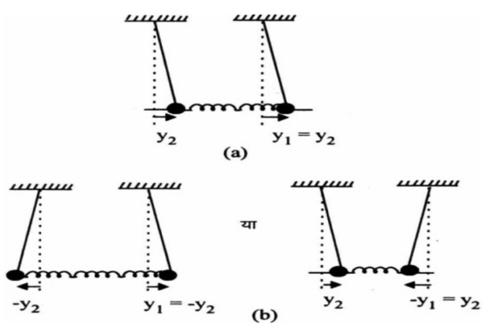
किसी युग्मित निकाय की गति का वर्णन करने के लिये X व Y के चयन का महत्व यह है कि इन चरों के रूप में व्यक्त करने पर गति समीकरण एक आश्रित चर (one dependent variable)वाली रैखिक अवकल समीकरण के रूप में प्राप्त हो जाती है । इन चरों को प्रसामान्य निर्देशांक कहते हैं । अत: "किसी युग्मित निकाय के प्रसामान्य निर्देशांक वे चर है जिनके पदों में निकाय की गति को एक घाती अवकल समीकरण के रूप में लिखा जा सके तथा प्रत्येक समीकरण एक ही प्रकार के चर से युक्त हो । अनुच्छेद 10.3 से पुन: आप यह दोहरा सकते हैं कि

$$X = y_2 = y_1$$

$$Y = y_2 - y_1$$

दो प्रसामान्य निर्देशांक है तथा समी. (10.5)व (10.6)एक चर आश्रित समीकरणें हैं ।

सरल आवर्त गति से संबंधित प्रत्येक प्रसामान्य निर्देशांक को युग्मित निकाय की एक प्रसामान्य विधा कहते है । प्रत्येक प्रसामान्य विधा की अपनी एक विशिष्ट आवृत्ति होती है, इसेप्रसामान्य विधा आवृत्ति कहते हैं । निकाय के गतिशील भागों के विस्थापनों का अनुपात $\frac{y_2}{y_1}$ किसी भी प्रसामान्य विधा के लिये नियत रहता है तथा इसे निकाय की उस विधा का विन्यास (configuration)कहते है । अनुच्छेद 10.3 के उदाहरण से आप देख सकते हैं कि वहाँ दो प्रसामान्य विधाऐं हैं, एक प्रसामान्य निर्देशांक X व दूसरा प्रसामान्य निर्देशांक Y होगा । प्रथम प्रसामान्य विधा का विन्यास चित्र 10.3 (a)में दर्शाया गया है । दोनों ही लोलकों (दीये अथवा बाँये)को बराबर विस्थापित करते है ताकि $\frac{y_2}{y_1}$ का मान 1 रहे । इस स्थिति से इन्हें छोड़ने पर प्रत्येक लोलक एक ही आवृत्ति से सरल आवर्त गति करता है, तथा दोनों एक ही कला में रहते हैं व गति के पूरे समय में आयाम अनुपात $\frac{y_2}{y_1}$ इकाई के बराबर रहता है । इसे निकाय की 'समान कला विधा' कहते है।



चित्र 10.3 (a)एक ही कला - में विन्यास
(b)विपरीत कला-विधा में विन्यास

द्वितीय विधा का विन्यास चित्र व 10.3(b)में दर्शाया गया है । लोलकों को विपरीत दिशा में बराबर मात्रा में विस्थापित किया जाता है ताकि $\frac{y_2}{y_1}$ का मान - 1 हो । विस्थापित स्थिति से इन्हें छोड़ने पर, प्रत्येक लोलक सरल आवर्त गति करता है और इनकी कोणीय आवृत्ति

$$\omega^2 = \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

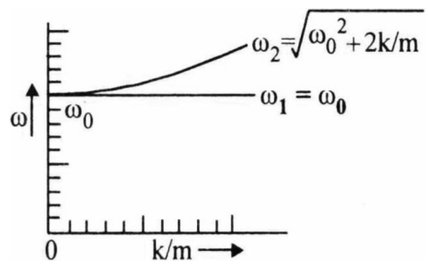
होती है; वे सदैव विपरीत कला, अर्थात 180° के कलान्तर में रहते हैं तथा सम्पूर्ण गति काल में $\frac{y_2}{y_1}$ का मान - 1 रहता है । दोनों ही लोलक अपनी अपनी साम्यावस्थाओं से एक साथ गुजरते है परन्तु इसके उपरान्त इनके विस्थापन का चिन्ह विपरीत रहता है ।

अत: आप इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि युग्मित दोलक की किसी भी प्रसामान्य विधा में दोनों गतिशील भाग एक ही आवृत्ति से तथा एक ही कलान्तर से सरल आवर्त गति सम्पन्न करते हैं ।

एक ऐसे तंत्र जिसमें दो दोलक युग्मित हैं, इसकी स्वतन्त्रता की कोटि दो होने के कारण इस तंत्र को दोलित करने के मात्र दो ही तरीके है । यह किस आवृत्ति से दोलन करेगा यह इस पर निर्भर करेगा कि निकाय को किस एक तरीके से विक्षुब्ध अथवा उत्तेजित किया जाता है । यदि निकाय को इन दो तरीकों के अलावा किसी अन्य तरीके से उत्तेजित किया जावे या गति प्रदान की जावें तो दोलकों के आयामों में कोई निश्चित अनुपात नहीं रहेगा और गति भी आवर्त नहीं रहेगी । अत: यह कहा जा सकता है कि युग्मित दोलक के निकाय की गति के लिये मात्र दो ही तरीके है जिन्हें दोलन की प्रसामान्य विधाएं कहा गया है ।

प्रसामान्य विधाओं की आवृत्ति पर युग्मन नियतांकों का प्रभाव

चित्र 10.4 में युग्मित दोलक की दो प्रसामान्य विधाओं की आवृत्तियों का युग्मन स्प्रिंग के बल नियतांक और द्रव्यमान m पर निर्भरता को दर्शाया गया है । जैसे -जैसे युग्मन स्प्रिंग का बल नियतांक (कड़ापन)बढ़ता है युग्मित दोलक की प्रसामान्य विधा आवृत्तियो में अन्तर बढ़ता जाता है । ठीक इसी तरह का व्यवहार उस स्थिति में भी प्राप्त होता है जब प्रत्येक दोलक का द्रव्यमान कम किया जाता है ।



चित्र 10.4 दो प्रसामान्य विधाओं की आवृतियों का k / m के साथ वक्र

युग्मित दोलक की दोनों प्रसामान्य विधायें स्वतन्त्र होती हैं अत: किसी भी एक विधा में युग्मित दोलक की ऊर्जा निम्न समीकरण से दी जाती है ।

विधा. 1 में कुल ऊर्जा

$$E_x = \frac{1}{2}m\left(\frac{d^2X}{dt^2}\right) + \frac{1}{2}kX^2 \quad .....(10.7)$$

विधा 2 में कुल ऊर्जा

$$E_y = \frac{1}{2}m\left(\frac{d^2Y}{dt^2}\right) + \frac{1}{2}kY^2 \quad ....(10.8)$$

बोध प्रश्न (Self assessment question)

3. युग्मित दोलक के प्रत्येक दोलक का द्रव्यमान m समान रूप से कम करने पर इसकी इकाई दो विधाओं की आवृतियों के अंतर पर क्या प्रभाव होगा ?

10.5 प्रसामान्य विधाएं ज्ञात करने की व्यापक वैश्लेषिक विधि (General analytical method for determining normal modes)

मानाकि किसी युग्मित दोलक के दो घटक दोलनों का किसी समय t पर विस्थापन क्रमशः y_1 तथा Y_2 है । जैसा कि आप अनुच्छेद 10.3 में पढ़ चुके हो कि इन घटक दोलकों के त्वरण इनके विस्थापन y_1,y_2 के फलन होते हैं । अत: इनके त्वरणों को व्यापक रूप से निम्न रूप में लिखा जा सकता है-

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = a_{11}y_1 - a_{12}y_2 \quad ...(10.9)$$

$$\frac{d^2y_2}{dt_2} = -a_{21}y_1 - a_{22}y_2 \quad ...(10.10)$$

यहाँ गुणांक a_{11},a_{12},a21 व a_{22} दोलकों के द्रव्यमान व स्प्रिंग के बल नियतांक आदि पर निर्भर करते हैं ।

समी. (10.9)व (10.10)को हल करने के लिये हम यह मानते हैं कि युग्मित दोलक किसी एक विधा में दोलन कर रहा है । अर्थात दोनों दोलक एक समान आवृत्ति और नियत कलान्तर से दोलन कर रहे है अत: उनके विस्थापनों की समीकरण निम्न रूप से लिखी जा सकती हैं-

$$Y_1 = a\cos(\omega t + \phi) \quad ...(10.11)$$

$$Y_2 = b\cos(\omega t + \phi) \quad ....(10.12)$$

a, b, ω,तथा ϕ चारों अज्ञात नियतांक हैं । समी (10.11)तथा समी. (10.12)को दो बार अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\omega^2 y_1$$

तथा $\frac{d^2y_2}{dt_2} = -\omega^2 y_2$

उपरोक्त मानों का प्रयोग समी. (10.9)व (10.10)में करने पर

$-\omega^2 y_1 = -a_{11}y_1 - a_{12}y_2$

$-\omega^2 y_1 = -a_{21}y_1 - a_{22}y_2$

या $(a_{11}-\omega^2)y_1 = a_{12}y_2$ ...(10.13)

$(a_{22}-\omega^2)y_2 = a_{21}y_1$ ...(10.14)

समी.(10.13)व (10.14)से $\frac{y_2}{y_1}$ का मान लिखने पर

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\omega_2 a_{11}}{a_{12}}\omega \quad ....(10.15)$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a^{21}}{\omega^2 a_{22}} \quad ....(10.16)$$

समी. (10.15)व (10.16)से

$$\frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}}$$

या $\omega^4 - \omega^2\ (a_{11}+a_{22})+a_{11}a_{22}=a_{12}a_{21}$

या $\omega^4 - \omega^2\ (a_{11}+a_{22})+a_{11}a_{22}=a_{12}a_{21}=0$ ....(10.17)

उपरोक्त समीकरण के निम्न दो हल:-

यहाँ ऐसा प्रतीत होता है कि ω के चार मान संभव है। ω_1^2 के मान के वर्गमूल से प्राप्त आवृति घनात्मक व ऋणात्मक चिन्ह के साथ प्राप्त होगी। ऋणात्मक चिन्ह वाली आवृति का कोई महत्व नहीं है। अंत: ω2 के कुल 2 ही मान प्राप्त ह्रोगें।

$$\omega_2^1 = \frac{1}{2}\left[\left(a_{11}+a_{22}\right) - \sqrt{\left(a_{11}+a_{22}\right)^2 - 4\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(a_{11}+a_{22}\right) - \sqrt{\left(a_{11}-a_{22}\right)^2 - 4a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}}\right] \quad ....(10.18)$$

$$\omega_2^1 = \frac{1}{2}\left[\left(a_{11}+a_{22}\right) + \sqrt{\left(a_{11}+a_{22}\right)^2 - 4\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(a_{11}+a_{22}\right) + \sqrt{\left(a_{11}-a_{22}\right)^2 + 4a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right. \quad .....(10.19)$$

अत: युग्मित दोलक की प्रसामान्य विधा में दोलन की दो विभिन्न आवृत्तियाँ ω_1 और ω_2 ही संभव है । इन आवृत्तियों के मान समी. (10. व 18)व (10. व 19)से प्राप्त किये जा सकते हैं । इन्हें प्रसामान्य विधाओं की प्रसामान्य आवृत्तियाँ कहते हैं । आवृत्ति ω_1 से संबंधित विधा को विधा- 1 तथा आवृत्ति ω_2 से संबंधित विधा को विधा-2 कहते हैं इन विधाओं में y_2 व y_1 में संबंध ज्ञात करने के लिये हम समी. (10. 18)तथा (10. व 19)का उपयोग समी. (10. 15)में करने पर

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{\omega_{11}^2}{a_{12}} \qquad \{\text{यहाँ } \omega = \omega_1\}$$

तथा

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{\omega_{11}^2}{a_{12}} \qquad \{\text{यहाँ } \omega = \omega_2\}$$

चित्र व 10.2 में दिखाये युग्मित दोलक के लिये

$$a_{11}=a_{22}=\omega_0^2 + \frac{k}{m}$$

तथा $a_{12}=a_{21}=\frac{-k}{m}$

अत: विधा- 1 के लिये आवृत्ति

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left[(a_{11}+a_{22}) - \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\left(\omega_0^2 + \frac{k}{m}\right) - \sqrt{0 + 4\left(\frac{k^2}{m^2}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\left(\omega_0^2 + \frac{k}{m}\right) - \frac{2k}{m}\right]$$

$$= \omega_0^2$$

इसी प्रकार विधा- 2 की आवृत्ति

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}\right]$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[2\left(\omega_0^2 + \frac{k}{m}\right) + \frac{2k}{m}\right]$$

$$= \omega_0^2 + \frac{2k}{m}$$

विधा के लिए $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$ का मान

$$= \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}}$$

$$= \frac{\omega_0^2 - \frac{k}{m} - \omega_0^2}{\frac{-k}{m}}$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = 1$$

विधा-2 के लिये $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$ का मान

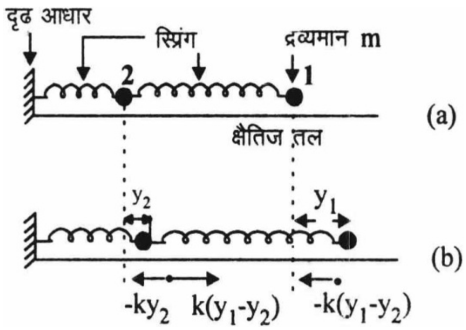
$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)_{\text{विधा2}} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}}$$

$$\frac{\omega_0^2 + \frac{2k}{m} - \omega_0^2 - \frac{k}{m}}{\frac{-k}{m}} = -1$$

यहाँ इस वैश्लेषिक विधि से वैसे ही परिणाम प्राप्त हुये है जैसा युग्मित लोलक के लिये अनुच्छेद 10.3 में आप पढ़ चुके हैं । इस विधि का प्रयोग हम किसी भी प्रकार के अन्य युग्मित दोलकों के लिये प्रयोग कर सकते हैं ।

उदाहरण 10.2 एक घर्षणरहित क्षैतिज तल पर समान द्रव्यमान (m)के दो पिण्ड, समान स्प्रिंग नियतांक (k)की दो स्प्रिंगों से तथा दृढ आधार से चित्र के अनुसार जुड़े हैं । इस युग्मित दोलक की प्रसामान्य विधाओं की आवृत्तियाँ ज्ञात कीजिये । दोनों द्रव्यमान पिण्डों के आयामों का अनुपात भी ज्ञात कीजिये ।

हल :



माना किसी समय पर दोनों द्रव्यमानों का विस्थापन क्रमशः y_1 व y_2 है । चित्र में दोनों द्रव्यमानों पर कार्यरत बलों के परिणाम व दिशा दर्शायी गयी है । इन द्रव्यमानों की गति समीकरणें निम्न होंगी

$$m\frac{d^2y_1}{dt^2} = -k(y_1 - y_2)$$

$$m\frac{d^2y_2}{dt^2} = -ky_2 + k(y_1 - y_2)$$

आप समी. (10.9)व (10.10)से जानते है कि

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -a_{11}y_1 - a_{12}y_2$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = -a_{21}y_1 - a_{22}y_2$$

इनकी परस्पर तुलना करने पर

$$a_{11}\frac{k}{m}, a_{12} = a_{12} = \frac{-k}{m}, a_{22} = \frac{2k}{m}$$

समी. (10.18)ऐ व (10.19)से प्रसामान्य विधाओं की आवृत्तियाँ होगी '

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{3k}{m} - \sqrt{\frac{k^2}{m^2} + 4\frac{k^2}{m^2}}\right] = \frac{1}{2}\left[3-\sqrt{5}\right]\frac{k}{m}$$

$$\omega_1 = \left[\frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(3-\sqrt{5}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

तथा $$\omega_2 = \left[\frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(3-\sqrt{5}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

दोनों दोलकों के आयाम का अनुपात विधा-1 में

$$\frac{b}{a} = \frac{\omega^2 - a_{11}}{a^{12}}$$

$$= \frac{\left(3-\sqrt{5}\right)\frac{k}{2m} - \frac{k}{m}}{-\frac{k}{m}}$$

$$= -\frac{3-\sqrt{5}}{2} - 1 = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{5-1}\right)\right]$$

दोनों दोलकों के आयाम का अनुपात विधा-2 में

$$\frac{b}{a} = \frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}}$$

$$\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)\frac{k}{2m} - \frac{k}{m}}{\frac{-k}{m}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5+1}\right)$$

अत: प्रसामान्य विधाओं की आवृत्तियां $\left[\frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(3\mp\sqrt{5}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ तथा आयामों के अनुपात $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5\mp1}\right)$ है ।

10.8 सारांश (summary)

- यदि दो स्वतन्त्र दोलक का किसी तरह से युग्मन कर दिया जावें तो ऐसे तन्त्र को युग्मित दोलक कहते हैं ।
- युग्मित दोलक की स्वतन्त्रता की कोटि दो होती है तथा इसकी गति को पूर्ण विनिर्दिष्ट करने के लिये दो चरों की आवश्यकता होती हैं ।

- युग्मित दोलक की गति को दो प्रसामान्य निर्देशांकों x व y से प्रदर्शित किया जाता है, जिसमें प्रत्येक सरल आवर्त गति का वर्णन करती है ।
- युग्मित दोलक में दो प्रसामान्य विधाऐं होती है । प्रत्येक प्रसामान्य विधा की अपनी आवृत्ति होती है । एक प्रसामान्य विधा की आवृत्ति स्वतन्त्र एकल दोलक की आवृत्ति के तुल्य तथा दूसरी विधा की आवृत्ति इससे अधिक होती है ।
- स्प्रिंग नियतांक में वृद्धि होने पर अथवा दोलकों का द्रव्यमान कम होने पर युग्मित दोलक की दो विधाओं की आवृत्तियों के अन्तर में वृद्धि होती है ।
- किसी भी प्रकार के युग्मित दोलक के विश्लेषण के लिये वैश्लेषिक विधि अति उपयोगी है ।

10.7 शब्दावली (Glossary)

एकल आश्रित चर	One dependent variable
क्रिस्टल जालक	crystal lattice
चरों	variables
तानित	Stretched
पुनर्निवेश	Feedback
सामान्य निर्देशांकों	Normal coordinates
प्रसामान्य विधाएं	Normal modes
युग्मित दोलक	coupled oscillator
व्यक्तिगत	Individual
वैश्लेषिक विधि	Analytical method
विन्यास	Configuration
विनिर्दिष्ट	specify
विलगित	Isolated
विक्षुब्ध	Disturbed
स्वतन्त्रता की कोटि	Degree of freedom
सम्पीड़ित	Compressed

10.8 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1. N.K Bajaj	The Physics of Waves and Oscillation	Tata Mc Graw-Hill Publishing Company Ltd,New Delhi
2. एम.पीसक्सेना ., पीसिंह .आर .,	दोलन एवं तरंगे	कॉलेज बुक हॉउस जयपुर

एसरावत .एस .

10.9 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment questions)

1. युग्मित दोलक की स्वतन्त्रता की कोटि 2 होती है क्योंकि प्रत्येक दोलक के विस्थापन को प्रदर्शित करने के लिये एक चर चाहिये ।
2. युग्मित दोलक को दो विभिन्न विधाओं से उत्तेजित किया जा सकता है, अतः दो आवृत्तियाँ होती हैं । प्रसामान्य निर्देशांकों की सहायता से दो सरल आवर्त गतियाँ लिखी जा सकती हैं । जबकि एकल दोलक में आवृत्ति व समीकरण एक-एक ही होती है ।
3. दो विधाओं की आवृत्तियों के अन्तर में वृद्धि होगी ।

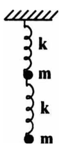
10.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (very short answer type question)

1. युग्मित दोलक किसे कहते हैं?
2. युग्मित दोलक में प्रसामान्य निर्देशांकों के चयन का क्या महत्व है?
3. प्रसामान्य विधा किसे कहते हैं ।
4. प्रसामान्य विधा के विन्यास के क्या तात्पर्य है? युग्मित दोलक के कौन से दो विन्यास है?

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type question)

5. दो एक समान सरल लोलकों के एक प्रबल नियतांक की स्प्रिंग से युग्मित किया जाता है। इस युग्मित दोलक की गति समीकरण लिखिये और इन्हें विभिन्न स्थितियों के लिये हल कीजिये ।
6. दो समान m द्रव्यमान को k बल नियतांक वाली एक जैसी तीन स्प्रिंगों से जोड़ा जाता है । स्प्रिंगों के स्वतन्त्र सिरे दृढ आधार से जुड़े हैं । यदि ये द्रव्यमान उनके केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश दोलन करें तब दो प्रसामान्य विधाओं की आवृत्तियाँ तथा विन्यास ज्ञात कीजिये ।
7. स्प्रिंग नियतांक k वाली दो स्प्रिंगों से दो समान द्रव्यमानों (m)को चित्रानुसार जोड़ा गया है । इसके उर्ध्वाधर दोलनों के लिये इसकी दो प्रसामान्य विधाओं की कोणीय आवृत्तियों के मान ज्ञात कीजिये ।



आंकिक प्रश्न (Numerical question)

8. दो एक समान द्रव्यमान (m)व लम्बाई (l)के दो दोलकों को एक (K)बल नियतांक वाली स्प्रिंग से युग्मित किया जाता है । यदि m = 0.1 किग्रा l = 0.2 मीटर, k = 0.75 न्यूटन / मीटर हो तो दोनों विधाओं की कोणीय आवृत्तियाँ ज्ञात कीजिये ।

(उत्तर: 7 रेडियन/से, 8 रेडियन/से)

9. एक घर्षण रहित क्षैतिज तल पर एकसमान द्रव्यमान (m)के दो पिण्ड, समान स्प्रिंग नियतांक (k)की दो स्प्रिंगों से दृढ आधार से जोड़ा गया है । यदि m = 1 किग्रा तथा k=10 न्यूटन/मीटर हो तो इस युग्मित दोलक की प्रसामान्य विधाओं की आवृत्तियाँ ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर:** $\left[5\left(3+\sqrt{5}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \left[5\left(3-\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$)

इकाई -11

युग्मित दोलक-II
(Coupled oscillator-II)

इकाई की रूपरेखा

11.0 उद्देश्य
11.1 प्रस्तावना
11.2 युग्मित दोलक की मिश्र विधा में गति
11.3 युग्मित दोलक की मिश्र विधा में ऊर्जा
11.4 युग्मित दोलक का मिश्र विधा में क्षणिक व्यवहार
11.5 युग्मित दोलक के प्रणोदित दोलन
11.6 सारांश
11.7 शब्दावली
11.8 संदर्भ गन्थ
11.9 बोध प्रश्नों के उत्तर
11.10 अभ्यासार्थ प्रश्न

11.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप

- एक युग्मित दोलक की मिश्र विधा में गति के बारे में जानकारी कर सकेंगे;
- मिश्र विधा में गति करते युग्मित दोलक की कुल ऊर्जा ज्ञात कर सकेंगे तथा उसके घटक दोलकों में ऊर्जा के समय के साथ परिवर्तन को ज्ञात करेंगे;
- अवमंदन रहित व अवमंदन युक्त युग्मित दोलक के क्षणिक व्यवहार को समझ सकेंगे;
- युग्मित दोलक के किसी भी एक घटक दोलक पर बाह्य आवर्ती बल लगाने पर, इसके व्यवहार में होने वाले परिवर्तन को ज्ञात कर सकेंगे ।

11.1 प्रस्तावना (Introduction)

इकाई-10 में आपने युग्मित दोलक, इसकी गति के समीकरण तथा इसकी प्रसामान्य विधाओं की आवृत्तियों के सम्बन्ध में ज्ञान अर्जित किया । इसके अतिरिक्त आपने प्रसामान्य विधायें ज्ञात करने की व्यापक वैश्लेषिक विधि का भी अध्ययन किया । इस अध्ययन से आपको ज्ञात हुआ कि युग्मित दोलक की प्रसामान्य विधाओं में दोलन की आवृत्तियों में से एक आवृत्ति उसके घटक दोलक की मुक्त दोलन की आवृत्ति के बराबर होती है । इस इकाई में आप एक युग्मित दोलक की मिश्र विधा में गति का अध्ययन करेंगे । अनुच्छेद 11.2 में आप देखेंगे कि किस प्रकार से युग्मित दोलक की प्रसामान्य विधाओं के अध्यारोपण से इसकी मिश्र विधा में गति

ज्ञात की जाती हे । अनुच्छेद 11.3 में मिश्र विधा में ही युग्मित दोलक की कुल ऊर्जा का अध्ययन कर यह जानकारी प्राप्त करेंगे कि किस प्रकार से कुल ऊर्जा का घटक दोलकों में वितरण होता है । युग्मित दोलक के मिश्र विधा में गति के क्षणिक व्यवहार का अध्ययन अनुच्छेद 11.4 में करेंगे । अनुच्छेद 11.5 में हम पढ़ेगे कि किसी युग्मित दोलक की सामान्य विधाओं की आवृत्तियाँ ज्ञात करने के लिये निकाय को किसी आवर्ती बल से अनुनादित कराकर अनुनादित आवृत्तियाँ ज्ञात की जाती हैं, जो कि उसकी वांछित आवृत्तियाँ होती हैं ।

11.2 युग्मित दोलक की मिश्र विधा में गति (Mation of coupled oscillator in mixed mode)

इकाई-10 में आपने सरल आवर्त गति से संबधित युग्मित दोलक की प्रसामान्य (normal)विधाओं का अध्ययन किया तथा यह भी देखा कि इन विधाओं में दोलक की आवृत्तियाँ

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

व $$\omega_2 = \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)^{1/2}$$

होती है । यह आवृत्तियाँ दो युग्मित सरल आवर्ती दोलकों के समान व विपरीत कला में दोलन करने से प्राप्त हुई हैं । कहने का तात्पर्य यह है कि किसी भी निकाय (ग्मित दोलकयु)को विभिन्न प्रकार से गतिमान कराया जा सकता हे इसलिये उस युग्मित निकाय की सामान्य गति को उसके सभी सम्भावित सामान्य विधाओं के अध्यारोपण से व्यक्त किया जा सकता है ।

मान लीजिये दो सामान्य विधाओं में आवर्ती दोलक की सामान्य गति को निम्न समीकरण से दर्शाया जा सकता है

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\omega_1^2 X$$

तथा $$\frac{d^2Y}{dt^2} = -\omega_2^2 X$$

माना कि उपरोक्त समीकरणों के निम्न हल है:-

$$X = X_0 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \qquad ....(11.1)$$

$$Y = Y_0 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \qquad ...(11.12)$$

जहाँ X_0 व Y_o क्रमश: दोनो सामान्य विधाओं के आयाम तथा ϕ_1 और ϕ_2 उनके कला नियतांक है । पिछली इकाई में आपने पढा कि

$X = y_1 + y_2$ तथा $Y = y_1 - y_2$

$$Y1 = \frac{1}{2}(X + Y) \qquad ...(11.3)$$

तथा $$y_2 = \frac{1}{2}(X + Y) \qquad ...(11.14)$$

समी. (11.3)तथा (11.4)में समी. (11.1)व (11.2)से X व Y के मान रखने पर

$$y_1 = \frac{1}{2}\left[X_\theta \cos\left(\omega_1 t + \phi\right) + Y_0 \cos\left(\omega_2 t + \phi_2\right)\right] \qquad ...(11.5)$$

तथा $$y_2 = \frac{1}{2}\left[X_0 \cos\left(\omega_1 t + \phi\right) + Y_0 \cos\left(\omega_2 t + \phi_2\right)\right]$$

समी. (11.5)व (11.6)से यह ज्ञात होता है कि y_1 y_2, के मान दो सामान्य विधाओं के सामान्य निर्देशांकों के अध्यारोपण से प्राप्त होते हैं ।

यदि दोनों प्रसामान्य विधाओं के आयाम समान तथा 2a के बराबर हो तथा प्रारम्भिक कलायें $\phi_1 = \phi_2 = 0$ हो तो समी. (11.5)व (11.6)को निम्न रूप से लिख सकते है ।

$$Y_1 = a \cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 1 \qquad ....(11.7)$$

तथा $$Y_2 = a \cos \omega_1 t + a \cos \omega_2 1 \qquad ...(11.8)$$

समी. (11.7)व (11.8)को आगे सरल करने पर

$$y_1 = 2a\cos\frac{\left(\omega_2 - \omega_1\right)}{2}t\cos\frac{\left(\omega_1 + \omega_2\right)}{2}t \qquad ...(11.9)$$

तथा $$y_2 = 2a\sin\frac{\left(\omega_1 - \omega_2\right)}{2}t\sin\frac{\left(\omega_1 + \omega_2\right)}{2}t \qquad ...(11.10)$$

समी. (11.9)व (11.10)मे यदि

$$a_1 = 2a\cos\frac{\left(\omega_2 - \omega_1\right)}{2}t \qquad ......(11.11)$$

$$a_2 = 2a\sin\frac{\left(\omega_2 - \omega_1\right)}{2}t \qquad .....(11.12)$$

हो तो, समी. (11.9)व (11.10)के पुन: निम्न रूप से लिखा जा सकता है :-

$$y_1 = a_1\cos\frac{\left(\omega 1 + \omega_2\right)}{2}t \qquad ......(11.13)$$

$$y_2 = a_2\sin\frac{\left(\omega_2 + \omega_1\right)}{2}t \qquad ....(11.14)$$

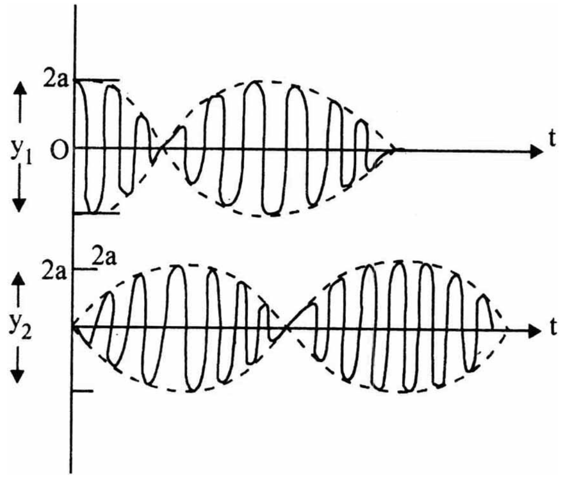
समी. (11.13)व (11.14)से स्पष्ट है कि प्रत्येक दोलक की गति ज्यावक्रीय है तथा दोलन की आवृत्ति $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ या $\frac{\omega_0 + \omega_2}{2}$ है । अर्थात् प्रत्येक दोलक की आवृत्ति समान है । यहाँ a_1 व a_2 दोनो दोलकों के मॉडुलित आयाम हैं ।

Y_1 का मॉडुलित आयाम $a_1 = 2a\cos\ (\omega_2 - \omega_1)\frac{t}{2}$ तथा y_2 का मॉडुलित आयाम

$$a_2 = 2a\sin(\omega_2 - \omega_1)\frac{t}{2}$$

$$= 2a\cos\left\{\left(\omega_2 - \omega_1\right)t - \frac{\pi}{2}\right\}$$

अत: y_1 व y_2 के मॉडुलित आयामों के बीच $\frac{\pi}{2}$ का कलान्तर है । अर्थात् जब y_1 का आयाम अधिकतम होता है तब y_2 का आयाम न्यूनतम, और जब y_1 का आयाम न्यूनतम, होता है तब y_2 का आयाम अधिकतम होता है (चित्र 11.1)।



चित्र 11.1 युग्मित दोलक के घटक दोलनों के विस्थापन का समय के साथ परिवर्तन

आवर्तकाल के एक चौथाई (1/4)समय तक एक दोलक के मॉडुलित आयाम में कमी होती रहती है तो दूसरे दोलक के आयाम में वृद्धि होती है । इसके परिणामस्वरूप पहले दोलक से दूसरे दोलक में ऊर्जा का स्थानान्तरण होगा । दूसरे एक चौथाई आवर्तकाल में हम देखते हैं कि पहले दोलक के आयाम में वृद्धि तथा दूसरे के आयाम में कमी होती है और अब ऊर्जा का स्थानान्तरण दूसरे से पहले दोलक में होने लगता है । इस प्रकार ऊर्जा का, एक घटक दोलक से दूसरे घटक दोलक में विनिमय (Exchange)होता रहता है । यह प्रक्रिया स्वत: ही निरन्तर दोहराई जाती है। एक दोलक से दूसरे दोलक को ऊर्जा का पूर्णत: उगदान-प्रदान केवल तभी सम्भव होता है जबकि दोनों दोलकों के द्रव्यमान समान हो तथा $(\omega_1 \ \omega_2)/ (\omega_2 - \omega_2)$का अनुपात एक पूर्ण संख्या हो ।

बोध प्रश्न (self assessment question)

1. मिश्र विधाओं मे गति करते युग्मित दोलकों के मॉडुलित आयामों के बीच कितना कलान्तर होता है ।

   ....

2. मिश्र विधाओं मे गति करते युग्मित दोलको के बीच पूर्णत: ऊर्जा का आदान प्रदान कब होगा ?

   ....

उदाहरण 11.1 किसी युग्मित दोलक की प्रसामान्य विधा में दोलन की एक कोणीय आवृत्ति 3 रेडियन/सेकण्ड है । यदि दोलकों का द्रव्यमान 10-^{2} किलोग्राम तथा बल नियतांक को मान 25x10-$_{3}$ न्यूटन/मीटर हो तो प्रसामान्य विधा की दूसरी आवृत्ति की गणना कीजिये । मिश्र विधा में दोलक को गति कराने पर युग्मित दोलक की औसत आवृत्ति भी ज्ञात कीजिये ।

हल : प्रश्नानुसार $\omega_1 = \omega_0 = 3$ रे / से

K = 25x10-3 न्यूटन/मीटर

M= 10-2 किलोग्राम

$$\therefore \qquad \omega_2 = \left(\omega_0^2 + \frac{2k}{m}\right)^{1/2}$$

$$\therefore \qquad \omega_2 = \left(9 + \frac{2\times 25\times 10^{-3}}{10^{-2}}\right)^{1/2}$$

$=(9+5)^{1/2}$

$\omega_2=(14)^{1/2}$ =3.74 रेडियन / सेकण्ड

हम जानते हैं, मिश्र विधा में दोलक की औसत आवृत्ति $\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}$ होती है ।

अतः औसत आवृत्ति $= \frac{3+3.74}{2} = \frac{6.74}{2}$

=3.37 रेडियन/सेकण्ड

11.3 युग्मित दोलक की मिश्र विधा में ऊर्जा (Energy of a coupled oscillator in mixed mode)

जब एक युग्मित दोलक मिश्र विधा में गति करता है तो उसकी कुल ऊर्जा ज्ञात करने के लिये हमें पहले उसके घटक दोलकों की कुल ऊर्जा ज्ञान करनी होगी । घटक दोलकों के विस्थापन समी. (11.13)ए व (11.14)द्वारा व्यक्त किये जाते हैं । समी. (11.13)व (11.14)में a_1 व a_2= प्रथम और द्वितीय दोलक के मॉडुलित आयाम है तथा समी. (11.11)व (11.12)द्वारा दिये जाते हैं । दोनों ही दोलकों के लिए प्रसामान्य विधाओं की औसत आवृत्ति $\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}$ है ।

Y_1 (t)और y_2(t)आवृत्ति के $\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}$ तेज दोलन के सापेक्ष a_1(t)और a_2(t)आयामों के $\frac{(\omega_2-\omega_1)}{2}$ आवृत्ति के दोलनों से बहुत धीमे हैं । अतः $\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}$ के एक चक्र में हम मॉडुलित a_1 व a_2 को नियतांक मान सकते हैं । हम जानते हैं कि सरल आवर्त गति में दोलक की औसत गतिज ऊर्जा का मान औसत स्थितिज ऊर्जा के मान के बराबर होता है । अर्थात्

$$\langle U\rangle = \langle K\rangle = \frac{1}{2}k \text{ (आयाम)}^2 \qquad \text{......(11.15)}$$

अतः प्रथम घटक दोलक की कुल ऊर्जा

$$E_1 = \frac{1}{2}m.\frac{(\omega_1+\omega_2)^2}{2}.a_1^2$$

$$= 2a^2m.\frac{(\omega_1+\omega_2)^2}{2}\cos^2\frac{(\omega_1-\omega_2)}{2}t \qquad \text{.....(11.16)}$$

इसी प्रकार द्वितीय घटक दोलक की कुल ऊर्जा

$$E_2 = \frac{1}{2} m.\frac{(\omega_1+\omega_2)^2}{2}.a_2^2$$

$$= 2a^2 m.\frac{(\omega_1+\omega_2)^2}{2} \sin^2\left\{\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t\right\} \quad .....(11.17)$$

दोनों दोलकों की कुल ऊर्जा (अर्थात युग्मित दोलक की ऊर्जा)

$$E = E_1 + E_2$$

$$= 2ma^2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)^2$$

= नियतांक ...(11.18)

दोनो दोलकों की ऊर्जाओं में अन्तर,

$$E_1 - E_2 = E\left\{\cos^2\frac{(\omega_2-\omega_1)}{2}t \sin^2\frac{(\omega_2-\omega_1)}{2}t\right\}$$

$$= E.\cos\frac{2(\omega_2-\omega_1)}{2}t$$

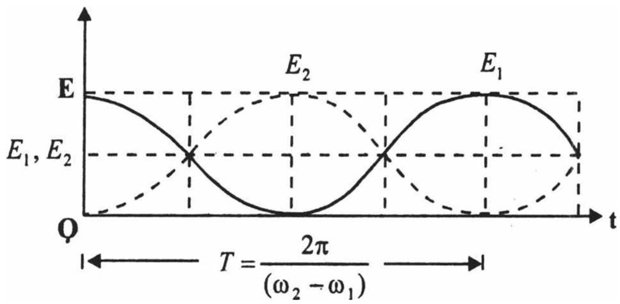
$$= E.\cos\left[(\omega_2-\omega_1)t\right] \quad ......(11.19)$$

अब समी. (11.16), (11.17)व (11.19)से

$$E_1 = \frac{E}{2}\left[1+\cos(\omega_2-\omega_1)t\right]$$

तथा $$E_2 = \frac{E}{2}\left[1+\cos(\omega_2-\omega_1)t\right] \quad ....(11.20)$$

अब यद्यपि युग्मित दोलक की कुल ऊर्जा नियत रहती है, परन्तु उसके घटक दोलकों की ऊर्जा में समय के साथ परिवर्तन होता रहता है । इस परिवर्तन को चित्र व 11.2 में दर्शाया गया है ।



चित्र 11 2.युग्मित दोलक के घटक दोलको में ऊर्जा विनिमय

जब E_1 का मान E (अधिकतम)हो जाता है तो E_2 का मान शून्य होता हैं और इसके विपरीत जब E_1 = 0हो जाती है, तो दूसरे दोलक की ऊर्जा E_2 = E होती है । अत: घटक दोलकों में ऊर्जा का आदान-प्रदान होता रहता है तथा इस आदान-प्रदान की आवृत्ति (ω_2 - ω_2)के बराबर होती हैं ।

बोध प्रश्न (self assessment questions)

3. किसी युग्मित दोलक की कुल ऊर्जा का मान कितना होता है?

   ……………………………………………………………………………………………………

4. युग्मित दोलक को घटक दोलकों के बीच ऊर्जा के आदान-प्रदान की आवृत्ति क्या होती है?

   ……………………………………………………………………………………………………

11.4 युग्मित दोलक का मिश्र विधा में क्षणिक व्यवहार (Transient behavior of coupled osciallater in mixed mode)

आपने इस इकाई के अनुच्छेद 11.2 व 11.3 में पढ़ा कि मिश्र विधा में गति करने वाले युग्मित दोलक के विस्थापन, जो कि समय के फलन हैं, को समी (11.13)व (11.14)से व्यक्त किया जाता है । अर्थात्

$$y_1(t) = a_1 \cos\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t$$

$$y_2(t) = a_2 \sin\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}t$$

जबकि a_1 व a_2 दो घटक दोलकों के मॉडुलित आयाम है तथा समी. (11.11)व (11.12)से व्यक्त किये जाते हैं ।

अब यदि अवमन्दन को नगण्य मान लिया जाये तो युग्मित दोलक की प्रारम्मिक अवस्था में दोलकों के विस्थापन $y_1(0)= 2a$ व y_2 (t)होंगे ।

Y_1 (t)व y_2 (t)का क्षणिक व्यवहार प्रारम्भिक अवस्था के तुरन्त पश्चात् ही परिलक्षित (appear)होता है । इस व्यवहार को चित्र 11.1 में दर्शाया गया है । प्रथम घटक दोलक का विस्थापन को ज्यावक्रीय और द्वितीय घटक दोलक का विस्थापन ज्यावक्रीय होता है तथा प्रत्येक क्षण इनके विस्थापनों में $\frac{\pi}{2}$ का कलान्तर होता है ।

अब यदि यह मान लिया जाये कि युग्मित दोलक पर अवमंदन बल भी कार्यरत है, तब इस अवमंदन बल के कारण घटक दोलकों के आयाम चरघातांकी रूप में कम होते जायेंगे ।

ऐसी अवस्था में यदि अवमन्दन क्षीण हो तो - $\left(\frac{\lambda}{m} < \omega_1, \omega_2\right)$

$$Y_1(t)=a'_1(t),\cos(\omega'.t) \quad ...(11.21)$$

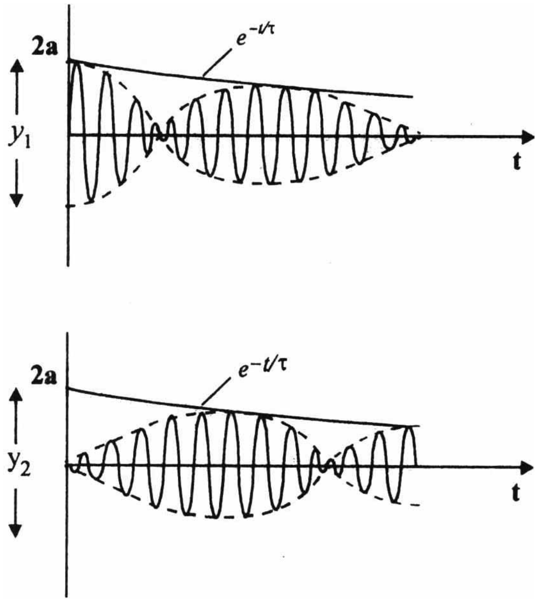
$$Y_1(t)=a'_2(t),\sin(\omega'.t) \quad ...(11.22)$$

जहाँ a'_1, a'_2, ω'; a_1, a_2 और $\frac{(\omega_1+\omega_2)}{2}$ में ω_1 तथा ω_2 के स्थान पर क्रमशः:

$$\omega'_1 = \sqrt{\omega_1^2 - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2} \text{ तथा } \omega'_2 = \sqrt{\omega_2^2 - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2} \quad ......(11.23)$$

प्रतिस्थापित करके प्राप्त किये जा सकते हैं ।

इस अवस्था में भी दोलकों के विस्थापन में प्रत्येक क्षण $\frac{\pi}{2}$ का कलान्तर बना रहेगा, परन्तु समय के साथ इन दोलनों का आयाम चरघातांकी रूप में क्षय होता चला जायेगा । यह क्षणिक व्यवहार चित्र 11.13 में अवमन्दन युक्त युग्मित दोलक के लिये प्रदर्शित किया गया है ।



चित्र 11.3 अवमन्दन युक्त युग्मित दोलक का आयाम

बोध प्रश्न (self assessments question)

5. युग्मित दोलक का क्षणिक व्यवहार कब परिलक्षित होता है ?

उदाहरण 11.2 एक युग्मित दोलक के घटक दोलकों के मिश्र विधा में मॉडुलित आयाम क्रमश: 4 सेमी व 5 सेमी हैं तथा उनकी प्रसामान्य विधाओं के कम्पन की कोणीय आवृत्तियाँ 5 रे / से व 7 रे / से हैं । प्रत्येक दोलक का द्रव्यमान 10 ग्राम हो तो घटक दोलकों की ऊर्जाएं तथा युग्मित दोलक की कुल ऊर्जा ज्ञात कीजिये ।

हल : प्रश्नानुसार m=10 ग्राम

ω_1=5 रे / से

ω2=7 रे / से

a_1 = 4 सेमी

a_2 = 5 सेमी

घटक दोलकों की ऊर्जाए E_1 व E_2हों तो

$$E_1 = \frac{1}{2} m \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{2} a_1^2$$

तथा $$E_2 = \frac{1}{2} m \frac{(\omega_1 + \omega_2)^2}{2} a_2^2$$

$\therefore$ कुल ऊर्जा E = E_1 E_2

प्रथम दोलक की ऊर्जा $$E_1 = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-3} \left(\frac{5+7}{2}\right)^2 \times \left(4 \times 10^{-2}\right)^2$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \times 10 \times 36 \times 16 \times 10 - 7$$

$=288x10^{-6}=2.88x10^{-4}$जूल

इसी प्रकार $$E_2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-3} \left(\frac{5+7}{2}\right)^2 \times \left(5 \times 10^{-2}\right)^2$$

$= \frac{1}{2}$ x 36 x25 x 10^{-6}

$=25x18x10^{-6}=450x10^{-6}$

$=4.50x10^{-4}$जूल

अत: दोनो दोलकों की कुल ऊर्जा,

$E=2.88x10^{-4}$ + $4.50x10^{-4}$

$E=7.38x10^{-4}$ जूल

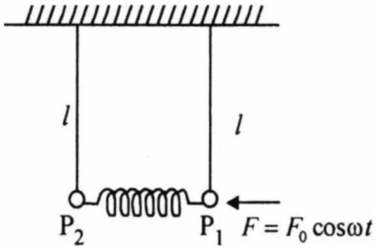
11.5 युग्मित दोलक के प्रणोदित दोलन (Forced oscillations of coupled oscillator)

अभी तक हमने केवल दो समान दोलकों के युग्मित निकाय के स्वतन्त्र कम्पनों के बारे में अध्ययन किया है और ज्ञात किया है कि ऐसे निकाय में केवल दो प्रसामान्य विधायें होती हैं । इसके अतिरिक्त मिश्र विधा में गति का वर्णन प्रसामान्य विधाओं के अध्यारोपण से किया जा सकता है ।

यदि दो युग्मित समान दोलकों में से किसी एक पर कोई आवर्ती बल (periodic force)लगाया जायें तो इस अवस्था में निकाय के व्यवहार का अध्ययन हम इस अनुच्छेद में करेंगे ।

चित्र 11.4 में प्रथम दोलक (p_1)पर एक आवर्ती बल F(t)= F_0cos ωt लगाया जाता है। द्वितीय दोलक (p_2)की गति केवल उसके प्रत्यानन बल व स्प्रिंग के कारण नियंत्रित होगी और p_2 के दोलनों को मुक्त माना जा सकता है । आवर्ती बल आरोपित होने के कारण p_1 की गति में परिवर्तन हो जायेगा । यदि अवमन्दन को नगन्य माना जाये तो दोनों दोलकों p_1 व p_1 के गति के समीकरण निम्न होंगे :-

P_1 दोलक के गति का समीकरण -



चित्र 11.4

$$m\frac{d^1y_1}{dt^2}+mg\left(\frac{y_1}{l}\right)+k(y_1-y_2)=F_0\cos\omega t$$

या $$\frac{d^2y_1}{dt^2}+\frac{g}{l}y_1+\frac{k}{m}(y_1-y_2)=\frac{F_0}{m}\cos\omega t \quad ....(11.24)$$

इसी प्रकार द्वितीय दोलक (p_2)के गति का समीकरण

$$m\frac{d^2y_2}{dt^2}+mg\left(\frac{y_2}{l}\right)-k(y_1-y_2)=0$$

या $$\frac{d^2y_2}{dt^2}+\frac{g}{l}y_2-\frac{k}{m}(y_1-y_2)=0 \quad ....(11.25)$$

मान लीजिये $\omega_0^2=\left(\frac{g}{l}\right)$, जबकि ω_0 प्रत्येक दोलक की प्राकृतिक दोलन आवृत्ति है, तो समी. (11.23)व (11.24)को ω_0 के पद में लिखने पर

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}+\omega_0{}^2y_2+\frac{k}{m}(y_1-y_1)=\frac{F_0}{m}\cos\omega t \quad ....(11.26)$$

तथा $$\frac{d^2y_2}{dt^2}+\omega_0{}^2y_2-\frac{k}{m}(y_2-y_1)=0 \quad ......(11.27)$$

समी. (11.26)व (11.27)को सामान्य निर्देशांकों X तथा Y के रूप में लिखने पर

$$\frac{d^2X}{dt^2}+\omega_0^2X=\frac{F^0}{m}\cos\omega t \quad .....(11.28)$$

तथा $$\frac{d^2Y}{dt^2}+\omega_0^2Y+\frac{2k}{m}Y=\frac{F^0}{m}\cos\omega t$$

या $$\frac{d^2Y}{dt^2}\left(\omega_0^2+\frac{2k}{m}\right)Y=\frac{F_0}{m}\cos\omega t \quad ...(11.29)$$

यहाँ $X = y_1 + y_2$

तथा $Y = y_1 - y_2$

यदि $\omega_1^2 = \omega_0^2$ तथा $\omega_2^2=\left(\omega_0^2+\frac{2k}{m}\right)$ मान लिया जाये तो समी. (11.28)व (11.29)होंगे-

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega_1^2 X = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \quad ...(11.30)$$

तथा $$\frac{d^2Y}{dt^2} + \omega_2^2 Y = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \quad ....(11.31)$$

समी. (11.30)व (11.31)से यह ज्ञात होता है कि आवर्ती बल लगाने पर युग्मित निकाय का व्यवहार दो प्रणोदित आवर्ती दोलकों के प्रकार का होता है जिनकी कि प्राकृतिक आवृत्तियाँ अब ω_o न होकर ω व ω_2 हो जाती हैं ।

अब यदि समी. (11.30)व (11.31)के हल .

सेमी(11.32). से x का मान (11.30).समी में रखने पर

$$-\omega A_1 + \omega^2{}_1 A_1 = \frac{F_0}{m}$$

$$A = \frac{F_0/m}{}$$

$$X = A_1 \cos \omega t \quad ...(11.32)$$

$$Y = A_2 \cos \omega t \quad ...(11.33)$$

हैं तो $$A_1 = \frac{F_0/m}{\omega_1^2 - \omega^2} \quad ....(11.34)$$

इसी प्रकार $$A_2 = \frac{F_0/m}{\omega_1^2 - \omega^2} \quad ...(11.35)$$

चूंकि $X = y_1 + y_2$ व $Y = y_1 - y_2$

$$\therefore \quad y_1 = \frac{1}{2}(X+Y) = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)\cos\omega t \quad ...(11.36)$$

तथा $$y_2 = \frac{1}{2}(X-Y) = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)\cos\omega t \quad ...(11.37)$$

A_1 व A_2 के मान समी. (11.32)व (11.33)से समी. (11.36)व (11.37)में रखने पर y_1 व y_2 के मान ज्ञात किये जा सकते हैं-

$$Y_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{F_0/m}{\omega_1^2 - \omega^2} + \frac{F_0/m}{\omega_2^2 - \omega^2}\right]\cos\omega t$$

$$= \frac{F_0}{2m}\left[\frac{\omega_2^2 - \omega^2 + \omega_1^2 - \omega^2}{\left(\omega_1^2 - \omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \omega^2\right)}\right]\cos\omega t$$

$$= \frac{F_0}{2m}\left[\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega^2}{\left(\omega_1^2 - \omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \omega^2\right)}\right]\cos\omega t$$

$\therefore \omega_1^2 = \omega_0^2$ तथा

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + \frac{2k}{m}$$

$$\therefore \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega^2}{\left(\omega_1^2 - \omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \omega_0^2\right)} = \frac{\left(\omega_0^2 + \omega_0^2 + \frac{2k}{m} - 2\omega^2\right)}{\left(\omega^2 - \omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \omega^2\right)}$$

$$= \frac{F_0}{m}\left[\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{k}{m}\right)}{\left(\omega_1^2 - \omega^2\right)\left(\omega_2^2 - \omega^2\right)}\right]\cos\omega t \quad ...(11.38)$$

या $$y_1 = \cos\omega t \quad ...(11.39)$$

जहाँ $$A=\frac{F_o}{m}\left[\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2+\frac{k}{m}\right)}{\left(\omega_1^2-\omega^2\right)\left(\omega_2^2-\omega^2\right)}\right] \quad ..(11.40)$$

इसी प्रकार

$$y_2\,\frac{1}{2}\left[\frac{F_0/m}{\omega_1^2-\omega^2}-\frac{F_0/m}{\omega_2^2-\omega^2}\right]\cos\omega t$$

$$=\frac{F_0}{m}\frac{(k/m)}{\left(\omega_1^2-\omega^2\right)\left(\omega_2^2-\omega^2\right)}\cos\omega t \quad ...(11.41)$$

या $$y_2=B\cos\omega t \quad ...(11.42)$$

जहाँ $$B=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{k/m}{\left(\omega_1^2-\omega^2\right)\left(\omega_2^2-\omega^2\right)} \quad ...(11.43)$$

समी. (11.39)व (11.42)में A व B के मान दोनों दोलकों P_1 व P_2मे के आयामों को व्यक्त करते हैं । A व B के व्यंजकों में जब प्रणोदित आवृत्ति का मान सामान्य कम्पन विधा की आवृत्ति ω_1 या ω_2 के बराबर होती है तो आयाम A व B का मान अनन्त हो जाता है ।

इन स्थितियों में युग्मित निकाय अनुनाद की स्थिति (अवस्था)में होता है l

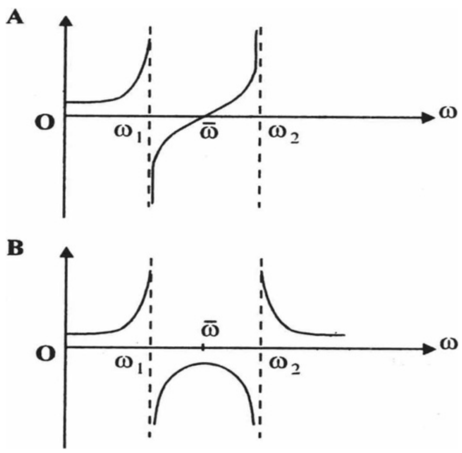
अब यदि अवमंदन को नगण्य न माना जाय तो अनुनादी (resonant)आवृत्तियों ω_1 व ω_2 पर आयामों का मान अनन्त न होकर एक अधिकतम मान होगा । A व B का ω के साथ परिवर्तन निम्न चित्र 11.5 में प्रदर्शित किया गया है ।

समी. (11.39)व (11.42)से

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{B}{A}=\frac{km}{\left(\omega_0^2-\omega^2+k/m\right)}$$

यदि ω का मान ω_0 के अति निकट $\left(\omega\approx\omega_0\right)$ हो तो $\frac{y_2}{y_2}=\frac{B}{A}\approx+1$ अर्थात निम्न अनुनादी क्षेत्र में आयाम A व B तथा विस्थापन समान कला में होंगे ।

यदि ω का मान $\omega_2=\left(\omega_0^2+\frac{2k}{m}\right)^{1/2}$ के निकट हो तो $\frac{y_2}{y_1}=\frac{B}{A}=-1$ होगा तथा उच्च अनुनादी आवृत्ति क्षेत्र में आयाम A व B तथा विस्थापन विपरीत कला में होंगे ।



चित्र 11.5

उपरोक्त विवेचन से हमें ज्ञात होता है कि किसी युग्मित दोलक निकाय की सामान्य विधाओं की आवृत्तियों के मान ज्ञात करने के लिये निकाय को किसी आवर्ती बल से अनुनादित किया जाता है । चालक बल की आवृत्ति को तब तक परिवर्तित किया जाता है जब तक कि युग्मित दोलक का आयाम अधिकतम न हो जावे। अत: अनुनादी आवृत्तियाँ ही युग्मित दोलक की प्रसामान्य विधाओं की आवृत्तियाँ होती है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

6. युग्मित दोलक के किसी भी घटक दोलक पर आवर्ती बल लगाने पर इसका व्यवहार किस प्रकार का होता है?

----

7. यदि प्रणोदित बल आवृति का मान सामान्य कम्पन्न विधाओं की आवृत्तियों के समान हो जाये तो युग्मित निकाय का क्या होगा?

उदाहरण 11.3 यदि किसी युग्मित दोलक के प्रथम दोलक पर एक आवर्ती बल F = 4cos2t न्यूटन लगाया जाता है । प्रत्येक दोलक का द्रव्यमान 5 ग्राम तथा दोनों के बीच बल नियतांक 25 x 10^{-3} न्यूटन/मीटर हो तथा मूल प्रसामान्य विधा की कोणीय आवृत्ति 3 रेडियन/सेकण्ड हो तो उसके घटक दोलकों के आयाम ज्ञात कीजिये ।

हल : प्रश्नानुसार $\omega_1 = \omega_0 = 3$ रेडियन / सेकण्ड

k = 25 x 10^{-3} न्यूटन / मीटर

ω =2 रेडियन / सेकण्ड

F_0 = 4 न्यूटन

m = 5 x 10^{-3} किलोग्राम

हम जानते हैं, $\omega_2 = \left(\omega_0^2 + \frac{2k}{m}\right)^{1/2}$

$$=\left(9+\frac{2\times25\times10^{-3}}{5\times10^{-3}}\right)=(19)^{1/2}=4.36 \text{ रे/से.}$$

दोलकों के आयाम A व B का मान

$$A=\frac{F_0}{m}\left[\frac{\left(\omega_0^2-\omega^2+\frac{k}{m}\right)}{\left(\omega_1^2-\omega^2\right)\left(\omega_2^2-\omega^2\right)}\right]$$

तथा $$B=\frac{F_0}{m}\left[\frac{k/m}{\left(\omega_1^2-\omega^2\right)\left(\omega_2^2-\omega^2\right)}\right]$$

$\therefore$ $$A=\frac{4}{5\times10^{-3}}\left[\frac{9-4+5}{(9-4)(19-4)}\right]$$

$$=\frac{4}{5\times10^{-3}}\times\frac{10}{5\times15}=\frac{4\times10^4}{25\times15}$$

=106.6 मीटर

तथा $$B=\frac{4}{5\times10^{-3}}\left[\frac{5}{5\times15}\right]$$

$$=\frac{4000}{75}=53.33 \text{ मीटर}$$

11.6 सारांश (Summary)

- मिश्र विधा में गति कर रहे युग्मित दोलक के दोनों दोलकों के विस्थापन सामान्य विधाओं में गति कर रहे दोलकों के सामान्य निर्देशांकों के अध्यारोपण से प्राप्त होते है ।
- मिश्र विधा में गति कर रहे युग्मित दोलक के प्रत्येक दोलक की दोलन आवृत्ति समान होती हे । इन दोलकों के आयाम मॉडुलित आयाम कहलाते हैं तथा इनके बीच सदैव $\frac{\pi}{2}$ का कलान्तर होता है । प्रथम दोलक का आयाम जब अधिकतम होता है तब द्वितीय का शून्य व प्रथम का आयाम जब शून्य होता है तब द्वितीय का अधिकतम।
- मिश्र विधा में गति कर रहे युग्मित दोलक की कुल ऊर्जा नियत रहती है परन्तु उसके घटक दोलकों की ऊर्जा में समय के साथ परिवर्तन होता है ।
- युग्मित दोलक पर अवमंदन बल कार्यरत होने की स्थिति में, घटक दोलकों के आयामों का समय के साथ चरघांताकी रूप से क्षय होता है ।
- किसी युग्मित निकाय की सामान्य विधाओं की आवृत्तियाँ ज्ञात करने के लिये निकाय को एक आवर्ती चालक बल से अनुनादित कराया जाता है । चालक बल की आवृत्ति को तब तक परिवर्तित किया जाता है जब तक युग्मित दोलक का आयाम

अधिकतम न हो जाये । अनुनादी आवृत्तियाँ ही युग्मित दोलक की प्रसामान्य विधाओं की आवृत्तियाँ होती हैं ।

11.7 शब्दावली (Glossary)

अनुनादी	Resonant
आवर्ती बल	Periodic force
परिलक्षित	Appear
मिश्र	Mixed
विनिमय	Exchange
व्यवहार	Behaviour

11.8 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1.	N.K. Bajaj	The Physics of Waves and Oscillations	Tata McGraw Hill publishing Co. Ltd., Delhi
2.	F.S Crawford Jr.	Waves and Oscillations Berkeley Physics Course. Vol-III	McGraw Hill International Book Co., Singapore.
3.	सोखी फलस्वाल सिंह, व जैन	दोलन व तंरगे	जयपुर पब्लिशिंग हाऊस चौड़ा रास्ता, जयपुर
4.	एम.पीसक्सेना ., पीसिंह .आर ., एस रावत .एस .	दोलन व तरंगें	कॉलेज बुक हाऊस, जयपुर

11.9 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to self assessment questions)

1. युग्मित दोलकों के मॉडुलित आयामों के बीच π / 2का कलान्तर होता है ।
2. जब युग्मित दोलक की रचना करने वाले घटक दोलकों के द्रव्यमान समान हों ।
3. युग्मित दोलक की कुल ऊर्जा का मान E = $2ma^2\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)^2$ के बराबर होगा और यह एक नियत राशि होगी ।
4. ऊर्जा के आदान-प्रदान की आवृत्ति $(\omega_2-\omega_1)$ के बराबर होगी ।
5. युग्मित दोलक का क्षणिक व्यवहार प्रारम्भिक अवस्था के तुरन्त पश्चात् ही परिलक्षित होता है ।
6. युग्मित दोलक का व्यवहार दो प्रणोदित आवर्ती दोलकों के प्रकार का होता है । युग्मित दोलक निकाय अनुनादी अवस्था में होगा ।

11.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. मिश्र विधा में गति करते युग्मित निकाय के दोलकों की कम्पन आवृत्ति क्या होगी?
2. क्या किसी युग्मित निकाय की कुल ऊर्जा मिश्र विधा में भी नियत रहती हैं?
3. मिश्र विधा में गति कर रहे युग्मित दोलक के घटक दोलनों के आयामों में कितना कलान्तर होता है ।
4. युग्मित दोलक निकाय पर बाह्य आवर्ती बल लगाने पर निकाय का व्यवहार कैसा होता है?

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

5. एक युग्मित दोलक को मिश्र विधा में उत्तेजित किया गया है । इसके गति का समीकरण लिखिये । एक घटक का विस्थापन समय के साथ किस प्रकार परिवर्तित होगा?
6. एक युग्मित दोलक को मिश्र विधा में उत्तेजित करने पर, घटक दोलकों में ऊर्जा विनिमय किस प्रकार होता है, वर्णन कीजिये?
7. एक युग्मित दोलक के क्षणिक व्यवहार का वर्णन कीजिये । यदि अवमंदन बल कार्यरत हों तो उनके प्रभाव में क्षणिक व्यवहार में क्या परिवर्तन होगा?
8. युग्मित दोलक के प्रणोदित दोलन से क्या तात्पर्य है? युग्मित दोलक के प्रथम घटक दोलक पर एक सरल आवर्ती बल लगाने पर इस दोलक की अनुनादी अवस्थायें ज्ञात कीजिये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

9. किसी युग्मित दोलक की प्रसामान्य विधा में दोलन की एक कोणीय आवृत्ति 2 रेडियन / सेकण्ड है । यदि दोलकों का द्रव्यमान 10^{-2}, किलोग्राम तथा बल नियतांक का मान 25 x 10^{-3}, न्यूटन / मीटर हो तो प्रसामान्य विधा की दूसरी आवृत्ति की गणना कीजिये । मिश्र विधा में दोलक की औसत आवृत्ति की गणना भी कीजिये

   (**उत्तर:** 3 रेडियन / सेकण्ड, 2.5 रेडियन / सेकण्ड)

10. एक युग्मित दोलक के घटक दोलकों के मिश्र विधा में मॉडुलित आयाम क्रमशः 3 व 4 सेमी है तथा उनकी प्रसामान्य विधाओं की कोणीय आवृत्तियाँ 2 रे / से. व 3 रे / से. हैं । प्रत्येक दोलक का द्रव्यमान व ग्राम हो तो घटक दोलकों की ऊर्जाऐं ज्ञात कीजिये ।

    (**उत्तर :** 2.8 x 10^{-5} जूल, 5 x 10^{-5}जूल)

11. यदि किसी युग्मित दोलक के किसी एक दोलक पर एक आवर्ती बल F=2 cos 3t न्यूटन लगाया जाता है । प्रत्येक दोलक का द्रव्यमान 10 ग्राम तथा दोनों के बीच बल नियतांक 10 x 10^{-3} न्यूटन / मीटर हो तथा मूल प्रसामान्य विधा मुक्त दोलन की कोणीय आवृत्ति / रेडियन सेकण्ड हो तो घटक दोलकों के आयाम ज्ञात कीजिये ।

    (**उत्तर :** 10.625 मीटर, 0.625 मीटर)

इकाई- 12

तरंगें

(Waves)

इकाई की रूपरेखा

12.0 उद्देश्य
12.1 प्रस्तावना
12.2 तरंगों का वर्णन एवं प्रकार
12.2.1 तरंगों का वर्णन
12.2.2 तरंगों के प्रकार
12.3 तरंगों के अभिलक्षण एवं गुण
12.3.1 तरंगों के अभिलक्षण
12.3.2 तरंगों के गुण
12.4 एक विमीय तरंग की अवकल समीकरण
12.5 सारांश
12.8 शब्दावली
12.7 संदर्भ ग्रन्थ
12.8 बोध प्रश्नों के उत्तर
12.9 अभ्यासार्थ प्रश्न

12.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप-

- ऊर्जा स्थानान्तरण की विशेष प्रकिया, जिसे तरंग गति कहते है, को समझ सकेंगे;
- तरंगों का वर्गीकरण किन किन आधारों पर किया जाता है तथा तरंगें कितनी प्रकार की होती हैं, इसकी जानकारी प्राप्त कर सकेंगे;
- तरंगों के विभिन्न गुणों जैसे परावर्तन, अपवर्तन, विवर्तन आदि कि व्याख्या कर सकेंगे;
- तरंगों के विभिन्न अभिलक्षणों जैसे तरंगदैर्ध्य, आवृति के बारे में ज्ञान प्राप्त कर सकेंगे;
- तरंग के लिये अवकल समीकरण स्थापित कर सकेंगे ।

12.1 प्रस्तावना (Introduction)

युग्मित दोलकों का अध्ययन आपनें इकाईयों 10 एवं व 11 में किया है । इसमें आपनें देखा कि अपनी माध्य अवस्था के इर्द-गिर्द कम्पन करते हुए प्रथम दोलक किस प्रकार ऊर्जा का

स्थानान्तरण दूसरे दोलक को कर देता है । इस प्रकार से कल्पना कीजिये कि यदि, इन दो दोलकों के साथ एक और दोलक भी युग्मित होता तो क्या होता । स्वाभाविक रूप से जिस प्रकार से प्रथम दोलक ने दूसरे दोलक को ऊर्जा स्थानान्तरित की उसी प्रकार से दूसरा दोलक तीसरे दोलक को ऊर्जा स्थानान्तरित करेगा । इस प्रकार से यदि आपके पास युग्मित दोलकों की एक श्रृंखला हो तो आप देखेगें कि प्रथम दोलक को दी गई ऊर्जा, श्रृंखला के अंतिम दोलक को स्थानान्तरित हो जाती है । ऊर्जा के स्थानान्तरण की उपरोक्त प्रक्रिया में आपनें ध्यान दिया होगा कि इसमें दोलक तो अपने स्थान पर ही रहते हैं (अपनी माध्य अवस्था के इर्द-गिर्द कम्पन करते हु ए)तथा स्थानान्तरण केवल ऊर्जा का ही होता है । ऊर्जा के स्थानान्तरण की इस विशेष प्रकिया को तरंग गति कहते हैं ।

उपरोक्त प्रकिया द्वारा ऊर्जा के स्थानान्तरण के अनेकों उदाहरण हमारे दैनिक जीवन में भी देखने को मिलते हैं जैसे - सूर्य से पृथ्वी तक ऊष्मा एवं प्रकाश का पहुँचना, एक व्यक्ति को दूसरे व्यक्ति की आवाज सुनाई देना, विभिन्न रेडियों एवं टेलीविजन प्रसारण आदि । अत: ऊर्जा स्थानान्तरण की इस विशेष प्रकिया का विस्तार से अध्ययन आवश्यक हो जाता है ।

अनुच्छेद व 12.2 में हम तरंगों जैसे ध्वनि तरंगें, पानी की सतह पर तरंगें आदि का वर्णन करेंगे । इसी अनुच्छेद में आप यह भी जान पायेंगे कि तरंगें कितने प्रकार, जैसे अनुदैर्ध्य तरंगें, अनुप्रस्थ तरंगें आदि, की होती है । अनुच्छेद 12.3 में आप तरंगों के अभिलक्षणों जैसे तरंगदैर्ध्य, आयाम आदि के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे । तरंगों के गुणों जैसे परावर्तन, विवर्तन आदि के बारे में आपको इसी अनुच्छेद में जानकारी दी जायेगी । अन्त में अनुच्छेद 12.4 में हम तरंग के लिये अवकल समीकरण स्थापित करेंगे, जिसका उपयोग आप आगामी इकाई में विभिन्न माध्यमों में तरंग वेग ज्ञात करने के लिये करेंगे ।

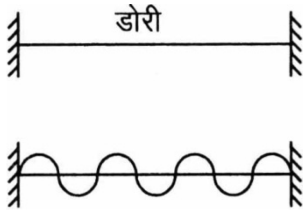
12.2 तरंगों का वर्णन एवं प्रकार (Description and types of waves)

तरंगों का वर्णन करने से पूर्व हम तरंग-गति को एक सरल उदाहरण, जिसका अनुभव हमारे दैनिक जीवन में भी होता है, की सहायता से समझने का प्रयास करते हैं । पानी की शांत सतह पर यदि एक कंकड फैकें तो आप देखेंगे कि जिस स्थान पर कंकड गिरता है वहां एक हलचल अर्थात विक्षोभ (distrubance)उत्पन्न हो जाता है । कुछ ही समय में यह विक्षोभ गति करता हुआ पानी की सतह पर अन्य स्थानों पर भी पहुँच जाता है । यदि इस स्थिति में पानी की सतह पर एक कॉर्क (cork)रखदें तो आप क्या देखेंगे ? आप देखेंगे कि कॉर्क तो अपने स्थान पर ही ऊपर-नीचे हो रहा है लेकिन विक्षोभ का प्रभाव पानी की सतह पर- आगे बढ रहा है । विक्षोभ का प्रभाव आगे बढने का अभिप्राय है कि ऊर्जा एक स्थान से दूसरे स्थान तक स्थानान्तरित हो रही है तथा कॉर्क का अपने स्थान पर ही कंपित होते रहना यह दर्शाता है कि इस प्रकिया में माध्यम के कण अपने स्थान पर ही कम्पन करते रहते हैं । ऊर्जा के स्थानान्तरण की इस विशेष प्रकिया को जिसमें माध्यम के कणों का स्थानान्तरण नहीं होता हो तरंग गति कहते हैं । इस

प्रकिया में हम यह मानते है कि ऊर्जा के लिये तरंगों ने वाहक (carrier)का कार्य किया है अर्थात ऊर्जा का स्थानान्तरण तंरगों के माध्यम से हुआ है ।

12.2.1 तरंगों का वर्णन (Description of waves)

आपने देखा कि किस प्रकार से तरंगों की सहायता से ऊर्जा का स्थानान्तरण होता है । आप के मस्तिष्क में यह विचार अवश्य आ रहा होगा कि आखिर ये तरंगें बनती कैसे हैं ? वास्तव में एक दोलक के लगातार दोलनों से ही तरंगों का निर्माण होता है । यदि एक डोरी (String)को दो दृढ आधारों के बीच बांध कर उसके एक सिरे पर लगातार अपने हाथ की एक उँगली से कम्पन दिये जायें तो कुछ ही समय में डोरी की लम्बाई के अनुदिश हमें डोरी पर एक तरंग स्पष्ट दिखाई देने लगती है । देखिये चित्र 12.1 ।



चित्र 12.1 डोरी में तरंग

डोरी में तरंगों की भाँति ही ध्वनि तरंगों का आभास हमें प्रतिदिन होता रहता है । जब आप एक दूसरे से बातचीत करते है तो आपके मुख के पास की हवा पर एक दाब आरोपित होता है । अर्थात मुख के पास की हवा संपीडित हो जाती है। अन्य शब्दों में हवा में एक विक्षोभ उत्पन्न हो जाता है । लगातार इस प्रकार के विक्षोभों से माध्यम (हवा)में ध्वनि तरंगों का निर्माण होता है । ध्वनि तरंगों के विभिन्न स्त्रोतों के बारे में आप भी जानकारी दे सकते हैं । उदाहरण के लिये रेडियो टेलीविजन, विभिन्न वादय् यंत्र सोनोमीटर बंद व खुले पाईप, एक स्वरित्र आदि । इन स्रोतों से उत्पन्न ध्वनि तरंगें एक निश्चित वेग से माध्यम में संचरित होती है । माध्यम में ध्वनि तरंगों का वेग 330 मीटर / सेकण्ड होता है। जिन तरंगों का वेग ध्वनि के वेग से अधिक होता है उन्हें पराश्रव्य तरंगें कहते हैं । पराश्रव्य तरंगों का आयाम बहुत अधिक हो तो प्रघाती तरंगों (shock waves)का निर्माण होता है और हमें आवाज एक गर्जना के रूप में सुनाई देती है।

अनुच्छेद के प्रारम्भ में आपने पानी के पृष्ठ पर उत्पन्न तरंगों के बारे में जानकारी प्राप्त की । इन तरंगों का विकराल रूप आप को समुद्र में उठने वाली ऊंची - ऊंची लहरों के रूप में देखने को मिलता है । जल की शांत सतह पर बनी तरंगे जहां हमारे लिये एक सुखद अनुभव होता है वहीं इन्हीं तरंगों का एक विध्वंशकारी रूप, सुनामी तंरगों के रूप में, भी हमारे कुछ देशवासियों ने देखा है ।

उपरोक्त वर्णित सभी उदाहरणों में जो तरंगें उत्पन्न होती हैं उनके संचरण के लिये माध्यम की आवश्यकता होती है । इसका अभिप्राय आप यह नहीं लेवें की माध्यम की अनुपस्थिति में तरंग-गति संभव नहीं है । विद्युतचुम्बकीय तरंगे एक विशेष प्रकार की तरंगें होती है जिनका संचरण न केवल माध्यम में परन्तु निर्वात में भी हो सकता है । संचार तंत्र में इन्हीं तरंगों का उपयोग मुख्यरूप से होता है । इन तरंगों का विस्तार पूर्वक अध्ययन आप इकाई-14 में करेंगे ।

आपने पिछली कक्षाओं में अध्ययन करते हुए देब्राग्ली तरंगों अर्थात द्रव्य तरंगों (matter waves)की भी जानकारी की है । इन तरंगों का अध्ययन तरंग यांत्रिकी में किया जाता है जिसे आप आगामी कक्षाओं में पढेंगे ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. क्या तरंग गति में ऊर्जा के साथ - साथ माध्यम के कणों का भी स्थानान्तरण होता है ?

----

2. तरंगो के उद्‌गम एवं माध्यम के कण के कम्पन में क्या सम्बन्ध हैं ?

12.2.2 तरंगों के प्रकार (Types of waves)

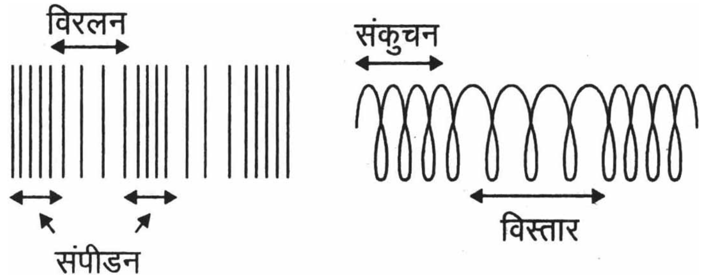
तरंगों का वर्गीकरण विभिन्न आधारों (जैसे - संचरण के लिये माध्यम की आवश्यकता हैं या नहीं, माध्यम के कणों के कम्पन तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश है या लम्बवत है, आदि)पर किया जाता है । मुख्यरूप से तरंगों को दो वर्गो में विभाजित किया जाता है ।

(i) प्रत्यास्थ तरंगे- यदि तरंगों को संचरण के लिये माध्यम की आवश्यकता हो तो वे प्रत्यास्थ तरंगें (elastic waves)या यांत्रिक तरंगे (mechanical waves)कहलाती हैं । जिस माध्यम में ये तरंगें संचरित होती हैं उसमें जडत्व (inertia)एवं प्रत्यास्थता (elasticity)दोनों के ही गुण विद्‌यमान होने चाहिये । इकाई-1 में आपने पढा है कि किस प्रकार जडत्व एवं प्रत्यास्थता के गुण एक दोलक के दोलन में सहायक होते हैं । तरंग गति में भी माध्यम में जडत्व का गुण इसलिये आवश्यक है ताकि माध्यम का कण अपनी अवस्था में परिवर्तन का विरोध कर सके। इस प्रकार माध्यम में प्रत्यास्थता का गुण इसलिये आवश्यक है ताकि कण अपनी विस्थापित अवस्था से पुन: माध्य अवस्था में लौटने का प्रयास कर सके । इसके अतिरिक्त तरंग संचरण के लिये माध्यम का प्रतिरोध भी न्यूनतम होना चाहिये ताकि ऊर्जा की हानि भी न्यूनतम हो । ध्वनि तरंगें, पानी की सतह पर तरंगें, डोरी में तरंगे आदि यांत्रिक तरंगों के उदाहरण हैं ।

(ii) विद्‌युत-चुम्बकीय तरंगे - ये विशेष प्रकार की तरंगें होती हैं जो निर्वात में भी गति कर सकती हैं । रेडियो तरंगें,सूक्ष्म तरंगे (micro waves), X-तरंगें आदि इन तरंगों के उदाहरण हैं । जैसा कि आपको पूर्व में बतलाया गया है कि इन तरंगों का विस्तार से अध्ययन आप इकाई-14 में करेंगे ।

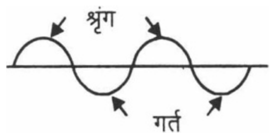
(iii) अनुदैर्घ्य एवं अनुप्रस्थ तरंगें- तरंगों का यह नामकरण (nomenclature)माध्यम के कणों के तरंग संचरण की दिशा के सापेक्ष कम्पनों को देखते हुआ किया जाता है । जब माध्यम में तरंग संचरण के समय, माध्यम के कण अपनी साम्यावस्था के इर्द-गिर्द, तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश कम्पन करते हों तो ये तरंगें अनुदैर्ध्य तरंगें (longitudinal waves)कहलाती हैं। माध्यम में इन तरंगों का संचरण विरलनों (rarefactions)एवं संपीडनों (compressions)के रूप में होता है । विरलन में माध्यम के कण दूर-दूर होते है जबकि संपीडन क्षेत्रों में माध्यम के कण पास-पास होते हैं । देखिये चित्र (12.2 a)। इसी प्रकार से चित्र 12.2(b)में एक स्प्रिंग में

तरंगें अनुदैर्ध्य तरंगों को दर्शाया गया है । ध्वनि तरंगे, छड में रगड से उत्पन्न तरंगें आदि अनुदैर्ध्य तरंगों के अन्य उदाहरण है । अनुदैर्ध्य तरंगें ठोस, द्रव एवं गैस तीनों प्रकार के माध्यमों में संचरित हो सकती हैं ।



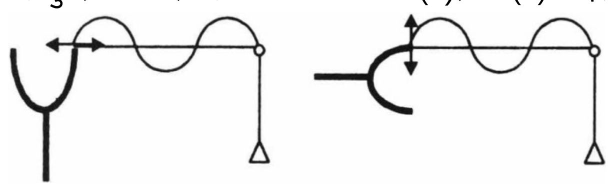
चित्र 12.2 विरलन एवं संपीडन क्षेत्र

जब माध्यम में तरंग संचरण के समय, माध्यम के कण अपनी साम्यावस्था के इर्द-गिर्द तरंग संचरण की दिशा के अभिलम्बवत कम्पन करते हों तो ये तरंगें अनुप्रस्थ तरंगें (transverse waves)कहलाती हैं । ये तरंगें श्रृंग एवं गर्त के रुप में संचरित होती है । श्रृंग (crest)एवं गर्त (trough)दोनों पर ही माध्यम के कणों का विस्थापन अधिकतम लेकिन विपरीत दिशाओं में होता है । देखिये चित्र 12.3 । पानी कि सतह पर उत्पन्न तरंगें, तनी हुई डोरी में उत्पन्न तरंगें आदि अनुप्रस्थ तरंगों के उदाहरण है । यांत्रिक अनुप्रस्थ तरंगे केवल ठोस एवं द्रव माध्यमों में ही संचरित हो सकती है ।



चित्र 12.3 अनुप्रस्थ तरंग

क्या आपके मस्तिष्क में ऐसी कोई प्रायोगिक व्यवस्था है जिसकी सहायता से आप अनुदैर्ध्य एवं अनुप्रस्थ दोनों ही प्रकार की तरंगें बनाकर दिखा सकते हो ? याद कीजिये मेल्डी के प्रयोग में आप यही करते हैं । विद्युत पोषित स्वरित्र (electrically maintained tuning fork)की अनुदैर्ध्य एवं अनुप्रस्थ व्यवस्थाओं को चित्र 12.4 (a)तथा (b)में दर्शाया गया है ।



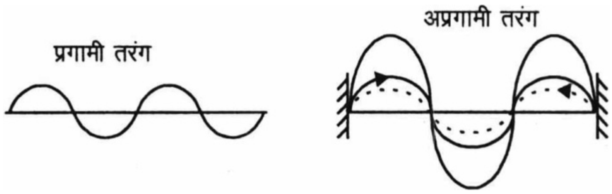
चित्र 12.4 स्वरित्र की अनुदैर्ध्य तथा अनुप्रस्थ व्यवस्थायें

विद्युत-चुम्बकीय तरंगें हालांकि यांत्रिक तरंगें नहीं होती है किन्तु ये सदैव अनुप्रस्थ तरंगें ही होती हैं । आप इकाई- 14 में पढ़ेगे कि विद्युत-चुम्बकीय तरंगों में विद्युत एवं चुम्बकीय सदिशों के कम्पन सदैव तरंग संचरण की दिशा के अभिलम्बवत होते है ।

(iv) एक,- द्वि-तथा त्रि-विमीय तरंगे - तरंगों का यह वर्गीकरण इस आधार पर किया जाता है कि ऊर्जा का संचरण एक ही रेखा के अनुदिश हो रहा है या किसी तल (plane)अथवा आकाश (Space)में हो रहा है । उदाहरण के लिये तनी हुई डोरी में तरंगें, ऊर्जा का संचरण केवल डोरी

की लम्बाई के अनुदिश ही करती हैं अत: ये एक विमीय (one dimensional)तरंगे कहलाती हैं। इसी प्रकार पानी की सतह पर बनी तरंगों के कारण ऊर्जा का संचरण एक तल में सीमित होता है अत: ये द्वि-विमीय तरंगें कहलाती हैं । ध्वनि, प्रकाश आदि स्रोतों से उत्पन्न तरंगों के कारण ऊर्जा का संचार आकाश में होता है अत: ये तरंगें त्रि-विभीय तरंगें कहलाती हैं ।

(v) प्रगामी तथा अप्रगामी तरंगे- इन तरंगों का तुलनात्मक अध्ययन. आपने अपनी पिछली कक्षाओं में किया है । आप को यह स्मरण होगा कि प्रगामी तरंगों (progressive waves)के कारण ऊर्जा का संचरण होता है । अप्रगामी तरंगें (stationary waves), जो कि विपरीत दिशाओं में गतिशील तरंगों कें अध्यारोपण से निर्मित होती हैं, के कारण ऊर्जा का संचरण संभव नहीं होता है । देखिये चित्र 12.5 (a)तथा (b)।



चित्र 12.5 प्रगामी तथा अप्रगामी तरंगें

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

3. यांत्रिक एवं विद्युत- चुम्बकीय तरंगों के दो-दो उदाहरण दीजिये ।

   ----

4. उन तरंगो का नाम बतलाइये जिनमें माध्यम के कणों के कम्पन तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश होते हों ।

   ----

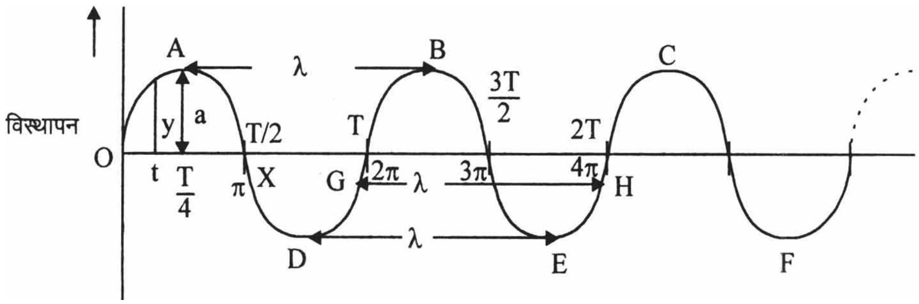
5. विद्युत -चुम्बकीय तरंगे अनुदैर्ध्य तरंगे होती है या अनुप्रस्थ तरंगे ?

12.3 तरंगों के अभिलक्षण एवं गुण (Characteristics and properties of waves)

12.3.1 तरंगों के अभिलक्षण (Characteristics of waves)

अब तक आप ने यह भलीभांति समझ लिया होगा कि तरंगों का उद्‌गम सतत्‌ कम्पनों से होता है । एक दोलक के कम्पन का अध्ययन आप इकाई-1 में कर चुके हैं । आपने एक दोलक के लिये विस्थापन, आयाम, आवर्तकाल, आवृति, कला आदि को परिभाषित भी किया है और उनका अर्थ भी समझा है । जब माध्यम में से कोई तरंग संचरित होती है तो माध्यम के प्रभावित कण भी सरल आवर्ती दोलन करते हैं तथा कण का विस्थापन, समय पर निर्भर करता है। अत: एक कण की सरल आवर्त गति में विस्थापन, आयाम आदि का जो गणितीय स्वरूप

अर्थात उनके लिये सूत्र होते हैं वही गणितीय स्वरूप तरंग गति में भी तरंगों के इन अभिलक्षणों अर्थात विस्थापन, आयाम, आवर्तकाल आदि का होता है । अन्तर सिर्फ इतना होगा कि जब तरंग गति में हम उक्त अभिलक्षणों की बात करेंगें तो वह माध्यम के कणों के संदर्भ में होगी । उदाहरण के लिये विस्थापन से हमारा अभिप्राय माध्यम के कण के उसकी साम्यावस्था से विस्थापन से होगा । चित्र 12.6 में एक तरंग श्रृंखला (wave train)को प्रदर्शित किया गया है । इस चित्र की सहायता से हम आपको तरंगों के निम्न अभिलक्षणों को समझाने एवं परिभाषित करने का प्रयास करेगें । चित्र में पथान्तर λ के पदों में, कलान्तर π के पदों मे व समयान्तर T के पदों में दर्शाया गया है ।



चित्र 12.6 तरंग श्रृंखला

(i) विस्थापन - किसी समय पर माध्यम के कण की उसकी माध्य अवस्था से दूरी को उस क्षण पर उस कण का विस्थापन (displacement)कहते हैं । चित्र में t समय पर कण के विस्थापन को y से प्रदर्शित किया गया हैं।

(ii) आयाम - माध्यम के कण का माध्य अवस्था से अधिकतम विस्थापन कण का आयाम (amplitude)कहलाता है । चित्र में समय T/4 पर कण के आयाम को a द्वारा दर्शाया गया है ।

(iii) आवर्तकाल - तरंग संचरण में माध्यम के कण द्वारा एक कम्पन को पूर्ण करने में लिया गया समय आवर्तकाल (time period)T कहलाता है ।

(iv) आवृत्ति - तरंग संचरण में माध्यम के कण द्वारा एक सेकण्ड में किये गये कम्पनों की संख्या को आवृत्ति कहते हैं । इसे ν से प्रदर्शित करते हैं तथा इसकी इकाई हर्टज होती है । चूंकि T सेकण्ड में एक कम्पन होता है इसलिये एक सेकण्ड में कम्पनों की संख्या 1 / T के बराबर होगी । अत: ν तथा T में निम्न समबन्ध होगा-

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad ...(12.1)$$

(v) तरगंदैर्ध्य - माध्यम में तरंग के दो क्रमागत मृगों या गर्तो (या दो क्रमागत संपीडनों अथवा विरलनों)के बीच की दूरी को तरंगदैर्ध्य λ कहते है । चित्र 12.5 में निकटवर्ती श्रृंग A तथा B एवं निकटवर्ती गर्त D तथा E के बीच की दूरी को तरंगदैर्ध्य λ के बराबर दर्शाया गया है।

(vi) कला - कला (phase)वह राशि है जिसके द्वारा माध्यम के कम्पित कण की साम्यावस्था से स्थिति या गति को व्यक्त करते हैं । इसकी इकाई रेडियन अथवा डिग्री होती है । इसे सामान्यत: से प्रदर्शित करते हैं । चित्र 12.5 में बिन्दु x के लिये कला या कलाकोण π है ।

हम यह भी कह सकते हैं कि $\frac{T}{4}$ समय पर कण की कला $\frac{\pi}{2}$ तथा $\frac{T}{2}$ समय पर π है । अत: इस समयान्ताराल में $\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)$ अर्थात $\frac{\pi}{2}$ का कला में अन्तर अर्थात् कलान्तर आया है । यदि दो कणों के मध्य कलान्तर 2π का पूर्ण गुणज हो तो वे समान कला में कहलाते हैं। यदि इसी कलात्मक का मान π का विषम गुणज हो तो कण विपरीत कला में कहलाते हैं । क्या आप बतला सकते हैं कि दो निकटवर्ती एवं समान कला में कम्पन करने वाले कणों के बीच दूरी कितनी होती है ? यह दूरी भी तरंगदैर्ध्य λ के बराबर होती है ।

(vii) कण का वेग- तरंग संचरण के समय, माध्यम के कण के विस्थापन में परिवर्तन की दर को कण का वेग (particle velocity)कहते हैं ।

(viii) तरंग वेग- एक सेकण्ड में तरंग द्वारा तय की गई दूरी तरंग वेग कहलाती है । इसे v से प्रदर्शित करते है । यदि चित्र 12.5 को देखें तो आप पायेंगे कि आवर्तकाल T के बराबर समय व्यतीत हो जानें पर तरंग द्वारा तय की गई दूरी, λ अर्थात तरंगदैर्ध्य के बराबर होती है । अत: एक सेकण्ड में तय की गई दूरी λ / T के बराबर होगी । इसलिये v,T तथा λ में निम्न सम्बन्ध होता है

$$v = \frac{\lambda}{T} \qquad ...(12.2)$$

परन्तु $\nu = \frac{1}{T}$

अतः $v = \nu\lambda \qquad ...(12.3)$

एक ही माध्यम में तंरगों का वेग समान रहता है ।

(ix) कोणीय आवृति - समय के साथ माध्यम के कण की कला में परिवर्तन की दर को कोणीय आवृति ω कहते हैं । आप जानते हैं आवर्तकाल के बराबर समय गुजर जाने पर कला में परिवर्तन 2π के बराबर होता है अत: कला में परिवर्तन की दर $\frac{2\pi}{T}$ होगी । ω तथा T में निम्न सम्बन्ध होगा

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad ...(12.4)$$

लेकिन $\nu = \frac{1}{T}$

अतः $\omega = 2\pi\nu \qquad ...(12.5)$

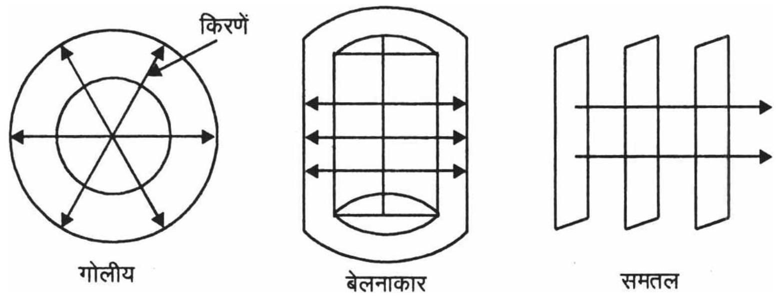
(x) तरंग संख्या- एकांक लम्बाई में उपस्थित तरंगों की संख्या को तरंग संख्या (wave number)कहते हैं तथा इसे $\bar{\nu}$ से प्रदर्शित करते हैं । चित्र 12.6 के अनुसार λ दूरी में केवल एक तरंग समावेशित होती है अत: एकांक दूरी में तरंगों की संख्या, $\frac{1}{\lambda}$ होगी । अत: $\bar{\nu}$ तथा λ में निम्न सम्बन्ध होता है -

$$\bar{v} = \frac{1}{\lambda} \qquad ..(12.6)$$

(xi) तरंग संचरण नियतांक- इकाई दूरी पर स्थित कंपित कणों के मध्य कलान्तर को तरंग संचरण नियतांक (propagation constant)k कहते हैं । चित्र 12.6 के अनुसार λ दूरी पर स्थित कणों के मध्य कलान्तर 2π के बराबर होता है । अत: एकांक दूरी पर स्थित कणों के मध्य कलान्तर $\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$ होगा । अत: k तथा λ के मध्य निम्न समबन्ध होता है -

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad ...(12.7)$$

(xii) तरंगाग्र एवं किरण- तरंग संचरण की अवस्था में माध्यम में ऐसे तलों की कल्पना की जा सकती है जिनमें प्रत्येक तल में स्थित कण समान कला में कम्पन करते हों । इन तलों को तरंगाग्र (wave front)कहते है । बिन्दु तरंग स्रोत के समीप तरंगाग्र की आकृति गोलाकार होती है तथा उत्पन्न तरंगें गोलीय तरंगें (spherical wave)कहलाती हैं । इस प्रकार से रेखीय स्रोत (line source)के समीप तरंगाग्र बेलनाकार होता है । क्या आप बता सकते हैं कि स्रोत (बिन्दु यो रेखीय)से अधिक दूरी (लगभग अनन्त)होने पर तरंगाग्र का आकार कैसा होगा? स्रोत से अधिक दूरी होने पर गोलीय एवं बेलनाकार तरंगाग्रों की त्रिज्याएं बहुत अधिक होगी और हम उनका एक भाग ही प्रेक्षित कर पायेंगे । अत: स्रोत से बहुत अधिक दूरी पर तरंगाग्र को समतल माना जा सकता है। तरंगाग्र के लम्बवत रेखा, किरण (ray)कहलाती है । वास्तव में किरण कोई रेखा न होकर एक दिशा होती है जिसके अनुदिश तरंगों द्वारा ऊर्जा का संचरण किया जाता है । चित्र 12.7 में विभिन्न तरंगाग्रों को दर्शाया गया है ।



चित्र 12.7 विभिन्न तरंगाग्र

(xiii) तरंगों की तीव्रता - माध्यम अथवा समष्टि के एकांक क्षेत्रफल से एकांक समय में, तरंग संचरण की दिशा के अभिलम्बवत गुजरनें वाली ऊर्जा की मात्रा को तरंगों की तीव्रता (intensity)कहते हैं । आयाम अधिक होने पर तरंगों की तीव्रता भी अधिक होती है । यदि किसी बिन्दु स्त्रोत (point source)की शक्ति P हो तो स्त्रोत से r दूरी पर स्थित गोलीय तरंगाग्र का पृष्ठ क्षेत्रफल, $4\pi r^2$ होगा ।अत: इस दूरी पर तरंगों की तीव्रता I के लिये-

$$I = \frac{\text{स्रोत से एक सेकेण्ड में उत्सर्जित ऊर्जा}}{\text{तरंग्राम का पृष्ठ क्षेत्रफल}}$$

या $\quad I = \dfrac{\text{स्रोत के शक्ति}}{\text{तरंग्राम का पृष्ठ क्षेत्रफल}}$

या $\quad I = \dfrac{P}{4\pi r^2}$ ... (12.8)

उदाहरण 12.1 एक तरंग का तरंगदैर्ध्य 0.5 मीटर तथा वेग 100 मीटर / सेकण्ड है । ज्ञात कीजिये (i)तरंग संख्या (ii)संचरण नियतांक (iii)तरंग की आवृत्ति ।

हल : (i) हम जानते है तरंग संख्या

$$\bar{v} = \frac{1}{\lambda}$$

प्रश्नानुसार $\lambda = 0.5$ मीटर

$$\therefore \bar{v} = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ प्रति मीटर}$$

(ii) तरंग संचरण नियतांक निम्न सूत्र से दिया जाता है ।

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \times \frac{1}{0.5} = 4\pi = 4 \times 3.14$$

या $\quad k =$ 12.56 प्रति मीटर

(iii) तरंग आवृत्ति के लिये निम्न सूत्र का उपयोग कर सकते हैं ।

$$v = v\lambda$$

अतः $\quad v = \dfrac{v}{\lambda}$

प्रश्नानुसार v = 10 मीटर / सेंकण्ड तथा λ = 0.5 मीटर

$$\therefore v = \frac{100}{0.5} = 200 \text{ चक्र प्रति सेकण्ड}$$

या $\quad v$ = 200 हर्टज

उदाहरण 12.2 एक बिन्दु तरंग स्त्रोत की शक्ति 12.56 वाट है । स्त्रोत से 10 मीटर दूर स्थित बिन्दु पर तरंग की तीव्रता ज्ञात कीजिये ।

हल: हम जानते हैं कि तरंग की तीव्रता निम्न सूत्र से दी जाती है ।

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

जहां P स्रोत की शक्ति तथा r बिन्दु की दूरी है ।

प्रश्नानुसार P = 12.56 वाट तथा r= 10 मीटर

अंतः $\quad I = \dfrac{12.56}{4 \times 3.14 \times 100} = \dfrac{12.56}{12.56 \times 100}$

$$\therefore I = \frac{1}{100} = 10^{-2} \text{ वाट/मीटर}^2$$

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

6.	दो निकटवर्ती एवं समान कला में कम्पन करने वाले के मध्य दूरी कितनी होती है ? --
7.	एक ही तरंगाग्र पर स्थित सभी कण क्या समान कला में कम्पन कराते है ? --

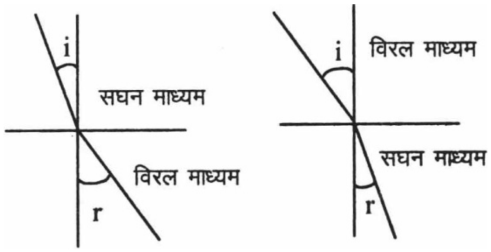
12.3.2 तरंगों के गुण (Properties of waves)

निम्नलिखित गुणों को तरंगों के गुण कहा जाता है-

(i) परावर्तन - प्रकाशीय तरंगों के परावर्तन (reflection)से आप भली-भाँति परिचित हैं । जब प्रकाश की किरण किसी परावर्तक तल पर आपतित होती है तो तल से टकरा कर पुन: उसी माध्यम में लौट जाती है । इसे प्रकाश का परावर्तन कहते हैं । आप यह भी जानते हैं कि परावर्तन की इस प्रकिया में आपतन एवं परावर्तन कोण बराबर होते हैं । देखिये चित्र 12.8 । प्रकाश के परावर्तन के गुण के कारण ही हम वस्तुओं को देख पाते हैं । किसी वस्तु से परावर्तित होकर जब प्रकाश हमारी आँखों के रेटीना पर गिरता है तो रेटिना पर वस्तु का प्रतिबिम्ब बनता है और वह वस्तु हमें दिखाई देने लगती है। प्रकाशीय तरंगों की भाँति ही परावर्तन सभी तरंगों का गुण होता है । ध्वनि की तरंगें जब किसी दीवार से परावर्तित होकर हमारे कान में प्रवेश करती है तो हमें प्रतिध्वनि (echo)सुनाई देती है । विद्युत चुम्बकीय तरंगों के आयन मण्डल (ionosphere)से परावर्तन के कारण ही आप रेडियो प्रसारण सुन सकते हैं ।

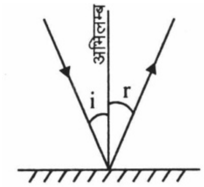
(ii) अपवर्तन: तरंगों के इस गुण को भी आप प्रकाशीय तरंगों का उदाहरण लेकर समझ सकते हैं । आप जानते हैं कि जब प्रकाशीय किरणें एक माध्यम से दूसरे माध्यम में प्रवेश करती हैं तो अपने मार्ग से विचलित हो जाती है इस प्रकिया को प्रकाश का अपवर्तन (refraction)कहते हैं । अपवर्तन के नियम के अनुसार आपतन कोण तथा अपवर्तन कोणों की ज्याओं (Sine)का अनुपात माध्यम के अपवर्तनांक n के बराबर होता है, अर्थात्

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} \qquad ......(12.9)$$



चित्र 12.9 तरंगों का अपवर्तन

अपवर्तन सभी तरंगों का गुण होता हैं । पानी में सतह के भीतर तैराक, किनारे पर स्थित किसी व्यक्ति की आवाज ध्वनि तरंगों के अपवर्तन के कारण ही सुन पाता है । यह ध्यान देने योग्य है कि दोनों



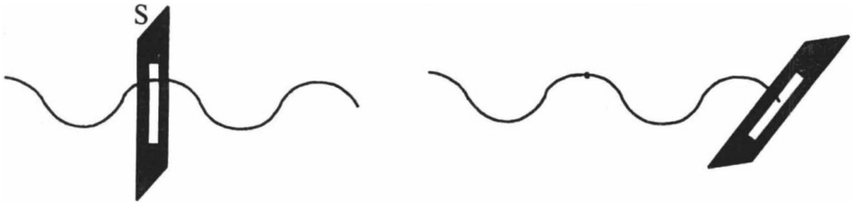
चित्र 12.8 तरंगों का परावर्तन

माध्यमों में तरंग का वेग भिन्न-भिन्न होगा । तरंगों के अपवर्तन के लिये देखिये चित्र 12.9 (a)तथा (b)।

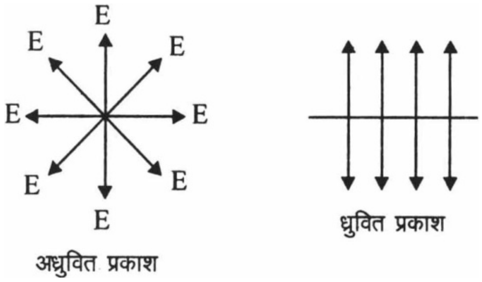
(iii) व्यतिकरण - जब दो तरंगें (अथवा किरणें)जिनके मध्य कलान्तर नियत हो, समान दिशा में गति करते हुए एक दूसरे पर अध्यारोपित होती है तो अध्यारोपण क्षेत्र में क्रमागत अधिकतम तथा न्यून तीव्रताओं के क्षेत्र (प्रकाश के लिये जिन्हें आप चमकीली तथा काली फ्रिन्जें कहते हैं)प्राप्त होते हैं । इस प्रभाव को व्यतिकरण प्रभाव कहते हैं । जब तरंगों के मध्य कलान्तर 2π का पूर्णगुणज होता है तो अध्यारोपण से प्राप्त तीव्रता अधिकतम तथा जब यह कलान्तर π का विषम गुणज होता है तो तीव्रता न्यूनतम होती हैं ।

(iv) विवर्तन - क्या आप बता सकते हैं कि एक कमरे में बैठे हुए व्यक्ति की ध्वनि उसके पास के कमरे में बैठे दूसरे व्यक्ति को कैसे सुनाई दे जाती है ? ऐसा तभी संभव है जब एक कमरे से ध्वनि तरंगें दोनों कमरों के बीच की दीवार पर मुड़ कर दूसरे कमरे में प्रवेश करे । तरंगों के मार्ग में स्थित अवरोधों के तीक्ष्ण किनारों पर मुड़ जाने की प्रक्रिया को विवर्तन कहते हैं । विवर्तन प्रभाव को प्रेक्षित करने के लिये अवरोध का आकार, तरंगों के तरंगदैर्ध्य की कोटि का होना आवश्यक होता है । ध्वनि की तरंगों का तरंगदैर्ध्य अधिक होता है और इसे मीटर में प्रदर्शित किया जाता है एवं प्रकृति में पाये जाने वाले अवरोधों (दीवार, पेड आदि)का आकार भी इसी कोटि का होता है । इसलिये प्रकृति में ध्वनि तरंगों का विवर्तन आसानी से प्रेक्षित हो जाता है । प्रकाश की तरंगों का तरंगदैर्ध्य 4000Å से 8000Å की परास में होता है । अत: प्रकाश का विवर्तन देखने के लिये ऐसी प्रकाशीय युक्ति (ग्रेटिंग)की आवश्यकता होती है जिसका अवरोध आकार (ग्रेटिंग अन्तराल)(grating element)इस कोटि का हो । x- किरणों का तरंगदैर्ध्य 1Å की कोटि का होता है अत: इनका विवर्तन देखने के लिये क्रिस्टल की सहायता ली जाती है ।

(v) ध्रुवण - यह गुण केवल अनुप्रस्थ तरंगों में ही पाया जाता है । जब तरंगों के कारण उत्पन्न माध्यम के कणों के कम्पन तरंग संचरण की दिशा के सममित नहीं रह पाते है तो इसे तरंग का ध्रुवण कहते हैं । चित्र 12.10 में डोरी के अनुप्रस्थ कम्पनों को दर्शाया गया है । ये कम्पन स्लिट S में से तभी गुजर सकते हैं जब ये स्लिट S की लम्बाई के अनुदिश हो अन्यथा ये कम्पन स्लिट द्वारा अवरोधित कर दिये जायेंगे । उपरोक्त प्रयोग में स्लिट एक ऐसी युक्ति (device)बन गई है जो कम्पनों को एक निश्चित दिशा (स्लिट की लम्बाई के अनुदिश)में होने पर ही पारित करती है । अन्य शब्दों में यह कहा जा सकता है कि स्लिट ने ध्रुवक (polariser)का कार्य किया है । अपनी पूर्व कक्षाओं में किये गये अध्ययन से आप जानते हैं कि प्रकाश की तरंगों का ध्रुवण करने के लिये निकॉल प्रिज, पोलारॉइड आदि की सहायता ली जाती है । चित्र 12.11 में अध्रुवित तथा ध्रुवित प्रकाश तरंगों को प्रदर्शित किया गया हैं । अनुदैर्ध्य तरंगों का ध्रुवण संभव नहीं होता है क्योंकि इनमें कम्पन तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश होते हैं अत: उन्हें किसी भी प्रक्रिया से बाधित नहीं किया जा सकता है ।



चित्र 12.10



चित्र 12.11

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

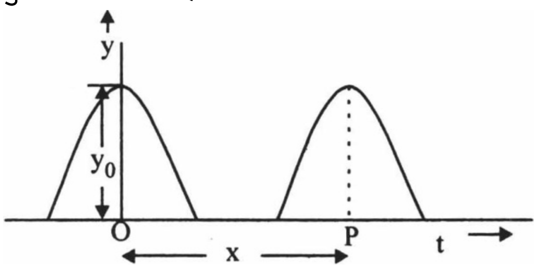
8. व्यतिकरण प्रभाव में अधिकतम तीव्रता प्राप्त करने के लिये तरंगों के मध्य कलान्तर कितना होना चाहिये?

----

9. यदि किसी तरंग का ध्रुवण संभव हो तो उसकी प्रकृति अनुदैर्ध्य होगी या अनुप्रस्थ होगी?

12.4 एक - विमीय तरंग की अवकल समीकरण (Differential equation of a one dimensional wave)

अभी तक के अध्ययन से आप ने यह जानकारी प्राप्त की है कि जब किसी स्थान पर किसी समय उत्पन्न विक्षोभ, दूसरे स्थान पर निश्चित समय के पश्चात् प्रेक्षित हो तथा यह समयान्तराल इन स्थितियों के मध्य दूरी के अनुक्रमानुपाती हो तो विक्षोभ के संचरण की प्रक्रिया तरंग गति कहलाती है । मान लीजिये एक तरंग X -दिशा में v वेग से संचरित हो रही है तथा तरंग का स्त्रोत मूल बिन्दु O पर स्थित है । देखिये चित्र 12.12 ।



चित्र 12.12 विक्षोभ संचरण

मान लीजिये मूल बिन्दु पर विस्थापन y_0 है । y_0 का मान समय पर निर्भर करेगा अर्थात समय का फलन होगा । इसलिये उसे निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है-

$$y_0 = f(t) \quad \text{...(12.10)}$$

जहां f समय का कोई फलन है । चूंकि विक्षोभ का वेग v है अत: उसे,P बिन्दु जो कि O से x दूरी है, तक पहुंचने में (x/v)समय लगेगा । अर्थात मूल बिन्दु पर उत्पन्न विक्षोभ (x/v)समय पश्चात् P बिन्दु पर पहुंचेगा। इसका अभिप्राय यह होगा कि किसी समय t पर बिन्दु पर स्थित कण का विस्थापन वही होना चाहिये जो (x/v)समय पूर्व O बिन्दु पर स्थित कण का था । अर्थात t समय पर बिन्दु O पर विस्थापन $y_0 = f(t)$ है तो बिन्दु P पर विस्थापन निम्न होगा-

$$y = f\left(t - \frac{x}{v}\right) \quad \text{...(12.11)}$$

उपरोक्त विस्थापन x- अक्ष की धनात्मक दिशा में तरंग संचरण के लिये है । यदि तरंग x- अक्ष की ऋणात्मक दिशा में गतिशील हो तो P बिन्दु पर विस्थापन निम्न प्रकार से लिखा जायेगा-

$$y = g\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad \text{... (12.12)}$$

उपरोक्त समी (12.11)तथा (12.12)यह दर्शाते हैं कि विस्थापन y, दूरी x तथा समय t का फलन है जबकि f तथा g तरंग के दो अज्ञात फलन हैं । अब अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुसार x- अक्ष के अनुदिश गतिशील तरंग का व्यापक समीकरण निम्न होगा -

$$y = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad \text{...(12.13)}$$

मान लीजिये

$$t - \frac{x}{v} = u \quad \text{... (12.14)}$$

समी. (12.14)का u के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial t}{\partial u} = 1 \text{ तथा } \frac{\partial x}{\partial u} = v \quad \text{...(12.15)}$$

इसी प्रकार से मान लीजिये

$$t + \frac{x}{v} = \omega \quad \text{... (12.16)}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial t}{\partial \omega} = 1 \text{ तथा } \frac{\partial x}{\partial \omega} = -v \quad \text{...(12.17)}$$

समी. (12.14)तथा (12.16)का उपयोग करने पर समी. (12.13)को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है-

$$y = f(u) + g(\omega) \quad \text{...(12.18)}$$

उपरोक्त समीकरण को t सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial f(u)}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial \omega}+\frac{\partial g(\omega)}{\partial \omega}.\frac{\partial \omega}{\partial t} \quad ...(12.19)$$

समी.(12.15)तथा(12.17 से $\frac{\partial u}{\partial t}$ तथा $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ के मान रखने पर

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial f(u)}{\partial u}+\frac{\partial g(\omega)}{\partial \omega} \quad ...(12.20)$$

पुन: t के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2}.\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 g(\omega)}{\partial \omega^2}.\frac{\partial \omega}{\partial t} \quad ...(20.21)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 g(\omega)}{\partial \omega^2} \quad ...(12.22)$$

जिस प्रकार से आपने समी. (12.22)प्राप्त की है उसी प्रकार से समी. (12.18)का x के सापेक्ष दो-बार अवकलन करके तथा समी. (12.15)तथा (12.17)का प्रयोग कर आप निम्न समीकरण प्राप्त कर सकते हैं-

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\left[\frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 g(\omega)}{\partial \omega^2}\right] \quad ...(12.23)$$

उपरोक्त समीकरण में समी. (12.22)का प्रयोग करने पर

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}.\frac{\partial^{2y}}{\partial t^2} \quad ...(12.24)$$

या

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^{2y}}{\partial x^2} \quad ...(12.25)$$

उपरोक्त समी. (12.25)एक विमीय तरंग का अवकल समीकरण कहलाता है । इस समीकरण में $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ माध्यम के कण का किसी क्षण पर त्वरण तथा $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ तरंग के विस्थापन वक्र की वक्रता त्रिज्या को व्यक्त करता है अत: इस अवकल समीकरण को शब्दों में निम्न प्रकार से लिखकर आप याद रख सकते हैं-

किसी बिन्दु पर कण का त्वरण

= (तरंग वेग)^2 x इसी बिन्दु पर विस्थापन वक्र की वक्रता त्रिज्या

क्या आप बता सकते हैं कि उपरोक्त अवकल समीकरण का महत्व क्या है ? किसी अन्य दशा में प्राप्त तरंग की अवकल समीकरण को यदि आप समी. (12.25)के रूप में लिख देंगे तो उस तरंग का वेग निकालना आसान हो जायेगा क्योंकि

$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$ का गुणांक ही तरंग वेग के वर्ग के बराबर होगा । यही इस समीकरण का महत्व है इस समीकरण का उपयोग कर हम इकाई- 13 में, तनी हुई डोरी, ठोस छड एवं गैस में तरंगों के वेग के लिये लिये सूत्र स्थापित करेंगे ।

अवकल समीकरण का हल - एक विमीय तरंग के अवकल समीकरण (12.25)का हल आप निम्न रूप में मान सकते हैं

$$y = a\sin\left(\omega t - kx\right) \qquad \text{... (12.26)}$$

जहाँ a माध्यम के कण का आयाम, ω कोणीय आवृति तथा k संचरण नियतांक है । समी. (12.25)का हल है या नहीं इसकी पुष्टि आप निम्न प्रकार से कर सकते हैं । समी. (12.25)का समय के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a\omega\cos\left(\omega t - kx\right) \qquad \text{...(12.27)}$$

एक बार पुन: t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -a\omega^2\sin\left(\omega t - kx\right) = -\omega^2 y \qquad \text{...(12.28)}$$

या $$y = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \text{...(12.29)}$$

इसी प्रकार से समी. (12.26)का, दो बार, x के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर आप पायेगें

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -ak^2\sin\left(\omega t - kx\right) = -k^2 y \qquad \text{...(12.30)}$$

या $$y = -\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \text{...(12.31)}$$

अब समी.(12.29)तथा (12.31)से

$$-\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \text{...(12.32)}$$

या $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \text{.....(12.33)}$$

लेकिन आप जानते हैं कि $\omega = 2\pi v$ तथा $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ होता है अत:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. = \frac{\left(2\pi v\right)^2}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \text{...(12.34)}$$

या $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(v\lambda\right)^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \text{...(12.35)}$$

$\therefore \quad v = v\lambda$ अंत:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad ...(12.36)$$

जो कि एक विमीय तरंग का अवकल समीकरण ही है । इससे यह सिद्ध हो जाता है कि समी. (12.25)के हल को समी. (12.26)द्‌वारा व्यक्त किया जा सकता है । समी. (12.25)के हल को आप निम्न रूप में लिख सकते हैं -

$$y = a\cos(\omega t - kx) \qquad ...(12.37)$$

एक विमीय तरंग की भाँति ही स्वैच्छिक (arbitrary)दिशा में संचरित त्रि-विभीय तरंग का समीकरण आप निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \psi \qquad ...(12.38)$$

जहां ψ विस्थापन है तथा ∇^2 संकारक का मान निम्न होता हैं

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \qquad ...(12.39)$$

त्रि-विमीय तरंग के समीकरण के हल को आप निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$$\psi = \psi_0 \sin\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right) \qquad ....(12.40)$$

अथवा $\psi = \psi_0 \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r}\right)$ ...(12.41)

यहाँ ψ_0 आयाम को प्रदर्शित करता है ।

उदाहरण 12.3 एक विमीय तरंग समीकरण के हल को निम्न प्रकार से लिखा जाता है-

$$y = a\sin(\omega t - kx)$$

उपरोक्त समीकरण को तरंगदैर्ध्य λ ,आवर्तकाल T तथा कलान्तर ϕ के रूप में प्राप्त कीजिये ।

हल - आप जानते हैं कि

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ तथा } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

अतः दी गई समीकरण से

$$y = a\sin\left(\frac{2\pi}{T}.t - \frac{2\pi}{\lambda} x \right)$$

या $$y = a\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

इसी प्रकार से हम जानते हैं कि

पथान्तर $x = \frac{\lambda}{2\pi} \times$ कलान्तर (ϕ)

अत: प्रश्न में दी गई समीकरण में x व k के मान रखने पर

$$y = a\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} . \frac{\lambda}{2\pi} . \phi \right)$$

या $y = a\sin(\omega t - \phi)$

उदाहरण 12.4 तनी हुई डोरी में तरंग का समीकरण निम्न प्रकार से लिखा जाता है-

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 900\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

तरंग का वेग ज्ञात कीजिये ।

हल: चूंकि तनी हुई डोरी में बनी तरंग एक विमीय होती है अत दी गई तरंग की समीकरण की तुलना एक विमीय तरंग की मानक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

से करने पर आप लिख सकते हैं

$$v^2 = 900$$

या $v^2 = \sqrt{900} =$ 30 मीटर /सेकण्ड

अत: प्रश्न में दी गई तरंग का वेग 30 मीटर/ सेकण्ड होगा ।

12.5 सारांश (Summary)

- तरंग गति में केवल ऊर्जा तथा संवेग का संचरण होता है, पदार्थ का नहीं ।
- तरंगों के अनेक उदाहरण हमें दैनिक जीवन में देखने को मिलते हैं जैसे ध्वनि की तरंगें, पानी की सतह पर तरंगें, रेडियो तरंगे आदि ।
- जिन तरंगों को गति के लिये माध्यम की, आवश्यकता होती है उन्हें प्रत्यास्थ तरंगे तथा जिन्हें माध्यम की आवश्यकता नहीं होती है उन्हें अप्रत्यास्थ तरंगें कहते हैं ।
- अनुदैर्ध्य तरंगों में माध्यम के कण तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश जबकि अनुप्रस्थ तरंगों में माध्यम के कणों के कम्पन तरंग संचरण की दिशा के लम्बवत होते है ।
- ध्वनि की तरंगें अनुदैर्ध्य तथा विद्युत-चुम्बकीय तरंगें सदैव अनुप्रस्थ होती हैं ।
- दो निकटवर्ती, समान कला में कम्पन करने वाले कणों के बीच की दूरी को तरंगदैर्ध्य λ कहते हैं ।
- परावर्तन, अपवर्तन, व्यक्तिकरण, विवर्तन तथा ध्रुवण तरंगों के गुण होते हैं । ध्रुवण केवल अनुप्रस्थ तरंगों का ही संभव होता है अनुदैर्ध्य तरंगों का नहीं ।
- एक विमीय तरंग का अवकल समीकरण निम्न होता हैं ।

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

12.6 शब्दावली (Glossary)

अप्रगामी	Stationary
अनुदैर्ध्य	Longitudinal
अनुप्रस्थ	Transverse

श्रृंग	Crest
गर्त	Trough
डोरी	String
तरंगाग्र	Wavefront
प्रतिध्वनि	Echo
प्रत्यास्थता	Elasticity
यांत्रिक	Mechanical
विरलन	Rarefaction
विक्षोभ	Disturbance
संचरण	Propagation
संपीडन	Compression
स्वरित्र	Tuning fork

12.7 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1.	D.S. Mathur	Elements of Properties Of Matter	S.Chand & Company Ltd, New Delhi.
2.	N.K. Bajaj	The physics of Waves & Oscillations	Tata Megrawhill publisling Co. Ltd.
3.	A.P. French	Vibration and Waves	CBS Publishers, Delhi
4.	एम.पी. सक्सेना, पी. आर. सिंह, एस. एस. रावत	दोलन एवं तरंगें	कॉलेज बुक हाउस, जयपुर

12.8 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to self assessment questions)

1. नहीं, तरंग गति में केवल ऊर्जा का स्थानान्तरण होता है ।
2. माध्यम के कण के सतत् कम्पनों से ही तरंगों का उद्‌गम होता है ।
3. ध्वनि तरंगें तथा तनी हुई डोरी में तरंगें यांत्रिक तरंगें होती हैं । प्रकाश तरंगें एवं X-किरणें विद्‌युत-चुम्बकीय तरंगें होती हैं ।
4. अनुदैर्ध्य तरंगें ।
5. अनुप्रस्थ तरंगें ।
6. यह दूरी तरंग के तरंगदैर्ध्य के बराबर होती है ।
7. हां, एक ही तरंगाग्र पर स्थित सभी कण समान कला में कम्पन करते हैं ।
8. अधिकतम तीव्रता प्राप्त करने के लिये तरंगों के मध्य कलान्तर 2π का पूर्ण गुणज होना चाहिये ।

9. अनुप्रस्थ ।

12.9 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. यांत्रिक एवं विद्युत-चुम्बकीय तरंगों में एक मूल अन्तर बतलाइये ।
2. त्रि-विमीय तरंगों के दो उदाहरण लिखिये ।
3. संचरण नियतांक तथा तरंगदैर्ध्य में सम्बन्ध बतलाइये ।
4. तरंगों के किन्हीं दो गुणों के नाम लिखिये ।
5. पराश्रव्य तरंगों का वेग, ध्वनि के वेग से अधिक होता है या कम, बतलाइये ।

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

6. तरंगों के वर्गीकरण को विस्तार पूर्वक समझाइये ।
7. तरंगों के विभिन्न गुणों की व्याख्या कीजिये ।
8. निम्नलिखित को परिभाषित कीजिये-.

)i)तरंग संख्या)ii)तरंग संचरण नियतांक

)iii)तरंगदैर्ध्य)iv(तरंगाग्र)v(तरंग की तीव्रता
9. एक विमीय तरंग का अवकल समीकरण स्थापित कीजिये तथा इसका महत्व समझाइये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

1. एक तरंग की आवृति 100 हर्टज तथा संचरण नियतांक का मान 5 प्रतिमीटर है । तरंग का वेग ज्ञात कीजिये।

   (उत्तर: 125.6 मीटर / सेकण्ड**)**
2. एक बिन्दु स्त्रोत से 10000 जूल ऊर्जा प्रति घंटा उत्सर्जित हो रही है । स्त्रोत से 5 मीटर दूर स्थित बिन्दु पर तीव्रता ज्ञात कीजिये ।

   (उत्तर - 0.0088 जूल/सेकण्ड/मीटर**)**
3. एक डोरी में तरंग का समीकरण निम्नलिखित है

   y=0.03 sin3) x-2t(

   जहां y विस्थापन तथा स्थिति x मीटर में एवं समय t सेकण्ड में है । ज्ञात कीजिये -

   (i) डोरी के कम्पन करते कणों का वेग ।

   (ii) कम्पन करते कणों का अधिकतम वेग ।

   (iii) तरंग संचरण का वेग ।

   (उत्तर: (i)0.006cos(3x-2t)मीटर/सेकण्ड (ii)0.06 मीटर/सेकण्ड (iii)0.66 मीटर/सेकण्ड**)**

इकाई- 13

माध्यम में तरंग गति
(Wave Motion in Medium)

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य
13.1 प्रस्तावना
13.2 माध्यम में तरंग संचरण
13.3 ठोस छड़ में प्रत्यास्थ तरंगें
13.4 गैस में दाब तरंगें
13.4.1 गैस में तरंगों का वेग
13.4.2 दाब तरंगें
13.4.3 न्यूटन की परिकल्पना
13.4.4 लाप्लॉस संशोधन
13.5 तनी डोरी में अनुप्रस्थ तरंगें
13.6 सारांश
13.7 शब्दावली
13.8 संदर्भ ग्रन्थ
13.9 बोध प्रश्नों के उत्तर
13.10 अभ्यासार्थ प्रश्न

13.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप

- माध्यम में तरंगे किस प्रकार से संचरित होती है, इसकी जानकारी प्राप्त कर सकेंगे;
- माध्यम में तरंगों का वेग माध्यम के ताप, दाब आदि पर निर्भर करता है अथवा नही इसके बारे में ज्ञान प्राप्त कर सकेंगे;
- ठोस छड़ में प्रत्यास्थ तरंग के वेग के लिये सूत्र स्थापित कर सकेंगे;
- गैस में संचरित होने वाली अनुदैर्ध्य तरंगों के वेग के लिये सूत्र प्राप्त कर सकेंगे;
- गैस में तरंग संचरण एक समतापी प्रक्रिया है अथवा रूद्धोष्म प्रक्रिया इसके बारे में अध्ययन कर सकेंगे
- एक तनी हुई डोरी में तरंग के वेग के लिये सूत्र स्थापित कर सकेंगे।

13.1 प्रस्तावना (Introduction)

तरंगों के बारे में इकाई-12 में आपको पर्याप्त जानकारी प्राप्त हो चुकी है । आप जानते हैं कि तरंगों को मुख्य रूप से दो वर्गों में विभाजित किया जाता है, यांत्रिक तरंगें तथा विद्युत चुम्बकीय तरंगे । यांत्रिक अथवा प्रत्यास्थ तरंगे वे तरंगे होती हैं जिनके संचरण के लिये माध्यम की आवश्यकता होती है । इस इकाई में हम अपना ध्यान केवल प्रत्यास्थ तरंगों क्या ही केन्द्रित करेंगे । विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के बारे में विस्तार से अध्ययन आप इकाई-14 में करेंगे । अनुच्छेद 13.2 में आप जल के पृष्ठ पर उत्पन्न तरंगों को उदाहरण लेकर माध्यम में तरंग संचरण के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे। अनुच्छेद 13.3 में आप ठोस छड़ में तरंग के वेग के लिये सूत्र स्थापित करेंगे एवं यह जान सकेंगे कि यह वेग पदार्थ के यंग के प्रत्यास्थता गुणांक तथा घनत्व (density)पर किस प्रकार निर्भर करता है । इसी प्रकार से अनुच्छेद 13.4 में आप गैस में तरंगों के संचरण के बार में ज्ञान अर्जित करेंगे । इस अनुच्छेद में आप यह भी जान सकेंगे कि गैस में तरंग संचरण एक रूद्धोष्म (adiabatic)प्रक्रिया है न कि समतापी (isothermal)प्रक्रिया । यह जानकारी आपको न्यूटन की परिकल्पना (hypothesis)तथा लाप्लॉस के संशोधन (correction)के द्वारा दी जायेगी । अन्त में अनुच्छेद 13.5 में आप एक तनी हुई डोरी में अनुप्रस्थ तरंगों के वेग के लिये सूत्र स्थापित करेंगे ।

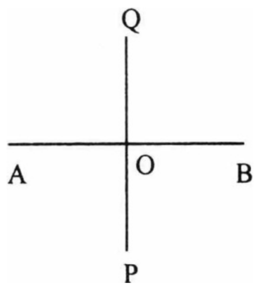
इस इकाई में हम तरंग की मानक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

का उपयोग बार बार करेंगे अतयह समीकरण आपको कण्ठस्थ : होनी चाहिये । उपरोक्त समीकरण में कण के विस्थापन को y से प्रदर्शित किया जाता है लेकिन इस इकाई में हम विस्थापन को ψ से प्रदर्शित करेंगे ।

13.2 माध्यम में तरंग संचरण (Propagation of wave in a medium)

अब तक के अध्ययन से आप जान चुके हैं कि यांत्रिक तरंगों के संचरण के लिये ऐसे माध्यम की आवश्यकता होती है जिसमें प्रत्यास्थता (elasticity)एवं जड़त्व (inertia)के गुण विद्यमान हो । जड़त्व का गुण वह गुण होता है जिसके कारण कोई वस्तु (जैसे माध्यम का कोई कण)अपनी अवस्था में परिवर्तन का विरोध करती है । इसका अभिप्राय यह है कि जड़त्व के गुण के कारण वस्तु यदि गति में हैं तो गति में रहना चाहती है एवं स्थिर अवस्था में है तो स्थिर अवस्था में रहने का प्रयास करती है । प्रत्यास्थता के गुण के कारण ही विस्थापित वस्तु को प्रत्यानयन बल (restoring force)प्राप्त होता है और यह पुन: अपनी माध्य अवस्था की ओर अग्रसर होने लगती है । माध्यम के इन दोनों गुणों का तरंग संचरण में कितना महत्व है यह आप निम्न उदाहरण से आसानी से समझ सकेंगे ।



चित्र 13.1

चित्र 13.1 में पानी की शांत सतह को AB से प्रदर्शित किया गया है । इस सतह के बिन्दु O पर एक कंकड (pebble)धीरे से फैंका जाता है । ज्यों ही कंकड पानी की सतह के सम्पर्क में आता है यह उस बिन्दु (स्थान)पर जल का अवनमन (depression)कर देता है तथा जल अपने प्रत्यास्थता के गुण के कारण अपनी मूल स्थिति में आने का प्रयास करता है और इस प्रयास में जल इस अवनमन में प्रवाहित होने लगता है । परन्तु जल द्वारा इस प्रक्रिया में प्राप्त संवेग के कारण यह AB सतह का अतिलंघन (overshoot)कर जाता है और परिणामत: एक अवनमन के पश्चात् एक उन्नयन (elevation)और फिर एक अवनमन प्राप्त होता है । संसजन (cohesion)के कारण इन कणों के निकटवर्ती कण भी प्रभावित होते हैं तथा अपने पूर्ववर्ती कणों की गति को दोहराते हैं । इसका परिणामी प्रभाव यह होगा कि यद्यपि जल कण ऊपर-नीचे की ओर गति करते हैं परन्तु तरंग का संचरण जल-सतह पर होने लगता है । उपरोक्त उदाहरण में जल की सतह पर कुछ ऐसे क्षेत्र भी प्राप्त होते हैं जहां जल स्तर, संदर्भ स्तर AB सें नीचे है । ऐसे क्षेत्र गर्त कहलाते हैं । इसी प्रकार से कुछ ऐसे क्षेत्र भी प्राप्त होते हैं जहां जल-स्तर संदर्भ स्तर AB से ऊपर होते है, इन क्षेत्रों को श्रृंग कहते हैं । अत: आप कह सकते हैं कि जल की सतह पर तरंग संचरण श्रृंगों एवं गर्तो के रूप में होता है । इस उदाहरण से स्पष्ट है कि जल सतह पर उत्पन्न तरंगें अनुप्रस्थ प्रकृति की होंगी ।

उपरोक्त उदाहरण को ध्यान में रखते हुए आप हवा या स्प्रिंग में अनुदैर्ध्य तरंगों की उत्पत्ति के बारे में भी सोच सकते हैं और इस निष्कर्ष पर पहुंच सकते है कि अनुदैर्ध्य तरंगों का संचरण संपीडनों एवं विरलनों के रूप मे होता है ।

तरंग संचरण के लिये जडत्व एवं प्रत्यास्थता के अतिरिक्त माध्यम का एक अन्य गुण, माध्यम का प्रतिरोध भी महत्वपूर्ण होता हैं । माध्यम का प्रतिरोध अधिक होने पर ऊर्जा की हानि अधिक होती है एवं तरंग अधिक दूरी तक संचरित नहीं हो पाती है ।

पूर्व इकाई में आपको पहले ही यह जानकारी दे दी गई थी कि अनुदैर्ध्य तरंगें तीनों ही प्रकार के माध्यमों अर्थात ठोस, द्रव तथा गैस में संचरित हो सकती है जबकि अनुप्रस्थ तरंगे केवल ठोसों एवं द्रवों में ही संचरित हो सकती है । आप सोच रहे होंगे कि क्या सभी माध्यमों में तरंगों का वेग समान होता है ? नहीं, तरंगों का वेग माध्यम पर निर्भर करता है लेकिन एक ही माध्यम में तरंग समान वेग से संचरित होती है । जब तरंगें एक माध्यम से दूसरे माध्यम में प्रवेश करती हैं तो उनकी आवृति में तो परिवर्तन नहीं होता है परन्तु उसके वेग एवं तरंगदैर्ध्य परिवर्तित हो जाते हूँ । तरंग संचरण के समय अनुपात $\frac{v}{\lambda}(=\nu)$ नियत रहता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. क्या तरंग का वेग भिन्न - भिन्न माध्यमों में भिन्न- भिन्न होता है ?

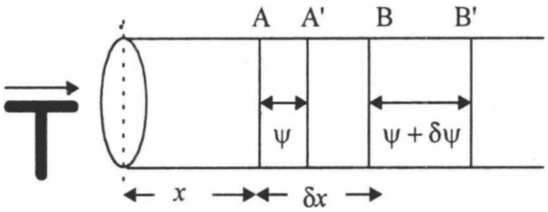
   ----

2. निम्न कथन सत्य है अथवा असत्य-

   "जब तरंग एक माध्यम से दूसरे माध्यम में प्रवेश करती है तो उसकी आवृति परिवर्तित हो जाती है ।"

13.3 ठोस छड़ में प्रत्यास्थ तरंगें (Elastic wave in solid rod)

आप जानते हैं कि किसी माध्यम में तरंग के संचरण के लिये प्रत्यास्थता का गुण आवश्यक होता है । प्रत्यास्थता का गुण सभी वस्तुओं में पाया जाता है परन्तु परिलक्षित तभी होता है जब आरोपित बल अल्प होता है । इस अनुच्छेद में आप यह जान सकेंगे कि एक पतली ठोस छड़ में तरंगें किस प्रकार संचरित होती है । साथ ही इन तरंगों के वेग के लिये सूत्र भी स्थापित कर सकेंगे ।



चित्र 13.2 ठोस छड़ में प्रत्यास्थ तरंगें

आवोग =बल x समय अक्षीय आवेग से अभिप्राय है कि छड़ की अक्ष के अनुदिश आवेग।

चित्र 13.2 में अनुप्रस्थ काट a वाली एक पतली छड़ को X-अक्ष के अनुदिश प्रदर्शित किया गया है, जिसका एक सिरा x = 0 पर स्थित है । इस सिरे पर किसी हथोडे से, X-दिशा में, चोट करने पर छड़ में उत्पन्न होने वाले एक अक्षीय आवेग (axial impulse)के कारण छड़ के सिरे पर एक विक्षोभ उत्पन्न होगा । यह विक्षोभ छड़ में गति करेगा । जैसे-जैसे विक्षोभ आगे बढ़ता जायेगा छड़ का प्रत्येक परिच्छेद तल (cross -sectional plane), छड़ की लम्बाई के अनुदिश अपनी माध्य अवस्था से विस्थापित होगा । तत्पश्चात् ये तल छड़ के पदार्थ के प्रत्यास्थता एवं जडत्व गुणों के प्रभाव में कम्पन करने लगेंगे । उपरोक्त कम्पन विक्षोभ संचरण की दिशा के अनुदिश होने के कारण छड़ में अनुदैर्ध्य तरंग उत्पन्न होगी । अब हम विक्षोभ के कारण उत्पन्न तरंग के वेग के लिये सूत्र स्थापित करेंगे ।

माना A तथा B छड़ के दो परिच्छेद तल सिरे x =0 से क्रमशः x तथा $x+\delta x$ दूरियों पर स्थित हैं इनके बीच की दूरी δx, अतिअल्प है । स्पष्टता के लिये चित्र 13.2 में इन तलों को दूर-दूर दिखलाया गया है । छड़ में उत्पन्न विक्षोभ की गति के कारण परिच्छेद तल A तथा B कम्पन करने लगते हैं । किसी क्षण पर तल A व B की विस्थापित स्थितियां क्रमशः A' व B' हैं । मान लीजिये कि तल में उत्पन्न विस्थापन AA'=ψ तथा B तल में उत्पन्न विस्थापन कृत्य है । अब $BB'=\psi+\delta\psi$ है । अब Aतथा B तलों के बीच छड़ की प्रारम्भिक लम्बाई

$$AB = \delta x \qquad ...(13.1)$$

विक्षोभ के कारण इस लम्बाई में परिवर्तन

A'B' - AB = (A' B + BB')- (AA' + A'B)

= BB' - AA'

= $\psi + \delta\psi - \psi$

या A'B - AB = $\delta\ \psi$ ...(13.2)

अत: विक्षोभ के कारण छड़ में उत्पन्न अनुदैर्ध्य विकृति

$$s = \frac{\text{A तथा B तलो के बीच लम्बाई में परिवर्तन}}{\text{A तथा B तलो के बीच प्रारम्भिक लम्बाई}}$$

समी (13.1)तथा (13.2)का उपयोग करने पर

$$s = \frac{\delta\psi}{\delta x} \quad ...(13.3)$$

चूंकि δx अति अल्प है अत:

$$s = \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)_{\delta x \to 0} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad ...(13.4)$$

इसलिये

$Y = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{अनुदैधर्य विकृति}}$

प्रतिबल = Y x अनुदैर्ध्य विकृति

या प्रतिफल = Y.s ...(13.5)

यहां ओं यंग का प्रत्यस्थता गुणाक है ।

समी. (13.4)का उपयोग करने पर

$$\text{प्रतिबल} = Y\ .\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad ...(13.6)$$

छड़ के किसी भी तल पर लगने वाला बल F, प्रतिबल व अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल का गुणनफल होगा । अत:

F = Y.a.s ...(13.7)

जिस प्रकार से विक्षोभ के कारण, किसी क्षण पर, तलों A व B के विस्थापन समान नहीं होते है उसी प्रकार से उन पर बल के मान भी समान नहीं होते हैं ।

समी (13.7)से तल A पर बल

$F_A = Yas_{\mathbf{A}}$ ...(13.8)

तथा तल B पर बल

$F_B = Yas_{\mathbf{B}}$ ...(13.9)

अत: +X दिशा में कार्यरत परिणामी (resultant)बल F होगा

$F = F_B - F_A = Ya(s_B - s_A)$ ...(13.10)

समी. (13.10)में $s_B - s_A$ को $ds\left(= \frac{\partial s}{\partial x}.\delta x\right)$ लिखने पर

$$F = Ya\frac{\partial s}{\partial x}.\delta x \quad ...(13.11)$$

जहां $\frac{\partial s}{\partial x}$ छड़ की लम्बाई के अनुदिश अनुदैर्ध्य विकृति s में परिवर्तन की दर को प्रदर्शित करता है ।

समी. (13.4)से s का मान रखने पर

$$F = Ya\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.\delta x \qquad ...(13.12)$$

इस बल का मान A व B तलों के मध्य द्रव्यमान और विक्षोभ के कारण उसमें उत्पन्न त्वरण के गुणनफल के बराबर होना चाहिये । अत:

$$F = ap\delta x\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad ...(13.13)$$

यहाँ p छड़ के पदार्थ का घनत्व (density)है तथा $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ द्रव्यमान में उत्पन्न त्वरण है ।

अत: समी. (13.12)तथा (13.13)से

$$Ya\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\delta x = ap\delta x\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad ...(13.14)$$

अत: त्वरण

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{Y}{P}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \qquad ...(13.15)$$

समी. (13.15)ठोस छड़ में स्थापित तरंग का अवकल समीकरण हैं । इस समीकरण की तुलना मानक समीकरण

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

से करने पर, ठोस 'छड़ में तरंग के वेग के लिये

$$V^2 = \frac{Y}{P} \qquad ...(13.16)$$

$$\therefore \qquad V^2 = \sqrt{\frac{Y}{P}} \qquad ...(13.17)$$

उपरोक्त सूत्र से स्पष्ट है कि ठोस छड़ में संचरित अनुदैर्ध्य तरंगों का वेग छड़ के पदार्थ के यंग प्रत्यास्थता गुणांक एवं घनत्व पर निर्भर करता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

3. निम्न कथन सत्य है अथवा असत्य ?

'' तरंग संचरण के समय दो निकटतम परिच्छेद तलों पर बल का मान समान होता हैं ।''

----

4. ठोस छड़ में तरंगों का वेग छड़ के पदार्थ के घनत्व पर किस प्रकार निर्भर करता है ?

----

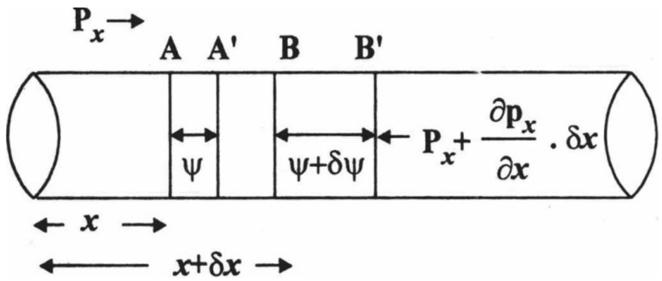
5. यदि माध्यम के घनत्व को चार गुना कर दिया जाये तो ध्वनि तरंगों के वेग पर क्या प्रभाव पड़ेगा ?

13.4 गैस में दाब तरंगें (Pressure waves in a gas)

आप जानते हैं कि जब तरंग संचरण के लिये उपलब्ध माध्यम गैस अवस्था में होता है तो उसमें केवल अनुदैर्ध्य तरंगों का संचरण ही संभव होता है । गैसीय माध्यम में तरंग संचरण का उदाहरण जो आपको दैनिक जीवन में अनुभव करने को मिलता है वह है, ध्वनि तरंगें (जो कि सदैव अनुदैर्ध्य प्रकृति की होती हैं)की वायु में गति । इस अनुच्छेद में हम गैसीय माध्यम में तंरगों के वेग के लिये सूत्र स्थापित करेंगे एवं यह जानने का प्रयास भी करेंगे कि इन तरंगों को दाब तरंगे क्यों कहते हैं । इसी अनुच्छेद के अन्त में हम यह विश्लेषण (analysis)भी करेंगे कि जब कोई तरंग किसी गैस में से गुजरती है तो यह एक समतापी प्रक्रिया होती है अथवा रूद्धोष्म प्रक्रिया होती है ।

13.4.1 गैस में तरंगों का वेग (Velocity of waves in gas)

चित्र 13.3 में अनुप्रस्थ काट a वाली एक बेलनाकार (cylindrical)नली जिसकी लम्बाई उसके व्यास की तुलना में बहुत अधिक है को x-अक्ष के अनुदिश प्रदर्शित किया गया है । इस नली में कोई गैस भरी हुई है तथा इस गैस स्तम्भ में एक तरंग +X दिशा में संचरित हो रही है। नली के सिरे से x तथा $x+\delta x$ दूरियों पर दो परिच्छेद तल A तथा B स्थित है । पहले हम परिच्छेद तल A पर विचार करते हैं । तरंग संचरण के कारण तल A पर स्थित सभी गैसीय कण (gaseous particles)तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश कम्पन करने लगते हैं । जब ये कण अग्र गति (+X दिशा में गति)करते हैं तो ये अपने पास (दांयी ओर)स्थित गैस पर दाब लगाते है जिससे यहां की गैस संपीडित (compress)हो जाती है अर्थात एक संपीडन का निर्माण होता है । इसी प्रकार से पश्चय् गति (-X दिशा में गति)के समय तल A के पास (दांयी ओर)की गैस पर दाब कम हो जाता है और यह विरलित हो जाती है अर्थात एक विरलन (rarefaction)का निर्माण होता है । इस प्रकार से सम्पूर्ण गैस में दाब में परिवर्तनों के कारण संपीडनों तथा विरलनों के रूप में तरंग आगे बढती है । चूंकि गैस में तरंगों की गति में दाब में परिवर्तनों की महत्वपूर्ण भूमिका है, अत: गैस में तरंगों को दाब तरंगें भी कहा जा सकता है ।



चित्र 13.3 गैस में दाब तरंगें

तरंग का वेग ज्ञात करने के लिये मान लीजिये तरंग संचरण के कारण परिच्छेद तल A में विस्थापन ψ तथा तल B में विस्थापन $\psi + \delta\psi$ होता है । चूंकि तलों A व B के मध्य दूरी $\delta\psi$ है अत: इन तलों के मध्य स्थित गैस अल्पांश का प्रारम्भिक आयतन V निम्न होगा

$$V = a\delta x \qquad ...(13.18)$$

विस्थापित एवं प्रारम्भिक अवस्थाओं में तलों A तथा B के मध्य स्थित गैस के आयतन में परिवर्तन ΔV हम निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं -

$$\Delta V = a\ (A'B') - a\ (AB)$$
$$= a\ [(A'B+BB') - (AA'+A'B)]$$
$$= a\ [BB' + AA']$$
$$= a\ [\psi + \delta\psi - \psi]$$

या $$\Delta V = a\delta\psi \qquad ...(13.19)$$

तलों A व B के मध्य स्थित गैस में आयतन विकृति s निम्न होगी ।

$$s = \frac{\text{आयतन में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक आयतन}}$$

या $$s = \frac{\Delta V}{V} = \frac{a\delta\psi}{a\delta x} = \frac{\delta\psi}{\delta x}$$

$\because$ $$\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)_{\delta x \to 0} = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$\therefore$ $$s = \frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad ...(13.20)$$

आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (K)के रूप में प्रतिबल निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है-

प्रतिबल = K x आयतन विकृति

गैसों के लिये प्रतिबल के स्थान पर दाब (P)का प्रयोग किया जाता है । अत: गैस स्तम्भ के किसी अनुप्रस्थकाट तल पर दाब

$$p = -K\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad ...(13.21)$$

क्या आप बतला सकते हैं कि यहां ऋण चिन्ह क्या प्रदर्शित करता है? यहाँ ऋण चिन्ह यह प्रकट करता है कि दाब तथा आयतन में परिवर्तन विपरीत होते है अर्थात् दाब में कमी होने

पर आयतन में वृद्धि तथा दाब में वृद्धि होने पर आयतन में कमी होती है । समी. (13.21)से परिच्छेद तल A पर दाब

$$p_x = -K\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad ...(13.22)$$

परिच्छेद तल B पर दाब

$p_{x+\delta x}$ तल A पर दाब $+\delta x$ दूरी में दाब में परिवर्तन

या $$p_{x+\delta x} = p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x}.\delta x \quad ...(13.23)$$

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-K\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = -K\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

यहां $\frac{\partial p_x}{\partial x}, +x-$ दिशा में तरंग संचरण के कारण दाब में परिवर्तन की दर हैं । यहां यह ध्यान देने योग्य है कि तल B पर दाब, तल A पर दाब के विपरीत होगा ।

अत: A तथा B तलों के मध्य गैस के आयतन अल्पांश ΔV पर परिणामी बल F निम्न होगा-

F = काट क्षेत्र x दाबान्तर

अत: $$F = a\left[p_x - p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x}.\delta x\right] \quad ...(13.24)$$

या $$F = a\frac{\partial p_x}{\partial x}\delta x \quad ...(13.25)$$

समी. (13.22)से p_x का मान रखने पर

$$F = aK\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.\delta x \quad ...(13.26)$$

हम जानते हैं कि आयतन अल्पांश ΔV में स्थित गैस के द्रव्यमान एवं गैस कणों के त्वरण का गुणनफल भी बल के बराबर होता है, अत:

F = अल्पांश में स्थित गैस क्ष द्रव्यमान x अल्पांश में स्थित गैस के कणों का त्वरण

या $$F = (a\delta x)\,p\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad ...(13.27)$$

अत: समी. (13.26)तथा (13.27)से

$$ak\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.\delta x = a\delta x p\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad ...(13.28)$$

या $$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{K}{P}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad ...(13.29)$$

उपरोक्त समी. (13.29)गैस स्तम्भ में तरंग की अवकल समीकरण है । इस समीकरण की तुलना तरंग की मानक समीकरण से करने पर गैस में तरंगों के वेग के लिये

$$V^2 = \frac{K}{p}$$

या $$V = \sqrt{\frac{K}{P}}$$ ...(13.30)

अत: गैसों में तरंग का वेग, गैस के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक तथा घनत्व पर निर्भर करता है ।

13.4.2 दाब तरंगें (Pressure waves)

गैस में तरंग की समीकरण को हम निम्न रूप में भी प्राप्त कर सकते हैं । समी. (13.22)से

$$p_x = K\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

इस समीकरण का समय t के सापेक्ष दो बार अवकलन करनें पर

यहाँ $\psi = \psi(x_1 \; t)$इस फलन का अवकलन पहले x के साथ हो अथवा t के साथ, कोई अन्तर नहीं पड़ता हैं ।

$$\frac{\partial^2 p_x}{\partial t^2} = -K\frac{\partial^2}{\partial t^2}.\frac{\partial \psi}{\partial x}$$ ...(13.31)

या $$\frac{\partial^2 p_x}{\partial t^2} = -K\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right)$$ ...(13.32)

समी. (13.25)से F का मान रखने पर

$$\frac{\partial^2 p_x}{\partial t^2} = -K\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F}{a\delta x}P\right)$$ ...(13.33)

अब समी (13.25)से F का मान रखने पर

$$\frac{\partial^2 p_x}{\partial t^2} = -K\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{a}{a\delta x}P\frac{\partial p_x}{\partial x}\delta x\right)$$ ...(13.34)

या $$\frac{\partial^2 p_x}{\partial t^2} = \frac{K}{P}\frac{\partial^2 p_x}{\partial x^2}$$ ...(13.35)

उपरोक्त समी. (13.35)की तुलना तरंग की मानक समीकरण से करने पर यह ज्ञात होता है कि इसका स्वरूप भी तरंग समीकरण के सादृश्य हैं । इस समीकरण से यह स्पष्ट है कि दाब परिवर्तन भी सामान्य रूप से अनुदैर्ध्य तरंग के समान गैस में संचरित होते हैं । इस प्रकार की तरंगों को दाब तरंगें कहते हैं । इन दाब तरंगों का गैस में वेग भी $\sqrt{\frac{K}{P}}$ ही होता है ।

13.4.3 न्यूटन की परिकल्पना (Newtons hypothesis)

आपने पढ़ा है कि गैस में तरंग संचरण संपीडनों एवं विरलनों के रूप में होता है । संपीडित क्षेत्र में ताप, विरलित क्षेत्र में ताप की तुलना में कुछ अधिक होता है । न्यूटन ने यह माना कि उच्च ताप (संपीडित)क्षेत्र से ऊष्मा के न्यून ताप (विरलित)क्षेत्र की ओर प्रवाहित होने के कारण तरंग संचरण के समय सम्पूर्ण गैस का ताप समान रहता है । अन्य शब्दों में जब कोई तरंग गैस में से गुजरती है तो उसका ताप नियत रहता है अर्थात यह एक समतापी प्रक्रिया है ।

आप पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं कि समतापी प्रक्रम की अवस्था समीकरण (equation of state)निम्न होती है-

PV = नियतांक ...(13.36)

जहां P गैस का दाब तथा V आयतन है । उपरोक्त समीकरण का v के सापेक्ष अवकलन (differentiation)करने पर

$$P+V\frac{\partial p}{\partial V}=0 \quad ...(13.37)$$

अत: $$P=-\frac{\partial p}{(\partial V/V)} \quad ...(13.38)$$

परन्तु दाबान्तर$(-\partial p)$ प्रतिबल तथा $\left(\frac{\partial V}{V}\right)$आयतन विकृति के बराबर होता है अत:

$$P = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}} = K \quad ...(13.39)$$

अत: न्यूटन की परिकल्पना के अनुसार गैस में तरंग का वेग होगा-

$$V=\sqrt{\frac{K}{P}}=\sqrt{\frac{P}{P}} \quad ...(13.40)$$

न्यूटन की परिकल्पना के अनुसार यदि सामान्य दाब एवं ताप (S.T.P.)पर वायु में ध्वनि का वेग ज्ञात किया जाय तो यह 280 मीटर सेकण्ड प्राप्त होता है जो कि वास्तविक मान 332 मीटर / सेकण्ड से भिन्न है । अत: न्यूटन की परिकल्पना सत्य नहीं हैं ।

13.4.4 लाप्लॉस संशोधन (Laplace ‘s correction)

वैज्ञानिक लाप्लॉस ने यह माना कि गैस में तंरग संचरण के करण उत्पन्न संपीडन एवं विरलन इतने शीघ्र होते हैं कि संपीडित क्षेत्र से विरलित क्षेत्र में ऊष्मा के संचरण के लिये अपेक्षित समय नहीं मिलता है । इसके अतिरिक्त गैसें प्राय: ऊष्मा की कुचालक (insulater)होती हैं अत: उसमें ऊष्मा का संचरण लगभग असंभव होता है । लाप्लॉस के अनुसार गैस में तरंग संचरण एक रूद्धोष्म प्रक्रिया है, न कि समतापी प्रक्रिया । आप जानते हैं कि रूद्धोष्म प्रक्रम में अवस्था समीकरण निम्न होता है,

PV^{γ} = नियतांक ... (13.41)

जहां y, स्थिर दाब तथा स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात है । समी. (13.41)का V के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$pyV^{y-1}+V^{y}\frac{\partial P}{\partial V}=0 \quad ...\ (13.42)$$

अत: आयतन प्रत्यास्थता गुणांक K निम्न होगा

$$K=\frac{-\partial P}{(\partial V/V)}=yP$$

इसलिये गैस में तरंग का वेग, लाप्लॉस के अनुसार होगा-

$$V=\sqrt{\frac{K}{P}}=\sqrt{\frac{yp}{P}} \quad \ldots (13.43)$$

समी. (13.43)के अनुसार यदि S.T.P पर वायु में ध्वनि का वेग ज्ञात किया जाय तो यह 330 मीटर / सेकण्ड प्राप्त होता है जो कि वास्तविक मान के अतिनिकट हैं । अत: माध्यम में तरंग संचरण एक रूद्धोष्म प्रक्रिया है न कि समतापी प्रक्रिया।

समी. (13.43)का उपयोग आप गैस में तरंगों के वेग की ताप पर निर्भरता के अध्ययन के लिये कर सकते हैं । इसके लिये आदर्श गैस की अवस्था समीकरण से

$$P=\frac{RT}{V} \quad \ldots (13.44)$$

$P=\frac{M}{V}$ ध्वनि के लिये
$V_t - V_0 + 0.61t$ जहां
V_t, t ताप तथा
$V_0, 0^0C$ ताप पर वेग हैं।

समी. (13.43)में यह मान रखने पर

$$V=\sqrt{\frac{y}{P}\frac{RT}{V}}=\sqrt{\frac{yRT}{V}.\frac{V}{M}}=\sqrt{\frac{yRT}{M}} \quad \ldots (13.45)$$

समी. (13.45)से स्पष्ट है कि गैस में तरंग का वेग, गैस के परमताप के वर्गमूल के अनुक्रमानुपाती होता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

6. लाप्लॉस के संशोधन के अनुसार गैस में तरंग संचरण एक रुद्धोंष्म प्रक्रिया हैं अथवा समतापी प्रक्रिया ?

----

7. गैस में तरंग के वेग गणना न्यूटन की परिकल्पना के आधार पर करनी चाहिए अथवा लाप्लॉस के संशोधन के आधार पर ?

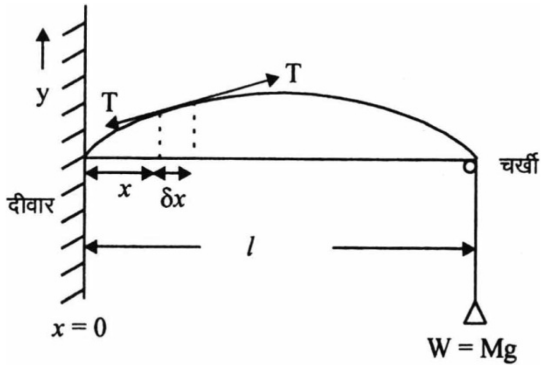
----

8. माध्यम के ताप में वृद्धि की जाए तो तरंगों के वेग पर क्या होगा ?

13.5 तानी डोरी में अनुप्रस्थ तरंगे (Transvers wave in a stretched string)

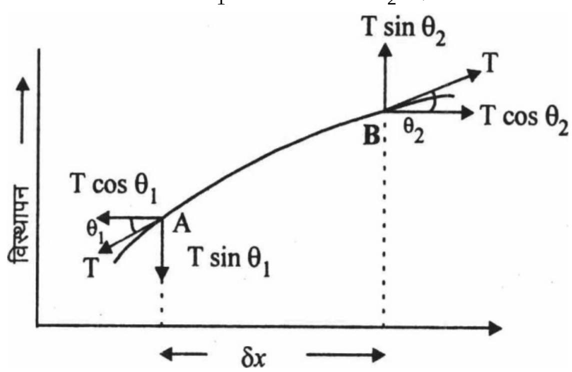
ठोस छड़ तथा गैस में तरंगों के वेग के लिये सूत्र स्थापित करने के पश्चात् अब हम एक तनी हुई डोरी में संचरित अनुप्रस्थ तरंगों के वेग के लिये सूत्र स्थापित करेंगे । चित्र 13.4 के अनुसार L लम्बाई की एक डोरी, जो एक सिरे से बँधी (clamp)हुई है, से W (= Mg)भार लटका कर इस डोरी को क्षैतिज रखते हुए तनाव की स्थिति में रखा जाता है । यह डोरी समांगी (homogeneous)होती है अर्थात इसकी पूरी लम्बाई के अनुदिश इसकी एकांक लम्बाई का द्रव्यमान m समान होता है। सरलता के लिये हम यह मान लेते हैं कि डोरी पूर्णतया प्रत्यास्थ (perfectly elastic)है तथा कम्पन करते समय इसकी लम्बाई में परिवर्तन नहीं होता है । यदि इस तनी हुई डोरी को Y- दिशा में थोड़ा खींचकर छोड़ दें तो डोरी अपनी माध्य अवस्था के ऊपर-

नीचे कम्पन करना प्रारम्भ कर देगी । डोरी को खींचने पर इसके दोनों सिरों पर विपरीत दिशा में तनाव बल लगने लगेंगे जो कि डोरी को साम्यवस्था में लाने का प्रयत्न करेंगे ।



चित्र 13.4 तनी डोरी में तरंगें

डोरी में स्थापित कम्पनों का समीकरण ज्ञात करने के लिये डोरी के अल्पांश AB, जो कि बंधन (clamp)से x दूरी पर स्थित है, पर विचार करतें हैं । चित्र व 13.5 में इसी अल्पांश को बड़ा करके दिखलाया गया है ताकि आप उस पर कार्य करने वाले बलों को भलीभांति समझ सकें । अब हमें δx लम्बाई के इस अल्पांश AB पर परिणामी बल ज्ञात करना है। क्या आप बतला सकते हैं कि अल्पांश के सिरों A तथा B पर कार्य करने वाले तनाव बल T की दिशा क्या होगी ? इस बल की दिशा सदैव उन बिन्दुओं पर स्पर्श-रेखा (tangent)के अनुदिश होती है । माना ये तनाव बल A तथा B बिन्दुओं पर क्षैतिज (horizon)के साथ क्रमशः θ_1 तथा θ_2 कोण बनाते है । अतः इन बिन्दुओं पर तनाव बल के क्षैतिज घटक क्रमशः $T\cos\theta_1$ तो तथा $T\cos\theta_2$ एवं उर्ध्व घटक क्रमशः $T\sin\theta_1$ तथा $T\sin\theta_2$ होंगे ।



चित्र 13.5 तनी डोरी के अल्पांश पर कार्यरत बल

वास्तव में डोरी में विस्थापन इसकी लम्बाई की तुलना में अति अल्प (very small)लेता है इसलिये कोण θ_1 और θ_2 भी अल्प होते हैं । अब डोरी के अल्पांश AB पर क्षैतिज दिशा में कार्यरत परिणामी बल F_H निम्न होगा

$$F_H = T\cos\theta_1 - T\cos\theta_2 \quad \text{... (13.46)}$$

लेकिन = $\cos\theta_1 \simeq \; T\cos\theta_2 \; \simeq 1$

अतः $F_H = T - T = 0$ ... (13.47)

इस प्रकार, अल्पांश AB पर क्षैतिज दिशा में परिणामी बल शून्य होगा जबकि उर्ध्वदिशा में इसका मान I निम्न होगा-

$$F = T\sin\theta_1 - T\sin\theta_2 \quad \text{... (13.48)}$$

या $$F = T\theta_1 - T\theta_2 \left(\tan\theta_{1-} \tan T\theta_2\right) \quad \text{... (13.49)}$$

($\because$ कोण अल्प होने के कारण $\sin\theta_1 \simeq \theta_1 \simeq \tan\theta_1$ तथा $\sin\theta_2 \simeq \theta_2 \simeq \tan\theta_2$)

यहां $\tan\theta$ वक्र के ढाल $s = \frac{\partial y}{\partial x}$ के बराबर होता है ।

अत: $$F = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_A - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_B\right] \quad \text{... (13.50)}$$

या $$F = T(s_A - s_B) \quad \text{... (13.51)}$$

यहां s_A व s_B क्रमश: बिन्दु A व B पर ढाल (slope)हैं ।

यदि डोरी के विस्थापन वक्र की प्रवणता (ढालों)की परिवर्तन दर $(\partial s/\partial x)$ हो तो अल्पांश AB के दोनों सिरों पर प्रवणता में अन्तर

$$s_A - s_B = \frac{\partial s}{\partial x}.\delta x \quad \text{...(13.52)}$$

$s = \frac{\partial s}{\partial x}$ रखने पर

$$s_A - s_B = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.\delta x \quad \text{... (13.53)}$$

अत: समी.(13.51)से उर्ध्व दिशा में परिणामी बल होगा

$$F = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.\delta x \quad \text{... (13.54)}$$

इस परिणामी बल का मान सूत्र,

बल = द्रव्यमान x त्वरण x

से ज्ञात करने पर

F = अल्पांश AB का द्रव्यमान x अल्पांश AB का त्वरण

$$F = m\delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{... (13.55)}$$

अत: समी. (13. 54)तथा (13.55)से

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\delta x = m\delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{... (13.56)}$$

या $$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{m}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{... (13.37)}$$

उपरोक्त समीकरण डोरी में स्थापित तरंग की अवकल समीकरण है । इसकी तुलना तरंग की मानक समीकरण से करने पर डोरी में तरंग का वेग v होगा -

$$V = \sqrt{\frac{T}{m}} \quad \text{... (13.58)}$$

अत: डोरी में तरंग का वेग उस पर लगाये गये तनाव T (= Mg)तथा डोरी के एकांक लम्बाई के द्रव्यमान m पर निर्भर करता है । एकांक लम्बाई द्रव्यमान को डोरी की त्रिज्या r एवं पदार्थ के घनत्व d के पदों में लिखने पर

$$M = \pi r^2 d$$

अत: $$V = \sqrt{\frac{Mg}{\pi r^2 d}} \quad \text{...(13.59)}$$

यहाँ M, डोरी में तनाव उत्पन्न करने के लिये लटकाया गया द्रव्यमान तथा g गुरूत्व जनित त्वरण है । समी. (13.59)से स्पष्ट है कि डोरी में तनाव बढ़ने से उसमें से संचरित अनुप्रस्थ तरंगों का वेग बढ़ जायेगा तथा यही प्रभाव डोरी की एकांक लम्बाई के द्रव्यमान का मान कम होने पर प्राप्त होगा ।

उदाहरण 13.1 एक लोहे की छड़ में स्थापित अनुदैर्ध्य तरंग का वेग ज्ञात कीजिये । लोहे के लिये $Y = 2.11x10^{11}$ न्यूटन / मीटर^2 तथा लोहे का घनत्व d = 7600 किलोग्राम / मीटरी^{3} है ।

हल: आप जानते है कि ठोस छड़ में तरंग के वेग के लिये निम्न सूत्र होता है-

$$V = \sqrt{\frac{Y}{d}}$$

प्रश्नानुसार $Y = 2.11x10^{11}$ न्यूटन /मी^{2}

तथा d = 7600 किग्रा / मी^{3}

अत: $$V = \sqrt{\frac{2.11\times10^{11}}{7600}}$$

या $$V = \sqrt{\frac{211}{760000}\times10^{11}}$$

या $$V = \sqrt{\frac{2110}{76}\times10^{6}}$$

या $Y = 5.2x10^3$ मी / से

उदाहरण 13.2 वायु में ध्वनि तरंगों का वेग ज्ञात कीजिये । वायु का घनत्व 1.293 किलोग्राम / मीटर^3 वायुमंडलीय दाब $1.01x10^5$ न्यूटन / मीटर^2 तथा वायु के लिये y = 1.4 है ।

हल: आप जानते हैं कि किसी गैस में अनुदैर्ध्य तरंगों का वेग निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है-

$$V = \sqrt{\frac{yP}{P}}$$

प्रश्नानुसार $p = 1.01x10^5$ न्यूटन / मीटर^2, p = 1.293 किलोग्राम / मीटर^3

तथा $y = 1.4$

अतः वायु में ध्वनि तरंगों का वेग

$$V = \sqrt{\frac{1.4 \times 1.01 \times 10^5}{1.293}}$$

या v = 3.31×10^2 = 331 मी / से

उदाहरण 13.3 एक लम्बी तथा समान मोटाई की डोरी जिसका रेखीय घनत्व 0.1 किलोग्राम / मीटर है, पर 40 न्यूटन का तनाव बल लगाया जाता है । डोरी में स्थापित तरंग का वेग ज्ञात कीजिये ।

हल: आप जानते हैं कि डोरी में तरंग का वेग निम्न सूत्र द्वारा दिया जाता है

$$V = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

प्रश्नानुसार, तनाव बल T = 40 न्यूटन

एकांक लम्बाई का द्रव्यमान अर्थात रेखीय घनत्व

M = 0.1 किग्रा / मी

अतः $V = \sqrt{\frac{40}{.1}}$

या $V = \sqrt{400}$

या $V =$ 20 मी / से

13.6 सारांश (Summary)

- तरंग संचरण के लिये माध्यम में जड़त्व एवं प्रत्यास्थता के गुणों का होना आवश्यक होता है ।
- तरंग संचरण के लिये माध्यम का प्रतिरोध अल्प होना चाहिये ।
- एक ही माध्यम में तरंग का वेग समान रहता है ।
- जब तरंगें एक माध्यम से दूसरे माध्यम में प्रवेश करती है तो उनकी आवृत्ति में परिवर्तन नही होता है ।
- ठोस छड़ में संचरित अनुदैर्ध्य तरंगों का वेग छड़ के पदार्थ के यंग प्रत्यास्थता गुणांक एवं घनत्व पर निर्भर करता है।
- गैस में तरंग का वेग, गैस के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक तथा घनत्व पर निर्भर करता है ।
- न्यूटन की परिकल्पना के अनुसार गैस में तरंग संचरण एक समतापी प्रक्रिया है ।
- लाप्लॉस संशोधन के अनुसार गैस में तरंग संचरण एक रूद्धोष्म प्रक्रिया है ।
- लाप्लॉस संशोधन के आधार पर की गई गणना से प्राप्त वेग के मान वास्तविक मान के अतिनिकट होते हैं ।
- डोरी मे तरंग का वेग उस पर लगाये गये तनाव T = (= Mg)तथा डोरी के एकांक लम्बाई के द्रव्यमान m पर निर्भर करता है ।

- पतली डोरी में तरंग का वेग, मोटी डोरी में तरंग के वेग से अधिक, होता है ।

13.7 शब्दावली (Glossary)

अवनमन	Depression
अक्षीय	Axial
आवेग	Impulse
उन्नयन	Elevation
कंकड़	Pebble
घनत्व	Density
चर्खी	Pully
जड़त्व	Inertia
परिकल्पना	Hypothesis
परिणामी	Resultant
रूद्धोष्म	Adiabatic
समतापी	Isothermal
संमागी	Homogeneous
संसजन	Cohesion
क्षैतिज	Horizon

13.8 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1.	D.S Mathur	Elements of Properties of Matter	S.Chand & Co., New Delhi
2.	N.K. Bajaj	The Physics of Waves and Oscillation	Tata Mc Graw- Hill Publishing Company Ltd, Delhi
3.	A.P French	Vibrations and Waves (MIT Introductory Physics Series)	CBS Publishing and Distributers, Delhi
4.	एम.पी. सक्सेना , पी.आर.सिंह, व एस. एस. रावत	दोलन एवं तरंगे	कॉलेज बुक हाउस, जयपुर

13.9 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment questions)

1. हां, तरंग का वेग भिन्न-भिन्न माध्यमों में भिन्न-भिन्न होता है ।
2. असत्य ।
3. असत्य ।
4. घनत्व के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होता है ।
5. वेग का मान आधा रह जायेगा ।

6. रूद्धोष्म प्रक्रिया ।
7. लाप्लॉस के संशोधन के आधार पर ।
8. तरंगों के वेग में भी वृद्धि होगी ।

13.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. तरंग संचरण के लिये माध्यम के कौन से गुण महत्वपूर्ण होते हैं, लिखिये ।
2. ठोस पदार्थ A का यंग प्रत्यस्थता गुणांक का मान ठोस पदार्थ B के यंग प्रत्यास्थता गुणांक के मान से अधिक है। तरंग का वेग किस पदार्थ में अधिक होगा ।
3. यदि किसी गैस का परमताप चार गुना कर दिया जाय तो उसके वेग में कितने गुना वृद्धि होगी ।
4. गैस में तरंग संचरण के लिये न्यूटन की परिकल्पना क्या है ?
5. पतली डोरी में तरंग का वेग अधिक होगा या मोटी डोरी में ?

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

6. माध्यम में तरंग संचरण की प्रक्रिया को विस्तार पूर्वक समझाइये ।
7. गैसीय माध्यम में तरंग वेग के लिये सूत्र स्थापित कीजिये ।
8. गैसीय माध्यम में तरंग संचरण के लिये न्यूटन की परिकल्पना एवं लाप्लॉस संशोधन की व्याख्या कीजिये एवं तरंग वेग की ताप पर निर्भरता को समझाइये ।
9. सिद्ध कीजिये कि एक तनी हुई डोरी में अनुप्रस्थ तरंगों का वेग $\sqrt{T}$ के अनुक्रमानुपाती तथा $\sqrt{m}$ के अनुक्रमानुपाती होता है जहां T डोरी में तनाव तथा m डोरी की एकांक लम्बाई का द्रव्यमान हैं ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

10. एक ठोस छड़ के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक Y, 5×10^{11} न्यूटन / मीटर^2, है तथा घनत्व d, 7800 किलोग्राम / मीटर^3 है । छड़ में संचरित तरंग का वेग ज्ञात कीजिये ।

(उत्तर: 80.0×10^2 मीटर /सेकण्ड**)**

11. यदि वायु का घनत्व 1.29 किलोग्राम / मीटर^3 तथा वायु में ध्वनि का वेग 300 मीटर / सेकण्ड हो तो वायु के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक का मान ज्ञात कीजिये ।

(उत्तर: 1.4×10^5 न्यूटन / मी^{2}**)**

12. समान ताप पर हीलियम तथा हॉइड्रोजन में ध्वनियों के वेग का अनुपात ज्ञात करो ।

जबकि हीलियम के लिये $y = \frac{5}{3}$ हॉइड्रोजन के लिये $y = \frac{7}{5}$ है ।

(उत्तर: 0.77**)**

13. l मीटर लम्बाई तथा m किलोग्राम द्रव्यमान प्रति एकांक लम्बाई वाली डोरी में अनुप्रस्थ तरंगें उत्पन्न की जाती है । यदि मा ml^2 किलोग्राम भार का तनाव डोरी पर लगाया

जाता है तो तरंग को डोरी के एक सिरे से दूसरे सिरे तक जाने में लगने वाले समय का परिकलन कीजिये।

(उत्तर: 0.31 सेकण्ड**)**

इकाई-14

विद्युत-चुम्बकीय तरंगें
(Electromagnetic Waves)

इकाई की रूपरेखा

14.0 उद्देश्य
14.1 प्रस्तावना
14.2 विद्युत-चुम्बकीय तरंगें
14.3 विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का ऊर्जा घनत्व एवं ऊर्जा फ्लक्स
14.4 विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का संवेग घनत्व
14.5 विकिरण दाब
14.6 फूरिये विश्लेषण
14.6.1 वर्गाकार तरंग का फूरिये विश्लेषण
14.7 सारांश
14.8 शब्दावली
14.9 संदर्भ ग्रन्थ
14.10 बोध प्रश्नों के उत्तर
14.11 अभ्यासार्थ प्रश्न

14.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप

- विद्युत-चुम्बकीय तरंगों की प्रकृति के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे;
- विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के ऊर्जा घनत्व एवं संवेग घनत्व का अभिप्राय समझ सकेंगे;
- पॉयटिंग सदिश का अर्थ जान सकेंगे;
- विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के कारण विकिरण दाब के बारे में अध्ययन कर सकेंगे;
- फूरिये विश्लेषण का महत्व समझ सकेंगे ।

14.1 प्रस्तावना (Introduction)

आप इकाई 12 तथा 13 में पढ़ चुके हैं कि यांत्रिक तरंगों के संचरण द्वारा ऊर्जा का स्थानान्तरण होता है तथा इनके संचरण के लिये किसी माध्यम की आवश्यकता होती है । यह आवश्यक नहीं है कि माध्यम सर्वदा उपलब्ध हो । जैसे सूर्य एवं पृथ्वी के मध्य करोड़ों किलोमीटर दूरी में कोई माध्यम नहीं होता है फिर भी सूर्य से ऊष्मा एवं प्रकाश के रूप में ऊर्जा पृथ्वी तक पहुँच जाती है । चूंकि ऊर्जा का यह स्थानान्तरण यांत्रिक तरंगों द्वारा संभव नहीं है अत: इस संचरण को समझने के लिये विशेष प्रकार की तरंगों की आवश्यकता होगी जो कि निर्वात में भी संचरित हो सकती हो । इन विशेष प्रकार की तरंगों को विद्युत-चुम्बकीय तरंगें कहते है । विज्ञान

एवं तकनीकी (science and technology)के इस युग में विद्युत-चुम्बकीय तरंगों की महत्वपूर्ण भूमिका होती है अत: इस इकाई में आपको इन तरंगों के बारे में विस्तार से जानकारी दी जायेगी ।

अनुच्छेद 14.2 में आप विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के गुणों, उनकी प्रकृति तथा उनकी संरचना के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे । अनुच्छेद 14.3 में यह अध्ययन करेंगे कि जब विद्युत-चुम्बकीय तरंगें ऊर्जा स्थानान्तरित करती हैं तो आकाश में किसी क्षण पर इकाई आयतन में निहित ऊर्जा अर्थात ऊर्जा घनत्व कितना है तथा ऊर्जा के प्रवाह की दर क्या है । अनुच्छेद 14.4 में आप यह जान सकेंगे कि विद्युत-चुम्बकीय तरंगों द्वारा ऊर्जा के साथ साथ संवेग का संचरण भी होता है । इस अनुच्छेद में आप संवेग घनत्व के लिये सूत्र भी स्थापित करेंगे । जब विद्युत-चुम्बकीय तरंगें किसी पृष्ठ पर आपतित होती हैं तो उस पृष्ठ पर दाब लगाती है जिसे विकिरण दाब कहते हैं । विकिरण दाब के बारे में जानकारी आप अनुच्छेद व 14.5 में प्राप्त करेंगे ।

अन्त में आपको अनुच्छेद व 14.6 में जटिल आवर्ती फलनों के लिये फूरिये विश्लेषण किस प्रकार किया जाता है यह समझाया जायेगा । फूरिये विश्लेषण में जटिल फलनों का अध्ययन अनन्त सरल आवर्ती फलनों के योग के रूप में किया जाता है ।

14.2 विद्युत-चुम्बकीय तरंगें (Electromagnetic waves)

आपने इकाई-6 में विद्युत परिपथ में दोलनों का अध्ययन किया है । जब इन दोलनों की आवृत्ति अधिक होती है तो इनके कारण एक विशेष प्रकार की तरंगें उत्पन्न होती हैं जो कि यांत्रिक तरंगों से भिन्न होती है एवं निर्वात में भी गति कर सकती है । इन तरंगों को विद्युत-चुम्बकीय तरंगें कहते हैं । परमाणुओं में इलेक्ट्रॉनों के उच्च ऊर्जा स्तरों से निम्न ऊर्जा स्तरों में संक्रमण (transition)से, उच्च ताप पर किसी गैस के आयनों की त्वरित गति से तथा चालकों में उच्च आवृत्ति की प्रत्यावर्ती धारा प्रवाहित करने से भी विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का उत्सर्जन होता है । यदि आप ध्यान दें तो उपरोक्त सभी उदाहरणों में आवेश की त्वरित गति विद्यमान है । अत: सरलतम रूप में आप कह सकते हैं कि आवेशों की त्वरित गति के कारण विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का उत्सर्जन होता है ।

मैक्सवेल ने विद्युत एवं चुम्बकीय क्षेत्रों के प्रायोगिक तथ्यों (experimental facts)को अवकल समीकरणों के रूप में लिखकर इस प्रकार की तरंगों की प्रकृति एवं स्वरूप ज्ञात करने का प्रयास किया । वास्तव में मैक्सवेल के समीकरण स्थिर-वैद्युतिकी में गॉउस प्रमेय, चुम्बकीय में गॉउस प्रमेय, फैराडे के विद्युत-चुम्बकीय प्रेरण के नियम इत्यादि के अवकल रूप होते हैं । मैक्सवेल के चार समीकरण निम्न हैं-

$$\nabla.\overline{E} = \frac{P}{\in} \quad \text{... (14.1)}$$

$$\nabla.\overline{B} = 0 \quad \text{...(14.2)}$$

$$\nabla \times \overline{E} = -\frac{\overline{\partial B}}{\partial t} \quad \text{... (14.3)}$$

$$\nabla \times \overline{B} = \mu \overline{J} + \mu \in \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \qquad ...(14.4)$$

जहाँ p आदेश घनत्व, J धारा घनत्व, μ माध्यम की पारगम्यता (permeability)तथा ∈ माध्यम की विद्युतशीलता (permitivity)है । यदि एक समदैशिक (isotropic)माध्यम आवेश एवं धारा मुक्त हो तो p = 0 तथा J = 0 होगा। अत: इस माध्यम में मैक्सवेल के समीकरणों का रूप निम्न होगा-

$$\nabla . \overline{E} = 0 \qquad ... (14.5)$$

$$\nabla . \overline{B} = 0 \qquad ... (14.6)$$

$$\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \qquad ... (14.7)$$

$$\nabla \times \overline{B} = \mu \in \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \qquad ... (14.8)$$

समी. (14.7)का दोनों तरफ कर्ल लेने पर

$$\nabla \times \nabla \times \overline{E} = -\nabla = \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \overline{B}) \qquad ...(14.9)$$

लेकिन हम जानते हैं

$$\nabla \times \nabla \times \overline{E} = -\nabla(\nabla . \overline{E}) - \nabla^2 \overline{E}$$

∴ सभी.(14.9)से

$$\nabla(\nabla . \overline{E}) - \nabla^2 \overline{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \overline{B})$$

समी. (14.5)तथा (14.8)का उपयोग करने पर

$$\nabla^2 \overline{E} = \mu \in \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial t^2} \qquad ... (14.10)$$

इसी प्रकार से समी (14.8)का दोनों तरफ कर्ल लेकर आप समी. (14.10)की भांति चुम्बकीय क्षेत्र के लिये निम्न समीकरण प्राप्त कर सकते हैं-

$$\nabla^2 \overline{B} = \mu \in \frac{\partial^2 \overline{B}}{\partial t^2} \qquad ...(14.11)$$

अब आप जानते हैं कि किसी स्वेच्छिक दिशा में संचरित प्रगामी तरंग का मानक अवकल समीकरण निम्न होता है-

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad ...(14.12)$$

समी. (14.12)की तुलना समी. (14.10)तथा (14.11)से करने पर ज्ञात होता है कि विद्युत क्षेत्र $\overline{E}$ तथा चुम्बकीय क्षेत्र $\overline{B}$ दोनों ही समय तथा दूरी के सापेक्ष उसी प्रकार परिवर्तित होते हैं जिस प्रकार यांत्रिक तरंग में कण का विस्थापन समय तथा दूरी के साथ परिवर्तित होता है । अत: इन क्षेत्र तरंगों (field waves)का वेग v निम्न होगा-

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu \in}} \quad ...(14.13)$$

तथा समी. (14.10)एवं (14.11)के निम्न हल होगें-

$$\overline{E} = \overline{E}_0 \sin(\omega t - \overline{k}.\overline{r})$$

तथा $$\overline{B} = \overline{B}_0 \sin(\omega t - \overline{k}.\overline{r})$$

उपरोक्त समीकरणों से यह स्पष्ट है कि विद्युत-चुम्बकीय तरंगों में $\overline{E}$ तथा $\overline{B}$ सदिश समान कला में होते हैं । यहाँ k संचरण नियतांक है तथा $\overline{E}_0$ व $\overline{B}_0$ क्रमश: विद्युत एवं चुम्बकीय क्षेत्रों के आयाम हैं ।

उपरोक्त विवेचना से यह स्पष्ट है कि सभी विद्युत-चुम्बकीय प्रभाव माध्यम में तरंग की भांति (1 / $\sqrt{\mu \in}$)कला वेग से संचरण करते हैं । इस संयुक्त रूप से संचरित तरंग को विद्युत-चुम्बकीय तरंग कहते हैं । निर्वात के लिये $\mu = \mu_0$ $4\pi \times 10^7$ हेनरी / मीटर तथा $\in = \in_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9}$ फैरड / मीटर, अत: समी. (14.13)से निर्वात में विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का वेग

$$V = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times \frac{1}{36\pi \times 10^9}}} = 3 \times 10^8 \text{ मीटर 7 सेकण्ड'}$$

लेकिन वेग का यह मान तो प्रकाश के वेग के मान के बराबर है अत: निर्वात में विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का वेग प्रकाश के वेग के बराबर होता है ।

माध्यम का अपवर्तनांक - विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के लिये माध्यम का अपवर्तनांक (refractive index)

$$n = \text{निर्वात में वेग} = \frac{c}{V} = \frac{1/\sqrt{\mu_0 \in_0}}{1/\sqrt{\mu \in}} = \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0}} . \sqrt{\frac{\in}{\in_0}} = \sqrt{\mu_r \in_r}$$

जहाँ μ_r आपेक्षिक (relative)पारगम्यता तथा $\in_r$ आपेक्षिक विद्युतशीलता है । अधिकांश माध्यमों के लिये $\mu_r = 1$ होता है अत:

$$n = \sqrt{\in_r} \text{ या } \in_r = n^2 \quad ...(14.14)$$

विद्युत-चुम्बकीय तरंगों की अनुप्रस्थ प्रकृति

माना किसी आवेश एवं धारा मुक्त समदैशिक (isotropic)माध्यम में विद्युत-चुम्बकीय तरंग X- दिशा में संचरित हो रही है । इसलिये विद्युत-चुम्बकीय तंरग के घटक (component)क्षेत्र (अर्थात विद्युत एवं चुम्बकीय क्षेत्र)केवल दूरी x तथा समय t के सापेक्ष परिवर्तित होते हैं तथा इनका मान दूरियाँ y एवं z पर निर्भर नहीं करता है अर्थात् इनके लिये

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

अत: $\overline{E}$ तथा $\overline{B}$ निम्न प्रकार से प्रदर्शित किये जा सकते हैं-

$$\overline{E} = \overline{E}\ (\overline{x},t) \qquad ....(14.15)$$

तथा $$\overline{B} = \overline{B}\ (\overline{x},t) \qquad ...(14.16)$$

अब मैक्सवेल की प्रथम समीकरण से

$$\nabla.\overline{E} = 0$$

या $$\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial y}\right).\left(\hat{i}E_x + \hat{j}E_y + \hat{k}E_z\right) = 0$$

या $$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad ...(14.17)$$

लेकिन X- दिशा में संचरित तरंग के लिये

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

अतः समी. (14.17)से

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \qquad ...(14.18)$$

इसी प्रकार से मैक्सवेल की द्वितीय समीकरण अर्थात $\nabla.\overline{B} = 0$ का उपयोग कर सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \qquad ...(14.19)$$

समी. (14.18.)समी. (14.19)तथा (14.19)से स्पष्ट है कि E_x तथा B_x के मान दूरी x पर निर्भर नहीं करते हैं । अब हम मैक्सवेल की तृतीय एवं चतुर्थ समीकरणों की विवेचना वर्तमान संदर्भ में करते हैं । मैक्सवेल की तृतीय समीकरण से

$$\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

या $$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t}(\hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z)$$

अतः $$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\hat{j}\frac{\partial B_x}{\partial t} - \hat{j}\frac{\partial B_x}{\partial t} - \hat{k}\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

उपरोक्त समीकरण में दोनों तरफ $\hat{i}$ के गुणांकों की तुलना करने पर

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \tag{14.20}$$

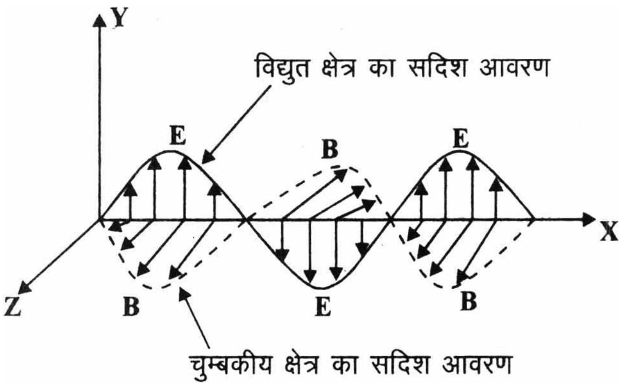
इसी प्रकार से मैक्सवेल की चतुर्थ समीकरण अर्थात् $\nabla \times \overline{B} = \mu \in \frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$ का उपयोग कर आप यह सिद्ध कर सकते हैं कि $\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$

समी. (14.20)एवं (14.21)से यह स्पष्ट है कि B_x तथा E_x के मान समय पर भी निर्भर नहीं करते हैं । यह निष्कर्ष आप पहले से ही निकाल चुके हैं कि E_x तथा दूरी B_x पर भी निर्भर नहीं करते हैं । परन्तु इस प्रकार के नियत मान के क्षेत्रों से तरंग का निर्माण संभव नहीं है क्योंकि तरंग के लिये परिवर्तनशील क्षेत्रों की आवश्यकता होती है । अत: हम मान सकते हैं कि

$$E_x = B_x = 0$$

अर्थात तरंग संचरण की दिशा में विद्युत क्षेत्र तथा चुम्बकीय क्षेत्र के घटकों के मान शून्य होते हैं । इसलिये विद्युत-चुम्बकीय तरंगें अनुप्रस्थ प्रकृति की होती हैं ।

मैक्सवेल की तृतीय एवं चतुर्थ समीकरणों का उपयोग कर आप यह सिद्ध कर सकते हैं कि विद्युत-चुम्बकीय तरंग में विद्युत क्षेत्र $\overline{E}$ तथा चुम्बकीय क्षेत्र $\overline{B}$ सदिश दोनों लम्बवत तल में समान कला में तरंग संचरण करते हैं । उपरोक्त विवेचना से आप यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि विद्युत-चुम्बकीय तरंग में E सदिश, B सदिश तथा V सदिश परस्पर लम्बवत होते हैं । विद्युत-चुम्बकीय तरंग की संरचना को चित्र 14.1 में प्रदर्शित किया गया है ।



चित्र 14.1 विद्युत-चुम्बकीय तरंग

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. क्या नियत वेग से गतिशील आदेश के कारण विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का उत्सर्जन होता है ?

   ----

2. ''ध्वनि की तरंगें विद्युत-चुम्बकीय तरंगें होती हैं ।''यह कथन सत्य है अथवा असत्य है ?

   ----

3. विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का निर्वात में वेग कितना होता है ?

---

4. दिशा में संचरित विद्युत-चुम्बकीय तरंग में सदिश के कम्पन अक्ष के समानान्तर है तो सदिश के कम्पन किस अक्ष के समानान्तर होंगे ?

14.3 विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का ऊर्जा घनत्व एवं ऊर्जा फ्लक्स (Energy density and energy flux of electromagnetic waves)

आप जानते हैं कि विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के संचरण से ऊर्जा (प्रकाश, ऊष्मा आदि)का स्थानान्तरण एक स्थान से दूसरे स्थान तक होता है । ऊर्जा स्थानान्तरण की प्रक्रिया का अध्ययन विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के कारण आकाश (space)में विद्यमान ऊर्जा घनत्व द्वारा किया जाता है । आकाश में किसी बिन्दु पर एकांक आयतन में विद्यमान तरंग ऊर्जा (wave energy)को ऊर्जा घनत्व कहते हैं । इसे U से व्यक्त करते हैं एवं इसका मान निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है । धारा एवं आवेश युक्त आकाश में मैक्सवेल की तृतीय एवं चतुर्थ समीकरणें निम्न होती हैं

$$\nabla \times \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \qquad ...(14.22)$$

तथा

$$\nabla \times \overline{B} = \mu \overline{J} + \mu \in \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \qquad ...(14.23)$$

जहाँ J धारा घनत्व, μ पारगम्यता तथा ∈ विद्युतशीलता है । समी. (14.22)का $\overline{B}$ के साथ अदिश गुणनफलन करने पर

$$\overline{B}.(\nabla \times \overline{E}) = -\overline{B}.\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}B^2 \qquad ...(14.24)$$

$$\frac{\partial B^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{B}.\overline{B} = \overline{B}.\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}.\overline{B} = 2\overline{B}.\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

$$\overline{B}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial t}$$

इसी प्रकार समी. (14.13)का $\overline{E}$ के साथ अदिश गुणनफल करने पर

$$\overline{E}.(\nabla \times \overline{E}) = \mu \overline{E}.\overline{J} + \mu \in \overline{E}.\frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$$

या

$$\overline{E}.(\nabla \times \overline{B}) = \mu \overline{E}.\overline{J} + \frac{1}{2}\mu \in .\frac{\partial E^2}{\partial t} \qquad ...(14.25)$$

समी. (14.24)से समी. (14.25)घटाने पर

$$\overline{B}.(\nabla \times \overline{E}) - \overline{E}.(\nabla \times \overline{B}) = \mu \overline{E}.\overline{J} - \frac{1}{2}\left(\in \frac{\partial}{\partial t}E^2 + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}B^2 \right) ...(14.26)$$

लेकिन सदिश बीजगणित (vector algebra)से आप जानते हैं

$$\nabla.(\overline{A} \times \overline{B}) - \overline{B}.(\nabla \times \overline{A}) - \overline{A}.(\nabla \times \overline{B})$$

अत: समी. (14.26)को निम्न रूप में लिखा जा सकता',है

$$\nabla.(\overline{E}\times\overline{B}) = \mu\overline{E}.\overline{J} - \mu\left(\frac{\in}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} + \frac{1}{2\mu}\frac{\partial B^2}{\partial t}\right)$$

या $$\nabla.\left(\frac{\overline{E}\times\overline{B}}{\mu}\right) = \overline{E}.\overline{J} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\in}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2\right) \quad ...(14.27)$$

माना $\overline{P} = \dfrac{\overline{E}\times\overline{B}}{\mu}$ तथा $U = \dfrac{E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu}$

अत: समी. (14.27)से

$$\nabla.\overline{P} = \overline{E}.\overline{J} - \frac{\partial U}{\partial t}$$

या $$\nabla.\overline{P} + \frac{\partial U}{\partial t} - \overline{E}.\overline{J} \quad ...(14.28)$$

किसी बन्द पृष्ठ S के द्वारा घिरे आयतन V के लिए समी.(14.28)का समाकलन करने पर

$$\int_v\left(\nabla.\overline{P}\right)dV + \int_v \frac{\partial U}{\partial t}dV = -\int\left(\overline{E}.\overline{J}\right)dV \quad ...(14.29)$$

अब गॉस डाइवर्जेन्स प्रमेय से किसी सदिश $\overline{P}$ के लिये

$$\int_v\left(\nabla.\overline{P}\right)dV = \int_s \overline{P}.d\overline{S}$$

उक्त सम्बन्ध का उपयोग समी. (14.29)में करने पर

$$\int_s \overline{P}.d\overline{S} + \int_v \frac{\partial U}{\partial t}dV = -\int_v (\overline{E}.\overline{J})dV \quad ...(14.30)$$

यदि हम सम्पूर्ण आकाश की बात करें तो इसे घेरने वाला पृष्ठ अनन्त दूरी पर होगा जहाँ $\overline{E}$ तथा $\overline{B}$ के मान को नगण्य माना जा सकता है अत:

$$\int_s \overline{P}.d\overline{S} + \int_S \frac{\overline{E}\times\overline{B}}{\mu}d\overline{S} = 0$$

अत: समी. (14.30) से

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial t}dV = -\int_v (\overline{E}.\overline{J})dV \quad ......(14.31)$$

लेकिन आप यह सिद्ध कर सकते हैं कि $\overline{E}.\overline{J}$ एकांक आयतन में आवेश प्रवाह के कारण ऊर्जा हास की दर के बराबर होता है अर्थात्

$$\overline{E}.\overline{J} = -\frac{\partial W}{\partial t}$$

यहाँ W ऊर्जा है, अत: समी। (14.31)से

$$\int_V \frac{\partial U}{\partial t}dV = \int_v \frac{\partial W}{\partial t}dV$$

या U = W

अर्थात् U = एकांक आयतन में ऊर्जा = ऊर्जा घनत्व

अत: ऊर्जा घनत्व

$$U = \frac{\in E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu}$$ .....(14.32)

ऊर्जा घनत्व को आप विभिन्न प्रकार से लिख सकते हैं ।

विद्युत-चुम्बकीय तरंग के लिये

$$V = \frac{|\overline{E}|}{|\overline{B}|}$$

अर्थात समी (14.32)से

$$U = \frac{\in E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu V^2}$$

लेकिन μ व ∈ के रूप में विद्युत-चुम्बकीय तरंग का वेग

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu \in}}$$

अत: U = $\in E^2$

यदि विद्युत क्षेत्र की तीव्रता निम्न सदिश द्वारा व्यक्त की जाये

$$E = E_0 \sin(wt - kx)$$

तो $U = \in E_0^2 \sin^2 (wt - kx)$

अत: माध्य ऊर्जा घनत्व

$$\langle U \rangle = \in E_0^2 < \sin^2(\omega t - kx)$$

या $\langle U \rangle = \frac{1}{2} \in E_0^2 \quad \therefore \langle \sin^2 (wt.kx) \rangle = \frac{1}{2}$

ऊर्जा फ्लक्स)Energy flux)

विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के संचरण दिशा के लम्बवत स्थित एकांक क्षेत्रफल से ऊर्जा प्रवाह की दर को ऊर्जा फ्लक्स सदिश अथवा पॉयटिंग सदिश $\overline{S}$ से व्यक्त किया जाता है तथा इसका मान निम्न होता है

$$\overline{S} = \frac{\overline{E} \times \overline{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu} |\overline{E \times B}| \hat{n}$$ ..(14.33)

यहां $\hat{n}$ उस तल के लम्बवत इकाई सदिश है जिसमें $\overline{E}$ तथा $\overline{B}$ स्थित है,'

$\therefore$ $\overline{B} = \mu \overline{H}$ ...(14.34)

अत: $\overline{S} = \overline{E} \times \overline{H}$

सम्बन्ध v = E।B का उपयोग कर समी. (14.33)को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है -

$$\overline{S} = \frac{1}{\mu} EB\hat{n} = \frac{E^2}{\mu n} . \hat{n}$$ ....(14.35)

लेकिन $V = \frac{1}{\sqrt{\mu \in}}$

$\therefore$ $V^2 = \frac{1}{\sqrt{\mu \in}}$

$\therefore$ $\mu v = \frac{1}{\in v}$

अतः समी (14.35)से

$$\overline{S} = \in vE^2 \hat{n} \qquad ...(14.35)$$

पॉयटिंग सदिश $\overline{S}$ की इकाई वाट /मीटर^2 तथा दिशा तरंग संचरण की दिशा में ही होती है । ऊर्जा फ्लक्स का माध्यमान अर्थात् माध्य ऊर्जा फ्लक्स निम्न होगा

$$\langle S \rangle = \in v \langle E^2 \rangle = \in v \langle E_0^2 \sin^2(\omega t - kx) \rangle$$

या $\langle S \rangle = \frac{1}{2} \in E_0^2$

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

5. विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के लिये पॉयटिंग सदिश क्या प्रदर्शित करता है?

----

6. पॉयटिंग सदिश की दिशा बतलाइये ।

14.4 विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का संवेग घनत्व (Momentum density of electromagnetic waves)

आप जानते हैं कि द्रव्यमान तथा वेग के गुणनफल को संवेग कहते हैं । लेकिन आइन्सटीन के द्रव्यमान ऊर्जा तुल्यता (mass energy equivalence)सम्बन्ध $E = mc^2$ द्वारा आप संवेग को ऊर्जा के रूप में भी परिभाषित कर सकते हैं । उपरोक्त सम्बन्ध के अनुसार

द्रव्यमान x वेग = $mc = \frac{E}{C}$

यदि विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का वेग v हो तो ऊर्जा के रूप में संवेग (p)

$$P = \frac{E}{V}$$

यदि ऊर्जा के मान को ऊर्जा घनत्व U के बराबर लें लिया जाय तो प्राप्त संवेग, संवेग घनत्व के बराबर होगा ।

अतः विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का संवेग घनत्व अर्थात इकाई आयतन में विद्युत-चुम्बकीय तरंग का संवेग

$$\vec{P} = \frac{U}{V} \hat{n} \qquad ...(14.37)$$

यहां $\hat{n}$ तरंग संचरण की दिशा में एकांक सदिश है ।

लेकिन U = $\in E^2$

अत: $$\vec{P} = \frac{\in E^2}{V}\hat{n}$$

लेकिन पॉयटिंग सदिश

$$\overline{S} = \frac{\overline{E} \times \overline{B}}{\mu}$$

$$\therefore \quad \overline{S} = \frac{\overline{E} \times \overline{B}}{\mu v^2}$$

लेकिन विद्‌युत-चुम्बकीय तरंगों का वेग

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu \in}}$$

$$\therefore \quad V^2 = \frac{1}{\mu \in}$$

अत: संवेग घनत्व

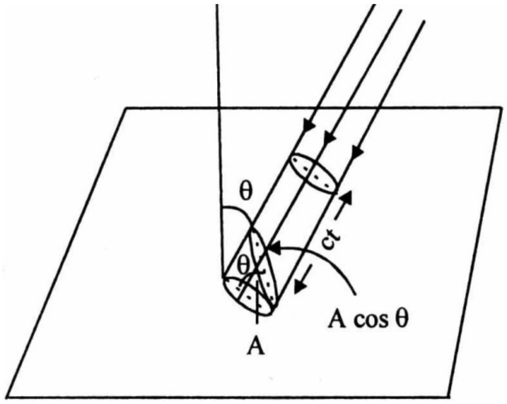
$$\overline{P} = \in (\overline{E} \times \overline{B}) \qquad ...(14.39)$$

भी पॉयटिंग सदिश के अनुक्रमानुपाती होता है ।

14.5 विकिरण दाब (Radiation pressure)

अब आप जान चुके हैं कि जब विद्‌युत-चुम्बकीय तरंगें संचरित होती हैं तो उनके साथ साथ ऊर्जा एवं संवेग का भी संरचना होता है अर्थात ऊर्जा एवं संवेग एक स्थान से दूसरे स्थान पर स्थानान्तरित होते हैं । जब विद्‌युत-चुम्बकीय तरंगे (विकिरण)किसी पृष्ठ पर आपतित होती हैं तो उस पृष्ठ पर दाब लगता है । क्या आप समझा सकते हैं कैसे? पृष्ठ पर आपतन से विद्‌युत-चुम्बकीय तरंगों के संवेग में परिवर्तन होता है । संवेग में परिवर्तन की दर पृष्ठ पर आरोपित बल के बराबर होती है एवं पृष्ठ के एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित बल, दाब के बराबर होता है । इस प्रकार से जब विकिरण किसी पृष्ठ पर गिरता है तो उस पृष्ठ पर दाब आरोपित करता है जिसे विकिरण दाब कहते हैं । यदि आपतित विकिरण के लिये ऊर्जा घनत्व नियत हो तो विकिरण दाब का मान विकिरण के आपतन की दिशा पर निर्भर करता है ।

मान लीजिये किसी पृष्ठ के क्षेत्रफल A पर विकिरण θ कोण पर आपतित हो रहे हैं (देखिये चित्र 14.2)। क्षेत्रफल A का विकिरण के आपतन की दिशा में घटक $A\cos\theta$ होगा । यदि विकिरण का वेग c हो तो t समय में आपतित विकिरण ct दूरी अथवा$(A\cos\theta)$ct आयतन में स्थित होगा



चित्र 14.2 विकिरण दाब

अब यदि संवेग घनत्व p हो तो उक्त आयतन में स्थित विकिरण का संवेग अर्थात

θ दिशा में कुल आपतित संवेग = $pAct\cos\theta$ ...(14.40)

इस संवेग का घटक यदि पृष्ठ के लम्बवत् दिशा में ज्ञात करें तो पृष्ठ के लम्बवत् t सेकण्ड में आपतित कुल संवेग

$$P_T = (pAct\cos\theta)\cos\theta$$

या $$\mathrm{Pr} = pAct\cos^2\theta \quad ...(14.41)$$

अतः पृष्ठ के एकांक क्षेत्रफल पर प्रति सेकण्ड प्रदत संवेग

$$= \mathrm{P}c\cos^2\theta = U\cos^2\theta \quad .....(14.42)$$

$$(\because p = U/c)$$

अब हम निम्न स्थितियों पर विचार करते हैं-

1. यदि पृष्ठ पूर्ण अवशोषक (absorber)है तो यह पृष्ठ पर आपतित तरंगों को पूर्णतया अवशोषित कर लेगा । अतः आपतन के पश्चात तरंगों का संवेग शून्य होगा ।

$\therefore$ पृष्ठ के एकांक क्षेत्रफल पर संवेग में परिवर्तन की दर अर्थात विकिरण दाब

$$P_a = U\cos^2\theta - 0 = U\cos^2\theta \quad ...(14.43)$$

या $$P_a = \in E^2\cos^2\theta \quad .....(14.44)$$

2. यदि पृष्ठ पूर्ण परावर्तक (reflector)है तो यह पृष्ठ पर आपतित तरंगों को पूर्णतया परावर्तित कर देगा । अतः आपतन के पश्चात तरंगों का संवेग, आपतन से पूर्व तरंगों के संवेग के बराबर किन्तु विपरीत दिशा में होगा। अतः इस स्थिति में विकिरण दाब

$$P_r = U\cos^2\theta - (-U\cos^2\theta)$$

या $$P_r = 2U\cos^2\theta \quad ...(14.45)$$

3. यदि पृष्ठ का अवशोषण गुणांक a तथा परावर्तन गुणांक हो r विकिरण दाब निम्न होगा

$$P = aU\cos^2\theta + 2rU\cos^2\theta$$

या $$P = (a+2r)U\cos^2\theta \quad ....(14.46)$$

4. यदि विकिरण सभी दिशाओं से समान रूप से आपतित हो रहा हो तो औसत दाब

$$\left\langle P_a \right\rangle = U \left\langle \cos^2\theta \right\rangle$$

तथा $$\left\langle P_r \right\rangle = 2U \left\langle \cos^2\theta \right\rangle$$

यहाँ $\left\langle \cos^2\theta \right\rangle$ पृष्ठ के ऊपर सभी संभव आपतन कोणों के लिये $\cos^2\theta$ का औसत है तथा इसका मान 1 / 3 होता है अत: इस स्थिति में

$$\left\langle P_a \right\rangle = \frac{1}{3}U = \frac{1}{3} \in E^2 \qquad ...(14.47)$$

तथा $$\left\langle P_r \right\rangle = \frac{2}{3}U = \frac{2}{3} \in E^2 \qquad ...(14.48)$$

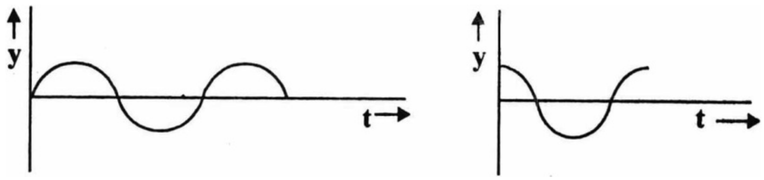
14.6 फूरिये विश्लेषण (Fourier analysis)

आवर्त गति के अध्ययन से आप यह जानते हैं कि इस गति का सरलतम उदाहरण सरस आवर्त गति है । सरल आवर्त गति में कण का विस्थापन

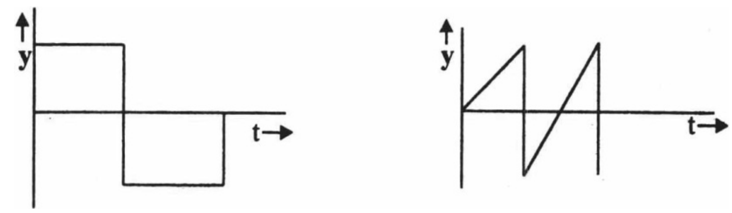
$$y = a \sin \omega t \qquad ...(14.49)$$

अथवा $$y = a \cos \omega t \qquad ...(14.50)$$

लिये विस्थापन समय वक्र चित्र 14.3 (a)एवं 14.3(b)में दर्शाये गये हैं । क्या आप बतला सकते है कि चित्र 14.4 (b)में दर्शायी गयी गतियाँ किस प्रकार की गतियाँ है? ये वक्र भी आवर्त गतियों को ही प्रदर्शित करते हैं । लेकिन ये सरल आवर्त गतियां नहीं है बल्कि जटिल)complex(आवर्त गतियां है जिनके विस्थापन को समी).14.49)अथवा)14.5(0की भांति सरल समीकरणों द्वारा व्यक्त से किया जा सकता है ।



चित्र 14.4



चित्र 14.4

गणितज्ञ फूरिये के अनुसार विशेष शर्तो की पालना होने पर जटिल आवर्त गतियों का , अध्ययन अनन्त सरल आवर्त गतियों के योग के रूप में किया जा सकता है:। फूरिये के प्रमेय के अनुसार "एकल मानी, परिमित एवं सतत् सभी जटिल आवर्ती फलनों को आवर्ती फलनों के योग से व्यक्त कर सकते हैं जिनकी आवृत्तियाँ जटिल आवर्ती फलनों की मूल आवर्ती की पूर्ण - गुणज होती है । अत: सभी जटिल आवर्ती फलनों को सरल आवर्ती गति के ज्या तथा कोज्या फलनों मे

विभाजित किया जा सकता है । फूरिये की प्रमेय को गणितीय रूप में निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जाता है ।

$$Y=f(\omega t)= A_o + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + A_3 \sin 3t + \ldots A_n \sin n\omega t$$
$$+B_1 \cos\omega t + B_2 \cos 2\omega t + \ldots + B_n \cos n\omega t \qquad \ldots(14.51)$$

या $$y=A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\omega t \qquad \ldots(14.52)$$

यहाँ y जटिल आवर्ती गति का t क्षण पर विस्थापन तथा ω आवर्ती है। $A_o, A_2, \ldots A_n, B_1, B_2 \ldots B_n$ गुणांक है । फूरिये गुणांकों का मान निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है ।

1. A_0 का मान

A_0 का मान ज्ञात करने के लिये समी. (14.52)को एक आवर्त काल अथार्त् O से T समय के लिये समाकलित (integrate) जिससे

$$\int_o^T ydt = \int_0^T A_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^T \sin n\omega t dt + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^T \cos n\omega t dt \qquad \ldots(14.53)$$

$$\int_o^T dt = [t]_o^T = T$$

लेकिन समाकलन गणित से आप जानते हैं-

$$\int_0^T \sin n\omega t dt = \int_0^T \sin n\omega t dt = 0$$

अत: समी.(14.53)

$$\int_0^T ydt = A_0 \int_0^T dt = A_0 T$$

अत: $$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T ydt \qquad \ldots(14.54)$$

2. गुणांकों A_o का मान

गुणांकों A_n मान ज्ञात करने के लिये समी. (14.52)के दोनों पक्षों को sin nωt से गुणा कर समय परास O से T के लिये समाकलित करने पर

$$\int_o^T y \sin \omega t\, dt = \int_o^T A_o \sin n\omega t\, dt + \int_o^T A_1 \sin \omega t \sin n\omega t\, dt$$
$$+ \int_o^T A_2 \sin 2\omega t \sin n\omega t\, dt + \ldots\ldots$$
$$+ \int_o^T B_1 \cos \omega t \sin n\omega t\, dt + \int_o^T B_2 \cos 2\omega t\, dt + \ldots \qquad \ldots(14.55)$$

उपरोक्त व्यंजक में अब हम समाकलन गणित के निम्न सूत्रों का प्रयोग करेंगें -

$$\int_0^T \sin r\omega t + \sin n\omega t dt = 0 \qquad \text{यदि } r \neq n$$
$$= \frac{T}{2} \qquad \text{यदि } r = n \qquad \ldots(14.56)$$

इसी प्रकार से)

$$\int_0^T \sin r\omega t + \sin n\omega t dt = 0 \qquad ....(14.57)$$

अतः समी. (14.55)से

$$\int_0^T y \sin n\omega t dt = \frac{T}{2}.A_n$$

$$\therefore \quad A_n = \frac{2}{T}\int_0^T y \sin n\omega t dt \qquad ....(14.58)$$

3. गुणांकों B_n का मान

फूरिये गुणांकों B_n का मान ज्ञात करने के लिये समी. (14.52)को cos nωt से गुणा कर समय परास O से T के लिये समाकलित करने पर

$$\int_o^T y \cos n\omega t\, dt = \int_o^T A_0 \cos n\omega t\, dt + \int_o^T A_1 \sin \omega t \cos n\omega t\, dt$$
$$+\int_o^T A_2 \sin 2\omega t \cos n\omega t\, dt + ...$$
$$+\int_o^T B_1 \cos \omega t \cos n\omega t\, dt + \int_o^T B_2 \cos 2\omega t + \cos n\omega t\, dt + ... \qquad .....(14.59)$$

लेकिन

$$\int_0^T \cos r\omega t \cos n\omega t dt = 0 \qquad \text{यदि } r \neq n$$
$$= \frac{T}{2} \qquad \text{यदि } r = n$$

तथा इसी अनुच्छेद में पूर्व में दिये गये मानक सूत्रों का प्रयोग करने पर समी. (14.59)से

$$\int_0^T y \cos n\omega t dt = \frac{T}{2} B_n \qquad ....(14.60)$$

$$\therefore \quad B_n = \frac{2}{T}\int_0^T y \cos n\omega t dt$$

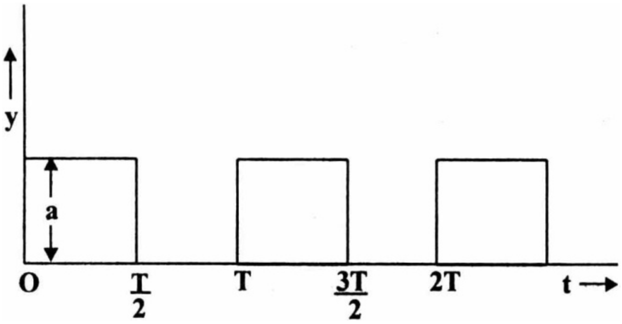
किसी जटिल आवर्ती फलन के फूरिये विश्लेषण से हमारा अभिप्राय यह होता है कि उस फलन के लिये फूरिये गुणांकों A_o, तथा A_n का मान B_n कर उन्हें समी. (14.51)में रखकर विस्थापन का मान ज्ञात करना। फूरिये प्रमेय के अनुप्रयोग के रूप में हम एक वर्गाकार तरंग का फूरिये विश्लेषण करेंगे।

14.6.1 वर्गाकार तरंग का फूरिये विश्लेषण (Fourier analysis of square wave)

वर्गाकार तरंग की आकृति को चित्र 14.5 में दर्शाया गया है। यह तरंग + X दिशा में संचरित हो रही है तथा इसका आवर्त काल T है। इस तरंग में अर्ध आवर्त काल $\frac{T}{2}$ समय के लिये तरंग का विस्थापन a तथा शेष अर्ध आवर्तकाल के लिये शून्य होता है। अतः विस्थापन y निम्न जटिल फलन के रूप में लिखा जा सकता है

y=a यदि $0 < t < \frac{T}{2}$

तथा y=a यहाँ $\frac{T}{2} < t < T$ ....(14.61)



चित्र 14.5 वर्गाकार तरंग

चित्र से स्पष्ट है कि वर्गाकार तरंग को प्रदर्शित करने वाला जटिल फलन एकमानी, सतत् तथा परिमित है अतः फूरिये प्रमेय की शर्तो की पालना करता है । फूरिये गुणांकों A_o,A_n तथा B_n का मान ज्ञात कर इस तरंग का फूरिये विश्लेषण किया जा सकता है । अनुच्छेद 14.6 में A_o,A_n तथा B_n के लिये उल्लेखित सूत्रों अर्थात समी. (14.54), (14.58)तथा (14.60)से इन गुणांकों के मान निम्न प्रकार से ज्ञात किये जा सकते हैं-

गुणांक A_o :

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T ydt = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} ydt + \int_{T/2}^{T} ydt\right]$$

समी. (14.49)से y के मान रखने पर

$$A_0 = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} adt + \int_{T/2}^{T} 0dt\right]$$

या $$A_0 = \frac{1}{T}a[t]_0^{T/2} = \frac{1}{T}.a.\frac{T}{2} = \frac{a}{2}$$ ....(14.62)

गुणांक A_n

$$A_n \frac{2}{T}\int_0^T y\sin n\omega t dt$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} y\sin n\omega t dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} y\sin n\omega t dt\right]$$

समी.(14.61) से y के मान रखने पर

$$A_n \frac{2}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} a \sin n\omega t dt\right]$$

$$= \frac{2a}{T}\left[-\frac{\cos n\omega t}{n\omega}\right]_0^{T/2}$$

$$= +\frac{2a}{n\omega t}\left[\cos 0 - \cos n\omega \frac{T}{2}\right]$$

$$A_n = \frac{a}{n\pi}\left[1 - cisn\pi\right] \because \omega T = 2\pi$$

जब n=0,2,4,.....तो cosnπ=1 होगा तो A_n = o होगा I

जब n=1,3,5,... तो cosnπ=-1 होगा तो $A_n = \frac{2a}{n\pi}$ होगा I

अत: A_n= जब n सम पूर्णांक है I

$A_n = \frac{2a}{n\pi}$ जब n विषम पूर्णांक है ।

गुणांक B_n:

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T y \cos n\omega t dt$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} y \cos n\omega t dt + \int_{T/2}^{T} y \cos n\omega t dt$$

y के मान समी. (14.61)से रखने पर

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} a \cos n\omega t dt$$

$$= \frac{2a}{T}\left[\frac{\sin n\omega t}{n\omega}\right]_0^{T/2}$$

$$= \frac{2a}{T}\left[\frac{\sin n\omega \frac{T}{2} - \sin\theta}{n\omega}\right] = 0$$

.....(14.64)

अब फूरिये प्रमेय के अनुसार जटिल आवर्ती फलन का विस्थापन

$y=A_o + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega + \ldots\ldots A_n \sin n\omega t$

$+B_1\cos\omega t + B_2 \cos\omega t + \ldots\ldots + B_n \cos n\omega t$

समी (14.62),(14.63)तथा (14.64)से वर्गाकार तरंग के लिये फूरिये गुणांकों के मान रखने पर

$$y = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi}\sin \omega t + \frac{2a}{3\pi}\sin 2\omega t + \frac{2a}{5\pi}\sin 5\omega t + \ldots..$$

या $$y=\frac{a}{2}+\frac{2a}{\pi}\left[\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+.....\right]$$

इस प्रकार, दी गई जटिल आवर्ती गति (वर्गाकार तरंग)की अक्ष $y_o=\frac{a}{2}$ है तथा हैं अवयवों की आवृत्तियों का अनुपात 1 : 3. 5 ... है व इनके आयाम 1 : $\frac{1}{3}:\frac{1}{5}$ के अनुपात में हैं ।

उदाहरण 14.1 आपेक्षिक परावैद्युतांक 5 और आपेक्षिक पारगम्यता 2 वाले माध्यम में विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का वेग ज्ञात कीजिये । $c=3\text{x}10^8$ मीटर / सेकण्ड

हल : हम जानते हैं कि किसी माध्यम में विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का वेग निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है-

$$v=\frac{c}{\sqrt{\mu_r \in_r}}$$

जहाँ c प्रकाश का वेग है ।

प्रश्नानुसार $\mu_r = \in_r = = 5$

$$\therefore \quad V=\frac{3\times10^8}{\sqrt{2\times5}}=\frac{3\times10^8}{\sqrt{10}}=\frac{3\times10^8}{3.16}$$

या $v= 0.95 \times 10^8$ मीटर/सेकण्ड

उदाहरण 14.2 मुक्ताकाश में एक समतल विद्युत-चुम्बकीय तरंग के विद्युत क्षेत्र का शिखरमान 2 वोल्ट / मीटर है । माध्य ऊर्जा घनत्व, माध्य ऊर्जा अभिवाह तथा माध्य संवेग घनत्व का मान ज्ञात कीजिये $\in_0=\frac{1}{36\pi\times10^9}$ फैरड / मीटर

हल: हम जानते हैं माध्य ऊर्जा घनत्व

(i) $\langle U\rangle=\frac{1}{2}\in_0 E_0^2$

प्रश्नानुसार E_0 = 2 वोल्ट / मीटर

$\in_0=\frac{1}{36\pi\times10^9}$ फैरड / मीटर

$$\therefore \quad \langle U\rangle=\frac{1}{2}\times\frac{1}{36\pi\times10^9}\times(2)^2$$

$$=\frac{4\times10^{-9}}{2\times36\times3.14}=\frac{10^{-9}}{18\times3.14}=\frac{10^{-9}}{56.52}$$

$= 1.77 \times 10^{-11}$ जूल / मीटर^3

(ii) मध्य ऊर्जा अभिवाह

$$\langle S\rangle=\frac{1}{2}\in_0 vE_0^2=v\langle U\rangle$$

यहाँ v का मान मुक्ताकाश के लिये प्रकाश के वेग के बराबर अर्थात $3x10^8$ मीटर / सेकण्ड होगा । अत:

$$\langle S \rangle = 3 \times 10^8 \times 1.77 \times 10^{-11}$$

$$= 5.3 \times 10^{-3} \text{ वाट / मीटर}^2$$

(iii) माध्य संवेग घनत्व

$$\langle p \rangle = \frac{\langle S \rangle}{c^2}$$

$$= \frac{5.30 \times 10^{-3}}{9 \times 10^{16}}$$

$$= 0.95 \times 10^{-19} \text{ किलोग्राम / मीटर}^2 \text{ -सेकण्ड}$$

14.7 सारांश (summary)

- विद्युत-चुम्बकीय तरंगें विशेष प्रकार की तरंगें होती हैं जो निर्वात में प्रकाश के वेग से गति करती हैं ।
- विद्युत-चुम्बकीय विक्षोभ कम्पायमान (vibrating)विद्युत एवं चुम्बकीय क्षेत्रों से बना होता है ।
- विद्युत-चुम्बकीय तरंगें अनुप्रस्थ प्रकृति की होती हैं तथा इसमें E सदिश, B सदिश तथा v सदिश परस्पर लम्बवत होते हैं ।
- विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का ऊर्जा घनत्व U निम्न सूत्र से दिया जाता है ।

$$U = \frac{\in E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu} = \in E^2$$

- विद्युत-चुम्बकीय तरंगों द्वारा तरंग संचरण की दिशा के लम्बवत एकांक क्षेत्रफल से एकांक समय में प्रवाहित होने वाली ऊर्जा को पॉयटिंग सदिश $\vec{S}$ से व्यक्त करते हैं। यह सदिश निम्न प्रकार से लिखा जाता है-

$$\overline{S} \frac{\overline{E} \times \overline{B}}{\mu} = \overline{E} \times \overline{H}$$

- विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का संवेग घनत्व p निम्न सूत्र से दिया जाता है $\overline{P} = \in (\overline{E} \times \overline{B})$
- विद्युत-चुम्बकीय तरंगें जब किसी पृष्ठ पर आपतित होती है तो उस पृष्ठ पर दाब लगाती है जिसे विकिरण दाब कहते हैं । पूर्णपरावर्तक तल के लिये औसत विकिरण दाब

$$p_r = \frac{2}{3} U$$

तथा पूर्ण अवशोषक तल के लिये

$P_a = \frac{1}{2} U$ होता है ।

- फूरिये प्रमेय के अनुसार किसी जटिल आवर्ती फलन का विस्थापन निम्न श्रेणी द्वारा लिखा जाता है

$$y = A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin n\omega t + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\omega t$$

- फूरिये गुणांक A_0,A_n तथा B_n का मान निम्न सूत्रों द्वारा ज्ञात किया जाता है-

$$A_0 = \frac{2}{T}\int_0^T y dt$$

$$A_n = \frac{1}{2}\int_0^T y \sin n\omega t dt$$

तथा $$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T y \cos n\omega t dt$$

14.8 शब्दावली (Glossary)

अपवर्तनांक	Refractive index
अभिलक्षणिक	Characteristic
अनुप्रस्थ	Transverse
आपेक्षिक	Relative
उपग्रह	Satellite
घटक	component
जटिल	complex
तुल्यता	Equivalence
दूर संवेदन	Remote sensing
पारगम्यता	Permeability
संक्रमण	Transition
संचार तंत्र	communication system
समदैशिक	Isotropic
समष्टि	Space
संरचना	Structure
संवेग	Momentum

14.9 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

(i)	N.K Bajaj	The physics of Waves and Oscillations	Tata McGraw- Hill Publishing.Ltd New Delhi.
(ii)	A.P French	Vibration & waves The MIT introductory Physics Series	CBS publishers and Distributors ,Delhi

(iii)	N.Subramanyam and Brijlal	Fundamentals of Physics vol-II	S. chand & Co., Dellhi
(iv)	एम.पी. सक्सेना, पी. आर. सिंह व एस.एस. रावत	दोलन एवं तरंगें	कॉलेज बुक हॉउस, जयपुर

14.10 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers of self assessment questions)

1. नहीं ।
2. असत्य ।
3. प्रकाश के वेग के बराबर, $3x10^8$ मीटर / सेकण्ड ।
4. Z -अक्ष के समान्तर ।
5. यह सदिश तरंग संचरण के लम्बवत् एकांक क्षेत्रफल से ऊर्जा प्रवाह की दर को प्रदर्शित करता है ।
6. तरंग संचरण की दिशा के समान्तर ।

14.11 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (very short answers type questions)

1. विद्युत-चुम्बकीय तरंगों की संरचना बतलाइये ।
2. विद्युत-चुम्बकीय तरंगों की तरंगदैर्ध्य परास क्या मानी जाती है?
3. ऊर्जा घनत्व की परिभाषा दीजिये ।
4. पॉयटिंग सदिश का भौतिक महत्व बतलाइये ।
5. फूरिये विश्लेषण के लिये आवश्यक प्रतिबन्ध लिखिये ।

निबन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

1. सिद्ध कीजिये कि विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का स्वरूप अनुप्रस्थ होता है ।
2. ऊर्जा घनत्व को परिभाषित कीजिये तथा इसके लिये सूत्र स्थापित कीजिये ।
3. विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के संवेग घनत्व की परिभाषा लिखिये एवं इसके लिये व्यंजक प्राप्त कीजिये ।
4. पॉयटिंग सदिश क्या प्रदर्शित करता है? ऊर्जा घनत्व, संवेग घनत्व व ऊर्जा फ्लक्स में सम्बन्ध स्थापित कीजिये ।
5. विकिरण दाब से आपका क्या अभिप्राय है? पूर्ण अवशोषक एवं पूर्ण परावर्तक पृष्ठों के लिये विकिरण दाब के लिये सूत्र स्थापित कीजिये ।
6. फूरिये प्रमेय की परिभाषा लिखिये एवं आवश्यक प्रतिबन्ध बतलाइये । इस प्रमेय की सहायता से वर्गाकार तरंग का फूरिये विश्लेषण कीजिये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

1. मुक्ताकाश में एक समतल विद्युत-चुम्बकीय तरंग का माध्य पॉयटिंग सदिश 3 वाट / मीटर^2 है । माध्य ऊर्जा घनत्व ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर :** 1 x 10^{-8} जूल / मीटर^3)

2. एक रेडियो द्वारा प्राप्त विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के विद्युत क्षेत्र का आयाम 0.1 वोल्ट / मीटर है । यह मानते हुए कि तरंगें समतल हैं ज्ञात कीजिये (i)चुम्बकीय क्षेत्र का आयाम (ii)औसत ऊर्जा घनत्व (iii)तरंग की औसत तीव्रता ।

$\in_0 =8.85x10-^{10}$ फैरड / मीटर

(**उत्तर :** (i)3.33 x 10^{-10} टेसला (ii)4.42 प्र 10^{-14} जूल / मीटर^2
(iii)1.33 x 10^{-5} वाट / मीटर^2)

3. पैराफीन का परावैद्युतांक 2.1 है । पैराफीन का अपवर्तनांक ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर :** 1.45)

4. यदि किसी माध्यम का अपवर्तनांक 1.45 तथा प्रकाश का वेग 3 x 10^8 मीटर / सेकण्ड हो तो माध्यम में विद्युत-चुम्बकीय तरंगों का वेग ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर :** 2.07 x 10^8 मीटर /सेकण्ड)

इकाई - 15

तरंग एवं समूह वेग
(Wave and Group Velocity)

इकाई की रूपरेखा

15.0 उद्देश्य
15.1 प्रस्तावना
15.2 कला वेग एवं समूह वेग
15.3 कला वेग तथा समूह वेग में सम्बन्ध
15.4 समूह वेग तथा परिक्षेपण
15.5 परिक्षेपी तथा परिक्षेपण रहित स्थितियाँ
15.6 सारांश
15.7 शब्दावली
15.8 संदर्भ ग्रन्थ
15.9 बोध प्रश्नों के उत्तर
15.10 अभ्यासार्थ प्रश्न

15.0 उद्देश्य (Objectives)

- समूह वेग तथा कला वेग के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे;
- समूह वेग तथा कला वेग में सम्बन्ध जान सकेंगे;
- परिक्षेपण की समूह वेग पर निर्भरता के बारे में अध्ययन कर सकेंगे;
- सामान्य तथा असामान्य परिक्षेपण के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे;
- परिक्षेपण रहित तथा परिक्षेपी माध्यमों के उदाहरणों की विवेचना कर सकेंगे ।

15.1 प्रस्तावना (Introduction)

आपने इकाईयों 13 एवं 14 में एक वर्णीय (monochromatic)तरंगों के माध्यम एवं निर्वात में संचरण के बारे में अध्ययन किया है । इन तरंगों में प्रत्येक चक्र अपनी पूर्ववर्ती चक्र की भांति ही होता है । यदि विभिन्न आवृत्ति की तरंगों (जिनकी आवृत्तियां एक लघु परास में हों)के समूह के अध्यारोपण से एक परिणामी तरंग प्राप्त की जाये तो इस तरंग को मॉडुलित तरंग तथा इसके आयाम को मॉडुलित आयाम कहते हैं । मॉडुलित आयाम समय का फलन होने के कारण नियत नहीं रह पाता है परन्तु निश्चित समय बाद इसकी पुनरावृति होती है । इससे संबधित वेग को समूह वेग कहते है । मॉडुलित तरंग जिस वेग से माध्यम में संचरित हो रही है उसे कला वेग अथवा तरंग वेग कहते हैं ।

इस इकाई के अनुच्छेद 15.2 में आप समूह वेग एवं कला वेग के बारे में विस्तार से जानकारी प्राप्त करेंगे । अनुच्छेद 15.3 में हम कला वेग एवं समूह वेग में सम्बन्ध स्थापित करेंगे ।

विभिन्न आवृत्ति की तरंगों के लिये माध्यम में तरंग का वेग भिन्न होता है । इसे परिक्षेपण कहते हैं । अनुच्छेद 15.4 में आप समूह वेग तथा परिक्षेपण में क्या सम्बन्ध है इसकी जानकारी प्राप्त करेंगे । अन्त में अनुच्छेद 15.5 में आपको कुछ परिक्षेपण रहित एवं परिक्षेपण की स्थितियों के उदाहरणों से अवगत कराया जायेगा ।

15.2 कला वेग एवं समूह वेग (Phase velocity and group velocity)

एकल तरंग संचरण एवं इसके द्वारा ऊर्जा के स्थानान्तरण के बारे में आप पर्याप्त जानकारी प्राप्त कर चुके हैं । तरंगों का एक उपयोगी अनुप्रयोग सूचनाओं अथवा संकेतों को एक स्थान से दूसरे स्थान तक भेजने में लिया जाता है । यह एकल आवृत्ति तरंग से संभव नहीं है क्योंकि इसमें दूरी में परिवर्तन के साथ किसी भी प्रकार का बदलाव नहीं आता है, अर्थात्

प्रत्येक चक्र अपने पूर्ववर्ती चक्र जैसा होता है । अत: तरंग के साथ संकेत भेजने के लिये संप्रेषण स्थल (transmitting station)पर तरंग में कुछ परिवर्तन करने आवश्यक होते हैं जिन्हें ग्राही केन्द्र पर डिकोडित (de-code)किया जा सके । यह मॉडुलन तथा विमॉडुलन द्वारा संभव है। मॉडुलनतरंगों के अध्यारोपण द्वारा किया जाता है । विभिन्न आवृत्तियों की तरंगों के अध्यारोपण से एक परिणामी तरंग प्राप्त होती है जिसका आयाम नियत न रह कर समय का फलन रहता है । इस परिणामी तरंग के आयाम को मॉडुलित आयाम कहते हैं । परिणामी तरंग भो प्रगामी तरंग की भांति संचरित होती हैं । इस अनुच्छेद में आपको यह जानकारी देने का प्रयास किया जायेगा। कि तरंगों के समूह के अध्यारोपण से प्राप्त मॉडुलित तरंग का आयाम तथा इसकी कला किस वेग से गति करते हैं । तरंग के कला वेग को तरंग वेग भी कहते हैं ।

मॉडुलित तरंग को समझने के लिये, एक परिक्षेपक (dispersive)माध्यम में समान दिशा में गतिशील दो तरंगों के अध्यारोपण पर विचार करते हैं । माना इन तरंगों के आयाम समान है तथा इनकी कोणीय आवृत्तियाँ ω_1 तथा ω_2 में अन्तर अल्प है । x-दिशा में संचरित इन तरंगों के लिये विस्थापन के समीकरण निम्न होंगें -

$$y_1=A\cos(\omega_1 t-k_1 x)$$

तथा $$y_1=A\cos(\omega_2 t-k_2 x)$$

जहां k_1 तथा k_2 तरंगों के संचरण नियतांक तथा A आयाम हैं । तरंगों के अध्यारोपण के सिद्धान्त के अनुसार परिणामी तरंग का विस्थापन

$$y=y_1+y_2$$

या $$y=A[\cos(\omega_1 t-k_1 x)+\cos(\omega_2 t-k_2 x)]$$

या $$y=2A\cos\left[\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t-\frac{k_1+k_2}{2}X\right]\cos\left[\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t-\frac{k_1-k_2}{2}X\right] \quad .....(15.1)$$

$$=2A\cos(\omega_a t-k_a x)\cos(\omega_m t-k_m x)$$

मोंडुलित तरंग ω_a आवृत्ति की है, इसके विस्थापन y का समय के साथ फलन चित्र 15.1 में दिखाया गया है । यहाँ आप देख सकते है कि विस्थापन शून्य से अधिकतम, न्यूनतम एवं पुनः अधिकतम होता रहता है । परन्तु आवृत्ति नियत रहती है । इस तरंग का कला वेग पिछली इकाइयों की तरह ज्ञात किया जा सकता है। मॉडुलित तरंग के विस्थापन पर विचार करें तो आप देखेगे की उच्चतम विस्थापन के मान की एक निशित समय (T) के बाद पुनावृति हो रही है अर्थात विस्थापन के उच्चतम मान के आवृति ω_m है।

आप एक ऐसे अन्वालोप के बारे में सोच सकते है जिसमें मॉडुलित तरंग का विस्थापन न्यूनतम से उच्चतम है । इसे तरंग अन्वालोप कहा गया है।

$$y = A_m \cos(\omega_a t - k_a x)$$

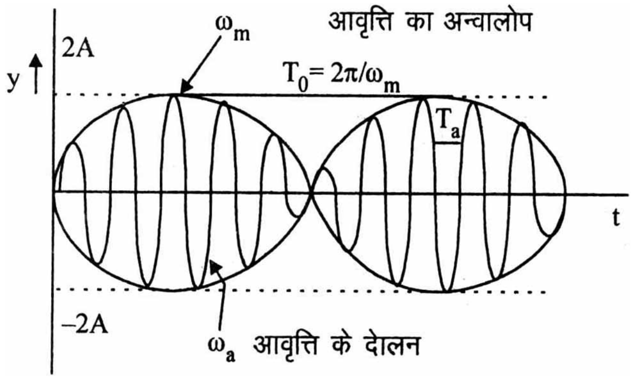
जहाँ $$\omega_m = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$$

$$k_m = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$$

$$\omega_a = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$k_a = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

तथा A_m $2A \cos(\omega_m t - k_m x)$



चित्र 15.1

समी. (15.2)एक तरंग निकाय (system)को व्यक्त करती है जिसकी औसत आवर्ती ω_a तथा मॉडुलित आयाम A_m है । तरंग निकाय की घटक (component)तरंगों के अध्यारोपण से प्राप्त परिणामी तरंग आवर्ती (harmonic)तरंग नहीं होती है क्योंकि इसका आयाम A_m समष्टि (space)एवं समय पर निर्भर करता है । इस प्रकार की तरंग को चित्र 15.1 में प्रदर्शित किया गया है । इस चित्र से स्पष्ट है कि तरंग के अन्वालोप (wave envelope)की आवृत्ति मॉडुलित आवृत्ति ω_m के बराबर है तथा यह समय के साथ समष्टि में एक निश्चित वेग से गति करता है। इस वेग को समूह वेग कहते है । उपरोक्त गणितीय विवेचना से स्पष्ट है कि ω_m का मान ω_a की तुलना में काफी कम है ।

समूह वेग तथा कला वेग

उपरोक्त विवेचना में मान लीजिये कि $\omega_2=\omega$ तथा $\omega_1=\omega+\delta\omega$ इसी प्रकार से $k_2 = k$ तथा $k_1 = k + \delta k$ जहां $\delta\omega=\omega_1 - \omega_2$ तथा $\delta k=k_1-k_2$ अतिअल्प है । अत:

समी.(15.1) को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता हैं-

$$y = 2A\cos\left\{\frac{1}{2}\left(\delta\omega.t - \delta k.x\right)\right\}\cos\left\{\left(\omega t - kx\right)\right\} \quad ...(15.3)$$

उपरोक्त व्यंजक एक ऐसी तरंग को प्रदर्शित करता है जिसका मॉडुलित आयाम $2A\cos\left\{\frac{1}{2}\left(\delta\omega.t - \delta k.x\right)\right\}$ तथा कला $(\omega t - kx)$ हैं ।

समूह वेग -

मॉडुलित आयाम $2A\cos\frac{1}{2}(\delta\omega t-\delta kx)$ से सम्बन्धित वेग वह वेग होता है जिससे कि मॉडुलित अन्वालोप (envelope)गति करता है इस वेग को समूह वेग (group velocity)v_g कहते हैं ।

अन्वालोप का वेग ज्ञात करने के लिये हम इस पर एक संदर्भ बिन्दु (माना अन्वालोप का शिखर)लेते हैं । इस बिन्दु का वेग ही अन्वालोप के वेग के बराबर होगा । अब हम हमारा ध्यान मॉडुलित तरंग के श्रृंग पर केन्द्रित कर लेते हैं इस स्थान पर आयाम A_m का मान + 2A होगा । यह आयाम नियत रहे इसके लिये$(\delta\omega.t-\delta k.x)$ का मान नियत रहना आवश्यक है । अत: यदि सयम t में वृद्धि δt हो तो x में वृद्धि δx इस प्रकार से होनी चाहिये ताकि $(\delta\omega.t-\delta k.x)$ में होने वाली वृद्धि $(\delta\omega\delta t-\delta k\delta x)$ शून्य हो जाये अर्थात्

$$\delta\omega\delta t-\delta k\delta x=0$$

या $$\frac{\delta x}{\delta t}=\frac{\delta\omega}{\delta k}$$

K का मान
X व t

या $$v_g=\frac{\delta\omega}{\delta k}$$

चूंकि $\delta\omega$ हल तथा δk अतिअल्प है अत: समूह वेग निम्न होगा-

$$V_g=\frac{d\omega}{dk} \quad ....(15.4)$$

कला वेग-

समी. (15.3)में तरंग cos (ωt - kx)से सम्बन्धित वेग को कला वेग कहते हैं । कला वेग उस वेग के बराबर होता है जिससे तरंग गतिशील है ।

इसे ज्ञात करने के लिये कला

$$\omega t-kx \quad ...(15.5)$$

को अवकलित करते हैं । नियत कला बिन्दुओं के लिये

$$\omega\delta t-k\delta x=0$$

या $$\frac{\delta x}{\delta t}=\frac{\omega}{k}$$

अत: कला वेग $v_p=\frac{\omega}{k}$

बोध प्रश्न (self assessment questions)

1. क्या संकेतों के संप्रेषण के लिए एकल आवृत्ति तरंग पर्याप्त है ?

   ....

   ....

2. तरंग वेग का दूसरा नाम क्या है ?

....

3. तरंगों के समूह के अध्यारोपण से प्राप्त मॉडुलित आयाम Am के वेग को क्या कहते है ।

……………………………………………………………………………………………………

15.3 कला वेग तथा समूह वेग में सम्बन्ध (Relation between phase velocity and group velocity)

अनुच्छेद 15.2 में आपने देखा है कि तरंग में किये गये मॉडुलन के संचरण का वेग कला वेग v_p के बराबर नहीं होकर समूह वेग v_g के बराबर होता है । अत: तरंग द्वारा ऊर्जा का स्थानान्तरण समूह वेग के बराबर वेग से होता है । आपने पिछली कक्षाओं में परिक्षेपण (dispersion)के बारे में भी अध्ययन किया है । यदि किसी माध्यम में कला वेग तरंग की आवृत्ति पर निर्भर करता हो तो उस माध्यम को विक्षेपक माध्यम (dispersive medium)कहते हैं । उदाहरण के लिये कांच में भिन्न भिन्न आवृत्ति की तरंगों के वेग भी भिन्न भिन्न होते हैं । इसे परिक्षेपण कहते हैं । अब हम एक परिक्षेपी माध्यम में कला तथा समूह वेग में सम्बन्ध स्थापित करते हैं । आप जानते हैं कि समूह वेग

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

लेकिन कला वेग $v_p = \frac{\omega}{k}$

$$v_g = \frac{d}{dk}(kv_p) = v_p + k\frac{dv_p}{dk}$$

लेकिन $\lambda = \frac{2\pi}{k} \therefore \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{\lambda^2}{2\pi}$

$$\therefore \quad V_g = V_p + k.\frac{dv_p}{d\lambda}.\frac{d\lambda}{dk}$$

या $$v_g = v_p - \lambda\frac{dv_p}{d\lambda}$$

यह संबध तरंग वेग (कला वेग), समूह वेग व तरंग दैर्ध्य में है ।

समूह वेग v_g तरंग वेग v_p तथा आवृत्ति में सम्बन्ध को निम्न प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}(k) = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{v_p}\right)$$

या $$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v_p} - \frac{v}{v_p^2}\frac{dv_p}{d\omega} \quad .....(15.7)$$

लेकिन रेखीय आवृत्ति v तथा कोणीय आवृत्ति ω में निम्न सम्बन्ध होता है

$\omega=2\pi v$

अतः $$\frac{1}{v_g}=\frac{1}{v_p}-\frac{v}{v_p^2}\frac{dv_p}{dv} \quad ....(15.8)$$

समी. (15.6), (15.7)तथा (15.8)कला वेग तथा समूह वेग में सम्बन्ध दर्शाती है । प्रकाश तरंगों के लिये यह संबध निम्न रूप से लिख सकते हैं ।

हम जानते है कि

अपवर्तनांक $n = \frac{c}{v_p}$

या $$v_p=\frac{c}{n}$$

$\therefore$ समी. (15.8)से

$$\frac{1}{v_g}=\frac{1}{v_p}+\frac{v}{c}\frac{dn}{dv}$$

लेकिन $c=v\lambda$

$$\therefore \quad \frac{1}{V_g}=\frac{1}{V_p}+\frac{vdn}{cdn}$$

ध्यान रहे यहां λ निर्वात में प्रकाश का तरंगदैर्ध्य है ।

बोध प्रश्न (self assessment questions)

4. कला वेग vp एवं समूह वेग vg में तरंगदैर्ध्य के पदों में सम्बन्ध लिखिये ।

----

5. परिक्षेपी माध्यम किसे कहते हैं?

15.4 समूह वेग तथा परिक्षेपण (Group velocity and dispersion)

आप जानते हैं कि परिक्षेपण रहित माध्यम में तरंग का कला वेग v_p, तरंग के तरंगदैर्ध्य, आवृत्ति तथा कोणीय आवृत्ति पर निर्भर नहीं करता हैं अर्थात् ऐसे माध्यमों के लिये

$$\frac{dv_p}{dk}=\frac{dv_p}{d\lambda}=\frac{dv_p}{d\omega}=\frac{dv_p}{dv}=0$$

अतः v_p तथा v_g में सम्बन्धों अर्थात समी. (15.6), (15.7)तथा (15.8)से -

$$v_g=v$$

अर्थात् परिक्षेपण रहित माध्यम में कला वेग तथा समूह वेग बराबर होते हैं । प्रकाश तरंगों के लिये मुक्त आकाश तथा ध्वनि तरंगों के लिये हवा परिक्षेपण रहित माध्यम होते है ।

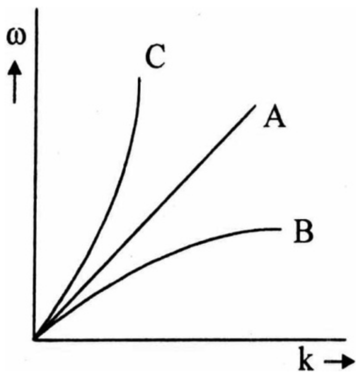
यदि किसी माध्यम में कला वेग तरंग की आवृत्ति अथवा तरंगदैर्ध्य परनिर्भर करता हो तो ऐसे माध्यम को परिक्षेपी माध्यम कहते हैं । इस आधार पर परिक्षेपण दो प्रकार के होते हैं ।

(i) सामान्य परिक्षेपण (normal dispersion)तथा

(ii) असामान्य परिक्षेपण (anamolous dispersion)।

यदि किसी माध्यम में $\frac{dv_p}{d\lambda}$ घनात्मक अथवा $\frac{dv_p}{d\lambda}$ ऋणात्मक हो तो समी. (15.6)तथा (15.7)से समूह वेग का मान कला वेग से कम होगा । इस प्रकार के परिक्षेपण को सामान्य परिक्षेपण कहते हैं ।

यदि किसी माध्यम $\frac{dv_p}{d\lambda}$ ऋणात्मक अथवा $\frac{dv_p}{d\lambda}$ घनात्मक हो तो समी (15.6)तथा (15.7)से समूह वेग का मान कला वेग से अधिक होगा । इस स्थिति में परिक्षेपण को असामान्य परिक्षेपण कहते हैं । उपरोक्त तीनों स्थितियों अर्थात परिक्षेपण रहित, सामान्य परिक्षेपण तथा असामान्य परिक्षेपण को चित्र 15.2 में क्रमशः आरखों OA, OB तथा OC से व्यक्त किया गया है ।



चित्र 15.2

अभी तक की विवेचना में हमने कला वेग तथा समूह वेग को परिभाषित करते समय केवल दो तंरगों के अध्यारोपण पर ही विचार किया है । लेकिन दो से अधिक तरंगों का भी यदि अध्यारोपण हो तो भी उपरोक्त परिभाषाएं अपरिवर्तित रहती हैं ।

बोध प्रश्न (self assessment questions)

6. परिक्षेपण रहित स्थिति मे कला वेग तथा समूह वेग मे क्या सम्बन्ध होता है ?

----

7. सामान्य परिक्षेपण की स्थिति मे समूह वेग का मान कला वेग से अधिक होता है या कम ?

----

8. आसामान्य परिक्षेपण की स्थिति मे समूह वेग का मान कला वेग से अधिक होता है या कम ?

15.5 परिक्षेपी तथा परिक्षेपण रहित स्थितियां (Dispersive and non-dispersive cases)

निम्नलिखित उदाहरणों से आपको परिक्षेपण रहित एवं परिक्षेपी माध्यमों की अवधारणा और अधिक स्पष्ट हो जायेगी ।

(i) निर्यात में विद्युत-चुम्बकीय तरंगें- निर्वात में विद्युत-चुम्बकीय तरंगो का वेग इनकी आवृत्ति अथवा तरंगदैर्ध्य पर निर्भर नहीं करता है अत: निर्वात इन तरंगों के लिये परिक्षेपण रहित माध्यम होता है । इस स्थिति में परिक्षेपण सम्बन्ध (अर्थात ω एवं k में सम्बन्ध)निम्न होता है

$\because v = \frac{c}{\lambda}$

$\therefore \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c}{(2\pi / k}$

$\therefore \omega = ck$

$$\omega = kc$$

अत: कला वेग $v_p = \frac{\omega}{k} = c$ ...(15.10)

तथा समूह वेग $v_p = \frac{d\omega}{dk} = c$ .....(15.11)

अत: निर्वात में विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के कला एवं समूह वेग समान तथा प्रकाश के वेग के बराबर होते है ।

(ii)गैस में ध्वनि तरंगें-हम जानते हैं कि लाप्लॉस संशोधन के अनुसार गैस में ध्वनि तरंग का वेग $\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ के बराबर होता हैं अत: इन तरंगों लिये

$$\omega = k\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

अत: कला वेग $v_p = \frac{\omega}{k}\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ ...(15.12)

तथा समूह वेग $v_g = \frac{d\omega}{dk}\sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ ....(15.13)

अर्थात ध्वनि तरंगों के लिये गैसीय माध्यम में $v_p = v_g$ होता है अत: ये माध्यम इन तरंगें के लिये परिक्षेपण रहित माध्यम होते हैं ।

(iii)डोरी में अनुप्रस्थ तरंगें- आप जानते हैं डोरी में अनुप्रस्थ तरंगों का वेग $\sqrt{\frac{T}{m}}$ के बराबर होता है जहां T डोरी में तनाव तथा m डोरी की एकांक लम्बाई का द्रव्यमान है । अत: इन तरंगों के लिये परिक्षेपण सम्बन्ध निम्न होगा

$$\omega = k\sqrt{\frac{T}{m}}$$

अत: इन तरंगों के लिये

कला वेग $v_p = \frac{\omega}{k}\sqrt{\frac{T}{m}}$ ....(15.14)

तथा समूह वेग $v_g = \frac{d\omega}{dk}\sqrt{\frac{T}{m}}$ .....(15.15)

चूंकि डोरी में तरंगों के कला एवं समूह वेग समान होते हैं अत: डोरी इन तरंगों के लिये परिक्षेपण रहित माध्यम होगा ।

(iv)कांच में प्रकाशीय तरंगें- कांच में प्रकाशीय तरंगों के वेग v_p एवं तरंगदैर्ध्य λ में भिन्न सम्बन्ध होता है

$$\frac{c^2}{v_p^2} = A + \frac{B}{\lambda^2}$$ ....(15.16)

यहां निर्वात में प्रकाश का वेग तथा A व B नियतांक है ।

लेकिन अपवर्तनांक $n = \frac{c}{v_p}$

$\therefore$ समी. (15.16)से

$$n_2 = A + \frac{B}{\lambda^2}$$ ....(15.17)

इसे क्वाची का परिक्षेपण सूत्र कहते हैं । इस सूत्र से स्पष्ट है कि कांच का अपवर्तनांक न्यून तरंगदैर्ध्य के लिये अधिक व दीर्घ तरंगदैर्ध्य के लिये कम होता है । अन्य शब्दों में लाल रंग के प्रकाश के लिये अपवर्तनांक न्यून व नीले रंग के प्रकाश के लिये अपवर्तनांक अधिक होता है । अर्थात् कांच के कारण नीले प्रकाश का विचलन लाल प्रकाश के विचलन की तुलना में अधिक होगा । प्रयोगों से भी उक्त तथ्य की पुष्टि होती है । इस परिक्षेपण को सामान्य परिक्षेपण कहते है । क्वाची के सूत्र से हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि कांच से परिक्षेपण में समूह वेग, कला वेग की तुलना में कम होता है । समी. (15. व 16)से

$$\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{B}{n\lambda^2}$$

लेकिन समी. (15.9)से समूह वेग के लिये

$$\frac{1}{V_g} = \frac{1}{V_p} - \frac{\lambda dn}{cd\lambda}$$

$$=\frac{1}{V_p}\left(1+\frac{V_p}{c}\frac{B}{n\lambda^2}\right)$$

$$=\frac{1}{V_p}\left(1+\frac{v_p^2}{c^2}\frac{B}{\lambda^2}\right) \qquad .....(15.18)$$

$\therefore \qquad n=\frac{c}{v_p}$

यदि प्रकाश की आवृत्ति ν हो तो

$v_p = \nu\lambda$ तथा $c = \nu\lambda_0$

जहां λ कांच में तथा λ_0 निर्वात में प्रकाश का तंरगदैर्ध्य है । अतः समी. (15.18)से

$$\frac{1}{v_g}=\frac{1}{v_p}\left(1+\frac{\lambda^2}{\lambda_0^2}.\frac{B}{\lambda^2}\right)$$

या $\qquad \frac{1}{v_g}=\frac{1}{v_p}\left(1+\frac{B}{\lambda_0^2}\right)$

या $\qquad v_g=v_p\left(1+\frac{B}{\lambda_0^2}\right)^{-1}$

या $\qquad v_g=v_p\left(1-\frac{B}{\lambda_0^2}\right) \qquad .....(15.19)$

उपरोक्त समीकरण से यह सिद्ध होता है कि कांच से परिक्षेपण की स्थिति में समूह वेग का मान कला वेग से कम होता है अर्थात यह सामान्य परिक्षेपण होता है ।

उदाहरण 15.1 पानी में तरंग का वेग $\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ है, सिद्ध कीजिये कि तरंगों का समूह वेग,तरंग वेग का आधा होगा ।

हल : दिया हुआ तरंग वेग अर्थात कला वेग

$$v_p=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \text{ लेकिन } \lambda=\frac{2\pi}{k} \text{ व } v_p=\frac{\omega}{k}$$

$\therefore \qquad \frac{\omega}{k}=\sqrt{g/k}$

या $\qquad \omega=\sqrt{gk}$

$\therefore \qquad$ समूह वेग, $v_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{1}{2}\sqrt{g/k}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}=\frac{1}{2}v_p$

अतः समूह वेग, कला वेग का आधा होता है ।

उदाहरण 15.2 यदि अवयवी (component)तरंगों के कला वेग समान हो तो सिद्ध कीजिये कि अध्यारोपित तरंग भी उसी वेग से गमन करेगी ।

हल : यदि तरंगों की कोणीय आवृत्तियां ω_1 व ω_2 हो तो प्रश्नानुसार तरंगों के कला वेग

$$v_p = \frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2}$$

अध्यारोपण से प्राप्त तरंग का वेग अर्थात समूह वेग

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

लेकिन $\omega_1 = k_1 v_p$ तथा $\omega_2 = k_2 v_p$

$$v_g = \frac{(k_1 - k_2) v_p}{(k_1 - k_2)} = v_p$$

अतः समूह वेग तथा कला वेग समान हैं ।

15.8 सारांश (summary)

- मॉडुलित तरंगों की सहायता से सूचनाओं एवं संकेतों का संप्रेषण एक स्थान से दूसरे स्थान तक किया जा सकता है ।
- तरंग के वेग को कला वेग कहते हैं ।
- मॉडुलित तरंग के का के वेग को समूह वेग कहते हैं ।
- कला वेग तथा समूह वेग में निम्न सम्बन्ध होता है-

  $$v_g = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda}$$

  इसे विभिन्न रूपों में लिखा जा सकता है ।

- परिक्षेपण रहित माध्यम में कला वेग तथा समह वेग का मान समान होता है ।
- यदि समूह वेग का मान कला वेग से कम हो तो सामान्य परिक्षेपण होता है ।
- यदि समूह वेग का मान कला वेग से अधिक हो तो असामान्य परिक्षेपण होता है ।
- हवा, ध्वनि तरंगों के लिये तथा निर्वात विद्युत-चुम्बकीय तरंगों के लिये परिक्षेपण रहित माध्यम होते है ।
- कांच में प्रकाशीय तरंगों का-सामान्य परिक्षेपण परिलक्षित होता है ।

15.7 शब्दावली (Glossory)

अपवर्तनांक	Refractive index
अध्यारोपण	superposition
असामान्य	Anamolous
आयाम	Amplitude
कला वेग	Phase velocity
ग्राही	Receiver
परिक्षेपण	Dispersion
मॉडुलन	Modulation

विमॉडुलन	De- modulation
समूह वेग	Group-velocity
सामान्य	Normal
संप्रेषण	Transmission

15.8 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1.	N.K Bajaj	The physics of Waves and Oscillations	Tata Mc. Graw-hill Publishing Company Ltd., New Delhi
2.	एम. पी. सक्सेना पी. आर. सिंह एस. एस. रावत	दोलन एवं तरंगे	कॉलेज बुक हाऊस, जयपुर
3.	जे. एस. सोखी डी. आर. फालस्वाल, सरदार सिंह, एस. के. जैन	दोलन एवं तरंगें	जयपुर पब्लिशिंग हाऊस जयपुर

15.9 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment questions)

1. नहीं ।
2. कला वेग ।
3. समूह वेग ।
4. $v_g = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda}$
5. जिस माध्यम में कला एवं समूह वेग समान नहीं होते हैं उसे परिक्षेपी माध्यम कहते है ।
6. दोनों वेग समान होते हैं ।
7. समूह वेग का मान कला वेग से कम होता है ।
8. समूह वेग का मान कला वेग से अधिक होता है ।

15.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुत्तरात्मक प्रश्न (very short answer type questions)

1. संकेत संप्रेषण अनुप्रयोग के लिये तरंग में परिवर्तन किस प्रक्रिया द्वारा किया जाता है । इस विधि से प्राप्त तरंग के आयाम को क्या कहते हैं?
2. कला वेग एवं समूह वेग की परिभाषा दीजिये ।
3. परिक्षेपण से आपका क्या अभिप्राय: है?
4. सामान्य एवं असामान्य परिक्षेपण में अन्तर बतलाइये ।
5. निम्न स्थितियों में परिक्षेपण होता है अथवा नहीं -

(i) ध्वनि तरंगों का वायु में संचरण

(ii) प्रकाश का निर्वात में संचरण ।

निम्बन्धात्मक प्रश्न (Essay type questions)

6. कला एवं समूह वेग की परिभाषा दीजिये एवं इनमें सम्बन्ध स्थापित कीजिये ।

7. किसी माध्यम द्वारा परिक्षेपण, समूह वेग पर किस प्रकार निर्भर करता है, व्याख्या कीजिये ।

8. सामान्य तथा असामान्य परिक्षेपणों से आपका क्या अभिप्राय हैं । प्रत्येक का एक एक उदाहरण देकर स्पष्ट कीजिये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

1. यदि कला वेग v_p के मान निम्न हो तो समूह वेग के मान ज्ञात कीजिये ।

(i) $v_p = a\sqrt{\lambda}$) ii($v_p = \frac{a}{\lambda}$

(**उत्तर :** (i) $v_p/2$ (ii)$2v_p$)

2. एक तरंग निम्न समीकरण के अनुसार संचरण कर रही है. तरंग का कला वेग ज्ञात कीजिये ।

Y = 5sin (120t-0.2x) (**उत्तर :** 600 मीटर / सेकण्ड)