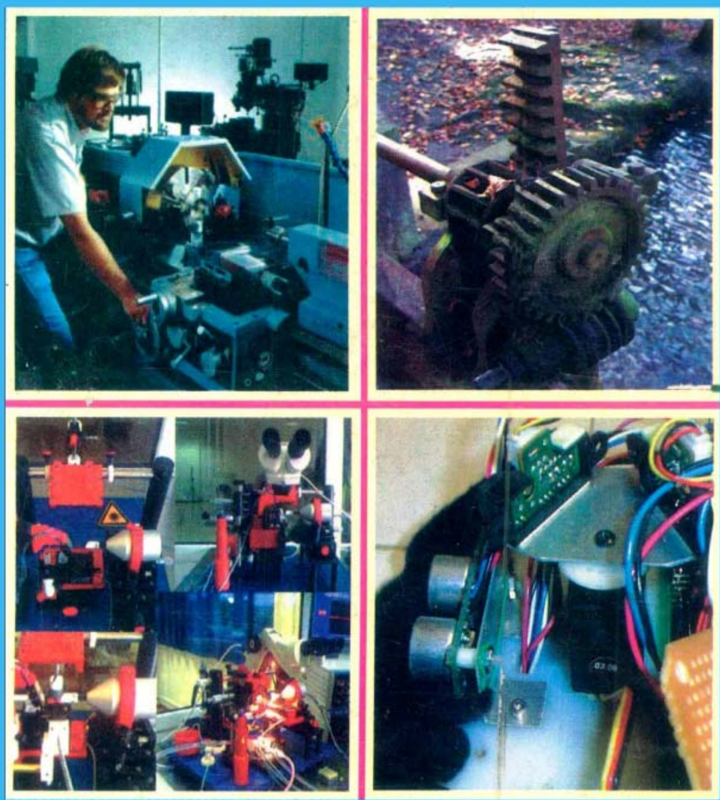
PH-01

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा



यांत्रिकी

PH-01

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा **भौतिक विज्ञान**

यांत्रिकी

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

अध्यक्ष
प्रोफेसर (डॉ.) नरेश दाधीच
कुलपति
वर्धमान महावीर विश्वविद्यालय, कोटा

विषय समन्नवयक
प्रोफेसर (डॉ.) एन. एस. सक्सेना
भौतिक विज्ञान विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

सदस्य सचिव / समन्वयक
डॉ. अशोक शर्मा
सह आचार्य, राजनीति विज्ञान
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

सदस्य

1. **प्रो. आर. के पाण्डेय,**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   वर्कतुल्ला विश्वविद्यालय, भोपाल
2. **प्रो. एम. हु सैन,**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   जामिया मिलिया इस्लामिया, नई दिल्ली
3. **प्रो. पी. प्रदीप,**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   राष्ट्रीय तकनीकी संस्थान, कालीकट
4. **डॉ. डी. सी. जैन,**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
5. **डॉ. के. बी. शर्मा,**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   एस. एस. जैन सुबोध (पी. जी) कॉलेज, जयपुर
6. **डॉ. आर. एन. शर्मा,**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   एम. एस. जे. कॉलेज, भरतपुर
7. **श्री. बी. एस. शर्मा,**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   राजकीय महाविद्यालय, कोटा
8. **श्री अनिल कुमार गुप्ता**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   डी. ए. वी. कॉलेज, अजमेर

सम्पादक एवं पाठ लेखन

सम्पादक
डॉ. डी. सी. जैन,
एसोसियेत प्रोफेसर, भौतिक विज्ञान विभाग,
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

लेखक

1. **डॉ0 आर. एन शर्मा,**
   भौतिक विज्ञान विभाग,
   एम.एस. जे. कालेज, भारतपुर
2. **डॉ0 अशोक कुमार बंसल,**
   भौतिक विज्ञान विभाग,
   एम.एस. जे. कालेज, भारतपुर
3. **श्री बी. एस. शर्मा,**
   भौतिक विज्ञान विभाग
   राजकीय महाविद्यालय, कोटा
4. **डॉ0 परमजीत सिंह,**
   भौतिक विज्ञान विभाग,
   एम.एस. जे. कालेज, भारतपुर
5. **डॉ0 मनीष गुप्ता,**
   भौतिक विज्ञान विभाग,
   एम.एस. जे. कालेज, भारतपुर

पाठ्यक्रम निर्देशक एवं उत्पादन

निर्देशक (अकादमिक)
प्रोफेसर (डॉ.) अनाम जेटली
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

निदेशक (सामाग्री उत्पादन एवं वितरण)
प्रोफेसर (डॉ.) पी. के. शर्मा
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

उत्पादन-जुलाई, 2007

निदेशक (अकादमिक) द्वारा वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा के लिय मुद्रित एवं प्रकाशित।

आमुख

जन-जन तक शिक्षा प्रसार के उद्देश्य से वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय,कोटा द्वारा दूरस्थ शिक्षा पद्धति के तहत स्नातक (विज्ञान) के विद्यार्थियों के लिये यह पाठ्य सामाग्री विशेष रूप से तैयार करायी गई है।

इसी क्रम में बी.एस.सी (प्रथम वर्ष) भौतिक विज्ञान विषय में PH-01 यांत्रिकी की पाठ्य सामाग्री को पाँच खंडों में विभाजित कर 15 इकाइयों में वर्गीकृत किया गया है।

प्रथम खंड में " न्यूटन यान्त्रिकी की प्रारम्भिक आवश्यकताएँ" शीर्षक के अंतर्गत गतिकी, बल, कार्य एवं ऊर्जा की दुरूह संकल्पनाओं को दैनिक जीवन के उदाहरणों से स्पष्ट किया गया है । **द्वितीय खण्ड** में "संरक्षण नियम" के अंतर्गत ऊर्जा संरक्षण, रेखीय संवेग संरक्षण तथा कोणीय संवेग संरक्षण को रोमांचकारी उदाहरणों द्वारा प्रस्तुत किया गया है । **तृतीय खण्ड** में "निर्देश तंत्र" के अंतर्गत जड़त्वीय तंत्र, गेलेलियन रूपान्तरण तथा सापेक्षिकता को सनझाया गया है । **चौथे खण्ड** "दृढ़ पिण्ड गतिकी" शीर्षक के अंतर्गत द्रव्यमान– केंद्र जड़त्व आघूर्ण और **पांचवें खण्ड** में प्रत्यास्थता शीर्षक क अंतर्गत पदार्थ के प्रत्यास्थ गुण बेलन तथा प्रत्यास्थ गुणकों का प्रयोगिक निर्धारण की पाठ्य सामग्री को सुरुचिपूर्ण तरीके से प्रस्तुत किया गया है।

स्वजांच की दृष्टि से प्रत्येक संकल्पना के अन्त में प्रायप्त बोध प्रश्न दिये गये हैं और इकाई के अन्त में महत्वपूर्ण बिन्दुओं को सारांश के रूप में संकलित किया गया है ।

प्रस्तुत पुस्तक में प्रयुक्त परिभाषित शब्दों का चयन भारत सरकार द्वारा प्रकाशित ब्रहद् पारिभाषिक शब्द संग्रह से किया गया है ।

आशा है कि दूरस्थ शिक्षा के अंतर्गत अध्ययनरत विज्ञान विषय के विद्यार्थीयों के लिये यह प्रस्तुत स्वप्रेरित अध्ययन के लिये प्रेरणा रूप में एक सार्थक भूमिका निभायेगा ।

इकाई-1

गतिकी
(Kinematics)

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप

- विभिन्न भौतिक राशियों को सदिश, अदिश व प्रदिश के रूप में सूचीबद्ध कर सदिशों के संयोजन व वियोजन की प्रक्रिया को जान सकेंगे;
- सदिशों के अदिश व सदिश गुणनफल द्वारा दो सदिशों के परस्पर समान्तर व लम्बवत् होने तथा तीन सदिशों के समतलीय होने का प्रतिबंध प्राप्त कर सकेंगे;
- स्थानान्तरण गति की विभिन्न भौतिक चर राशियों की संकल्पना एवं उनके ग्राफीय प्रदर्शन जान सकेंगे;
- आपेक्षिक वेग का ज्ञान प्राप्त कर सकेंगे;

- कण की प्रक्षेप्य गति में प्रक्षेप्य का पथ, उड्डयन काल, परास व अधिकतम ऊँचाई का आकलन कर सकेंगे;
- क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर तल में कण की वृत्ताकार गति करने का आवश्यक प्रतिबंध प्राप्त कर सकेंगे ।
- न्यूटन-यांत्रिकी की प्रारम्भिक अवधारणाएँ

1.1 प्रस्तावना (Introduction)

यांत्रिकी की वह उपशाखा, जिसमें गति के कारणों (जैसे बलों की प्रकृति, पिण्डों की आकृति आदि) को जाने बिना गति का अध्ययन किया जाता है, उसे गतिकी कहते हैं ।

यदि किसी पिण्ड की स्थिति' उसके समीपस्थ पिण्डों के सापेक्ष समय के साथ परिवर्तित नहीं होती है, तो वह पिण्ड विरामावस्था में कहलाता है । इसके विपरीत यदि पिण्ड की स्थिति उसके समीपस्थ पिण्डों के सापेक्ष समय के साथ परिवर्तित होती है, तो यह गति की अवस्था में कहलाता है ।

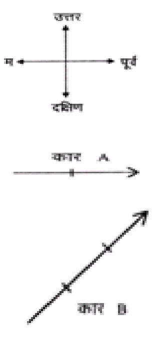
इस इकाई के अनुच्छेद 1.2 में आप भौतिक राशियों के सदिश निरूपण, उनके संयोजन व वियोजन के बारे में पढेंगे, इन संकल्पनाओं के अनुप्रयोग से पिण्डों की आपेक्षिक गति व प्रक्षेप्य गति को आप सरलता से समझ सकेंगे । सदिश राशियों के गुणनफल द्वारा आप कार्य, शक्ति, घूर्णन वेग, कोणीय संवेग, बल आघूर्ण, लारेन्ज बल के प्रभाव में आवेशित कणों की गति जैसे अनेक भौतिकीय प्रभावों को समझ सकेंगे ।

अनुच्छेद 1.3,1.4 तथा 1.5 में आप नियत त्वरण के अन्तर्गत द्वि-विमीय तल में कण की प्रक्षेप्य गति के बारे में पढेंगे व इसके द्वारा किसी कोण पर फेंके गये पिण्ड की गति, बंदूक से छोडी गई गोली की गति, हवाई-जहाज से गिराये गये पैकेट की गति को आसानी से समझ सकेंगे । इकाई के अंत में आप किसी पिण्ड की क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर तल में वृत्ताकार गति व इसके लिए आवश्यक प्रतिबंधों को जान सकेंगे ।

1.2 सदिश प्रदर्शन (Vector representation)

दिशा बोध के आधार पर भौतिक राशियों को तीन वर्गों में बांटा जा सकता है :

(1) अदिश राशियाँ (Scalar quantities)



चित्र 1.1

ऐसी भौतिक राशियाँ जिन्हें पूर्णत: व्यक्त करने के लिए केवल परिमाण व मात्रक की आवश्यकता होती है, लेकिन दिशा की आवश्यकता नहीं होती, अदिश राशियाँ कहते हैं । द्रव्यमान, दूरी, समय, चाल, आयतन, घनत्व, कार्य, शक्ति, आवेश, विद्युत धारा, विभव आदि अदिश राशियाँ हैं । अदिश राशियों का योग, व्यवकलन, गुणा, भाग आदि की संक्रियाएं बीजगणितीय नियमों द्वारा सम्पन्न

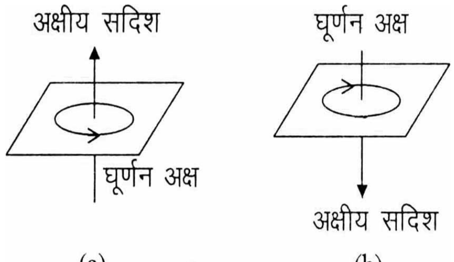
(2) सदिश राशियाँ (Vector quantities)

वह भौतिक राशियाँ जिन्हें पूर्णत: व्यक्त करने के लिए परिमाण के -साथ दिशा का बोध भी आवश्यक होता है, उन्हें सदिश राशियाँ कहते हैं । जैसे विस्थापन, वेग, त्वरण, संवेग, धारा घनत्व आदि । मल ग्राफीय रूप से सदिश को एक सरल रेखा खण्ड द्वारा व्यक्त करते हैं, जिसके शीर्ष पर तीर का चिन्ह लगाया जाता है । सरल रेखा की लम्बाई, सदिश के परिमाण के समानुपाती तथा तीर

का चिन्ह सदिश राशि की दिशा को व्यक्त करता है । चित्र 1.1 में कार A व कार B के वेग सदिश प्रदर्शित हैं । कार A पूर्व दिशा में 10 मी./से. व कार B उत्तर-पूर्व दिशा में 15 मी./से. के वेग से गतिशील हैं ।

सदिशों के दो प्रकार हैं-

(अ) ध्रुवीय सदिश (Polar vector) - एक निश्चित क्रिया बिन्दु से आरम्भ होने वाले सदिशों को ध्रुवीय सदिश कहते हैं । विस्थापन, रेखीय संवेग, बल आदि ध्रुवीय सदिश हैं ।



चित्र 1.2

(ब) अक्षीय सदिश (Axial vector)- किसी अक्ष के प्रति घूर्णन से सम्बन्धित सदिश को अक्षीय सदिश कहते हैं । इनकी दिशा घूर्णन अक्ष के अनुदिश; दाँये हाथ के पेच नियम से व्यक्त होती है । कोणीय वेग, कोणीय संवेग, बल आघूर्ण आदि अक्षीय सदिश है | चित्र 1.2(a) मे वामावर्ती तथा 1.2(b) में दक्षिणावर्ती अक्षीय सदिश को दर्शाया गया है ।

(3) प्रदिश राशियाँ (Tensor quantities)

वह भौतिक राशियाँ जिनकी स्वयं की कोई दिशा तो नहीं होती लेकिन इनका परिमाण भिन्न-भिन्न दिशाओं में भिन्न-भिन्न होता है, उन्हें प्रादेश राशियाँ कहते हैं । जड़त्व आघूर्ण, प्रतिबल, विषम दैशिक माध्यम में विद्युतशीलता, चुम्बकशीलता आदि प्रदिश राशियाँ हैं । सदिशों के प्रारम्भिक अध्ययन के लिये कुछ मूलभूत संकल्पनाऐं निम्नानुसार हैं -

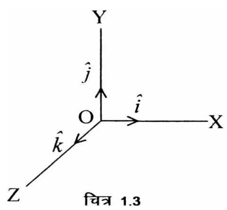
एकांक सदिश (Unit vector)

किसी दिए हुए सदिश के लिए एकांक सदिश वह सदिश है जिसका परिमाण एकांक (या इकाई हो) तथा दिशा मूल सदिश की दिशा में होती है । किसी दिए हुए सदिश $\vec{A}$ के एकांक सदिश $\hat{A}$ के लिए

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \text{सदिश/(सदिश का परिमाण)} \qquad ...(1.1)$$

तथा $\quad |\hat{A}| = I \qquad .... (1.2)$

चित्र 1.3 में कार्तीय निर्देशांक अक्षों OX ,OY व OZ के अनुदिश एकांक सदिशों को $\hat{i}, \hat{j}$ व $\hat{k}$ द्वारा दर्शाया जाता है। किसी सदिश $\hat{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$ के अनुदिश एकांक सदिश



चित्र 1.3

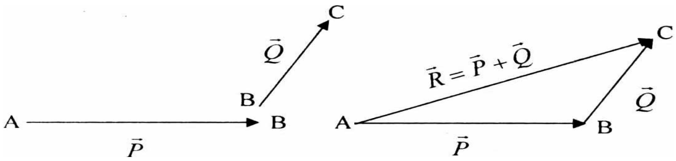
$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z}{\sqrt{A^2{}_x + A^2{}_y + A^2{}_z}} \qquad .... (1.3)$$

सदिशों का संयोजन एवं वियोजन (Addition and resolution of vectors)

समान प्रकृति के सदिशों के योग (संयोजन) -के निम्न नियम हैं-

(अ) **त्रिभुज नियम-** इस नियम के अनुसार यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएं एक ही क्रम में कण पर एक ही समय पर लगने वाले सदिशों को परिमाण व दिशा में व्यक्त करें तो तीसरी भुजा विपरीत क्रम में उनके योग (परिणामी सदिश) को व्यक्त करती है । देखिये चित्र 1.4 |

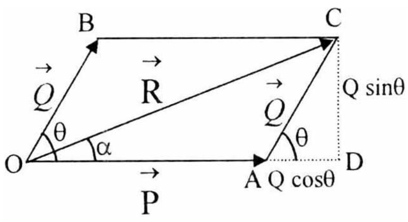
$\vec{P}+\vec{Q}=\vec{R}$



चित्र 1.4

(ब) **समान्तर चतुर्भुज नियम-** इस नियम के अनुसार किसी कण पर एक साथ लग रहे सदिशों को परिमाण व दिशा में एक बिन्दु से खींची गई समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजाओं से प्रदर्शित किया जाये तो इनका परिणामी सदिश, परिमाण व दिशा में उसी बिन्दु से पारित समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण द्वारा व्यक्त किया जाता है ।

चित्र 1.5 में सदिश $\vec{P}$ व $\vec{Q}$ जो कि किसी कण पर θ कोण पर एक साथ लग रहे हैं, इन्हें समान्तर चतुर्भुज की व OB भुजाओं से प्रदर्शित किया जाता है; तो इनका परिणामी सदिश $\vec{R}=\vec{P}+\vec{Q}$ को O से पारित विकर्ण $\overrightarrow{OC}$ द्वारा प्रदर्शित होगा । अर्थात् परिणामी सदिश का परिमाण न्यूटन-यांत्रिकी की प्रारम्भिक अवधारणाएँ



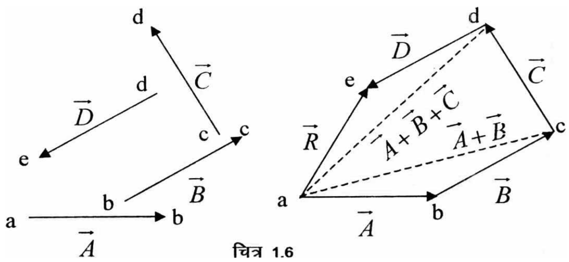
चित्र 1.5

$$\left|\vec{R}\right|=\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\theta} \qquad .... (1.4)$$

तथा दिशा $$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{Q\sin\theta}{P+Q\cos\theta}\right) \qquad ...(1.5)$$

द्वारा दी जाती है |

(स) **बहुभुज नियम-** इस नियम के अनुसार दो से अधिक सदिशों को किसी बहुभुज की क्रमिक भुजाओं द्वारा व्यक्त किया जाये तो बहुभुज को बन्द करने वाली अन्तिम भुजा विपरीत क्रम में परिमाण व दिशा में परिणामी सदिश को व्यक्त करती है ।

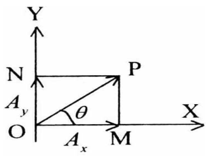


चित्र 1.6

चित्र 1.6 में सदिशों $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ व $\vec{D}$ के योग को परिमाण व दिशा में $\vec{R}$ द्वारा बहुभुज की भुजा से दर्शाया गया है|

$\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}$

सदिश का वियोजन (Resolution of a vector)



चित्र 1.7

यह दिये गये सदिश को विभिन्न दिशाओं में दो या अधिक सदिशों में विभाजित करने की प्रक्रिया है, जिनका संयुक्त प्रभाव वही हो जो कि अकेले सदिश का होता है । इन वियोजित सदिशों को दिए हुए सदिश के घटक कहते हैं ।

यदि किसी सदिश को दो ऐसे सदिशों में वियोजित करें जो परस्पर लम्बवत हो तो इन्हें दिये हुए सदिश के आयताकार घटक (rectangular components) कहते हैं । चित्र 1.7 में सदिश $\vec{A}$ को समकोणिक अक्षों OX व OY के अनुदिश आयताकार घटक $\vec{A}_x$ व $\vec{A}_y$, द्वारा वियोजित कर दर्शाया गया है अत:

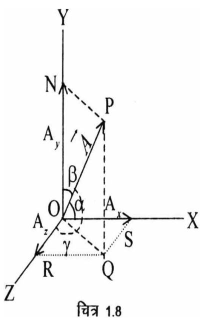
$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \quad \text{....(1.6)}$$

यदि सदिश $\vec{A}$,X- अक्ष से θ कोण बनाता है तो

$A_x = A\cos\theta$ तथा $A_y = A\sin\theta$

यदि $\hat{i}$ व $\hat{j}$ क्रमश: X- अक्ष व Y- अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश हों तो $\vec{A}_x = A_x\hat{i}$ व $\vec{A}_y = A_y\hat{j}$

अत: $$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \quad \text{....(1.7)}$$



चित्र 1.8

$$\therefore \left|\vec{A}\right| = \sqrt{A^2{}_x + A^2{}_y} \quad \text{...(1.8)}$$

तथा $$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \quad \text{...(1.9)}$$

इसी प्रकार यदि $\vec{A}$ किसी तल में न होकर त्रि-विमीय आकाश में हो तथा X,Y, व Z-अक्षों से क्रमश: α, β, γ कोण बनाता हो तो इन अक्षों. के अनुदिश $\vec{A}$ के घटक A_x, A_y व A_z होने पर

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z \quad \text{.... (1.10)}$$

$$= A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \quad \text{...... (1.11)}$$

जहाँ $A_x = A\cos\ \alpha, A_y = A\cos\ \beta$ व $A_z = A_z\cos\ \gamma$

तथा $$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A^2{}_x + A^2{}_y + A^2{}_z} \quad \text{..(1.12)}$$

$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ ..... (1.13)

$\cos\ \alpha, \cos\ \beta$ व $\cos\gamma$ को दिक्कोज्याएं कहते हैं । (देखिये चित्र 1.8

सदिशों का गुणनफल (Product of vectors)

गुणनफल के आधार पर सदिशों के लिए गुणन निम्न प्रकार परिभाषित हैं-

(1) सदिश राशि का अदिश राशि से गुणन (Multiplication of a vector by a scalar)

सदिश $\vec{A}$ को किसी अदिश राशि या संख्या K है से गुणा करने पर परिणामी सदिश $\vec{R}$ का परिमाण सदिश $\vec{A}$ का K गुना हो जाता है, लेकिन दिशा वही रहती है ।

$$\vec{R} = K\vec{A} \tag{1.14}$$

उदाहरण - जब वेग ($\vec{v}$) को अदिश राशि द्रव्यमान (m) से गुणा करते हैं तो सदिश राशि संवेग ($\vec{p} = m\vec{v}$) प्राप्त होता है ।

(2) दो सदिशों का अदिश गुणनफल या बिन्दु गुणनफल (Scalar product or dot product of two vectors)

जब दो सदिशों के गुणन से प्राप्त राशि अदिश हो तो इसे अदिश गुणनफल कहते हैं । यह दोनों सदिशों के परिमाण व उनके मध्य कोण की कोज्या के गुणन के बराबर होता है ।

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \quad \text{.... (1.15)}$$

इसे किसी एक सदिश के परिमाण व दूसरे सदिश के प्रथम सदिश की दिशा में एक घटक या प्रक्षेप के गुणन द्वारा भी परिभाषित कर सकते हैं । अत:

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|\left\{|\vec{B}|\cos\theta\right\} = |\vec{B}|\left\{|\vec{A}|\cos\theta\right\}$$

अत: $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ ......(1.16)

इस प्रकार अदिश गुणनफल क्रम विनियम नियम का पालन करता है ।

दोनों सदिशों के समान्तर होने पर (θ = 0)

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = |\vec{A}||\vec{B}|$$

इस प्रकार $\hat{i}.\hat{i} = 1, \hat{j}.\hat{j} = 1$ व $\hat{k}.\hat{k} = 1$ .... (1.17)

तथा जब दो सदिश परस्पर लम्बवत् होते हैं, तो

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos 90^0 = 0$$

इस प्रकार $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$ ..... (1.18)

अदिश गुणनफल द्वारा कार्य ($dw = \vec{F}.d\vec{r}$), शक्ति ($P = \vec{F}.\vec{V}$), विद्युत फ्लक्स ($d\phi = \vec{E}.d\vec{s}$) आदि भौतिक राशियों के मान प्राप्त किए जाते हैं ।

(3) सदिश गुणनफल या बज्र गुणनफल (Vector product or cross product)

जब दो सदिशों के गुणनफल से प्राप्त राशि भी एक सदिश हो तो उसे सदिश गुणनफल कहते हैं । परिणामी सदिश का परिमाण, दोनों सदिशों के परिमाण व उनके मध्य कोण की ज्या के गुणनफल के बराबर होता है तथा परिणामी सदिश की दिशा, उस तल के लम्बवत् होती है जिसमें दोनों सदिश स्थित होते हैं । इसे चित्र 1.9 में दर्शाये अनुसार दक्षिणावर्ती पेच के नियम द्वारा ज्ञात करते हैं ।

$$\vec{R} = \vec{A}\times\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\hat{n} \quad \text{.(1.19)}$$

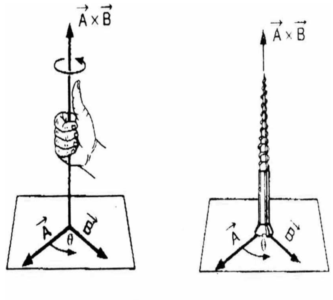
जहाँ $\hat{n}$, परिणामी सदिश ($\vec{R}$) मे की दिशा में एकांक सदिश है ।

सदिश गुणनफल क्रम विनिमय के नियम का पालन नहीं करता,

अर्थात् $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$ तथा

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A} \quad \text{....(1.20)}$$

दो सदिशों के समान्तर होने पर उनके मध्य कोण



चित्र 1.9

$\theta = 0^0$ होगा,

अत: $\vec{A}\times\vec{B} = 0$

कार्तीय निर्देश तंत्र में एकांक सदिशों के लिए

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0 \qquad .....(1.21)$$

तथा
$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k};\ \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i};\ \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$$

$$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k};\ \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i};\ \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j} \qquad .....(1.22)$$

भौतिकी में सदिश गुणनफल का अनुप्रयोग कोणीय संवेग, बल आघूर्ण, लॉरेन्ज बल आदि को ज्ञात करने में किया जाता है ।

बोध प्रश्न(Self assessment question)

1. एकांक सदिश किसे कहते है ।

   ....

   ....

2. दो सदिशों के योग व व्यवकलन के लिए आवश्यक शर्त क्या है?

   ....

3. किन्हीं तीन सदिशों के समतलीय होने का प्रतिबंध क्या है?

   ....

   ....

उदाहरण 1.1 सदिश का एकांक सदिश ज्ञात करो ।

हल : $\quad \vec{\mathrm{A}} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} = 4\hat{j} + 3\hat{k}$ से $A_x = 5, A_y = -4, A_z = 3$

सदिश $\vec{A}$ का परिमाण $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A^2{}_x - A^2{}_y + A^2{}_z} = \sqrt{(5)^2 + (-4)^2 + (3)^2}$

या $\quad \left|\vec{A}\right| = \sqrt{25+16+9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ अत: $\vec{A}$ का एकांक सदिश $\hat{A} = \dfrac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \dfrac{5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}}{5\sqrt{2}}$

उदाहरण 1.2 किसी कण पर कार्यरत बल $\vec{F} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ एवं विस्थापन $d\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ हों, तो किया गया कार्य तथा बल व विस्थापन के मध्य कोण की गणना करो ।

हल. कार्य $dw = \vec{F}.d\vec{r} = \left(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}\right)\left(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right) = 1\times 2 + (-1)\times 1 + 2\times 1 = 3$ मात्रक

तथा $dw = \vec{F}.d\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{r}\right|\cos\theta$ से

$$\cos\theta = \frac{dw}{\left|\vec{F}\right|\left|d\vec{r}\right|} = \frac{3}{\left(\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2}\right)\left(\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (1)^2}\right)}$$

$$= \frac{3}{\left(\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{6}\right)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \theta = 60^0$$

उदाहरण 1.3 एक कण की स्थिति सदिश $\vec{r} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ मीटर है तथा उस पर बल $\vec{F} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ न्यूटन कार्य कर रहा है । मूल बिन्दु के सापेक्ष कण पर लगने वाले बल आघूर्ण का मान ज्ञात करो ।

हल : बल आघूर्ण $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$= \left(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}\right) \times \left(2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(2+9) - \hat{j}\,(1-6) + \hat{k}\,(-3-4) = 11\hat{j} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$\therefore |\vec{r}| = \sqrt{(11)^2 + (5)^2 + (-7)^2} = \sqrt{121+25+49} = \sqrt{195} \quad \text{न्यूटन - मीटर}$$

1.3 ऋजु रेखीय गति (Rectilinear motion)

सरल रेखीय पथ में होने वाली कण की गति को ऋजु रेखीय गति कहते हैं। जबकि स्थानान्तरण गति (translator motion) में पिण्ड (जो कि बिन्दु द्रव्यमान नहीं है) इस प्रकार गतिशील होता है कि इसके सभी अवयव कण समान्तर रेखाओं के अनुदिश एक साथ गतिशील होते हैं तथा समान समयान्तराल में समान दूरी में विस्थापित होते हैं । उदाहरण के लिए किसी समतल पर फिसल कर गति करने वाले पिण्ड की गति स्थानान्तरण गति होती है ।

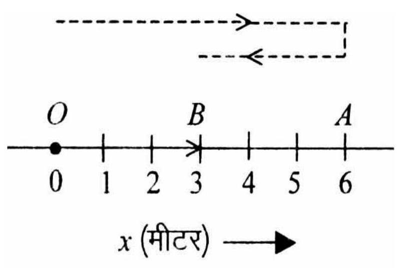
1.3.1 बिन्दु द्रव्यमान का पिण्ड (Object of point mass)

यदि कोई पिण्ड किसी नियत समय में अपने स्वयं के आकार व विमा की तुलना में अत्यधिक दूरी तय करता है तो ऐसी गति में उस पिण्ड को एक बिन्दु द्रव्यमान के रूप में माना जा सकता है । उदाहरण के लिए यदि एक कार जो कि 100 किलोमीटर दूरी तय करती है तो उस स्थिति में कार को बिन्दु द्रव्यमान माना जा सकता है। इसके विपरीत यदि वही कार अपने आकार की तुलना में केवल 5 मीटर दूरी तय करती है तो उसे बिन्दु द्रव्यमान नहीं मान सकते । इसी प्रकार सूर्य के चारों ओर परिक्रमा कर रहे ग्रह को कण रूप में मान सकते हैं क्योंकि इसकी कक्षा की लम्बाई, ग्रह के व्यास की तुलना मे अत्यधिक होती है ।

1.3.2 स्थानान्तरण गति के चर व उनका ग्राफीय निरूपण (Variables of translatory motion and their graphical representation)

(1) दूरी तथा विस्थापन (Distance and displacement)

गतिशील कण द्वारा नियत समयान्तरल में प्रारम्भिक व अंतिम स्थितियों के मध्य तय किये गये पथ की लम्बाई को **दूरी** कहते हैं जबकि कण की प्रारम्भिक व अंतिम स्थिति को मिलाने वाली रेखा की लम्बाई को **विस्थापन** कहते हैं ।दूरी एक अदिश राशि है, जबकि विस्थापन एक सदिश राशि है | चित्र 1.10 में एक कण एक विमीय गति करते हुए प्रारम्भिक स्थिति O से A तक गति कर अंत में B पर आकर रूक जाता है ।



चित्र 1.10

इस प्रकार कण द्वारा तय की गई कुल दूरी (OA+AB=6+3)=9 मीटर है जबकि कण की प्रारम्भिक स्थिति O से अंतिम स्थिति B तक कुल विस्थापन $O\vec{B}$ =3 मीटर धन X- अक्ष की ओर है, अर्थात् विस्थापन $O\vec{B} = 3\hat{i}$ मीटर है ।

(2) चाल (Speed)

कण द्वारा नियत समयान्तराल में तय की गई कुल दूरी की समय के सापेक्ष दर को औसत चाल कहते हैं । अर्थात्

औसत चाल $V_{av} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{\Delta s_1 + \Delta s_2 + ...}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + ...}$ .... (1.23)

जहाँ कण द्वारा क्रमिक समयान्तरालों $\Delta t_1, \Delta t_2, ...$ में तय की गई दूरियाँ क्रमशः $\Delta s_1, \Delta s_2, ...$ हैं ।

अत्यल्प समयान्तराल की सीमा $\Delta t \to 0$ में औसत चाल को कण की उस क्षण पर **तात्क्षणिक** चाल कहते हैं । अर्थात्

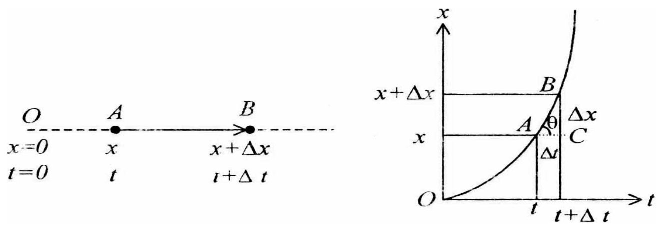
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad ..(1.24)$$

(3) वेग (Velocity)

नियत समयान्तराल में कण के विस्थापन की समय के सापेक्ष दर को कण का औसत वेग कहते हैं । वेग एक सदिश राशि है, जबकि चाल एक- अदिश राशि है । अर्थात्

औसत वेग $\vec{v}_{av} = \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ ..(1.25)

चित्र 1.11 में कण की एक विमीय गति में समय t व t + Δt पर स्थिति A व B में स्थितियाँ क्रमशः x व



(अ) चित्र 1.11 (ब)

व $x + \Delta x$ पर दर्शायी गयी हैं, इस प्रकार Δt समयान्तराल में कण का विस्थापन $A\vec{B} = \Delta \vec{x}$ है । अत्यल्प समयान्तराल $\Delta t \to 0$ होने पर औसत वेग कण का किसी विशिष्ट क्षण पर तात्क्षणिक वेग कहलाता है ।

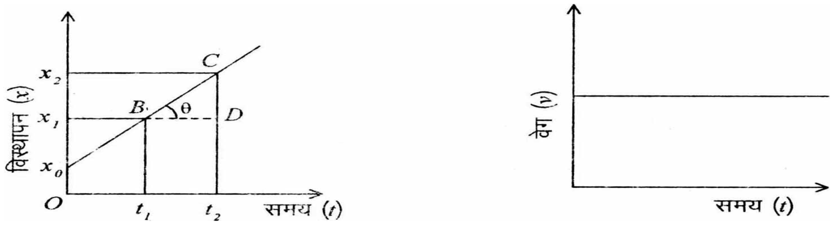
तात्क्षणिक वेग $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$ ..(1.26)

यह अभीष्ट बिन्दु A पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता या ढाल के तुल्य होता है ।

एक समान गति (Uniform motion)

यदि कोई कण एक ही दिशा में समान समयान्तराल में समान दूरी तय करता है, तो कण की गति एक समान गति कहलाती है, अर्थात् गतिशील कण का वेग नियत रहता है ।

$\therefore v = \dfrac{dx}{dt} =$ नियत



चित्र 1.12

$$\therefore dx = vdt$$

यदि $t = t_0$ समय पर विस्थापन x_0 तथा t समय पर विस्थापन x हो तो समाकलन द्वारा

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt = v\int_{t_0}^{t} dt \quad \text{या} \quad x - x_0 = v(t - t_0)$$

$$\therefore x = x_0 + v(t - t_0) \qquad ..(1.27)$$

यह एक सरल रेखा का समीकरण है, इसे चित्र 1.12 (अ) में दर्शाया गया है ।

(4) त्वरण (Acceleration)

किसी कण के लिए समय के साथ उसके वेग में परिवर्तन की दर को त्वरण कहते हैं । यदि t_1 व t_2 समय पर कण के वेग क्रमशः $\vec{v}_1$ व $\vec{v}_2$ हों तो कण का औसत त्वरण

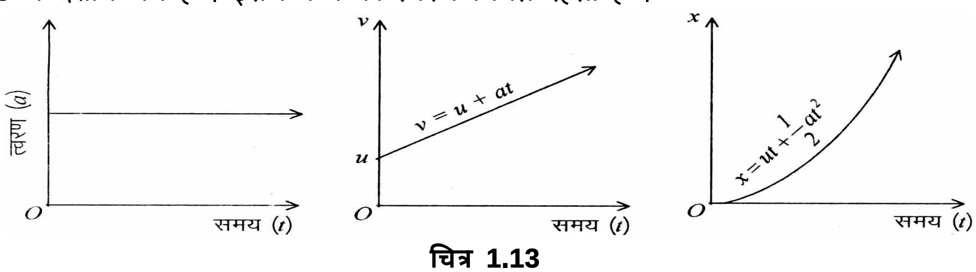
$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad .....(1.28)$$

जब समयान्तराल Δt अत्यल्प होता है तो औसत त्वरण के सीमान्त मान को कण का तात्क्षणिक त्वरण कहते हैं । अर्थात्

$$\text{तात्क्षणिक त्वरण} \quad \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta\vec{t}} = \frac{d\vec{v}}{d\vec{t}} \qquad .....(1.29)$$

एक समान त्वरण गति-

एक समान त्वरण गति में कण के त्वरण, वेग व विस्थापन के समय के साथ आरेख चित्र 1.13 में दर्शाये गये हैं । इसमें कण का त्वरण नियत रहता है ।



चित्र 1.13

समी. (1.29) से $dv = adt$

अतः $\displaystyle\int_{u}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} adt = a\int_{t_0}^{t} dt$ (चूँकि a नियत है)

$$\therefore v = u + a(t - t_0) \qquad .....(1.30)$$

पुन: समी. (1.26) से $dx = vdt$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt = \int_{t_0}^{t} [u + a(t - t_0)]dt \quad \text{या} \quad x - x_0 = u(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

या $$x = x_0 + u(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \qquad ..(1.31)$$

सुविधा के लिए जब $t_0 = 0$ व $x_0 = 0$ हो तो

$$v = u + at \qquad ..... (1.32)$$

तथा $$x = ut + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad ..... (1.33)$$

पुन: $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \qquad \left(\therefore v = \frac{dx}{dt}\right)$$

या $$vdv = adx$$

समाकलन से $$\int_{u}^{v} vdv = \int_{t_0}^{t} adx \quad \text{या} \quad \frac{1}{2}(v^2 - u^2) = \int_{x_0}^{x} adx$$

या $$\frac{1}{2}(v^2 - u^2) = a\int_{x_0}^{x} dx$$ (यदि a नियत है)

या $$\frac{1}{2}(v^2 - u^2) = a(x - x_0)$$

$$\therefore v^2 = u^2 + 2a(x - x_0)$$

यदि $t_0 = 0$ पर $x_0 = 0$ है तो

$$v^2 = u^2 + 2ax \qquad .... (1.34)$$

जब गति में पिण्ड का त्वरण नियत बना रहे तो समी. (1.32), (1.33) व (1.34) को क्रमश: गति के प्रथम, द्वितीय व तृतीय समी. कहते हैं ।

1.3.3 ऋजुरेखीय आपेक्षिक गति (Rectilinear relative motion)

किसी कण की विराम व गति की अवस्थाऐं निरपेक्ष न होकर सापेक्षिक होती हैं । कोई वस्तु किसी एक प्रेक्षक के सापेक्ष विराम की स्थिति में हो सकती है, जबकि दूसरे प्रेक्षक के सापेक्ष वह गति की अवस्था में हो सकती है ।

किसी एक वस्तु (A) का दूसरी वस्तु (B) के सापेक्ष आपेक्षिक वेग ($\vec{v}_{AB}$), प्रथम वस्तु (A) के दूसरी वस्तु (B) के सापेक्ष स्थिति में परिवर्तन की समय के सापेक्ष दर द्वारा परिभाषित की जाती है ।

यदि A व B किसी प्रेक्षक या निर्देश तंत्र के सापेक्ष क्रमश: एक समान वेग $\vec{v}_A$ व $\vec{v}_B$ से गतिशील हों तो A का B के सापेक्ष, आपेक्षिक वेग

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \qquad ..(1.35)$$

इसी प्रकार B का A के सापेक्ष, आपेक्षिक वेग

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A \quad ..... \ (1.36)$$

माना दो पिण्ड A व B; X- अक्ष के अनुदिश v_A व v_B एक समान वेग से गतिशील हैं व प्रारम्भ में $t = 0$ पर उनकी स्थितियाँ x_{0A} व x_{0B} हैं तो किसी समय t पर उनकी स्थितियाँ

$$x_A = x_{0A} + v_A t \quad \text{तथा} \quad x_B = x_{0B} + v_B t$$

$$\therefore x_A - x_B = (x_{0A} + x_{0B}) + (\vec{v}_A - \vec{v}_B)t$$

या $\quad x = x_0 + (v_A - v_B)t$

अत: A का B के सापेक्ष आपेक्षिक वेग

$$v_{AB} = v_A - v_B = \frac{x - x_0}{t} \quad ... \ (1.37)$$

जहाँ $x = x_A - x_B =$ किसी समय t पर A का B के सापेक्ष आपेक्षिक विस्थापन

तथा $\quad x_0 = x_{0A} - x_{0B}$ समय t=0 पर A का B के सापेक्ष प्रारम्भिक विस्थापन

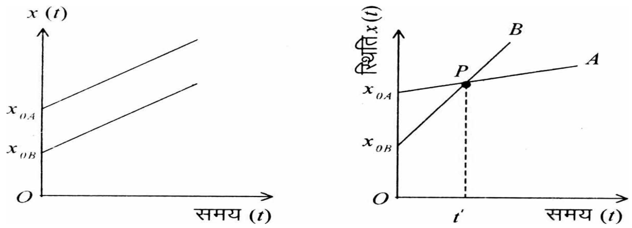
(a) स्थिति-समय आरेख में आपेक्षिक वेग-

(1) यदि $v_A = v_B$ हो तो समी. (1.37) से $x = x_0$ अर्थात् $x_A - x_B = x_{0A} - x_{0B}$, अर्थात् गति के समय दोनों वस्तुओं के मध्य दूरी नियत रहेगी । देखिये चित्र (1.14a)

(2) यदि $v_A \neq v_B$, इस स्थिति में चित्र (1.14b) के दर्शाये अनुसार दोनों आरेख समय t' पर मिलते हैं । यदि $v_B \geq v_A \, v_B \geq v_A$ है तो t' समय से पूर्व $(x_A - x_B)$ धनात्मक है तथा t', समय के पश्चात यह ऋणात्मक होता है ।

(b) आपेक्षिक वेग ज्ञात करना -

कण A का B के सापेक्ष आपेक्षिक वेग (v_{AB}) ज्ञात करने के लिए कण B के वेग के तुल्य

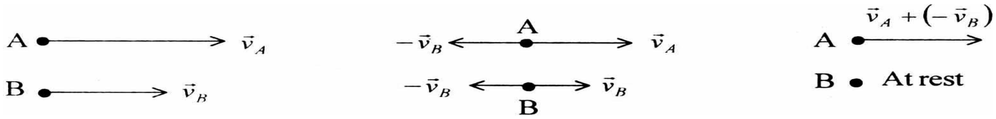


चित्र 1.14

व विपरीत वेग दोनों कणों A व B पर लगाते हैं, जिससे B विरामावस्था में आ जाये तब A पर दो वेगों का परिणामी मान (v_{AB}) प्राप्त होगा ।

(1) जब दोनो कण एक दूसरे के समान्तर एक ही दिशा में गतिशील हों- माना $(v_A > v_B)$ चित्र 1.15 (a) में दर्शाये अनुसार दोनों कण समान दिशा में गतिशील हैं । अब चित्र (b) में दर्शाये अनुसार A व B दोनों पर $-\vec{v}_B$ वेग अध्यारोपित करते हैं । इस प्रकार चित्र (c) के अनुसार कण B विरामावस्था में आ जाता है तथा A का परिणामी वेग $\vec{v}_A + (-\vec{v}_B)$ अर्थात् $\vec{v}_A - \vec{v}_B$ प्राप्त होता है ।

$\therefore \vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$

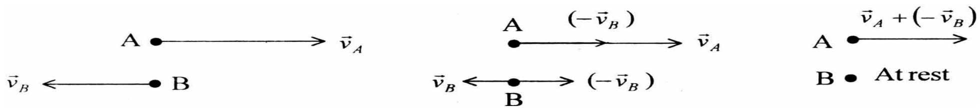


चित्र 1.15

चूँकि $\vec{v}_{AB}$, $\vec{v}_A$ व $\vec{v}_B$ सभी समान दिशा में हैं, अत: $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$ .....(1.38)

(2) जब दोनों कण एक दूसरे के समान्तर परस्पर विपरीत दिशाओं में गतिशील हो- चित्र 1.16 (a) में दर्शाये अनुसार A व B विपरीत दिशाओं में गतिशील हैं । अब चित्र (b) के अनुसार $-\vec{v}_B$ वेग दोनों कणों पर अध्यारोपित करते हैं । इस प्रकार चित्र (c) के अनुसार कण B विरामावस्था में आ जाता है तथा A कण का वेग $\vec{v}_A + \left(-\vec{v}_B\right)$ हो जाता है । अत: A का B के सापेक्ष आपेक्षिक वेग $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$ चूँकि $\vec{v}_B$ की दिशा $\vec{v}_A$ के विपरीत है, अत:

$$v_{AB} = v_A + v_B \qquad \text{..... (1.39)}$$



चित्र 1.16

इस प्रकार जब दोनों कण परस्पर विपरीत दिशाओं में गतिशील हों तो एक कण के दूसरे के सापेक्ष आपेक्षिक वेग का परिमाण दोनों कणों के वेगों के परिमाणों के योग के तुल्य होता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

4. क्या किसी कण की चाल ऋणात्मक हो सकती है?

………………………………………………………………………………………………

5. मोटरगाडी का स्पीडोमीटर चाल के किस मान को मापता है?

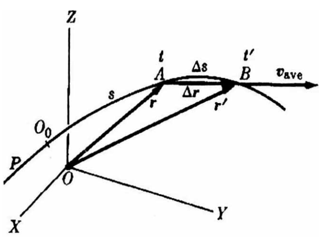
………………………………………………………………………………………………

6. क्या किसी पिण्ड की चाल नियत लेकिन वेग परिवर्तनशील हो सकता है?

………………………………………………………………………………………………

1.4 द्‌वि-विमीय गति (Two dimensional motion)

1.4.1 द्‌वि-विमीय गति की विवेचना (Description of two dimensional motion)



चित्र 1.17

किसी समतल पर चींटी की गति, क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर तल में वृत्ताकार गति, ऊर्ध्वाधर तल में प्रक्षेप्य गति आदि द्‌वि-विमीय गति के उदाहरण हैं । चित्र 1.17 में दर्शाये अनुसार X-Y तल में किसी वक्र रेखी पथ पर कण की गति की विवेचना करते हैं । किसी समय t पर कण बिन्दु A पर है, जहाँ इसका स्थिति सदिश $\vec{OA} = \vec{r}$ है । किसी अन्य समय t' पर कण की स्थिति बिन्दु B पर स्थिति सदिश

$O\vec{B} = \vec{r}\,'$ द्वारा प्रदर्शित होती है । यद्यपि कण वक्र पथ AB पर गति करता है, लेकिन कण का विस्थापन सदिश $A\vec{B} = \Delta\vec{r}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है तो चित्र

$$\vec{r} + \Delta\vec{r} = \vec{r}\,'$$

तब विस्थापन सदिश $A\vec{B} = \Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r}$ ..... (1.40)

यदि कण के A व B स्थिति में निर्देशांक क्रमश: (x, y) व (x', y') हों तो

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y \quad \text{तथा} \quad \vec{r}\,' = \hat{i}x' + \hat{j}y'$$

अत: $$\Delta\vec{r} = (x' - x)\,\hat{i} + (y' - y)\,\hat{j} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$$

तथा $$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \text{..... (1.41)}$$

(b) वेग- समय के साथ कण के विस्थापन में परिवर्तन की दर निश्चित समयान्तराल में औसत वेग कहलाता है ।

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad \text{..... (1.42)}$$

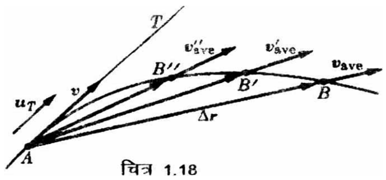
औसत वेग को विस्थापन सदिश $A\vec{B} = \Delta\vec{r}$ के समान्तर सदिश द्वारा प्रदर्शित किया जाता है ।

तात्क्षणिक वेग की गणना की पूर्व की भांति हम समयान्तराल Δt को अत्यल्प लेते हैं । अत:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{ave} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad \text{.....(1.43)}$$

जब $\Delta t \to 0$ तब चित्र 1.18 में बिन्दुओं B',B'' .... द्वारा दर्शाये अनुसार बिन्दु A के निकट पहुँचता है ।$(B \to A)$ इस प्रक्रिया में $A\vec{B} = \Delta\vec{r}$ का परिमाण व दिशा सतत रूप से परिवर्तित होती है तथा औसत वेग परिवर्तित होता है । सीमा $B \to A$ में सदिश $\overrightarrow{AB}$ स्पर्श रेखा AT की दिशा के साथ सम्पाती हो जाता है । इस प्रकार वक्र रेखी गति में तात्क्षणिक वेग वक्र पथ पर उस बिन्दु (A) पर स्पर्श रेखी सदिश होता है तथा

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{\Delta t} \quad \text{........... (1.44)}$$



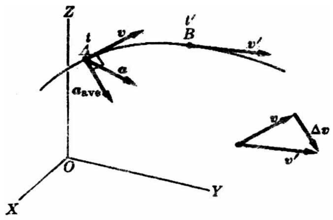
चित्र 1.18

x व y अक्षों के अनुदिश वेग के घटक v_x व v_y निम्न समीकरणों द्वारा दिये जाते है

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{......... (1.45)}$$

तथा वेग का परिमाण $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ...(1.46)

(c) त्वरण- सामान्यत: वक्र रेखी गति में वेग का मान परिमाण तथा दिशा दोनों में परिवर्तित होता है । यदि t तथा t' समय पर कण के बिन्दु A व B पर वेग क्रमश: $\vec{v}$ व $\vec{v}\,'$ हों तो समयान्तराल $\Delta t = t' - t$ में परिवर्तन $\Delta\vec{v}$ होता है । अत: औसत त्वरण



चित्र 1.19

$$\vec{a}_{ave} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \text{..... (1.47)}$$

अत्यल्प समयान्तराल की सीमा ($\Delta t \rightarrow 0$) में औसत त्वरण कण के तात्क्षणिक त्वरण के तुल्य हो जाता है ।

अतः तात्क्षणिक त्वरण

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow \vec{0}} = \vec{a}_{ave} = \lim_{\Delta t \rightarrow \vec{0}} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\text{या} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad \text{.....(1.48)}$$

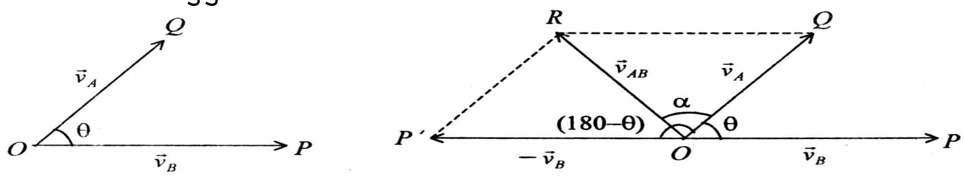
2-D गति में $x-y$ तल में त्वरण के घटक a_x व a_y हों तो

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{तथा} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad \text{.....(1.49)}$$

$$\text{त्वरण का परिमाण} \quad a\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \text{.....(1.50)}$$

द्वि-विमीय (2-D) आपेक्षिक गति

अनुच्छेद 1.33 में हमने एक कण A जो कि वेग से गतिशील है, का आपेक्षिक वेग दूसरे कण B जो कि वेग $\vec{v}_B$ से गतिशील है, के सापेक्ष समी (1.35) द्वारा $\vec{v}_{AB} = v_A - \vec{v}_{AB}$ के रूप में परिभाषित कर चुके हैं । यदि कण A व B किसी द्वि-विमीय तल में किसी कोण θ पर चित्र 1.20 (a) में दर्शाये अनुसार गतिशील हैं तो कण A का कण B के सापेक्ष आपेक्षिक वेग ज्ञात करने के लिए हम वेग $\overrightarrow{v_{AB}}\left(=\overrightarrow{OP'}\right)$ को दोनों कणों पर अध्यारोपित करते हैं । इस कारण कण B विरामावस्था में आ जाता है और कण A के OQ के अनुदिश वेग $\vec{v}_A$ व OP' के अनुदिश वेग $\vec{v}_B$ दो वेग होते हैं; जो कि परस्पर (180^0-θ) कोण पर झुके हुए हैं । अतः चित्र 1.20 (b) के अनुसार इन दो वेगों का परिणामी मान समान्तर चतुर्भुज



(a) चित्र 1.20 (b)

OQRP' को विकर्ण OR के अनुदिश परिमाण व दिशा में प्राप्त होता है ।

कण A का B के सापेक्ष आपेक्षिक वेग का परिमाण

$$v_{AB} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 + 2v_A v_B \cos\left(180^0 - \theta\right)} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 + 2v_A v_B \cos - \theta} \qquad \text{.....(1.51)}$$

यदि $\vec{v}_{AB}$ सदिश $\vec{v}_A$ के साथ α कोण बनाता है तो समी (1.5) से

$$\tan\alpha = \frac{v_B \sin\left(180-\theta\right)}{v_A + v_B\cos\left(180-\theta\right)} = \frac{v_B \sin\theta}{v_A - v_B\cos\theta} \qquad \text{....(1.52)}$$

1.4.2 प्रक्षेप्य गति (Projectile motion)

जब किसी पिण्ड को प्रारम्भिक स्थिति से, ऊर्ध्वाधर दिशा से भिन्न किसी दिशा में फेंका जाता है, तो वह गुरूत्वीय त्वरण (ऊर्ध्वाधर दिशा में लगता है) के अन्तर्गत ऊर्ध्वाधर तल में एक वक्र पथ पर गति करता है । इस गति को "प्रक्षेप्य गति" कहते हैं तथा, पिण्ड को प्रक्षेप्य (Projectile) कहते हैं । हवाई जहाज से गिराये गये बम की गति, बन्दूक से छोड़ी गई गोली की गति, पृथ्वी की सतह से किसी कोण पर फेंकी गई पिण्ड की गति आदि प्रक्षेप गति के उदाहरण हैं ।

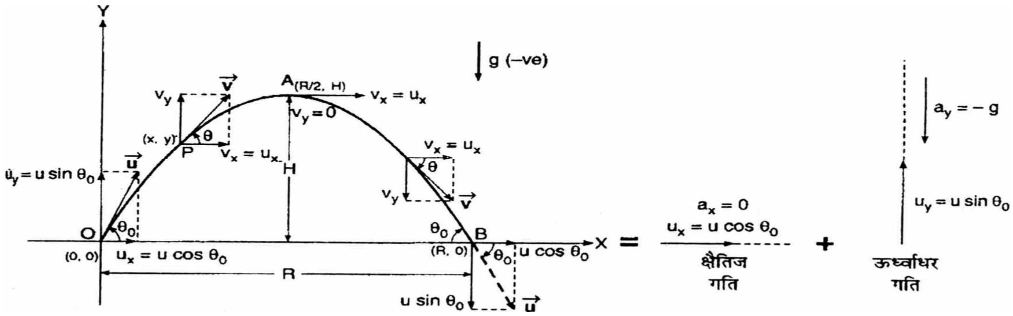
प्रक्षेप्य गति को सदैव दो लम्बवत् स्वतंत्र एक विमीय गतियों में वियोजित किया जा सकता है-

(1) क्षैतिज गति - जिसमें वेग का क्षैतिज घटक नियत रहता है, क्योंकि क्षैतिज त्वरण का घटक शून्य होता है और

(2) ऊर्ध्व गति - जिसमें वेग का ऊर्ध्व घटक गुरूत्वीय त्वरण g के कारण समय के साथ परिवर्तित होता है ।

(a) प्रक्षेप्य का पथ (Trajectory of projectile)

माना एक प्रक्षेप्य को मूल बिन्दु O से क्षैतिज से θ_o कोण पर प्रारम्भिक वेग $\vec{u}$ से फेंका जाता है । चित्र (1.21) के द्वारा प्रारम्भिक वेग $\vec{u}$ को क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर घटकों में वियोजित करने पर



चित्र 1.21

$$u_x = uCos\theta_0 \text{ तथा } u_x = uCos\theta_0 \qquad .....(1.54)$$

पिण्ड की गति गुरूत्वीय त्वरण g के प्रभाव में है जो कि नियत है तथा ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर है । इस कारण प्रक्षेप्य का क्षैतिज त्वरण घटक $a_x = 0$ तथा ऊर्ध्व त्वरण घटक $a_y = -g$ किसी समय t पर यदि प्रक्षेप्य बिन्दु P पर हो जहाँ इसके निर्देशांक (x, y) हों तो गति के द्वितीय समीकरण $\left(s = ut + 1/2\,at^2\right)$ से क्षैतिज व ऊर्ध्व दिशाओं में निर्देशांक (विस्थापन) के मान क्रमशः

$$x = u_x t + 1/2\,a_x t^2 \text{ से } x = u_x t = \left(uCos\theta_0\right)t \qquad .....(1.55)$$

व
$$y = u_y t + 1/2\,a_y t^2 \text{ से } y = u_y t - 1/2\,gt^2$$

या
$$y = \left(uSin\theta_0\right)t - 1/2\,gt^2 \qquad ..(1.56)$$

समी (1.55) से $t=\dfrac{x}{u\cos\theta_0}$ का मान समी (1.56) में रखकर t को विलुप्त करने पर

$$y=\left(u\sin\theta_0\right)\left(\frac{x}{u\cos\theta_0}\right)-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u\cos\theta_0}\right)^2$$

या $$y=\left(\tan\theta_0\right)x-\frac{g}{2u^2\cos^2\theta_0}x^2 \quad .(1.57)$$

समी (1.57) से स्पष्ट है कि प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार होता है ।

(b) प्रक्षेप्य का उड्डयन काल (Flight-time of projectile)

माना पिण्ड को अपने प्रक्षेप्य पथ के उच्चतम बिन्दु A तक पहुँचने में t समय लगता है, जहाँ पिण्ड का ऊर्ध्व वेग शून्य होता है । अतः गति के प्रथम समीकरण v=u + at से

$$v_x=u_x+a_xt \quad \text{या} \quad v_x=u_x=u\cos\theta_0$$

व $$v_y=u_y+a_yt \quad \text{या} \quad v_y=u\sin\theta_0-gt=0$$

$$\therefore t=\frac{u\sin\theta_0}{g} \quad ..(1.58)$$

उच्चतम बिन्दु A पर पहुँचने के पश्चात पिण्ड इतना ही समय बिन्दु B पर नीचे आने में लेता है ।

अतः पिण्ड का उड्डयन काल $T=2t=\dfrac{2u\sin\theta_0}{g}$ ...(1.59)

(c) प्रक्षेप्य की ऊँचाई (Height of projectile)

माना पिण्ड के पथ के उच्चतम बिन्दु A की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई H है तथा इस बिन्दु पर ऊर्ध्वाधर वेग शून्य होता है । अतः गति के तृतीय समी $v^2=u^2+2as$ से

$$v_y^2=u_y^2-2gH$$

या $$H=\frac{u_y^2}{2g}=\frac{u^2\sin^2\theta_0}{g} \quad ..(1.60)$$

समी (1.6O) से स्पष्ट है कि कोण θ_0 =90^0 होने पर पिण्ड सबसे अधिक ऊँचाई प्राप्त करता है ।

$$H_{\max}=\frac{u^2}{2g} \quad ..... (1.61)$$

(d) प्रक्षेप्य की परास (Range of projectile)

पिण्ड अपने उड्डयन काल की अवधि में जितनी क्षैतिज दूरी तय करता है, उसे 'क्षैतिज परास' कहते हैं । अर्थात परास

R=OB= क्षैतिज वेग X उड्डयन काल

या $$R=u_x\times T=\left(u\cos\theta_0\right)\times\left(\frac{2u\sin\theta_0}{g}\right)$$

या $R = \frac{2u^2 \sin^2 \theta_0 . u \cos\theta_0}{g}$ या $R = \frac{u^2 \sin 2\theta_0}{g}$ .....(1.62)

अधिकतम क्षैतिज परास के लिए $\sin 2\theta_0 = 1$ अर्थात् $2\theta_0 = 90^0$ या $\theta_0 = 45^0$ होना चाहिए। जब प्रक्षेप्य को 45^0 कोण पर फेंका जाता है तो इसकी परास अधिकतम प्राप्त होती है। अर्थात्

$$R_{\max} = \frac{u^2}{g} \quad ..... (1.63)$$

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

7. एक खिलाड़ी गेंद को क्षैतिज से किस झुकाव पर फेंके कि गेंद अधिकतम दूरी तक जाये?

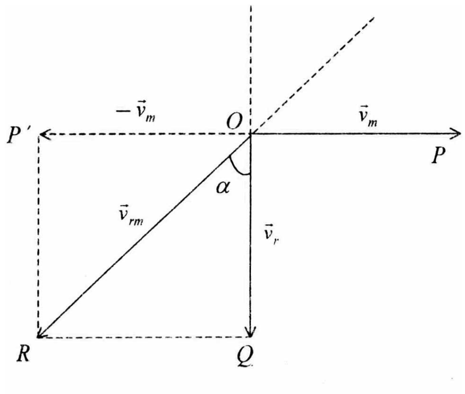
   ....

8. किन दो कोणों पर कण को प्रक्षेपित करने पर समान परास प्राप्त होती है?

   ....

उदाहरण 1.4 एक व्यक्ति 3kmh^{-1} के वेग से एक समतल सड़क पर गतिशील है। वर्षा की बूँदें 4kmh^{-1} के वेग से नीचे की ओर गिर रही हैं। वर्षा की बूँदों का व्यक्ति के सापेक्ष वेग ज्ञात करो।

हल: मान लीजिये $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{v_m} = 3$ किमी./घटा व्यक्ति के वेग को तथा $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{v_r} = 4$ किमी.प्रति घंटा वर्षा की बूँदों के वेग को चित्र 1.22 में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 1.22

वर्षा का व्यक्ति के सापेक्ष वेग $\left(\overrightarrow{v_{rm}}\right)$ ज्ञात करने के लिए व्यक्ति पर $\overrightarrow{OP'} = -\vec{v}_m$ वेग लगाकर उसे विरामावस्था में लाते हैं तथा इतने ही परिमाण का वेग वर्षा की बूँदों पर भी आरोपित करते हैं। इस प्रकार $\vec{v}_m$ का मान सदिश $\overrightarrow{OQ}$ व $\overrightarrow{OP'}$ का परिणामी मान होगा, जिसका परिमाण

$$\overrightarrow{v_{rm}} = \left|\overrightarrow{OR}\right| = \sqrt{v_r^2 + v_m^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5kmh^{-1}$$

तथा $\tan\alpha = \frac{v_m}{v_r} = \frac{3}{4}$

या $\alpha = \tan' 0.75 = 36^0 52'$ (ऊर्ध्वाधर के सापेक्ष)

इस उदाहरण में व्यक्ति को वर्षा से बचाव के लिए छाते को ऊर्ध्वाधर से अग्र दिशा में $36^0 52'$ कोण पर रखना होगा।

उदाहरण 1.5 एक कण को प्रक्षेपण बिन्दु से क्षैतिज तल में लक्ष्य बनाकर जब α कोण पर फेंकते हैं तो 'a' दूरी पहले गिरता है तथा जब β कोण पर फेंकते हैं तो 'b' दूरी बाद में गिरता है। यदि सभी स्थितियों में प्रक्षेपण वेग समान हो तो प्रक्षेपण के लिए सहो कोण की गणना करो।

हल ; मान लीजिये प्रक्षेपण की सभी स्थितियों में वेग u है। यदि प्रक्षेपण बिन्दु से लक्ष्य की दूरी (परास)

R हो तो उचित प्रक्षेपण कोण θ के लिए $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

जब प्रक्षेपण कोण α हो तो $(R-a) = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

तथा जब प्रक्षेपण कोण β हो तो $(R+b) = \frac{u^2 \sin 2\beta}{g}$

उक्त समीकरणों से $R(a+b) = \frac{u^2}{g}(a \sin 2\beta + b \sin 2\alpha)$

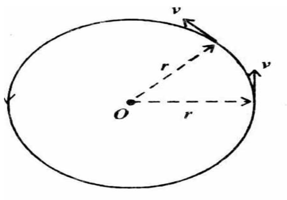
R का मान रखने पर $\frac{u^2 \sin 2\theta}{g}(a+b) = \frac{u^2}{g}(a \sin 2\beta + b \sin 2\alpha)$

या $\sin 2\theta = \frac{a \sin 2\beta + b \sin 2\alpha}{a+b}$ $\quad \therefore \theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left[\frac{a \sin 2\beta + b \sin 2\alpha}{a+b}\right]$

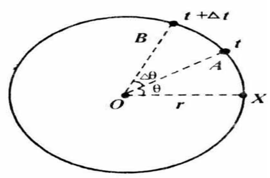
1.5 वृत्ताकार गति (Circular Motion)

जब कोई कण एक निश्चित बिन्दु को केन्द्र मानकर उसके परितः एक वृत्तीय पथ पर नियत चाल से गति करता है, तो उसकी गति 'एक समान वृत्तीय गति (uniform circular motion) कहलाती है । यह गति एक ऐसे त्वरण के अन्तर्गत होती है, जिसका परिमाण नियत रहता है परन्तु दिशा निरन्तर बदलती रहती है व सदैव केन्द्र की ओर इंगित होती है । इसे चित्र 1.23 में दर्शाया गया है ।

(a) कोणीय विस्थापन- एक कण r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर प्रारम्भिक स्थिति X से चलना प्रारम्भ करता है तथा समय t व $(t+\triangle t)$ यह कोणीय स्थिति θ व $(\theta+\triangle\theta)$ प्राप्त करता है । अत: कण का $\triangle t$ समयान्तराल में कोणीय विस्थापन $\triangle\theta$ = कोण BOA है । यह एक विमाहीन अक्षीय सदिश है व इसका S.I. मात्रक रेडियन है । इसे 1.24 में दर्शाया गया है ।



चित्र 1.23



चित्र 1.24

(b) कोणीय वेग- नियत समयान्तराल में को कोणीय विस्थापन तथा समयान्तराल के अनुपात को कण का औसत कोणीय वेग कहते हैं । अर्थात् औसत कोणीय वेग $\omega_{av} = \frac{\triangle\theta}{\triangle t}$ .....(1.64)

सीमा $\Delta t \to 0$ में औसत कोणीय वेग का मान कण के तात्क्षणिक कोणीय वेग के तुल्य हो जाता है

$$\omega = Lim_{\triangle t \to o}\omega_{av} = Lim_{\triangle t \to o}\frac{\triangle\theta}{\triangle t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad ..... (1.65)$$

इसका S.I मात्रक रेडियन / सैकण्ड है ।

वृत्ताकार पथ पर एक परिक्रमण काल T (आवर्त्तकाल) में कण का कोणीय विस्थापन 2π

$\therefore \theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left[\frac{a \sin 2\beta + b \sin 2\alpha}{a+b}\right]$ रेडियन होता है अत: समी (1.65) से $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$ ..(1.66)

जहाँ $n=\dfrac{1}{T}$ को आवृत्ति कहते हैं तथा प्रति सैकण्ड कण द्वारा पूरे किये गये चक्करों की संख्या द्वारा परिभाषित की जाती है । कण के कोणीय वेग व रेखीय वेग में निम्न सम्बन्ध होता है-

$$\vec{v}=\vec{w}\times\vec{r} \quad ..(1.67)$$

तथा परिमाण रूप में $v=r\omega$ ..(1.68)

(c) कोणीय त्वरण

यदि कण वृत्तीय पथ पर परिवर्ती कोणीय वेग से गतिशील हो तथा किसी समयान्तराल $\triangle t$ में कोणीय वेग में परिवर्तन $\triangle\omega$ हो तो कण का औसत कोणीय त्वरण $a_{av}=\dfrac{\triangle\omega}{\triangle t}$ ..... (1.69) तथा सीमा $\triangle t\to o$ में औसत कोणीय त्वरण के मान को तात्क्षणिक कोणीय त्वरण कहते हैं ।

$$a=Lim_{\triangle t\to o}a_{av}=Lim_{\triangle t\to o}\frac{\triangle\omega}{\triangle t}=\frac{d\omega}{dt} \quad ..... (1.70)$$

कण का स्पर्श रेखीय त्वरण

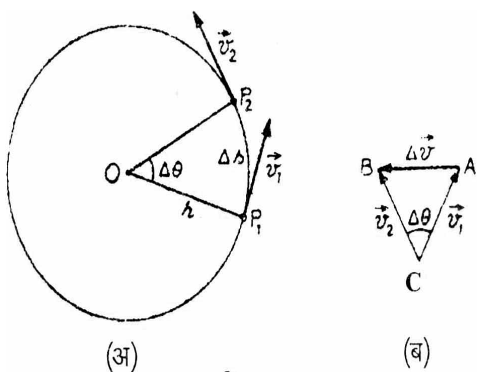
$$a_T=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(r\omega)=r\frac{d\omega}{dt} \quad ..... (1.71)$$

सदिश रूप में $\vec{a}T$ में $\vec{\alpha}$ निम्न सम्बन्ध होता है-

$$\vec{a}_T=\vec{a}\times\vec{r} \quad .... (1.72)$$

अभिकेन्द्रीय त्वरण

चित्र 1.25 में कण के r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर प्रत्येक बिन्दु पर कण के वेग की दिशा स्पर्श रेखीय होती है । किसी अल्प समयान्तराल $\triangle t$ में कण P_1P_1 तक Δs दूरी चलता है । तथा कण के वेग में परिवर्तन $\Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$ होता है । यदि हम $\vec{v}_1$ व $\vec{v}_2$ को एक ही बिन्दु C से चित्र (ब) के अनुसार खींचे तो $\vec{AB}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$ को व्यक्त करेगा ।



चित्र 1.25

ΔOP_1P तथा ΔCAB समरूप हैं, क्योंकि प्रत्येक त्रिभुज की दो भुजाएें समान हैं तथा उनके मध्य कोण $\Delta\theta$ हैं । अत:

$$\frac{P_1P_2}{P_1O}=\frac{AB}{AC}$$

या $\dfrac{\Delta s}{r}=\dfrac{\Delta v}{v}$

$\therefore \Delta v=\dfrac{v}{r}\Delta s$ या $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v\Delta s}{r\Delta t}$

$\lim\Delta t\to o$ होने पर $Lim_{\Delta t\to o}a_{av}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{v}{r}Lim_{\Delta t\to o}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

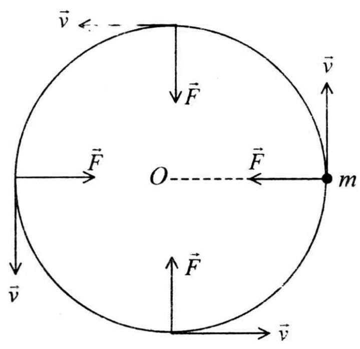
या $$\frac{dv}{dt}=\frac{vds}{rdt} \qquad \text{या } a=\frac{v}{r}y$$

या $$a\frac{v^2}{r} \qquad .....(1.73)$$

इस त्वरण की दिशा वही होगी जो $\Delta\vec{v}$ की है। Δt के अनन्त सूक्ष्म होने पर $\vec{v}_1$ व $\vec{v}_2$ सम्पाती होंगे तथा $\Delta\vec{v}$ सदिशों $\vec{v}_1$ व $\vec{v}_2$ दोनों के लम्बवत् होगा। अतः त्वरण $\vec{a}$ भी $\vec{v}_1$ व $\vec{v}_2$ के लम्बवत् होगा, अर्थात् त्वरण $\vec{a}$ की दिशा वृत्त के केन्द्र O की ओर होगी। इसलिये इसे 'अभिकेन्द्रीय त्वरण' कहते हैं।

इसका परिमाण $\frac{v^2}{r}$ नियत रहता है, परन्तु दिशा निरन्तर बदलती रहती है व सदैव कण के वेग की दिशा के लम्बवत् रहती है।

1.5.1 क्षैतिज तल में वृत्ताकार गति (Circular motion in horizontal plane)



चित्र 1.26

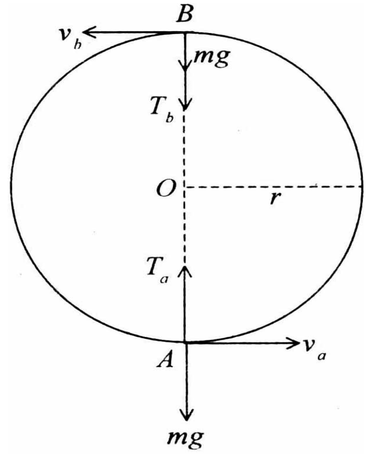
किसी कण के नियत चाल से वृत्ताकार पथ पर गति करने पर वेग की दिशा में सतत् परिवर्तन होने के कारण कण की गति त्वरित होती है। इस त्वरण का परिमाण $\frac{v^2}{r}$ होता है और इसकी दिशा केन्द्र की ओर होती है। अतः वृत्ताकार पथ पर त्वरित गति के लिए यह आवश्यक है कि कण पर एक नियत बल कार्य करे। इस बल को 'अभिकेन्द्रीय बल' कहते हैं। यह परिणामी बल चित्र 1.26 में दर्शाये से अनुसार सदैव केन्द्र की ओर लगता है, जिसका परिमाण

$$F=ma_r=\frac{mv^2}{r} \qquad .....(1.74)$$

होता है। इस प्रकार कण को एक समान वृत्ताकार गति में बनाये रखने के लिए अभिकेन्द्रीय बल की आवश्यकता होती है। इस बल की उत्पत्ति किसी बाह्य स्रोत जैसे गुरूत्वाकर्षण, तनाव, घर्षण, कूलाम बल आदि से होती है। पृथ्वी के परितः परिक्रमण कर रहे कृत्रिम उपग्रह को अभिकेन्द्रीय बल पृथ्वी व उपग्रह के मध्य गुरूत्वाकर्षण बल से प्राप्त होता है। डोरी से बंधे कण की क्षैतिज वृत्ताकार पथ में गति के समय अभिकेन्द्रीय बल की प्राप्ति डोले में उत्पन्न तनाव से होती है। इसी प्रकार परमाणु में नाभिक के चारों ओर परिक्रमण कर रहे इलेक्ट्रॉन को आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल, इलेक्ट्रॉन व नाभिक के मध्य कूलाम बल द्वारा प्राप्त होता है।

1.5.2 ऊर्ध्वाधर तल में वृत्तीय गति (Circular motion of vertical plane)

जब किसी पिण्ड को डोरी के एक सिरे से बांधकर 'ऊर्ध्वाधर' तल में वृत्ताकार पथ में घुमाते हैं तो गुरूत्वीय बल के परिवर्तन के कारण पिण्ड की चाल में परिवर्तित होता है। अतः पिण्ड पर लगने वाला अभिकेन्द्रीय बल तथा डोरी का तनाव भी सतत् रूप से परिवर्तित होता है।



चित्र 1.27

मान लीजिये चित्र 1.27 में m द्रव्यमान के एक पिण्ड को r लम्बाई की डोरी के साथ बाँधकर ऊर्ध्वाधर तल में घुमाया जा रहा है । जब पिण्ड के उच्चतम बिन्दु B पर होता है तो इसका भार mg तथा डोरी में तनाव T_b दोनो नीचे की ओर लगते हैं अत: इनका परिणामी बल वृत्ताकार गति के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करता है ।

$$\therefore T_b + mg = \frac{mv_b^2}{r} \qquad \text{..... (1.75)}$$

समी (1.75) में जब पिण्ड की चाल v_b का मान कम करते हैं तो डोरी में तनाव (T_b) कम होने लगता है तथा चाल के न्यूनतम मान पर यह घटकर शून्य हो जाता है । पिण्ड की चाल के इस न्यूनतम मान को 'क्रांतिक चाल' (v_c) कहते हैं । अत: उपरोक्त समी. में $v_b=v_c$ तथा $T_b=0$ रखने पर

$$o + mg = \frac{mv_c^2}{r}$$

$$\therefore \text{क्रांतिक चाल } v_c = \sqrt{gr} \qquad \text{.....(1.76)}$$

यदि पथ के उच्चतम बिन्दु पर पिण्ड की चाल का मान क्रांतिक मान $\left(\sqrt{gr}\right)$ से कम हो तो आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल की प्राप्ति पिण्ड के भार से नही हो पायेगी । इस स्थिति में पिण्ड गिर जायेगा तथा डोरी ढीली पड़ जायेगी ।

वृत्तीय पथ के निम्नतम बिन्दु A पर पिण्ड का वेग v_a हो तो यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण के नियम से बिन्दु A पर गतिज ऊर्जा = बिन्दु B पर गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा

$$\frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}mv_b^2 + mg \times 2r$$

$$\frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}m(gr) + 2mgr \qquad (v_b = \sqrt{gr} \text{ क्रांतिक चाल})$$

या $$v_a^2 = 5gr$$

$$\therefore v_a = \sqrt{5gr}$$

अत: यदि $v_a = \sqrt{5gr}$ कम हो तो v_b का मान $\sqrt{5gr}$ से कम होगा और डोरी ऊपर घूमते हुये ढीली पड़ जायेगी ।

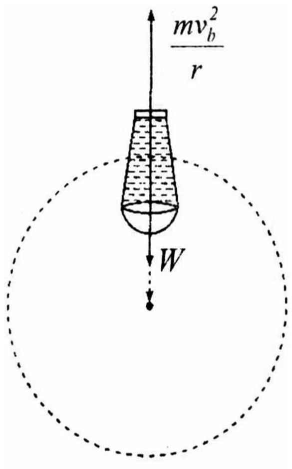
यदि निम्नतम बिन्दु A पर डोरी में तनाव T_a हो तो T_a व mg का परिणामी मान आवश्यक अभिकेन्द्रीय बल प्रदान करेगा । अत:

$$T_a - mg = \frac{mv_a^2}{r}$$

$v_a = \sqrt{5gr}$ रखने पर $\qquad T_a = mg + 5mg$

या $$T_a = 6mg$$

अत: यदि पिण्ड का वृत्तीय पथ के उच्चतम बिन्दु पर तनाव शून्य है तो निम्नतम बिन्दु पर तनाव का मान पिण्ड के भार का 6 गुना होना चाहिए ।



चित्र 1.28

जब एक छोटी बाल्टी में कुछ पानी लेकर उसे ऊर्ध्वाधर तल में तेजी से घुमाया जाता है तो बाल्टी के ऊल्टा हो जाने पर भी उसमें से पानी नहीं गिरता । (देखें चित्र 1 .28) । क्योंकि बाल्टी ऊर्ध्वाधर तल में अभिकेन्द्रीय बल के प्रभाव में घूमती है । घूमती बाल्टी में पानी पर अपकेन्द्रीय बल लगता है जो परिमाण में सदैव अभिकेन्द्रीय बल के बराबर व विपरीत दिशा में लगता है । यदि बाल्टी के घूमने की चाल अधिक हो तो अपकेन्द्रीय बल का मान पानी के भार w से अधिक होता है । बलों का यह अन्तर $\left(\frac{mv_b^2}{r} - w\right)$, पानी को ऊपर की ओर बाल्टी के तली पर दबाये रखता है व नीचे गिरने नहीं देता ।

उदाहरण 1.6 एक कार 30 मी./से. की गति से 500 मीटर त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर गति कर रही है । इसका वेग 2 मी./से. की दर से बढ़ रहा है । इसके त्वरण का मान ज्ञात कीजिये ।

हल. यदि वृत्तीय पथ पर चल रही वस्तु की चाल बढ़ रही है तो वस्तु में अभिकेन्द्रीय त्वरण के अतिरिक्त स्पर्श रेखीय त्वरण भी होता है । अभिकेन्द्रीय त्वरण (a_r) वस्तु के चलने की दिशा में परिवर्तन के कारण होता है तथा स्पर्श रेखीय त्वरण (a_T) चाल में परिवर्तन के कारण होता है । a_r की दिशा त्रिज्या के अनुदिश तथा a_T की दिशा वृत पर खींची गई स्पर्श रेखा के अनुदिश होती है, इस प्रकार a_r व a_T परस्पर लम्बवत् होते हैं ।

यहाँ $a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{30 \times 30}{500} = 1.8$ तथा a_T 2.0 मी./से.

अत: परिणामी त्वरण $a = \sqrt{a_r^2 + a_r^2}$ या $a = \sqrt{(1.8)^2 + (2)^2} = 2.7$ मी./से.

1.6 सारांश (Summary)

- भौतिक राशियों को अदिश, सदिश व प्रदिश के रूप में वर्गीकृत करते हैं । जिन राशियों को केवल परिमाण व मात्रक द्वारा व्यक्त कर सकते हैं, उन्हें अदिश राशियाँ कहते हैं । जिन राशियों को व्यक्त करने के लिए परिमाण व मात्रक के साथ दिशा की भी आवश्यकता होती है, उन्हें सदिश राशियाँ कहते हैं । जिन राशियों को व्यक्त करने के लिए परिमाण, मात्रक, दिशा के अतिरिक्त पदार्थ के अन्य गुणों की भी आवश्यकता होती है, उन्हें प्रदिश कहते हैं।
- वह सदिश जिसका परिमाण एकांक तथा दिशा दिये गये सदिश के अनुदिश हो, उसे एकांक सदिश कहते हैं ।
- दो सदिशों का संयोजन त्रिभुज नियम या समान्तर चतुर्भुज नियम से तथा दो से अधिक सदिशों का संयोजन बहुभुज नियम से ज्ञात कर सकते हैं ।
- किसी सदिश को दो या दो से अधिक घटकों में इस प्रकार विभाजित करने की प्रक्रिया को, जिसमें सभी विभाजित घटकों का सदिश योग दिये हुये सदिश के समान हो, वियोजन कहते

हैं । दो सदिशों का आदेश गुणनफल $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$ द्वारा दिया जाता है व यह एक अदिश राशि है ।

- दो सदिशों का सदिश गुणनफल $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\hat{n}$ द्वारा दिया जाता है यह एक सदिश राशि है।
- यदि कोई दो सदिश समान्तर हैं तो में $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ तथा इनके लम्बवत् होने पर $\vec{A}.\vec{B} = 0$ होता है ।
- किन्हीं तीन सदिशों के एक ही तल में (समतलीय) होने के लिए $\left\lfloor \vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) \right\rfloor = 0$ होता है ।
- जब कोई कण एक सरल रेखा के अनुदिश एक विमीय गति करता है तो उसे ऋजुरेखीय गति कहते हैं।
- किसी एक कण का दूसरे कण के सापेक्ष वेग, उस कण का आपेक्षिक वेग कहलाता है ।
- किसी तल में कण की वक्रीय गति को द्विविमीय गति कहते हैं । जब कण को ऊर्ध्वाधर तल में नियत त्वरण से किसी कोण पर फेंका जाता है, तो कण परवलयाकार पथ पर प्रक्षेप्य गति करता है ।
- वृत्ताकार पथ पर गति के लिए कण पर सदैव केन्द्र की ओर अभिकेन्द्रीय बल (mv^2/r) की आवश्यकता होती है ।
- ऊर्ध्वाधर तल में वृताकार गति में पथ के निम्नतम व उच्चतम बिन्दुओं पर वेग क्रमश: $\sqrt{5Rg}$ व $\sqrt{Rg}$ तथा तनावों का अन्तर 6mg होता है ।

1.7 शब्दावली (Glossary)

ऋजुरेखीय गति	Rectilinear motion
आपेक्षिक गति	Relative motion
प्रक्षेप्य	Projectile
सदिश	Vector

1.8 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

M. Alonslo and E.Finn	Fundamental University Physics (Vol I)	Addition-Wesley Publishing Co.
R. Resnick and D. Halliday	Physics (Part I)	Wiley Eastern Private Ltd. New Delhi
H. C. Verma	Concepts of Physics (Part I)	Bharati Bhawan, Patna

1.9 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment questions)

1. वह सदिश जिसका परिमाण एकांक हो तथा दिशा दिये हुए सदिश के अनुदिश हो ।
2. दोनों सदिश समान प्रकृति के होने चाहिए, जैसे वेग को वेग में ही जोड़ा या घटाया जा सकता है ।
3. $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=0$ होने पर तीनों सदिश समतलीय होंगे ।
4. नहीं ।
5. तात्क्षणिक चाल ।
6. हाँ वृत्ताकार पथ पर गतिशील कण की गति इसका उदाहरण है ।
7. 45^0 कोण पर प्रक्षेपित करने पर अधिकतम परास प्राप्त होती है ।
8. $R_{\max}=u^2/g$

1.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अति लघुउत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. एक कण r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर गतिशील है, अर्द्ध चक्र में कण द्वारा चली गई दूरी व विस्थापन ज्ञात करो ।

(**उत्तर:** πr व $2r$)

2. किस दिशा में गतिशील कण द्वारा चली गई दूरी व उसका विस्थापन समान हो सकते हैं ।

(**उत्तर:** सरल रेखा में)

3. किस दशा में गतिशील कण का औसत वेग तथा तात्क्षणिक वेग समान हो सकते हैं ।

(उत्तर: एकसमान गति)

4. वेग-समय आरेख का ढाल क्या दर्शाता है?

(**उत्तर :** त्वरण)

निबंधात्मक प्रश्न (essay type questions)

5. एक समान गति के लिये वेग-समय आरेख खीचिंये और सिद्ध कीजिए कि इस आरेख के वक्र और समय अक्ष के मध्य का भाग का क्षेत्रफल गति कर रही वस्तु के विस्थापन के बराबर होता है ।
6. सिद्ध कीजिये कि क्षैतिज से θ कोण पर फेंके गये एक प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार होगा । इसके द्वारा अधिकतम ऊचांई का सूत्र प्राप्त कीजिए ।
7. एक डोरी से बंधा हुआ पिण्ड ऊर्ध्वाधर वृत्ताकार पथ में गतिशील है । सफलतापूर्वक गति के लिये पथ के लिये पथ के (1) निम्नतम तथा (2) उच्चतम बिन्दु पर कम से कम गति चाल क्या होनी चाहिए । अपने उत्तर का औचित्य सिद्ध कीजिए ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

8. सदिश $(\hat{i}+\hat{j}))$ का परिमाण व दिशा ज्ञात करो ।

उत्तर: $\sqrt{2}$ तथा $45^0\, X-$ अक्ष से)

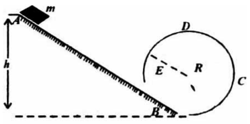
9. सदिशों $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\hat{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ के मध्य कोण ज्ञात करो ।

(उत्तर: 60^0)

10. किसी प्रक्षेप्य के लिए समान क्षैतिज परास तथा अधिकतम ऊँचाई के लिए प्रक्षेप्य कोण क्या होगा।

(उत्तर: $\tan^{-1} 4$)

11. चित्र 1.29 में प्रदर्शित एक m द्रव्यमान का पिण्ड घर्षण रहित तल पर बिना फिसले गति करता है । पिण्ड की न्यूनतम ऊँचाई h क्या हो जिससे वह R त्रिज्या के वृत्ताकार पथ को पूर्ण कर सके?



चित्र 1.29

(उत्तर: 2.5r)

इकाई- 2

बल
(Force)

इकाई की रुपरेखा

2.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप-

- बल की अवधारणा समझ पायेंगे;
- प्रकृति में व्याप्त विभिन्न मूल बलों व उनकी अन्योन्य क्रियाओं को जान सकेंगे;
- किसी कण व पिण्ड पर लग रहे विभिन्न बलों के प्रभाव में साम्यावस्था का प्रतिबंध प्राप्त कर सकेंगे;
- किसी पिण्ड पर लगने वाले विभिन्न प्रकार के घर्षण बलों के बारे में जान सकेंगे;
- घर्षण के महत्व तथा इसे कम करने के विभिन्न उपायों को जान सकेंगे ।

2.1 प्रस्तावना (Introduction)

पिछली इकाई में आपने स्थानान्तरण गति के विभिन्न भौतिक चर राशियों के बारे में जानकारी की है । इस इकाई में आप बल तथा इसके प्रभावों का अध्ययन करेंगे । दैनिक जीवन में हम सभी धक्का खिंचाव, हाथ से किसी हल्की या भारी वस्तु को पकड़ना व मांस पेशियों की गतिविधियों से भली

भांति परिचित हैं । यह हमें बल के अन्तर्ज्ञान का बोध कराती हैं । बल, वस्तुत: दो वस्तुओं के मध्य होने वाली एक अन्योन्य क्रिया है । कोई भी वस्तु चाहे वह आपेक्षिक विराम या आपेक्षिक गति की अवस्था में हो एक या एक से अधिक बलों के प्रभाव स्वरुप व उनके संतुलन का ही परिणाम है । प्रकृति में होने वाली समस्त प्रकार की गतिविधियां मूल बलों के अन्तर्गत सम्पन्न होती हैं । प्रकृति में व्याप्त सभी बलों को चार भागों में वर्गीकृत किया गया है, जो कि गुरूत्वीय, विद्युत चुम्बकीय, नाभिकीय तथा दुर्बल अन्योन्य क्रियाऐं हैं ।

इस इकाई के अनुच्छेद 2.2 व 2.3 में आप क्रमश: बल की अवधारणा को अनेक रोचक उदाहरणों की सहायता से तथा प्रकृति के मूल बलों का विस्तारपूर्वक अध्ययन करेंगे । जब दो या दो से अधिक बल किसी पिण्ड पर एक ही क्रिया बिन्दु पर रक्त साथ कार्य करते हैं तो उन्हें संगामी बल कहते हैं । इस इकाई के अनुच्छेद 2.4 में आप संगामी बलों के अन्तर्गत पिण्ड की साम्यावस्था का प्रतिबंध प्राप्त करेंगे ।

हमारे दैनिक जीवन में घर्षण एक सामान्य अनुभव की बात है । जब दो सम्पर्कित सतहों के मध्य सापेक्षिक गति होती है तो उनके मध्य में घर्षण बल लगता है । अनुच्छेद 2.5 में आप घर्षण बल के विभिन्न प्रकारों का विस्तार पूर्वक अध्ययन करेंगे । साथ ही घर्षण के महत्व व इसके प्रभावों को भी जानेंगे । घर्षण के कारण ऊर्जा की ऊष्मा के रुप में क्षति होती है तथा मशीनों की दक्षता में कमी आती है अत: आप घर्षण कम करने के उपायों को भी जानेंगे ।

2.2 बल की अवधारणा (Concept of force)

बल शब्द की उत्पत्ति लेटिन भाषा के शब्द "Fortis" से हुई है । हमारे दैनिक जीवन का अनुभव हमें बल के अन्तर्ज्ञान का विचार प्रदान करता है । बल का विचार सर्वप्रथम मांसपेशियों के खिंचाव (Stress) से आया । जब हम किसी भारी वस्तु को हाथ में पकड़ते हैं तो उस पर अधिक बल लगाते हैं तथा हल्की वस्तु को हाथ में पकड़ने के लिये कम बल लगाते हैं । इसी प्रकार भार को खींचने या धक्का देने के लिये बल की आवश्यकता होती है । बल वास्तव मे दो वस्तुओं के मध्य एक अन्योन्य क्रिया होती है ।

जब एक बल्लेबाज बल्ले से गेंद को मारता है तो वह अन्योन्य क्रिया द्वारा इसकी गति को बदल देता है । नहाते समय हमारे शरीर पर पानी की बूंदो का चिपकना, पानी के अणुओं तथा शरीर के मध्य अन्योन्य क्रिया के कारण है । निर्जीव वस्तुओं द्वारा भी बल लगता है । जब हम तीव्र तूफान में खड़े होते हैं तो हवा द्वारा हम पर बल लगता है । सूखे बालों में कंघा करने के उपरान्त, कंघे को जब कागज के छोटे टुकडों के पास ले जाते हैं तो इनका कंघे के साथ चिपकना, कंघे. व कागज के मध्य अन्योन्य क्रिया के कारण है । इसी प्रकार पिण्ड की प्रक्षेप्य गति उसकी पृथ्वी के साथ अन्योन्य क्रिया का प्रभाव है ।

अनुभव के आधार पर बलों को दो वर्गो में बांटा जा सकता है, दूरी पर कार्यरत बल तथा सम्पर्क बल । सौरमण्डल के विभिन्न ग्रह सूर्य के साथ व परस्पर अन्योन्य क्रिया द्वारा अत्यधिक दूरियों पर अपना स्थान लिये हुए हैं । उपरोक्त उदाहरणों में सूक्ष्म दृष्टिकोण के विचार से बल्ला कभी भी गेंद के सम्पर्क में नहीं होता । यद्यपि बल्ले के अणु गेंद के अणुओं के अतिनिकट होते हैं तथा अन्योन्य क्रिया द्वारा गेंद की गतिक अवस्था में क्षणिक बदलाव कर देते हैं । इस प्रकार प्रकृति के सभी बल,

कुछ दूरी पर पृथक विभिन्न वस्तुओं के मध्य अन्योन्य क्रिया के परिणामस्वरुप हैं । मानवीय स्तर व दृष्टिकोण से कुछ स्थितियों में दूरियां इतनी कम होती हैं, कि हम इन्हें शून्य मान लेते हैं तथा वस्तुओं के मध्य बलों को सम्पर्क बल कह देते हैं । जबकि कुछ स्थितियों में दूरियां अधिक होने के कारण हम बलों को दूरी पर कार्यरत बल कह देते हैं ।

स्पष्टत: बल वह कारक (agent) या बाहय प्रयास (external effort) है जो किसी वस्तु की यांत्रिक स्थिति में परिवर्तन कर सकता है । यह एक सदिश राशि है । यदि किसी कण पर एक से अधिक बल लग रहे हों तो सदिश संयोजन के नियम द्वारा परिणामी बल ज्ञात कर सकते हैं ।

प्रत्येक दो वस्तुओं के मध्य बल लगता है । उदाहरणार्थ जब किसी ब्लॉक को मेज पर रखते हैं तो मेज द्वारा ब्लॉक को रखने के लिये उस पर बल लगता है तथा ब्लॉक भी मेज पर अपने भार द्वारा मेज को नीचे की ओर दबाये रखता है । इसी प्रकार जब एक भारी ब्लॉक को रस्सी से लटकाते हैं तो रस्सी ब्लॉक को रोके रखने के लिये उस पर बल लगाती है तथा ब्लॉक भी रस्सी पर बल लगाकर उसे सीधे ताने रखता है ।

2.3 प्रकृति के मूल बल (Fundamental forces in nature)

प्रकृति में व्याप्त विभिन्न प्रकार के बलों को चार भागों में वर्गीकृत किया जा सकता है:

(1) गुरुत्वीय बल (2) विद्युत चुम्बकीय बल

(3) नाभिकीय बल (4) दुर्बल बल

इन बलों की पूर्ण व्याख्या निम्न प्रकार है :-

(1) गुरुत्वीय बल (Gravitational force)

प्रत्येक दो पिण्डों या कणों के मध्य उनके द्रव्यमान के गुण के कारण एक दूसरे पर आकर्षण बल लगता है जिसे गुरुत्वाकर्षण बल कहते हैं ।

यदि दो कणों के द्रव्यमान m_1 व m_2 हों तथा उनके मध्य दूरी r हो तो न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण के नियम से उनके मध्य बल का परिमाण

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{.... (2.1)}$$

द्वारा दिया जाता है । जहां G गुरुत्वाकर्षण का सार्वत्रिक नियतांक है, जिसका मान 6.67 x 10^{-11} N-m^2/kg^2 होता है । न्यूटन के तृतीय नियम के अनुसार दोनों कण समी. (2.1) द्वारा दिये जाने वाले बल के मान से एक दूसरे को अपनी ओर बल लगाकर आकर्षित करते हैं ।

पृथ्वी द्वारा अन्य वस्तुओं पर जो आकर्षण बल उत्पन्न होता है उसे पृथ्वी का गुरुत्व (gravity) कहते हैं । कोई m द्रव्यमान का कण जो पृथ्वी की सतह के समीप हो उस पर समी (2.1) के अनुसार $F = \frac{GMm}{R^2}$ गुरुत्वाकर्षण बल लगता है । इस बल की दिशा पृथ्वी के केन्द्र की ओर (ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर) होती है । जहां $M = 6\times10^{24} kg$ व $R = 6400 km$ क्रमश: पृथ्वी के द्रव्यमान व त्रिज्या के मान हैं । राशि $\frac{GM}{R^2}$ एक नियतांक है, जिसकी विमा त्वरण की होती है तथा इसे गुरुत्वीय त्वरण (g) कहते हैं, जिसका मान 9.8 मी. / $से^2$ होता है । अत: पृथ्वी द्वारा उसके पृष्ठ के समीप स्थित

एक छोटे पिण्ड जिसका द्रव्यमान m हो पर mg बल ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर लगता है, जिसे पिण्ड का भार कहते हैं ।

गुरुत्वाकर्षण बल ब्रह्माण्ड में स्थित प्रत्येक दो कणों या पिण्डों (स्थूल व सूक्ष्म) के मध्य लगता है । यह एक संरक्षी व केन्द्रीय बल है । इस बल की परास (range) सर्वाधिक है लेकिन इसकी सामर्थ्य (strength) अल्प होती है ।

(2) विद्युत चुम्बकीय बल (Electromagnetic force)

यदि दो कण आवेशित हों तो उनके मध्य परस्पर लगने वाले बल को विद्युत चुम्बकीय बल कहते हैं । यह बल आकर्षण व प्रतिकर्षण दोनों प्रकार का हो सकता है तथा यह गुरुत्वाकर्षण बल के अतिरिक्त होता है । इस बल की सामर्थ्य गुरुत्वाकर्षण बल से 10^{36} गुना अधिक होती है, लेकिन इसकी परास बहुत कम होती है । यह भी केन्द्रीय व संरक्षी बल है ।

जब आवेशित कण गतिशील अवस्था में हो तो विद्युत चुम्बकीय बल के एक भाग को चुम्बकीय बल कहते है, जो कि आवेशों के परिमाण व उनकी गति की दिशा पर भी निर्भर करता है । लेकिन यदि आवेशित कण विरामावस्था में हो तो विद्युत चुम्बकीय बल को स्थिर विद्युत बल (electrostatic force) कहते हैं । इसका मान कूलाम के नियम (coulomb's law) द्वारा दिया जाता है । किन्हीं दो आवेशित कणों q_1 व q_2 जो कि r दूरी पर स्थित हों, के मध्य कूलाम बल निम्न समीकरण द्वारा दिया जाता है:

$$F \propto \Delta x \qquad \text{.... (2.2)}$$

जहां $\frac{1}{4\pi \in_0} = 9\times10^{0} N-m^2/c^2$ कूलाम नियतांक है तथा $\in_0 = 8.85\times10^{-12} c^2/N-m^2$ निर्वात की विद्युतशीलता है । यही बल सिर के बालों में फेरे हुए कंघे तथा कागज के टुकड़ों के मध्य आकर्षण के लिये उत्तरदायी है । परमाणु में इलेक्ट्रॉन भी प्रोटोनों द्वारा उन पर लगने वाले विद्युत चुम्बकीय बलों द्वारा बद्ध होते हैं । इसी प्रकार इलेक्ट्रॉन, प्रोटान, आवेशित मेसोन कण आदि उप परमाणविक कणों के मध्य लगने वाले विद्युत चुम्बकीय बलों द्वारा अनेक परमाणविक व आणविक प्रभाव घटित होते हैं । इनके अतिरिक्त दैनिक जीवन की अनेक घटनाओं में भी विद्युत चुम्बकीय बल देखने को मिलते हैं, कुछ प्रमुख उदाहरण निम्न है :

(अ) परस्पर सम्पर्क में दो पृष्ठों के मध्य बल (Force between two surfaces in contact)

जब हम दो वस्तुओं को एक दूसरे से सम्पर्क में रखते हैं तो दोनों पृष्ठों के परमाणु एक दूसरे से निकट आते हैं, तथा दोनों वस्तुओं के परमाणुओं के आवेशित अवयवों के मध्य परस्पर तीव्र बल लगते हैं । सामान्यत: परस्पर सम्पर्क में स्थित दो वस्तुओं के मध्य बल उनके उभयनिष्ठ अभिलम्ब अर्थात पृष्ठ के अभिलम्ब दिशा में लगते हैं । यह बल धक्के या प्रतिकर्षण बल के रुप में होते हैं । उदाहरण के लिये जब किसी मेज पर एक किताब को रखते हैं तो किताब, मेज को नीचे की ओर दबाती है (अपने से दूर) तथा मेज, किताब को ऊपर की ओर धक्का-देती है (पुन: अपने से दूर) ।

(ब) घर्षण बल (Force friction)

दो वस्तुऐं जो कि परस्पर एक दूसरे के सम्पर्क में होती हैं, उनका पृष्ठ के समान्तर यदि बल का घटक होता है तो यह घर्षण बल कहलाता है । जब दो सम्पर्क में स्थित पृष्ठों द्वारा पृष्ठ के अभिलम्ब

दिशा में बल लगते हैं' तो वह घर्षण रहित होते हैं तथा चिकने पृष्ठ वाली वस्तुओं द्वारा पृष्ठ के समान्तर बहु त कम मात्रा में बल उत्पन्न करते हैं अत:. इन्हें घर्षण रहित पृष्ठों के अति निकट मान सकते हैं । इसी कारण हम चिकने पृष्ठ पर खड़े नही हो सकते, इसके विपरीत पेड की टहनी जो कि बहु त खुरदरी होती है, पर हम आसानी से खड़े हो जाते हैं ।

(स) डोरी या रस्सी में तनाव (Tension in a string or rope)

जब दो व्यक्तियों द्वारा रस्साकसी की जाती है या छत से रस्सी द्वारा किसी भारी ब्लॉक को लटकाया जाता है तो रस्सी खिंची हु ई या तनाव की अवस्था में होती है । डोरी के निचले सिरे पर स्थित इलेक्ट्रॉन व प्रोटान द्वारा ब्लॉक के इलेक्ट्रॉनों व प्रोटोनों पर बल लगते हैं, इन्हीं बलों का परिणामी मान डोरी द्वारा ब्लॉक पर लगने वाला बल होता है । वास्तव में तनी हु ई डोरी या रस्सी द्वारा इसके दोनों सिरों पर खींचने वाले पिण्डों पर विद्युत चुम्बकीय बल लगते हैं ।

(द) स्प्रिंग के कारण बल (Force due to a spring)

जब स्प्रिंग विस्तार की स्थिति में होती है तो यह इसके सिरे के साथ जुड़ी वस्तु को खींचती है तथा सम्पीडन की स्थिति में यह इसके सिरे पर जुडी वस्तु को धक्का देती है । यदि संकुचन व विस्तार Δx का मान अधिक न हो तो स्प्रिंग द्वारा लगाये गये बल F का मान, उसकी लम्बाई में परिवर्तन के समानुपाती होता है, अर्थात्

$$F \propto \Delta x$$

या

$$F = -K\Delta x \qquad ...(2.3)$$

यदि स्प्रिंग विस्तारित होती है तो बल केन्द्र की ओर लगता है तथा संकुचन होने पर इसकी पुन: केन्द्र की ओर होती है । k को स्प्रिंग का बल नियतांक कहते हैं, तथा यह प्रति इकाई संकुचन या विस्तार के लिये बल कहलाता है । यह बल भी पदार्थ के परमाणुओं के मध्य विद्युत चुम्बकीय बल द्वारा जनित है ।

(3) नाभिकीय बल (Nuclear forces)- नाभिक में परमाणु का लगभग 99.98% द्रव्यमान निहित होता है तथा रेडियोधर्मिता रहित तत्व का नाभिक एक स्थायी कण होता है । उदाहरण के लिये यदि हीलियम परमाणु से दोनों इलेक्ट्रॉन निकाल लिये जायें तो हमें आवरण रहित (bare) नाभिक के रुप में अल्फा कण प्राप्त होते हैं । न्यूट्रान विद्युतीय उदासीन होते हैं, जबकि प्रोटीनों के धनावेशित होने के कारण यह कूलॉम बल द्वारा एक दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं, लेकिन तब भी यह नाभिक को नहीं तोड़ पाते । नाभिक का यह स्थायित्व न्यूट्रानों व प्रोटीनों के मध्य गुरुत्वाकर्षण बल से भी नहीं हो सकता क्योंकि इस बल का परिमाण कूलॉम प्रतिकर्षण बल की तुलना में अत्यल्प होता है ।

वास्तव में यह गुरुत्वाकर्षण व विद्युत चुम्बकीय बल से भिन्न एक तीसरे प्रकार के बल जिसे नाभिकीय बल कहते हैं, यहां कार्य करते हैं । यह बल न्यूक्लिओनों अर्थात् दो प्रोटॉनों, दो न्यूट्रानों या एक प्रोटॉन व एक न्युट्रान मध्य लगते हैं । यह अत्यधिक शक्तिशाली व आकर्षण प्रकृति होते हैं लेकिन अत्यल्प दूरियों (नाभिकीय परास) में ही लगते हैं । जब न्यूक्लीओनों के मध्य दूरी एक फर्मी (1 fermi = 10^{-15}metre) क्रम की होती है, तब नाभिकीय बल, कूलॉम बल की तुलना में लगभग 10 गुना अधिक शक्तिशाली होता है । लेकिन 10 फर्मी या इससे अधिक दूरियों पर यह कूलॉम बल से क्षीण हो जाता है ।

रेडियो सक्रियता, नाभिकीय विखण्डन, नाभिकीय संलयन आदि परिघटनाऐं नाभिकीय बलों के फलस्वरुप सम्पन्न होती हैं ।

(4) क्षीण या दुर्बल बल (Weak forces) -

गुरुत्वाकर्षण, विद्युत-चुम्बकीय तथा नाभिकीय बलों से भिन्न एक बल जिसे क्षीण बल कहते हैं, हमें प्रोटॉन, इलेक्ट्रॉन व न्यूट्रान से सम्बद्ध अभिक्रियाओं के समय देखने को मिलता है । क्षीण बल या अन्योन्य क्रियाऐं हमें β - क्षय, लेप्टॉन, मेसान, बेरिऑन आदि मूल कणों के क्षय के समय मिलती हैं, जिनका आयुकाल अल्प होता है ।

एक न्यूट्रान, इलेक्ट्रॉन तथा एन्टी न्यूट्रिनो के उत्सर्जन के साथ प्रोटॉन में रूपान्तरित (क्षयित) होता है ।

$$n \rightarrow p + e^{-} + \bar{v} \qquad \text{....(2.4)}$$

समीकरण (2.4) को $\beta-$ क्षय का समीकरण कहते हैं । प्रयोगो द्वारा रेडियोएक्टिव नाभिक के क्षय से उत्सर्जित $\beta-$ कणों या इलेक्ट्रॉनों की ऊर्जा सतत् रुप से शून्य से लेकर एक अधिकतम मान के मध्य परिवर्तित होती है । इसकी व्याख्या के लिये पाउली (Pauli) ने 1930 में $\beta-$ क्षय के उत्सर्जन के साथ एक उदासीन कण एन्टी न्युट्रीनो ($\bar{v}$) के भी उत्सर्जित होने की अभिकल्पना प्रस्तुत की, इसकी पुष्टि बाद में प्रयोग द्वारा प्राप्त हुई । $\beta-$ क्षय के समय उत्सर्जित ऊर्जा । $\beta-$ कण तथा एन्टी न्यूट्रिनो के मध्य बंट जाती है । इसी प्रकार दुर्बल अन्योन्य क्रिया रेडियोएक्टिव नाभिक में प्रोटॉन के न्यूट्रान में रुपान्तरण के समय सम्पन्न होती है :

$$p \rightarrow n + \beta^{+} + v \qquad \text{....(2.5)}$$

एन्टी न्यूट्रिनो ($\bar{v}$) को न्यूट्रिनो (v) का प्रतिकण कहते हैं । $\beta-$ क्षय की प्रक्रिया में न्यूट्रिनो की परिकल्पना द्वारा ऊर्जा संरक्षण तथा कोणीय संवेग संरक्षण सिद्धान्तों की यथार्थता बनी रहती है । उपरोक्त अभिक्रियाओं में न्यूट्रिनो का आवेश तथा विराम द्रव्यमान शून्य होता है तथा इसका कोणीय संवेग $\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)$ होता है । न्यूट्रान, प्रोटान, इलेक्ट्रॉन (β^{-} या ${}_{-1}e^{0}$) तथा पोजीट्रान ($F_e = \frac{e^2}{4\pi \in_0 r^2}$ या ${}_{+1}e^{0}$) का चक्रणी कोणीय संवेग $\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2\pi}\right)$ होता है ।

क्षीण बलों की सामर्थ्य गुरुत्वाकर्षण बल की तुलना में लगभग 10^{25} गुना अधिक होती है लेकिन इसकी परास अत्यल्प होती है, जो कि वास्तव में प्रोटॉन व न्यूट्रान के आकार से भी कम होती है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. पानी में तैर रहे एक कार्क पर परिणामी बल का मान क्या होगा?

   ……………………………………………………………………………………………

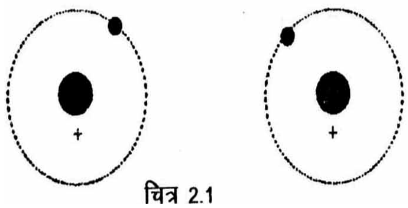
2. जब दो व्यक्ति एक दूसरे से हाथ मिलाते हैं, तो उनके मध्य कौनसा बल लगता है?

   ……………………………………………………………………………………………

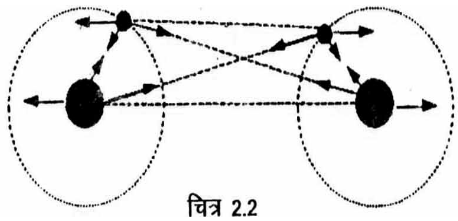
3. प्रकृति के चारों मूल बलों की आपेक्षिक सामर्थ्य बताइये ।

   ……………………………………………………………………………………………

उदाहरण 2.1 चित्र 2.1 में दो हाइड्रोजन के परमाणु दर्शाये गये हैं । एक पृथक चित्र बनाकर तंत्र के विभिन्न कणों पर लगने वाले विद्युत बलों को दर्शाइये ।



चित्र 2.1



चित्र 2.2

हल: प्रत्येक कण शेष तीनों कणों पर विद्युत बल उत्पन्न करेगा, इस प्रकार 4 x 3 = 12 बल कुल मिलाकर अस्तित्व में होंगे, इन्हें चित्र 2.2 में दर्शाया गया है ।

उदाहरण 2.2 दो इलेक्ट्रॉनो के मध्य विद्युत व गुरुत्वाकर्षण बलों का अनुपात ज्ञात कीजिये ।

हल: विद्युत बल $F_e = \dfrac{1}{4\pi \in_0} \dfrac{q_1 q_2}{r^2}$

$$= \frac{1}{4\pi \in_0} \frac{(-e)(-e)}{r^2}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi \in_0 r^2}$$

तथा गुरुत्वाकर्षण बल $F_g = \dfrac{G m_1 m_2}{r^2} = \dfrac{G(me)^2}{r^2}$

$$\therefore \frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi \in_0 G(m_e)^2}$$

$$= \frac{9 \times 10^9 \times (1.6 \times 10^{-19})^2}{6.67 \times 10^{-11} \times (9.1 \times 10^{-31})^2}$$ (सभी मान SI मात्रकों में है)

$$= 4.17 \times 10^{42}$$

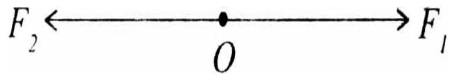
2.4 संगामी बलों का संतुलन (Equilibrium of concurrent forces)

यदि किसी पिण्ड पर दो या दो से अधिक बल इस प्रकार कार्य कर रहे हों कि उन सभी की क्रिया रेखा एक बिन्दु से गुजरती हो, तो उन्हें संगामी बल कहते हैं । जब संगामी बलों का परिणामी मान (सदिश योग) शून्य होता है, तो इसे संगामी बलों का संतुलन कहते हैं ।

अर्थात यदि पिण्ड पर $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 +, \ldots\ldots\ldots\ldots \vec{F}_n$ संगामी बल कार्यरत हों तो

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2, + \vec{F}_3 + \ldots\ldots\ldots \vec{F}_n = 0 \qquad \text{.. (2.6)}$$

होने पर पिण्ड संतुलन की अवस्था में कहलाता है ।



यदि किसी पिण्ड पर चित्र 2.3 में दर्शाये अनुसार दो संगामी बल कार्यरत हो तो पिण्ड की साम्यावस्था के लिये

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \qquad \text{..... (2.7)}$$

अर्थात $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$

इस प्रकार जब दोनों संगामी बलों के परिमाण समान व दिशाऐं एक दूसरे के विपरीत हों, तो पिण्ड संतुलन की अवस्था में होता है ।

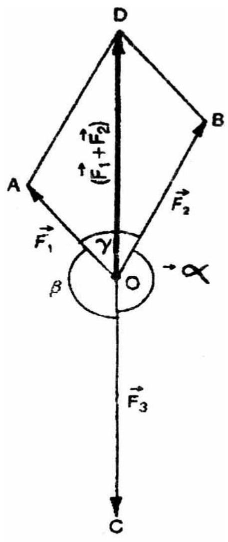
यदि पिण्ड पर तीन संगामी बल $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ व $\vec{F}_3$ कार्यरत हों तो उनके संतुलन के लिये

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \qquad .... (2.8)$$

या $$\vec{F}_3 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$$

या $$\left|\vec{F}_3\right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2Cos\gamma} \qquad ......(2.9)$$

बलों हो $\vec{F}_1$ व $\vec{F}_1$ के परिणामी मान को चित्र 2.4 में परिणामी सदिश $\overrightarrow{OD}$ द्वारा दर्शाया गया है ।सदिश $\overrightarrow{OD}$ का परिणामी मान समी (2.9) द्वारा समान्तर चतुर्भुज के नियम द्वारा दिया गया है । तीनों संगामी बलों के संतुलन के लिये तीसरे सदिश $\vec{F}_3$ (या $\overrightarrow{OC}$) का मान $\overrightarrow{OD}$ के परिमाण के समान व विपरीत दिशा में होना चाहिए ।



चित्र 2.4

लामी का प्रमेय (Lami's Theorem) :

इस प्रमेय के अनुसार यदि किसी पिण्ड पर तीन संगामी बल कार्यरत ही हों तो पिण्ड के संतुलन के लिये

$$\frac{F_1}{Sin\alpha} = \frac{F_2}{Sin\beta} = \frac{F_3}{\sin\gamma} \qquad .... (2.10)$$

जहाँ $\alpha = \vec{F}_2$ व $\vec{F}_3$ के मध्य कोण

$\beta = \vec{F}_1$ व $\vec{F}_3$ के मध्य कोण

$\gamma = \vec{F}_1$ व $\vec{F}_2$ के मध्य कोण

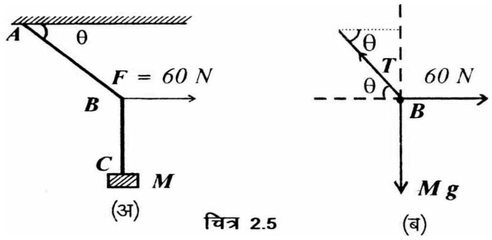
इन कोणों को चित्र 2.4 में दर्शाया गया है ।

यदि पिण्ड पर कार्यरत संगामी बल संतुलन की स्थिति में हैं तो उसकी यांत्रिक स्थिति में कोई परिवर्तन नहीं होता है, अर्थात पिण्ड न्यूटन के गति के प्रथम नियमानुसार अपनी यथास्थिति (विराम या एकसमान ॠजुरेखीय गति की अवस्था) बनाये रखता है । इसके विपरीत यदि पिण्ड पर आरोपित संगामी बल संतुलन की अवस्था में नहीं हैं, तो संगामी बलों के परिणामी मान व दिशा के अनुरुप पिण्ड की स्थिति परिवर्तित होगी ।

यदि पिण्ड पर असंगामी बल कार्यरत हों तो पिण्ड में घूर्णन गति भी हो सकती है ।

उदाहरण 2.3 एक नगण्य द्रव्यमान वाली डोरी से 8 किग्रा द्रव्यमान का एक पिण्ड लटकाया गया है । डोरी के मध्य बिन्दु पर एक क्षैतिज बल 60 न्यूटन का लगाने पर चित्र 2.5 में कोण θ तथा डोरी में तनाव ज्ञात कीजिए । ($g = 10$ मी./से.^{2})

हल: यदि डोरी के मध्य बिन्दु पर क्षैतिज दिशा में 60 N का बल लगाने पर डोरी क्षैतिज के साथ θ कोण बनाती है व डोरी में तनाव T है तो संतुलन की स्थिति में



चित्र 2.5

$$TCos\theta = 60N$$

$$T\sin\theta = 80N$$

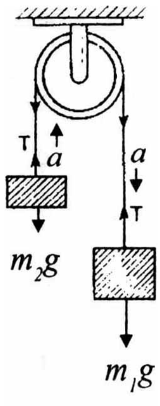
$$\therefore T = \sqrt{(60)^2 + (80)^2} = 100 \text{ न्यूटन}$$

$$Tan\theta = \frac{80}{60} = \frac{4}{3} = 1.33$$

या $\quad \theta = \tan^{-1}(1.33)$

उदाहरण 2.4 m_1 तथा m_2 द्रव्यमान ($m_2 > m_2$) के दो पिण्ड एक भारहीन अवितान्य डोरी के दो सिरों पर जुडे हैं तथा यह डोरी एक घर्षण रहित घिरनी से होकर गुजरती है । जब पिण्डों को छोड़ा जाता है तो उनमें त्वरण तथा डोरी में तनाव ज्ञात कीजिए ।

हल: चित्र 2.6 में दर्शाये अनुसार जब पिण्डों को छोड़ा जाता है तो $m_2 > m_2$ होने के कारण m_1 का द्रव्यमान का पिण्ड नीचे की ओर तथा m_2 द्रव्यमान का पिण्ड ऊपर की ओर गति करेगा । अत:



चित्र 2.6

प्रथम पिण्ड की गति का समीकरण

$$m_1a = m_1g - T$$

तथा द्वितीय पिण्ड की गति का समीकरण

$$m_2a = T - m_2g$$

अत: $\quad a = (m_1 - m_2) = g(m_1 - m_2)$

$\therefore$ रेखीय त्वरण $a = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)g$

a का मान रखने पर डोरी में तनाव

$$T = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2}$$

उदाहरण 2.5 3.0×10^{-4} किग्रा द्रव्यमान का एक आवेशित गोला एक अवितान्य डोरी से निलम्बित है । गोले पर क्षैतिज दिशा में विद्युत बल लग रहा है व डोरी विरामावस्था में ऊर्ध्वाधर से 30^0 कोण बनाती है तो विद्युत बल का परिमाण व डोरी में तनाव ज्ञात करो । ($g = 10$ मी./से)

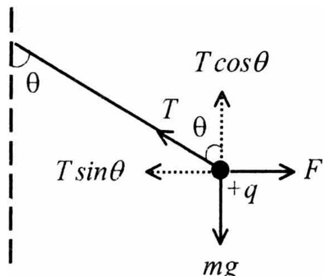
हल: चित्र 2.7 में कण पर संगामी बलों के संतुलन के लिये ऊर्ध्वाधर संतुलन हेतु

$$TC\text{os}\,\theta = mg$$

अत: $\quad T = \dfrac{mg}{\cos\theta} = \dfrac{3\times10^{-4}\times10}{\cos 30}$

$$= \frac{3\times10^{-4}\times10}{\sqrt{3}}\times 2$$

$$T = 3.464\times10^{-3} \text{ न्यूटन}$$



चित्र 2.7

तथा आवेशित कण के क्षैतिज संतुलन हेतु

$$T\sin\theta = F = \text{ विद्युत बल}$$

अत: $\quad F = 3.464\times10^{-3}\times\sin 30^0$

या $F = 1.732 \times 10^{-3}$ न्यूटन

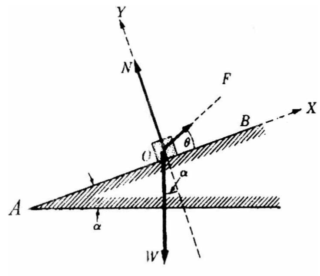
उदाहरण 2.6 चित्र 2.8 में एक कण O झुके हुए तल AB पर भार W, खिंचाव बल F तथा पृष्ठ द्वारा उत्पन्न अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल N के प्रभाव में साम्यावस्था में है तो F व N के मान ज्ञात कीजिए।

हल : X- अक्ष के अनुदिश साम्यावस्था के लिये

$$\sum F_{ix} = F\cos\theta - W\sin\alpha = 0$$

या $F\cos\theta = W\sin\alpha$

अतः $F = \dfrac{W\sin\alpha}{\cos\theta}$



चित्र 2.8

Y- अक्ष के अनुदिश कण की साम्यावस्था के लिये

$$\sum F_{iy} = F\sin\theta - W\cos\alpha + N = 0$$

या $N = W\cos - F\sin\theta$

या $N = W\cos\alpha - \dfrac{W\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\theta$

या $N = \dfrac{W(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta)}{\cos\theta}$

या $N = \dfrac{W\cos(\alpha+\theta)}{\cos\theta}$

वैकल्पिक हल : इस समस्या को लामी के प्रमेय द्वारा भी निम्न प्रकार हल कर सकते है:

$$\frac{F}{\sin(180-\alpha)} = \frac{N}{\sin(90+\alpha+\theta)} = \frac{W}{\sin(90-\theta)}$$

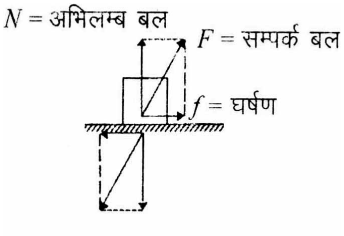
या $\dfrac{F}{\sin\alpha)} = \dfrac{N}{\cos\alpha+\theta} = \dfrac{W}{\cos\theta}$

या $F = \dfrac{W\sin\alpha}{\cos\theta}$

तथा $N = \dfrac{W\cos(\alpha+\theta)}{\cos\theta}$

2.5 घर्षण (Friction)

किन्हीं दो सम्पर्कित वस्तुओं के सतहों पर उत्पन्न वह बल जो कि उनकी आपेक्षिक गति का विरोध करता है, घर्षण बल कहते हैं। इसकी दिशा वस्तुओं के पृष्ठ के अनुदिश आपेक्षिक वेग के विपरीत होती है ।



चित्र 2.9

जब दो वस्तुऐं एक-दूसरे के सम्पर्क में रखी जाती हैं तो उनकी पृष्ठों पर स्थित आवेशित कणों या परमाणुओं के मध्य विद्युत चुम्बकीय बल लगने के कारण प्रत्येक वस्तु दूसरे पर सम्पर्क बल उत्पन्न करती है । दोनों वस्तुओं पर सम्पर्क बल के परिमाण बराबर होते हैं लेकिन उनकी दिशा एक-दूसरे के विपरीत होती है । इस प्रकार सम्पर्क बल न्यूटन के तृतीय नियम का पालन करते हैं।

यह आवश्यक नहीं है कि किसी विशिष्ट वस्तु पर सम्पर्क बल की दिशा सम्पर्कित पृष्ठ के अभिलम्ब ही हो । हम चित्र 2.9 के अनुसार सम्पर्क बल (F) को दो घटकों में वियोजित कर सकते हैं । एक घटक $N = F\cos\theta$ जो कि सम्पर्क पृष्ठ के अभिलम्ब होता है, को अभिलम्ब सम्पर्क बल (normal contract force) या अभिलम्ब बल (normal force) कहते हैं तथा दूसरा घटक जो कि पृष्ठ के समान्तर होता है $(f = F\sin\theta)$ को घर्षण (friction) कहते हैं । अत: सम्पर्क बल का परिमाण

$$F = \sqrt{N^2 + f^2} \qquad \text{...... (2.11)}$$

द्वारा दिया जाता है जिससे

$$\tan\theta = \frac{f}{N} \qquad \text{......(2.12)}$$

बाहृम घर्षण (External friction)

यह दो सम्पर्कित ठोस वस्तुओं के पृष्ठों के मध्य अन्योन्य क्रिया है। जब दोनों पृष्ठ एक दूसरे के सापेक्ष विराम में होती है, तो उनके मध्य स्थैतिक घर्षण होता है तथा जब दोनों पृष्ठ आपेक्षिक गति की अवस्था में होते हैं तो घर्षण बल को गतिक घर्षण (Sliding or Kinetic friction) कहते है।

जब कोई एक वस्तु बिना फिसले दूसरे पिण्ड के पृष्ठ के समान्तर लोटनी (rolls) गति करे तो लोटनी घर्षण (rolling friction) उत्पन्न होता है ।

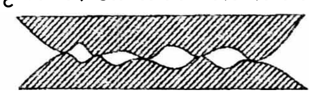
आन्तरिक घर्षण या श्यानता (Internal friction or viscosity)

यह तरल पदार्थ (Fluid) अर्थात द्रव या गैस की विभिन्न परतों जो कि एक-दूसरे के सापेक्ष गतिशील हों, के मध्य अन्योन्य क्रिया है। बाहृम घर्षण के विपरीत यहां कोई स्थैतिक घर्षण नहीं होता है।

घर्षण की परमाणु स्तर पर व्याख्या (Explanation of friction at atomic level)

जैसा कि पूर्व में स्पष्ट किया गया है कि दो वस्तुओं के सम्पर्कित पृष्ठों के आवेशित कणों के मध्य अन्योन्य क्रिया से घर्षण उत्पन्न होता है । परमाणु स्तर पर प्रत्येक वस्तु का पृष्ठ खुरदरा व अनियमित (irregular surface) होता है । जैसे कि एक पॉलिश की हुई स्टील की प्लेट को नंगी आंखों से देखने पर हमें भले ही समतल प्रतीत होती हो, लेकिन इसे एक शक्तिशाली सूक्ष्मदर्शी द्वारा देखने पर इसका पृष्ठ चित्र 2.10 के दर्शाये अनुसार अनियमित दिखाई देता है । जब दो वस्तुओं को एक-दूसरे पर रखा जाता है तो दोनों पृष्ठों के मध्य सम्पर्कित वास्तविक क्षेत्रफल का मान वस्तुओं के कुल क्षेत्रफल की तुलना मैं बहुत कम होता है (देखिये चित्र 2.11) । दोनों वस्तुओं के इन सम्पर्कित बिन्दुओं पर परमाणुओं के मध्य दूरी बहुत कम होने के कारण पृष्ठों पर आणविक बल लगने प्रारम्भ

चित्र 2.10



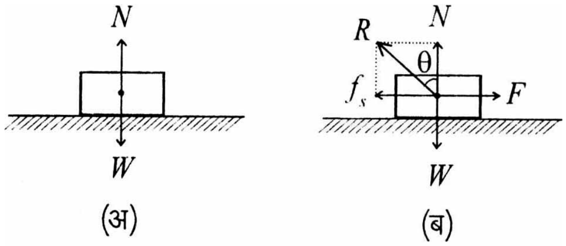
चित्र 2.11

हो जाते हैं तथा सम्पर्क बिन्दुओं पर आणविक बंध बन जाते हैं । जब दोनों में से किसी एक पृष्ठ को खींचा जाता है, तो यह बंध टूटते हैं, इससे बंध से सम्बद्ध पदार्थ का विरुपण होता है व नये बंध बनते हैं । वस्तुओं के स्थानीय विरूपण द्वारा उनमें कम्पन्न तरंगें संचरित होती हैं । अन्ततः यह कम्पन्न अवमन्दित होते हैं और यह ऊर्जा कणों की बढ़ी हुई यादृच्छिक गति के रुप में प्रकट होती है । इसी

कारण वस्तुऐं गर्म हो जाती हैं और हमें गति प्रारम्भ करने या गति को बनाये रखने के लिये बल की आवश्यकता होती है ।

2.5.1 स्थैतिक घर्षण (Static friction)

जब दो वस्तुऐं एक दूसरे के सम्पर्क में हों, लेकिन एक दूसरे के सापेक्ष फिसलनी गति (sliding motion) में न हों तो उस स्थिति में लगने वाले घर्षण बल को स्थैतिक घर्षण कहते हैं । इस स्थिति में चित्र 2.12 (अ) के अनुसार वस्तु पर कार्यरत प्रतिक्रिया बल (N), उस वस्तु के भार (W=mg) के बराबर तथा विपरीत होता है । लेकिन जब वस्तु पर अल्पमान का क्षैतिज बल F लगाकर कर गति कराने के प्रयास के पश्चात भी यदि कोई परिणामी प्रतिक्रिया बल R ऊर्ध्वाधर से θ कोण पर झुका होता है । इस अवस्था में $N = R\cos\theta = W$ तथा सम्पर्क तल के समान्तर घटक $R\sin\theta$ जो कि आरोपित बल F के विपरीत होता है तथा इसके द्वारा स्थैतिक घर्षण बल प्राप्त होता है । जब वस्तु पर आरोपित बल का मान धीरे-धीरे बढ़ाते हैं, तो जब तक आरोपित बल एक न्यूनतम बल से अधिक नहीं हो जाता तब तक वस्तु गति (फिसलती) नहीं करती । इस प्रकार स्थैतिक घर्षण बल, सम्पर्क तल के अनुदिश घटक द्वारा प्राप्त होता है तथा यह एक स्वसमायोज्य बल है । यह अपने मान व दिशा को इस प्रकार समायोजित करता है कि यह वस्तु पर लगाये गये अन्य बलों के साथ मिलकर दोनों पृष्ठों के मध्य आपेक्षिक विराम की स्थिति को बनाये रखता है ।



चित्र 2.12

दो पृष्ठों के मध्य स्थैतिक घर्षण बल f_s के परिमाण का अधिकतम मान सीमान्त घर्षण (limiting friction) कहलाता है । सीमान्त घर्षण बल का मान अभिलम्ब सम्पर्क बल (N) के समानुपाती होता है

अर्थात्

$$(f_s)_{\max} \alpha N$$

या $$(f_s)_{\max} \mu_s N$$

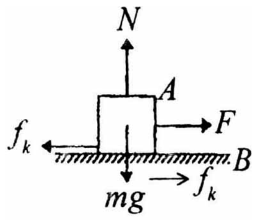
जहां μ_s स्थैतिक घर्षण गुणांक है तथा N=W=mg भार होता है । μ_s का मान पदार्थ की प्रकृति तथा दोनों सम्पर्कित पृष्ठों के खुरदरेपन (roughness) पर निर्भर करता है ।

2.5.2 गतिक घर्षण (kinetic friction)

जब दो वस्तुऐं जो एक-दूसरे के सम्पर्क में हों, सापेक्षिक वेग से पृष्ठ पर रगड़ते (rubbing) या फिसलते (slipping) हुए गतिशील हों तो उनके मध्य घर्षण को गतिक घर्षण कहते हैं । घर्षण बल की दिशा इस प्रकार होती है कि आपेक्षिक फिसलनी गति का घर्षण द्वारा विरोध हो ।

चित्र 2.13 के अनुसार एक वस्तु A जो कि पृष्ठ B के सम्पर्क में है, इसके सापेक्ष गतिशील है । B के द्वारा A पर लगने वाले घर्षण बल की दिशा, वस्तु A के B के सापेक्ष वेग की दिशा के

विपरीत होती है । चित्र में A पर गतिक घर्षण बल की दिशा बाई ओर है । पृष्ठ B पर घर्षण बल की दिशा दांई ओर है, जो कि B के A के सापेक्ष वेग की दिशा के विपरीत है । इस प्रकार गतिक घर्षण बल, आपेक्षिक गति का विरोध करता है ।



चित्र 2.13

गतिक घर्षण बल का परिमाण, दोनों वस्तुओं के मध्य लगने वाले अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल (N) के समानुपाती होता है,

अर्थात $f_k \alpha N$

या $f_k = \mu_k N$ ......(2.14)

μ_k को गतिक घर्षण गुणांक कहते हैं । इसका मान दोनों सम्पर्कित पृष्ठों के पदार्थ व उनकी प्रकति पर निर्भर करता है । μ_k का मान चिकने पृष्ठों के लिये कम तथा खुरदरे पृष्ठों के लिये अधिक होता है । समी (2.14) के अनुसार μ_k का मान फिसलने वाली वस्तुओं की चाल पर निर्भर नहीं करता है।

2.5.3 लोटनी घर्षण (Rolling friction)

जब एक वस्तु दूसरी वस्तु के पृष्ठ पर लुढ़कती है या लुढ़कने का प्रयास करती है, तो सम्पर्क पृष्ठों के मध्य कार्यरत बल को लोटनी घर्षण कहते हैं ।

जब कोई पहिया किसी समतल पर लोटनी गति करता है तो समतल के सापेक्ष पहिये के सम्पर्क बिन्दु का वेग सदैव शून्य बना रहता है, यद्यपि पहिये का द्रव्यमान केन्द्र आगे की ओर गति करता है । इसलिये लोटनी घर्षण का मान, गतिक घर्षण की तुलना में बहु त कम होता है । यही कारण है कि भारी माल का आवागमन पहियों लगी गाड़ियों द्वारा किया जाता है । इस प्रकार गतिक घर्षण का रुपान्तरण, लोटनी घर्षण में हो जाता है । उदाहरण के लिये स्टील व स्टील के मध्य लोटनी घर्षण का मान इन्हीं के मध्य गतिक घर्षण का लगभग 1% होता है ।

प्रयोगों द्वारा यह प्रदर्शित किया जा सकता है कि जब कोई बेलन बिना फिसले लोटनी गति करता है तो लोटनी घर्षण का मान अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल के समानुपाती तथा बेलन या पहिये की त्रिज्या के व्युत्क्रमानुपाती होता है । अत:

$$f_r = \mu_r \frac{N}{r}$$

जहां μ_r लोटनी घर्षण गुणांक है तथा इसकी विमा लम्बाई की होती है ।

2.5.4 घर्षण के अनुप्रयोग (Applications of friction)

घर्षण एक आवश्यक दोष है । जहां एक ओर घर्षण के बिना हमारे बहु त से दैनिक कार्य असम्भव हैं, वहीं दूसरी ओर घर्षण के कारण ऊर्जा की हानि भी होती है । इसे निम्नलिखित बिन्दुओं द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है ।

(अ) घर्षण की आवश्यकता या लाभ -

1. घर्षण के बिना हम फर्श पर चल नहीं पायेंगे व फिसल जायेंगे ।
2. घर्षण के बिना हम कागज या श्यामपट्ट पर लिख नहीं सकते ।

3. घर्षण के बिना गाड़ियों के ब्रेक नहीं लग सकते ।
4. घर्षण के बिना किन्हीं दो वस्तुओं को चिपकाया नहीं जा सकता ।
5. घर्षण के द्वारा रेगमाल (sand paper) से सफाई नहीं की जा सकती ।
6. टायर के निर्माण में संश्लेषित रबर का प्रयोग किया जाता है, क्योंकि इसके तथा सड़क के मध्य घर्षण गुणांक का मान अधिक होता है ।

(ब) घर्षण से हानियाँ

1. घर्षण के कारण मशीनों में ऊर्जा व्ययित होती है तथा इस कारण मशीनों की दक्षता कम हो जाती है ।
2. घर्षण के कारण मशीनों में विभिन्न पुर्जों के परस्पर सम्पर्क व रगड़ द्वारा उनमें क्षरण होता है, जिससे उनका आयुकाल कम हो जाता है ।
3. घर्षण द्वारा ऊष्मा उत्पन्न होती है, जिससे मशीनों को क्षति पहुंचती है ।

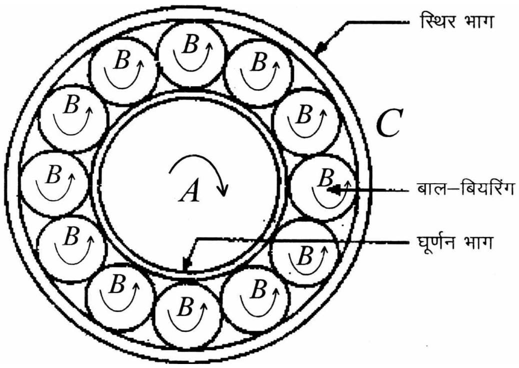
(स) घर्षण कम करने की विधियाँ

1. पॉलिश द्वारा (By polishing)

पृष्ठों को पॉलिश करने पर -वह चिकने हो जाते हैं, तथा इसरो घर्षण में कमी आती है ।

2. बॉल बियरिंग द्वारा (By using ball bearing)

चित्र 2.14 में A व C दो संकेन्द्रीय बेलन है, इनके मध्य में स्टील की ठोस गोलियां (B) व्यवस्थित की हुई होती हैं जिन्हें बॉल बियरिंग कहते हैं । अन्त: बेलन ऐक्सिल (axle) पर तथा



चित्र 2.14

बाह्म बेलन C पहिये के साथ जुड़ा होता है । जब पहिया घूमता है तो बॉल बियरिंग (B) घूर्णित होती हैं । अत: पहिया एक्सिल पर फिसलने के बजाय गोलियों पर लुढ़कता है, अर्थात फिसलनी गति, लोटनी गति में रुपान्तरित हो जाती है । जिससे लोटनी घर्षण प्रभावी रुप से बहुत कम हो जाता है ।

3. स्नेहक के प्रयोग द्वारा (By using lubricants)

मशीनों या मोटर गाड़ियों के इंजिन में विभिन्न पुर्जे जब एक-दूसरे के सम्पर्क में आते हैं या जब उनमें आन्तरिक तालाबंदी होती है तो वह एक-दूसरे पर फिसल नहीं पाते । स्नेहक पदार्थ, दो सम्पर्कित वस्तुओं के मध्य एक पतली श्यान परत का निर्माण करके आन्तरिक तालाबन्दी को कम करता है तथा घर्षण प्रभाव को घटाता है । द्रवों में ठोस पदार्थो की तुलना में अन्तर-आणविक बल कम

होते हैं, इस कारण दो सम्पर्कित ठोस वस्तुओं के मध्य स्नेहक डालने पर घर्षण बल का प्रभाव कम अनुभव होता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

4. जब एक पहिया समतल सडक पर घूमता है, तो पहिये व सडक के मध्य घर्षण बल की दिशा क्या होती है?

………………………………………………………………………………………………

5. एक घोड़ागाड़ी को गति के प्रारम्भ में कुछ क्षण के लिये घोड़े के लिये खींचना क्यों मुश्किल होता है?

………………………………………………………………………………………………

6. पहिया वृत्ताकार क्यों होता है?

………………………………………………………………………………………………

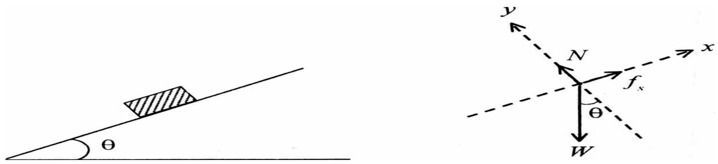
7. घर्षण गुणांक का मान किन बातों पर निर्भर करता है?

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

उदाहरण 2.7 एक ब्लॉक क्षैतिज से θ कोण पर झुके नत तल पर विरामवस्था में है । जब आनत कोण को बढाया जाता है तो θ_x कोण पर ब्लॉक फिसलना आरम्भ कर देता है । ब्लॉक तथा नत तल के मध्य स्थैतिक घर्षण गुणांक ज्ञात करो ।

हल: चित्र 2.15 में ब्लॉक को कण मानकर उस पर कार्यरत बलों को दिखाया गया है । जहां W ब्लॉक का भार, N झुके हुए तल के पृष्ठ द्वारा ब्लॉक पर अभिलम्ब बल तथा f_s पृष्ठ द्वारा ब्लॉक पर



चित्र 2.15

उत्पन्न स्पर्शीय घर्षण बल है । चूंकि ब्लॉक विराम में है, अत:

$$\vec{N} + \vec{f}_s + \vec{W} = 0$$

X- अक्ष (तल के अनुदिश) तथा Y- अक्ष (तल के अभिलम्ब) के अनुदिश वियोजित करने पर

$f_s - W\sin\theta = 0$ तथा $N - W\cos\theta = 0$

जब तक कि $f_s \le \mu_s N$ हो । जब नत तल का कोण बढ़ाते हैं, जिससे कि $\theta = \theta_s$ होने पर ब्लॉक धीरे से फिसलना प्रारम्भ कर दे तब $f_s = \mu_s N$ रखने पर अत:

$$N = W\cos\theta_s$$

तथा $$\mu_s N = W\sin\theta_s$$

$$\therefore \mu_s = \tan\theta_s$$

इस प्रकार झुकाव कोण θ_s जिस पर ब्लॉक मात्र फिसलना प्रारम्भ करे, इसके मापन द्वारा μ_s ज्ञात कर सकते हैं। इसी प्रकार कोण θ_k जिस पर नत तल पर नीचे की ओर ब्लॉक एक समान चाल बनाते हुए फिसले, द्वारा μ_k ज्ञात कर सकते हैं, अर्थात्

$$\mu_k = \tan\theta_k \quad \text{जहाँ} \quad \theta_k < \theta_s$$

उदाहरण 2.8 क्रिकेट के एक मैच में एक तेज गेंदबाज 50 मी./से के वेग से 400 ग्राम द्रव्यमान की एक गेंद फैंकता है। बल्लेबाज गेंद को 0.4 सेकण्ड तक अपने बल्ले के सम्पर्क में रख कर, गेंद को उसी वेग से गेंदबाज की ओर लौटा देता है। बल्लेबाज द्वारा गेंद पर लगाये गये बल की गणना करो।

हल: गेंद का द्रव्यमान m = 400 ग्राम

गेंद का प्रारम्भिक वेग u = 50 मी / से

गेंद का अंतिम वेग v = - 50 मी / से

सम्पर्क समयान्तराल Δt = 0.4 सेकण्ड

बल $F = ma\dfrac{m(v-u)}{\Delta t}$

$= \dfrac{0.4(50+50)}{0.4} = 100$ न्यूटन

उदाहरण 2.9 एक 3000 किग्रा का रोड रोलर 2 मी / से वेग से गतिशील है। इसे 2 मिनिट में विरामावस्था में लाने के लिये कितना बल लगाना होगा?

हल: रोड रोलर का द्रव्यमान m = 3000 किग्रा

रोड रोलर का प्रारम्भिक वेग $v_1 = 2$ मी / से

रोड रोलर का अन्तिम वेग $v_f = 0$ मी/ से

समयान्तराल = 2 मिनिट =120 सेकण्ड

$$F = m\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3000\times 2}{120} = 50 \text{ न्यूटन}$$

उदाहरण 2.10 एक वस्तु पर $\vec{F}_1 = -2\hat{i}$ न्यूटन, $\vec{F}_2 = -6\hat{j}$ न्यूटन तथा $\vec{F}_3 = -4\hat{j}$ न्यूटन तीन संगामी बल कार्यरत हैं। क्या वस्तु सन्तुलन स्थिति में है? यदि नहीं, तो सन्तुलन स्थिति के लिए कितना बल और लगाना चाहिये?

हल: यदि वस्तु सन्तुलन स्थिति में है तो कुल बल शून्य होना चाहिये।

यहाँ $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (-2\hat{i} - 6\hat{j} - 4\hat{j})$

$= -(2\hat{i} - 2\hat{j})$

यह शून्य नहीं है, इसलिये वस्तु सन्तुलित अवस्था में नहीं है।

यदि $\vec{F}_4$ बल और लगाने पर वस्तु सन्तुलन स्थिति में होती हो तो-

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4) = 0$$

या $\vec{F}_4 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)$

$= (2\hat{i} + 2\hat{j})$ न्यूटन

या आवश्यक बल $\left|\overline{F}_4\right| = \sqrt{(2)^2+(2)^2} = 2\sqrt{2}$ न्यूटन, उत्तर-पूर्व दिशा में अर्थात् X-अक्ष से 45^0 कोण पर ।

उदाहरण 2.11 एक 10 ग्राम के किसी कण का किसी क्षण पर स्थिति है-

$$x = a + bt + ct^2$$

इस कण पर कार्यरत बल का मान ज्ञात करो ।

हल: स्थिति $x = a + bt + ct^2$

वेग $v = \dfrac{dx}{dt} = (b + 2ct)$

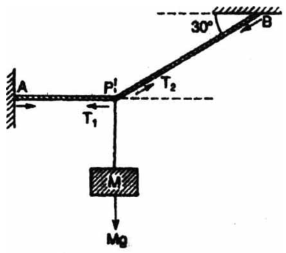
त्वरण $= \dfrac{dv}{dt} = 2c$

द्रव्यमान $m = 10 \times 10^{-3}$

बल F = द्रव्यमान क्ष त्वरण = $10 \times 10^{-3} \times 2c$

= $10 \times 10^{-3} \times c = 2 \times 10^{-2} c$ न्यूटन

उदाहरण 2.12 एक M द्रव्यमान के पिण्ड को भारहीन अवितान्य डोरी द्वारा चित्रानुसार लटकाया गया है । क्षैतिज डोरी में तनाव ज्ञात कीजिये ।



चित्र 2.16

हल: चित्रानुसार, लटकाये गये भार Mg के कारण संगामी बिन्दु पर स्थिति में,

ऊर्ध्व सन्तुलन के लिये-

$T_2 \sin 30 = Mg$ या $T_2 = \dfrac{Mg}{\sin 30} = 2Mg$

क्षैतिज सन्तुलन के लिये-

$$T_1 = T_2 \cos 30 T_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2Mg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

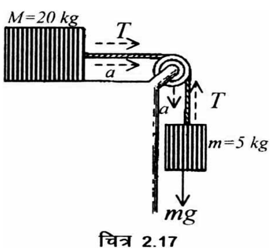
या $T_1 = Mg\sqrt{3}$

उदाहरण 2.13 एक 20 किग्रा का ब्लॉक एक घर्षण रहित मेज पर रखा हुआ है। ब्लॉक से एक भारहीन रस्सी बाँधकर मेज के सिरे पर लगी घर्षणहीन हल्की घिरनी से होकर, इसके दूसरे सिरे पर 5 किग्रा का पिण्ड लटकाया गया है । निकाय में उत्पन्न त्वरण तथा रस्सी में तनाव ज्ञात कीजिये।

(g = 10 मीटर / सेकंड)

हल: चित्रानुसार, M = 20 किग्रा के ब्लॉक की गति का समीकरण-

$$T = Ma$$



चित्र 2.17

तथा m = 5 किग्रा के पिण्ड की गति का समीकरण

$$mg - T = ma \therefore mg - Ma = ma$$

या $a = \dfrac{mg}{(M+m)}$

तथा तनाव $T = M = \left(\frac{mg}{M+m}\right)$

मान रखने पर त्वरण $a = \frac{5\times10}{(20+5)} = 2$ मीटर/ सेकेण्ड^2

तनाव $T = \frac{20\times5\times10}{20+5} = 40$ न्यूटन

उदाहरण 2.14 किसी नाभिक में उपस्थित नाभिकीय कणों के बीच अन्योन्य क्रिया के कारण उत्पन्न स्थितिज ऊर्जा निम्न युकावा विभव से प्रदर्शित है-

$$U(r) = \frac{r_0}{r}U_0 e^{-r/r}$$

जिसमें r_0 तथा U_0 नियतांक हैं तो-

(i) आकर्षण बल का व्यंजक प्राप्त कीजिये ।

(ii) $r_0 = 2r_0, r = 4r_0$ तथा $r_0 = 10r_0$ पर इस बल का $r_0 = r_0$ पर के बल से अनुपात की गणना कीजिये तथा इस गणना परिणाम से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

हल: (i) बल $f(r) = \frac{d}{dr}U(r) = -\frac{d}{dr}\left[-\frac{r_0}{r}U_0 e^{-r/r_0}\right]$

$$r_0 U_0 = \left[\left(-\frac{1}{r^2}\right)e^{-r/ro} + \frac{1}{r}(e^{-r/r0})\left(-\frac{1}{r_0}\right)\right]$$

$$= -\frac{r_0 U_0}{r}e^{-r/r_0}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}\right)$$

चूँकि बल के व्यंजक में ऋण चिन्ह (-) उपस्थित है अतः बल आकर्षण प्रकृति का है ।

(ii) $r = r_0$ पर बल $F(10r_0) = -U_{0^{e^{-4}}}\left(\frac{5}{16r_0}\right)$

$$= U_0 e^{-1}\frac{2}{r_0} = \frac{2U_0}{er_0}$$

इसी प्रकार $r = 2r_0$ पर बल,

$$F(2r_0) = \frac{r_0}{2r_0}U_o e^{-2r_0/r_0}\left[\frac{1}{2r_0}+\frac{1}{r_0}\right]$$

$$= U_o e^{-2}\left[\frac{3}{4r_0}\right]$$

$r = 4r_0$ पर बल, $F\left(4r_0\right) = -U_{0^{e^{-4}}}\left(\frac{5}{16r_0}\right)$

तथा $r = 10r_0$ पर बल,

$$F(10r_0) = -U_0 e^{-10}\left(\frac{11}{1000r_0}\right)$$

$$\frac{F(2r_0)}{F(r_0)}=\frac{U_0e^{-2}\left(\frac{3}{4r_0}\right)}{U_0e^{-1}\left(\frac{2}{r_0}\right)}=\frac{3}{8}e^{-1}\approx 0.14$$

$$\frac{F(4r_0)}{F(r_0)}=\frac{U_0e^{-4}\left(\frac{5}{16r_0}\right)}{U_0e^{-1}\left(\frac{2}{r_0}\right)}=\frac{5}{32}e^{-3}\approx 7.8\times10^{-3}$$

तथा $$\frac{F(10r_0)}{F(r_0)}=\frac{U_0e^{-10}\left(\frac{11}{1000r_0}\right)}{U_0e^{-1}\left(\frac{2}{r_0}\right)}=\frac{11}{200}e^{-9}\approx 6.7\times10^{-6}$$

उपरोक्त गणना के परिणाम से यह ज्ञात होता है, कि बल दूरी बढ़ने पर बहु त तीव्रता से हासित होता है, अत: यह अल्प परास बल (short range force) है ।

2.6 सारांश (Summary)

- किसी स्थिर वस्तु को गतिशील करने के प्रयास के रुप में खींचना या धक्का देना या उसके वेग में परिवर्तन हेतु किया गया प्रयास, बल कहलाता है ।
- प्रकृति में चार मूल बल या अन्योन्य क्रियाऐं होती हैं । यह (i) गुरुत्वीय बल (ii) विद्युत-चुम्बकीय बल (iii) नाभिकीय बल (iv) क्षीण या दुर्बल बल हैं । सभी घटनाऐं इन्हीं चार बलों के अन्तर्गत सम्पन्न होती हैं ।
- जब किसी वस्तु पर दो या दो से अधिक बल इस प्रकार कार्यरत हों कि उन सभी की क्रिया रेखा एक ही बिन्दु से होकर गुजरती हो, तो उन्हें संगामी बल कहते हैं ।
- जब दो वस्तु एक-दूसरे के सम्पर्क में हों तो वह बल जो कि उनकी आपेक्षिक गति का विरोध करता है, घर्षण बल कहलाता है ।
- वह घर्षण बल जो दो सम्पर्कित तलों के मध्य आपेक्षिक गति उत्पन्न होने से पूर्व कार्य करता है, स्थैतिक घर्षण कहलाता है ।
- स्थैतिक घर्षण बल $f_s \le \mu_s N$ होता है ।
- सीमान्त घर्षण बल $(f_s)_{\max} = \mu_s N$ होता है ।
- वह घर्षण बल जो सम्पर्कित सतहों के मध्य आपेक्षिक गति होने के पश्चात कार्य करता हैं, गतिक घर्षण कहलाता है, अर्थात्
- $f_k = \mu_k N$ जहाँ $\mu_k < \mu_s$
- जब कोई वस्तु किसी सतह पर लुढ़कती है तो पृष्ठ द्वारा इस गति में उत्पन्न विरोध को लोटनी घर्षण कहते हैं ।

- घर्षण के कारण ऊर्जा की हानि होती है, तथा मशीनों की दक्षता कम होती है। घर्षण को पॉलिश करके, बॉल बियरिंग प्रयोग में लाकर तथा मशीनों में स्नेहक डालकर कम किया जाता है।

2.7 शब्दावली (Glossary)

अन्योन्य क्रिया	Interaction
गतिक	Dynamic
गुरुत्वाकर्षण बल	Gravitational force
घर्षण	Friction
क्षीण बल	Weak force
मूल बल	Force
विद्युत चुम्बकीय बल	Fundamental forces
नाभिकीय बल	Nuclear force
लोटनी घर्षण	Rolling friction
श्यान बल	Viscous force
स्थैतिक	Static
संगामी बल	Concurrent forces
सीमान्त घर्षण	Limiting friction

2.8 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1.	M Alonslo and E. Finn	Fundamental University Physics (Vol I)	Addition-Wesley Publishing Co.
2.	R. Resnick and D. Halliday	Physics (part I)	Willey Eastern Private Ltd, New Delhi
3.	H. C. Verma	Concepts of Physics (Part-I)	Bharati Bhawan, Patna

2.9 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to self assessment questions)

1. कार्क पानी में तैर रहा है, अत: इसका मार इस पर पानी द्वारा उत्पलावक बल (कार्क द्वारा विस्थापित पानी के भार के तुल्य) से संतुलित रहता है। इस प्रकार कार्क पर नेट बल का मान शून्य होता है।
2. विद्युत-चुम्बकीय बल लगता है।
3. $F_G : F_W : F_E : F_N = 1 : 10^{25} : 10^{36} : 10^{38}$
4. जब पहिया अग्र दिशा में चलता है तो सड़क के सम्पर्कित पहिये का भाग पीछे की ओर गति करता है। अत: घर्षण बल अग्र दिशा में सड़क व पहिये के सम्पर्कित स्पर्श रेखीय दिशा के अनुदिश लगेगा।

5. गति के प्रारम्भिक कुछ पद् चापों में घोड़े के लिये गाडी को खींचना मुश्किल होता है, क्योंकि सीमान्त घर्षण के विरुद्ध कार्य करना होता है । तत् पश्चात जब गति प्रारम्भ हो जाती है तो गतिक घर्षण के विरुद्ध कार्य करना होता है, जो कि सीमान्त घर्षण से कम होता है ।
6. क्योंकि पहिये के वृत्ताकार होने पर फिसलन घर्षण का मान लोटनी घर्षण में रुपान्तरित हो जाता है ।
7. दो सम्पर्कित पृष्ठों के मध्य घर्षण गुणांक का मान पृष्ठों के पदार्थ तथा पृष्ठों की प्रकृति पर निर्भर करता है।

2.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अति लघुउत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. बल किस कहते हैं?

2. प्रकृति के मूल बल कौन-कौन से हैं ?

3. संगामी बल किन्हें कहते हैं?

4. बरसात के दिनों में हम आसानी से क्यों फिसल जाते हैं?

5. स्थैतिक घर्षण, लोटनी घर्षण व गतिक घर्षण में से कौन अधिक होता है?

6. एक स्नेहक घर्षण को किस प्रकार कम करता है?

7. एक चिकने खम्बे पर चढना क्यों मुश्किल होता है?

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

8. बल की अवधारणा को समझाइये । संगामी बलों से क्या अभिप्राय है ? संगामी बलों के संतुलन के लिये आवश्यक प्रतिबंध क्या है?

9. प्रकृति के मूल बलों की विस्तारपूर्वक व्याख्या कीजिए ।

10. स्थैतिक घर्षण, गतिक घर्षण एवं लोटनी घर्षण में अन्तर स्पष्ट कीजिए । घर्षण प्रभाव कम करने के विभिन्न उपाय क्या हैं, समझाइये?

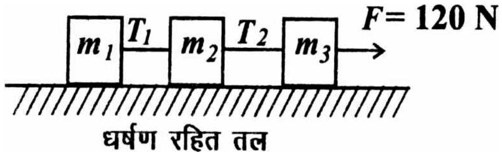
आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

11. यदि घर्षण कोण 30^0 हो तो घर्षण गुणांक का मान ज्ञात करो । (**उत्तर:** $\mu_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$)

12. एक 10 किग्रा का ब्लॉक 30^0 कोण के नत तल पर फिसल रहा हैं । ब्लॉक के त्वरण का मान ज्ञात करो । ($\mu_k = 0.5$)

(**उत्तर:** 0.656 मी./ से.^{2})

13. चित्र 2. 18 में तीन घनाकार आकृति के पिण्ड $m_1 = 20kg, m_2 = 40g$ तथा $m_3 = 60kg$ घर्षण रहित



चित्र 2.18

तल पर परस्पर अवितान्य डोरियों से जुड़े हैं, तनाव T_1 व T_2 के मान क्या होंगे?

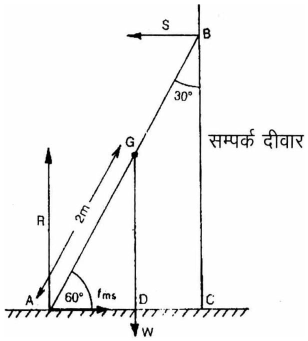
(**उत्तर:** 20N, 60N)

14. एक 2×10^4 किग्रा. के रॉकेट को प्रक्षेपित. करने के लिए 5×10^4 न्यूटन बल 20 सेकण्ड तक लगाया जाता है। 20 सेकण्ड के अन्त में रॉकेट द्वारा प्राप्त वेग का मान ज्ञात कीजिए।

(**उत्तर:** 500 मी. / से.)

15. एक 4 मीटर लम्बी व 25 किग्रा. द्रव्यमान की एक सीढ़ी का सिरा एक चिकनी दीवार पर व दूसरा सिरा खुरदरे फर्श पर टिका है। फर्श व सीढ़ी के मध्य न्यूनतम घर्षण गुणांक का मान क्या हो कि सीढ़ी बिना फिसले क्षैतिज से 60^0 कोण पर अटकी रहे? (देखिये चित्र 2.19)

(**उत्तर:** 0.29)



चित्र 2.19

इकाई -3

कार्य एवं ऊर्जा
(Work and Energy)

इकाई की रूपरेखा

3.0 उद्देश्य (Objective)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप

- कार्य की परिभाषा जान सकेंगे;
- नियत व परिवर्ती बल द्वारा किये गये कार्य की गणना कर सकेंगे;
- शक्ति की गणना कर सकेंगे;
- ऊर्जा व यांत्रिक ऊर्जा को जान सकेंगे;
- ऊर्जा के विभिन्न स्वरूप व उनका महत्व जान सकेंगे ।

3.1 प्रस्तावना (Introduction)

पिछली इकाईयों में आपने बल तथा उनके विभिन्न प्रकारों का अध्ययन किया है । इस इकाई में आप बल द्वारा किये गये कार्य तथा ऊर्जा व उसके विभिन्न स्वरूपों को जानेंगे । इसी सन्दर्भ में अनुच्छेद 3.2 में आप कार्य के बारे में पढ़ेंगे । दैनिक जीवन में समस्त गतिविधियों या श्रम क्रियाओं

को हम कार्य करके सम्पन्न करते हैं । हम उन सभी क्रियाओं को कार्य कहते हैं, जिनमें किसी वस्तु पर बल लगाने से वस्तु की स्थिति में परिवर्तन हो जाता है । यदि बल लगाने पर वस्तु की स्थिति में परिवर्तन न हो तो कार्य किया हुआ नहीं माना जाता । किसी वस्तु पर जितना अधिक बल लगाया जाता है तथा जितना अधिक वस्तु की स्थिति में विस्थापन होता है, कार्य भी उतना ही अधिक होता है ।

किसी वस्तु या उस पर किये गये कार्य का मान, इसके सम्पन्न होने में लगे समय पर निर्भर-नहीं करता । शक्ति वह भौतिक राशि है जिसका मान कार्य के सम्पन्न होने में लगे समय पर भी निर्भर करता है । शक्ति को कार्य करने की दर के रूप में परिभाषित करते हैं ।

किसी वस्तु की कार्य करने की क्षमता को उस वस्तु की ऊर्जा कहते हैं । ऊर्जा हमारी दैनिक जीवन की समस्त गतिविधियों के लिए आवश्यक है । ऊर्जा के अनेक रूप हैं, जैसे यांत्रिक ऊर्जा, ऊष्मा ऊर्जा, प्रकाश ऊर्जा, ध्वनि ऊर्जा, विद्युत ऊर्जा, चुम्बकीय ऊर्जा आदि । अनुच्छेद 3.3 में आप ऊर्जा तथा 3.4 में आप ऊर्जा के अनेक स्वरूपों के बारे में पढ़ेंगे ।

3.2 कार्य (Work)

बल द्वारा किसी पिण्ड पर कार्य उस स्थिति में किया जाता है, जबकि पिण्ड बल के लम्बवत् दिशा के अतिरिक्त किसी भी अन्य दिशा में विस्थापित होता है । उदाहरण स्वरूप यदि सिर पर भार लिए हुए एक कुली प्लेटफार्म पर खड़े होकर रेलगाड़ी के आने की प्रतीक्षा करता है तो उसके द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है ।

3.2.1 नियत बल द्वारा किया गया कार्य (Work done by a constant force)

जब एक नियत बल $\vec{F}$ के द्वारा पिण्ड में विस्थापन $\vec{s}$ उत्पन्न होता है तो किये गये कार्य का मान बल व विस्थापन के अदिश गुणनफल के बराबर होता है अर्थात

$$w = \vec{F}.\vec{s} \qquad \dots (3.1)$$

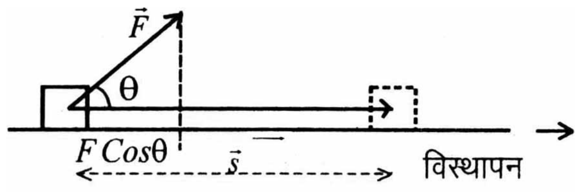
चित्र 3.1 के अनुसार यदि $\vec{F}$ व $\vec{s}$ के मध्य कोण θ हो तो बल का विस्थापन की दिशा में घटक $FC\text{os}\,\theta$ होगा, अत: समी (3.1) से

$W = FsCos\theta = s(FCos\theta) =$ विस्थापन x विस्थापन की दिशा में बल का घटक

या W = बल $\times$ बल की दिशा में विस्थापन का घटक ....(3.2)

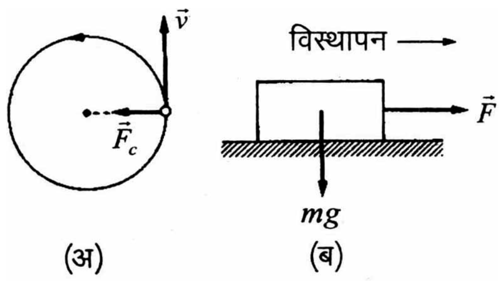
जब पिण्ड में विस्थापन बल की दिशा में उत्पन्न हो तब $\theta = 0^0$ तथा समी. (3.2) से

$$W = Fs \qquad \dots (3.3)$$



चित्र 3.1

इस प्रकार जब बल व विस्थापन समान दिशा में हों तो नियत बल द्वारा किया गया कार्य, बल व विस्थापन के गुणनफल के बराबर होता है । उदाहरण स्वरूप जब कोई पिण्ड पृथ्वी की सतह के समीप गति करता है तो गुरूत्वीय बल का मान व दिशा दोनों नियत रहती हैं । अत: गुरूत्वीय बल



चित्र 3.2

के द्वारा या इसके विरूद्ध किया गया कार्य, नियत बल द्वारा किये गये कार्य का उदाहरण है । इसी प्रकार जब बल, विस्थापन के लम्बवत् होता है तो बल द्वारा किये गये कार्य का मान शून्य होता है । विस्थापन - उदाहरण के लिए वृत्ताकार गति में अभिकेन्द्रीय बल (centripetal force) द्वारा किया गया कार्य (चित्र 3.2 अ); किसी ग्रह के परित: वृत्तीय कक्षा में चक्कर लगाते हु ए उपग्रह की गति तथा गुरूत्वीय बल द्वारा क्षैतिज तल में गतिशील पिण्ड पर किया गया कार्य, शून्य होता है (देखिये चित्र 3.2 ब) ।

कार्य एक अदिश राशि है ।

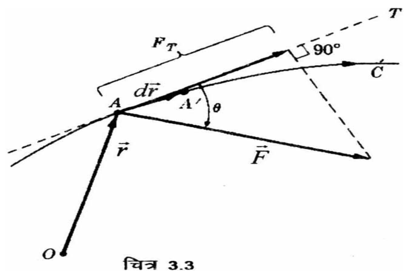
इसका $S.I$ मात्रक जूल तथा $C.G.S.$ पद्धति में मात्रक अर्ग होता है । इनमें निम्न सम्बन्ध होता है-

1 जूल $=10^7$ अर्ग

3.2.2 परिवर्ती -बल द्वारा किया गया कार्य (Work done by a variable force)

अनुच्छेद 3.2.1 में आप नियत बल द्वारा किसी पिण्ड पर कार्य ज्ञात करना जान चुके हैं । लेकिन व्यवहार में बल सामान्यत: परिवर्ती प्रकृति का होता है ।

वह बल जो कि समय या स्थिति के सापेक्ष परिमाण या दिशा या दोनों में परिवर्तित होता है, परिवर्ती बल कहलाता है । चित्र 3.3 में हम एक कण की बल $\vec{F}$ के तट प्रभाव में वक्र c पर गति पर विचार करते हैं । अल्पांश समय dt में कण को A से A' तक $A\vec{A} = d\vec{r}$ दूरी से विस्थापित करने में बल द्वारा किया गया कार्य



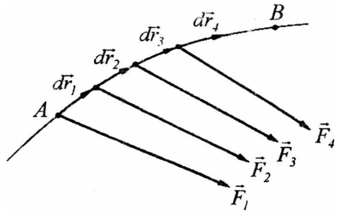
चित्र 3.3

$$dw = \vec{F}.\ \vec{dr} \qquad ..... (3.4)$$

या,
$$dw = F_T ds \qquad ..... (3.5)$$

जहाँ $F_T (= F Cos\theta)$ बल का पथ पर स्पर्श रेखा के अनुदिश घटक है । तथा $ds = |\vec{dr}|$, विस्थापन का परिमाण है ।

समी. (3.4) अनन्त सूक्ष्म विस्थापन के लिए कार्य का समीकरण है । जब कण A से B तक (देखिये चित्र 3.4) गतिशील हो तो कण पर किये गये कुल कार्य का मान, क्रमोत्तर अनन्त सूक्ष्म विस्थापनों में किये गये कार्यो के योग के तुल्य होता है ।



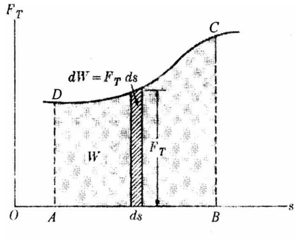
चित्र 3.4

अत: $\quad w = \vec{F_1}.\ \vec{dr_1} + \vec{F_2}.\ \vec{dr_2} + \vec{F_3}.\ \vec{dr_3} + ...$

या
$$w = \int_A^B \vec{F}.\ \vec{dr} \qquad .... (3.6)$$

या $$w = \int_A^B F_T ds$$

चित्र 3.5 में F_T को दूरी के फलन के रूप में आलेखित किया गया है । अल्पांश विस्थापन ds के संगत किया गया कार्य $dw = F_T ds$ संकरी आयताकार पट्टी के क्षेत्रफल के बराबर है । इस प्रकार जब कण चित्र 3.4 में दर्शित बिन्दु A से B तक विस्थापित होता है तो किये गये कुल कार्य के मान को वक्र तथा s अक्ष के मध्य के सम्पूर्ण भाग को इसी



चित्र 3.5

प्रकार अनेक संकरी आयताकार पट्टियों में विभाजित कर उनके क्षेत्रफल के योग द्वारा ज्ञात कर सकते हैं । अत: किये गये कुल कार्य का मान चित्र 3.5 में छायांकित- भाग के क्षेत्रफल के द्वारा दिया जाता है ।

अत: w = भाग $ABCDA$ का क्षेत्रफल

विशिष्ट स्थिति में जब बल का परिमाण व दिशा नियत होती है तथा पिण्ड बल की दिशा में सरल रेखा में गति करता है तब $F_T = F$, अत: समी. (3.6) द्वारा

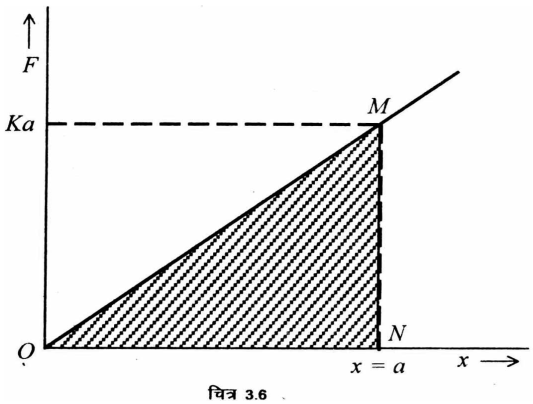
$$w = \int_A^B F ds = F\int_A^B ds = F\Delta s \qquad \text{... (3.7)}$$

या कार्य = बल x दूरी

स्प्रिंग के विस्तारण या सम्पीड़न में किया गया कार्य-

यदि एक प्रत्यास्थ स्प्रिंग का एक सिरा दृढ़ आधार से जुड़ा हो तथा दूसरे सिरे पर एक m द्रव्यमान का कण जुड़ा हो । जब कण को माध्य स्थिति ($x = 0$) से किसी ओर विस्थापित करते हैं तो स्प्रिंग में विस्तार या संकुचन उत्पन्न होता है तथा कण को मुक्त करने पर स्प्रिंग की प्रत्यास्थता के कारण प्रत्यानयन बल उत्पन्न होता है । प्रत्यानयन बल, विस्थापन (x) के समानुपाती होता है तथा सदैव माध्य स्थिति की ओर लगता है, अर्थात्

$$F \alpha x$$
या $$F = -kx \qquad \text{... (3.8)}$$



चित्र 3.6

जहां k स्प्रिंग का बल नियतांक हैं तथा ऋण चिन्ह यह व्यक्त करता है कि प्रत्यानयन बल (F) की सदैव विस्थापन के विपरीत होती है । स्प्रिंग को इस प्रत्यानयन बल के विरूद्ध माध्य स्थिति ($x = 0$) से $x = \pm a$ तक विस्थापित करने में कार्य करना पड़ता है, जिसका मान बल-विस्थापन आलेख चित्र 3.6 में वक्र तथा विस्थापन अक्ष के मध्य घेरे गये भाग के क्षेत्रफल के तुल्य होता है । अत: ΔOMN किया गया कार्य का क्षेत्रफल

या, $w = 1/2(ON)(MN)$

$=1/2a.(ka)$

या $w = 1/2ka^2$ ..... (3.9)

यह किया गया कार्य स्प्रिंग में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित रहता है । कार्य के इस मान को समी. (3.6) द्वारा भी निम्न प्रकार से प्राप्त कर सकते हैं ।

$$w = \int_0^a F dx = \int_0^a (kx) dx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a$$

या $$w = \frac{1}{2}ka^2$$

3.2.3 शक्ति (Power)

किसी पिण्ड की शक्ति को उसके द्वारा समय के सापेक्ष कार्य करने की दर से परिभाषित करते हैं । अर्थात्

$$\text{शक्ति} = \text{कार्य करने की दर} \frac{\text{किया गया कार्य}}{\text{कार्य में लगा समय}}$$

शक्ति = कार्य करने की दर = किया गया कार्य / कार्य में लगा समय

जब पिण्ड द्वारा कार्य करने में लिया गया समय कम होता है तो उसकी शक्ति अधिक होती है ।

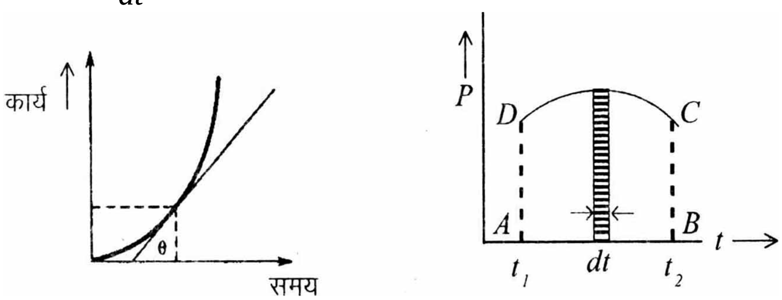
तात्क्षणिक शक्ति $P = \dfrac{dw}{dt}$ ...(3.10)

या $$P = \frac{\overrightarrow{F}.\overrightarrow{dr}}{dr}$$

या $$P = \overrightarrow{F}.\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \overrightarrow{F}.\vec{v}$$ ...(3.11)

इस प्रकार शक्ति को पिण्ड पर आरोपित बल तथा उसके तात्क्षणिक वेग के अदिश गुणनफल के रूप में व्यक्त करते हैं । चित्र 3.7 (अ) में किसी समय पर कार्य-समय वक्र का ढाल तात्क्षणिक शक्ति को प्रदान करता है ।

$$P = \frac{dw}{dt} = \tan\theta$$



चित्र 3.7

इसी प्रकार चित्र 3.7 (ब) से शक्ति-समय आरेख पर घेरे गये भाग का क्षेत्रफल समयान्तराल t_1 व t_2 के मध्य किये गये कार्य को प्रदान करता है । अर्थात्

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p\,dt \quad .... (3.12)$$

= p - t वक्र पर घेरे गये भाग (ABCDA) का क्षेत्रफल

शक्ति का S.I. मात्रक वाट है । (1 वाट = 1 जूल / सेकण्ड)

अभियांत्रिकी में शक्ति को 'अश्व शक्ति' (horse power) में मापते हैं ।

1hp = 746 Watt

उदाहरण 3.1 एक पिण्ड नियत बल $\vec{F} = \left(-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{K}\right)$ न्यूटन के प्रभाव में z- अक्ष के अनुदिश गतिशील है । पिण्ड को z- अक्ष के अनुदिश 3 मीटर विस्थापित करने में किये गये कार्य का मान ज्ञात कीजिये ।

हल : $\vec{F} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{K}$ तथा $\vec{s} = 3\hat{K}$

अत: $w = \vec{F}.\vec{s}$

$= \left(-\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{K}\right).(3\hat{K})$

$= 9\hat{k}.\hat{k} = 9$ जूल

उदाहरण 3.2 एक माली घास काटने के लिए रोलर को 50 न्यूटन बल लगाकर क्षैतिज से 60^0कोण पर इसे 100 मीटर दूरी तक चलाता है । यदि उसे 25 जूल कार्य के लिए 20 पैसे मजदूरी मिलती है तो उसे कुल कितना धन प्राप्त होगा?

हल: $w = \vec{F}.\vec{s} = FsCos\theta$

$= 50 \times 100 \times Cos60$

$= 5000 \times \frac{1}{2} = 2500$ जूल

25 जूल कार्य के लिए मजदूरी = 20 पैसे = 0.2 रूपये

अत: 2500 जूल कार्य की मजदूरी $= \frac{0.2 \times 2500}{25} = 20$ रूपये

उदाहरण 3.3 एक ऐलीवेटर द्वारा 500 किग्रा. भार को नियत वेग 0.4 मी./ से. से ऊपर उठाया जाता है । इस कार्य के लिए प्रयुक्त मोटर न्यूनतम कितनी अश्व शक्ति की होनी चाहिए?

हल : m = 500 किग्रा.; v = 0.4 मी. / से.

अत: शक्ति $p = Fv = (mg)v$

= 500 x 9.8 x 0.4

= 1960 वाट

यदि घर्षण के विरूद्ध ऊर्जा की कोई हानि न हो तो प्रयुक्त मोटर की न्यूनतम शक्ति

$p = \frac{1960}{746}$ अश्व शक्ति = 2.62 अश्व शक्ति

3.3 ऊर्जा (Energy)

प्रत्येक वस्तु चाहे वह सजीव हो या निर्जीव हो व कार्य करने में सक्षम हो, तो उसमें ऊर्जा विद्यमान होती है ।

"किसी वस्तु की ऊर्जा, उसके द्वारा कार्य करने की क्षमता द्वारा परिभाषित होती है" तथा इसका मापन वस्तु द्वारा किये गये कुल कार्य की मात्रा द्वारा करते हैं ।

कार्य व ऊर्जा दोनों के मात्रक समान होते हैं, क्योंकि दोनों समान प्रकार की राशियाँ हैं ।

ऊर्जा के विभिन्न प्रकार होते हैं । जैसे यांत्रिक ऊर्जा, ऊष्मीय ऊर्जा, विकिरण ऊर्जा, रासायनिक ऊर्जा, नाभिकीय ऊर्जा आदि ।

यांत्रिकी के अध्ययन में यांत्रिक ऊर्जा का विशेष महत्व होता है, यह दो प्रकार की होती है-गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा।

किसी निकाय को गतिज ऊर्जा (K) एवं स्थितिज ऊर्जा (U) का योग निकाय की यांत्रिक ऊर्जा (E) कहलाता है ।

अर्थात् $E = K + U$

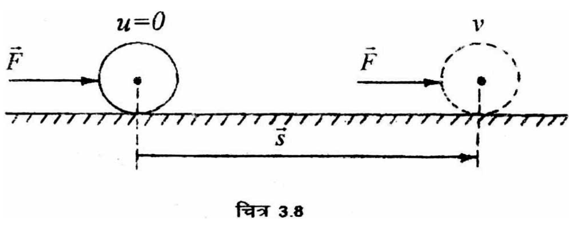
किसी वस्तु की ऊर्जा हमें उसके द्वारा किये जा सकने वाले कुल कार्य के बारे में बताती है तथा इसके लिए हमें समय का सन्दर्भ देने की आवश्यकता नहीं होती, जिसमें यह कार्य सम्पन्न होता है । जबकि दूसरी ओर शक्ति, वस्तु द्वारा किये गये कार्य की दर होती है ।

3.3.1 गतिज ऊर्जा (Kinetic energy)

किसी गतिशील पिण्ड में विद्यमान ऊर्जा को उसकी गतिज ऊर्जा कहते हैं तथा यह उस कार्य की मात्रा द्वारा मापी जाती है जो कि वस्तु किसी बाहय बल के विरुद्ध विराम स्थिति में आने तक करती है । निम्न उदाहरण गतिज ऊर्जा की व्याख्या करते हैं-

1. बन्दूक द्वारा छोड़ी गई गोली, जो कि लक्ष्य में टकराकर उसे भेदन की क्षमता रखती है ।
2. गतिशील हथौड़ा, जो कि लकडी या दीवार में किसी कील को गति प्रदान करता है ।
3. एक गिरती हुई वस्तु जो कि किसी पृष्ठ पर गिरकर उसे तोड़ सकती है ।
4. फर्श पर लुढ़कती हुई बॉल, विरामावस्था में स्थित बॉल को टक्कर कर गतिशील कर सकती है ।

हम एक m द्रव्यमान के पिण्ड पर विचार करते हैं, जो कि पूर्णत: घर्षणरहित तल पर विरामावस्था (प्रारम्भिक वेग $u = 0$) से गति प्रारम्भ करती है ।



चित्र 3.8

अब माना पिण्ड पर एक नियत बल $\vec{F}$ कार्य करता है, जो कि इसमें $\vec{a}$ त्वरण उत्पन्न करता है (देखिये चित्र 3.8), यदि विस्थापन $\vec{s}$ पश्चात् पिण्ड का वेग v हो तो गति के तृतीय समीकरण से

$$v^2 = u^2 + 2as$$
$$v^2 = 0 + 2as$$

या $$a = \frac{v^2}{2s}$$

बल द्वारा पिण्ड $\vec{s}$ से विस्थापित करने में किया गया कार्य

चूँकि $\vec{F}$ व $\vec{s}$ समान दिशा में हैं, अत:

$$w = FsCos^0 = Fs \qquad (\therefore F = ma)$$

या $$w = mas$$

$a = \frac{v^2}{2s}$ का मान रखने पर

$$a = \frac{v^2}{2s}$$

यह किया गया कार्य व्यर्थ नहीं जाता तथा वस्तु में गतिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है । अत:

गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} mv^2$ ...(3.13)

3.3.2 स्थितिज ऊर्जा (Potential energy)

किसी बल क्षेत्र में स्थित पिण्ड की उसकी (position) या अभिविन्यास (orientation) के कारण निहित ऊर्जा को, स्थितिज ऊर्जा कहते हैं ।

वस्तुत: यह बल क्षेत्र प्रदायक तथा पिण्ड से मिलकर बने निकाय (system) की ऊर्जा होती है । स्थितिज ऊर्जा का मापन पिण्ड द्वारा किये गये कार्य की उस मात्रा द्वारा करते हैं, जो कि पिण्ड अपनी वर्तमान या अभिविन्यस्त स्थिति से मानक स्थिति (शून्य स्थितिज ऊर्जा की अवस्था) में आने तक करता है ।

स्थितिज ऊर्जा की अवधारणा केवल आन्तरिक संरक्षी बलों के लिए ही परिभाषित होती है, असंरक्षी बलों के लिए नहीं।

आप जानते हैं कि स्थितिज ऊर्जा की ऋणात्मक प्रवणता का मान, संरक्षी बल के बराबर होता है, अर्थात्

$$\vec{F} = -gra\vec{d}U = -\vec{\nabla}U \qquad \text{...... (3.14)}$$

जहाँ $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial y}$ एक सदिश अवकल संकारक है ।

संरक्षी बल द्वारा अल्पांश विस्थापन dr होने पर

$F = -\frac{dU}{dr}$ से ..... (3.15)

$$dU = -\vec{F}.\vec{dr} = -dw \qquad \text{..... (3.16)}$$

इस प्रकार पिण्ड को इसकी प्रारम्भिक अवस्था (i) से अंतिम अवस्था (f) तक विस्थापित करने में आन्तरिक संरक्षी बल द्वारा किये गये कार्य का ऋणात्मक मान, इसकी स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन के तुल्य होता है । अर्थात्

$$\int_i^f dU = -\int_i^f dw$$

$$U_f - U_i = -\int_i^f \vec{F}.\vec{dr} \qquad .. (3.17)$$

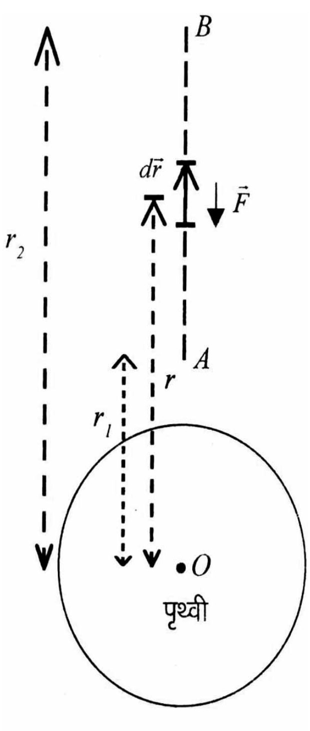
स्थितिज ऊर्जा एक सापेक्ष राशि होती है तथा यह पिण्ड की स्थिति का अदिश फलन होती है ।

बल क्षेत्र के आकर्षण प्रकृति का होने पर स्थितिज ऊर्जा ऋणात्मक तथा बल क्षेत्र के प्रतिकर्षण प्रकृति का होने पर स्थितिज ऊर्जा धनात्मक होती है ।

बल क्षेत्र की प्रकृति के आधार पर स्थितिज ऊर्जा के अनेक प्रकार हो सकते हैं, जैसे गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा, प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा, विद्युत स्थितिज ऊर्जा, रासायनिक स्थितिज ऊर्जा आदि ।

गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा (Gravitational potential energy)

हम "पृथ्वी + पिण्ड" से निर्मित एक निकाय पर विचार करते हैं । माना m द्रव्यमान का पिण्ड पृथ्वी के पृष्ठ के समीप स्थित है तथा इसे h ऊँचाई से ऊपर उठाया जाता है । गुरूत्वीय बल एक संरक्षी बल है अत: हम स्थितिज ऊर्जा को परिभाषित कर सकते हैं । पृथ्वी के पिण्ड की तुलना में अत्यधिक भारी होने के कारण हम इसके त्वरण को नगण्य मान सकते हैं और हम पृथ्वी से सम्बद्ध निर्देश तंत्र को जड़त्वीय मान सकते हैं । इस निर्देश तन्त्र में पिण्ड के गुरूत्वाकर्षण बल द्वारा पृथ्वी पर किया गया कार्य शून्य है । यदि पिण्ड h ऊँचाई रो ऊपर उठता है तो बल mg द्वारा कार्य (-mgh) किया जाता है, अत: स्थितिज ऊर्जा mgh से बढ़ जाती है । इस प्रकार जब पिण्ड को पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई से ऊपर उठाते हैं (h<< पृथ्वी की त्रिज्या), हो तो "पृथ्वी + पिण्ड" निकाय की स्थितिज ऊर्जा में mgh वृद्धि होती है । इसी प्रकार जब पिण्ड h ऊँचाई से नीचे गिरता है, तो निकाय की स्थितिज ऊर्जा में mgh कमी आती है ।



चित्र 3.9

समी. (3.17) द्वारा भी गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा की गणना कर सकते हैं । चित्र 3.9 में माना m द्रव्यमान के पिण्ड को पृथ्वी के गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र में बिन्दु A से B तक विस्थापित किया जाता है तो पृथ्वी के केन्द्र से किसी दूरी r पर पिण्ड पर गुरूत्वाकर्षण बल

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

होगा जहाँ M पृथ्वी का द्रव्यमान है, अत: समी (3.17) से निकाय की स्थितिज ऊर्जा मे परिवर्तन

$$U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2}\left(-G\frac{Mm}{r^2}\right)\hat{r}.d\vec{r}$$

या $$U_B - U_A = GMm\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr = GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}$$

या $$U_B - U_A = GMm\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right] \qquad ...(3.18)$$

यदि बिन्दु A पृथ्वी की सतह पर हो तो $r_1 = R$ पृथ्वी की त्रिज्या तथा $r_2 = R + H$ होने

$$U_B - U_A = GMm\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right]$$

या $$U_B - U_A = GMm\left[\frac{R+h-R}{R(R+h)}\right]$$

$GM = gR^2$ रखने पर

$$U_B - U_A = \frac{gR^2mh}{R(R+h)} = \frac{mgh}{1+\frac{h}{R}}$$

पृथ्वी की सतह को निर्देश बिन्दु लेने पर U_A = 0, अत: सतह से h ऊँचाई पर स्थितिज ऊर्जा

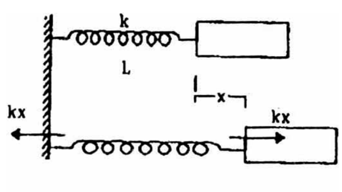
$$U_B = \frac{mgh}{1+\frac{h}{R}} = U \qquad ..... (3.19)$$

यदि $h << R$ हो तो $\frac{h}{R} << 1,$ अत:

$$U = mgh$$

सम्पीडित या विस्तारित स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा (Potential energy to a compressed)

चित्र 3.10 में एक L लम्बाई की द्रव्यमान हीन स्प्रिंग पर विचार करते हैं, जिसका एक सिरा दृढ़ दीवार से तथा दूसरा सिरा एक ब्लॉक से जुड़ा है । इसे एक क्षैतिज तल पर खींचकर x दूरी से विस्तारित करते हैं । ब्लॉक पर $-kx$ बल माध्य स्थिति की ओर लगता है । इस प्रकार बल द्वारा स्प्रिंग पर धनात्मक कार्य किया जाता है । मूल लम्बाई की स्थिति में स्थितिज ऊर्जा शून्य लेने पर विस्तारित स्थिति में स्थितिज ऊर्जा



चित्र 3.10

$$U = \int_0^x Fdx = -\int_0^x (-kk)\,dx$$

या $$U = k\int_0^x xdx = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x$$

या $U = \frac{1}{2}kx^2$ ..... (3.20)

3.3.3 यांत्रिक ऊर्जा (Mechanical energy)

किसी निकाय की स्थितिज ऊर्जा (U)व गतिज ऊर्जा (K) का योग निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा (E) कहलाती है ।

अर्थात् $E = K + U$ ...(3.21)

जब निकाय पर केवल संरक्षी आन्तरिक बल कार्यरत हों तो स्थितिज ऊर्जा इन बलों के संगत परिभाषित होती है । तथा जब कोई बाहय बल नहीं लग रहा हो या इसके द्वारा किया गया कार्य शून्य हो तो

$$U_f = U_i = -w(K_f - K_i)$$

या $U_f + K_f = U_i + K_i$ ..(3.22)

जहाँ i व f निकाय की प्रारम्भिक व अंतिम अवस्था को दर्शाते हैं । समी. (3.22) के अनुसार जब निकाय पर लग रहे आन्तरिक बल संरक्षी हों तथा बाहय बलों द्वारा कोई कार्य नहीं किया जा रहा हो तो निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा नियत रहती है । इसे यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण का नियम कहते हैं । यदि निकाय के भागों के मध्य असंरक्षी बल (जैसे घर्षण बल) लग रहा हो तो कुल यांत्रिक ऊर्जा K+U नियत नहीं रहती है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. क्या यह सम्भव है कि किसी पिण्ड पर बल लग रहा हो, जिसके कारण पिण्ड में त्वरित गाते हो परन्तु फिर भी बल द्वारा कोई कार्य न किया जा रहा हो?

   ....

   ....

2. घड़ी में चाबी भरने पर स्प्रिंग में कौन-सी ऊर्जा संचित होती है? घड़ी के चलते रहने पर यह किस ऊर्जा में रूपान्तरित होती है?

   ....

   ....

3. यदि दो प्रोटॉन एक-दूसरे के समीप लाये जायें तो इस निकाय की स्थितिज ऊर्जा घटेगी या बढ़ेगी?

   ....

   ....

4. दो स्प्रिंग A व B समरूप हैं; लेकिन स्प्रिंग A,B की तुलना में कठोर (stiff) $K_A > K_B$ है । किस स्प्रिंग पर अधिक कार्य करना होगा यदि, करना (i) उन्हें समान दूरी तक खींचा जाये, (ii) उन्हें एक ही बल से खींचा जाये?

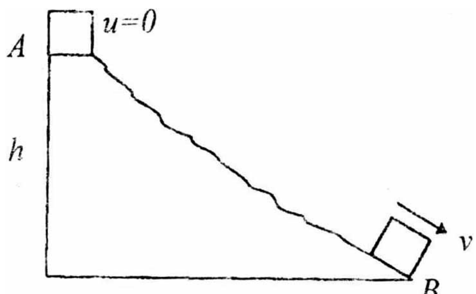
   ....

   ....

5.	एक हल्के एवं भारी पिण्ड की गतिज ऊर्जाऐं समान हैं ।किस पिण्ड का संवेग अधिक होगा? ....
6.	क्या किसी पिण्ड में बिना संवेग के हुए, ऊर्जा हो सकती है? ....
7.	जूल, कैलोरी, किलोवॉट, किलोवॉट-घण्टा इलेक्ट्रॉन-वोल्ट में से कौनसा मात्रक ऊर्जा का नहीं है? ....

उदाहरण 3.4 m द्रव्यमान का एक ब्लॉक चित्रानुसार एक घर्षणहीन तल पर फिसलता है । यदि इसे बिन्दु A से विरामावास्था से छोड़ा जाता है तो B पर पहुँचने पर इसका वेग ज्ञात करो ।

हल: यहाँ ब्लॉक +पृथ्वी मिलकर निकाय बनाते हैं । केवल ब्लॉक गति करता है अत: इस पर किया गया कार्य केवल गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा में योगदान करता है तथा ब्लॉक पर पृष्ठ द्वारा लगने वाला अभिलम्ब प्रतिक्रिया, वेग के लम्बवत् होने के कारण कोई कार्य नहीं करता । चूँकि निकाय पर कोई बाहय बल कार्य नही कर रहा है, अत:



चित्र 3.11

गतिज ऊर्जा में वृद्धि = स्थितिज ऊर्जा में कमी

या $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ या $v = \sqrt{2gh}$

उदाहरण 3.5 एक पिण्ड का द्रव्यमान 2 किलोग्राम है उसे नियत बल लगाकर क्षैतिज सें 30^0 कोण पर झुके तल पर ऊपर की ओर खींचा जाता है । यदि द्रव्यमान नियत वेग 6 मीटर / से. से ऊपर की ओर चलता है तो घर्षण बल के प्रभाव को नगण्य मानते हुए गणना कीजिए -

(i) बल द्वारा एक मिनिट में किया गया कार्य (ii) उत्पन्न शक्ति का मान

हल : (i) पिण्ड पर लगने वाला परिणामी बल

$F - mg\sin\alpha = ma$

चूँकि पिण्ड नियत वेग से ऊपर गतिमान है

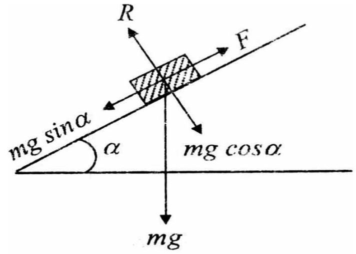
इसलिए a = 0होगा

अत: $F - mg\sin\alpha = 0$

या, $F - mg\sin\alpha$

या $F = 2\times 9.8\times \sin 30^{0.}$

= 9.6 न्यूटन



चित्र 3.12

1 मिनट में पिण्ड द्वारा तय की दूरी d= vt = 6 x 60

= 360 मीटर

चूँकि बल द्वारा एक मिनट में किया गया कार्य

W = (F) (d)

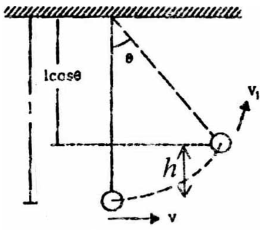
= (9.8) (360)

3.528 x 10^3 जूल

(ii) औसत शक्ति = Fv = (9.8) (6)

= 58.8 वॉट

उदाहरण 3.6 एक सरल लोलक का गोलक जब माध्य स्थिति से गुजरता है तो इसका वेग 3 मी. / से. होता है । जब गोलक ऊर्ध्वाधर से 60^0 का कोण बनाता है तो इसकी चाल ज्ञात करो । लोलक की लम्बाई 0.5 मी. है ।(g= 10 मी./से^{2}.)



चित्र 3.13

हल: यहाँ गोलक + पृथ्वी मिलकर निकाय की रचना करते हैं । डोरी में तनाव, बाहय बल है, लेकिन यह तेग के लम्बवत् होने के कारण कोई कार्य नहीं करता । अत: केवल गुरूत्वाकर्षण संरक्षी बल कार्य करता है, जिसके प्रभाव में यांत्रिक ऊर्जा नियत रहती है ।θ कोणीय विस्थापन की स्थिति में गोलक की माध्य स्थिति से ऊँचाई

$$h = l - lCos\theta = l(l - Cos\theta)$$

यदिθ कोणीय विस्थापन के समय गोलक की चाल v_1 हो तो

गतिज ऊर्जा में कमी = स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि

या $$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv^2{}_1 = mgl(l - Cos\theta)$$

या $$v_1 = \sqrt{v^2 - 2gl(1 - Cos\theta)}$$

$$= \sqrt{9 - 2\times10\times.5\left(1 - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{9-5}$$

= 2मी./से.

उदाहरण 3.7 एक 4 किलोग्राम द्रव्यमान का पिण्ड घर्षण हीन क्षैतिज तल पर 2 मीटर / से. के वेग से गतिमान है । यदि पिण्ड रास्ते में रखी स्प्रिंग को संकुचित करके रूक जाता है तो स्प्रिंग कितनी संकुचित होगी? यदि स्प्रिंग का बल नियतांक 16 न्यूटन /मी. है ।

हल : पिण्ड की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times 4\times(2)^2$

= 8 जूल

माना पिण्ड के स्प्रिंग से टकराने पर स्प्रिंग x मीटर संकुचित होती है तथा पिण्ड रूक जाता है । इस स्थिति में पिण्ड अपनी सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा खो देता है तथा यह उसकी गतिज ऊर्जा स्प्रिंग में स्थितिज ऊर्जा के रूप में एकत्रित हो जाती है ।

अत: स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा $=\frac{1}{2}Kx^2$

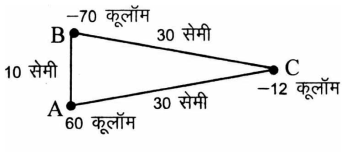
लेकिन $=\frac{1}{2}Kx^2=\frac{1}{2}mv^2=$ 8 जूल

$$\therefore x^2=\frac{8\times 2}{k}=\frac{16}{16}=1$$

$\therefore x=1.0$ मीटर

उदाहरण 3.8 तीन विद्युत आवेश A,B तथा C क्रमश: 60 -70 तथा -12 कूलाम के इस प्रकार रखे गये हैं कि दूरियाँ AB,BC, तथा CA क्रमश: 10,30 तथा 30 सेमी हैं । इस निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा कितनी होगी?

हल : निकाय की कुल वैद्युत स्थितिज ऊर्जा



चित्र 3.14

$$U=U_{AB}+U_{BC}+U_{AC}$$

$$=k\frac{60(-70)}{10\times 10^{-2}}+k\frac{(-70)\times(-12)}{30\times 10^{-2}}+k\frac{(-12)\times 60}{30\times 10^{-2}}$$

$$=k\left[\frac{-4200}{10\times 10^{-2}}+\frac{840}{30\times 10^{-2}}-\frac{720}{30\times 10^{-2}}\right]$$

$$=\frac{k}{10^{-2}}[-420+28-24]$$

$$=\frac{9\times 10^{9}}{10^{-2}}[-416]$$

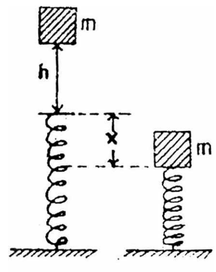
$$=9\times 10^{11}\times(-416)$$

$=-3744\times 10^{11}$ जूल

अत: निकाय की विद्युत स्थितिज ऊर्जा का मान 3744×10^{11} जूल होगी तथा ऋणात्मक ऊर्जा का अभिप्राय है कि यह निकाय में संचित रहती है ।

उदाहरण 3.9 एक m किलोग्राम द्रव्यमान का पिण्ड h मीटर की ऊँचाई से एक स्प्रिंग पर गिरता है, जिसका बल नियतांक k न्यूटन / मी. है । स्प्रिंग कितनी अधिकतम दूरी तक दबेगी? गणना कीजिये । घर्षण प्रभाव उपेक्षणीय है ।

हल: पिण्ड की गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा में कमी = स्प्रिंग की प्रत्यास्थ ऊर्जा में वृद्धि माना स्प्रिंग x दूरी तक संकुचित होती है तो



चित्र 3.15

$$mg(h+x)=\frac{1}{2}kx^2$$

या $$\frac{1}{2}kx^2=mg(h+x)$$

या $$x^2-\frac{2mg}{k}x-\frac{2mgh}{k}=0$$

$$\therefore x = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$$

इस प्रकार स्प्रिंग x मीटर दूरी से दबेगी ।

उदाहरण 3.10 एक एल्फा कण (α) 2.0 x 10^6 मी. / से. के वेग से स्वर्ण नाभिक, जिसका परमाणु क्रमांक 79 है, की ओर सीधी रेखा में गतिमान है । α - कण के नाभिक के पास पहुँचने की निकटतम दी की गणना करो ।

हल : α कण पर आवेश $= 2e = 2\times1.6\times10^{-19}$

$= 3.2\times10^{-19}$ कूलॉम

α कण का द्रव्यमान $4m_p = 4\times1.67\times10^{-27}$ किग्रा

$= 6.68\times10^{-27}$

स्वर्ण नाभिक पर आवेश $= Ze = 79e = 79\times1.6\times10^{-19}$ कूलॉम

एल्फा कण की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2$

माना निकटतम पहुँच की दूरी d है, तो निकाय की स्थितिज ऊर्जा

$$= k\frac{q_1q_2}{r} = k\frac{(Ze)(Ze)}{d}$$

एल्फा कण, स्वर्ण के नाभिक के पास निकटतम दूरी वहाँ तक जायेगा जहाँ उसकी कुल प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा, पूर्णतया स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जायेगी अर्थात्

$$\frac{1}{2}mv^2 = k\frac{2Ze^2}{d}$$

$$\therefore d = k\frac{4Ze^2}{mv^2}$$

$$= \frac{9\times10^9\times4\times79\times1.6\times1.6\times10^{-38}}{6.68\times10^{-27}\times2.0\times2.0\times10^{12}}$$

$$= \frac{9\times4\times79\times2.56\times10^{-29}}{6.68\times4\times10^{-15}}$$

$= 2.72\times10^{-12}$ मीटर

3.4 ऊर्जा के स्वरूप (From of energy)

ऊर्जा अनेक रूप होते हैं-जैसे यांत्रिक ऊर्जा, ऊष्मा ऊर्जा, नाभिकीय ऊर्जा, रासायनिक ऊर्जा, प्रकाश ऊर्जा, ध्वनि ऊर्जा, विद्युत ऊर्जा आदि । प्रकृति में होने वाली विभिन्न घटनाओं में ऊर्जा का एक रूप से दूसरे रूप में रूपान्तरण होता रहता है । ऊर्जा को न तो उत्पन्न किया जा सकता है और न ही नष्ट किया जा सकता है ।

(1) यांत्रिक ऊर्जा (Mechanical energy)

किसी वस्तु में यांत्रिक ऊर्जा, उसकी गति या किसी संरक्षी बल क्षेत्र में उसकी स्थिति या अभिविन्यास के कारण होती -है- । उदाहरण के लिए गतिशील गोली मी ऊर्जा, पवन ऊर्जा, छत

पर स्थित पानी की टंकी में ऊर्जा, घडी व खिलौने में स्प्रिंग की ऊर्जा आदि यांत्रिक ऊर्जा के ही रूप हैं ।

(2) आन्तरिक ऊर्जा (Internal energy)

अणुओं के- मध्य परस्पर आकर्षण बल के कारण इनमें आन्तरिक स्थितिज ऊर्जा होती है । द्रव व गैसों में अणुओं की अनियमित गति होती है तथा ठोसों में अणुओं की कम्पन्न गति होती है, जिससे इनमें गतिज ऊर्जा होती है I इस प्रकार पदार्थ की कुल आन्तरिक ऊर्जा, उसकी आन्तरिक स्थितिज तथा आन्तरिक गतिज ऊर्जा के योग के बराबर होती है । आन्तरिक स्थितिज ऊर्जा का मान अणुओं के मध्य दूरी पर तथा आन्तरिक गतिज का मान ताप पर निर्भर करता है ।

(3) रासायनिक ऊर्जा (Chemical energy)

विभिन्न रासायनिक क्रियाओं से प्राप्त होने वाली ऊर्जा को रासायनिक ऊर्जा कहते हैं । सेल से विद्युत ऊर्जा की प्राप्ति, गोबर गैस से प्राप्त ऊर्जा आदि इसके प्रमुख उदाहरण हैं ।

(4) नाभिकीय ऊर्जा (Nuclear energy)

इकाई 2 के अनुच्छेद 2.3 के अन्तर्गत आप प्रकृति के मूल बलों में नाभिकीय बल के बारे में पढ़ चुके हैं I नाभिक में नाभिकीय कणों के मध्य कार्यरत नाभिकीय बलों के कारण ऊर्जा को नाभिकीय ऊर्जा कहते हैं । यह दो प्रकार की होती है- (1) नाभिकीय विखण्डन द्वारा तथा (2) नाभिकीय संलयन द्वारा प्राप्त ऊर्जा । नाभिकीय विखण्डन में भारी नाभिक (जैसे U^{235}) पर जब मन्दगामी न्यूट्रानों से संघात कराया जाता है, तो नाभिक का हल्के नाभिकों में विखण्डन हो जाता है इस प्रक्रिया में द्रव्यमान की क्षति होती हैं I नाभिकीय संलयन से छोटे नाभिकों के संलयन (fusion) से बड़े नाभिक का निर्माण होता है तथा इस प्रक्रिया मे भी द्रव्यमान क्षति (mass defect) होती है I आइन्सटीन के द्रव्यमान-ऊर्जा तुल्यता समी.

$$E = \Delta m.c^2 \qquad .. (3.23)$$

से यह द्रव्यमान क्षति (Δm) नाभिकीय ऊर्जा के रूप मैं रूपान्तरित होती है I उपरोक्त समी. में c निर्वात में प्रकाश का वेग हैं ।

(5) ध्वनि ऊर्जा (Sound energy)

यह ऊर्जा का एक ऐसा रूप है, जिससे हम कानों में संवेदना (sensation) उत्पन्न होती है । वास्तव में ध्वनि ऊर्जा ,ध्वनि संचरण में प्रयुक्त माध्यम के कणों की कम्पन्न ऊर्जा हैं I

(6) सौर ऊर्जा (Solar energy)

यह ऊर्जा हमें गैलेक्सी व सूर्य से विकिरण द्वारा प्राप्त इस विकिरण ऊर्जा का द्रश्य भाग (Visible part) है जो कि हमें प्रकाश ऊर्जा के रूप में प्राप्त होता है । सौर ऊर्जा, ऊर्जा का एक गैरपरम्परागत तथा कभी भी न खत्म होने वाला स्रोत है । इस ऊर्जा द्वारा पौधों में प्रकाश संश्लेषण की क्रिया होती है तथा हमें प्राकृतिक रूप से विटामिन डी की प्राप्ति भी होती है ।

उदाहरण 3.11 किसी द्विपरमाणुक अणु में दो परमाणुओं के मध्य बल के लिये स्थितिज ऊर्जा का फलन निम्न है ?

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} = 0$$

जहाँ α तथा b धनात्मक अचर हैं और x दोनों परमाणुओं के बीच की दूरी है (i) दोनों परमाणुओं के मध्य बल का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिये। (ii) x के किस मान के लिए U(x) शून्य होगा तथा किस मान के लिये U(x) न्यूनतम होगा? (iii) अणु की वियोजन ऊर्जा (Dissociation energy) की गणना कीजिये।

हल: (i) $U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^{6}} = 0$

चूंकि स्थितिज ऊर्जा की ऋणात्मक प्रवणता बल के बराबर होती है। अत: परमाणुओं के मध्य बल का मान

$$F = -\frac{dU(x)}{dx}$$
$$= -\frac{d}{dx}\left[\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^{6}}\right] = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6d}{x^{7}}$$
$$= -\frac{6b}{x^{7}}\left(\frac{2a/b}{x^{6}} - 1\right)$$

(ii) U (x) = 0 के लिये

$$\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^{6}} = 0$$

या $$\frac{1}{x^{12}}\left(a - bx^{6}\right) = 0$$

x के दो मान सम्भव होंगे

जब $$a - bx^{6} = 0$$

तो $$x = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/6}$$

तथा जब $\frac{1}{x^{12}} = 0$ हो तो $x = \infty$ होगा।

U (x) के न्यूनतम मान के लिये

$\frac{d}{dx}\left[U(x)\right] = 0$ होना चाहिए

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^{6}}\right] = 0$$

या $$-\frac{12a}{x^{13}} + \frac{6d}{x^{7}} = 0$$

या $$\frac{6}{x^{13}}\left[-2a + bx^{6}\right] = 0$$

या $$bx^{6} - 2a = 0$$

$$\therefore x = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$$

(iii) वियोजन ऊर्जा D, ऊर्जा का वह मान है, जो अणु को अलग-अलग परमाणुओं में तोड़ने के लिये आवश्यक होती है । इसका मान, $x=(2a/b)^{1/6}$ पर न्यूनतम स्थितिज ऊर्जा तथा $x=\infty$ पर स्थितिज ऊर्जा के अन्तर के बराबर होगा।

$$\therefore D = U_{(x=\infty)} - U\left(x=\left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}\right)$$

$$= 0 - \left[\frac{2}{(2a/b)^2} - \frac{2}{(2a/b)}\right]$$

$$= -\left[\frac{a}{4a^2/b^2} - \frac{b^2}{2a}\right]$$

$$= -\left[\frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a}\right]$$

$$= -\left[\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a}\right]$$

$$= -\left[\frac{b^2 - 2b^2}{4a}\right]$$

$$= \frac{b^2}{4a}$$

उदाहरण 3.12 एक 2 किलोग्राम द्रव्यमान के पिण्ड को पृथ्वी की सतह से $2R_e$ ऊँचाई तक ले जायें तो उसकी गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन की गणना कीजिये । पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = 6.4\times10^3$ किलोमीटर तथा g= 9.8 मी./से^{2}।

हल : प्रश्नानुसार m = 2 किलाग्राम, $h = R_e, \Delta U$?

पृथ्वी के केन्द्र से r दूरी पर स्थित m द्रव्यमान के पिण्ड पर आकर्षण बल

$$F = \frac{GM_e m}{r^2}$$

जहाँ M पृथ्वी का द्रव्यमान है ।

इस बल के विपरीत dr विस्थापन में किये गये कार्य का मान

$$F = \frac{GM_e m}{r^2}$$

अत: पृथ्वी की सतह $r = R_e$ से $r = 3R_e$ तक ले जाने में किया गया कुल कार्य

$$W = \int dW = \int_{R_e}^{3R_e} \frac{GM_e m}{r^2} dr = -GM_e m\left[\frac{1}{r}\right]_{R_e}^{3R_e}$$

$$= -GM_e m\left[\frac{1}{3R_e} - \frac{1}{R_e}\right] = GM_e m\left(\frac{2}{3R_e}\right) = \frac{2}{3}\frac{GM_e m}{R_e}$$

लेकिन पृथ्वी की सतह पर $g = \frac{GM_e}{R_e^2}$

अत: $W = \frac{2}{3} R_e g m$

यही कार्य पिण्ड की गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होगा ।

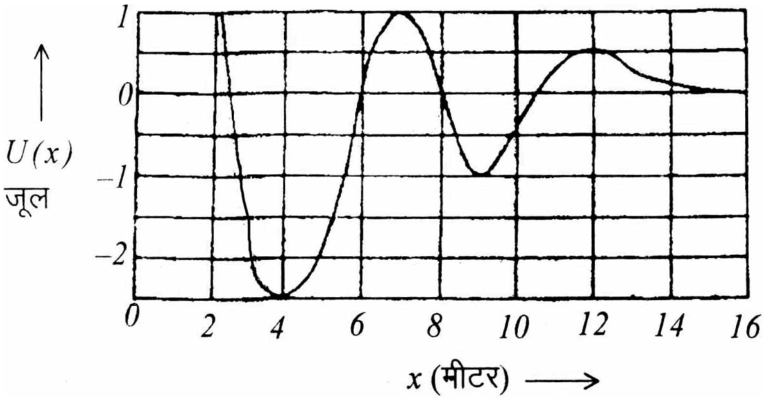
अत: $\Delta U = \frac{2}{3} \times R_e g m$

प्रश्नानुसार m=2 किलाग्राम, $R_e = 6.4 \times 10^3$ किलोमीटर तथा g= 9.8 मी./से^{2}

$$\therefore \Delta U = \frac{2}{3} \times 6.4 \times 10^6 \times 9.8 \times 2 = 250.88 \times \frac{10^6}{3}$$

$$= 83.62 \times 10^6 = 8.362 \times 10^7 \text{ जूल}$$

उदाहरण 3.13 निम्न चित्र 3.16 में किसी कण की U(x) तथा x के बीच का स्थितिज ऊर्जा वक्र प्रदर्शित किया गया है ।x के वे सम्भावित मान क्या होंगे जिनके इधर-उधर कण कम्पन गति कर सकता है? प्रत्येक स्थिति में कम्पन की सम्भावित ऊर्जा कितनी होगी ? यदि कण कम x वाले विभव कूप से निकल जाये तो अनन्त पर उसकी गतिज ऊर्जा क्या होगी?



चित्र 3.16

हल : कण के स्थितिज ऊर्जा वक्र से स्पष्ट है कि x= 4 मीटर तथा x = 9 मीटर के मानों पर कण की स्थितिज ऊर्जा का मान न्यूनतम है, इसलिये इन स्थितियों के इधर-उधर कण कम्पन गति कर सकता है ।

x= 4 मीटर तथा x =9 मीटर के लिए कम्पन की अधिकतम सम्भावित ऊर्जायें (स्थितिज तथा गतिज ऊर्जाओं का योग) क्रमश: 3.5 जूल तथा 1.5 जूल है ।

वक्र से प्रदर्शित होता है कि x =9 मीटर स्थिति के अर्थात् कम विभव कूप से निकल पाने कि स्थिति में कण की सम्पूर्ण ऊर्जा का मान एक जूल है । $x \to \infty$ के लिए स्थितिज ऊर्जा शून्य है । अत: ऊर्जा संरक्षण से कण के अनन्त तक पहुँचने की स्थिति में उसकी गतिज ऊर्जा एक जूल होनी चाहिए ।

अर्थात् $T_i + U = T_f + U_f = 1$ जूल

लेकिन $U_f = 0$ जबकि $x \to \infty$ या अनन्त पर

गतिज ऊर्जा $T_f = 1$ जूल

उदाहरण 3.14 अनंत से पृथ्वी की सतह तक एक किलोग्राम द्रव्यमान को लाने में कितनी ऊर्जा की आवश्यकता होगी? (पृथ्वी की त्रिज्या= 6.4 x 10^6 मीटर तथा पृथ्वी तल पर g= 9.8 मी. / से^{2})।

हल : एक किलोग्राम द्रव्यमान को अनंत से पृथ्वी के पृष्ठ तक लाने में आवश्यक ऊर्जा का मान पृथ्वी की सतह पर स्थितिज ऊर्जा के बराबर होगा ।

$$\therefore U = \frac{GM_e}{R_e} = mgR_e = 1 \times 9.8 \times 6.4 \times 10^6$$

$$= 6.27 \times 10^7$$

3.5 सारांश (Summary)

- जब किसी पिण्ड पर बल लगाया जाता है तो किये गये कार्य का मान बल तथा बल के अनुदिश विस्थापन के घटक या विस्थापन के अनुदिश बल के घटक तथा विस्थापन के गुणनफल के द्वारा दिया जाता है । गणितीय रूप से $W = \vec{F}.\vec{D}$ अर्थात् बल व विस्थापन का अदिश गुणनफल कार्य के तुल्य होता है । यह एक अदिश राशि है ।
- परिवर्ती बल द्वारा किया गया कार्य $W = \int_i^f \vec{F}.d\vec{r}$
- किसी पिण्ड या युक्ति द्वारा किये गये कार्य की समय के सापेक्ष दर को शक्ति कहते हैं ।

  अर्थात् $p = \frac{dw}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$
- किसी पिण्ड द्वारा कार्य कर सकने की क्षमता को उसकी ऊर्जा कहते हैं । किसी पिण्ड की गतिज ऊर्जा व स्थितिज ऊर्जा का योग उसकी यांत्रिक ऊर्जा कहलाती है । संरक्षी बलों के प्रभाव में पिण्ड की कुल यांत्रिक ऊर्जा सदैव नियत या संरक्षित रहती है ।
- ऊर्जा के विभिन्न प्रकार होते हैं । प्रकृति में होने वाली विभिन्न घटनाओं में ऊर्जा एक रूप से दूसरे रूप में रूपान्तरित होती रहती है ।
- ऊर्जा न तो उत्पन्न की जा सकती है, न ही नष्ट की जा सकती है । इसे ऊर्जा के संरक्षण का सिद्धान्त कहते हैं ।

3.6 शब्दावली (Glossary)

ऊर्जा	Energy
कार्य	Work
गतिज ऊर्जा	Kinetic constant
बल नियतांक	Force constant
यांत्रिक ऊर्जा	Mechanical energy
शक्ति	Power
स्थितिज ऊर्जा	Potential energy
संरक्षी बल	Conservative force
संरक्षण	Conservation

3.7 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1.M. Alonslo and E.Finn	Fundamental University Physics (Vol I)	Addition-Wesley Publishing Co.
2.R. Resnick and D. Halliday	Physics (Part I)	Wiley Eastern Private Ltd, New Delhi.
3.H.C, Verma	Concepts of Physic (Part I)	Bharati Bhawan, Patna.

3.8 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to Self assessment questions)

1. हाँ, सम्भव है, जब बल गति की दिशा के लम्बवत् हो /वृत्ताकार गति में अभिकेन्द्रीय बल द्वारा कण पर किया गया कार्य शून्य होता है ।
2. स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा में ।
3. बढ़ेगी, क्योंकि दो प्रोटोनों को पास लाने पर प्रतिकर्षण बल के विरूद्ध कार्य करना होगा जो स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जायेगी ।
4. (i) 'A पर, (ii) B पर
5. $k=\frac{1}{2}mu^2=\frac{m^2u^2}{2m}=\frac{p^2}{2m}$ या $p=\sqrt{mk}$, अत: भारी पिण्ड का संवेग अधिक होगा।
6. हाँ, पिण्डों के कणों की ऊष्मीय गति के कारण आन्तरिक होती है, जबकि गतिमान कणों के संवगों का सदिश योग शून्य हो सकता है ।
7. किलो-वॉट

3.9 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. नियत बल द्वारा कार्य का एक उदाहरण दीजिये ।
2. शक्ति का आरोपित बल तथा कण के वेग को दर्शाने का सम्बन्ध क्या है?
3. यांत्रिक ऊर्जा के क्या प्रकार हैं?
4. घर्षण बल के विरूद्ध किया गया कार्य ऊर्जा के किस रूप में प्रकट होता है?
5. यदि किसी कण को पृथ्वी के गुरूत्वाकर्षण बल क्षेत्र में पृथ्वी की त्रिज्या के तुल्य मान से ऊपर उठाया जाता है तो उसकी स्थितिज ऊर्जा में क्या परिवर्तन होगा?

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

6. कार्य को परिभाषित कर, नियत व परिवर्ती बल द्वारा किये गये कार्य का मान ज्ञात कीजिये।
7. किसी आदर्श स्प्रिंग पर लगाये गये बल तथा उसमें विस्थापन का सम्बन्ध एक ग्राफ द्वारा प्रदर्शित कीजिये । विस्थापित स्प्रिंग में संचित प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा का सूत्र प्राप्त कीजिये।
8. ऊर्जा की परिभाषा दीजिये तथा उसके विभिन्न स्वरूपों का वर्णन कीजिये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

9. एक स्प्रिंग की लम्बाई में 0.1 मीटर का परिवर्तन करने से स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा में 0.5 जूल का परिवर्तन हो जाता है । स्प्रिंग का बल नियतांक ज्ञात करो ।

(**उत्तर:** 100 न्यूटन / मीटर)

10. एक मोटर उठाने वाली केबिल में 4500 न्यूटन का तनाव उत्पन्न करती है व इसे 2 मीटर / से. की दर से लपेटती है । मोटर की शक्ति है ।

(**उत्तर:** 9 kw)

11. एक पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा $U = 30 + 6x^2 - 7xy + 8y^2 + 32z$ जूल है जब पिण्ड (-2,0,5) स्थिति में हो तो उस पर लगने वाले बल के x, y, z घटकों को ज्ञात कीजिये ।

12. यदि किसी कण पर बिन्दु (x, y, z) पर कार्य करने वाला बल $(2\hat{j} + xy\hat{j} + xz^2\hat{k})$ न्यूटन हो तो कण के z-अक्ष के अनुदिश बिन्दु (2,3,1) से (2,3,4) तक विस्थापित करने में कितना कार्य करना होगा ।

(**उत्तर:** 42 जूल)

13. यदि $\vec{F} = (2xy + z^2)\hat{i} + x^2\hat{j} + 2xz\hat{k}$ हो तो कण का स्थितिज ऊर्जा फलन ज्ञात करो ।

(**उत्तर:** $\left[U = -\left(x^2y + xz^2\right)\right]$)

14. एक 4 किग्रा. का पिण्ड घर्षणहीन क्षैतिज तल पर 2 मी./ से. के वेग से गतिमान है । यदि यह मार्ग में रखी स्प्रिंग को संकुचित करके रूक जाता है तो स्प्रिंग कितनी संकुचित होगी ?

(**उत्तर:** 0.5 मीटर)

15. 10 Mev ऊर्जा का एक α -कण 80 प्रोटोनों वाले स्थिर नाभिक की ओर गतिशील है । α -कण की नाभिक के निकटतम पहुँच की दूरी ज्ञात करो ।

(**उत्तर:** 2.3×10^{-12} सेमी.)

16. एक कमानीदार बन्दूक का बल नियतांक 4 न्यूटन / से.मी. है । कमानी को 3 सेमी. दबाकर उसके किनारे पर 5 ग्राम की एक गोली रखी जाती है । यदि बन्दूक की नाल क्षैतिज हो तथा गोली की गति घर्षण रहित हो तो गोली का अधिकतम वेग ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर:** 8.5 मी. /से.)

इकाई-4

ऊर्जा संरक्षण

(Conservation of Energy)

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप

- संरक्षी व असंरक्षी बलों में मूल अन्तर कर सकेंगे;
- भौतिक विज्ञान में संरक्षण नियमों को समझने के लिए संरक्षी बलों को जानना आवश्यक है;
- संरक्षी बल क्षेत्र को समझ सकेंगे
- असंरक्षी बलों को समझ सकेंगे;
- कार्य-ऊर्जा प्रमेय के महत्व को जान सकेंगे;
- आप यह भी जान सकेंगे कि संरक्षी बलों की उपस्थिति में ही कार्य-ऊर्जा प्रमेय को प्रयुक्त किया जा सकता है;

- यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण के अन्तर्गत आप यह भी जान सकेंगे कि आन्तरिक असंरक्षी बलों के शून्य होने पर ही यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण संभव है ।

4.1 प्रस्तावना (Introduction)

चिरसम्मत यांत्रिकी का मूल आधार संरक्षण के नियम (conservation) हैं । संरक्षण के सिद्धान्त की महत्वपूर्ण सफलता यह' है कि इसके आधार पर कण-गतिकी (particle kinematics) में होने वाली कई परिघटनाओं को समझाया जा सका है । इकाई 2 में आपने बल की अवधारणा एवं प्रकृति के मूल बलों का अध्ययन किया है । इसके अतिरिक्त इकाई 3 में आप यह भी जान चुके हैं कि भौतिक विज्ञान में कार्य का भौतिक अर्थ क्या होता है । साथ ही कार्य व ऊर्जा में सम्बन्ध एवं ऊर्जा के विभिन्न प्रकारों में से गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा, इत्यादि के बारे में भी आप पिछली इकाई में पढ़ चुके हैं ।

इस इकाई के अनुच्छेद 4.2 में आप संरक्षी बलों के बारे में जान सकेंगे । संरक्षी बलों की अवधारण से भौतिक विज्ञान में प्रयुक्त होने वाले संरक्षण नियमों की संकल्पना का प्रतिपादन होता है । अनुच्छेद 4.3 में आप कार्य-ऊर्जा प्रमेय (Work -Energy theorem) के बारे में विस्तार से पढ़ेंगे । अनुच्छेद 4.4 में यांत्रिकीय ऊर्जा संरक्षण के नियम (law of conservation of mechanical energy) का अध्ययन भी इस इकाई में करेंगे । इसी अनुच्छेद में आप यह भी पढ़ेंगे कि यांत्रिकीय ऊर्जा संरक्षण के नियम को समझने के लिए संरक्षी बलों की संकल्पना एक महत्वपूर्ण आधार होती है ।

4.2 संरक्षी बल (Conservative forces)

संरक्षी बल उस बल को कहते हैं जिसके प्रभाव क्षेत्र में किसी अभीष्ट कण को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में किया गया कार्य कण के पथ पर निर्भर नहीं करता है अर्थात् यदि एक कण बिन्दु A से बिन्दु B तक विभिन्न मार्गो द्वारा ले जाया जाये तो प्रत्येक बार उस पर लगे हुए बल द्वारा किया गया बराबर कार्य $\int_A^B \vec{F}.d\vec{r}$ कण के पथ पर निर्भर नहीं करता है तो यह बल, संरक्षी बल होगा । दूसरे शब्दों में संरक्षी बलों के प्रभाव में किया गया कार्य केवल कण की प्रारम्भिक व अन्तिम स्थितियों पर निर्भर करता है ।

4.2.1 संकल्पना एवं परिभाषा (Concept and definition)

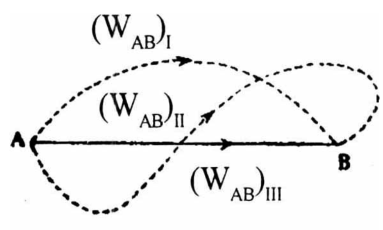
सामान्य अनुभव से हम जानते हैं कि कोई भी वस्तु स्वत: गति नहीं कर सकती है । इसे गतिशील बनाने के लिए कोई कारक (cause) आवश्यक है । यही कारक बल (force) के रूप में भौतिक विज्ञान में परिभाषित किया जाता है । बल एक सदिश भौतिक राशि है जिसे $\vec{F}$ से व्यक्त किया जाता है । बल का S.I पद्धति में मात्रक न्यूटन है ।

बल द्वारा किसी कण या कण निकाय पर किये गये कार्य के आधार पर इन्हें संरक्षी व असंरक्षी बलों के रूप में विभेदित किया जा सकता है । माना m द्रव्यमान के किसी कण पर बल $\vec{F}$ कार्य कर रहा है । इस बल के कारण कण प्रारम्भिक स्थिति A अंतिम स्थिति B तक पथ I, II तथा III

में से किसी एक पथ से होता हुआ विस्थापित होता है । माना बल द्वारा पथ I, पथ II व पथ III पर किया गया कार्य क्रमशः $(W_{AB})_{I,}(W_{AB})_{II,}(W_{AB})_{III,}$ है तो संरक्षी व असंरक्षी बलों को तीन प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है-

प्रथम परिभाषा-

यदि अभीष्ट बल क्षेत्र के प्रभाव में किसी कण को A से B तक विस्थापित करने में बल द्वारा किया गया कार्य केवल कण की प्रारम्भिक स्थिति व अंतिम स्थिति पर ही निर्भर करता है, अर्थात यदि कार्य उस चयनित पथ की लम्बाई पर निर्भर नहीं करता है, जिसके द्वारा उसे विस्थापित किया गया है, तो कण पर कार्यरत बल संरक्षी बल कहलाता है । इस कथन को गणितीय रूप में निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं-



चित्र 4.1

यदि $(W_{AB})_I = (W_{AB})_{II} = (W_{AB})_{III}$ **है तो अभीष्ट बल संरक्षी प्रकृति का होगा ।**

(देखिए चित्र 4. 1) ।

इसके विपरीत यदि $(W_{AB})_I \neq (W_{AB})_{II} \neq (W_{AB})_{III}$ हो तो अभीष्ट बल को असंरक्षी बल की श्रेणी में रखते हैं ।

द्वितीय परिभाषा-

यदि किसी कण पर कार्यरत बलों के कारण एक पूर्ण चक्र में परिणामी बल द्वारा किया गया कार्य शून्य हो तो कण पर कार्यरत बल संरक्षी बल कहलाता है (देखिए चित्र 4 .2) । अर्थात्

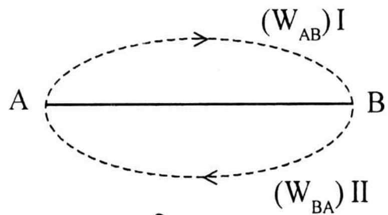
$$(W_{AB})_I + (W_{AB})_{II} = 0$$
$$(W_{AB})_I = -(W_{AB})_{II}$$

होने पर अभीष्ट बल क्षेत्र को संरक्षी बल कहते हैं ।

इस प्रकार यदि

$$(W_{AB})_I + (W_{AB})_{II} \neq 0$$

है तो कार्यरत बल को असंरक्षी बल कहते हैं ।



चित्र 4.2

तृतीय परिभाषा-

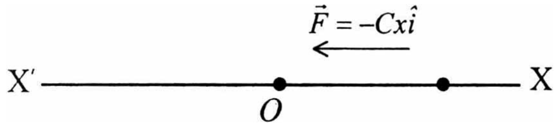
यदि कण की किसी बन्द पथ में इस प्रकार की गति हो कि एक पूर्ण चक्र के पश्चात जब कण अपनी प्रारम्भिक स्थिति में लौटे तो कण की गतिज ऊर्जा पूर्ववत (नियत) रहे तो इस स्थिति में कण पर कार्यरत बल संरक्षी बल कहलाता है!

इसके विपरीत यदि बन्द पथ में गति करने पर कण की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन होता है तो अभीष्ट बल को असंरक्षी बल कहा जाता है । अर्थात् असंरक्षी बल के लगने से एक परिक्रमण में वस्तु की गतिज ऊर्जा उतनी नहीं रहती है जो कि प्रारम्भ में थी ।

संरक्षी बलों के उदाहरण- गुरूत्वीय बल, समस्त केन्द्रीय बल व आदर्श स्प्रिंग का प्रत्यानयन बल, स्थिर विद्युत बल, चुम्बक के दो ध्रुवों के मध्य चुम्बकीय बल संरक्षी बल के उदाहरण हैं । संरक्षी बलों को स्थितिज ऊर्जा फलन की प्रवणता के ऋणात्मक मान द्वारा व्यक्त किया जाता है । अर्थात् संरक्षी बल के लिये $\vec{F} = -gradU$ लिखा जा सकता है ।

4.2.2 रेखीय प्रत्यानयन बल (Linear restoring force)

वह बल जो किसी स्थिर बिन्दु से कण के विस्थापन (displacement) के समानुपाती होता है और जिसकी दिशा विस्थापन के विपरीत होती है, रेखीय प्रत्यानयन बल कहलाता है ।



चित्र 4.3

मान लिया कि एक कण X - अक्ष के अनुदिश एक रेखीय प्रत्यानयन बल $\vec{F}$ के प्रभाव में गति कर रहा है । यदि स्थिर बिन्दु मूल बिन्दु (origin)O है और किसी समय t पर विस्थापन $x\hat{i}$ है,

(जिसमें $\hat{i}, X-$ अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश है)

तो परिभाषा से (चित्र 4.3 में दर्शाए अनुसार)

$$\vec{F} = C x\hat{i} \qquad \text{या} \qquad F = Cx \qquad ....(4.1)$$

जिसमें स्थिरांक को बल स्थिरांक (force constant) या स्प्रिंग गुणक (spring factor) कहते हैं । यहाँ पर ऋणात्मक चिन्ह यह प्रदर्शित करता है कि बल विस्थापन के विपरीत दिशा में है।

यह आसानी से सिद्ध किया जा सकता है कि रेखीय प्रत्यानयन बल एक संरक्षी बल का उदाहरण है क्योंकि यदि कण रेखीय प्रत्यानयन बल हे $\vec{F} = Cx\hat{i}$ के अन्तर्गत $x = x_1$ से $x = x_2$ तक गति करता है तो किया गया कार्य कण की x_1 और x_2 स्थितियों पर निर्भर करता है अर्थात्

$$W_{(x=x_1)} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}.d\vec{r}. = -\int_{x_1}^{x_2} Cx\hat{i}.dx\hat{i} = -\int_{x_1}^{x_2} Cx.dx$$

$$= \frac{1}{2} C(x_1^{\,2} - x_2^{\,2})$$

कम विस्थापनों के लिए इस प्रकार का बल एक तनी हुई (streched) या संपीडित (compressed) स्प्रिंग के द्वारा उत्पन्न किया जा सकता है ।

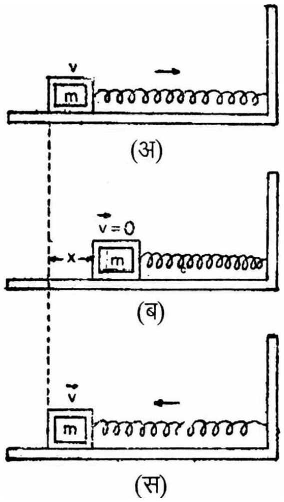
घर्षण बल, श्यान बल व अवमन्दन बल असंरक्षी बलों के उदाहरण हैं ।

4.2.3 क्षैतिज धरातल पर द्रव्य पिण्ड जुड़ी स्प्रिंग की गति (Motion of a mass attached with a spring lying on a horizontal surface)

क्षैतिज धरातल पर रखी स्प्रिंग से जुड़े द्रव्यमान की गति संरक्षी तथा असंरक्षी बलों को स्पष्टत: समझने के लिए एक उपयुक्त उदाहरण है ।

चित्र 4.4 में द्रव्यमान m का एक गुटका एक द्रव्यमान रहित स्प्रिंग के सिरे से जुड़ा हुआ है । स्प्रिंग का दूसरा सिरा दृढ़ आधार से जुड़ा हुआ है । यह पूरा तन्त्र एक घर्षणरहित चिकने क्षैतिज धरातल पर रखा है । माना कि गुटके को दीवार की ओर v वेग से दिया जाता है । जिसके कारण स्प्रिंग में सम्पीडन उत्पन्न होता है । प्रत्यास्थता के गुण के करण गुटके के विस्थापन की विपरीत दिशा में

एक प्रत्यानयन बल उत्पन्न होता है जिससे धीरे-2 गुटका स्थिर हो जायेगा । सम्पूर्ण गतिज (उर्जा, स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जायेगी ।



चित्र 4.4

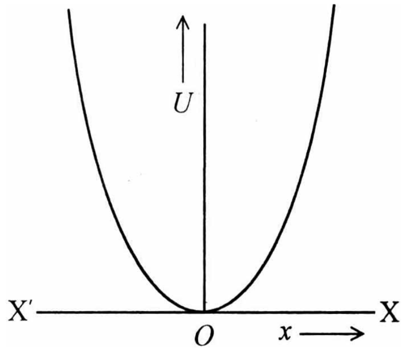
इसके बाद सम्पीडित स्प्रिंग विपरीत दिशा में लौटना प्रारम्भ करती है और संचित ऊर्जा पुन: गतिज ऊर्जा में परिवर्तित होती जाती है । जब गुटका अपनी प्रारम्भिक अवस्था (अ) में पहुँचता है तो उसका वेग तथा गतिज ऊर्जा प्रारम्भिक मान के बराबर होता है । स्पष्ट है कि स्प्रिंग के सम्पीडन से गुटके की जितनी गतिज ऊर्जा कम होती है, स्प्रिंग के प्रसरण में गुटका अपनी गतिज ऊर्जा में उतनी ही वृद्धि कर लेता है । अर्थात् परिवर्तन के पूर्ण चक्र में गुटके की गतिज ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता है ।

इस प्रकार स्प्रिंग का प्रत्यास्थ बल संरक्षी बल है ।

सम्पीडित स्प्रिंग में संचित ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा (U) के रूप में संचित हो जाती है । यदि हम तन्त्र (system) की ऊर्जा सन्तुलन स्थिति में शून्य मानें तो पिण्ड के x विस्थापन. पर स्थितिज ऊर्जा निम्नलिखित से दी जायेगी

$$U = \int_0^x \vec{F}.d\vec{r} = \int_0^x Cx\hat{i}.dx\hat{i} = \int_0^x Cxdx = \frac{1}{2}Cx^2$$

यदि U और x के बीच एक ग्राफ खींचा जाये तो एक परवलय होगा (चित्र 4.5) ।



चित्र 4.5

यदि कण का महत्तम विस्थापन a है तो तन्त्र द्वारा प्राप्त की गयी स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{1}{2}Ca^2$$

यदि m द्रव्यमान का कण x = a पर स्थिर स्थिति से छोड़ दिया जाता है तो हमें कण के किसी विस्थापन x पर उसकी गतिज ऊर्जा ज्ञात करनी है । छोड़ देने पर कण प्रत्यानयन बल के अन्तर्गत गति x = 0 की ओर करेगा और यह एक संरक्षी बल है । अत: कण की सम्पूर्ण ऊर्जा स्थिर रहेगी । प्रारम्भ में,

सम्पूर्ण ऊर्जा $$E = K + U = 0 + \frac{1}{2}Ca^2 = \frac{1}{2}Ca^2 \qquad ...(4.5)$$

यदि x विस्थापन पर कण की चाल v है तो

कण की गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2$

और कण की स्थितिज ऊर्जा $U = \frac{1}{2}Cx^2$

ऊर्जा के संरक्षण नियम से $U = \frac{1}{2}Ca^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Cx^2$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}C(a^2 = x^2)$$

जिससे $$v = \pm\sqrt{\frac{C}{m}-(a^2 = x^2)} \qquad ...(4.6)$$

समी. (4.6) विस्थापन x पर कण की चाल बताता है ।

जब कण मध्यमान स्थिति x = 0 पर आता है तो उसकी गतिज ऊर्जा और चाल महत्तम होगी, इस प्रकार

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Ca^2 \text{ और } v_0 = \pm\sqrt{\frac{C}{m}a} \qquad .....(47)$$

अत: कण की अधिकतम स्थितिज ऊर्जा $\left(\frac{1}{2}Ca^2\right)$ पर पूर्णत: गतिज ऊर्जा से बदल जाती है ।

इसी प्रकार निर्वात में यदि किसी पिण्ड को ऊर्ध्वाधर करें तो वह भी उतनी ही ऊर्जा से वापिस लौट आता है । अत: वायु के प्रतिरोधी श्यान बल की अनुपस्थिति में गुरूत्वीय बल भी संरक्षी बल होता हैं ।

यदि चिकने घर्षणरहित तल के स्थान पर साधारण तल के ऊपर गुटके-स्प्रिंग की गति पर विचार करें तो बल असंरक्षी हो जाता है । इस प्रकार घर्षण बल, श्यान बल, प्रतिरोधक बल, आदि असंरक्षी बलों के उदाहरण हैं ।

4.2.4 संरक्षी बल क्षेत्र (Conservative force field)

हम संरक्षी बलों के बारे में यह तथ्य भली-भांति जानते हैं कि इन बलों का मान दूरी के बढ़ने के साथ व्युत्क्रम वर्गानुसार घटता है और एक ऐसी दूरी भी प्राप्त की जा सकती है जहाँ बल का मान

शून्य के सन्निकट हो जाता है । इस प्रकार "किसी संरक्षी बल स्रोत का वह क्षेत्र, जिसमें बल के प्रभाव को अनुभव किया जा सकता है, संरक्षी बल क्षेत्र कहलाता है । उदाहरणस्वरूप गुरूत्वीय एवं विद्युतीय क्षेत्र, दोनों ही संरक्षी बल हैं तथा इन बलों के मान स्थिति सदिश के फलन होते हैं-

अर्थात् $\vec{F} = \vec{F}(r)$ ... (4.8)

संरक्षी बल क्षेत्र की अवधारणा से ही स्थितिज ऊर्जा की संकल्पना निकल कर आती है ।

4.2.5 असंरक्षी बल (Non-conservative force)

असंरक्षी बल उस बल को कहते हैं जिसके द्वारा एक कण को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में किया गया कार्य कण द्वारा तय किये गये पथ पर निर्भर करता है । घर्षण (frictional) और श्यानीय (viscous) बल असंरक्षी बलों के उदाहरण हैं । इस प्रकार के बल होने पर, यदि एक कण B से A तक गति करता है तो बन्द पथ (closed path) के अनुदिश किया गया कार्य शून्य नहीं होता है; लेकिन कण की स्वयं की गतिज ऊर्जा दोनों पथों के अनुदिश कम होती जाती है । उदाहरण के लिए, यदि हम एक लकड़ी का टुकड़ा मेज पर एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक विभिन्न मार्गो द्वारा ले जायें तो तय की हुई दूरी अलग-अलग होने से घर्षण बल द्वारा किये गये कार्य का मान भी भिन्न-भिन्न पथों के लिए अलग-अलग होगा ।

संरक्षी बलों के लिए, स्थितिज और गतिज ऊर्जाओं का योग स्थिर रहता है,

अर्थात् $K + U + E,$ एक स्थिरांक

या $\Delta K + \Delta U = 0 = \Delta E$ (संरक्षी बलों के लिये)

लेकिन संरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य स्थितिज ऊर्जा में हुई वृद्धि का ऋणात्मक होता है,

अर्थात् $W_c = -\Delta U$

अब मान लीजिए कि संरक्षी बलों के अलावा घर्षण के कारण कण पर एक असंरक्षी बल कार्य करता है । यदि W_f और W_c क्रमशः घर्षण तथा संरक्षी बलों द्वारा किये गये कार्य हैं तो कण पर किया गया कुल कार्य ($W_f + W_0$) कण की गतिज ऊर्जा में हुए परिवर्तन (ΔK) के बराबर होना चाहिए । इस प्रकार,

$$W_f + W_c = \Delta K$$

लेकिन $E_c = \Delta U,$ और $\Delta K + \Delta U = W_f$ ...... (4.9)

यह समीकरण प्रदर्शित करता है कि यदि घर्षण बल एक कण पर कार्य करता है तो सम्पूर्ण यांत्रिक ऊर्जा स्थिर नहीं रहती है, बल्कि इसमें परिवर्तन घर्षण बल द्वारा किये गये कार्य की मात्रा के बराबर होता है । समीकरण (4.9) इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\Delta E = E - E_0 = W_f \qquad \text{..... (4.10)}$$

लेकिन W_f जो कि घर्षण द्वारा कण पर किया गया कार्य है, हमेशा ऋणात्मक होता है, अतः समीकरण (4.10) से हम देखते हैं कि अन्तिम यांत्रिक ऊर्जा E (= K + U) का मान प्रारम्भिक यांत्रिक ऊर्जा $F_0(K_0 + U_0)$ से कम होती है । लुप्त हुई यांत्रिक ऊर्जा ऊष्मा के रूप में उत्पन्न होती है । उत्पन्न हुई ऊष्मा ऊर्जा लुप्त हुई यांत्रिक ऊर्जा के ठीक बराबर होती है ।

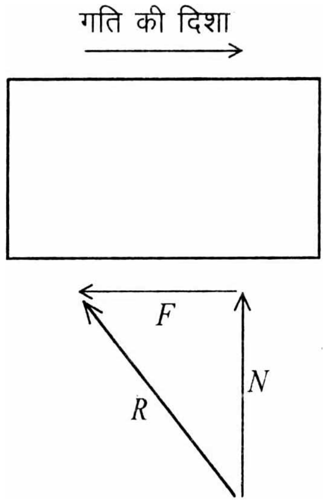
इस प्रकार उत्पन्न हुई ऊष्मा कण द्वारा घर्षण के विरूद्ध किये गये कार्य के बराबर होती है । यदि Q ऊष्मा की मात्रा उत्पन्न होती है तो स्पष्टतया $W_f = -Q$ और तब समीकरण (4.10) से

$$\Delta E + Q = 0 \qquad \text{...... (4.11)}$$

यह समीकरण प्रदर्शित करता है कि तन्त्र (system) की यांत्रिक ऊर्जा और ऊष्मा ऊर्जा के योग में उस समय तक कोई परिवर्तन नहीं होता जब तक कि उस तन्त्र पर घर्षण और संरक्षी बल कार्य कर रहे हैं ।

घर्षण के अन्तर्गत और श्यानीय माध्यम में गति (Motion under friction and in a viscous medium)

जब एक ठोस वस्तु किसी दूसरी ठोस वस्तु पर खिसकती है तो दोनों के सम्पर्क पृष्ठों के बीच अवरोधी बल (resisting force) कार्य करने लगता है । यह अवरोधी बल दोनों वस्तुओं की आपेक्षिक गति को समाप्त करने का प्रयत्न करता है और इसे घर्षण बल (force of friction) कहते हैं । यदि वस्तुओं के बीच आपेक्षिक -गति नहीं भी हो तो भी सम्पर्क पृष्ठों के बीच घर्षण बल विद्यमान हो सकते हैं ।



चित्र 4.6

सूक्ष्म दृष्टि से देखने पर यह ज्ञात होता है कि घर्षण एक बहुत ही जटिल घटना(complicated phenomenon) है । परमाणुक पैमाने पर सम्पर्क करने वाले दोनों पृष्ठ अनियमित (irregular) होते हैं । सम्पर्क के ऐसे बहुत से बिन्दु होते हैं जहाँ पर परमाणु बिल्कुल पास-पास सट जाते हैं और तब जैसे ही खिसकने वाली वस्तु सरकाई जाती है, तो वे कठिनाई के साथ अलग होते हैं और उनमें कम्पन प्रारम्भ हो जाते हैं । पहले इस घर्षण की कार्य-विधि बहुत ही सरल समझी जाती थी ।

ऐसा माना जाता था कि वस्तुओं के पृष्ठ (surfaces) खुरदरे होते हैं और उभारों (bumps) के ऊपर खिसकने वाली वस्तु की ऊपर-नीचे की गति के कारण घर्षण उत्पन्न होता है; लेकिन ऐसा नही हो सकता क्योंकि इस क्रिया में ऊर्जा की कोई हानि नही होगी । हम जानते हैं कि जब एक वस्तु दूसरी के ऊपर खिसकती है तो वास्तव में शक्ति खर्च होती है । शक्ति-हास की क्रिया-विधि यह है कि

जैसे ही खिसकने वाली वस्तु उभारों से सम्पर्क करती है तो उभार विरूपित (deform) हो जाते हैं और तब वे तरंगें और परमाणुक कम्पन उत्पन्न करते हैं और दोनों वस्तुओं में ऊष्मा उत्पन्न हो जाती है । मोटे तौर पर यह घर्षण एक सरल आनुभविक नियम (empirical law) द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है । इस नियम के अनुसार, घर्षण बल $\vec{F}$ सम्पर्क करने वाले दोनों पृष्ठों के बीच समकोणिक बल (normal force) (पृष्ठ के लम्बवत) $\vec{N}$ के समानुपाती होता है, इस प्रकार,

$$\vec{F} = \mu \vec{N} \qquad \text{...... (4.12)}$$

जिसमें μ को घर्षण-गुणांक (coefficient of friction) कहते हैं । यह गुणांक बिल्कुल स्थिर नहीं होता है । जब वस्तु क्षैतिज सतह पर चल रही होती है तो समकोणिक बल $\vec{N}$ वस्तु के भार $\vec{W}$ के बराबर होता है । पदार्थो के विभिन्न युग्मों (pairs) के लिए μ का मान भिन्न-भिन्न होता है लेकिन यह सम्पर्क करने वाले पृष्ठ के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है और न ही यह भार W पर निर्भर करता है जब तक कि भार अधिक न हो । यह μ वस्तु के वेग पर भी लगभग निर्भर नहीं करता है ।

जब एक वस्तु एक श्यान-माध्यम (viscous-medium) में धीरे-धीरे गति करती है तो घर्षण का बल वस्तु के वेग के समानुपाती होता है (जैसे अरण्डी के तेल या शहद में होकर गति करती हुई धातु की गोली) इस प्रकार बल को निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$\vec{F} = -C\vec{v} \qquad \text{........ (4.13)}$$

जिसमें C समानुपात का स्थिरांक है ।

लेकिन यदि माध्यम में वस्तु की गति इतनी तेज है कि तरल (द्रव या गैस) वस्तु के पीछे की ओर भँवर बनाने लगता है (जैसे वायुयान की हवा में गति) तो घर्षण अवरोध वेग के वर्ग के लगभग समानुपाती होता है, अर्थात्

$$F = -Cv^2 \qquad \text{..... (4.14)}$$

लेकिन उच्च वेग-मानो पर यह नियम भी असफल होने लगता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment question)

1. एक वस्तु पृथ्वी के गुरूत्वीय क्षेत्र में स्वतंत्रता पूर्वक गिर रही है, वस्तु पर कार्यरत बल की प्रकृति बताओ ।

   ....

   ....

2. पृथ्वी तथा अन्य ग्रह जब अपनी कक्षा में गति करते हैं तो इन पर कार्यरत् बल कैसे होते हैं?

   ....

   ....

3. केन्द्रीय बलों के अन्तर्गत गति करते हुए किसी पिण्ड की यदि प्रारम्भ में रही गतिज ऊर्जा गति की अंतिम अवस्था से प्राप्त गतिज ऊर्जा के बराबर है तो पिण्ड पर कार्यरत् बल की प्रकृति है-

....

....

4. संरक्षी बलों के दो उदाहरण दीजिये ।

....

....

5. असंरक्षी बलों के दो उदाहरण लिखो ।

....

....

उदाहरण 4.1 अग्रलिखित संरक्षी बलों के प्रभाव में स्थितिज ऊर्जा के लिए व्यंजक ज्ञात कीजिये ।

(i) F = kr (ii) $F = \frac{k}{r^2}$

हल: (i) संरक्षी बल के लिए $F = \frac{dU}{dr}$

या $dU = -Fdr = -krdr$

या $U = -\frac{1}{2}kr^2 + A$, अब. यदि r =0 पर U=0 हो तो नियतांक A का मान शून्य होगा

और $U = -\frac{1}{2}kr^2$

(ii) $dU = -Fdr = \frac{k}{r^2}dr$

या $U = \frac{k}{r} + A$

यदि, अब r = ∞ पर U = 0 हो तो A = 0

$$U = \frac{k}{r}$$

उदाहरण 4.2 एक कण निम्नांकित स्थितिज ऊर्जा फलन के क्षेत्र में गतिशील है, कण पर कार्यरत बल क्षेत्र का निर्धारण कीजिए :

(i) $U_{(x)} = ax^n$ (ii) $U_{(y)} = by^n$

हल: कण पर कार्यकार बल क्षेत्र $\vec{F} = gradU_{(x)}$, अत:

(i) $\vec{F} = grad(ax^n)$,

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial y}ax^n = -anx^{n-1}\hat{i}$$

(ii) $\vec{F} = grad(by^n)$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial y}y^n\hat{j} = -bny^{n-1}\hat{j}$$

4.3 कार्य-ऊर्जा प्रमेय (Work - Energy theorem)

इसी इकाई के अनुच्छेद 4.2 से हम जान चुके हैं कि वस्तु की स्वत: गति संभव नहीं है । गति के कारक को ही बल कहते हैं । इसी में हम जान चुके हैं कि यदि यह बल संरक्षी प्रकृति का है तो एक क्षेत्र का निर्माण करता है जिसे बल क्षेत्र कहते हैं ।

इकाई 3 में हम कार्य व ऊर्जा के बारे में पढ़ चुके हैं । जब कोई कण या कण तन्त्र (निकाय) किसी बल क्षेत्र में स्थित है अथवा गतिशील है तो वह इस बल क्षेत्र के प्रभाव के कारण अपनी स्थिति अथवा अवस्था में परिवर्तन कर सकता है । इससे वह या तो स्वयं कार्य करता है अथवा उस पर बल की एजेंसी द्वारा कार्य किया जाता है । ऐसा कार्य कण या कण तन्त्र की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है, इसे ही कार्य-ऊर्जा प्रमेय कहते हैं ।

4.3.1 कथन एवं गणितीय प्रारूप (Statement and its mathematical form)

संरक्षी बलों की उपस्थिति के कारण कण या निकाय पर परिणामी बल द्वारा किया गया कार्य उसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के तुल्य होता है । इसे कार्य-ऊर्जा प्रमेय कहते हैं । अर्थात्

सम्पन्न कार्य $$W = \Delta K \qquad ...(4.15)$$

या $$W = K_f - K_i \qquad ...(4.16)$$

जहाँ K_i व K_f कण की प्रारम्भिक तथा अंतिम स्थिति में इसकी गतिज ऊर्जाओं के मान हैं ।

उपपत्ति (Proof)

कार्य की परिभाषा से

$$W = \int \vec{F}.d\vec{s} \qquad ...\ (4.17)$$

लेकिन न्यूटन के द्वितीय नियम से

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

अत : $$W = \int \left(m\vec{a}\right).d\vec{s}$$

या $$W = \int m\frac{d\vec{v}}{dt}.d\vec{s} \qquad \text{यहाँ} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

या $$W = \int_{v_i}^{v_f} m\vec{v}.d\vec{v} \qquad \text{यहाँ} \ \vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

या $$W = \left[\frac{1}{2}mv^3\right]_{v_i}^{v_f}$$ यहाँ v_i व v_f कण के प्रारम्भिक व अंतिम वेग हैं ।

या $$W = \frac{1}{2}m\left[v_f^2 - v_i^2\right]$$

$$W = K_f - K_i \qquad ......\ (4.18)$$

यही कार्य-ऊर्जा प्रमेय है । इससे स्पष्ट है कि यदि बल द्वारा सम्पन्न कार्य धनात्मक है तो अन्तिम स्थिति में गतिज ऊर्जा का मान प्रारम्भिक मान की तुलना में बढ़ $(K_f > K_i)$ जायेगी ।

4.3.2 भौतिक अर्थ एवं उपयोग (Physical meaning and its uses)

कार्य-ऊर्जा प्रमेय कण तंत्र (यानि निकाय) क लिए भी परिभाषित की जाती है । इसके अनुसार किसी निकाय (कण तन्त्र) पर कार्यरत् सभी बलों (आंतरिक तथा बाह्य के कारण किया गया कार्य निकाय की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के तुल्य होता है, अर्थात

$$W_{\text{बाह्य}} + W_{\text{आंतरिक (संरक्षी व असंरक्षी)}} = (K_f - K_i) \quad \text{..... (4.19)}$$

उपयोग (Uses)

- कार्य-ऊर्जा प्रमेय की अवधारणा द्वारा संरक्षी बलों की उपस्थिति का ज्ञान किया जा सकता है ।
- कार्य-ऊर्जा प्रमेय से स्थितिज ऊर्जा की अवधारणा को समझाया जा सकता है । क्योंकि किसी निकाय की स्थितिज ऊर्जा में कमी किए गए कार्य के तुल्य होती है और यह मान कार्य W के बराबर पाया जाता है । इसलिए स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन (या वृद्धि)
- कार्य-ऊर्जा प्रमेय से यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण के नियम को स्थापित किया जा सकता है । क्योंकि कार्य-ऊर्जा प्रमेय से हमने पढ़ा है कि

$W = \Delta K$

परन्तु $W = -\Delta U$ जहाँ ΔU स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन है ।

अत: $-\Delta U = dK$

$-\Delta K + \Delta U = 0,$ समाकलन करने पर

$K + U =$ नियतांक ...(4.20)

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. क्या कार्य-ऊर्जा प्रमेय से बलों की प्रकृति का ज्ञान किया जा सकता है?
   ....
   ....
2. क्या कार्य-ऊर्जा प्रमेय यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण नियम को सत्यापित कर सकती है? कैसे?
   ....
   ....
   ....
3. पृथ्वी की सतह से किसी ऊँचाई से कोई वस्तु स्वतंत्रता पूर्वक गिरती है, पृथ्वी की सतह पर टकराते समय उसकी गतिज ऊर्जा का मान कैसे ज्ञात करोगे?
   ....
   ....
   ....
   ....

उदाहरण 4.3 एक 3 किग्रा. द्रव्यमान का पिण्ड घर्षण हीन क्षैतिज तल पर 4 मी. / से. के वेग से गतिशील है । यदि पिण्ड किसी स्प्रिंग से टकराकर उसे संकुचित करके रूक जाता है तो स्प्रिंग में संकुचन ज्ञान कीजिये । स्प्रिंग का बल नियतांक 3.2 किग्रा. भार / मीटर है ।

हल: पिण्ड की गतिज ऊर्जा स्प्रिंग में स्थितिज ऊर्जा के रूप में एकत्रित हो जाती है ।
अत: ऊर्जा संरक्षण के नियम से-

$$1/2kx^2 = 1/2mv^2$$

$$\therefore x^2 = \frac{mv^2}{k}$$

$$= \frac{2\times16}{3.2\times10} = 1$$

$\therefore x = 1$ मीटर

उदाहरण 4.4 पृथ्वी की सतह से 10 मीटर की ऊँचाई पर स्थित 50 ग्राम की वस्तु स्वतंत्रतापूर्वक गिरायी जाती है, पृथ्वी तल से टकराते समय वस्तु की चाल कितनी होगी?

हल: वस्तु की गतिज ऊर्जा में वृद्धि गुरूत्वीय बल द्वारा किये गये कार्य के तुल्य होगी । गुरूत्वीय बल द्वारा कार्य W = mgh

वस्तु की प्रारम्भिक चाल $u = 0$ माना वस्तु की अंतिम चाल = v,

वस्तु की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन $= \Delta K = 1/2mv^2 - 0$

चूँकि $1/2mv^2 = mgh$

या $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times9.8\times10} = 14$ मी./ से.

उदाहरण 4.5 एक नियत बल के प्रभाव में कण की स्थिति एवं समय में सम्बन्ध $x = (t-3)^2$ से दिया जाता है । जहाँ x मीटर में तथा t सैकण्ड में है तो बल द्वारा प्रथम 6 सैकण्ड में किये गये कार्य की गणना कीजिये ।

हल: कार्य-ऊर्जा प्रमेय से, सम्पन्न कार्य = गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$= \left(\frac{1}{2}mv_{t=6}^2 - \frac{1}{2}mv_{t=0}^2\right)$$

यहाँ $x = (t-3^2)$ से वेग $v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t-3)^2 = 2(t-3)$

अत : $v_{t=0} = 2(0-3) = -6$ मी./ से.

$v_{t=6} = 2(6-3) = -6$ मी. / से.

$W = \frac{1}{2}m\left[6^2 - (6)^2\right]$ या $[W = 0]$

4.4 यांत्रिकीय ऊर्जा संरक्षण (Mechanical energy conservation)

इकाई 3 में हम यांत्रिक ऊर्जा के बारे में पढ़ चुके हैं । वहाँ हमने यह भी पढ़ा है कि किसी वस्तु में ऊर्जा, वस्तु की गति के कारण अथवा किसी बल क्षेत्र में उसकी स्थिति या उसके अभिविन्यास के कारण हो सकती है । इन अवस्थाओं के कारण वस्तु में उत्पन्न ऊर्जा को यांत्रिक ऊर्जा कहते हैं । उदाहरण के लिए छत पर स्थित पानी के टैंक में पानी की ऊर्जा, गतिशील गोली की ऊर्जा, बॉल पैन में लगी छोटी स्प्रिंग की ऊर्जा, गतिशील वायु की ऊर्जा, इत्यादि यांत्रिक ऊर्जा के ही रूप हैं ।

यांत्रिक ऊर्जा की परिभाषा के रूप में आपा यह भी पढ़ा है कि किसी निकाय की स्थितिज ऊर्जा (U) एवं गतिज ऊर्जा (E) का योग निकाय की नियम की कुल यांत्रिक ऊर्जा (K) कहलाती है । अर्थात्

$$E = K + U \qquad ...... (4.21)$$

4.4.1 यांत्रिक ऊर्जा का संरक्षण नियम (Law of conservation of mechanical energy)

निकाय के लिए कार्य ऊर्जा प्रमेय के अनुसार किसी निकाय पर कार्यरत समस्त बलों (बाह्य तथा आन्तरिक) द्वारा किया गया कार्य निकाय की कुल गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के तुल्य होता है अर्थात्

$$W_{\text{आंतरिक संरक्षी}} + W_{\text{आंतरिक असंरक्षी}} + W_{\text{बाह्य}} = (K_f - K_i) \qquad .(4.22)$$

परन्तु, स्थितिज ऊर्जा की अवधारणा से

$$W_{\text{आंतरिक संरक्षी}} = U_f - U_i \qquad .. (4.23)$$

समी. (4.22) में प्रयुक्त करने पर

$$W_{\text{आंतरिक संरक्षी}} + W_{\text{बाह्य}} = (K_f - U_f) - (K_f - U_f) = E_f - E_i \qquad ...(4.24)$$

जहाँ E = K + U निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा है ।

यदि $W_{\text{आंतरिक संरक्षी}} = 0$ हो तो ..... (4.25)

यदि $W_{\text{बाह्य}} = E_f - E_i$

यदि $W_{\text{बाह्य}} = 0$ हो तो

$$E_f - E_i = 0$$

या $K_f - U_f = K_i - U_i$ .. (4.26)

अत: यदि किसी निकाय पर कोई बाह्य बल कार्यरत नहीं हो (अथवा उनके द्वारा किया गया कार्य शून्य हो) तो आन्तरिक संरक्षी बलों की उपस्थिति में निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है । यह गौरतलब है कि यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण के लिए आन्तरिक असंरक्षी बलों का मान शून्य होना आवश्यक है ।

अत: किसी विलगित निकाय के सम्पूर्ण प्रक्रम (process) में कहीं गतिज ऊर्जा में कमी होती है तो स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि हो जायेगी अथवा यदि स्थितिज ऊर्जा में कमी होती है तो गतिज ऊर्जा में वृद्धि हो जायेगी । यदि गतिज ऊर्जा व स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन को क्रमश: ΔK व ΔU व्यक्त करें

तो $\Delta K = -\Delta U$ या $\Delta K + \Delta U = 0$

या $K + U = E$ (निकाय की कुल यांत्रिक ऊर्जा) ...(4.27)

अंसरक्षी बलों की उपस्थिति में किसी भी विलगित निकाय की यांत्रिक ऊर्जा सम्पूर्ण चक्कर में परिवर्तित हो जाती हैं । यांत्रिक ऊर्जा में जो कमी होती है वह असंरक्षी बलों (घर्षण आदि) के कारण ऊष्मा, ध्वनि आदि में बदल जाती है । अर्थात् निकाय की ऊर्जा का स्वरूप बदल जाता है परन्तु उसकी सम्पूर्ण ऊर्जा (यांत्रिक + ऊष्मा + अन्य) का मान नियत रहता है । इसे हम ऊर्जा संरक्षण का नियम

कहते हैं । इसके अनुसार ऊर्जा कभी नष्ट नहीं होती और न ऊर्जा उत्पन्न की जा सकती है । ऊर्जा के केवल स्वरूप में परिवर्तन होता है ।

4.4.2 कतिपय उदाहरण (Some examples)

संरक्षी बलों की उपस्थिति में यांत्रिक ऊर्जा अर्थात् गतिज ऊर्जा व स्थितिज ऊर्जा का योग सम्पूर्ण प्रक्रम में नियत रहता है । इसे हम स्वतंत्रता पूर्वक नीचे गिरती वस्तु व सरल लोलक की गति के उदाहरणों से समझ सकते हैं ।

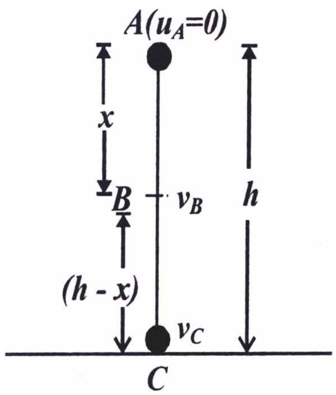
- **स्वतंत्रता पूर्वक नीचे गिरती वस्तु (Freely falling body)**

संलग्न चित्र 4.7 के अनुसार पृथ्वी को शून्य यांत्रिक ऊर्जा का पिण्ड मानते हुए यदि पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई पर स्थित बिन्दु A पर m द्रव्यमान की वस्तु स्थित हो तो इस बिन्दु पर वस्तु (निकाय) की कुल यांत्रिक ऊर्जा केवल स्थितिज ऊर्जा होगी । अर्थात्

$$E_A = mgh \qquad \text{...... (4.28)}$$

जब वस्तु बिन्दु A से स्वतंत्रतापूर्वक नीचे गिरती है तो गुरूत्वीय त्वरण के कारण इसका वेग बढ़ता है । अत: बिन्दु B पर वस्तु में गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा दोनों ही होती हैं ।

B पर स्थितिज ऊर्जा $U_B = mg(h-x)$ ..... (4.29)



चित्र 4.7

B पर गतिज ऊर्जा हठ $k_B = \frac{1}{2}mv_B^2$ ..... (4.30)

B पर कुल यांत्रिक ऊर्जा $E_B = U_B + K_B$ ...... (4.31)

या $E_B = mg(h-x) + \frac{1}{2}mv_B^2$

या $E_B = mg(h-x) + \frac{1}{2}m.2gx$

या $E_B = mgh$ ... (4.32)

वस्तु के पृथ्वी तल पर स्थित बिन्दु C पर पहुँचने पर h = 0 होता है अत: C पर स्थितिज ऊर्जा $U_c = 0$ होगी । C पर कुल यांत्रिक ऊर्जा सिर्फ गतिज ऊर्जा ही होगी जो कि A से C तक गुरूत्वीय बल द्वारा किये गये कार्य के तुल्य होती है अत:

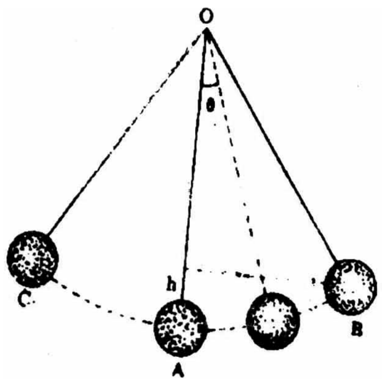
$$E_C = 0 + \frac{1}{2} m u_c^2 \qquad \text{या} \quad E_C = 0 + \frac{1}{2} m.2gh$$

या $E_c = mgh$ .... (4.33)

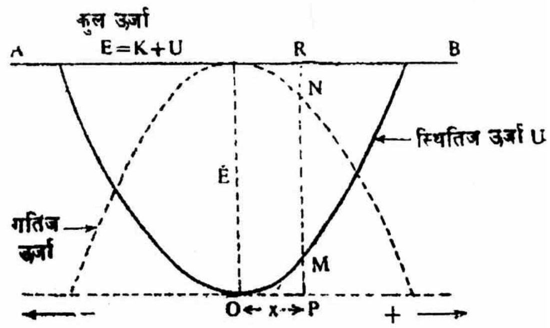
इस प्रकार हम देखते हैं कि स्वतंत्रता पूर्वक नीचे गिरती वस्तु के लिए पथ के प्रवर्तक बिन्दु पर कुल यांत्रिक ऊर्जा का मान हमेशा नियत रहता है ।

- **सरल लोलक के लिए यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण (Energy conservation for simple pendulum)**

संलग्न चित्र 4.8 में सरल लोलक दर्शाया गया है । सरल लोलक की गेंद को बिन्दु A से बिन्दु B तक ले जाकर छोड़ दें तो गेंद आवर्त गति करती है । इस क्रिया में गेद का वेग बिन्दु B पर शून्य होता है । फलत: गतिज ऊर्जा भी शून्य होती है । लोलक की गेंद को ऊपर उठाने में उस पर कार्य करना होता है । अत: लोलक स्थितिज ऊर्जा अर्जित करता है । गेंद को छोड़ने पर जब लोलक अपनी माध्य स्थिति की ओर लौटता है तो उसकी स्थितिज ऊर्जा धीरे-2 घटती हैं और गेंद का वेग व गतिज ऊर्जा का मान बढ़ता है । माध्य स्थिति (A) पर लोलक की स्थितिज ऊर्जा शून्य तथा गतिज ऊर्जा



चित्र 4.8



चित्र 4.9

अधिकतम $\left(\frac{1}{2} m u_0^2\right)$ होती है । इसी गतिज ऊर्जा से वह दूसरी ओर अग्रसित हो स्थिति C प्राप्त करता है । यहाँ भी लोलक का वेग शून्य होता है । अत: गतिज ऊर्जा शून्य परन्तु स्थितिज ऊर्जा अधिकतम $U = \left(\frac{1}{2} k x^2\right)$ हो जाती है । लोलक पुन: माध्य स्थिति की ओर लौटता है ।

इस प्रकार लोलक के एक पूर्ण चक्कर में अर्जित स्थितिज ऊर्जा प्रथम गतिज ऊर्जा में तथा बाद में फिर स्थितिज ऊर्जा में (स्थिति C पर) बदलती है । यह क्रम चलता रहता है और लोलक सरल आवर्त गति करता रहता है । लोलक की उच्चतम स्थिति (बिन्दु B व A पर) गतिज शून्य ऊर्जा तथा स्थितिज

ऊर्जा अधिकतम $\left(\frac{1}{2} k x_0^2\right)$ होती है । माध्य स्थिति पर स्थितिज ऊर्जा शून्य व गतिज ऊर्जा अधिकतम $\left(\frac{1}{2} m u_0^2\right)$ होती है । गति के अन्य बिन्दुओं पर लोलक में स्थितिज व गतिज दोनों ही प्रकार की ऊर्जा विद्‌यमान रहती है और इनका योग सदैव स्थिर रहता है । गतिशील लोलक की स्थितिज

व गतिज ऊर्जा में परिवर्तन चित्र 4.9 में दर्शाया गया है । चित्र 4.9 में रेखा AB लोलक की कुल ऊर्जा प्रदर्शित करती है । किसी क्षण बिन्दु P पर स्थितिज ऊर्जा का मान PM तथा गतिज ऊर्जा PN का योग PM + PN = PR स्थिर है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

9. घड़ी में चाबी भरने पर स्प्रिंग में कौनसी ऊर्जा संचित होती हैं । घड़ी के चलते रहने पर यह ऊर्जा कौनसी ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है?

....

....

10. क्या यांत्रिक ऊर्जा हमेशा संरक्षित रहती है?

....

....

11. क्या किसी निकाय की यांत्रिक ऊर्जा का मान ऋणात्मक हो सकता है?

....

....

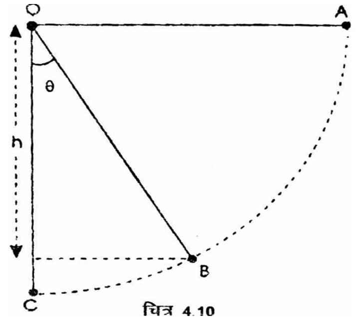
12. बॉल पेन में लगी छोटी स्प्रिंग की ऊर्जा अथवा छत पर रखी पानी की टंकी में स्थित पानी ला ऊर्जा किस प्रकार की ऊर्जा के उदाहरण हैं?

....

....

उदाहरण 4.6 एक मीटर लम्बाई के सरल लोलक का द्रव्यमान 0.1 किग्रा. है । गोलक को एक ओर इतना ऊपर उठाते हैं की धागा क्षैतिज हो जाता है (चित्र 4.10) तथा अब गोलक को छोड़ दिया जाता है । गोलक की गतिज ऊर्जा की गणना कीजिये जबकि धागा ऊर्ध्वाधर से

(i) 0^0 का कोण बनाता है (ii) 30^0 का कोण बनाता है ।



चित्र 4.10

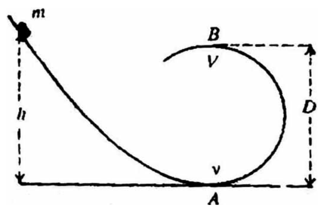
हल: प्रारम्भिक स्थिति में कुल ऊर्जा

= स्थितिज ऊर्जा (चूँकि गतिज ऊर्जा शून्य है)

(i) जब $\theta = 0^0$ हो तो गतिज ऊर्जा $= mgl = 0.1 \times 1 \times 9.8 = 0.98$ जूल

(ii) जब $\theta = 30^0$ हो तो गतिज ऊर्जा $mgl\cos 30^0 = 0.1 \times 1 \times 9.8 \times \sqrt{\frac{3}{2}} = 0.85$ जूल

उदाहरण 4.7 एक छोटी वस्तु h ऊँचाई पर स्थित एक बिन्दु से विरामावस्था से छोड़ी जाती है और यह घर्षणरहित टेढ़े मार्ग (track) पर चलती है । इस ट्रेक का अन्त D व्यास के एक वृत्ताकार घेरे



चित्र 4.11

(circular loop) में होता है (देखिये चित्र 4.11) वस्तु घेरे से स्पर्श करती हुई चलती है । घेरे के व्यास D के रूप में h का कम से कम मान ज्ञात करो ।

हल: जब वस्तु A पर है तो वस्तु द्वारा प्राप्त की हुई गतिज ऊर्जा

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \text{ जिससे } v^2 = 2gh$$

h न्यूनतम मान के लिए, A पर v मान इस तरह से होना चाहिए ताकि वस्तु ठीक B पर पहुँच सके । इस स्थिति में वस्तु पर अपकेन्द्र बल $mV^2(D/2)$ या $2mV^2/D$ वस्तु के भार mg को सन्तुलित करेगा, अर्थात्

$$2mV^2/D = mg$$

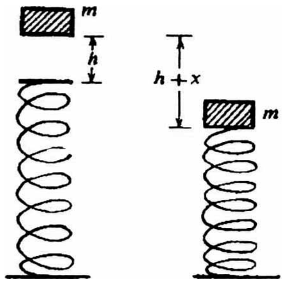
या $\quad V^2 = Dg/2$

इसके अलावा, $\quad \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV^2 = mgD$

या $\quad V^2 - V^2 = 2gD$

मान रखने पर $\quad 2gh - Dg/2 = 2gD \quad$ या $\quad h = \frac{5}{4}D$

उदाहरण 4.8 चित्र 4.12 में प्रदर्शित 1 किलाग्राम द्रव्यमान की वस्तु जो प्रारम्भ में स्थिरावस्था में है, 490 न्यूटन / मीटर बल स्थिरांक वाले ऊर्ध्वाधर स्प्रिंग पर 2 मीटर ऊँचाई से गिराई जाती है । वह दूरी ज्ञात करो जिससे स्प्रिंग संकुचित हो जायेगी ।



चित्र 4.12

हल : गुरूत्वीय ऊर्जा में कमी = स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि,

अर्थात् $\quad mg(h+x) = \frac{1}{2}Cx^2$

यहीं पर, $m = 1$ किग्रा., $g = 9.8$ मी./ से। $h = 2m$ और C =490 N/m

$$\therefore 1\times 9.8(2+x)=\frac{490}{2}x^2$$

या, $100x^2 = 4x+8$, या $25x^2 - x - 2 = 0$

जिससे $x=\frac{1+\sqrt{1+200}}{50}=\frac{15.177}{50}=0.303$ m (ऋणात्मक मान नहीं लिया गया है)

4.5 सारांश (Summary)

- संरक्षी बल: जब किसी बल क्षेत्र के प्रभाव किसी कण या कण तन्त्र को एक स्थान से दूसरे स्थान पर विस्थापित किया जाता है तो बल द्वारा किया गया कार्य केवल कण या कण तन्त्र की प्रारम्भिक स्थिति व अंतिम स्थिति पर ही निर्भर करता है । ऐसा कार्यकारी बल संरक्षी बल कहलाता है । यदि कार्य पथ पर निर्भर करता है तो बल असंरक्षी होता है ।
- संरक्षी बल के उदाहरण: गुरूत्वीय बल, समस्त केन्द्रीय बल व आदर्श स्प्रिंग का प्रत्यानयन बल, स्थिर विद्युत बल, चुम्बक के दो ध्रुवों के मध्य चुम्बकीय बल ।
- असंरक्षी बल के उदाहरण : घर्षण बल, श्यान बल व अवमन्दन बल ।
- कार्य-ऊर्जा प्रमेय : संरक्षी बलों की उपस्थिति के कारण कण या निकाय पर परिणामी बल द्वारा किया गया कार्य उसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के तुल्य होता है । इसे कार्य-ऊर्जा प्रमेय कहते हैं । इसके अनुसार $W=\Delta K$
- यांत्रिक ऊर्जा का संरक्षण नियम : यदि किसी निकाय पर कार्यरत बाहय बलों का परिणामी मान शून्य हो अथवा उनके द्वारा किया गया कार्य शून्य हो तो आन्तरिक संरक्षी बलों की उपस्थिति में निकाय की यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है जहाँ W आन्तरिक असंरक्षी का मान शून्य होना आवश्यक है । स्वतन्त्रापूर्वक नीचे गिरती हुई वस्तु व सरल लोलक की गति में यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण नियम का पालन होता है ।

4.6 शब्दावली (Glossary)

ऊर्जा	Energy
ऊर्जा संरक्षण	Conservation of energy
कमानी (स्प्रिंग)	spring
कार्य	Work
केन्द्रीय बल	Central force
गतिज ऊर्जा	kinetic energy
गुरूत्वीय त्वरण	Gravitational acceleration
घर्षण	Friction
निकाय	System
बल नियतांक	Force constant
मूल बिन्दु	Origin
यांत्रिक ऊर्जा	Mechanical energy

स्थितिज ऊर्जा	Potential energy
समीकरण	Equation
सरल आवर्त गति	Simple harmonic motion
सरल लोलक	Simple pendulum
संरक्षण	Conservation
संरक्षी बल	Conservative force
संरक्षी बल क्षेत्र	Conservative force field
क्षेत्र	Field

4.7 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

D.S. Mathur	Mechanics	S.Chand & Co., New Delhi
Berkley	Mechanics	New York
Ghose	Mechanics	Shiv Lal & Co., Agra
B.K. Agrawal & P.C. Agrawal	Mechanics	Sahitya Bhawan, Agra
जगदीश चन्द्र उपाध्याय	नवीन यांत्रिकी	रामप्रसाद एण्ड सन्स, आगरा
के. के. सरकार-आर एन. शर्मा	यांत्रिकी	साहित्य भवन, आगरा
एम. पी. सक्सैना -एन. एस.सक्सैना	यांत्रिक	कॉलेज बुक हाऊस, जयपुर

4.8 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to Self assessment questions)

1. वस्तु पर कार्यरत बल गुरूत्वीय होता है, जो कि संरक्षी प्रकृति का होता है ।
2. पृथ्वी तथा अन्य ग्रह जब अपनी कक्षा में गति करते हैं तो इन पर केन्द्रीय बल कार्य करता है, जो कि संरक्षी प्रकृति का होता है ।
3. पिण्ड पर संरक्षी प्रकृति का बल कार्यरत है ।
4. गुरूत्वीय बल एवं प्रत्यानयन बल
5. श्यान बल तथा घर्षण बल
6. कार्य-ऊर्जा प्रमेय से बलों के संरक्षी होने या न होने का ज्ञान किया जा सकता है ।
7. हाँ कार्य-ऊर्जा प्रमेय से हम जान सकते हैं कि

   कार्य $W = \Delta K$

   परन्तु $W = -\Delta U$ (स्थितिज ऊर्जा में कमी)

   अतः $-\Delta U = \Delta K$

   या $-\Delta U + \Delta K = 0$

   या $U + K$ = नियतांक यही ऊर्जा संरक्षण का नियम है ।
8. गतिज ऊर्जा $1/2mv^2 = mgh$

   जहाँ h = पृथ्वी की सतह से वस्तु की ऊँचाई ।

9. स्थितिज ऊर्जा, गतिज ऊर्जा ।

10. नही सिर्फ विलगित निकाय की यांत्रिक ऊर्जा हमेशा संरक्षित रहती है, जबकि आंतरिक असंरक्षी बल शून्य हो ।

11. हाँ।

12. यांत्रिक ऊर्जा ।

4.9 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

(1) यदि $\oint \vec{F}.d\vec{r} = 0$ है तो बल की प्रकृति कैसी होगी?

(2) किसी निकाय पर संरक्षी आंतरिक बल द्वारा किये गये कार्य का ऋणात्मक मान क्या प्रदर्शित करता हैं?

(3) सभी प्रकार कं बलों (बाहय तथा आन्तरिक) द्वारा निकाय पर किये गये कार्य का मान राशि के तुल्य होता है?

(4) संरक्षी क्षेत्र में किसी गतिशील वस्तु पर बल इस प्रकार कार्य करते हैं कि उसके प्रारम्भिक अवस्था में लौटने पर उसकी गतिज ऊर्जा नियत रहेगी अथवा नहीं ।

(5) संरक्षी तथा असंरक्षी बलों के विभेद उदाहरण सहित समझाइये ।

सकेत: इकाई के अनुच्छेद (4.2) को पढ़ें ।

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

(6) किसी निकाय के लिए कार्य-ऊर्जा प्रमेय का कथन लिखो तथा इसे व्युत्पन्न कीजिये ।

(7) यांत्रिक ऊर्जा के संरक्षण का नियम क्या है? सिद्ध कीजिये कि स्वतंत्रतापूर्वक नीचे गिरती हुई वस्तु में यांत्रिक ऊर्जा का संरक्षण होता है ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

(8) एक कण निम्नांकित स्थितिज ऊर्जा फलन के क्षेत्र में गतिशील है तो कण पर कार्यरत बल क्षेत्र का निर्धारण कीजिए:

(i) $U_{(x,y)} = Cxy$ $\qquad U = k(x^2 + y^2 + z^2)$

संकेत:

कण पर कार्यकार बल क्षेत्र $\vec{F} = -gradU_{(x)}$, अत

(i) $$\vec{F} = -grad(Cxy) = \hat{i}\frac{\partial}{\partial y}(Cxy) - \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(Cxy) - \hat{k}\frac{\partial}{\partial y}(Cxy)$$

$$= -Cy\hat{i} - Cx\hat{j} = -C(y\hat{i} - x\hat{j})$$

(ii) $$\vec{F} = -grad\left[k\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right]$$

$$= -k\left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial y}\right]\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

$$= -k\left[\hat{i}(2x) + \hat{j}(2y) + \hat{k}(2z)\right]$$

$$= -2k\left[x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right]$$

(9) दो एक समान 2 किग्रा. के गुटके एक समान चाल (2 मी./से.) से एक घर्षण रहित क्षैतिज तल पर एक दूसरे की ओर गतिशील होते हैं । वे आपस मे टक्कर करके एक दूसरे से सम्बद्ध हो जाते हैं तथा स्थिरावस्था में आ जाते हैं । दोनों कणों के निकाय पर बाह्य बलों तथा आन्तरिक बलों द्वारा किये गये कार्य का परिकलन करो

संकेत : $W_{\text{बाह्य बल}} + W_{\text{आंतरिक बल}} = K_f - K_i$ (**उत्तर:** शून्य, - 8 जूल)

(10) एक स्टील के तार से 2.5 किग्रा. भार उसकी लम्बाई में 0.25 से./मी. की वृद्धि हो जाती है । तार को खींचने में किया गया कार्य ज्ञात करो । (g = 10 मी. / से.)

संकेत : $Mg = kx, W = \frac{1}{2}kx^2$ (**उत्तर:** 0.03125 जूल)

(11) यदि 5 किग्रा. की एक वस्तु पृथ्वी की सतह से 10 मीटर की ऊँचाई से स्वतंत्रतापूर्वक गिरती है तो पृथ्वी तल से टकराते समय उसकी चाल क्या होगी ।

(**उत्तर:** 14 मी. / से.)

(12) m द्रव्यमान की एक वस्तु एक स्प्रिंग से लटका दी जाती है । नीचे की ओर विस्थापन x_0 के पश्चात् यह स्थिरावस्था में आ जाती है । यदि एक रेखीय बल (linear force) कार्य कर रहा है तो सिद्ध करो कि

(i) स्प्रिंग गुणक (बल स्थिरांक) = $= mg / x_0$,

(ii) गुरूत्वीय स्थितिज ऊर्जा में हानि = $= mgx_0$ और

(iii) प्रत्यास्थ (elastic) स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि = $= \frac{1}{2}mgx_0$

शेष ऊर्जा का क्या होता है?

संकेत: लगाया गया बल = रेखीय प्रत्यानयन बल

चूँकि सन्तुलन में, $mg = -\left[-Cx_0\right] = Cx_0$ या $C = mg / x_0$ ..... (1)

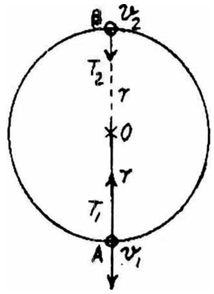
गुरूत्वीय ऊर्जा में हानि $= mgx_0$ .... (2)

प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा $= \int_0^{x_0} Cxdx = \frac{1}{2}Cx_0^2 = \frac{1}{2}mgx_0$ .... (3)

शेष ऊर्जा $= mgx_0 - \frac{1}{2}mgx_0 = \frac{1}{2}mgx_0$

यह ऊर्जा पहले तो गतिज ऊर्जा में बदल जाती है और अन्त में ऊष्मा में, जबकि प्रारम्भिक दोलन बन्द हो जाते हैं ।

(13) m द्रव्यमान की एक वस्तु r सेमी लम्बी डोरी के एक सिरे से बँधी है और वस्तु एक ऊर्ध्वाधर वृत्त में घुमायी जाती है । वृत्त के उच्चतम बिन्दु और निम्नतम बिन्दु की गतिज ऊर्जाओं में क्या अन्तर है? सिद्ध करो कि डोरी का तनाव उच्चतम बिन्दु से निम्नतम बिन्दु पर 6mg मात्रा में अधिक होता हैं ।



चित्र 4.13

संकेत: जैसे ही द्रव्यमान m निम्नतम बिन्दु A से उच्चतम बिन्दु B पर पहुँचता है तो इसकी गतिज ऊर्जा कम होती है, लेकिन उसी मात्रा में इसकी स्थितिज ऊर्जा बढ़ जाती है, अर्थात्

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = mg.2r$$

अर्थात् गतिज ऊर्जाओं में अन्तर = 2 mgr

निम्नतम बिन्दु A पर, $T_1 - mg = mv_1^2/r$

बिन्दु B पर, $T_2 + mg = mv_2^2/r$

जिसमें T_1 व T_2 क्रमश: निम्नतम और उच्चतम बिन्दुओं पर डोरी के तनाव हैं ।

$$\therefore T_1 - T_2 - 2mg = \frac{mv_1^2}{r} - \frac{mv_2^2}{r} = 4mg$$

जिससे $T_1 - T_2 = 6mg$.

इकाई- 5

रेखीय संवेग संरक्षण

(Conservation of Linear Momentum)

इकाई की रूपरेखा

5.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप :

- रेखीय संवेग संरक्षण के नियम को जान सकेंगे;
- दो कणों के निकाय के लिये रेखीय संवेग संरक्षण के नियम को समझ सकेंगे;
- n- कणों के निकाय के लिये रेखीय संवेग संरक्षण को भी जान सकेंगे;
- यह भी जान सकेंगे की रॉकेट रेखीय संवेग संरक्षण के नियम पर कार्य करता है;
- यह भी जान सकेंगे की परिवर्ती द्रव्यमान वाले निकाय अर्थात रॉकेट की गति में किस प्रकार रेखीय संवेग संरक्षण का नियम लाग होता है;
- प्रत्यास्थ एवं अप्रत्यास्थ टक्करों में अन्तर कर सकेंगे ।

5.1 प्रस्तावना (Introduction)

भौतिक विज्ञान में घटनाओं को समझने के लिये संरक्षण नियम आधारभूत संकल्पनाओं का प्रतिपादन करते हैं । ऊर्जा संरक्षण नियम का अध्ययन आप इकाई - 4 में कर चुके हैं । इस इकाई में आप रेखीय संवेग संरक्षण नियम का विस्तृत अध्ययन करेंगें ।

इसके अन्तर्गत अनुच्छेद 5.2.1 में आप दो कणों के निकाय के लिये रेखीय संवेग संरक्षण का अध्ययन करेंगे । अनुच्छेद 5.2.2 में n- कणों के निकाय के लिये रेखीय संवेग संरक्षण नियम को पढेंगे । अनुच्छेद 5.2.3 में जेट नोदन का सिद्धान्त पढेंगे । अनुच्छेद 5.3 में कणों की टक्कर एवं उस पर आधारित भौतिक पर परिघटनाओं की विस्तृत विवेचना की गयी है । अनुच्छेद 5.3.1 से 5.3.5 में प्रत्यास्थ एवं अप्रत्यास्थ टक्करों का वर्णन पढेंगे । अनुच्छेद 5.3.6 में स्थिर कण द्वारा गतिमान कण के विक्षेप को समझेंगे ।

5.2 रेखीय संवेग का संरक्षण (Conservation of linear momentum)

यदि m द्रव्यमान के किसी कण पर F बल कार्य कर रहा है तो न्यूटन के गति के दूसरे नियम के अनुसार

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) \qquad \text{... (5.1)}$$

जिसमें मे $\vec{p} = m\vec{v}$ कण का रेखीय संवेग (liear momentum) है । संवेग एक सदिश राशि है ।

यदि कण पर कार्य करता हुआ सम्पूर्ण बाहरी बल शून्य के बराबर है तो

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \text{या} \quad \vec{p} = m\vec{v} \quad \text{एक स्थिरांक} \qquad \text{..... (5.2)}$$

अर्थात् यदि कण पर कार्य करने वाले परिणामी बाहरी बल का मान शून्य है तो रेखीय संवेग का संरक्षण (conserve) होता है । यह संवेग के संरक्षण का सिद्धान्त (principle of conservation of momentum) है ।

5.2.1 दो कणों के निकाय के लिए रेखीय संवेग संरक्षण नियम (Law of conservation of linear momentum for the system of two particles)

माना कि m_1 और m_2 द्रव्यमान के दो कण आपस में टकराते (collide) है । यदि कणों के टक्कर से पहले वेग क्रमशः $\vec{u}_1$ और $\vec{u}_2$ तथा टक्कर के बाद वेग $\vec{v}_1$ और $\vec{v}_2$ हैं तो संवेग के संरक्षण के सिद्धान्त से

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \qquad \text{.... (5.3)}$$

यहाँ हम रेखीय संवेग संरक्षण के नियम की स्थापना दो विधियों से करेंगे । पहली विधि न्यूटोनियन बलों (Newtonian forces) की परिकल्पना (assumption)पर आधारित है तथा दूसरी विधि अधिक सामान्य (more general) और अच्छी है; जो गैलीलियन निश्चरता (Galilean invariance) और ऊर्जा के संरक्षण (conservation of energy) सिद्धान्त पर आधारित है ।

पहली विधि: माना कि कणों के बीच कार्य करने वाले बल इस प्रकार का है जो न्यूटन के तीसरे नियम को संतुष्ट करता है । ऐसे बलों को न्यूटोनियन बल (Newtonian forces) कहते हैं ।

न्यूटोनियन बल का यह गुण होता है कि बल $\vec{F}_{21}$ (जिसे पहला कण दूसरे पर लगाता है) ऋणात्मक बल $\vec{F}_{12}$, (जिसे दूसरा कण पहले पर लगाता है) के बराबर होता है, अर्थात्

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \text{या} \quad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = 0 \qquad .... (5.4)$$

यदि निकाय पर कोई बाहरी बल कार्यरत नहीं है तो दोनों कणों की गति के समीकरण $\frac{d}{dt}(m_1\vec{u}_1) = \vec{F}_{12}$ या $\frac{d}{dt}(m_1\vec{u}_1) = \vec{F}_{21}$ होगें ।

इन दोनों को जोड़ने पर $\frac{d}{dt}(m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2) = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$

या, $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$ = स्थिरांक अर्थात् $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ = स्थिरांक

तथा सामान्य रूप में $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ .....(5.5)

यही संवेग के संरक्षण का नियम है ।

इस नियम की उपरोक्त व्युत्पत्ति (proof) सन्तोषजनक नहीं है, क्योंकि किसी कण तक पहुँचने में बल को परिमित समय (finite time) लगता है, जिससे यह सम्भव हो सकता है कि बहुत थोड़े समय के लिए क्रिया और प्रतिक्रिया बराबर न हो ।

दूसरी विधि : माना कि स्थिर फ्रेम S (स्थिर प्रेक्षक से सम्बद्ध) में दो टकराने वाले कणों के प्रारम्भिक और अन्तिम वेग क्रमशः हैं । सामान्य रूप से, यदि टक्कर (collision) अप्रत्यास्थ (inelastic) है तो फ्रेम S में ऊर्जा संरक्षण नियम के अनुसार

$$\frac{1}{2}m_1u_2^1 + \frac{1}{2}m_1u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_1v_2^2 + E \qquad ....(56)$$

जिसमें E गतिज ऊर्जा का वह भाग है जो टक्कर में ऊष्मा, प्रकाश आदि के रूप में लुप्त हो जाता है । यहाँ यह मान लिया है कि टक्कर में द्रव्यमान m_1 और m_2 परिवर्तित नहीं होते हैं ।

यदि एक दूसरा प्रेक्षक (निर्देश फ्रेम S") पहले प्रेक्षक S के सापेक्ष स्थिर वेग $\vec{v}_1$ से गति कर रहा है तो गैलीलियन रूपान्तरणों के अनुसार दूसरे फ्रेम में वेग निम्नलिखित से प्रदर्शित होंगे* :

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_1 - \vec{v}; \qquad \vec{u}_2 = \vec{u}_2 - \vec{v}; \qquad \vec{v}_1 = \vec{v}_1 - v; \text{ और } \vec{v}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v} \qquad ....(57)$$

अब, गैलीलियन निश्चरता की परिकल्पना के अनुसार यदि ऊर्जा का संरक्षण का नियम फ्रेम S में ठीक है तो यह फ्रेम S" में भी लागू होना चाहिए। अतः फ्रेम S" में ऊर्जा संरक्षण के नियम से

$$\frac{1}{2}m_1u_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2u_2^{'2} = \frac{1}{2}m_1v_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2v_2^{'2} + E \qquad ..... (5.8)$$

यदि ऊर्जा के संरक्षण का नियम गैलीलियन रूपान्तरणों के अन्तर्गत निश्चर (invariant) है तो समी. (5.8) में समी. (5.7) से मान रखने पर

$$\frac{1}{2}m_1(\vec{u}_1 - \vec{v})^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{u}_2 - \vec{v})^2 + \frac{1}{2}m_1(\vec{v}_1 - \vec{v})^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{v}_2 - \vec{v})^2 + E$$

$$\therefore \frac{1}{2}m_1(u_1^2 + v^2 - 2\vec{u}_1.\vec{v}) + \frac{1}{2}m_2(u_2^2 + v^2 - 2\vec{u}_2.\vec{v}) = \frac{1}{2}m_1(v_1^2 + v^2 - 2\vec{v}_1.\vec{v}) + \frac{1}{2}m_2(v_2^2 + v^2 - 2\vec{v}_2.\vec{v})$$

या $$\frac{1}{2}m_1u_1^2 - m_1(\vec{u}_1.\vec{v}) + \frac{1}{2}m_2u_2^2(\vec{u}_2.\vec{v}) = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - m_1(\vec{v}_1.\vec{v}) + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - m_2(\vec{v}_2.\vec{v})$$

* **गैलीलियन रूपान्तरणों का विस्तृत अध्ययन इकाई 8 में करेंगे; अत: दूसरी विधि को विद्यार्थी इकाई 8 के अध्ययन के पश्चात भली-भाँति समझ सकेंगे ।**

समीकरण (5.9) को (5.6) में से घटाने पर

या, $$m_1\vec{u}_1.\vec{v} + m_2\vec{u}_2.\vec{v} = m_1\vec{v}_1.\vec{v} + m_2\vec{v}_2.\vec{v}$$

या, $$\left(m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2\right).\vec{v} = \left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right).\vec{v} \qquad ..... (5.10)$$

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

यह रेखीय संवेग के संरक्षण का नियम है । वस्तुत: सके और ऊर्जा के संरक्षण नियम प्रकृति के मूल नियम (Fundamental law of nature) हैं । यह नियम स्वयंसिद्ध है ।

5.2.2 n- कणों के निकाय के लिए रेखीय संवेग संरक्षण (Conservation of linear momentum for the system of n-particles)

माना कणों के एक निकाय (system) में n कण हैं (जो दृढ़ वस्तु के रूप में संकलित है) जिनके द्रव्यमान $m_1, m_2, m_3, ...m_n$ हैं । यदि कणों के इस निकाय का सम्पूर्ण द्रव्यमान M है तो

$$M = m_1 + m_2 + ...m_n$$

ये कण आपस में क्रिया-प्रतिक्रिया (interact) बल से सम्बद्ध हो रहे हैं और उन पर बाहरी बल भी कार्य कर रहे हैं । यदि कणों के संगत रेखीय संवेग क्रमशः $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 ......+ \vec{p}_n$ हैं तो निकाय (system) का सम्पूर्ण

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 ...... + \vec{p}_n \qquad ..... (5.11)$$

इसका अवकलन (differentiation) करने पर

$$\frac{d\vec{p}}{dr} = \frac{d\vec{p}_1}{dr} + \frac{d\vec{p}_2}{dr} + ... + \frac{d\vec{p}_n}{dr}$$

या $$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n \qquad .. (5.12)$$

जिसमें से, $\vec{F}_1, \vec{F}_2 .... \vec{F}_n$ क्रमशः $m_1, m_2, ...m_n$ द्रव्यमान के कणों पर बल प्रदर्शित करते हैं । **इन बलों में बाहरी (external) और आन्तरिक (internal) दोनों प्रकार के बल शामिल हैं ।**

चूँकि आन्तरिक बल बराबर और विपरीत बलों के जोड़ों में उपस्थित रहते हैं अत: वे आपस में सन्तुलित कर लेते हैं । अतः समीकरण (5.12) में $\vec{F}$ बाहरी बलों के कारण कण-निकाय (System of particles)परिणामी बल को प्रदर्शित करता है । ध्यान रखना है कि आन्तरिक बल कण-निकाय के सम्पूर्ण संवेग को नहीं बदल पाते हैं क्योंकि बराबर और विपरीत होने के कारण वे संवेग में बराबर और विपरीत परिवर्तन उत्पन्न करते हैं ।

इसलिए, यदि हमें किसी कण-निकाय के सम्पूर्ण संवेग में परिवर्तन करना है तो उसे निकाय पर बाहरी बल लगाना पड़ेगा, अर्थात् बाहरी बल

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 ..... \vec{p}_n\right)$$

यदि बाहरी बल का मान शून्य है,

$$\frac{d\vec{p}}{dr} = 0 = \quad \vec{p} \quad =0 \text{ एक स्थिरांक}$$

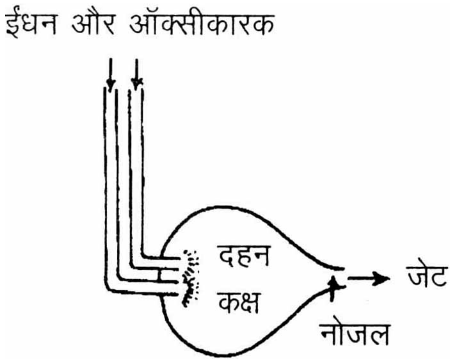
अर्थात $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 ...... + \vec{p}_n =$ एक स्थिरांक ...(5.14)

अत: **यदि कणों के एक निकाय पर कोई बाहरी बल कार्य नहीं कर रहा है तो उसका सम्पूर्ण संवेग स्थिर रहता है ।** यह कणों के एक निकाय के लिए रेखीय संवेग के संरक्षण का नियम है । ध्यान रहे कि निकाय के किसी कण विशेष का संवेग बदल सकता है, परन्तु निकाय का सम्पूर्ण संवेग स्थिर ही रहता है, जब तक कि निकाय पर बाहरी बल लगा नहीं दिया जाता ।

5.2.3 राकेट- जेट नोदन का सिद्धान्त (Rocket - Principle of jet propulsion)

अंतरिक्ष (space) में यात्रा करने का साधन रॉकेट है । यह जेट नोदन (Jet propulsion) के सिद्धान्त पर कार्य करता है ।

यदि कोई गैस किसी नोजल (nozzle)या संकुचित द्वार (orifice)में होकर तेज गति से निकलती है तो इस तरह निकलते हुए पदार्थ को जेट (jet) कहते हैं । यदि जेट की सहायता से कोई वस्तु आगे की ओर चलाई जाती है तो इस क्रिया को जेट नोदन कहते हैं । जेट नोदन का सिद्धान्त संवेग के संरक्षण के नियम पर आधारित है जिसके अनुसार किसी वस्तु से निकलती हुई जेट का पीछे की दिशा में संवेग वस्तु के आगे की दिशा में संवेग के बराबर होता है । जब वस्तु के पिछले भाग के संकुचित द्वार से गैस अत्यधिक वेग से निकलती है तो परिणामत: वस्तु आगे की दिशा में गति करती है ।



चित्र 5.1

इस रॉकेट में ईंधन (fuel) और ऑक्सीकारक (oxidiser) को दहन-कक्ष (combustion chamber) में जलाया जाता है । दहन की ऊष्मा से दहन-कक्ष में गैसों का दाब बहुत अधिक हो जाता है जिससे गर्म गैसों की एक जेट अत्यधिक वेग से रॉकेट के पिछले भाग से निकलती है । इसके फलस्वरूप रॉकेट आगे की ओर बढ़ता है (चित्र 5.1) ।

रॉकेटों में ईंधन द्रव अथवा ठोस अवस्था में काम में लिया जाता है । द्रव ईंधन वाले रोंकटों में ईंधन के लिए पदार्थ द्रव हाइड्रोजन या द्रव पैरॉक्साइड (H_2O_2) या नाइट्रिक एसिड काम में लाये जाते हैं । ठोस ईंधन वाले रॉकेटों में ईधन (जैसे गनपाउडर) में ही ऑक्सीकार विद्यमान रहता है, इस कारण इनमें एक अलग दहन-कक्ष की आवश्यकता नहीं होती ।

मान लिया कि किसी क्षण रॉकेट का द्रव्यमान M है और उसका वेग प्रयोगशाला फ्रेम (जड़त्वीय फ्रेम) में V है । यदि रॉकेट में प्रति सेकण्ड निकला हुआ गर्म गैसों का द्रव्यमान m हो तो रॉकेट के द्रव्यमान परिवर्तन की दर dm/dt = - m होगी ।

मान लीजिये कि रॉकेट के सापेक्ष - v वेग से गर्म गैसें निकल रही हैं और V तथा v **परस्पर समानान्तर** हैं । स्पष्टत: गैसों का वेग प्रयोगशाला फ्रेम में -v + V हैं होगा और निष्कासित गैसों को दिया गया प्रति सेकण्ड संवेग m(-v +V) होगा ।

अत: रॉकेट पर बल $-m(-v+V)$ होगा । या $\frac{dM}{dt}(-v+V)$

लेकिन न्यूटन के गति के दूसरे नियम से बल का मान $\frac{d}{dt}(MV)$ होता है ।

अत: $$\frac{d}{dt}(MV)=\frac{dM}{dt}(-v+V)$$

या $$M\frac{dV}{dt}+V\frac{dM}{dt}=-v\frac{dM}{dt}+V\frac{dM}{dt}$$

या $$M\frac{dV}{dt}=-v\frac{dM}{dt} \quad ..... (5.15)$$

समीकरण 5.15 से $$dV=\frac{dM}{dt}v$$

समाकलन करने पर $$V=-v\log_e M+C$$

जिसमें C समाकलन-स्थिरांक (Constant of integration) हैं ।

यदि प्रारम्भ में (समय t = 0) रॉकेट का द्रव्यमान M_0 है और वेग V_0 है तो

$$V_0=-v\log_e M_0+C$$

या $$C=v\log_e M_0+V$$

अत: $$V=-v\log_e M+v\log_e M_0+V_o$$

या $$V=V_0+v\log_e\frac{M_0}{M} \quad ..... (5.16)$$

अत: रॉकेट का अन्तिम वेग V अधिक प्राप्त करने के लिए यह आवश्यक है कि (i) निष्कासित गैसों के लिये v का मान अधिक हो और (ii) प्रारम्भिक द्रव्यमान M_0 उनकी तुलना में रॉकेट का अन्तिम द्रव्यमान M काफी कम हो ।

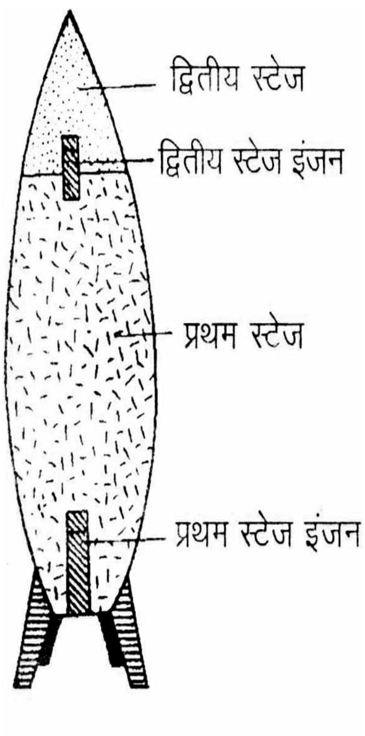
निष्कासित वेग का मान संकुचित द्वार (nozzle) की बनावट और ईंधन द्वारा उत्पन्न हुई ऊष्मा पर निर्भर करता है । इसकी सैद्धान्तिक सीमा (theoretical limit) दहन-कक्ष के ताप पर गैस के वर्ग माध मूल (RMS) वेग के बराबर होती है और इसकी प्रायोगिक सीमा 2 किलोमीटर प्रति सेकण्ड के लगभग है क्योंकि 3000^0C से ऊँचे ताप प्राप्त करना कठिन होता है ।

प्रायोगिक तौर पर अनुपात M_0 / M का मान अधिक करने की भी सीमा है । एक स्टेज ताले रॉकेट (one stage rocket) जिसमें केवल एक इंजन होता है, अन्तिम द्रव्यमान M प्रधानत: ईंधन रखे जाने वाले पात्रों (fuel containers) के कारण होता है और जो M_0 के लगभग 10 प्रतिशत से

कम नहीं हो सकता । ठोस ईधन वाले रॉकेटों में अन्तिम द्रव्यमान M इसकी अपेक्षा कम भी हो सकता है, जबकि ईंधन पर्याप्त मात्रा में दृढ़ (rigid) हो, परन्तु यह लाभ यही पर निष्कासित वेग का मान कम होने से रॉकेट का अन्तिम वेग V अधिक नही प्राप्त करा पाता है ।

यदि M_0 / M =10 प्रारम्भिक वेग V = 0 और निष्कासित वेग v = 2 किमी. / सेकण्ड तो अन्तिम वेग v =0+2$\log_e$ (10) = 2 x 2.3 =4.6 किमी. / सेकण्ड होगा । यह वेग पलायन वेग (escape velocity) 11 किमी. / सेकण्ड या पृथ्वी के पास कक्षीय वेग (orbital veiocity) 8 किमी./ सेकण्ड से काफी कम है । अत: एक स्टेज वाले रॉकेट से इतना अधिक वेग प्राप्त नहीं किया जा सकता है ।

दो या तीन स्टेजी रॉकेटों की सहायता से आवश्यक ऊचे अन्तिम वेग प्राप्त किए जा सकते हैं । दो स्टेजी रॉकेट में दो रॉकेट श्रेणी क्रम में जुड़े रहते हैं या एक रॉकेट का पीछे का भाग दूसरे के आगे के भाग में रहता है द्वितीय स्टेज घुसा



चित्र 5.2

(चित्र 5.2) । प्रथम स्टेज का रॉकेट बड़ा और भारी होता है और द्वितीय स्टेज इंजन दूसरी स्टेज का रॉकेट सापेक्षत: छोटा और हल्का होता है । सबसे पहले प्रथम स्टेज रॉकेट को काम में लाया जाता है और जब इसका ईधन जल चुकता है तो यह अपने आप समायोजन से प्रथम स्टेज अलग होकर नीचे गिर जाता है । इसके पश्चात दूसरी स्टेज का रॉकेट प्रारम्भिक वेग V_0, जो इसे प्रथम स्टेजी रॉकेट द्वारा प्रदान किया गया है, से गति करना प्रारम्भ करता है । अत: समीकरण (5. प्रथम स्टेज इंजन 16) के अनुसार अंतिम वेग लगभग दुगना प्राप्त होता है।

पायलट की जगह या कक्षा (orbit) में कोई उपग्रह (satellite) भेजना हो तो उसकी जगह सबसे ऊपरी भाग में होती है।

उपरोक्त वर्णन में हमने रॉकेट के भार को नगण्य मान लिया है । यदि रॉकेट ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर गति करता है तो रॉकेट पर ऊपर की ओर बल

$$\frac{dM}{dt}(-v+V)-Mg$$

इस स्थिति में बल $$\frac{d}{dt}(MV)=\frac{dM}{dt}(-v+V)-Mg$$

सरल करने पर, $$M\frac{dV}{dt}=v\frac{dM}{dt}-Mg$$

इसका समाकलन करने पर $$V=-v\log_e M-gt+C$$

जब $t=0$, तो $M=M_0$ और $V=V_0$

अत: $$C = V_0 + v \log_e M_0$$

जिससे $$V = V_0 + v \log_e \left(M_0 / M \right) - gt \qquad ..... (5.17)$$

जिसमें t ईंधन के जलने में लगा समय है ।

समीकरण (5.17) से स्पष्ट है कि यदि समय t कम है तो पृथ्वी के आकर्षण के कारण V के मान में कमी नगण्य होगी । लेकिन यदि ईंधन बहुत धीरे्धीरे जलता है तो हो सकता है कि रॉकेट पृथ्वी से बिल्कुल उठे भी नहीं । अत: यह आवश्यक है कि ईंधन प्रारम्भ में तेजी से जलाया जाये । लेकिन ईंधन को बहुत तेजी से न जलाने के भी कारण हैं । यदि रॉकेट वायुमण्डल के ऊपर जाने से पहले ऊँचा वेग प्राप्त कर लेता है तो पृथ्वी की सतह के पास रॉकेट से वायु के घर्षण के कारण ऊर्जा की हानि अधिक होगी । रॉकेट में ईंधन को धीरे-धीरे जलाने का एक कारण यह भी है कि इसके त्वरण के कारण इसमें बैठे हुए यात्रियों का भार बहुत अधिक नबढें ।

रॉकेट की आकृति सिगार (cigar) जैसी बनायी जाती है जिससे इसके प्रत्येक भाग पर वायुमण्डल की हवा का दाब कम से कम पडे । घर्षण के कारण रॉकेट का ताप भी बहुत अधिक बढ़ जाता है । अत: इसका ढाँचा किसी तापरोधी पदार्थ का बनाया जाता है और उडान के प्रथम चरण में जहाँ हवा सघन होती है, चलने की रफ्तार भी कम रखी जाती है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. रेखीय संवेग संरक्षण नियम क्या है?
....
....
2. दो कणों के निकाय के लिये रेखीय संवेग संरक्षण नियम को समझाइये ।
....
....
....
3. रॉकेट किस सिद्धान्त पर कार्य करता है?
....
....
....
4. रॉकेट के अन्तिम वेग के लिये व्यंजक लिखिये ।
....
....
....
5. बंदूक से गोली दागने पर पीछे की ओर धक्का क्यों प्रतीत होता है?
....
....
....
....

उदाहरण 5.1 तीन टकराने वाले पिंडों के द्रव्यमान 100, 200 और 400 ग्राम हैं और प्रत्येक पिंड के वेग का मान क्रमशः: x, y और z अक्षों के अनुदिश 20 मी./ सेकण्ड है । अन्योन्य क्रिया (interaction) के बलों द्वारा तीसरा पिंड गति करना बन्द कर देता है और दूसरे पिंड का वेग ($10\hat{j}+5\hat{k}$) मी. /सेकण्ड हो जाता हैं तो पहले पिंड का वेग ज्ञात करो ।

हल: प्रारम्भिक संवेग = $m_1u_1+m_2u_2+m_3u_3=2\hat{i}+4\hat{j}+8\hat{k}$

अन्तिम संवेग = $m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3$

$$=0.v1v_1+0.2\left(10\hat{j}+5\hat{k}\right)+0.4\times 0$$

$$=0.v1v_1+2\hat{j}+\hat{k}$$

संवेग के संरक्षण के सिद्धान्त से

$$=0.v1v_1+2\hat{j}+\hat{k}=2\hat{i}+4\hat{j}+8\hat{k}$$

$$\therefore v_1=20\hat{i}+20\hat{j}+70\hat{k} \quad \text{मी. / सेकण्ड}$$

उदाहरण 5.2 टक्कर से पहले 200 ग्राम तथा 500 ग्राम द्रव्यमानों के दो पिंडो के वेग क्रमशः $10\hat{i}$ और $3\hat{i}+5\hat{j}$ मी. / सेकण्ड है । टक्कर के पश्चात् दोनों पिंड एक-दूसरे से चिपक जाते हैं । संयुक्त पिंड का संवेग ज्ञात कीजिये ।

हल : यदि संयुक्त पिंड का संवेग $\vec{p}$ है तो संवेग संरक्षण से -

$$\vec{p}=m_1v_1+m_2v_2$$

$$=0.2\left(10\hat{i}\right)+0.5\left(3\hat{i}+5\hat{j}\right)$$

$$= 3.5\hat{i}+2.5\hat{j} \quad \text{किलोग्राम मी. / सेकण्ड}$$

उदाहरण 5.3 पृथ्वी के आकर्षण को नगण्य मानकर सिद्ध करो कि

$$V=V_0-v\log_e\left(1-mt/M_0\right)$$

जिसमें V, समय t में प्राप्त वेग है, v निष्कासित वेग है और m ईंधन के जलने की दर है ।

हल: $V=V_0-v\log_e\left(M_0/M\right)$

चूँकि रॉकेट से द्रव्यमान के बाहर निकलने की दर m है, अतः t समय में mt द्रव्यमान बाहर निकलेगा,

अर्थात् $M=M_0-Mt,$ तो

$$V=V_0-v\log_e\left(\frac{M_0}{M_0-mt}\right)$$

या $$V=V_0-v\log_e\left(\frac{M_0-mt}{M_0}\right)$$

या $$V=V_0-v\log_e\left(1-mt/M_0\right)$$

उदाहरण 5.4 यदि दो स्टेजी रॉकेट का अलग-अलग द्रव्यमान 100 किग्रा. और 10 किग्रा. है और उनमें ईंधन क्रमशः 800 किग्रा और 90 किग्रा. है । 2 किमी./सेकण्ड का निष्कासित वेग रखकर अन्तिम वेग क्या प्राप्त होगा? $(\log_e 10 = 2.3$ और $\log_e 2 = 0.30)$

हल: $V = V_0 - v \log_e (M_0 / M)$

पहली स्थिति में, जब रॉकेट की प्रथम स्टेज समाप्त होती है,

$V_0 = 0; v = 2000$ मीटर / सेकण्ड

$M_0 = 100 + 800 + 10 + 90 + = 1000$ किग्रा. और $M = 200$ किग्रा.

$$\therefore V = 0 + 2000 \log_e (1000/200) = 2000 \log_e (10/2)$$

$$= 2000 \times 2.3 (\log_{10} 10 - \log_{10} 2) = 2000 \times 2.3 (1 - 0.3)$$

= 2000 x 2.3 x 0.7 = 3220 मीटर / सेकण्ड

अब द्वितीय स्टेजी, रॉकेट के लिए यह प्रारम्भिक वेग है । अतः द्वितीय स्टेज के अन्त में प्राप्त अन्तिम वेग $V = 3200 + 2000 \times 2.3 \log_{10} \left(\frac{90+10}{10} \right) = 3220 + 2000 \times 2.3 = 3220 + 4000$

= 7820 मीटर / सेकण्ड = 7.82 किमी. / सेकण्ड

उदाहरण 5.5 एक रॉकेट ऊर्ध्व दिशा में V_0 वेग से रवाना होता है । सिद्ध करो कि h ऊँचाई पर उसका वेग V निम्न सूत्र से व्यक्त होगा :

$$V_0^2 - V^2 = \frac{2gh}{1 + h/R}$$

जिसमें R पृथ्वी की त्रिज्या है और g पृथ्वी-तल पर गुरूत्वीय त्वरण है । यदि एक रॉकेट पलायन वेग की 90 प्रतिशत चाल से छोड़ा जाता है तो वह अधिकतम कितनी ऊँचाई तक पहुँचेगा? इसके लिए व्यंजक ज्ञात करो ।

हल: जैसे-जैसे रॉकेट ऊपर चलता जाता है, g का मान कम होता जाता है । स्पष्टतया h ऊँचाई पर रॉकेट के वेग v को निम्नलिखित से दिया जायेगा ।

$$V^2 = V_0^2 - 2\int_0^h g' dh$$

h ऊँचाई पर $g' \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{R^2 (1 + h/R)^2} = \frac{g}{(1 + h/R)^2}$

हल करने पर $V_0^2 - V^2 = \frac{2gh}{1 + h/R}$

पलायन वेग $\sqrt{2gR}$ से दिया जाता है । अतः यही पर $V_0 = 0.9\sqrt{2gR}$, रॉकेट द्वारा अधिकतम ऊँचाई प्राप्त करने पर V = 0, अब उपर्युक्त समीकरण में मान रखने पर,

$$0.81 \times 2gR = \frac{2ghR}{R+h} \quad \text{या} \quad 0.81 = \frac{h}{R+h}$$

जिससे h=0.81R/0.19 ≅ 4.3R

रॉकेट द्वारा पहुँची गयी अधिकतम ऊँचाई के लिए यही व्यंजक है ।

5.3 कणों का संघट्ट या टक्कर (Collision of particles)

टक्कर एक ऐसी विलगित घटना है जिसमें दो या दो से अधिक पिण्डों के बीच एक प्रबल बल अल्प समय के लिये कार्यरत होता है । टक्कर की घटना में कम से कम किसी पिण्ड का वेग अवश्य परिवर्तित होता है ।

टक्कर के संदर्भ में मुख्य तथ्य (Main features with reference to collision)

(i) टक्कर में दो पिण्डों का परस्पर सम्पर्क में आना आवश्यक नहीं है । साधारणतया दो स्थिर पिण्ड टक्कर में एक दूसरे को स्पर्श करते हैं, परन्तु सूक्ष्म कणों की टक्कर में उनके बीच स्पर्श नहीं होता है । उदाहरणार्थ किसी गेंद तथा बल्ले के बीच टक्कर में स्पर्श होता है जबकि नाभिक द्वारा कण प्रकीर्णन में कोई स्पर्श नहीं होता है ।

(ii) टक्कर की प्रक्रिया में पिण्डों के रेखीय संवेगों का पुन: वितरण होकर कुल रेखीय संवेग हमेशा संरक्षित रहता है ।

(iii) टक्कर में कुल ऊर्जा हमेशा संरक्षित रहती है ।

(iv) यदि एक टक्कर में टकराने वाले कण टक्कर से पूर्व तथा टक्कर के पश्चात एक ही सरल रेखा के अनुदिश गतिशील हों तो इसे सम्मुख टक्कर (head-on collision) कहते हैं । यदि टक्कर करने वाले कण टक्कर से पूर्व अथवा पश्चात सरल रेखा के अनुदिश गमन नहीं करते बल्कि एक तल में गमन करें तो टक्कर तिर्यक टक्कर (oblique collision) कहलाती है ।

मान लिया कि m_1 और m_2, द्रव्यमान के दो कणों की टक्कर (collision) से पहले (before) वेग क्रमश: $\overline{u_1}$ व $\overline{u_2}$ हैं और टक्कर के पश्चात् (after) $\overline{v_1}$ व $\overline{v_2}$ हैं तो संवेग के संरक्षण नियम से

$$m_1\overline{u_1} + m_2\overline{u_2} = m_1\overline{v_1} + m_2\overline{v_2} \qquad ..(5.18)$$

यहाँ पर टक्कर के 'पहले (before)' और 'पश्चात् (after)' से अर्थ यह है कि जहाँ पर कणों के बीच परस्पर क्रिया-प्रतिक्रिया के बलों (interaction forces) का प्रभाव समाप्त हो जाता है । अत: टक्कर के पहले और बाद में स्थितिज ऊर्जा वही रहती है । यदि टक्कर पूर्णतया प्रत्यास्थ (elastic) हो तो कणों की सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा टक्कर के द्वारा नहीं बदलती है अर्थात्

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad ..... (5.19)$$

गैसों के गतिज सिद्धान्त के अनुसार इस प्रकार की प्रत्यास्थ टक्करें गैस के अणुओं के बीच होती हैं । परमाणुओं, इलेक्ट्रॉनों और प्रोटीनों आदि के बीच प्राय: इसी प्रकार की टक्करें होती हैं ।

जब दो कण एक-दूसरे के पास पहुँचते हैं तो उनकी परस्पर अन्योन्य क्रिया (mutual interaction) के कारण उनकी गति परिवर्तित होती है । फलस्वरूप उनके संवेग बदल जाते हैं और इस क्रिया को टक्कर (collision) कहते हैं । भौतिक विज्ञान की दृष्टि से टक्कर में टकराने वाले कणों का भौतिक रूप से सम्पर्क में आना आवश्यक नहीं है ।

5.3.1 टक्कर के लिये न्यूटन का नियम तथा प्रत्यावस्थान गुणांक (Newton's law for collision and coefficient of restitution)

न्यूटन के अनुसार टक्कर के पश्चात कणों के दूर जाने के आपेक्षिक वेग तथा टक्कर के पूर्व उनके समीप आने के आपेक्षिक वेग का अनुपात नियत रहता है । यह नियतांक प्रत्यावस्थान गुणांक कहलाता है । इसे e से व्यक्त करते हैं । अर्थात्

$$e = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}} \qquad .....(5.20)$$

या $$\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1} = e\left(\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}\right)$$

जहां $\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$ टक्कर के पश्चात दूर जाने का आपेक्षिक वेग तथा $\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_1}$ टक्कर के पूर्व समीप आने का आपेक्षिक वेग हैं ।

प्रत्यावस्थान गुणांक e का मान शून्य से 1 के बीच होता है । प्रत्यावस्थान गुणांक e के मान के आधार पर न्यूटन ने कणों की टक्कर के दो प्रकारों में वर्गीकृत किया-

(i) e=1, प्रत्यास्थ टक्कर

(ii) 0<e<1 अप्रत्यास्थ टक्कर, यदि e=0 पूर्णत: अप्रत्यास्थ टक्कर

5.3.2 टक्कर के प्रकार (Types of collision)

गतिज ऊर्जा संरक्षण के आधार पर कणों की टक्कर दो प्रकार की होती है-

(अ) प्रत्यास्थ टक्कर (Elastic collision)

(ब) अप्रत्यास्थ टक्कर तथा पूर्णत: अप्रत्यास्थ (Inelastic and completely inelastic collision)

(अ) प्रत्यास्थ टक्कर (Elastic collision)- कणों की प्रत्यास्थ टक्कर में

(i) टक्कर से पूर्व कणों की गतिज ऊर्जा का कुल मान टक्कर के पश्चात कणों की गतिज ऊर्जा के कुल मान के बराबर होती है । अर्थात्

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

जहां u_1, u_2 व v_1, v_2 क्रमश: टक्कर के पूर्व व पश्चात m_1 व m_2 द्रव्यमान के कणों के वेग हैं ।

(ii) रेखीय संवेग संरक्षित रहता है । अर्थात् टक्कर के दौरान, टक्कर के पूर्व तथा टक्कर के पश्चात कुल रेखीय संवेग नियत रहता है । अर्थात्

$$m_1\overrightarrow{u_1} + m_2\overrightarrow{u_2} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2}$$

(ब) अप्रत्यास्थ टक्कर (Inelastic collision)

अप्रत्यास्थ टक्कर में टक्कर के पश्चात गतिज ऊर्जा का कुल मान टक्कर से पूर्व गतिज ऊर्जा के कुल मान के बराबर नहीं होता है ।

सामान्यत: अप्रत्यास्थ टक्कर में टक्कर के पश्चात गतिज ऊर्जा का कुल मान से कम होता है । यहा प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा का कुल भाग तो पिण्डों की आन्तरिक ऊर्जा में संचित हो जाता है तथा कुछ भाग ऊष्मा आदि के रुप में परिवर्तित हो जाता है अर्थात सामान्यत: अप्रत्यास्थ टक्कर में गतिज ऊर्जा की हानि होती है लेकिन कुल अवस्थाओं में टक्कर के पश्चात कणों की कुल गतिज ऊर्जा

का मान टक्कर के पूर्व कणों की गतिज ऊर्जा से अधिक प्राप्त होता है । जबकि टक्कर करने वाले कणों में संचित आन्तरिक ऊर्जा कणों की गतिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है । ध्यान रहे कि रेखीय संवेग का संरक्षण अप्रत्यास्थ टक्कर के लिये भी सत्य है । साधारण जीवन में प्रेक्षित अधिकांश टक्करें अप्रत्यास्थ होती हैं ।

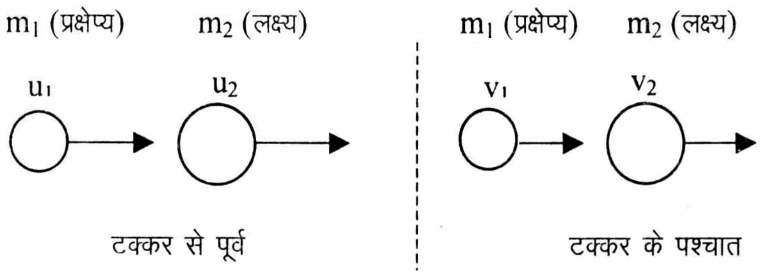
यदि टक्कर के पश्चात कण परस्पर सम्बद्ध हो जाते हैं या आपस में सटे रहते हैं तो इसे पूर्णत: अप्रत्यास्थ टक्कर कहते हैं । ध्यान रहे कि किसी पूर्णत: अप्रत्यास्थ टक्कर में गतिज ऊर्जा की सम्पूर्ण हानि ही होती है क्योंकि रेखीय संवेग संरक्षण के कारण यदि टकराने वाले कणों का टक्कर के पूर्व यदि कोई संवेग शून्य नहीं है तो टक्कर के पश्चात कणों के सम्बद्ध होने पर भी उनका कुल संवेग शून्य नहीं होगा अर्थात कुछ न कुछ गतिज ऊर्जा अवश्य होगी । यदि टक्कर से पूर्व कणों का कुल रेखीय संवेग शून्य हो तो उस अवस्था में निश्चित रुप से गतिज ऊर्जा की सम्पूर्ण हानि हो जायेगी क्योंकि टक्कर के पश्चात सम्बद्ध कणों का कुल रेखीय संवेग शून्य होगा । बंदूक की गोली का लक्ष्य में फंस जाना, मिट्टी के दो गोलों की टक्कर, बम का विस्फोट, गतिशील ट्रॉली से किसी मनुष्य का कूदना ये सभी पूर्णत: अप्रत्यास्थ टक्कर के उदाहरण हैं ।

5.3.3 सम्मुख प्रत्यास्थ टक्कर (Head-on elastic collision)

चित्र (5.3) के अनुसार माना कि m_1 व m_2 द्रव्यमान के दो कण क्रमश: u_1 तथा u_2 नियत वेगों ($u_1>u_2$) से **एक सरल रेखा के अनुदिश गतिशील** हैं, प्रत्यास्थ टक्कर करते हैं । टक्कर के पश्चात उनके वेग क्रमश: v_1 व v_2 हो जाते हैं । अत: संवेग संरक्षण के नियम से

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

या $$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \quad \text{....(5.21)}$$



चित्र 5.3

चूंकि टक्कर प्रत्यास्थ है अत: टक्कर से पूर्व कुल गतिज ऊर्जा का मान टक्कर के पश्चात कुल गतिज ऊर्जा के बराबर होगा अर्थात्

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

या $$m_1\left(u_1^2 - v_1^2\right) = m_2\left(v_2^2 - u_2^2\right) \quad \text{.....(5.22)}$$

समी. 5.22 को समी. 5.21 से भाग देने पर

$$u_1 + v_1 = u_2 + v_2$$

या $$(u_1 - u_2) = (v_2 - v_1) \quad \text{.....(5.23)}$$

इस प्रकार एक सम्मुख प्रत्यास्थ टक्कर में टक्कर से पूर्व कणों के समीप आने का आपेक्षिक वेग (u_1-u_2) टक्कर के पश्चात कणों के दूर जाने के आपेक्षिक वेग (v_2-v_1) के बराबर होता है ।

इसे सम्मुख प्रत्यास्थ टक्कर के लिये न्यूटन का नियम कहते हैं ।

समी. 5.21 तथा समी. 5.23 से

$$\left(m_1 - m_2\right)u_1 + 2m_2u_2 = \left(m_1 + m_2\right)v_1$$

या
$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)u_2 \qquad .....(5.24)$$

तथा
$$2m_1u_1 + \left(m_2 - m_1\right)u_2 = \left(m_1 + m_2\right)v_2$$

या
$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)u_2 \qquad .....(5.25)$$

समी. 5.24 तथा समी. 5.25 से हमें सम्मुख प्रत्यास्थ टक्कर के पश्चात् कणों के वेगों के मान उनके टक्कर से पूर्व वेगों के रुप में प्राप्त होते हैं ।

सम्मुख प्रत्यास्थ टक्कर में विशेष स्थितियां -

स्थिति 1: जबकि $m_1 = m_2$

समी. 5.24 व समी. 5.25 से

$v_1 = u_2$ तथा $v_2 = u_1$

अत: स्पष्ट है कि **सम्मुख प्रत्यास्थ टक्कर में समान द्रव्यमान के पिण्डों के वेग परस्पर परिवर्तित हो जाते हैं ।** इसी क्रम में यदि $u_2 = 0$ हो तो

$v_1 = u_2$ तथा $v_2 = u_1$

अर्थात यदि द्वितीय कण विरामावस्था में हो तो टक्कर के पश्चात प्रथम कण स्थिर हो जायेगा तथा द्वितीय कण प्रथम कण के वेग से गतिशील हो जायेगा ।

स्थिति 2: यदि $m_2 >> m_1$ (अर्थात लक्ष्य का द्रव्यमान प्रक्षेप्य के द्रव्यमान के सापेक्ष अत्यधिक हो)

इस अवस्था में

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \approx -1, \qquad \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \approx 0, \qquad \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \approx 2$$

अत: समी. 5.24 व समी. 5.25 से

$v_1 = -u_1 + 2u_2$ तथा $v_2 = u_2$

यदि लक्ष्य स्थिर हो अर्थात $u_2 = 0$ तब

$v_1 = -u_1$ तथा $v_2 = 0$

इस अवस्था में टक्कर के पश्चात हल्की वस्तु (प्रक्षेप्य) के वेग का परिमाण पूर्व वेग के परिमाण के बराबर ही रहेगा लेकिन दिशा विपरीत हो जायेगी जबकि लक्ष्य स्थिर ही रहेगा । उदाहरण के लिये दीवार से एक गेंद की टक्कर होने पर दीवार तो स्थिर ही रहती है जबकि गेंद उसी चाल से परावर्तित हो जाती है ।

स्थिति 3: यदि $m_1 >> m_2$ (अर्थात प्रक्षेप्य का द्रव्यमान लक्ष्य से बहुत अधिक है)

इस अवस्था में

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \approx -1, \qquad \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \approx 0, \qquad \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \approx 2$$

अत: समी. 5.24 व समी. 5.25 से

$v_1 = u_1$

तथा $v_2 = 2u_1 - u_2$

यदि लक्ष्य स्थिर हो अर्थात $u_2 = 0$ तब

$v_1 = u_1$ तथा $v_2 = 2u_1$

इस अवस्था में प्रक्षेप्य तो लगभग उसी वेग से गतिशील रहेगा जबकि लक्ष्य टक्कर के पश्चात प्रक्षेप्य की ही दिशा में उसके दुगने वेग से गतिशील हो जायेगा । यही कारण है कि α कण प्रकीर्णन प्रयोग में α कण का वेग लक्ष्य परमाणु के इलैक्ट्रॉन से टक्कर होने पर लगभग अप्रभावित रहता है ।

5.3.4 सम्मुख प्रत्यास्थ टक्कर में प्रक्षेप्य से लक्ष्य को स्थानान्तरित गतिज ऊर्जा (Transfer of K.E. to target the colliding body during head-on elastic collision)

किसी प्रक्षेप्य की टक्कर से पूर्व गतिज ऊर्जा $K_{ip} = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$

जबकि प्रक्षेप्य की टक्कर के पश्चात गतिज ऊर्जा $K_{fp} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$

अत: गतिज ऊर्जा में अन्तर -

$$\Delta K = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \left(1 - \frac{v_1^2}{u_1^2}\right)$$

या $\Delta K = K_{ip} \left(1 - \frac{v_1^2}{u_1^2}\right)$ .....(5.26)

किसी सम्मुख प्रत्यास्थ टक्कर में गतिज ऊर्जा का यह अन्तर ही प्रक्षेप्य से लक्ष्य को स्थानान्तरित गतिज ऊर्जा होती है ।

अत: $\frac{\Delta K}{K_{ip}} = 1 - \frac{v_1^2}{u_1^2}$

यदि लक्ष्य स्थिर हो तो समी. 5.24 से -

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) u_1$$

$$\frac{\Delta K}{K_{ip}} = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

या $\frac{\Delta K}{K_{ip}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 - m_2)^2 + 4m_1 m_2}$ .....(5.27)

गतिज ऊर्जा अधिकतम स्थानान्तरित होगी जबकि $m_1 - m_2 = 0$ (या $m_1 = m_2$) अर्थात किसी सम्मुख प्रत्यास्थ टक्कर में प्रक्षेप्य से लक्ष्य को (यदि लक्ष्य स्थिर हो) अधिकतम गतिज ऊर्जा

स्थानान्तरित होती है । यदि लक्ष्य तथा प्रक्षेप्य के द्रव्यमान समान हो तो इस अवस्था में गतिज ऊर्जा का स्थानान्तरण 100 प्रतिशत होता है ।

5.3.5 अप्रत्यास्थ सम्मुख टक्कर (Inelastic head-on collision)

माना कि m_1 तथा m_2 द्रव्यमान के दो कण एक सरल रेखा के अनुदिश u_1 तथा u_2 वेग से गतिशील है जिनके टक्कर के पश्चात वेग v_1 तथा v_2 हो जाते हैं एवं प्रत्यावस्थान गुणांक का मान e है । ($0<e<1$)

संवेग संरक्षण समी. 5.18 से

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$$

टक्कर के लिये न्यूटन की समी. 5.20 से

$$v_2 - v_1 = e(u_1 - u_2)$$

समी. 5.18 व समी. 5.20 से

$$v_1 = \left(\frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2}\right)u_1 + \frac{m_2(1+e)}{m_1+m_2}u_2 \qquad .....(5.28)$$

तथा $$v_2 = \frac{m_2(1+e)}{m_1+m_2}u_1 + \left(\frac{m_2 - em_1}{m_1+m_2}\right)u_2 \qquad .....(5.29)$$

अत: अप्रत्यास्थ टक्कर में गतिज ऊर्जा में परिवर्तन -

$$\Delta K' = \left(\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2\right)$$

या $$\Delta K' = \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(u_1-u_2)^2(1-e) \qquad .....(5.30)$$

यदि टक्कर पूर्णत: अप्रत्यास्थ हो अर्थात प्रक्षेप्य तथा लक्ष्य टक्कर के पश्चात सम्बद्ध होकर एक ही वेग V से गतिशील हो तो इस अवस्था में $e=0$

अत: $$\Delta K' = \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(u_1-u_2)^2$$

यहां $(u_1-u_2)^2$ धनात्मक है अत: $\Delta K'$ का मान भी धनात्मक होगा जो कि गतिज ऊर्जा में हानि को व्यक्त करता है।

पूर्णत: अप्रत्यास्थ टक्कर की स्थिति में यदि लक्ष्य प्रारम्भ में स्थिर हो ($u_2=0$)

$$\Delta K' = \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}u_1^2$$

$$\Delta K' = \frac{1}{2}m_1u_1^2\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)$$

$$\frac{\Delta K'}{K_{ip}} = \frac{m_2}{m_1+m_2}$$

यदि $m_2 >>> m_1$

$$\frac{\Delta K'}{K_{ip}} = 1$$

अर्थात यदि कम द्रव्यमान का प्रक्षेप्य अत्यधिक द्रव्यमान के स्थिर लक्ष्य से टक्कर के पश्चात सम्बद्ध हो जाता हो तो लगभग सारी गतिज ऊर्जा की हानि हो जाती है ।

अप्रत्यास्थ टक्करों (inelastic collision) में कुछ गतिज ऊर्जा अन्य रूपों में बदल जाती हैं । बड़े कणों में यह ऊर्जा प्राय: ऊष्मा के रूप में उत्पन्न हो जाती है, अर्थात् उन कणों के परमाणुओं की दोलन ऊर्जा बढ जाती है । अणु या परमाणु की किसी दूसरे कण से टक्कर में यदि प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा पर्याप्त मात्रा में अधिक है तो अणु या परमाणु कुछ ऊर्जा को शोषित कर लेते हैं जिससे उनकी आन्तरिक बनावट बदल जाती है और हम कहते हैं कि अणु या परमाणु अधिक ऊर्जा के स्तर (level) में उत्तेजित (excite) हो गया है । प्रत्येक प्रकार के अणु या परमाणु के लिए, उत्तेजन ऊर्जा (excitation energy) के कुछ निश्चित (definite) और विविक्त (discrete) मान होते हैं । (प्राय: यह ऊर्जा उसी समय या उसके थोड़े समय बाद प्रकाश के रूप में पुन: उत्सर्जित (emit) कर दी जाती है) इस प्रकार कण की अन्तिम गतिज ऊर्जा उत्तेजन ऊर्जा E के बराबर मात्रा में कम हो जाती है, अर्थात्

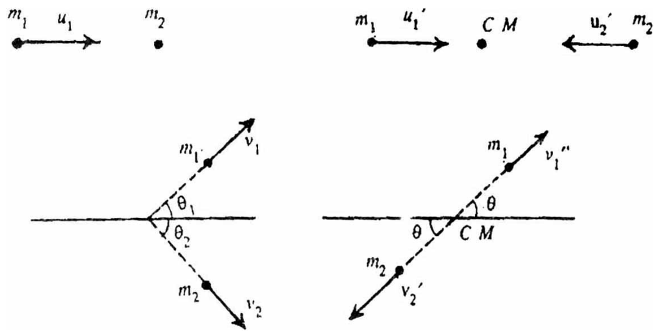
$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + E$$

ऐसा भी सम्भव है कि परमाणु या अणु टक्कर से पहले ही उत्तेजित अवस्था (excited state) में हों और टक्कर के दौरान (during the collision) इनकी आन्तरिक उत्तेजन ऊर्जा E गतिज ऊर्जा में बदल गई हो तो

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 + E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

5.3.6 स्थिर कण द्वारा गतिशील कण का विक्षेप (Deflection of a moving particle by the particle at rest)

यदि हम टक्कर की क्रिया के लिए एक उचित निर्देश-फ्रेम (Frame of refrence) चुनें तो टक्कर की समस्या सरलता से हल की जा सकती है । m_1 और m_2 द्रव्यमानों के दो कणों की प्रत्यास्थ टक्कर (elastic collision) के लिए हम ऐसा फ्रेम ले सकते हैं जिसमें m_2 द्रव्यमान का कण प्रारम्भ में स्थिर (rest) स्थिति में रहता है। कॉम्पटन प्रभाव (Compton effect),α -कणों के प्रकीर्णन (scattering of α particles) आदि में m_2 का प्रारम्भिक वेग प्रयोगशाला फ्रेम (Laboratory frame) में शून्य रहता है । मान लिया कि इस फ्रेम में m_1 द्रव्यमान के कण का वेग u_1 है और m_2 ने टक्कर के पश्चात् यह v_1 वेग से अपने प्रारम्भिक पथ से θ_1 कोण बनाती हुई दिशा में गति करता है । इस θ_1 को कण m_1 का प्रकीर्णन-कोण (scattering angle) कहते हैं (देखिये चित्र 5.4)।



चित्र 5.4

अब यदि हम X-अक्ष के अनुदिश u_1 की दिशा मानें और वह तल जिसमें u_1 व v_1 हैं, X-Y तल लें तो m_1u_1 और m_1v_1 में से किसी का भी z - अक्ष के अनुदिश घटक नहीं होगा । मान लो कि वेग v_2 की दिशा m_1 के प्रारम्भिक पथ से कोण θ_2 बनाती है तो संवेग और ऊर्जा के संरक्षण के लिए निम्नलिखित समीकरण होंगे :

$$m_1u_1 = m_1v_1\cos\theta_1 + m_2v_2\cos\theta_2$$
$$m_1v_1\sin\theta_1 - m_2v_2\sin\theta_2 = 0$$
$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 = \frac{1}{2}m_2v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

सिद्धान्ततः इन तीनों समीकरणों को साथ-साथ हल करके किन्हीं तीन राशियों के मान का परिकलन किया जा सकता है लेकिन यह गणना कार्य काफी लम्बा होगा ।

उपरोक्त समस्या को द्रव्यमान-केन्द्र निर्देश-फ्रेम (centre of mass frame of reference) में देखने पर सरलता से हल किया जा सकता है और इससे हमें टक्कर से सम्बन्धित अधिक सूचना प्राप्त होती है । द्रव्यमान-केन्द्र व द्रव्यमान-केन्द्र निर्देशतंत्र का विस्तृत अध्ययन आप इकाई 10 में करेंगे ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

6. रेडियो एक्टिवता में स्वतः विघटन की परिघटना से किस कण की खोज हुई?

………………………………………………………………………………………………

7. टक्कर किसे कहते हैं?

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

8. प्रत्यास्थ टक्कर एवं अप्रत्यास्थ टक्कर में क्या अन्तर है?

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

9. क्या किसी पूर्णतया अप्रत्यास्थ टक्कर में सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा क्षय हो सकती है?

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

10. टक्कर के लिये न्यूटन का नियम लिखिये ।

……

……

उदाहरण 5.6 M द्रव्यमान का एक कण u वेग से गति कर रहा है और वह m द्रव्यमान के कण, जो स्थिर स्थिति में है, सीधे टकराता है जिससे उसी रेखा के अनुदिश उनके वेग क्रमश: V और v हो जाते हैं । यह मानकर कि टक्कर प्रत्यास्थ है सिद्ध करो कि

$$v = \frac{2u}{1 + m/M}$$

यदि कण टक्कर के पश्चात् एक-दूसरे से चिपक जाते हैं तो अन्तिम वेग और गतिज ऊर्जा में हानि ज्ञात करो ।

हल : संवेग के संरक्षण के सिद्धान्त से, $Mu = MV + mv$

ऊर्जा से संरक्षण के सिद्धान्त से $\frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2$

या $$u^2 = V^2 + \frac{m}{M}v^2$$

दोनों समीकरणों से V को विलोपित करने पर

$$u^2 = V^2 + \frac{m^2v^2}{M^2} - \frac{2muv}{M} + \frac{m}{M}v^2$$

या $$0 = \left(\frac{m}{M} + 1\right)v - 2u$$

जिससे $$v \frac{2u}{1 + m/M}$$

दूसरी स्थिति में, जब टकराने पर कण एक-दूसरे से चिपक जाते हैं तो मान लिया कि अन्तिम वेग V हो जाता है । अत:

$$Mu = (m + M)V$$

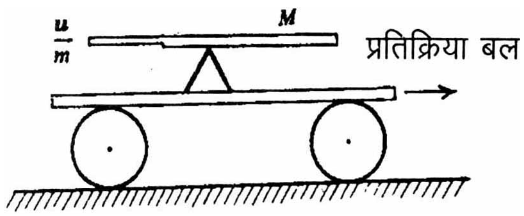
या $$V = \frac{Mu}{(m + M)}$$

गतिज ऊर्जा की हानि $= \frac{1}{2}Mu^2 - \frac{1}{2}(m + M)V^2$

$$= \frac{1}{2}Mu^2 - \frac{1}{2}(m + M)\frac{m^2u^2}{(m + M)^2}$$

$$= \frac{1}{2}Mu^2 \frac{m}{m + M}$$

उदाहरण 5.7 एक मशीनगन ट्रॉली पर रखी हुई है जो एक क्षैतिज घर्षण रहित पृष्ठ पर गति करने के लिए स्वतन्त्र है चित्र (5.5) । गन से 10 गोलियाँ प्रति सेकण्ड की दर से छोड़ी जाती हैं और प्रत्येक



चित्र 5.5

गोली का द्रव्यमान 10 ग्राम है । यदि तन्त्र (गन + ट्रॉली) का समय t पर द्रव्यमान 100 किग्रा. है और ट्रौली के सापेक्ष गोलियों का वेग 1000 मीटर / सेकण्ड है तो ट्रौली का त्वरण ज्ञात करो । तन्त्र पर उत्पन्न मध्यमान प्रणोद (thrust) कितना है?

हल: एक गोली का संवेग $=\frac{10}{1000}\times 1000 = 10$ किग्रा.-मीटर / सेकण्ड

प्रति सेकण्ड दिया गया संवेग =10 x 10 = 100 किग्रा.-मीटर / सेकण्ड^2

तन्त्र द्वारा अनुभव किया गया प्रणोद या बल = गोलियों को दिये गये संवेग परिवर्तन की दर

= 100 न्यूटन

अत: ट्रौली का त्वरण = बल / द्रव्यमान $=\frac{100}{100}=1$ मीटर / सेकण्ड^2

5.4 सारांश (Summary)

- रेखीय संवेग संरक्षण : यदि कण पर कार्य करने वाले परिणामी बाहरी बल का मान शून्य है तो रेखीय संवेग का संरक्षण होता है । यह रेखीय संवेग के संरक्षण का सिद्धान्त है ।
- दो कणों के निकाय के लिये रेखीय संवेग संरक्षण के नियम के अनुसार -

$$m_1\overline{u_1}+m_2\overline{u_2}=m_1\overline{v_1}+m_2\overline{v_2}$$

- n- कणों के निकाय के लिये रेखीय संवेग संरक्षण के नियम से -

$$\overline{p_1}+\overline{p_2}+\dots\dots+\overline{p_n} = \text{स्थिरांक}$$

- सभी प्रकार की टक्करों में रेखीय संवेग के संरक्षण के नियमों का पालन होता है ।
- रॉकेट की कार्यप्रणाली जेट नोदन के सिद्धान्त पर आधारित है, जिसमें भी रेखीय संवेग संरक्षण के नियम का पालन होता है ।
- रॉकेट का अन्तिम वेग

$$V = V_0 + v\log\left(\frac{M_0}{M}\right)$$

- प्रत्यास्थ टक्कर- टक्कर जिसमें रेखीय संवेग का संरक्षण होता हो तथा टक्कर से। पूर्व कणों की कुल गतिज ऊर्जा का मान टक्कर के पश्चात कुल गतिज के मान के बराबर होता हो प्रत्यास्थ टक्कर कहलाती है ।
- अप्रत्यास्थ टक्कर- टक्कर जिसमें टक्कर के पश्चात टकराने वाले कणों की गतिज ऊर्जा परिवर्तित हो जाती हो, अप्रत्यास्थ टक्कर कहलाती है ।

5.5 शब्दावली (Glossary)

अप्रत्यास्थ टक्कर	Inelastic collision
पलायन वेग	Escape velocity
प्रत्यास्थ टक्कर	Elastic collision
रॉकेट नोदन	Roket propulsion
संवेग	Momentum

5.6 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

D.S Mathur	Mechanics	S.Chand & Co., New Delhi
Berkley	Mechanics	New York
Ghose	Mechanics	Shiv Lal & Co., Agra
B.K. Agrawal & P.C. Agrawal	Mechanics	Sahitya Bhawan, Agra
जगदीश चन्द्र उपाध्याय	नवीन यांत्रिकी	रामप्रसाद एण्ड सन्स, आगरा
के. के. सरकार-आर. एन. शर्मा	यांत्रिकी	साहित्य भवन, आगरा
एम. पी. सक्सैना-एन. एस. सक्सैना	यांत्रिकी	कॉलेज बुक हाऊस, जयपुर

5.7 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment questions)

1. यदि कण पर कार्य करने वाले परिणामी बाहय बल का मान शून्य है तो रेखीय संवेग का संरक्षण होता है । यह रेखीय संवेग के संरक्षण का नियम कहलाता है ।

2. दो कणों के निकाय के लिये रेखीय संवेग संरक्षण होने के लिये निम्न शर्त का पालन होना आवश्यक है ।

$$m_1\overline{u_1} + m_2\overline{u_2} = m_1\overline{v_1} + m_2\overline{v_2}$$

3. रॉकेट की कार्यप्रणाली जेट नोदन के सिद्धान्त पर आधारित है ।

4. रॉकेट का अन्तिम वेग $V = V_0 + v\log\left(\frac{M_0}{M}\right)$

जहाँ M_0 प्रारम्भिक द्रव्यमान, M किसी क्षण रॉकेट का द्रव्यमान, V_0 प्रारम्भिक वेग, v रॉकेट के सापेक्ष निष्कासित गैस का वेग है ।

5. रेखीय संवेग संरक्षण नियम से जब कोई गोली बंदूक से दागी जाती है तो गोली की गति की दिशा के विपरीत बंदूक से उतनी ही मात्रा का संवेग उत्पन्न हो जाता है, जिससे बंदूक में पीछे की ओर धक्का लगता प्रतीत होता है ।

6. रेडियो एक्टिवता में विघटित सभी खण्डों के रेखीय संवेग का सदिश योगफल शून्य होता है जिसके आधार पर ही न्यूट्रॉनों की खोज सम्भव हो सकी थी ।

7. टक्कर एक ऐसी विलगित घटना है जिसमें दो या दो से अधिक पिण्डों के बीच एक प्रबल बल अल्प समय के लिये कार्यरत होता है । टक्कर की घटना में कम से कम किसी एक पिण्ड का वेग अवश्य परिवर्तित होता है ।

8. प्रत्यास्थ टक्कर में, टक्कर से पूर्व कणों की गतिज ऊर्जा का कुल मान टक्कर के पश्चात कणों की गतिज ऊर्जा के कुल मान के बराबर होता है, जबकि अप्रत्यास्थ टक्कर में ऐसा नहीं रह पाता है।

9. हां, जबकि टक्कर से पूर्व कणों का कुल संवेग शून्य हो ।

10. टक्कर के लिये न्यूटन के नियम के अनुसार

प्रत्यावस्थान गुणांक $e = \frac{\overline{v_2} - \overline{v_1}}{\overline{u_1} - \overline{u_2}}$

5.8 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. प्रत्यास्थ टक्कर में कौन-कौन सी राशियाँ संरक्षित रहती है?
2. पूर्णत: अप्रत्यास्थ टक्कर किसे कहते हैं, दो उदाहरण दीजिए ।

[**संकेत:** बंदूक की गोली का लक्ष्य में फंस जाना, मिट्टी के दो गोलों की टक्कर, बम का विस्फोट, गतिशील ट्रॉली से किसी मनुष्य का कूदना]

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

3. रेखीय संवेग के संरक्षण के सिद्धान्त को सिद्ध कीजिए । सिद्ध करो कि यदि कणों के एक निकाय पर कोई बाहरी बल कार्य नहीं कर रहा हो तो उसका रेखीय संवेग स्थिर रहता है ।
4. रॉकेट का सिद्धान्त समझाओं । रॉकेट के लिये निम्नलिखित सूत्र की स्थापना करो -

$$V = V_0 + v\log\left(\frac{M_0}{M}\right)$$

5. दो कणों के लिये प्रत्यास्थ टक्करों की विवेचना करो ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

6. एक इलेक्ट्रॉन 20 वोल्ट के विभवान्तर द्वारा त्वरित किया जाता है । इसका संवेग बताओ ।

(उत्तर: $\sqrt{2.4\times10^{-24}}$ किग्रा.-मी. / सेकण्ड)

7. एक 5000 किग्रा. का रॉकेट ऊर्ध्वाधर दिशा में छोड़ा जाता है । यदि निष्कासित चाल (exhaust speed) 500 मीटर प्रति सेकण्ड है तो रॉकेट के भार को संभालने (overcome) में, रॉकेट को 19.6 मीटर / सेकण्ड का ऊपर की ओर त्वरण प्रदान करने में आवश्यक प्रणोद बल (thrust) प्राप्त करने के लिए कितनी गैस की मात्रा प्रति सेकण्ड बाहर निकलनी चाहिए?

(उत्तर: 98 किग्रा / सेकण्ड)

संकेत: मान लिया कि m ग्राम / से. गैस की मात्रा रॉकेट से बाहर निकलती है ।

(i) रॉकेट का भार = Mg और ऊपर की ओर प्रणोद बल = mv

अत: रॉकेट के भार को ठीक सँभालने के लिए Mg = mv

$$\therefore m=\frac{Mg}{v}=\frac{5000\times 9.8}{500}=98$$ किग्रा. / सेकण्ड

(ii) यदि रॉकेट का ऊपर की ओर त्वरण a है, तो

mv - Mg = Ma

या $m=\frac{M}{v}\left(g+a\right)=\frac{5000}{500}\left(19.6+9.8\right)=294$ मीटर / सेकण्ड

8 एक 10 किग्रा. द्रव्यमान का रेत भरा थैला 3 मीटर लम्बी भारहीन डोरी से लटका हुआ है । उसमें एक 200 ग्राम द्रव्यमान की गोली 20 मी./ सेकण्ड की. चाल से दागी जाती है और थैले में रह जाती है । निम्नलिखित गणनाएँ करो :

(i) थैले द्वारा ग्रहीत चाल (acquired speed),

(ii) थैले का अधिकतम विस्थापन

(iii) इस टक्कर में ऊष्मा में परिणत ऊर्जा ।

संकेत: थैले का द्रव्यमान M = 10 किलोग्राम, गोली का द्रव्यमान m = 0.2 किलोग्राम

गोली की चाल u = 20 मीटर/ सेकण्ड, थैले की चाल v = ?

संवेग के संरक्षण के सिद्धान्त से

Mu = (m + M)v

$$\therefore v=\frac{mu}{m+M}=\frac{0.2\times 20}{10.2}=0.392$$ मीटर सेकण्ड

थैले का अधिकतम विस्थापन x = ?

इस विस्थापन पर प्रत्यानयन बल

$$F=-Cx=-M'g\sin\theta=-M'gx/l$$

जिसमें l डोरी की लम्बाई है ।

अत: $$C=\frac{M'g}{l}=\frac{10.2\times 9.8}{3}$$

x विस्थापन पर (थैले + गोली) की सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा, अर्थात्

$\frac{1}{2}\times 10.2\times\left(0.392\right)^2$, स्थितिज ऊर्जा अर्थात् $\int_0^x Cxdx=\frac{1}{2}Cx^2$ परिवर्तित हो जायेगी,

अत: $$\frac{1}{2}Cx^2=\frac{1}{2}\times 10.2\times\left(0.392\right)^2$$

$$x=\sqrt{\frac{10.2\times\left(0.392\right)^2\times 3}{10.2\times 9.8}}=0.392\times 0.54=0.21$$ मीटर

ऊष्मा में परिणत ऊर्जा $\frac{1}{2}mu^2-\frac{1}{2}\left(m+M\right)v^2$

$$\frac{1}{2}0.2\times 20^2-\frac{1}{2}10.2\left(0.392\right)^2$$

$=40-0.8=39.2$ जूल (लगभग)

इकाई-6

कोणीय संवेग संरक्षण
(Conservation of Angular Momentum)

इकाई की रूपरेखा

6.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप

- कोणीय संवेग के बारे में जान सकेंगे;
- कोणीय संवेग और बल आघूर्ण को समझ सकेंगे;
- कोणीय संवेग और बल आघूर्ण में सम्बन्ध स्थापित कर सकेंगे;
- चक्रणी और कक्षीय कोणीय संवेग में अन्तर कर सकेंगे;
- कोणीय संवेग संरक्षण सिद्धान्त को परिभाषित कर सकेंगे;
- केन्द्रीय बल के अन्तर्गत कण की गति एवं क्षेत्रफलीय वेग की अवधारणा को समझ सकेंगे;
- यह भी जान सकेंगे कि भारी नाभिक से आवेशित कण के प्रकीर्णन के दौरान किस प्रकार कोणीय संवेग संरक्षित रहता है;
- ग्रहों व उपग्रहों की गति से सम्बन्धित केप्लर के नियमों को समझ सकेंगे ।

6.1 प्रस्तावना

संरक्षण नियमों के अंतर्गत यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण का नियम आप इकाई 4 में विस्तार से पढ़ चुके हैं । इकाई 5 में रेखीय संवेग संरक्षण नियम की विस्तार से चर्चा की गई है । इस इकाई में कोणीय संवेग संरक्षण (angular momentum conservation) के नियम व इससे जुड़े विभिन्न पहलुओं की विस्तार से चर्चा की गई है ।

इस इकाई के अनुच्छेद 6.2 में कोणीय संवेग की अवधारणा को स्पष्ट किया गया है । कोणीय संवेग का सम्बन्ध कोणीय गति में महत्वपूर्ण भौतिक राशि बल आघूर्ण (Torque) से होता है । कोणीय संवेग व बल आघूर्ण विषय की चर्चा अनुच्छेद 6.2.1 में की गई है । अनुच्छेद 6.2.2 में द्रव्यमान-केन्द्र निदेश फ्रेम में कोणीय संवेग का मान ज्ञात किया गया है । अनुच्छेद 6.2.3 में चक्रणी (spin) व कक्षीय (orbital) कोणीय संवेगों की अवधारणा को विकसित किया गया है । इसी इकाई के अनुच्छेद 6.3 में कोणीय संवेग संरक्षण के सिद्धान्त को समझाया गया है । अनुच्छेद 6.3.1 में केन्द्रीय बल के अन्तर्गत कण की गति एवं क्षेत्रफलीय वेग (Areal velocity) जैसे विषय का वर्णन किया गया है । अनुच्छेद 6.3.2. में कोणीय संवेग संरक्षण के उदाहरणों के रूप में ग्रहीय व उपग्रहीय गति, संकुचन व कोणीय त्वरण, गैलेक्सी का आकार, इत्यादि को लेकर इस नियम के महत्व को स्थापित किया गया है ।

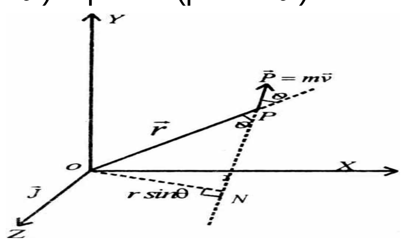
अनुच्छेद 6.4 में भारी नाभिक से आवेशित कण का प्रकीर्णन और इस घटना में कोणीय संवेग संरक्षण जैसे तथ्य की भूमिका को स्पष्ट किया गया है । अनुच्छेद 6.5 में ग्रहीय व उपग्रहीय गति की विवेचना करने वाले केप्लर के नियमों को समझाया गया है । इसी अनुच्छेद में केप्लर के नियम से गुरूत्वाकर्षण के नियम की व्युत्पति की गई है ।

6.2 कोणीय संवेग (Angular momentum)

घूर्णन गति में घूर्णन अक्ष के परित: किसी कण के रेखीय संवेग $\left(\vec{p} = m\vec{v}\right)$ के आघूर्ण को उस कण का कोणीय संवेग कहते हैं । यह एक अक्षीय सदिश राशि है जिसकी दिशा घूर्णन अक्ष के अनुदिश होती है तथा दाहिने हाथ के अंगूठे के नियम से दी जाती है । कोणीय संवेग का S.I. मात्रक जूल-सेकण्ड या किग्रा-मीटर^2 सेकण्ड होता है ।

चित्र 6.1 के अनुसार P बिन्दु पर स्थित एक कण का द्रव्यमान m तथा मूल बिन्दु O के सापेक्ष इसका स्थिति सदिश $\vec{r}$ है । कण का रेखीय संवेग $\vec{p} = m\vec{v}$ है । कण के रेखीय संवेग $\vec{p}$ का निर्देश बिन्दु O के सापेक्ष कोणीय संवेग का मान रेखीय संवेग के परिमाण तथा निर्देश बिन्दु O से रेखीय संवेग की क्रिया रेखा के लम्बवत् दूरी (r sin θ) के गुणनफल के बराबर होता है । अर्थात्-

$$J = (r \sin \theta) \quad p = r\,(p \sin \theta)$$



चित्र 6.1

कोणीय संवेग को सदिश रूप में निम्न प्रकार लिखते हैं-

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad .....(6.1)$$

कोणीय संवेग के बारे में विशेष तथ्य -

(1) यदि $\vec{r}$, कण वेग $\vec{r}$ के समान्तर (Parallel) या प्रति समान्तर (Antiparallel) हो अर्थात् जब रेखीय संवेग की क्रिया रेखा स्थिर बिन्दु O से गुजरती है तो कोणीय संवेग का मान शून्य हो जाता है-

θ = 0^0 या θ = 180^0 हो तो J = 0 (न्यूनतम)

यदि $\vec{r}$, कण वेग $\vec{v}$ लम्बवत् हो तो कोणीय संवेग का मान अधिकतम हो जाता है अर्थात्-

θ = 90^0 हो तो J = mvr (अधिकतम)

चूँकि वृत्तीय गति में $\vec{r}$ एवं v लम्बवत् होते हैं अत: वृत्तीय गति करते कण का वृत्त के केन्द्र बिन्दु के सापेक्ष कोणीय संवेग J = mvr हो जाता है ।

(2) कार्तिय निर्देशांक पद्धति में कोणीय संवेग को निम्न रूप में लिखते हैं-

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = m \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

या
$$\vec{J} = m\left\lfloor \hat{i}\left(yv_z - zv_y\right) + \hat{j}\left(zv_x - xv_z\right) + \hat{k}\left(xv_y + yv_x\right)\right\rfloor$$

$$= \hat{i}J_x + \hat{j}J_y + \hat{k}J_z$$

यहाँ $J_x = m\left(yv_z - zv_y\right), \quad J_y = m\left(zv_x - xv_z\right), \quad J_z = m\left(xv_y - yv_x\right)$

6.2.1 कोणीय संवेग और बल आघूर्ण (Angular momentum and torque)

किसी बिन्दु के सापेक्ष किसी कण के रेखीय संवेग (linear momentum) के आघूर्ण (moment) को उसका कोणीय संवेग (angular momentum) कहते हैं । अत: एक कण का किसी बिन्दु के सापेक्ष कोणीय संवेग $\vec{J}$ निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad .....(6.2)$$

जिसमें $\vec{r}$ उस बिन्दु से कण की सदिश दूरी है और $\vec{p}$ उस कण का रेखीय संवेग है । यदि प्रेक्षक (मूल बिन्दु) के सापेक्ष कण का द्रव्यमान m तथा स्थित सदिश $\vec{r}$ और वेग $\vec{v}$ है तो $\vec{p} = m\vec{v}$ संवेग वाले कण का बिन्दु O के सापेक्ष कोणीय संवेग

$$\vec{J} = m\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) \qquad .....(6.2)$$

कोणीय संवेग एक सदिश राशि है जिसका मान (pr sin θ) रेखीय संवेग और निर्देश बिन्दु (reference point) से इसकी लम्बवत् दूरी के गुणनफल के बराबर है तथा दिशा $\vec{r}$ और $\vec{v}$ (या $\vec{p}$) दोनों से निर्मित तल के लम्बवत् होती है । स्थिर निर्देश बिन्दु से गुजरने वाले किसी भी अक्ष के अनुदिश कोणीय संवेग J का घटक प्राय: उस अक्ष के सापेक्ष कण का कोणीय संवेग कहलाता है।

वृत्ताकार गति के लिए $\vec{J} = m\left(\vec{r} \times \vec{v}\right) = mr^2\omega$ .....(6.3)

अत: J और कोणीय वेग ω एक ही दिशा में हैं और यह गति के तल के लम्बवत् हैं ।

पुन: समी. (6.3) को t के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{dr}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

या $$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \left[\because \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0\right]$$

जिसमें न्यूटन के नियमानुसार $F = \frac{d\vec{p}}{dt}$ कण पर लगाया गया बल है ।

इस प्रकार स्थित सदिश $\vec{r}$ और बल $\vec{F}$ के सदिश गुणनफल को स्थिर बिन्दु के सापेक्ष बल-आघूर्ण (torque) कहते हैं और इसे $\vec{\tau}$ से प्रदर्शित करते हैं । अत:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{J}}{dt} \qquad .....(6.4)$$

किसी कण का बल-आघूर्ण उसके कोणीय संवेग $\vec{J}$ के समय के सापेक्ष परिवर्तन की दर के बराबर होता है ।

यदि बहुत से कण स्वतन्त्रतापूर्वक गति कर रहे हैं या दृढ़ वस्तु की तरह एकदूसरे से जुड़े हुए हैं तो किसी बिन्दु के सापेक्ष उनका कोणीय संवेग उस बिन्दु के सापेक्ष अलग-अलग कणों के कोणीय संवेगों के सदिश योग के बराबर होता है । यदि किसी बिन्दु के सापेक्ष एक कण-निकाय (system of particles) के विभिन्न कणों के कोणीय संवेग $\vec{J}_1, \vec{J}_2, \vec{J}_3 ....$ हैं तो कुल कोणीय संवेग

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \vec{J}_3 + ...$$

या $$\vec{J} = \left(\vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1\right) + \left(\vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2\right) + ...$$

या $$\vec{J} = \sum\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) \qquad .....(6.5)$$

अत: बल-आघूर्ण $$\vec{\tau} = \frac{d\vec{J}}{dt} = \sum\left(\vec{r} \times \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)\right) = \sum\left(\vec{r} \times \vec{F}\right) \qquad ......(6.6)$$

इस जोड़े में अन्योन्य +क्रिया (interaction) के आन्तरिक बलों के आघूर्ण (moment) एक-दूसरे को सन्तुलित कर लेते हैं क्योंकि बराबर और विपरीत एक रेखीय (collinear) बलों के जोड़े (क्रिया और प्रतिक्रिया) का आघूर्ण किसी भी बिन्दु के सापेक्ष बराबर और विपरीत होता है जिससे इन आघूर्णो का योग शून्य हो जाता है । अत: किसी बिन्दु के सापेक्ष एक कण-निकाय के कोणीय संवेग के परिवर्तन की दर कार्य करते हुए सभी बाहरी बलों के उस बिन्दु के सापेक्ष बल आघूर्णो के योग के बराबर होता है ।

6.2.2 द्रव्यमान-केन्द्र निर्देश-फ्रेम में कोणीय संवेग (Angular momentum in centre of mass reference frame)

समी. (6.5) से सम्पूर्ण कोणीय संवेग ज्ञात करने में यह प्राय: सुविधाजनक रहता है कि द्रव्यमान-केन्द्र (centre of mass) के सापेक्ष कणों के वेग और द्रव्यमान-केन्द्र का वेग काम में लाये जायें ।

मान लिया कि द्रव्यमान-केन्द्र के स्थिति सदिश और वेग क्रमश: $\vec{R}$ और $\vec{V}$ हैं तथा द्रव्यमान-केन्द्र के सापेक्ष m द्रव्यमान के किसी कण के स्थिति सदिश और वेग क्रमश: $\vec{r}_0$ और $\vec{v}_0$ हैं । स्थिर बिन्दु के सापेक्ष कण के स्थिति सदिश ($\vec{r}$) और वेग ($\vec{v}$) निम्नलिखित से दिये जायेंगे:

$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}_0 \qquad \left\lfloor \therefore \vec{r}_0 = \vec{r} - \vec{R} \right\rfloor$ और $\vec{v} = \vec{V} = \vec{v}_0$

अत: सम्पूर्ण कोणीय संवेग

$$\vec{J} = \sum m\left(\vec{R} + \vec{r}_0\right) \times \left(\vec{V} + \vec{v}_0\right)$$

$$= \sum m\left(\vec{R} \times \vec{V}\right) + \sum m\left(\vec{R} \times \vec{v}_0\right) + \sum m\left(\vec{r}_0 \times \vec{V}\right) + \sum m\left(\vec{r}_0 \times \vec{v}_0\right)$$

$$= \vec{R} \times \sum m\vec{V} + \vec{R} \times \left(\sum m\vec{v}_0\right) + \left(\sum m\vec{r}_0\right) \times \vec{V} + \sum \vec{r}_0 m\vec{v}_0$$

चूँकि $\quad \vec{r}_0 = \vec{r} - \vec{R} \quad$ या $\quad m\vec{r}_0 = m\vec{r} - m\vec{R}$

या $\sum m\vec{r}_0 = \sum m\vec{r} - m\vec{R}$ जिसमें $M = \sum m$ सभी कणों का द्रव्यमान

लेकिन द्रव्यमान-केन्द्र के गुण से

$$M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + ...\sum m\vec{r}$$

चूँकि $\sum m r_0 = 0$ (द्रव्यमान-केन्द्र के गुण से) ..... (6.7)

इसी प्रकार $\sum m v_0 = 0$ .....(6.8)

अत: $J = R \times M\vec{V} + \sum \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0$ ....(6.9)

इस समीकरण में $\sum \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0$ द्रव्यमान-केन्द्र के सापेक्ष कोणीय संवेग (मान लिया की $\vec{J}_{cm}$)प्रदर्शित करता है और $M\vec{V}$ सम्पूर्ण रेखीय संवेग P को बताता है । राशि $\vec{R} \times \vec{P}$ या $\vec{R} \times M\vec{V}$ स्थिर बिन्दु के सापेक्ष द्रव्यमान-केन्द्र का कोणीय संवेग है । अत:

$$\vec{J} = \vec{J}_{cm}\vec{R} \times \vec{P} \qquad ...(6.10)$$

6.2.3 चक्रणी (spin) और कक्षीय (orbital) कोणीय संवेग

पृथ्वी सूर्य के चारों ओर चक्कर लगाती है और साथ ही अपनी अक्ष के सापेक्ष भी घूमती है । पहली स्थिति में पृथ्वी के कोणीय संवेग की दिशा उसकी कक्षा (orbit) के लम्बवत् है और दूसरी स्थिति में चक्रणी (spin) गति के कारण उसके कोणीय संवेग की दिशा पृथ्वी के अक्ष के अनुदिश है । इन कोणीय संवेगों को क्रमश: कक्षीय कोणीय संवेग (orbital angular momentum) और चक्रणी कोणीय संवेग (spin angular momentum) कहते हैं । पृथ्वी का सम्पूर्ण कोणीय संवेग इन दोनों राशियों के सदिश योग के बराबर है; उनकी दिशाऐ एक-दूसरे से $23\frac{1}{2}^0$ के कोण पर झुकी हैं । इस प्रकार सौरमण्डल

(solar system) में प्रत्येक ग्रह का एक चक्रणी और एक कक्षीय कोणीय संवेग होता है । सूर्य का भी चक्रणी कोणीय संवेग है । सौरमण्डल का सम्पूर्ण कोणीय संवेग इन सब कोणीय संवेगों के सदिश योग के बराबर होगा ।

पृथ्वी के लिए, चक्रणी कोणीय संवेग $I\omega = \left(\frac{2}{5}mR^2\right)\omega$ .....(6.11)

---

* **द्रव्यमान– केंद्र एवं द्रव्यमान -- केन्द्र निर्देश तन्त्र का अध्ययन आप इकाई 10 में करेंगे**

जिसमें R पृथ्वी की त्रिज्या और $\omega = \frac{2\pi}{24\times60\times60}$ रेडियन/ से. उसका अपनी अक्ष के सापेक्ष को उसका कक्षीय कोणीय संवेग $= mr^2\omega$

जिसमें r पृथ्वी के केन्द्र से सूर्य के केन्द्र के बीच की दूरी है और $\omega = \frac{2\pi}{365\times24\times60\times60}$ रेडियन / सेकण्ड उसका सूर्य के सापेक्ष कोणीय वेग है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. कोणीय संवेग को परिभाषित करो?

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

2. बल आघूर्ण व कोणीय संवेग में सम्बन्ध को लिखो?

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

3. चक्रणी एवं कक्षीय कोणीय संवेग को समझाइये?

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

4. कोणीय संवेग संरक्षण के नियम को परिभाषित करो ।

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

उदाहरण 6.1 एक 50 सेमी. लम्बी डोरी के एक सिरे पर 100 ग्राम का एक पत्थर 2 चक्कर प्रति सेकण्ड की दर से घूमता है । इसका कोणीय संवेग ज्ञात करो । यदि 25 सेकण्ड पश्चात् यह केवल 1 चक्कर प्रति सेकण्ड लगाता है तो मध्यमान बल-आघूर्ण ज्ञात करो ।

हल : कोणीय संवेग $\vec{J} = m(\vec{r}\times\vec{v})$

वृत्ताकार गति में $|\vec{r}\times\vec{v}| = r^2\omega$

अतः $J = mr^2\omega = 0.1\times(0.5)^2\times(2\pi\times2)$

= 0.314 जूल-सेकण्ड (गति के तल की लम्बवत् दिशा में)

मध्यमान बल-आघूर्ण $= \frac{d\vec{J}}{dt} = mr^2\frac{d\omega}{dt} = 0.1\times(0.5)^2\times\frac{2\pi}{25}$

$=6.28 \times 10^{-3}$ न्यूटन-मीटर ($\vec{J}$ की दिशा में)

6.3 कोणीय संवेग संरक्षण (Conservation of angular momentum)

हम जानते हैं कि किसी कण का बल आघूर्ण ($\vec{\tau}$) उसके कोणीय संवेग ($\vec{J}$) के परिवर्तन की दर के बराबर होता है । अर्थात्

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

यदि बहुत से कण स्वतन्त्रतापूर्वक गति कर रहे हैं या दृढ़ पिण्ड की तरह एक दूसरे से जुड़े हुए हैं तो किसी निर्देश-बिन्दु के सापेक्ष उनका कुल कोणीय संवेग, उस निर्देश बिन्दु के सापेक्ष अलग-अलग कणों के कोणीय संवेगों के सदिश योग के तुल्य होता है । यदि निर्देश-बिन्दु 0 के सापेक्ष कणों के कोणीय संवेग $\vec{J}_1, \vec{J}_2, \vec{J}_3 ....$ हों तो

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \vec{J}_3 + ... \qquad ......(6.13)$$

तथा बल आघूर्ण $\vec{\tau} = \frac{d\vec{J}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i \right)$

यदि $\vec{\tau}=0$ हो तो $\frac{d\vec{J}}{dt} = 0$ या $\vec{J}_1$=स्थिरांक ....(6.14)

अत: विलगित निकाय (insolated system) अर्थात् यदि कण तन्त्र निकाय बल आघूर्ण मुक्त हो तो उस कण तन्त्र का कोणीय संवेग स्थिर रहता है इसे कण तन्त्र के लिए कोणीय संवेग संरक्षण सिद्धान्त कहते हैं ।

6.3.1 केन्द्रीय बल के अन्तर्गत कण की गति (Motion under central force)

एक कण पर कार्य करता हुआ केन्द्रीय बल वह होता है जो एक स्थिर केन्द्र से केवल उसकी दूरी पर निर्भर करता है। यदि स्थिर केन्द्र से कण की तात्कालिक स्थिति सदिश $\vec{\tau}$ है तो केन्द्रीय बल निम्नलिखित से दिया जाता है :

$$\vec{F} = f(r)\hat{r} \qquad .....(6.15)$$

जिसमें $f(r)$ दूरी r का अदिश फलन है और $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$

कण पर कार्य करता हुआ बल-आघूर्ण होगी :

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times f(r)\hat{r} = f(r)\left[\vec{r} \times \frac{\vec{r}}{r}\right] = 0$$

अत: $\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v} =$ स्थिरांक .....(6.16)

इस प्रकार केन्द्रीय बल के अंतर्गत गति करते हुये कण का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है । चूँकि $\vec{J}$ स्थिर है, अत: यह $\vec{r}$ और $\vec{v}$ के तल के हमेशा लम्बवत् रहेगा ।

निष्कर्षत: केन्द्रीय बल के अन्तर्गत एक कण का पथ एक तल में स्थित रहता है ।

6.3.2 कोणीय संवेग संरक्षण के उदाहरण (Examples of conservation of angular momentum)

- **ग्रहीय या उपग्रहीय गति (Planetary or satellite motion)**

ग्रह सूर्य के चारों ओर दीर्घवृत्ताकार कक्षाओं (elliptical orbits) में घूमते हैं । सूर्य और ग्रह का द्रव्यमान-केन्द्र इस दीर्घवृत्त का एक फोकस होता है । चूँकि सूर्य अपेक्षाकृत अधिक भारी है, अत: द्रव्यमान-केन्द्र सूर्य के केन्द्र के बहुत पास ही होता है । ग्रहों की गति समझाने के लिए इसे हम लगभग सूर्य के केन्द्र पर ही मान सकते हैं । ग्रह पर गुरूत्वाकर्षण बल सूर्य के केन्द्र की और है, अर्थात् यह बल केन्द्रीय बल है । इस कारण ग्रह का कोणीय संवेग $\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v}$ स्थिर रहेगा, अर्थात् ग्रह की कक्षा समतल (Plane) होगी ।

दीर्घवृत्ताकार पथ में होने वाली ग्रहीय गति में कोणीय संवेग ($\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v}$) संरक्षित करने के लिए ग्रह की चाल अपने पथ के सूर्य से पास के बिन्दु की अपेक्षा तेज होगी । इसका कारण यह है कि इन बिन्दुओं पर $\vec{r}, \vec{v}$ के लम्बवत् है, अत: कोणीय संवेग mvr होगा;

इस प्रकार यदि सूर्य से निकटतम और अधिकतम दूरियों r_1 व r_2 पर ग्रह के वेग क्रमश: v_1 व v_2 हों तो कोणीय संवेग की स्थिरता के लिए

$$mv_1r_1 = mv_2r_2$$

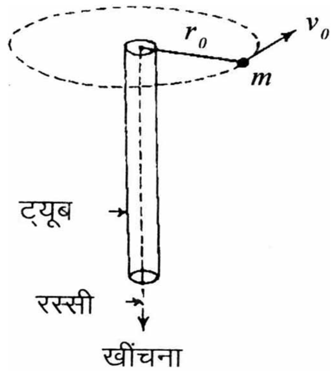
या
$$v_1r_1 = v_2r_2 \qquad \text{.........(6.17)}$$

इस प्रकार जब ग्रह सूर्य के पास होगा तो उसकी चाल का मान अधिक होगा ।

विदित हो कि यदि कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी के पास आता है तो वायुमण्डल का घर्षण उसकी चाल धीरे कर देता है और उसका कोणीय संवेग कम होता जाता है । परन्तु इस क्रिया में पृथ्वी का कोणीय संवेग बढ़ता है जिससे पृथ्वी और उपग्रह का सम्पूर्ण कोणीय संवेग स्थिर रहता है ।

- **संकुचन और कोणीय त्वरण (Contraction and angular acceleration)**

मान लिया m द्रव्यमान का एक कण एक डोरी के एक सिरे पर v_0 वेग से r_0 त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर गति कर रहा है । इस डोरी को एक नली (tube) में होकर गुजारकर एक बल से खींचा जाता है । डोरी के तनाव के कारण कण पर बल त्रिज्यीय (radial) होगा, अत: डोरी के खींचने पर अर्थात् त्रिज्या का मान कम करने पर बल आघूर्ण का मान (बल तथा केन्द्र से लम्बवत् दूरी एक ही दिशा में होने कारण) शून्य रहता है । इसलिए डोरी की लम्बाई कम करने पर



चित्र 6.2

कोणीय संवेग स्थिर रहना चाहिए । यदि बाद में कण का वेग v और वृताकार पथ की त्रिज्या r हो जाती है तो

$$mv_0r_0 = mvr \quad \text{जिससे ,} \quad v = \frac{r_0}{r}v_0$$

अत: दूरी r_0 पर कण की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv_0^2$ .....(6.18)

अत: दूरी r पर कण की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{r_0 v_0}{r}\right)^2$ .....(6.19)

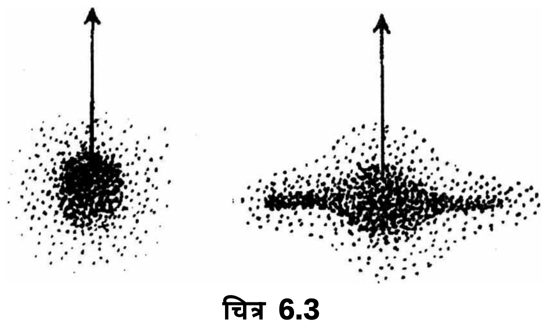
अत: गतिज ऊर्जा में हुई वृद्धि $= \frac{1}{2}mv_0^2\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 1\right]$ ....(6.20)

गतिज ऊर्जा में हुई यह वृद्धि अपकेन्द्र बल (centrifugal force) के विपरीत डोरी को खींचने में किए गए कार्य द्वारा होगी । यह कार्य ऊर्जा के बाहरी स्रोत या स्थितिज ऊर्जा द्वारा किया जाता है । हम देखते हैं कि r के कम होने पर, रेखीय और कोणीय वेग दोनों और बढ़ने चाहिए जबकि कोणीय संवेग स्थिर रहता है ।

अब यदि डोरी के सिरे पर बँधा हुआ एक कण, एक स्थिर छड़ी (stick) पर लिपटता (wind up) है तो डोरी छोटी होने पर वह छड़ी के पास आता जाता है । लेकिन इस स्थिति में बाहर से कोई ऊर्जा नहीं दी जाती है, अत: कण की गतिज ऊर्जा स्थिर रहनी चाहिए, अर्थात् $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$ । इस प्रकार r के कम होने पर कण के रेखीय वेग में कोई परिवर्तन नहीं आता है परन्तु कोणीय वेग $\omega = v/r$ बढ़ता जाता है । यहाँ पर छड़ी की अक्ष के सापेक्ष कण का कोणीय संवेग गिरता जाता है क्योंकि डोरी का तनाव त्रिज्यीय सदिश r, जो पथ के मध्यमान केन्द्र से गुजर रहा है, के लम्बवत नहीं है । यद्यपि, कण का पथ सर्पिलाकार (spiral) होगा और डोरी का तनाव पथ की स्पर्श रेखा के हमेशा लम्बवत् होगा जिससे रेखीय वेग में परिवर्तन नहीं होता है ।

- **गैलेक्सी का आकार (Shape of galaxy)**

तारों (stars) की बहुत बड़ी संख्या (10^{12} तक) के समूह को गैलेक्सी कहते हैं । इसमें बहुत बड़ी मात्रा में स्वतन्त्र गैस होती है । एक गैलेक्सी अन्य गैलेक्सियों से बहुत अधिक दूरियों द्वारा अलग रहती है । एक गैलेक्सी की आकृति प्राय: गोलाकार न होकर लैंस (lens) जैसे आकार की होती है । आधुनिक मतानुसार गैसों की बहुत बड़ी मात्रा के गुरूत्वाकर्षण संघनन (condensation) द्वारा गैलेक्सियाँ निर्मित हुई हैं ।



चित्र 6.3

मान लिया कि प्रारम्भ में गैस के लगभग गोलाकार द्रव्यमान का किसी अक्ष के सापेक्ष कोणीय संवेग J (चित्र 6.3 अ के अनुसार), चूँकि गैस गुरूत्वाकर्षण के कारण संघनित होती है अत: गैस के अणुओं में या तारों के बीच परस्पर या-प्रतिक्रिया बल (interacton force) होंगे और फलत: सम्पूर्ण कोणीय संवेग J संरक्षित रहना चाहिए ।

किसी कण के वृत्ताकार पथ के लिए, कोणीय संवेग संरक्षित रहने पर,

$$v_0 r_0 = vr = k \text{ या } v = k / r \quad \text{तथा } \omega = v / r = k / r^2$$

इसलिए अपकेन्द्र-बल $= \frac{mv^2}{r} = \frac{mk^2}{r^3}$ ....(6.21)

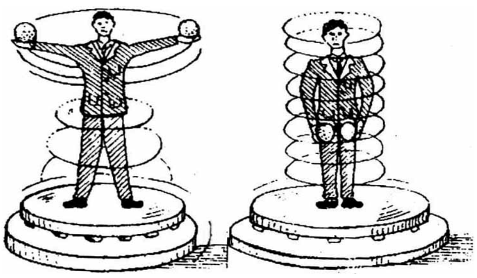
स्पष्ट है कि यदि घूर्णन-अक्ष के सापेक्ष किसी कण के घूमने से पथ की त्रिज्या r कम होती है तो अपकेन्द्र-बल बहुत तेजी से बढ़ता है और वह संकुचन (contraction) को रोकता है । लेकिन गैस घूर्णन-अक्ष या J की दिशा के समान्तर संघनित (condense) होने के लिए स्वतंत्र है । अत: गैलेक्सी की गैस चपटे (flat) आकार की होती जाती है और अन्त में लैंस जैसे आकार की हो जाती है (चित्र 6.3 ब) ।

- **अन्य उदाहरण (Other examples)**

यदि एक तन्त्र ω कोणीय वेग से किसी अक्ष के सापेक्ष घूम रहा है तो उसका कोणीय संवेग $J = I\omega$ से दिया जाता है; जिसमें I घूर्णन अक्ष के सापेक्ष तंत्र का जड़त्व आघूर्ण (moment of inertia) है ।

अत: कोणीय संवेग के संरक्षण के लिए $I\omega$ स्थिर रहना चाहिए ।

यहाँ पर हम कोणीय संवेग के संरक्षण के लिए एक सरल व प्रसिद्ध उदाहरण देते हैं । मान लिया कि एक -मनुष्य प्रारम्भ में अपने हाथों को ताने हुए एक घूमने वाली मेज पर खड़ा हुआ है और इसके हाथों में भारी-भारी गोले लगे हुए हैं । (चित्र 6.4 अ) मेज घूमने के लिए स्वतन्त्र है । शुरू में मेज धीरे से घुमा दी जाती है । दूसरी स्थिति में जब वह आदमी अपने हाथों को गोलों सहित नीचे गिरा लेता तो वह बड़ी तेजी से घूमने लगता है (चित्र 6.4 ब) ।



(अ) (ब)

चित्र 6.4

चूँकि दूसरी स्थिति में द्रव्यमान घूर्णन अक्ष के पास जाता है जिससे घूर्णन-तंत्र का जड़त्व-आघूर्ण पहले की अपेक्षा कम हो जाता है । चूँकि घूर्णन-तन्त्र का कोणीय संवेग स्थिर रहता है, जड़त्व-आघूर्ण कम हो जाने से कोणीय वेग बढ़ जाता है जिससे मुनष्य तेजी से घूमने लगता है । इस सिद्धान्त को सर्कस में खेल दिखाने वाले, गोताखोर आदि काम में लेते है ।

बोध प्रश्न (self assessment questions)

5. जब कण केन्द्रीय बल के प्रभाव में गति करता है तो उस समय क्या संरक्षित रहता है, दो उदाहरण लिखो ।

   ....

   ....

6. क्या केन्द्रीय बलों के प्रभाव में गति करते हुये कणों के लिये कोणीय संवेग स्थिर रहता है?

   ....

   ....

7. किसी घूमने वाले प्लेटफार्म पर हाथ फैलाकर खड़े व्यक्ति द्वारा एकाएक अपने हाथ समेट लेने पर प्लेटफार्म के वेग में वृद्धि क्यों हो जाती है ।

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

8. किसी पत्थर को डोरी से बाँधकर घुमाया जा रहा है, अब यदि डोरी की लम्बाई कम कर दी जाती है तो पत्थर के वेग पर क्या प्रभाव पड़ेगा ।

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

उदाहरण 6.2 एक पुच्छल तारे (comet) की सूर्य से महत्तम और न्यूनतम दूरियाँ क्रमशः $1.4\text{x}10^{12}$ मी. और $7\text{x}10^{10}$ मी. हैं । जब यह सूर्य के सबसे पास आता है तो इसका वेग $6 \text{ x } 10^{14}$ मी. से होता है । सबसे अधिक दूरी पर पुच्छल तारे का वेग क्या होगा ? मान लो कि वह दोनों स्थितियों में वृत्ताकार पथ पर गति करता है ।

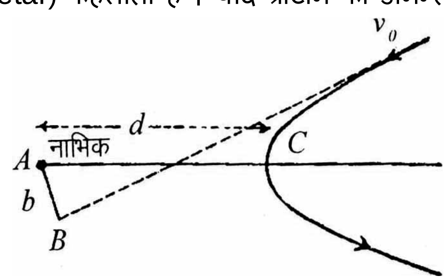
हल : पुच्छल तारे के लिए कोणीय संवेग के संरक्षण से

$$m.v_1r_1 = mv_2r_2$$

$$\therefore v_2 = \frac{v_1 r_1}{r_2} = \frac{6\times10^4\times7\times10^{10}}{1.4\times10^{12}} = 3\times10^3 \text{ मी./ सेकण्ड}$$

6.4 भारी नाभिक से आवेशित कण का प्रकीर्णन (Scattering of charged particle by heavy nucleus)

मान लिया कि m द्रव्यमान और +e आवेश का एक प्रोटॉन Ze आवेश से आवेशित एक भारी नाभिक की ओर गति कर रहा है, जिसमें z नाभिक की परमाणु संख्या (atomic number) है । प्रोटॉन पर विकर्षण (repulsion) का स्थिर विद्युतीय बल कार्य करेगा जिससे उसका पथ अति परवलय (hyperbola) होगा । प्रोटॉन की प्रारम्भिक गति की दिशा से नाभिक की लम्बवत् दूरी b संघात पैरामीटर (impact parametar) कहलाती है । यदि प्रोटॉन का अनन्त दूरी पर वेग v_0 है तो इसकी



चित्र 6.5

प्रारम्भिक गति गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv_0^2$ होगी और इसका भारी नाभिक (जिसे स्थिर माना गया है) के सापेक्ष कोणीय संवेग mv_0b होगा । यदि प्रोटॉन की नाभिक से निकटतम पहुँच की दूरी (distance of closet approach) d है और वहाँ पर उसका वेग v_c है तो गतिज ऊर्जा - $\frac{1}{2}mv_c^2$ होगी और कोणीय संवेग mv_cd होगा जबकि वहाँ पर स्थिर विद्युत स्थितिज ऊर्जा $\frac{ze^2}{(4\pi \in_0)d}$ होगी । कोणीय संवेग और ऊर्जा के संरक्षण के लिए

$$Mv_c\, b = mv_c\, d \qquad ....(6.22)$$

तथा
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{ze^2}{(4\pi \in_0)d} \qquad ....(6.23)$$

समी. (6.22) से v_c का मान समी. (6.23) में रखने पर

$$\frac{ze^2}{(4\pi \in_0)d} = \frac{1}{2}mv_0^2\left\{1-\left(\frac{b}{d}\right)^2\right\} \qquad .....(6.24)$$

जिससे प्रोटॉन की निकटतम पहुँच की दूरी d का मान ज्ञात किया जा सकता है ।

बोध प्रश्न (self assessment questions)

9. नाभिक द्वारा आवेशित कणों के प्रकीर्णन के दौरान कौनसी भौतिक राशि संरक्षित रहती है ।

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

10. संघात प्राचाल (Impact parameter) किसे कहते हैं?

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

6.5 केप्लर के नियम (Keppler's laws)

केप्लर द्वारा खगोलीय प्रेक्षणों के आधार पर सौर परिवार (solar system) में ग्रहीय गति सम्बन्धी अग्रांकित तीन नियम प्रतिपादित किये गये थे-

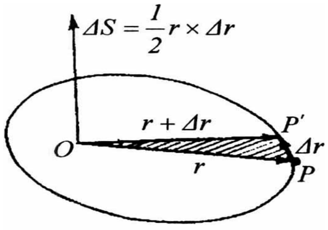
प्रथम नियम : प्रत्येक ग्रह (planet) सूर्य के चारों ओर दीर्घवृत्तीय कक्षा (elliptical orbit) में परिक्रमण करता है जिसमें सूर्य उस दीर्घवृत्तीय कक्षा के एक फोकस पर स्थित होता है ।

द्वितीय नियम : किसी भी ग्रह की सूर्य से मिलाने वाली रेखा समान समयान्तर में समान क्षेत्रफल प्रसर्पित (sweep) करती है । अर्थात् सूर्य से ग्रह तक खींची गयी एक रेखा द्वारा पार किये गये क्षेत्रफल की देर स्थिर रहती है ।

माना कि 0 पर स्थित सूर्य कार्यरत बल का केन्द्र है । यदि Δt समयान्तराल में अभीष्ट ग्रह का स्थिति सदिश $\vec{r}$ से $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ हो जाता है तो त्रिज्यीय सदिश द्वारा इस समय में पार किया हुआ सदिश क्षेत्रफल

$$\Delta\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\Delta\vec{r} \qquad .....(6.25)$$

यह क्षेत्रफल Δt समय में पार किया जाता है ।



चित्र 6.6

अत: समी. (6.25) के दोनों ओर Δt से भाग देकर सीमा $\Delta t \rightarrow 0$ लेने पर -

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v} = \frac{\vec{J}}{2m} \qquad ...(6.26)$$

चूँकि केन्द्रीय बल के प्रभाव में $\vec{J}$ स्थिर रहता है; अत: क्षेत्रफलीय वेग $\frac{d\vec{s}}{dt}$ भी स्थिर रहता है ।

ग्रहीय गति के लिए $\vec{J}$ के स्थिर रहने का अर्थ है कि क्षेत्रफलीय वेग $\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{\vec{J}}{2m}$ एक स्थिरांक है, अर्थात् सूर्य से ग्रह तक खींची गयी एक रेखा द्वारा पार किये गये क्षेत्रफल की दर स्थिर रहती है ।

इसे केप्लर (keppler) का ग्रहीय गति सम्बन्धी दूसरा नियम भी कहते हैं ।

इसी प्रकार कृत्रिम उपग्रह (artificial satellites) पृथ्वी के चारों और घूमते हैं और उनका कोणीय संवेग संरक्षित रहता है ।

तृतीय नियम : सूर्य के चारों ओर किसी भी ग्रह के परिक्रमण काल (T)का वर्ग, उसकी दीर्घवृत्तीय कक्षा के अर्ध-दीर्घ अक्ष (semi major axis)a के घन (cube) के अनुक्रमानुपाती होता है अर्थात् $T^2 \propto a^2$ ।

- **केप्लर के नियमों से न्यूटन के गुरूत्वाकर्षण नियम का निगमन**

माना M द्रव्यमान के सूर्य के चारों ओर m द्रव्यमान को कोई ग्रह, दीर्घवृत्ताकार पथ पर गतिशील है । किसी क्षण फोकस (सूर्य) से ग्रह की दूरी r है तो ग्रह पर कार्यरत अभिकेन्द्रीय बल,

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

या $$F = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

परन्तु केप्लर के तृतीय नियम के अनुसार

$T = kr^{3/2}$ (यहाँ r दीर्घवृत्तीय कक्षा की अर्द्ध-दीर्घ अक्ष है ।)

इसलिए $$F = \frac{4\pi^2 mr}{\left(kr^{3/2}\right)^2} = \frac{4\pi^2 m}{k^2 r^2}$$

जहाँ $\frac{4\pi^2}{k^2}$ का मान GM के तुल्य प्राप्त होता है । यही न्यूटन का गुरूत्वाकर्षणीय नियम है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

11.	केप्लर के तृतीय नियम को लिखिये ।
	……
	……
12.	केप्लर के नियम से सूर्य का द्रव्यमान ज्ञात करो ।
	……
	……

उदाहरण 6.3 केप्लर के नियम से न्यूटन के गुरूत्वाकर्षण नियम को स्थापित करो ?

हल: माना सूर्य का द्रव्यमान M व ग्रह का द्रव्यमान है, अत: गति की समीकरण

$$F = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

या $$F = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

परन्तु केप्लर के तृतीय नियम से

T = kr$^{3/2}$

अत: $$F = \frac{4\pi^2 mr}{\left(kr^{3/2}\right)^2} = \frac{4\pi^2 m}{k^2 r^2}$$

जहाँ $\frac{4\pi^2}{k^2}$ का मान GM के तुल्य प्राप्त होता है । यही न्यूटन का गुरुत्वाकर्षणीय नियम है ।

उदाहरण 6.4 एक m द्रव्यमान का उपग्रह r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ में गति करता है । इसका कोणीय संवेग G,M,m और, r के रूप में ज्ञात करो, जिससे M पृथ्वी का द्रव्यमान है ।

हल: वृत्ताकार कक्षा के लिए j = mvr; इसकी दिशा गति के तल के लम्बवत् होगी ।

अब चूँकि उपग्रह पर गुरूत्वाकर्षण बल अपकेन्द्र बल द्वारा सन्तुलित होता है,

अत: $\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$ या $(mvr)^2 = GMm^2 r$

$$\therefore J = mvr\left(GMm^2 r\right)^{1/2}$$

उदाहरण 6.5 चन्द्रमा पृथ्वी के चारों ओर अपनी कक्षा में चक्कर लगाता है और साथ ही वह अपनी अक्ष के सापेक्ष घूमता है । दोनों स्थितियों में कोणीय संवेगों की तुलना करो (चन्द्रमा का परिक्रमण 2.36x10^6 सेकण्ड ।

हल: पृथ्वी के सापेक्ष चन्द्रमा का कोणीय संवेग j_1 = mvr = mr$^2\omega$

चन्द्रमा का द्रव्यमान m = 7.35 x 10^{22} किलोग्राम; चन्द्रमा के कक्ष की त्रिज्या, r = 3.84 x 10^8 मीटर और पृथ्वी के सापेक्ष कोणीय वेग $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2.36\times10^6}$ रेडियन / सेकण्ड

$$\therefore J_1 = 7.35\times10^{22}\times(3.84\times10^8)^2\times\frac{2\pi}{2.36\times10^6} = 2.89\times10^{34} \text{ जूल-सेकण्ड}$$

हम जानते हैं कि हमें हमेशा चन्द्रमा का एक ही ओर का भाग दिखायी देता है । अत: चन्द्रमा को अपनी अक्ष के सापेक्ष घूमने में उतना ही समय लगाना चाहिए जितने में यह पृथ्वी के चारों ओर एक चक्कर लगाता है । अत: चन्द्रमा का अपनी अक्ष के सापेक्ष एक चक्कर का आवर्तकाल (इस प्रकार कोणीय आवृत्ति) पृथ्वी के सापेक्ष परिक्रमण-काल (period of revolution) के ठीक बराबर होगा ।

इस प्रकार अपनी अक्ष के सापेक्ष चन्द्रमा का कोणीय संवेग

$$J_2 = 1\omega = \frac{2}{5}mR^2\omega'$$

जिसमें R = चन्द्रमा की त्रिज्या और ω' = अपनी अक्ष के सापेक्ष कोणीय वेग ।

$$J_2 = \frac{2}{5}\times 7.35\times 10^{22}\times(1.74\times 10^6)^2\times\frac{2\pi}{2.36\times 10^6} = 2.37\times 10^{29} \quad \text{जूल-सेकण्ड}$$

$$\frac{J_1}{J_2} = 1.22\times 10^5$$

उदाहरण 6.6 0.5 A^0 त्रिज्या के वृत्ताकार पथ में इलेक्ट्रॉन एक प्रोटॉन के चारों ओर घूमता है :

(अ) प्रोटॉन के सापेक्ष इलेक्ट्रॉन का कक्षीय कोणीय संवेग क्या है?

(ब) इलेक्ट्रॉन की सम्पूर्ण ऊर्जा इलेक्ट्रॉन वोल्ट में कितनी है?

हल: (अ) चूँकि इलेक्ट्रॉन का पथ वृताकार है, अत: इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग

$$J = mvr \qquad \text{(चूँकि } \vec{r} \text{ और } \vec{v} \text{ परस्पर लम्बवत् हैं)}$$

वृत्ताकार पथ में इलेक्ट्रॉन के घूमने के लिए आवश्यक बल इलेक्ट्रॉन और प्रोटॉन के बीच कार्य करते हुए कूलॉम्ब बल द्वारा प्रदान किया जाता है, अर्थात्

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \quad \text{या} \quad m^2v^2r^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}me^2r$$

$$J = mvr = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}me^2r}$$

(ब) इलेक्ट्रॉन की गतिज ऊर्जा $k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2r}$

इलेक्ट्रॉन की स्थितिज ऊर्जा $= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$

इसलिए इलेक्ट्रॉन की सम्पूर्ण ऊर्जा $= K + U \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{2r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$

उदाहरण 6.7 एक m द्रव्यमान का कण r_0 लम्बाई की डोरी के एक सिरे पर वृत्ताकार पथ में घूमता है । इसका दूसरा सिरा एक पतली नली में होकर गुजरता है । 10 सेमी, लम्बी डोरी होने पर यदि कण दो चक्कर प्रति सेकण्ड लगाता है तो लम्बाई 5 सेमी. होने पर वह कितने चक्कर प्रति सेकण्ड लगाएगा? यदि डोरी की लम्बाई नली पर लिपटकर कम होती है तो क्या परिणाम होगा?

हल: वृत्ताकार गति में कोणीय संवेग के संरक्षण के लिए,

$$Mv_1r_1 = mv_2r_2$$

या $\omega_1 r = \omega_2 r_2$ $(\because v = r\omega)$

लेकिन ω = 2π × प्रति सेकण्ड चक्करों की संख्या =2πn

$n_1 r_1^2 = n_2 r_2^2$

या $n_2 = n_1 \left(r_1 / r_2\right)^2$ = $2(10/5)^2$ = 8 चक्कर / सेकेण्ड

इस स्थिति में, चूंकि $r_1 > r_2$, अत: $v_2 > v_1$ अर्थात् कण की अन्तिम गतिज ऊर्जा $\left(\frac{1}{2}mv_2^2\right)$ प्रारम्भ की गतिज ऊर्जा $\left(\frac{1}{2}mv_1^2\right)$ की अपेक्षा अधिक है । यदि डोरी नली पर लिपटकर कम होती है तो कण की गतिज ऊर्जा स्थिर रहेगी ।

अब $\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2$

या, $\therefore v_1 = v_2$ या $r_1\omega_1 = r_2\omega_2$ या $n_1 r_1 = n_2 r_2$

जिससे $n_2 = n_1(r_1 / r_2) = 2\ (0.1 / 0.5) = 4$ चक्कर / सेकण्ड

6.6 सारांश (Summary)

- कोणीय संवेग: घूर्णन में पूर्ण अक्ष के परित: किसी कण के रेखीय संवेग के आघूर्ण को उस कण का कोणीय संवेग कहते है । कोणीय संवेग को सदिश रूप में निन्म प्रकार से लिखते है

  $$\vec{j} = \vec{r} \times \vec{p}$$

- बल आघूर्ण: यदि कोई दृढ़ पिण्ड या वस्तु किसी अक्ष के एक बिन्दु से कीलकित (Pivoted) है तो बल लगाने पर साधारणत: वह उस अक्ष के परित: घूमने की प्रवृत्ति रखता है । बल की पिण्ड को किसी अक्ष के परित: घुमाने की प्रवृत्ति को जिस राशि द्वारा मापा जाता है, उसे बल आघूर्ण कहते है । इसे प्रतीक $\vec{\tau}$ से प्रदर्शित करते है ।
- बल आघूर्ण व कोणीय संवेग में सम्बन्ध: कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर आरोपित बल-आघूर्ण के बराबर होती है, अर्थात $\vec{\tau} = \frac{d\vec{J}}{dt}$
- किसी वस्तु द्वारा स्वयं के अक्ष के सापेक्ष घूर्णी गति के कारण जो कोणीय संवेग होता है उसे चक्रणी कोणीय संवेग कहते है । जबकि उस वस्तु द्वारा दूसरी वस्तु के सापेक्ष घूर्णी गति के कारण कोणीय संवेग होता है, उसे कक्षीय कोणीय संवेग कहते है ।
- कोणीय संवेग संरक्षण का सिद्धान्त: किसी विलगित निकाय के लिये अर्थात् यदि कण तन्त्र निकाय बल आघूर्ण मुक्त हो तो उस कण तन्त्र का कोणीय संवेग स्थिर रहता है, इसे कण तन्त्र के लिये कोणीय संवेग संरक्षण सिद्धान्त कहते हैं ।
- केन्द्रीय बल के अन्तर्गत गाते करते हुये कण का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है ।
- केन्द्रीय बलो के लिये कणो का क्षेत्रफलीय वेग स्थिर रहता है ।
- ग्रहीय या उपग्रहीय गति में कोणीय संवेग संरक्षित रहता है ।

- गैलेक्सी का आकार लैंस जैसा होता है, किसी कोणीय संवेग के संरक्षण के कारण संभव हो जाता है
- भारी नाभिक से आवेशित कण के प्रकीर्णन के दौरान कोणीय संवेग संरक्षण नियम का पालन होता है । इससे टक्कर प्राचाल या संधात पैरामीटर का मान भी ज्ञात किया जा सकता है ।
- केप्लर द्वारा खगोलीय प्रेक्षणों के आधार पर सौर परिवार में ग्रहीय गति सम्बन्धी तीन नियम प्रतिपादित किये ।
- केप्लर के तृतीय नियम की सहायता से न्यूटन के गुरूत्वाकर्षण नियम को उत्पन्न किया जा सकता है ।

6.7 शब्दावली (Glossary)

कोणीय संवेग	Angular momentum
कोणीय संवेग संरक्षण	Angular momentum conservation
बल आघूर्ण	Torque
सौरमण्डल	Solar system
क्षेत्रफलीय वेग	Areal velocity
संघात प्राचाल	Impact parameter
प्रसर्पित	Sweep

6.8 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

D.S Mathur	Mechanics	S.Chand & Co., New Delhi
Berkley	Mechanics	New York
Ghose	Mechanics	Shiv Lal & Co., Agra
B.K. Agrawal & P.C. Agrawal	Mechanics	Sahitya Bhawan, Agra
जगदीश चन्द्र उपाध्याय	नवीन यांत्रिकी	रामप्रसाद एण्ड सन्स, आगरा
के. के. सरकार-आर. एन. शर्मा	यांत्रिकी	साहित्य भवन, आगरा
एम. पी. सक्सैना-एन. एस. सक्सैना	यांत्रिकी	कॉलेज बुक हाऊस, जयपुर

6.9 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment questions)

1. किसी बिन्दु के सापेक्ष किसी कण का कोणीय संवेग ($\vec{J}$) उस बिन्दु के सापेक्ष कण के रेखिक संवेग का आघूर्ण होता है, अर्थात् $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$
2. कण के कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर उस कण पर लगे बल आघूर्ण के तुल्य होती है।
3. किसी वस्तु की अपने अक्ष के सापेक्ष घूर्णी गति के कारण तो चक्रणी कोणीय संवेग होता है, जबकि अन्य वस्तु के सापेक्ष घूर्णी गति के कारण कक्षीय कोणीय संवेग होता है ।
4. यदि कण तन्त्र निकाय बल आघूर्ण मुक्त हो तो उस कण तन्त्र का कोणीय संवेग स्थिर रहता है ।
5. कोणीय संवेग संरक्षित रहता है; ग्रहीय गति व नाभिक द्वारा आवेशित कणों का प्रकीर्णन ।

6. केन्द्रीय बलों के प्रभाव में कोणीय संवेग $\vec{J}$ संरक्षित रहता है, अत: इस कारण क्षेत्रफलीय वेग भी नियत रहता है ।
7. ऐसा करने पर तन्त्र का जड़त्व-आघूर्ण कम हो जाने से कोणीय वेग बढ़ जाता है, जिससे $\vec{J}$ नियत रह सके ।
8. कोणीय संवेग संरक्षित रहने के कारण पत्थर का वेग बढ़ जाता है ।
9. कोणीय संवेग संरक्षित रहता है ।
10. आवेशित कण की प्रारम्भिक गति की दिशा से नाभिक की लम्बवत् दूरी "b" को संघात प्राचाल कहते हैं ।
11. $T^2 \propto r^3$ या $\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$ नियतांक
12. यदि M_s सूर्य का द्रव्यमान हो व m पिण्ड का द्रव्यमान हो तथा पिण्ड इसके चारों ओर वृत्ताकार गति कर रहा हो तो, गति की समीकरण $\frac{GM_s m}{r^2} = mr\omega^2$ परन्तु $T = \frac{2\pi^2}{\omega}$ या

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} \Rightarrow M_s \frac{4\pi^2 r^2}{GT^2}$$

6.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न (very short answer type questions)

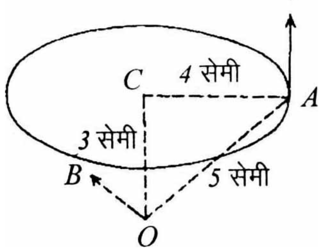
1. गैलेक्सी का आकार लैंस जैसा क्यों होता है?

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

2. कोणीय संवेग संरक्षण का नियम प्रतिपादित कर दो उदाहरणों से समझाइये ।
3. केन्द्रीय बल के अन्तर्गत होने वाली गति में कोणीय संवेग संरक्षण की विवेचना कीजिये ।
4. गैलेक्सी की आकृति की विवेचना कीजिये ।
5. केप्लर के ग्रहीय गति के नियम क्या है?

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

6. एक 20 ग्राम द्रव्यमान का कण 10 सेमी. / सेकेण्ड की स्थिर चाल से 4 सेमी. त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर गति कर रहा है । निम्नलिखित बिन्दुओं के सापेक्ष उसका कोणीय संवेग कितना होगा: (अ) वृत्ताकार पथ के केन्द्र के सापेक्ष, (ब) उस बिन्दु के सापेक्ष जो वृत्त के अक्ष पर केन्द्र से 3 सेमी. दूरी पर है । इनमें से कौन-सा उसी दिशा में रहेगा ?



चित्र 6.7

संकेत: (अ)J = mvr = 0.02 x 0.1 x 0.04 = 8 x 10^{-5} -जूल-से., दिशा वृत्त के तल के लम्बवत् होगी ।

(ब) J = 0.02 x 0.1 x 0.05 = 10^{-4} जूल-से.; दिशा कण A के तात्कालिक (instantaneous) त्रिज्यीय सदिश और तात्कालिक वेग के तल के लम्बवत् होगी अर्थात् इसकी दिशा OB होगी जो समय के साथ बदलती जा रही है ।

7. सोने (Gold) के नाभिक (Z = 80) के लिए 2Mev गतिज ऊर्जा वाले -α कणों की निकटतम पहुँच की दूरी (distance of closet approach) 2 x 10^{-11} सेमी. है तो संघात पैरामीटर (impact parameter) ज्ञात करो ।

(**उत्तर:** 1-3x10^{-13} मी.)

इकाई-7

जड़त्वीय तन्त्र

(Inertial Frame)

इकाई की रूपरेखा

7.0 उद्देश्य (objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप समझ पायेंगे कि

- किसी वस्तु या कण की गतिक या स्थैतिक स्थिति को व्यक्त करने के लिए हमें एक स्वेच्छ संदर्भ बिन्दु की आवश्यकता होती है;
- निकाय की वस्तुस्थिति की गणितीय विबेचना के लिए इस स्वेच्छ संदर्भ बिन्दु को मूल-बिन्दु मान लेते हैं
- त्रिविमीय निर्देश अक्षों (**X,Y,Z**) के प्रतिच्छेदन बिन्दु को मूल बिन्दु कहा जाता है;
- चयनित संदर्भ बिन्दु को मूल बिन्दु लेते हुए संलग्नक निर्देशांक तन्त्र को निर्देश तन्त्र कहा जाता है;
- पिण्डों या कणों की सापेक्ष गति को परिभाषित करने के लिए एक निर्देश तन्त्र का चयन करना आवश्यक होता है

- किसी वस्तु या कण स्थिर या गति-अवस्था, पूर्णत: सापेक्षिक अवधारणायें हैं;
- न्यूटन के गति विषयक प्रथम व द्वितीय नियम ऐसे सभी निर्देश तन्त्रों में वैध रहते हैं जो किसी स्थिर निर्देश तन्त्र के सापेक्ष समान वेग से गतिशील होता है ।

7.1 प्रस्तावना (Introduction)

दैनिक जीवन में प्रतिदिन हम वस्तुओं के स्थिर होने या किसी किसी वस्तु के गतिशील होने की बात सुनते हैं और अनुभव भी करते हैं । उदाहरण के लिए जब आप बस या कार में बैठकर यात्रा करते हैं तो यह अनुभव करते हैं कि सड़क-किनारे पर स्थित पेड़ आपसे दूर जाते जाते हुए लगते हैं । साथ ही आपकी यात्रा नें प्रयुक्त वाहन । जितने अधिक वेग से गति करता है उतने ही अधिक को वेग ये पेड़ आपके वाहन की गति के विपरीत दिशा में दौड़ते हुये प्रतीत होते हैं । जब आप यात्रा पूर्ण करंने के बाद वाहन से बाहर आते हैं तो आपको वे सभी दौडते हुए प्रतीत होने वाले पेड़ (वस्तुयें) स्थिर प्रतीत होती हैं । स्पष्ट है कि जब प्रेक्षक की (हमारी) अवस्था में परिवर्तन आता है तो उसके (हमारे) द्वारा प्रेक्षित अन्य वस्तुओं की अवस्थाओं में भी परिवर्तन प्रतीत होता है ।

इसी प्रकार किसी रेलवे स्टेशन पर दो समान्तर पटरीयों पर खड़ी दो रेलगाड़ियों में बैठे यात्रियों को जब ऐसा एहसास होता है कि उनकी रेलगाड़ी ने गति करना प्रारम्भ कर दिया हो तो यदि दोनों रेलगाड़ियाँ एक ही दिशा में एक समान वेग से गति करना प्रारम्भ करें तो दोनों रेलगाड़ियों में बैठे यात्रियों (प्रेक्षकों) के लिए वे अभी स्थिर प्रतीत होती हैं । और उदाहरण देखें - राम व श्याम मोटर साईकिल पर जा रहे हैं और मोहन अपने मकान पर खड़ा है तो श्याम को राम स्थिर लगेगा (क्योंकि उनके मध्य दूरी यथावत बनी हुई है) जबकि मोहन को राम गति करता हुआ अनुभव होगा । इन सभी उदाहरणों से स्पष्ट है कि **वस्तु की स्थिर व गतिक अवस्थायें** अवधारणायें हैं ।

अब प्रश्न यह उठता है कि ऐसी वस्तु क्या हो जिसके सापेक्ष अन्य वस्तुओं की स्थिति या वेग का निर्धारण हो सके । क्या ऐसी चुनी हुई वस्तु की स्थिति में समय के साथ परिवर्तन होना चाहिए या नहीं । यदि चयनित वस्तु गतिशील है तो यह जानना आवश्यक है कि उसके वेग अथवा त्वरण में से कौन सी राशि नियत रहती है ।

इन सभी बातों का उल्लेख करने के लिए हम अनुच्छेद 7.2 तथा अनुच्छेद 7.3 में उपयुक्त निर्देश तन्त्र (संदर्भ तंत्र) के चयन की बात करेंगे जो कतिपय गुणों के आधार पर दो प्रकार के- (जड़त्वीय निर्देश तन्त्र व अजड़त्वीय निर्देश तन्त्र) हो सकते हैं ।

इसी क्रम में अब एक अन्य स्वाभाविक एवं व्यावहारिक प्रश्न पर विचार करते हैं- "हम सभी पृथ्वी पर रहते हुये अन्य वस्तुओं की अवस्थाओं को प्रेक्षित करते है जबकि पृथ्वी स्वयं की भौगोलिक अक्ष के सापेक्ष झुकी हुई है तथा अपने अक्ष के सापेक्ष घूर्णन गति करते हुए सूर्य के सापेक्ष परिक्रमण गति करती है" ऐसी अवस्था में पृथ्वी से सम्बन्धित निर्देशांक तन्त्र को क्या माना जाये । इन सभी प्रश्नों का उत्तर खोजने का कार्य हम इस इकाई के अनुच्छेद 7.4.1 तथा 7.4.2 में करेंगे जिसमें झुके हुये निर्देश तन्त्रों के निर्देशांकों के मध्य सम्बन्ध स्थापित किया गया है । इन तथ्यों व अभिधाराणाओं का उल्लेख करते समय हम यह मानते हैं कि पृथ्वी के घूर्णन वेग का मान अत्यल्प है अत: इसके सापेक्ष घटित किसी भी घटना के लिए न्यूटन के नियमों का उपयोग कर सकते हैं । निष्कर्षत: वस्तुओं की अवस्थाओं को पृथ्वी के सापेक्ष परिभाषित करने के लिए हम इसे जड़त्वीय निर्देश तन्त्र मानते हैं।

7.2 निर्देशांक तन्त्र (Coordinate system)

किसी कण या वस्तु की स्थिति (गतिक या स्थैतिक) को समझने के लिए हमें एक संदर्भ बिन्दु (reference point) की आवश्यकता होती है । संदर्भ बिन्दु का चयन पूर्णत: स्वेच्छिक होता है । चयनित संदर्भ बिन्दु बदलने पर अभीष्ट वस्तु की स्थिति का वर्णन भी बदल जाता है यानि कि वस्तु की स्थिति का किया गया वर्णन सापेक्षिक (relaive) होता है । इस प्रकार किसी कण या वस्तु की स्थिति निर्धारण के लिये चयनित **संदर्भ बिन्दु** (प्रेक्षक के स्थान) को **मूल बिन्दु** (origin) कहते हैं ।

अब प्रेक्षक के स्थान (मूल बिन्दु) से अभीष्ट कण या वस्तु की स्थिति का अवलोकन कर यह निर्धारित करते हैं कि मूल बिन्दु (प्रेक्षक के स्थान) से अभीष्ट कण या वस्तु तक पहुँचने का सरल से सरल तरीका कौन सा है । यह काम कई तरीकों से संभव हो सकता है जैसे- सीधी दूरी और क्षैतिज से बनने वाला कोण या तीन लम्बवत् अक्षों का चयन कर स्थिति का निर्धारण करना आदि ।

इसके लिए चयनित मूल बिन्दु (संदर्भ बिन्दु) से गुजरने वाली परस्पर लम्बवत् तीन अक्षों **X,Y**,तथा Z का चयन करते हैं । इन अक्षों से किन्हीं भी दो अक्षों द्वारा परस्पर लम्बवत् कटने वाले तलों (क्रमश: **X- Y, Y-Z, Z-X**) का निर्धारण हो जाता है । ऐसे तंत्र को कार्तीय निर्देशांक तन्त्र कहते हैं ।

वह तन्त्र, जिसमें किसी आकाश में कण की स्थिति को व्यक्त करने के लिए संख्याओं का उपयोग किया जाता है ; को निर्देशांक तन्त्र

इस प्रकार, **कण या वस्तु की स्थिति निर्धारण के लिए प्रयक्त किये जाने वाले तंत्र को निर्देशांक-तंत्र कहते हैं** । कार्तीय निर्देशांक तंत्र की अक्षों के अनुदिश नापी गई दूरियों को कार्तीय निर्देशांक (Cartesian coordinate) कहते हैं अर्थात् X- अक्ष के अनुदिश ली गई दूरी को x निर्देशांक से Y- अक्ष के अनुदिश नापी गई दूरी को y निर्देशांक से तथा Z- अक्ष की ओर नापी गई दूरी को z निर्देशांक द्वारा व्यक्त करते हैं ।

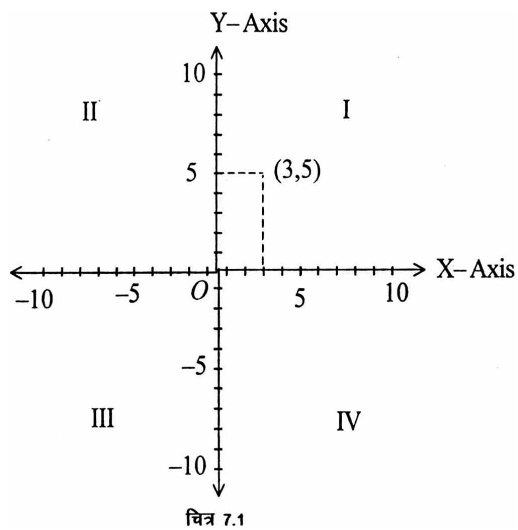
अतएव यदि प्रेक्षक (मूल बिन्दु) के सापेक्ष अभीष्ट कण यदि X, Y या Z अक्ष पर ही स्थित है तो उसकी स्थिति का निर्देशांक x, y या z द्वारा दिया जा सकता है । और यदि वस्तु X-Y तल में हो तो उसके निर्देशांक (x,y) द्वारा व्यक्त होते हैं । इसके अतिरिक्त ध्रुवीय निर्देशांक तंत्र एवं गोलीय निर्देशांक तन्त्र भी अध्ययन हेतु उपयोग में लिये जा सकते हैं ।

अब आप द्विविमीय व त्रिविमीय निर्देशांक तन्त्र के बारे में जानकारी करेंगे ।

7.2.1 द्विविमीय निर्देशांक तन्त्र (Two dimensional coordinate system)

द्विविमीय निर्देशांक तन्त्र में मूल बिन्दु से गुजरने वाली परस्पर लम्बवत् अक्षों को सामान्यतया **X** तथा **Y** अक्षों द्वारा व्यक्त करते हैं । क्षैतिज अक्ष को X- अक्ष से तथा ऊर्ध्वाकार को Y- अक्ष द्वारा व्यक्त किया जाता है ।

द्विविमीय निर्देशांक तंत्र में किसी बिन्दु की स्थिति को व्यक्त करने के लिए x इकाई का मान पहले लिखा जाता है तथा y इकाई का मान बाद में लिखते हैं । उदाहरणार्थ चित्र 7.1 बिन्दु p को निर्देशांक (3, 5) द्वारा व्यक्त किया गया



चित्र 7.1

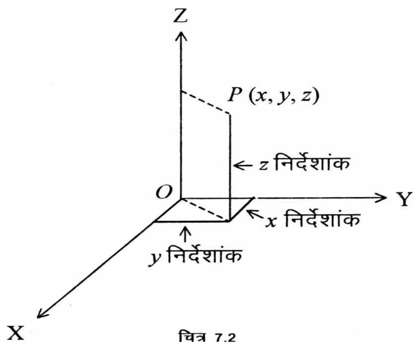
है जिसका अर्थ है कि मूल बिन्दु O से P तक पहुँचने के लिए पहले X- अक्ष के अनुदिश 3 इकाई दूरी तय करके, Y अक्ष के अनुदिश 5 इकाई दूरी तय करनी है ।

चित्र 7.1 में दर्शाये अनुसार दो लम्बवत् अक्षों के प्रतिच्छेदन से अभीष्ट तल में चार क्षेत्र बनते हैं । इनमें प्रत्येक क्षेत्र को चतुर्थांश (quadrants) कहते हैं । इन चतुर्थांशों को रोमन भाषा में क्रमश: I,II,III, तथा IV चतुर्थाश द्वारा नामांकित करते हैं । इन चतुर्थांशों का नामांकन वामावर्ती (anticlock wise) दिशा में घूमते हुये किया जाता है । चतुर्थांशों की स्थिति के अनुसार निर्देशांकों का मान धनात्मक या ऋणात्मक या दोनों प्रकार के हो सकते हैं जिन्हें निम्नांकित सारणी में दर्शाया गया है-

चतुर्थाश I	निर्देशांक x	निर्देशांक y
II	धनात्मक	धनात्मक
III	ऋणात्मक	धनात्मक
IV	ऋणात्मक	ऋणात्मक

7.2.2 त्रिविमीय निर्देशांक तन्त्र (Three dimensional coordinate system)

त्रिविमीय निर्देशांक तन्त्र, किसी आकाश (space) में तीन भौतिक, विमाओं- ऊँचाई, चौड़ाई व लम्बाई को व्यक्त करती हैं । चित्र 7.2 में त्रि2विमीय निर्देशांक तन्त्र को प्रदर्शित किया गया है ।



चित्र 7.2

त्रिविमीय आकाश को X-Y,Y-Z तथा Z-X तल आकाश (space) को आठ भागों में विभक्त करता है तथा प्रत्येक भाग अष्ठांश के नाम से जाना जाता है ।

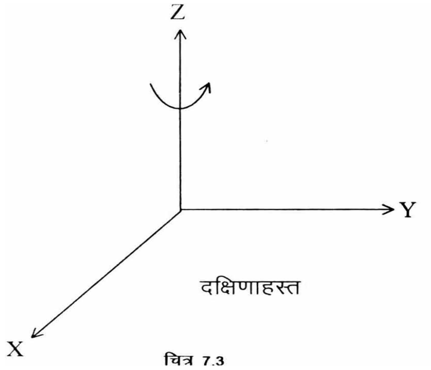
प्रचलित अवधारणा के अनुसार यांत्रिक में दक्षिणहस्त कार्तीया निर्देशांक तन्त्र का उपयोग किया जाता है । इस पद्धति में प्रथम अक्ष का नामकरण करके घड़ी की सुई की गति के विपरीत दिशा में चलतेहुए अन्य अक्षों को नामांकित करते हैं ।

7.2.3 दक्षिणहस्त व वामहस्त निर्देशांक-तन्त्र(Right hand and left hand coordinate system)

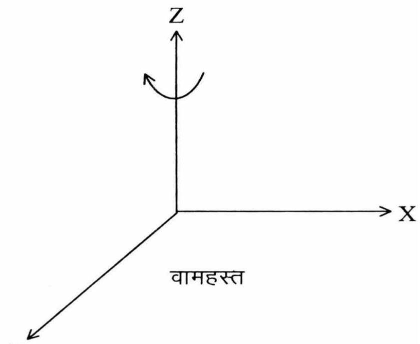
जब दिये गये आकाश में X- अक्ष व Y- अक्ष का निर्धारण कर लिया जाता है तो Z - अक्ष की रेखा का निर्धारण किया जाता है । इस निर्धारण में दो सम्भावनायें हो सकती हैं ।

(i) दक्षिणहस्त कार्तीय निर्देशांक तन्त्र (Right hand coordinate system)- यदि दाएँ हाथ की अँगुलियों को X- अक्ष से Y- अक्ष की ओर घुमाने पर अँगूठा +Z की दिशा को इंगित करता हो तो उसे दक्षिणहस्त कार्तीय निर्देशांक तन्त्र (right hand coordinate system) कहते हैं । इसका उद्भव दक्षिण-हस्त नियम से हुआ है । इसे चित्र 7.3 में दर्शाया गया है ।

(ii) वामहस्त कार्तीय निर्देशांक तन्त्र (Left hand coordinate system)- यदि बाऐ हाथ की अँगुलियों को X- अक्ष से Y- अक्ष की ओर घुमाने पर अँगूठा +Z की दिशा को इंगित करता हो तो उसे वामहस्त कार्तीय निर्देशांक तन्त्र (left hand coordinate system) कहते हैं । इसे चित्र 7.4 में दर्शाया गया है ।

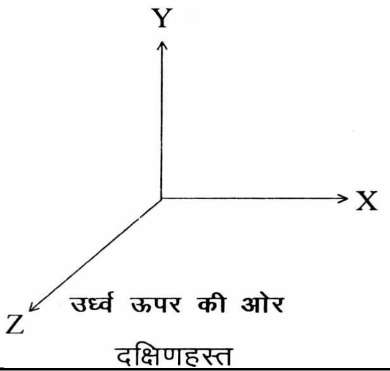


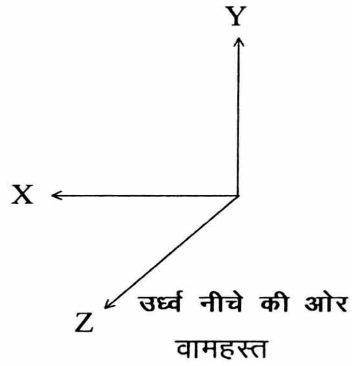
चित्र 7.3



चित्र 7.4

चित्र 7.5 व 7.6 से स्पष्ट है कि उक्त दोनों निर्देशांक तंत्र एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिम्ब होते हैं ।





बोध प्रश्न (self assessment questions)

1. यदि मूल बिन्दु को शून्य मान से भिन्न मान दिया जाये तो किसी बिन्दु की स्थिति पर क्या प्रभाव पड़ेगा ।

   ……

2. X = 0 तल, Y = 0 तल, Z = 0 तल, किन-2 अक्षों के प्रतिच्छेदन से प्राप्त होते हैं ।

   ……

   ……

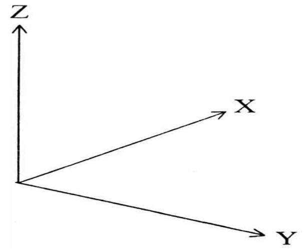
   ……

3. यदि वामहस्त कार्तीय निर्देशांक तन्त्र के स्थान पर दक्षिणहस्त कार्तीय निर्देशांक तन्त्र लेकर गणना करें तो प्राप्त परिणाम में क्या भिन्नता होगी ।

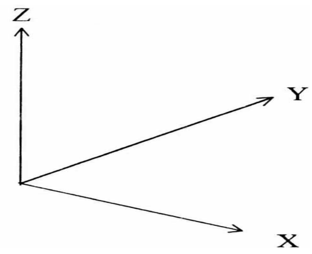
   ……

   ……

4. चित्र 7.7 व 7. 8 में कार्तीय निर्देशांकों के निरूपण को दर्शाया गया है-



चित्र 7.7



चित्र 7.8

इनमें से कौनसा चित्र दक्षिणहस्त व कौनसा चित्र वामहस्त निर्देशांक तन्त्र को व्यक्त करते हैं ।

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

7.3 निर्देश तन्त्र (Frame of reference)

यदि किसी चयनित संदर्भ बिन्दु (मूल बिन्दु) के सापेक्ष अभीष्ट वस्तु की स्थिति समय के साथ परिवर्तित होती है तो हम यह कह सकते हैं कि अभीष्ट वस्तु गति कर रही है । यदि वस्तु की स्थिति समय के साथ परिवर्तित नहीं हो रही हो तो उसे वस्तु की स्थिर अवस्था (Static position) कहते हैं । सामान्यत: वस्तु की स्थैतिक व गतिक स्थिति के वर्णन की दो अवस्थायें सम्भव हो सकती हैं-

(i) निरपेक्ष (absolute)और **(ii) सापेक्षिक** (relative) ।

यदि किसी वस्तु की स्थिति, को एक ऐसे बिन्दु के सापेक्ष प्रेक्षित किया जाये जो आकाश में स्थिर हो तो वस्तु की उस स्थिति को निरपेक्ष स्थिति कहते हैं । परन्तु ब्रह्माण्ड में ऐसा कोई बिन्दु अभी तक नहीं मिला है जिसकी स्थिति सदैव स्थिर रहती है; क्योंकि ब्रह्माण्ड में प्रत्येक वस्तु जैसे पृथ्वी, सूर्य अथवा सभी तारे इत्यादि सदैव समय के साथ साथ अपनी स्थिति बदलते रहते हैं । इस कारण निरपेक्ष गति की अवधारणा तर्कसंगत नहीं है । निष्कर्षत: **गतिक व स्थिर-अवस्थायें सदैव सापेक्षिक होती हैं ।**

वस्तुत: किसी वस्तु की **अभीष्ट अवस्था** किसी अन्य वस्तु के सापेक्ष **स्थिर** या **गतिमान** कैसी भी हो सकती है । यह इस तथ्य पर निर्भर करती है कि वह एक दूसरे के सापेक्ष समय के साथ अपनी स्थिति को परिवर्तित कर रही है अथवा नहीं । उदाहरणार्थ: भू-तल पर खड़ा एक पेड़ पृथ्वी के सापेक्ष स्थिर अवस्था में है जबकि यही पेड़ सूर्य के सापेक्ष गतिमान अवस्था में प्रतीत होगा क्योंकि पृथ्वी, सूर्य के सापेक्ष गतिशील है ।

उपरोक्त विवेचना से यह स्पष्ट है कि निकाय के यांत्रिकीय वर्णन से पहले हमें यह पता होना चाहिए कि अभीष्ट वस्तु की गति किस वस्तु के सापेक्ष मापी जा रही है ।

यदि हम किसी दृढ़ पिण्ड के साथ एक निर्देशांक तन्त्र को संलग्न मानते हु ये किसी अन्य वस्तु की स्थिर या गति अवस्थाओं को दृढ़ पिण्ड के सापेक्ष परिभाषित कर लें तो ऐसे दृढ़ पिण्ड से संलग्न निर्देशांक तन्त्र को निर्देश तन्त्र (frame of reference) कहते हैं ।

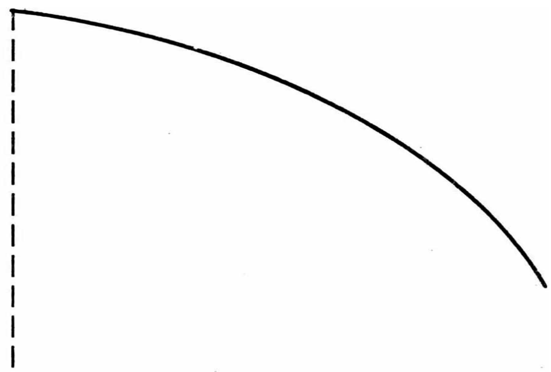
सामान्यत: निर्देश तन्त्र के रूप में कार्तिय निर्देशांक तन्त्र का प्रयोग किया जाता है । इस तन्त्र में किसी बिन्दु की अवस्था को तीन निर्देशांकों (x,y,z)के द्वारा व्यक्त करते हैं । सामान्यत: किसी निकाय या घटना को किसी निर्देश तन्त्र में व्यक्त करने के लिए हमें उसके घटने का समय व स्थिति का ज्ञान होना आवश्यक होता है । इसलिए हमें चार निर्देशांकों (x, y, z, t) की आवश्यकता होती है । इस उद्देश्य के लिये प्रयुक्त निर्देश तन्त्र को दिक-काल निर्देश तन्त्र (space - time frame of reference) तथा प्रयुक्त निर्देशांकों को दिक-काल निर्देशांक (space - time coordinate) कहते हैं ।

वस्तुत: हम ऐसे निर्देश तन्त्र का उपयोग करना पसन्द करते हैं जिसके द्वारा वस्तु की गति की व्याख्या सरलतम रूप रो की जा सकती हो । इस कथन का औचित्य निम्न प्रकरणों के आधार पर समझा जा सकता है-

1. किसी बस के सापेक्ष किसी एक अन्य बस की गति को देखने पर, यह भू-तल के सापेक्ष प्रेक्षित की गई गति से भिन्न और जटिल प्रतीत हो सकती है । अत: सुविधा की दृष्टि से गति को भू-तल के सापेक्ष आसानी से व्यक्त किया जाना उचित प्रतीत होता है ।

2. मान लो कि स्थिर वेग से गतिमान एक रेल के डिब्बे में बैठा एक यात्री एक पत्थर को उर्ध्वाधर दिशा में फेंकता है । रेल में बैठा यह व्यक्ति इस पत्थर के लौटने का पथ एक सरल रेखा के रूप में (चित्र 7.9) प्रेक्षित करता है । परन्तु धरातल पर खड़ा स्थिर प्रेक्षक इस पत्थर को क्षैतिज दिशा में एक स्थिर वेग से गतिमान पिण्ड के रूप में देखेगा जिस पर पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल कार्य कर रहा है और इस कारण उसे पत्थर के नीचे गिरते समय का पथ; परवलयाकार प्रतीत होता है, जैसा कि चित्र 7.10 में दिखाया गया है ।

चित्र 7.9



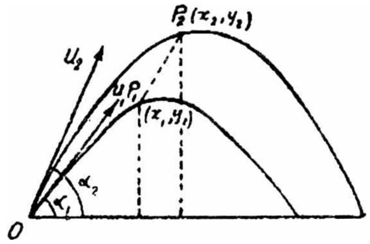
चित्र 71.0

3. पृथ्वी पर स्थित किसी निर्देश तन्त्र के सापेक्ष ग्रहों की गति बहुत जटिल प्रतीत होती है । परन्तु सूर्य पर निर्देश तन्त्र को मानते हुये ग्रहों की गतियों का विश्लेषण आसानी से किया जा सकता है ।

उदाहरण 7.1 सिद्ध कीजिये कि एक प्रक्षेप्य के सापेक्ष दूसरे प्रक्षेप्य का प्रक्षेपित पथ सदैव सरल रेखा होता है ।

हल : माना कि एक ही बिन्दु प्रक्षेपित दो प्रक्षेप्यों p_1 तथा p_2,के वेगों का मान क्रमश: u_1 तथा u_2 व प्रक्षेप्य कोणों का मान क्रमश: α_1 व α_2 हैं ।

सुविधा के लिए प्रक्षेप्यों की गति को X - Y तल में दर्शाया गया है । (चित्र 7.11)



चित्र 7.11

यदि प्रक्षेप्य-बिन्दु को मूल 0 मान लें तो किसी क्षण t पर प्रक्षेप्यों के निर्देशांकों का मान निम्नानुसार होंगे--

$$x_1 = (u_1 cos\alpha_1)t \; ; \; x_2 = (u_2 cos\alpha_2)t$$

$$y_1 = (u_1 sin\alpha_1)t - gt^2; \; y_2 = (u_2 sin\alpha_2)t - gt^2$$

अत: $x_2 - x_1 = (u_2 cos\alpha_2 - u_1 cos\alpha_1)t$

$$y_1 - y_2 = (u_2 sin\alpha_2 - u_1 sin\alpha_1)t$$

या $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{u_2 \cos\alpha_2 - u_1 \cos\alpha_1}{u_2 \sin\alpha_2 - u_1 \sin\alpha_1} = m$ (माना)

यदि $y_2 - y_1 = y$ तथा $x_1 - x_2 = x$ प्रथम प्रक्षेप्य के सापेक्ष द्वितीय प्रक्षेप्य के निर्देशांकों को व्यक्त करता हो तो

$\dfrac{y}{x}$ या $y = mx$

यह सरल रेखा के समीकरण को व्यक्त करती है । अत: एक प्रक्षेप्य कि गति को दूसरे प्रक्षेप्य के सापेक्ष प्रक्षेपित किया जाये तो यह सरल रेखा होगी ।

7.3.1 जड़त्वीय निर्देश तन्त्र (Inertial frame of reference)

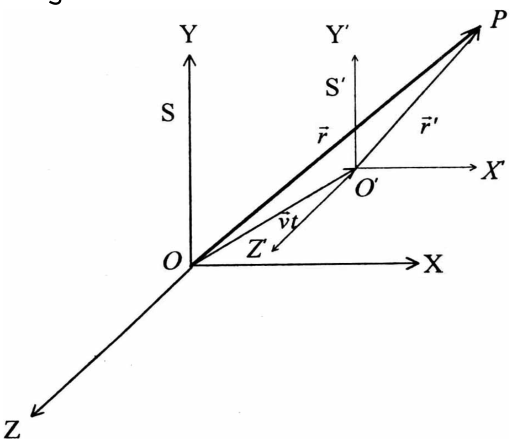
स्थिर वेग से गतिशील ऐसे निर्देश तन्त्र जिनमें न्यूटन के प्रथम व द्वितीय नियम की अनुपालना होती है, उन्हें जड़त्वीय निर्देश तन्त्र कहते हैं । ऐसे निर्देश तन्त्रों में यदि किसी वस्तु पर कोई बाहय बल नहीं लग रहा हो तो वह निरन्तर अपनी स्थिर या नियत ऋजु रेखीय वेग से गतिमान रहती है अर्थात् ऐसे तंत्रों में जड़त्व नियम का पालन होता है । इसीलिए इसे जड़त्वीय निर्देश तन्त्र कहा जाता है। अत: यदि एक जड़त्वीय निर्देश तन्त्र में जब किसी वस्तु पर कोई बाहय बल नहीं लग रहा हो तो उसके त्वरण को निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त किया जा सकता है-

$$\vec{a}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0 \qquad ...(7.1)$$

घटकों के रूप में इस समी को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं ।

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad \text{तथा} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \qquad ...(7.2)$$

यदि S जड़त्वीय निर्देश तन्त्र के सापेक्ष एक अन्य निर्देश तन्त्र S' नियत वेग से गतिशील है और प्रारम्भ में (t=0)दोनों निर्देश तन्त्रों के मूल बिन्दु संपात्तित हो तो S' तंत्र के सापेक्ष t समय पश्चात S निर्देश तन्त्र के मूल बिन्दु की स्थिति निम्न प्रकार से व्यक्त की जा सकती है (चित्र 7.12)



चित्र 7.12

$$\vec{r} = \overline{OO'} + \vec{r}$$

या $\vec{r} = \vec{r} - \vec{vt}$

स्थिर वेग के गतिशील निर्देश तन्त्र जड़त्वीय निर्देश तन्त्र होती है।

यदि v नियत हो तो उपरोक्त समीकरण का समय के सापेक्ष दो बार अवकलन करने पर

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

या $\vec{a} = \vec{a}$

अत: दोनों निर्देश तन्त्रों में कण द्वारा अनुभव किये गये त्वरण का मान समान होगा । स्पष्ट है कि यदि S निर्देश तन्त्र में कण का त्वरण शून्य हो तो S' निर्देश तन्त्र में भी कण के त्वरण का मान शून्य होगा । इससे यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि:-

किसी जड़त्वीय निर्देश-तन्त्र के सापेक्ष स्थिर वेग से गतिशील सभी निर्देश-तन्त्र जड़त्वीय निर्देश-तंत्र की भांति व्यवहार करते हैं ।

यदि निर्देश तन्त्र S के वेग का मान समय के साथ परिवर्तित हो रहा हो अर्थात S' निर्देश तन्त्र स्थिर त्वरणसे गतिशील हो तो कण पर प्रक्षेपित बल का मान समीकरण 7.5 द्वारा व्यक्त मान से भिन्न होगा ।

यदि m द्रव्यमान को कण S निर्देश-तंत्र में a_0 त्वरण से त्वरित हो तो स्थिर वेग से गतिशील जड़त्वीय निर्देश तन्त्र S में कण पर लगने वाले बल का मान (न्यूटन के नियमानुसार) निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है-

$$\vec{F} = m\vec{a_0} \quad \text{....(7.5)}$$

वस्तुत: किसी वस्तु की गति का तब तक कोई अर्थ नहीं होता है जब तक कि हमें यह मालूम नहीं हो कि उसकी गति किस निकाय (या संदर्भ बिन्दु) के सापेक्ष नापी गयी है ।

इस अवधारणा को न्यूटन ने निरपेक्ष आकाश (absolute space) की कल्पना द्वारा समझाने का सार्थक प्रयास किया । न्यूटन की सोच के अनुसार निरपेक्ष आकाश एक ऐसी निर्देश तन्त्र है जिसके

सापेक्ष सभी वस्तुओं की गति का मापन किया जा सकता है। यह निरपेक्ष तन्त्र जड़त्वीय निर्देश तन्त्र होती है तथा इस प्रकार के सभी तत्वों में न्यूटन का जड़त्व का नियम समान रूप से वैध होता है।

7.3.2 अजड़त्वीय निर्देश-तन्त्र (Non - inertial frame of reference)

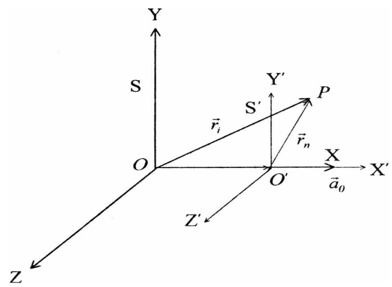
ऐसे निर्देश तन्त्र, जिनमें न्यूटन के प्रथम व द्वितीय नियम की अनुपालना नहीं होती है, उन्हें अजड़त्वीय निर्देश तन्त्र कहते हैं।

अपकेंद्रीय बल एक छद्म बल होता है।

सभी त्वरित व घूर्णी (rotating) निर्देश तन्त्र अजड़त्वीय निर्देश तन्त्र होती हैं। यदि किसी जड़त्वीय निर्देश तन्त्र में क्ष द्रव्यमान का पिण्ड मे, त्वरण से गतिशील हो तो न्यूटन के नियमानुसार उस पिण्ड द्वारा अनुभव किये गये बल का मान होगा-

$$\vec{F} \neq m\vec{a_i}$$

यदि इसी पिण्ड को समान त्वरण a_0 से त्वरित निर्देश तन्त्र में प्रेक्षित किया जाये तो इस पिण्ड द्वारा अनुभव किये गये बल का मान भिन्न प्रेक्षित किया जाता है। इसका कारण है कि त्वरित निर्देश तन्त्र में पिण्ड का प्रेक्षित त्वरण का मान भिन्न प्राप्त होता है। अत: अजड़त्वीय निर्देश तन्त्र में न्यूटन के नियम F=ma अत की अनुपालना नहीं होती है।



माना S जड़त्वीय निर्देश तन्त्र है तथा इसके सापेक्ष S' निर्देश तन्त्र a_0 त्वरण से त्वरित गति कर रहा है (जैसा चित्र 7.13 में दर्शाया गया है)। चित्र 7.13 से,

$$\vec{r_i} = \overrightarrow{OO} + \vec{r_n} \quad .....(7.6)$$

अत: $$\vec{r_i} = \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + \vec{r_n}$$

उपरोक्त समीकरण को समय के सापेक्ष दो बार अवकलित करने पर।

$$\frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r_n}}{dt^2} + \vec{a}_0$$

या $$\vec{a}_1 = \vec{a}_n + \vec{a}_0 \quad ....(7.8)$$

या $$m\vec{a}_1 - m\vec{a}_0 = m\vec{a}_n \quad ....(7.9)$$

या $$\vec{F_1} - \vec{F_f} = \vec{F_n} \quad .....(7.10)$$

उपरोक्त समीकरण में $\vec{F_n}$', त्वरित निर्देश तन्त्र S' में प्रेक्षित बल तथा $\vec{F_f}$ छद्म बल का मान है।

यदि S निर्देश तंत्र में m द्रव्यमान के कण P का त्वरण शून्य है तो निर्देश तन्त्र S' में प्रेक्षक को इस कण द्वारा अनुभव बल का मान शून्य न होकर $-ma_0$ होगा। अर्थात् S' निर्देश तन्त्र में न्यून के नियमों की अनुपालना नहीं होती है। S' में प्रेक्षित बल $-ma_0$ को **छद्म** (pseudo) या **काल्पनिक** (fictitious) बल कहते हैं।

छद्म बल के उदाहरण

(1) मान लीजिए कि एक संदूक (box) गुरूत्वीय क्षेत्र के प्रभाव में स्वतन्त्र रूप से त्वरण g से पृथ्वी की ओर गिर रही है । अब यदि इस बॉक्स के सापेक्ष स्वतन्त्र रूप से गिर रहे कण पर विचार करें तो; अजड़त्वीय निर्देश तन्त्र (बॉक्स) में प्रेक्षित कण पर लगने वाले छद्म बल का मान mg होगा । इसका कारण है कि बॉक्स -g त्वरण से नीचे की ओर गिर रही है और इसी लिए इसके सापेक्ष कण का त्वरण +g ऊपर की ओर प्रेक्षित किया जायेगा ।

अत: बॉक्स (में बैठे प्रेक्षक) द्वारा प्रेक्षित कण के लगने वाले कुल बल का मान होगा-

$F_n = mg + mg = 0$

यदि बॉक्स के सापेक्ष कण के प्रारम्भिक वेग का मान शून्य हो तो कण हवा में लटकता हुआ प्रतीत होगा ।

अब मान लीजिये कि धरातल पर खड़े प्रेक्षक के सापेक्ष कण स्थिर हैं तथा बॉक्स ऊर्ध्व दिशा की ओर त्वरण g से त्वरित है । इस अवस्था में गतिशील निर्देश तन्त्र बॉक्स में प्रेक्षित छद्म बल का मान mg उर्ध्वाधर नीचे की ओर होगा, जबकि अभीष्ट कण धरातल के सापेक्ष स्थिर है ।

(2) माना कि एक अजड़त्वीय निर्देश तन्त्र में m द्रव्यमान का एक कण विराम अवस्था में है तथा इसके त्वरण a_n का मान शून्य है । यदि अभीष्ट निर्देश तन्त्र, अजड़त्वीय निर्देश तन्त्र के किसी अक्ष के सापेक्ष समान कोणीय वेग ω से घूर्णन कर रही है तो जड़त्वीय निर्देश तन्त्र के सापेक्ष द्रव्यमान m के अभिकेन्द्रीय त्वरण का मान होगा-

$$\vec{a}_0 = \omega^2 \vec{r} \qquad ...(7.11)$$

अब इस कण पर लाने वाले छद्म बल का मान होगा

$$\vec{F}_f = -m\vec{a}_0 = m\omega^2 \vec{r}$$

छद्म बल $\overrightarrow{F_f}$ को अपकेन्द्रीय बल (centrifugal force) कहते हैं तथा यह सदैव केन्द्र से बाहर की ओर कार्य करता है

बोध प्रश्न (self assessment questions)

5. क्षैतिज दिशा में समान वेग से गतिमान हवाई जहाज से एक पत्थर को गिराया जाता है । इस पत्थर का पथ निम्न स्थितियों में किस प्रकार का होगा-

(i) पायलेट द्वारा प्रेक्षित ।

……………………………………………………………………………………………

(ii) पृथ्वी की सतह पर खड़े व्यक्ति द्वारा प्रेक्षित ।

……………………………………………………………………………………………

6. एक गतिशील कार के पहिये की परिधि पर स्थित कण का पथ कैसा होगा?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

उदाहरण 7.2 2.5 किग्रा. पिण्ड पर उस निर्देश तन्त्र के सापेक्ष छद्म बल व कुल बल का मान ज्ञात कीजिये जो 10 मी / से.^{2} के त्वरण से उर्ध्वाधर दिशा में गतिशील है ।

हल : यदि $\hat{n}$ एकांक सदिश को उर्ध्वाधर दिशा में माना जाये तो, पिण्ड पर लगने वाले वास्तविक बल का मान होगा-

F_i = mg$\hat{n}$= - 2.5 x 9.8$\hat{n}$

यहाँ a_0 = 10 मीटर / से.^{2}

अत: छद्म बल = -ma_0 = - 2.5 x 10$\hat{n}$ = - 25$\hat{n}$

कुल बल F_n = F_i +F_f= - 2.5(9.8 + 10) $\hat{n}$ = - 49.50 न्यूटन

उदाहरण 7.3 एक 20 किग्रा. द्रव्यमान का पिण्ड स्वतन्त्रता पूर्वक उर्ध्वाधर नीचे की ओर गिर रहा है । इस पिण्ड पर लगने वाले छद्म बल व कुल बल का मान उस निर्देश तन्त्र के सापेक्ष ज्ञात कीजिये जो 6 मी / से.^{2} से उर्ध्वाधर नीचे की दिशा में गतिशील है!

हल : पृथ्वी को जड़त्वीय निर्देश तन्त्र मानते हुये,

$\vec{F}_I$ = mg$\hat{n}$ = - (20) (9.8) $\hat{n}$ = - 196$\hat{n}$

यहाँ $\hat{n}$ उर्ध्व दिशा में एकांक सदिश है ।

यहाँ पर $\vec{a}_0 = a_0\hat{n} = -6\hat{n}$ मी / सै.^{2} तथा g = -9.8 मी. / सै.^{2}

अत: छद्म बल का मान होगा

$\vec{F}_f = m\hat{a}_0$=(-20)(-6$\hat{n}$)=120$\hat{n}$

यह बल उर्ध्वाधर ऊपर की दिशा में कार्य करेगा ।

अत: त्वरित निर्देश तन्त्र में कुल बल का मान होगा-

$\vec{F}_n = m\hat{a}_n = \vec{F}_f + \vec{F}_f$ = - 196$\hat{n}$+120$\hat{n}$= - 76$\hat{n}$

अर्थात् त्वरित निर्देश तन्त्र में कुल बल नीचे की ओर कार्य करेगा ।

उदाहरण 7.4 एक 2 मीटर लम्बी रस्सी के एक सिरे से 1 किग्रा. का द्रव्यमान बांध कर उसे 5 चक्रण / से. की दूर से घुमाया जाता है । जड़त्वीय निर्देश तन्त्र के सापेक्ष पत्थर पर लगने वाले बल का मान ज्ञात कीजिये ।

हल: पत्थर को जड़त्वीय निर्देश तन्त्र में वृत्ताकार पथ में परिभ्रमण करने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्रिय बल का मान $-m\omega^2 r$, होगा । अत: जड़त्वीय निर्देश तन्त्र में पत्थर पर लगने वाले बल का मान होगा ।

$F_i = -m\omega^2 r,$

= - (2 x 3.14 x 5)^2 x 2 = - 1974 न्यूटन

7.4 स्थिति सदिश के रूपान्तरण समीकरण (Transformation equation of position vector)

किसी आकाश में स्थित बिन्दु या कण की स्थिति के निर्देशांक भिन्न-2 निर्देश तन्त्रों में भिन्न-2 प्रेक्षित -किये जाते हैं । इस प्रकार अभीष्ट कण के लिए स्थिति सदिश का मान भिन्न-2 निर्देश तन्त्रों में भिन्न-भिन्न होंगे । इस प्रकार भिन्न-भिन्न निर्देश-तंत्रों में प्रेक्षित इन स्थिति सदिशों के मध्य सम्बन्धों को व्यक्त करने वाली समीकरणों को **स्थिति सदिश के रूपान्तरण समीकरण** कहते हैं ।

स्थिति सदिशों के रूपान्तरण समीकरणों का प्रारूप इस तथ्य पर आधारित है कि अभीष्ट कण या निकाय किसी जड़त्वीय निर्देश तन्त्र से किस दिशा में विस्थापित है या जड़त्वीय निर्देश तन्त्र के किसी अक्ष के सापेक्ष घूर्णित अवस्था में है ।

इस प्रकार निर्देश तन्त्रों की भिन्न-भिन्न स्थिति के अनुसार स्थिति सदिशों के रूपान्तरण समीकरण की निम्न दो स्थितियाँ सम्भव हैं-

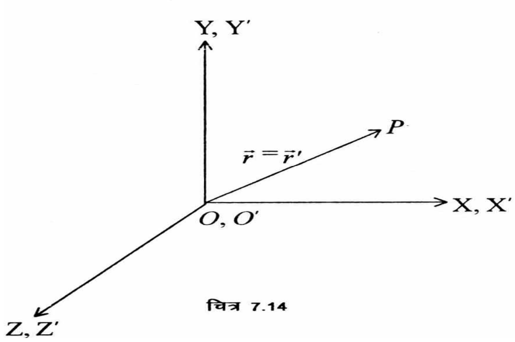
(i) विस्थापित अवस्था के निर्देश तन्त्र में स्थिति सदिश के रूपान्तरण समीकरण

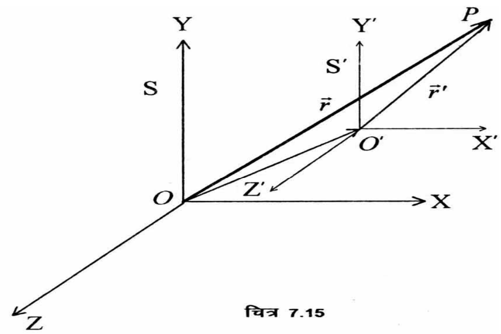
(ii) निर्देश तन्त्रों के घूमे या झुके हुये अक्षों की स्थिति में निर्देशांकों के रूपान्तरण समीकरण

7.4.1 विस्थापित अवस्था के निर्देश-तन्त्र में स्थिति सदिश के रूपान्तरण समीकरण (Transformation equation of position vector in displaced frame of reference)

माना t=0 पर S तथा S' के निर्देश तन्त्रों के मूल बिन्दु परस्पर सम्पातित हैं । इस स्थिति में S व S' निर्देश तन्त्रों के मूल बिन्दुओं के सापेक्ष किसी बिन्दु P लिए प्रेक्षित स्थिति सदिशों का मान समान होगा जैसा चित्र 7.14 में दर्शाया गया है । अर्थात् $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P}$ या $\vec{r} = \vec{r}\,'$

अब यदि किसी स्वेच्छ दिशा में v से गति करते हुए t समय में निर्देश तन्त्र S का मूल बिन्दु विस्थापित होकर O' स्थिति प्राप्त कर लेता है तो इसके मूल बिन्दु का विस्थापन OO' हो जाता है, जैसा चित्र 7.15 में दर्शाया गया है ।





चित्र 7.14 चित्र 7.15

इस स्थिति में S तथा S ' निर्देश तन्त्रों में कण P के प्रेक्षित सदिशों का मान समान नहीं होगा । अर्थात् S व S' निर्देश तन्त्र में कण P के निर्देशांक भिन्न- 2 होंगे ।

fp = 7.15 से $\vec{r} = \overrightarrow{O'P}; \vec{r} = \overrightarrow{O'P}$ तथा $\overrightarrow{OO'} = \vec{v}t$

तथा $\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}$ या $\vec{r} = \vec{v}t + \vec{r}$

या $\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0\,'$ ...(7.13)

समी. (7.13) से यह स्पष्ट है कि स्थिर व निर्देश तन्त्र S व विस्थापित निर्देश तन्त्र S' में कण के स्थिति सदिशों का मान भिन्न- 2 होता है ।

यदि S' निर्देश तन्त्र t = 0 समय पर OO' दूरी पर विस्थापित हों तथा $\overrightarrow{OO} = \vec{r}_0$, तो समी. (7.13) को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है-

निर्देश तंत्र S' में एकांक सदिस $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ प्रयुक्त किये हैं लेकिन यहाँ $\hat{i}'=\hat{i}$ $\hat{j}'=\hat{j},$ $\hat{k}'=\hat{k}$ होने के कारण $\hat{i}'.\hat{i}=l.$ $\hat{i}'.i=1.$ $\hat{i}'.\hat{j}=0$ $\hat{i}'.\hat{k}=0$

$$\vec{r}=\vec{r}-\vec{r}_0' \quad ...(7.14)$$

सामान्य रूपान्तरण समीकरणों के लिए समी 7.14 को सदिश घटकों में व्यक्त करने के लिए व्यक्त करने पर

$$(\hat{i}'x+\hat{j}'y'+\hat{k}'z')=(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z)-(\hat{i}'x_0+\hat{j}'y_0+\hat{k}'z_0) \quad ....(7.15)$$

जहाँ मूल बिन्दु O' के सापेक्ष O के निर्देशांक (x_0 y_0 z_0) हैं ।

अब समीकरण (7.15) को -$\hat{i}$ से बिन्दु गुणनफल करने पर

$$\hat{i}'.\,(\hat{i}'x'+\hat{j}'y'+\hat{k}'z')=\hat{i}'.(\hat{i}x+\hat{j}y+\hat{k}z)-\hat{i}'.(\hat{i}'x_0+\hat{j}'y_0+\hat{k}'z_0)$$

$x'=x(\hat{i}'.\hat{i})+y(\hat{i}'.\hat{j})+z.(\hat{i}'.\hat{k})-x_0(\hat{i}'.\hat{i}')$ (सदिशों के गुणनफल नियमों के अनुसार)

$$x' = x\,cos(X',X)+y\,cos\,(X',Y)+z\,cos\,(X',Z)-x_0 \quad ....(7.16)$$

इसी प्रकार

$$y' = x\,cos(Y',X)+y\,cos\,(Y',Y)+z\,cos\,(Y',Z)-y_0 \quad ....(7.17)$$

$$z' = x\,cos(Z',X)+y\,cos\,(Z',Y)+z\,cos\,(Z',Z)-z_0 \quad ...(7.18)$$

चूँकि यहीं चित्र 7. 15 में दर्शाये अनुसार S" तथा S तंत्र की अक्षें परस्पर समान्तर हैं अतः

$$\cos\,(X',X)=cos\,(Y',Y)+cos(Z',Z)=cos0=1$$

तथा $cos(X',Y)=cos\,(Y',Z)+\,cos(Z',X)=\,cos\dfrac{\pi}{2}=0$

होने के कारण समान्तर विस्थापित तंत्रों में रूपान्तरण समीकरण.

$$x'=x-x_0, y'=\,y\,-y_0, z'=z-z_0 \quad ......(7.19)$$

7.4.2 निर्देश-तन्त्रों के घूमे या झुके हुये अक्षों की स्थिति में निर्देशांकों के रूपान्तरण समीकरण (Coordinate transformation when the axes of two frames are inclined to each other)

माना S" तथा S" दो निर्देश तन्त्र हैं जिनके मूल बिन्दु परस्पर संपातित व अक्ष एक दूसरे के सापेक्ष θ कोण पर झुके हुए हैं (चित्र 7.16) ।

यदि S तथा S" निर्देश तन्त्र कें सापेक्ष बिन्दु P के निर्देशांकों के मान क्रमशः $(x,y.z)$ व $(x,'y,z')$ हो तो दोनों निर्देश तन्त्रों में इस कण के स्थिति सदिशों का मान समान होने के कारण

$$\vec{r}=\vec{r}\,'$$

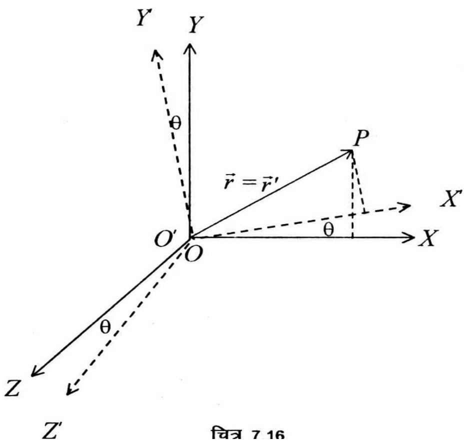
अब कण P के निर्देशांकों (x,y,z) व $(x,'y,'z')$ के मध्य सम्बन्धों को ज्ञात करने के लिए P विन्दु से S व S" निर्देश तन्त्रों के X अक्ष व X' अक्षों पर चित्रानुसार अभिलम्ब डालते हैं ।

अब गत अनुच्छेद 7.4.1 के समी. 7.16 में (दोनों मूलबिन्दु सम्पातित हैं) से

x' निर्देशांक x,y व z का OX' अक्ष के अनुदिश घटकों का योग

$$x' = x\,cos(X',X)+y\,cos\,(X',Y)+z\,cos\,(X',Z)$$

या $x' = x\,cos\theta+\,y\,cos\,(90-\theta)\,+\,z\,cos\,(90\,-\theta)$



चित्र 7.16

या $x' = x \cos\theta + y \sin\theta + z \sin\theta$ ....(7.20)

इसी प्रकार समी 7.17 से

y'= निर्देशांक x, y व z का OY' अक्ष के अनुदिश घटकों का योग

$y' = x \cos(Y', X) + y \cos(Y', Y) + z \cos(Y', Z)$

परन्तु X व Y' के मध्य कोण = $(90+\theta)^0$

Y व Y' के मध्य कोण = θ

Z व Y' के मध्य कोण = $(90-\theta)^0$

अत: $y' = x \cos(90+\theta) + y \cos(\theta) + z \cos(90-\theta)$

या $y' = x \sin\theta + y \cos\theta + z \sin\theta$

तथा

z'= निर्देशांक x, y व z का OZ' अक्ष के अनुदिश घटकों का योग

$z' = x \cos(Z', X) + y \cos(Z', Y) + z \cos(Z', Z)$

परन्तु X व Z' के मध्य कोण = $(90-\theta)^0$

Y व Z' के मध्य कोण = $(90+\theta)^0$

Z व Y' के मध्य कोण = ∂

अत: $z' = x \cos(90-\theta) + y \cos(90+\theta) + z \cos(\theta)$

$Z' = x \sin\theta - y \sin\theta + z \cos\theta$

उपरोक्त समी. (7.20, 7.21 व 7.22) S निर्देश तन्त्र से S' निर्देशांकों के मध्य सम्बन्ध व्यक्त करती है । इनके व्युत्क्रम रूपान्तरणों (S से S) को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जायेगा-

X = निर्देशांक x', y' व z' का OX अक्ष के अनुदिश घटकों का योग

$X' = x' \cos(X', X) + y' \cos(X', Y) + z \cos(X', Z)$

$X = x' \cos\theta + y' \cos(90+\theta) + z' \cos(90-\theta)$

या $x = x' \cos\theta - y' \sin\theta + z' \sin\theta$

पुन: y= निर्देशांक x', y' व z' का OY अक्ष के अनुदिश घटकों का योग

$y = x' \cos(Y', X) + y' \cos(Y', Y) + z' \cos(Y', Z')$

$$y = x \cos(90-\theta) + y \cos(\theta) + z \cos(90+\theta)$$

या $y = x'\sin\theta + y', \cos\theta - z'\sin\theta$

इसी प्रकार

Z = निर्देशांक x', y' व z' का OZ अक्ष के अनुदिश घटकों का योग

$$z = x' \cos(Z,X') + y' \cos(Z, Y') + z' \cos(Z',Z')$$

$$z = x' \cos(90-\theta) + y' \cos(90+\theta) + z' \cos(\theta)$$

या $z = x' \sin\theta - y' \sin\theta + z' \cos\theta$ ..(7.25)

बोध प्रश्न (self assessment questions)

7. पृथ्वी को किस प्रकार का निर्देश तन्त्र माना जा सकता है ।

………………………………………………………………………………………………

8. एक निर्देश तन्त्र S' जड़त्वीय निर्देश तन्त्र के सापेक्ष इस प्रकार से झुकी हुई है कि उनके मूल बिन्दु परस्पर संपातित हैं । यदि S निर्देश तन्त्र में कण पर लगने वाले बल का मान शून्य हो तो S' निर्देश तन्त्र में कण पर लगने वाले बल का मान होगा।

………………………………………………………………………………………………

9. प्रश्न 8 में S' निर्देश तन्त्र की प्रकृति क्या होगी ।

………………………………………………………………………………………………

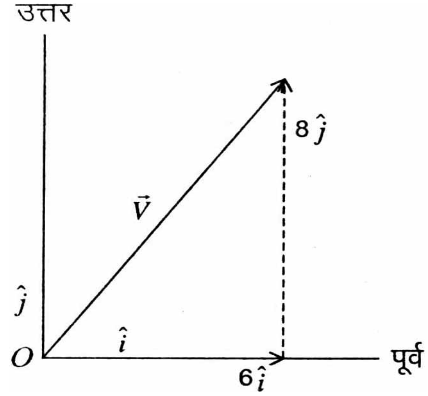
10. प्रश्न 8 में यदि दोनों निर्देश तन्त्रों के Y व Y अक्षों को संपातित कर शेष अक्षों को एक दूसरे के सापेक्ष घुमाया जाये तो, y व y' निर्देशांकों के रूपान्तरण समीकरण क्या होंगे ।

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

उदाहरण 7.5 एक नदी में पानी 6 किमी. / प्रति घंटे की दर से प्रवाहित हो रहा है तथा एक नाव पानी के सापेक्ष 8 किमी. प्रति घंटे की दर से उत्तर की ओर गति कर रही है । धरातल के सापेक्ष नाव के वेग का मान ज्ञात कीजिये ।

हल : दी गयी घटना को चित्र 7.17 में दर्शाया गया है ।



चित्र 7.17

धरातल के सापेक्ष नीव का मान होगा-

$$\vec{V} = \vec{V} + \vec{v} = 8\hat{j} + 6\hat{i}$$

या $\quad \left|\vec{v}\right| = \sqrt{8^2 + 6^2 = 10}$ किमी. / घंटा

दिशा $\quad \tan\,\theta = 8/6$

या $\quad \theta = \tan^{-1}$ (8/6) पूर्व दिशा में

उदाहरण 7.6 एक 0.5 मीटर लम्बाई की रस्सी के एक सिरे से 2.0 किग्रा का पत्थर लटकाकर प्रति 3 सेकण्ड में 4 चक्रण करवाये जाते हैं तो-

(अ) जड़त्वीय निर्देश तन्त्र में पत्थर पर लगने वाले बल का मान ज्ञात कीजिए ।

(ब) रस्सी के साथ घूमने वाली निर्देश तन्त्र में प्रेक्षित पत्थर पर लगने वाले बल का मान भी ज्ञात कीजिए ।

हल: (अ) जड़त्वीय निर्देश तन्त्र में प्रेक्षित वास्तविक बल का मान रस्सी के तनाव के कारण उत्पन्न अभिकेन्द्रीय बल के तुल्य होगा जिसकी दिशा तनाव बल के विपरीत दिशा में होगी अर्थात्

$$F_i = -\,m\omega^2 r$$

$$= -(2.0)\left(\frac{2\pi \times 4}{3}\right)^2 (0.5)$$

$$- = \frac{64\pi^2}{9}$$

$\approx$ -70.0 न्यूटन

(ब) रस्सी के साथ घुमने वाले निर्देश तन्त्र में बैठे प्रेक्षक द्वारा पत्थर पर लगने वाले कुल बल का मान प्रेक्षित किया जायेगा ।

F_N = - 70 न्यूटन + छद्म बल

यहां छद्म बल (अपकेन्द्रीय बल) का मान =-(- 70) न्यूटन = 70 न्यूटन होगा ।

अत: $\quad F_n = -\,70 + 70 = 0$

उदाहरण 7.7 : द्रव्यमानहीन रस्सी से गुरुत्वीय बल के विरुद्ध ऊपर की ओर 50 किग्रा के द्रव्यमान के पत्थर को खींचा जाता है । रस्सी के अधिकतम भार वहन करने की क्षमता 600 न्यूटन है । उस अधिकतम त्वरण का मान ज्ञात कीजिए जिससे पत्थर को खींचा जा सके ।

हल : यदि पिण्ड को ऊर्ध्वाधर त्वरण a से खींचा जाये तो उस पर लगने वाला प्रभावी अधिकतम बल का मान होगा

$$F_{max} = m\,(g+a)$$

प्रश्नानुसार

$m(g + a)$ = 600 न्यूटन

या $\quad 50(g + a)$ = 600 न्यूटन

$(g+a)$ = 12 न्यूटन / किग्रा

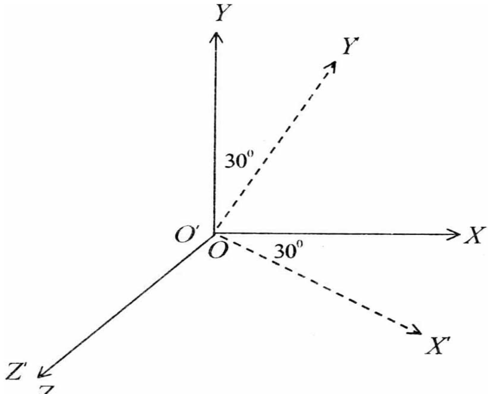
अत: त्वरण $\quad a = 12.0 - 9.8 = 22$ न्यूटन / किग्रा

उदाहरण 7.8 किसी स्थिर निर्देश तन्त्र S में कण का स्थिति सदिश $\vec{r}=3\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$ है । निर्देश तन्त्र S में इस कण का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिये जो चित्र 7.18 में दशाए अनुसार वामावृत दिशा में ZZ' के सापेक्ष 30^0 कोण से इस प्रकार झुकी हुई है कि इसका मूल बिन्दु S निर्देश तन्त्र के मूल बिन्दु से सम्पातित है ।

हल : समी. (7.16) से;

$$x' = x \cos(X',X)+y \cos (X',Y)+z \cos (X',Z)-x_0$$

यहाँ $x = 3,\ y = 4,\ z = 1,$



चित्र 7.18

$$\cos(X',X)=\cos 30=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos (X',X)=\cos(90-30)=\sin= \frac{1}{2}$$

तथा $\cos(X',Z)=\cos 90=0$

अत:

$$x'=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4\times\frac{1}{2}-1\times 0=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+2\right)$$

इसी प्रकार

$$y'=x \cos (Y',X) + y \cos (Y',Y) + z \cos (Y',Z) \text{ से}$$

$$y' = 3 \cos (90 + 30) + 4 \cos 30 - 1 \cos 90$$

$$y'=- 3 \sin 30 + 4 \cos 30 = - 3 \times \frac{1}{2}+\frac{4\sqrt{3}}{2}$$

$$y'= - \frac{3}{2}+2\sqrt{3}$$

तथा $z'= z =-1$

उदाहरण 7.9 उपरोक्त उदाहरण में सिद्ध कीजिये कि $|\vec{r}| = |\vec{r}|$

हल: उदाहरण 7.8 के हल से स्पष्ट है कि स्थानान्तरण सदिश $\vec{r}$ का मान होगा-

$$\vec{r}\,'=\vec{i}\,'x'+\vec{j}\,'y'+\vec{k}\,'z'$$

x', y' व z' का मान रखने पर,

$$\vec{r}' = \hat{i}'\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+2\right)+\hat{j}'\left(-\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)-\hat{k}'$$

अत: $|\vec{r}| = \sqrt{(3)^2+(4)^2+(1)^2} = \sqrt{26a}$

तथा $$|\vec{r}'| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+2\right)^2+\left(-\frac{3}{2}+2\sqrt{3}\right)^2+1^2}$$

$= \sqrt{26}$

अत: $|\vec{r}| = |\vec{r}'|$

7.5 सारांश (Summary)

- किसी वस्तु या कण से सम्बद्ध निर्देशांकों का वह समूह जिसके सापेक्ष किसी पिण्ड या कण की स्थिति को परिभाषित किया जाता है को निर्देश तन्त्र कहते हैं ।
- निरपेक्ष निर्देश तन्त्र निर्देशांको का ऐसा समूह है जिसकी स्थिति आकाश में सदैव स्थिर रहती है । भौतिक रूप से ऐसे निर्देश तन्त्र का कोई अस्तित्व नहीं होता है ।
- वह निर्देश तन्त्र जिसमें न्यूटन के प्रथम व द्वितीय नियम की अनुपालना होती है, उसे जड़त्वीय निर्देश तन्त्र कहते हैं ।
- एक स्थिर जड़त्वीय निर्देश तन्त्र के सापेक्ष समान वेग से गतिशील निर्देश तन्त्र भी जड़त्वीय निर्देश तन्त्र होती है ।
- अजड़त्वीय निर्देश तन्त्रों में न्यूटन के प्रथम व द्वितीय नियमों की अनुपालना नहीं होती है।
- पृथ्वी से जोड़े गये कार्तिय निर्देशांकों के समूह अजड़त्वीय निर्देश तन्त्र होती हैं ।
- निर्देश तन्त्रों के द्वारा सापेक्ष गतियों का अध्ययन किया जा सकता है ।
- यदि जड़त्वीय निर्देश तन्त्र के सापेक्ष कोई अन्य निर्देश तन्त्र झुकी हुई हो तो वह भी जड़त्वीय निर्देश तन्त्र होंगे ।

7.8 शब्दावली (Glossary)

अजड़त्वीय	Non-inertial
गति	Motion
छद्म (काल्पनिक)	Fictitious
जड़त्वीय	Inertial
झुके या घूमे	Rotated
तन्त्र	System
निर्देशांक	coordinate
निर्देश तन्त्र	Frame of reference
निरपेक्ष	Absolute

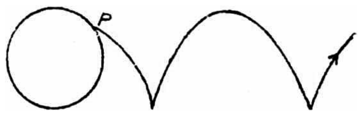
रूपान्तरण	Transformation
विस्थापित	Displaced
सापेक्ष	Relative
स्थिति सदिश	Position vector
स्थिर	Rest

7.7 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1.	Feynman	Lecture's on physics Vol. I	CBS New Delhi.
2.	Berkeley physics Course	Mechanics Vol. I	Mc Graw -Hill International
3.	M. Alonso-E.j. Finn	Fundamental University Physics Vol.I	Addison Wesley
4.	J.C Upadhyay	Mechanics	Ram Prasad & Sons, Agra

7.8 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment questions)

1. बस्तु की स्थिति नहीं बदलेगी, स्थित सदिश बदल जायेगा ।
2. क्रमश: Y व Z अक्ष; Z व X अक्ष; व X व Y अक्ष से ।
3. कोई नहीं
4. चित्र 7.7 वामहस्त तथा चित्र 7.8 दक्षिण हस्त
5. (i) सरल रेखा (ii) परवलय
6. साईक्लायड (cycloid)



7. अजड़त्वीय
8. शून्य
9. जड़त्वीय
10. y = y'

7.9 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न (very short answer type questions)

1. निर्देशांक तन्त्र क्या है?
2. निर्देश तन्त्र क्या है?
3. निरपेक्ष निर्देश तन्त्र की परिभाषा दीजिये ।
4. जड़त्वीय निर्देश तन्त्र की दो विशेषतायें लिखिये ।
5. अजड़त्वीय निर्देश तन्त्र जड़त्वीय निर्देश तन्त्र से किस प्रकार भिन्न है?

6. दक्षिण व वामहस्त निर्देशांक पद्धतियों की अवधारणा समझाइये ।
7. छद्म बल क्या है?

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

8. निर्देश तन्त्र निर्देशांक तन्त्र से किस प्रकार भिन्न है? भिन्न-2 प्रकार की निर्देश तन्त्रों की विवेचना कीजिये । पृथ्वी किस प्रकार की निर्देश तन्त्र मानी जा सकती है, टिप्पणी कीजिये ।
9. घूमे हुये निर्देश तन्त्रों में किसी कण के स्थिति निर्देशांकों के सम्बन्धों के रूपान्तरण समीकरण ज्ञात कीजिये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

10. स्वतन्त्रता पूर्वक गिर रहे 3 किग्रा. द्रव्यमान के पिण्ड पर लगने वाले उस छद्म बल का मान ज्ञात कीजिये जो ऐसी निर्देश तन्त्र में प्रेक्षित किया जाये जो 4 मीटर / से.^{2} के त्वरण से नीचे की ओर त्वरित है ।

(**उत्तर:** 12 न्यूटन उर्ध्वाधर ऊपर की ओर)

11. एक व्यक्ति का वास्तविक द्रव्यमान 75 किग्रा. है । 3g त्वरण से उर्ध्वाधर दिशा में गतिशील रॉकेट के सापेक्ष प्रेक्षित व्यक्ति का भार ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर:** 300 किग्रा भार)

12. S निर्देशांक तन्त्र में किसी कण P का स्थिति सदिश

$$\vec{r} = \left(6t^2 - 4t\right)\hat{i} + \left(-3t^3\right)\hat{j} + 3\hat{k} \text{ मीटर}$$

यदि S' निर्देश तन्त्र में कण P' का प्रेक्षित स्थिति सदिश

$$\vec{r} = \left(6t^2 - 3t\right)\hat{i} + \left(-3t^3\right)\hat{j} + 3\hat{k} \text{ मीटर}$$

हो तो इसकी S के सापेक्ष वेग ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर:** -7$\hat{i}$)

इकाई-8

गेलेलियन रूपान्तरण

(Galilean Transformation)

इकाई की रूपरेखा

8.0 उद्देश्य (objectives)

इस अध्याय के करने के बाद आप जान सकेंगे कि :-

- सापेक्ष गति करने वाले जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों में दिये गये निर्देशांको के मध्य तन्त्रों की भिन्न-भिन्न स्थितियों में क्या सम्बन्ध होता है-
- सापेक्ष गति करने वाले जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों में प्रेक्षित किसी घटना, जैसे टक्कर इत्यादि, के वेगों के मध्य किस प्रकार का सम्बन्ध होता है
- किस प्रकार से सभी भौतिक नियम (जैसे संवेग संरक्षण का नियम, ऊर्जा संरक्षण का नियम इत्यादि) सभी जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों में समान रूप से लागू होते हैं;
- सभी जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों में भौतिक नियमों का प्रारूप एकसमान होता है;
- भौतिक नियमों की निश्चरता का अर्थ व उसकी उपयोगिता;
- सभी भौतिक राशियाँ जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों में निश्चर होती हैं;
- निश्चरता सिद्धान्त उस स्थिति में लागू होता है जब गति के दौरान कणों के द्रव्यमानों का मान अपरिवर्तित रहे;
- सभी जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों में कणों के त्वरण समान परिमाण के होते हैं ।

8.1 प्रस्तावना (Introduction)

इकाई 7 में हमने निर्देशतन्त्र की आवश्यकता व अवधारणा के बारे में समझा है । अब प्रश्न यह उठता है कि यदि भिन्न-भिन्न निर्देशतन्त्रों में किसी कण या पिण्ड या घटना के निर्देशांक भिन्न-भिन्न हैं तो एक ही समय पर दी गयी वस्तु की लम्बाई आवेश इत्यादि जैसी भौतिक राशियों को दो भिन्न-भिन्न निर्देशतन्त्रो में कैसे मापा जाये । यदि मापन कर भी लिया जाये तो प्रेक्षित मान परस्पर किस प्रकार सम्बन्धित होंगे? क्या भिन्न-भिन्न निर्देशतन्त्रों में सभी भौतिक नियम समान रूप से लागू किये जा सकेंगे?

इन सभी प्रश्नों का प्रारम्भिक उत्तर गेलेलियन ने भिन्न-भिन्न भौतिक राशियों जैसे- कण या पिण्ड या घटना की स्थिति, वेग इत्यादि के मध्य सम्बन्ध ज्ञात करके समझाया । भिन्न-भिन्न जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों वाले समीकरणों को गेलेलियन रूपान्तरण (Galilean transformation) कहते हैं । अनुच्छेद 8.2 में गेलेलियन रूपान्तरण का अध्ययन करेंगे । इन रूपान्तरण समीकरणों के आधार पर हम इस तथ्य की पुष्टी कर सकते हैं कि सभी जड़त्वीय निर्देशतन्त्रो में सभी भौतिक नियम समान रूप से लागू होते हैं तथा सभी भौतिक राशियों जैसे लम्बाई, संवेग, ऊर्जा इत्यादि का मान सभी जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों में समान होता है अर्थात् भौतिक राशियों का मान सभी जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों में अचर होता है ।

इस इकाई के अनुच्छेद 8.3 में रेखीय संवेग एवं ऊर्जा के लिये निश्चरता का सिद्धान्त पढेंगे।

8.2 गेलेलियन रूपान्तरण (Galilean transformation)

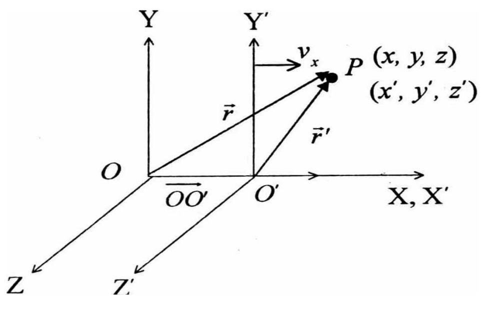
किसी आकाश (space) में **किसी क्षण** किसी घटना विशेष के लिए भिन्न-भिन्न निर्देशतन्त्रों में लिए गए निर्देशांकों के मान भिन्न-भिन्न होते हैं । दो भिन्न-भिन्न जड़त्वीय (अभीष्ट निकाय या घटित होने वाली घटना से सम्बद्ध) निर्देशतन्त्रों के निर्देशांकों के मध्य सम्बन्ध व्यक्त करने वाली गणितीय समीकरणों को गेलेलियन रूपान्तरण समीकरण कहते हैं ।

8.2.1 स्थिति निर्देशांको के मध्य रूपान्तरण समीकरण (Transformation equation between position coordinate)

सापेक्षित गति के दौरान निर्देश तंत्रों की जो अक्ष परस्पर समानान्तर होती है उनके निर्देशांकों के मान स्थिर व गतिशील निर्देश तंत्र में यथावत रहते हैं।

(अ) **जबकि प्रारम्भ (t = 0) में निर्देश तन्त्रों के मूल बिन्दु सम्पातित हों**

चित्र 8.1 में दो जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों S व S' को दर्शाया गया है, जिनके मूल बिन्दु प्रारम्भ में (t =0 समय पर) परस्पर सम्पातित हैं । S' निर्देशतन्त्र X- दिशा में नियत वेग v_x से गतिशील है ।



चित्र 8.1

किसी क्षण समय t पर बिन्दु P के S तथा S निर्देशतन्त्रों में प्रेक्षित निर्देशांक क्रमशः (x, y, z, t) व (x', y', z', t') हैं ।

S व S' निर्देशतन्त्रों में कण p के स्थिति सदिशों का मान क्रमशः $\vec{r}$ व $\vec{r}\,'$ हो तो चित्र 8.1 की

ज्यामिति से

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'$$

यहाँ $\overrightarrow{OO'} = (v_x t)\hat{i}$

अतः $\vec{r}\,' = \vec{r}(v_x t)\hat{i}$ ....(8.1)

चूँकि $\vec{r}\,' = x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}$

तथा $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

अतः $x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k} = (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) - (v_x t)\hat{i}$ ......(8.2)

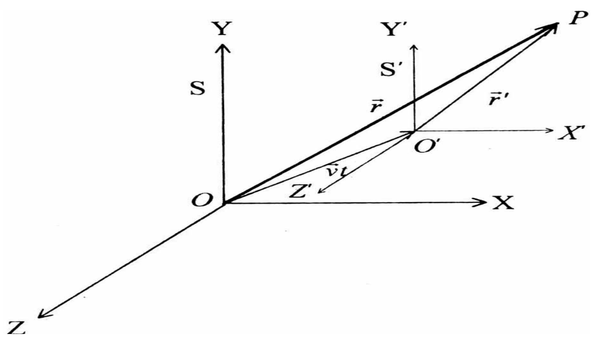
समी. (8.2) के दोनों पक्षों में $\hat{i}, \hat{j}$, व $\hat{k}$ के गुणांकों की तुलना करने पर

$x' = x - v_x t$

$y' = y$

$z' = z$ .....(8.3)

अब मान लीजिये कि निर्देश तन्त्र S' किसी स्वेच्छ दिशा (arbitrary direction) में नियत वेग $\vec{v}$ से



चित्र 8.2

चित्रानुसार गति कर रही है तो चित्र 8.2 की ज्यामिति से

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}\,'$$

या $\vec{r}\,' = \vec{r} - \overrightarrow{OO'}$

परन्तु $\overrightarrow{OO'} = \vec{v}t$

अतः $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t$ ...(8.4)

परन्तु $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$ ......(8.5)

अत: $(x'\hat{i}+y'\hat{j}+z'\hat{k})=(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})-(v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k})$

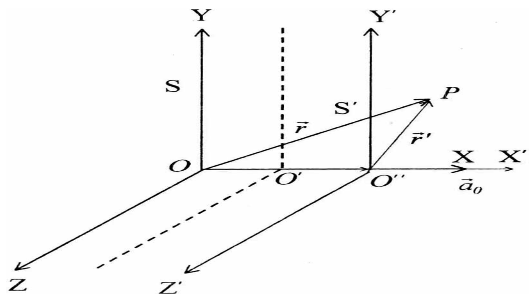
समीकरण (8.5) के दोनों पक्षों में $\hat{i},\hat{j},$ व $\hat{k}$ के गुणांकों की तुलना करने पर

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-v_xt) \\ y' &= (y-v_yt) \\ z' &= (z-v_zt) \end{aligned}\right\} \qquad \text{.....(8.4)}$$

समी. (8.3) व (8.6) स्थिति निर्देशांकों के गेलेलियन स्थान्तरणों को व्यक्त करती है ।

(ब) जबकि प्रारम्भ में (t = 0 पर) निर्देशतन्त्रों के मूल बिन्दु सम्पातित नहीं हों -

चित्र 8.3 में दो निर्देश तन्त्र S व S' दर्शाये गये हैं जिनके मूल बिन्दु t = 0 समय पर x_0, दूरी से विस्थापित हैं । S' निर्देशतन्त्र S के सापेक्ष v_x वेग से X- दिशा में गतिशील है ।



चित्र 8.3

समय t पर S व S' निर्देश तन्त्र में प्रेक्षित किसी कण P के स्थिति सदिशों का मान क्रमशः: $\vec{r}$ व $\vec{r}\,'$ हो तो I $\vec{r}\,' = \vec{r} - \overrightarrow{OO''}$ यहाँ $\overrightarrow{OO''}=(x_0+v_xt)\hat{i}$

अत: $(x'\hat{i}+y'\hat{j}+z'\hat{k})=(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})-(x_0+v_xt)\hat{i}$

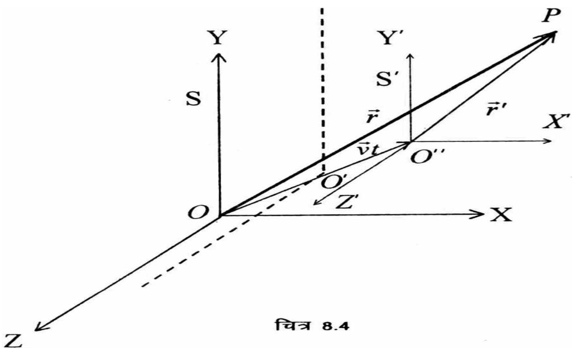
उपरोक्त समीकरण में दोनों तरफ $\hat{i},\hat{j},$ व $\hat{k}$ के गुणांकों की तुलना करने पर

x'= x - (x_0 + v_x t)

या
$$\left.\begin{aligned} x' &= x-(x-x_0)-v_xt \\ x' &= (x-x_0)-v_xt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}\right\} \qquad \text{.....(8.7)}$$

अब हम एक ऐसी स्थिति पर विचार करते हैं जिनमें S' निर्देशतन्त्र का मूल बिन्दु 0', समय t = 0 पर किसी दिशा में $\vec{r}$ से विस्थापित है तथा $\vec{v}$ वेग से इस दिशा में गतिशील हैं । समय t पर कण P के निम्न स्थिति सदिश $\vec{r}$ व $\vec{r}\,'$ हो तो (चित्र 8.4 के अनुसार)

$\vec{r}=(\vec{r}_0+\vec{v}t)+\vec{r}$ या $\vec{r}\,'=(\vec{r}-\vec{r})-\vec{v}t$



चित्र 8.4

या $\quad \vec{r}\,' = \left(\vec{r} + \vec{r}_0\right) - \vec{v}t$

सदिशों को घटकों के रुप में व्यक्त करने पर

$$\left(x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}\right) = (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k} - \left(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{z}\right)t$$

एकांक सदिशों $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ के गुणजों की तुलना करने पर

$$x' = (x - x_0) - v_x t$$
$$y' = (y - y_0) - v_y t$$
$$z' = (z - z_0) - v_z t$$

समीकरण (8.7) व (8.8) भिन्न-भिन्न स्थितियों में गेलेलियन रूपान्तरण समीकरण कहलाती हैं ।

8.2.2 वेगों के रूपान्तरण समीकरण (Transformation equation of Velocities)

(अ) जब प्रारम्भ में (t = 0 पर) **निर्देशतन्त्रो S व S' मूल बिन्दु सम्पातित हों**

किसी पिण्ड या कण का वेग उसकी स्थिति में समय के सापेक्ष परिवर्तन दर के तुल्य होता है ।

अर्थात् $\quad \vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

यदि S व S' निर्देशतन्त्र में दिये गये कण p के वेगों का मान X- दिशा में क्रमश: $\vec{V}_x$ व $\vec{V}'_x$ हो तो, समी. (8.3) को के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{d\vec{x}'}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} - v_x\hat{i}$$

या $\quad \vec{V}'_x = \vec{V}_x - \vec{v}_x$

$$\left.\begin{aligned} V'_x &= V_x - v_x \\ V'_y &= V_y \\ V_z' &= V_z \end{aligned}\right\} \qquad \text{.........(8.9)}$$

अब यदि S' निर्देश तन्त्र S के सापेक्ष किसी स्वेच्छ दिशा में $\vec{v}$ वेग से गतिशील हो तथा S व S' निर्देश तन्त्रों में दिये गये कण P के वेग क्रमश: $\vec{V}$ व $\vec{V}''$ हो तो t समय पर

या
$$\vec{V}'t = \vec{V}t - \vec{v}t$$
$$\vec{V}'t = \vec{V}t - \vec{v}$$

वेगों को घटकों के रुप में लिखने पर

$$\left(V'x\hat{i} + V'_y\,\hat{j} + V'_z\,\hat{k}\right) = (V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}) - \left(v'_x\,\hat{i} + v'_y\,\hat{j} + v'_z\,\hat{k}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} V'_x &= V_x - v_x \\ V'_y &= V_y - v_y \\ V_z' &= V_z - v_z \end{aligned}\right\} \qquad \text{......(8.10)}$$

(ब) जब प्रारम्भ में (t =0 पर) निर्देशतन्त्रों के मूल बिन्दु संपातित नहीं हो :

समी (8.7) को t के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x - x_0\right) - \frac{d}{dt}\left(v_x t\right)$$

$$\left.\begin{aligned} V'_x &= V_x - v_x \\ V'_y &= V_y \\ V' &= V_z \end{aligned}\right\} \qquad \text{......(8.11)}$$

इसी प्रकार से जब निर्देश तन्त्र S' किसी अभीष्ट दिशा में गति कर रही हो तो उसके वेग रूपान्तरण समीकरणों का मान समीकरण (8.8) का 'के सापेक्ष अवकलन पर प्राप्त किया जा सकता है । अर्थात्

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right)\vec{v}$$

या
$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{v} \qquad \text{.......(8.12)}$$

समी. (8.12) भिन्न-2 स्थितियों में किसी कण के वेगों के रूपान्तरण समीकरणों को व्यक्त करती है ।

व्युत्क्रम रुपान्तरण (Inverse transformation)-- ये वे रुपान्तरण समीकरण हैं जिनमें S' निर्देश तन्त्र के निर्देशांकों से S निर्देश तन्त्र के निर्देशांकों को ज्ञात किया जाता है । इन रुपान्तरण समीकरणों को ज्ञात करने के लिये मूल रुपान्तरण समीकरणों में गतिशील निर्देश तन्त्र व स्थिर निर्देश तन्त्र के निर्देशांकों को परस्पर परिवर्तित करने व गतिशील निर्देश तन्त्र के वेग $\vec{v}$ को $-\vec{v}$ प्रतिस्थापित करके ज्ञात किये जा सकते हैं । अर्थात्

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + v_x t \\ y &= y' + v_x t \\ z &= z' + v_x t \end{aligned}\right\}$$

तथा
$$\left.\begin{aligned} V'_x &= V_x' + v_x \\ V'_y &= V_y' + v_y \\ V_z &= V_z' + v_z \end{aligned}\right\} \qquad \text{.....(8.14)}$$

बोध प्रश्न (self assessment questions)

1. गेलेलियन रूपान्तरण गतिशील निर्देशतन्त्र के वेग के किस परिमाण के लिये वैध होते हैं?

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

2. यदि S' निर्देशतन्त्र स्थिर निर्देशतन्त्र के सापेक्ष एक समान त्वरण से त्वरित हो रही हो तो क्या इन निर्देशतन्त्रों के मध्य रूपान्तरण समीकरण ज्ञात किए जा सकते हैं?

………………………………………………………………………………………………………

3. यदि S' निर्देशतन्त्र स्थिर निर्देशतन्त्र S के सापेक्ष $2\hat{i}$ - मीटर / सेकण्ड के वेग से गतिशील हो रही है तो इसमें प्रेक्षित उस कण के निर्देशांक 1 सेकण्ड पर चाल क्या होगी जिसके S निर्देशतन्त्र में निर्देशांक (0,0,0) हैं ।

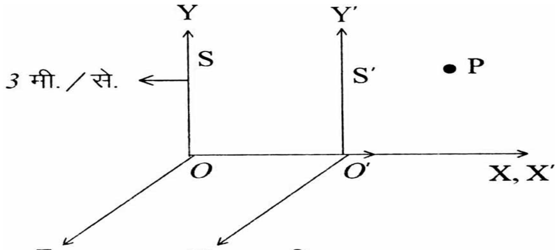
………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

4. क्या घूर्णी निर्देशतन्त्रों के लिये गेलेलियन रूपान्तरण ज्ञात किये जा सकते हैं?

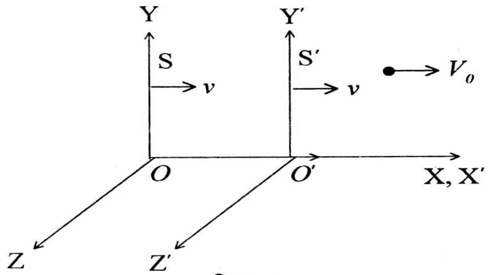
………………………………………………………………………………………………………

5. चित्र 8.5 के अनुसार S' निर्देश तन्त्र में बैठे प्रेक्षक द्वारा स्थिर कण P के लिये प्रेक्षित वेग कितना होगा?



चित्र 8.5

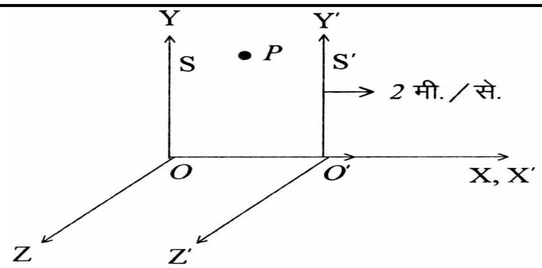
6. चित्र 8.6 में दर्शायी गयी व्यवस्था के लिये S' निर्देश तन्त्र में कण के वेग का मान ज्ञात करो ।



चित्र 8.6

………………………………………………………………………………………………………

7. चित्र 8.7 में दर्शायी गयी व्यवस्था के लिये S निर्देश तन्त्र में स्थित स्थिर कण के वेग का मान गतिशील निर्देश तन्त्र S' में क्या है?



चित्र 8.7

उदाहरण 8.1 यदि दो निर्देशतन्त्र S व S के मूल बिन्दु t = t' = t_0 पर सम्पातित हों तथा S निर्देशतन्त्र के सापेक्ष S' निर्देशतन्त्र v वेग से इस प्रकार से गतिशील हो की इसके अक्ष S निर्देशतन्त्र के समान्तर रहे तो गेलेलियन रूपान्तरण समीकरण ज्ञात कीजिये ।

हल: इस स्थिति मे गेलेलियन रूपान्तरणों को निम्न सम्बन्ध के द्वारा व्यक्त कर सकते हैं

$$\vec{r} = \vec{v}\left(t' - t_0\right) + \vec{r}\,'$$

अत: जब S व S' समानान्तर हो तो उनके तीनों अभिलम्बित अक्षों के मध्य रूपान्तरण समीकरणों को निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं-

$$x' = x - v_x(t - t_0)$$

$$y' = y - v_y(t - t_0)$$

$$z' = z - v_z(t - t_0)$$

तथा $t' = t$

इसी प्रकार व्युत्क्रम रूपान्तरण समीकरण को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं-

$$x = v_x(t - t_0) + x'$$

$$y = v_y(t - t_0) + y'$$

$$z = v_z(t - t_0) + z'$$

उदाहरण 8.2 किसी क्षण दो कणों के स्थिति सदिश $\vec{r}_1$ व $\vec{r}_2$ व वेग क्रमश: $\vec{v}_1$ व $\vec{v}_1$ हों तो सिद्ध कीजिये की दोनों कण तभी टकरा सकते हैं जब

$$\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) = 0$$

हल: समय t पश्चात दोनों कणों के स्थिति सदिशों का मान क्रमश: होगा $\vec{r}_1 - \vec{v}_1 t$ तथा $\vec{r}_2 - \vec{v}_2 t$ टक्कर के समय दोनों कणों के स्थिति सदिशों का मान समान होगा अत:

$$\vec{r}_1 - \vec{v}_1 t \;=\; \vec{r}_2 - \vec{v}_2 t$$

या $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \;=\; (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)t$

या $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ x $(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$=- $(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)t$ x $(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$

या $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ x $(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)t$ =0

उदाहरण 8.3 सिद्ध कीजिये कि किसी कण के निर्देशतन्त्र S व S' में प्रेक्षित त्वरणों का मान समान होता है ।

हल: वेगों के गेलेलियन रूपान्तरणों से

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{v}$$

जहाँ $\vec{V}'$ व $\vec{V}'$, क्रमशः S व S' निर्देशतन्त्र में कण के वेगों का मान है तथा S निर्देशतन्त्र के सापेक्ष S' तंत्र का वेग $\vec{v}'$ है ।

अब समीकरण को t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d\vec{V}'}{dt} = \frac{d\vec{V}'}{dt}$$

या $\vec{a}' = \vec{a}$

8.3 गेलेलियन के निश्चरता का सिद्धान्त (Law of Galilean invariance)

गेलेलियन के निश्चरता का सिद्धान्त प्रायोगिक प्रेक्षणों पर आधारित है जिसे निम्न प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है

भौतिकी के समस्त नियम सभी जड़त्वीय निर्देश तन्त्रों में समान रूप से लागू होते हैं ।

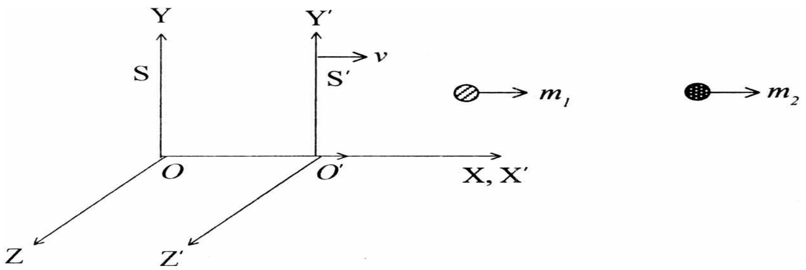
निश्चरता के उस सिद्धान्त को सापेक्षता के सिद्धान्त के नाम से भी जाना जाता है । चूँकि कोई भी दो निर्देश तन्त्र जो एक दूसरे के सापेक्ष स्थिर वेग से गतिशील हों को गेलेलियन रूपान्तरण समीकरणों के द्वारा सम्बन्धित किया जा सकता है अत: गेलेलियन की उपरोक्त अवधारणा को निम्न प्रकार से भी परिभाषित किया जा सकता है ।

ऐसी दो निर्देशतन्त्र जो गेलेलियन रूपान्तरणों के द्वारा सम्बन्धित हो, में भौतिकी के मूल नियमों का स्वरूप अचर रहता है ।

8.3.1 संवेग सरंक्षण के निश्चरता का सिद्धान्त (Law of invariance of conservation of linear momentum)

मान लीजिये की S तथा S' दो निर्देशतन्त्र हैं जिनके मूल बिन्दु t = 0 पर संपातित हैं । S' निर्देशतन्त्र S तंत्र के सापेक्ष v वेग से X- दिशा में गतिशील है जैसा चित्र 8.8 में दर्शाया गया है ।

माना m_1 व m_2 द्रव्यमानों के कणों के मध्य एकविमीय टक्कर हो रही है । इन कणों का टक्कर से पूर्व S तथा S' दो निर्देशतन्त्र में वेगों का मान क्रमशः u_1 व u_2 तथा u_1 व u_2 है । तथा टक्कर के पश्चात



चित्र 8.8

वेगों के मान क्रमशः V_1 V_2 तथा V_1' व V_2' है । संवेग के संरक्षण के नियम से, टक्कर से पूर्व

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V_2}$$

टक्कर के पश्चात

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V_2}$$

गेलेलियन के वेगों के रूपान्तरण समीकरणों से

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_1 - \vec{v}; \vec{u}_1 = \vec{u}_1 - \vec{v}$$

व $$\vec{V}'_1 = \vec{V}_1 - \vec{v}_1; \vec{V}'_1 = \vec{V}_1 - \vec{v}_1$$

समी. (i), (ii) व (iii) से

$$m_1(\vec{u}_1 - \vec{v}) + m_2(\vec{u}_2 - \vec{v}) = m_1(\vec{V}_1 - \vec{v}) + + m_2(\vec{V}_2 - \vec{v})$$

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V_2}$$

उक्त समीकरणों की तुल्यता इस तथ्य को सिद्ध करती है कि संवेग के सरंक्षण का नियम सभी जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों में समान रूप से लागू होता है । यह कथन संवेग के संरक्षण के निश्चरता के सिद्धान्त की पुष्टि करता है ।

नोट : यही सुविधा के लिये गतिशील निर्देशतन्त्र को X- दिशा में गतिशील माना है । यदि S' निर्देशतन्त्र किसी स्वेच्छ दिशा में गति करे तो इसी प्रकार, निश्चरता के सिद्धान्त का प्रतिपादन कर सकते हैं ।

8.3.2 ऊर्जा संरक्षण के निश्चरता का सिद्धान्त (Law of invariance of conservation of energy)

यदि चित्र 8.8 में दर्शाई गयी टक्कर अप्रत्यास्थ हो तो S निर्देशतन्त्र में ऊर्जा संरक्षण के नियम को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है-

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 + E$$

जहाँ E टक्कर के दौरान कणों की गतिज ऊर्जा में हानि है । यहीं हमने यह माना है की गति के दौरान कणों के द्रव्यमानों m_1 व m_2में कोई परिवर्तन नहीं होता है ।

गेलेलियन रूपान्तरण के अनुसार S' निर्देशतन्त्र में टकराने वाले कणों का प्रेक्षित वेगों का मान टक्कर से पूर्व व टक्कर के पश्चात क्रमशः होगा ।

$$\vec{u}'_1 = \vec{u}_1 - \vec{v}; \vec{u}'_2 = \vec{u}_2 - \vec{v} \quad \text{....(8.16)}$$

व $$\vec{V}_1 = \vec{V}_1 - \vec{v}; \vec{V}_2 = \vec{V}_2 - \vec{v} \quad \text{.....(8.17)}$$

अब ऊर्जा संरक्षण के नियम को S' निर्देशतन्त्र के लिये लिखने पर

$$\frac{1}{2}m_1u'^2_1 + \frac{1}{2}m_2u'^2_2 = m_1V_1'^2 + \frac{1}{2}m_2V'^2_2 E' \quad \text{....(8.18)}$$

समी. (8.16) व (8.17) का उपयोग समी. (8.18) में करने पर

$$\frac{1}{2}m_1(\vec{u}_1 - \vec{v})^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{u}_2 - \vec{v})^2 = \frac{1}{2}m_1(\vec{V}_1 - \vec{v})^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{V_2} - \vec{v})^2 + E'$$

या $\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2+\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2-m_1\vec{u}_1.\vec{v}-m_2\vec{u}_2.\vec{v}$

$$m_1\vec{u}_1.\vec{v}-\vec{v}+m_2\vec{u}_2.\vec{v}+E=m_1\vec{V}_1.\vec{u}+m_2\vec{V}_2.\vec{v}+E'$$

या $(m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2).\vec{v}+E=(m_1\vec{V}_1+m_2\vec{V}_2).\vec{v}+E'$

संवेग के संरक्षण नियम की निश्चरता के सिद्धान्त का अनुप्रयोग करने पर

$$E = E' \qquad \text{.....(8.19)}$$

उपरोक्त विवेचना ऊर्जा संरक्षण के निश्चरता के सिद्धान्त की पुष्टि करता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

8. क्या पृथ्वी से जुड़ी निर्देशतन्त्र में निश्चरता के सिद्धान्त को सिद्ध किया जा सकता है?

………

9. एक स्थिर निर्देशतन्त्र में एक स्केल की लम्बाई 0.3 मी. प्रेक्षित की जाती है । निम्न निर्देशतन्त्रों में किस में छड़ की लम्बाई का मान इस वास्तविक लम्बाई के तुल्य प्रेक्षित किया जायेगा ।

(i)20 मी./से. स्थिर वेग से X- दिशा में गतिशील निर्देशतन्त्र

(ii) 2 मी. / से^{2} त्वरण से X- दिशा में गतिशील निर्देशतन्त्र

………

………

10. क्या वेग गेलेलियन रूपान्तरण के अनुसार निश्चर है ।

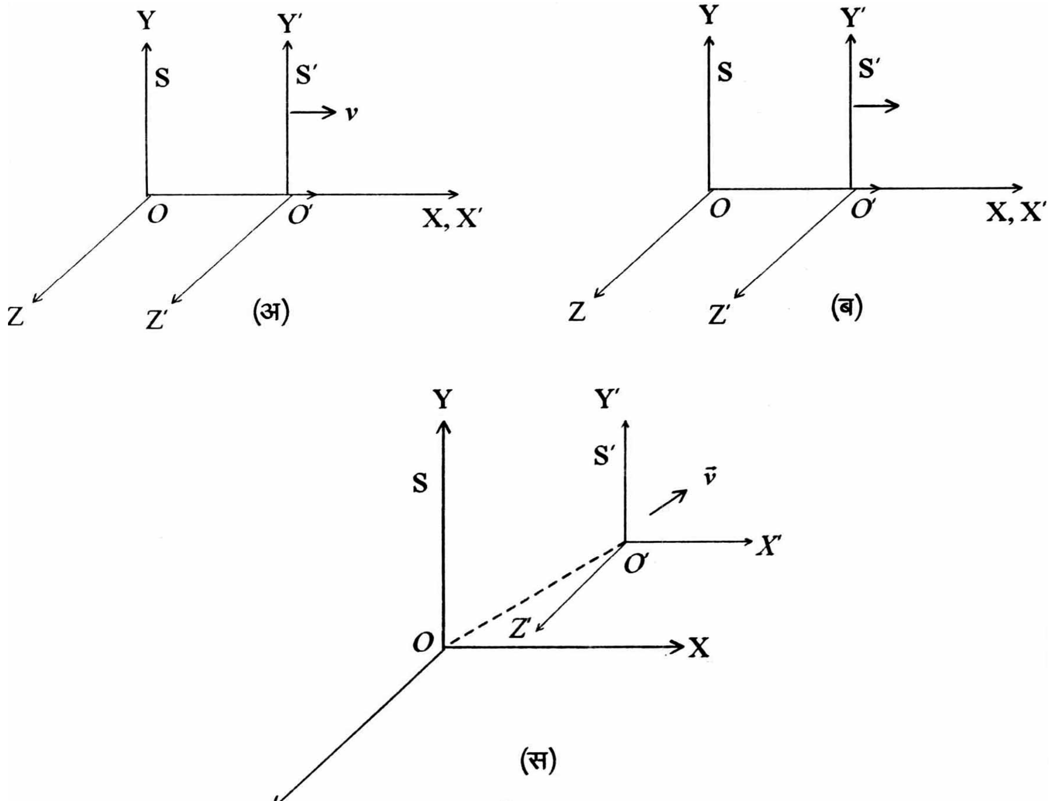
………

………

11. गेलेलियन रूपान्तरण के अनुसार निम्न में से कौनसी भौतिक राशि निश्चर है-

(i) लम्बाई (ii) त्वरण

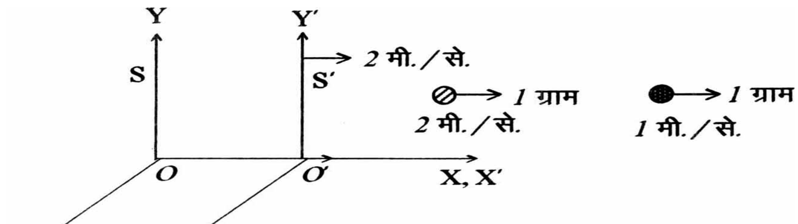
12. नीचे दर्शायी गई किस व्यवस्था (चित्र 8.9) के लिए गेलेलियन निश्चरता का सिद्धान्त लागू होगा ।



चित्र 8.9

………

13. चित्र 8.10 में S' निर्देशतन्त्र में कणों के टक्कर से पूर्व कणों के वेगों के मान ज्ञात कीजिये ।



चित्र 8.10

………

14. प्रश्न 13 में टक्कर के पश्चात S' निर्देशतन्त्र में कणों के वेगों का मान क्या होगा।

………

उदाहरण 8.4 निर्देश तन्त्र S' स्थिर गेलेलियन निर्देश तन्त्र S के सापेक्ष +X दिशा में 3 मीटर / सेकण्ड के वेग से गतिशील है । यदि S निर्देश तन्त्र में एक स्थिर बिन्दु P के निर्देशांक (1,2,2) हो तो t = 2 सेकण्ड पर S' निर्देश तन्त्र में बिन्दु P के निर्देशांकों का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : गेलेलियन रुपान्तरण समीकरणों से

$$x' = x - v_x t, \quad y' = y, \quad z' = z$$

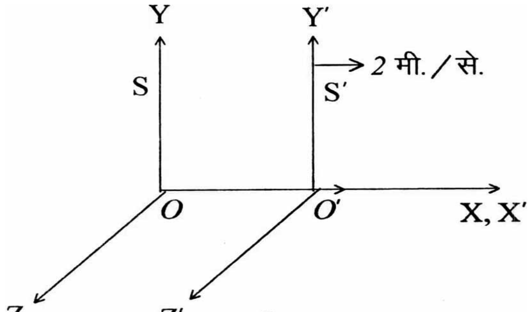
अत: $x' = 1\ (1)\ (2) = -1$

$y' = 2$

$z' = 2$

अर्थात S' निर्देश तन्त्र में बिन्दु P के निर्देशांक होंगे (-1,2,2)

उदाहरण 8.5: चित्र 8.11 में दर्शाये गये अनुसार S' निर्देश तन्त्र, S निर्देश तन्त्र के सापेक्ष +X दिशा में 2 मीटर / सेकण्ड वेग से गतिशील है । यदि किसी 1 किग्रा द्रव्यमान के कण का S निर्देश तन्त्र में प्रेक्षित वेग 4 मीटर / सेकण्ड हो तो S' निर्देश तन्त्र में कण का संवेग ज्ञात कीजिए ।



चित्र 8.11

हल : वेगों के गेलेलियन रुपान्तरणों के अनुसार S' निर्देश तन्त्र में कण का प्रेक्षित वेग होगा

$V'_x = V_x - v$

अत: $V'_x = 4-2=2$ मीटर / सेकण्ड

S' निर्देश तन्त्र में कण का संवेग होगा

$P'_x = mV'_x = (1)(2) = 2$ किग्रा मीटर / सेकण्ड

उदाहरण 8.6 : स्थिर निर्देश तन्त्र S के सापेक्ष +X दिशा में अचर वेग से गतिशील S' निर्देश तन्त्र में किसी कण P का वेग V'_x प्रेक्षित किया गया है । यदि कण का वास्तविक वेग V_x हो तो सिद्ध करो कीजिए की दोनों निर्देश तन्त्रों में कण पर लगने वाले बल का मान समान होगा ।

हल : वेगों के गेलेलियन रुपान्तरण समीकरणों से $V'_x = V_x - v$

यहां स्थिर निर्देश तन्त्र में कण का प्रेक्षित वेग वास्तविक वेग V_x के तुल्य है ।

$$\frac{d\vec{V}'_x}{dt} = \frac{d\vec{V}_x}{dt} - \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}'_x = \vec{a}'_x - 0 \qquad \text{चूंकि } v \text{ अचर है ।}$$

$$\vec{a}'_x = \vec{a}_x$$

यदि कण का द्रव्यमान m हो तो

$$m\vec{a}'_x = m\vec{a}_x$$

या $\vec{F}'_x = \vec{F}_x$

उदाहरण 8.7 : समय t = t' = 0 पर S' निर्देशांक का मूल बिन्दु O', तन्त्र S के मूल बिन्दु O से एक मीटर दूरी पर स्थित है तथा S निर्देश तन्त्र में कण P के स्थिति सदिश का मान

$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ मीटर

है । यदि S' निर्देश तन्त्र में +X दिशा में 2 मीटर / सेकण्ड वेग से गतिशील हो तो t=2 सेकण्ड पश्चात गतिशील निर्देश तन्त्र में प्रेक्षित कण का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए ।

हल : स्थिति सदिश के गेलेलियन रुपान्तरणों की परिभाषा से

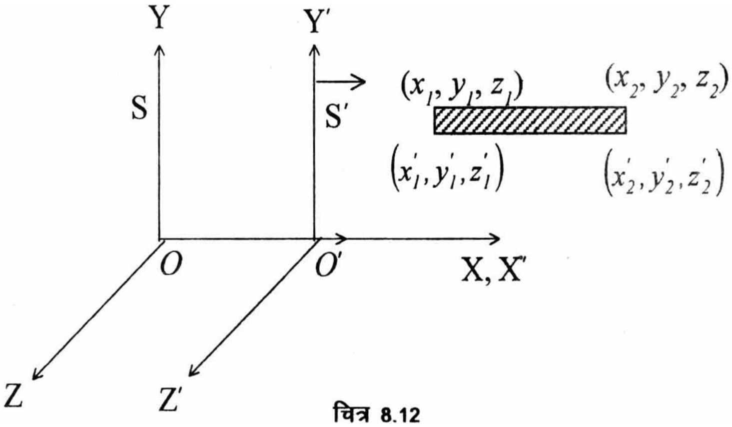
$$\vec{r} = (\vec{r} - \vec{r_0}) - \vec{v}t$$

यहां t = t'=0 पर निर्देश तन्त्र S' का प्रारम्भिक विस्थापन है । अत:

$$\vec{r}\,' = \left(2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}\right) - 1\hat{i} - \left(2\hat{i}\right)(1) \qquad \text{या} \qquad \vec{r}\,' = -\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$

उदाहरण 8.8 सिद्ध कीजिये कि किस छड़ की लम्बाई का मान जड़त्वीय निर्देशतन्त्र में निश्चर होता है ।

हल : माना S व S' दो निर्देशतन्त्र हैं जिनके मूल बिन्दु t = 0 समय पर सम्पातित हैं । S' निर्देशतन्त्र X- दिशा में v वेग से गतिशील हैं । माना S निर्देशतन्त्र में L की लम्बाई की छड़ के सिरों के निर्देशांक क्रमशः (x'_1,y'_1,z'_1) व (x'_2,y'_2,z'_2) हैं । S' निर्देशतन्त्र में इन सिरों के निर्देशांक क्रमशः (x_1,y_1,z_1) व (x_2,y_2,z_2) हैं । (चित्र 8.12)



चित्र 8.12

S निर्देशतन्त्र में छड़ की लम्बाई

$$L = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2} \qquad \text{.... (8.20)}$$

तथा S' निर्देशतन्त्र में छड़ की लम्बाई

$$L' = \sqrt{\left(x_2^1 - x_1'\right)^2 + \left(y_2^1 - y_1'\right)^2 + \left(z_2^1 - z_1'\right)^2} \qquad \text{.... (8.21)}$$

गेलेलियन रूपान्तरण से,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - vt; \qquad & x_2' &= x_1 - vt; \\ y_1' &= y_1; & y_2' &= y_2 \\ z_1' &= z_2; & z_2' &= z_2 \end{aligned} \qquad \text{.... (8.22)}$$

समी. (8.22) का उपयोग समी (8.21) में करने पर

$$L^{'} = \sqrt{\{(x_2 - vt) - (x_1 - vt)\}^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$L^{'} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad ....(8.23)$$

समी. (8.20) व (8.23) से

$$L = L^{'}$$

अर्थात् जड़त्वीय निर्देशतन्त्र में छड़ की लम्बाई निश्चर रहती है ।

उदाहरण 8.9 एक स्थिर निर्देशतन्त्र में प्रेक्षित दो कणों, जिनके द्रव्यमान 20 ग्राम व 30 ग्राम हैं, के वेग क्रमश: 3 मी./ से. व 2 मी./ से, प्राप्त होते हैं । 2 मी./ से. के स्थिर वेग से X- दिशा में गतिशील जडत्वीय निर्देशतन्त्र में प्रेक्षित वेगों का मान ज्ञात कीजिये तथा सिद्ध कीजिये कि कणों के संवेगों का मान निश्चर है । टक्कर पूर्णतया: प्रत्यास्थ है ।

हल : वेगों के गेलेलियन रूपान्तरण की परिभाषा से

$$u_1^{'} = u_1 - v \qquad \text{व} \qquad u_2^{'} = u_2 - v$$

$$V_1^{'} = V_1 - v \qquad \qquad V_2^{'} = V_2 - v$$

यहीं u1 व u2 क्रमश: स्थिर निर्देशतन्त्र में कणों का टक्कर से पूर्व वेगों का मान है तथा V'_1 व V'_2 क्रमश: कणों के गतिशील निर्देशतन्त्र में टक्कर के पश्चात वेग है । इसी प्रकार से V'_1 व V'_2 टक्कर के पश्चात स्थिर निर्देशतन्त्र में कणों का वेग है व V'_1, V'_2 टक्कर के पश्चात गतिशील निर्देशतन्त्र के कणों का वेग हैं ।

अत:

$$u_1^{'} = 3 - 2 = 1 \text{ मी./से.} \quad .... (i)$$

$$u_2^{'} = 2 - 2 = 1 \text{ मी./से.}$$

संवेग के संरक्षण नियम से .... (ii)

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1V_1 + m_2V_2$$

तथा ऊर्जा संरक्षण नियम से

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 \quad ... (iii)$$

समी. (ii) व (iii) से

$$V_1 + \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{2m_2u_1}{m_1 + m_2} \quad ... (iv)$$

व
$$V_2 + \frac{(m_2 - m_1)u_2}{m_1 + m_2} + \frac{2m_1u_1}{m_1 + m_2} \quad .... (v)$$

$$V_1 = \frac{-10}{50} \times 3 + \frac{2 \times 30 \times 2}{50}$$

$$V_1 = -0.6 + 2.4 = 1.8 \text{ मी./सै.}$$

व
$$V_2 = \frac{10}{50} \times 2 + \frac{2 \times 30 \times 3}{50}$$

$$V_2 = 0.4 + 2.4 = 2.8 \text{ मी./सै.}$$

अत: गतिशील निर्देशतन्त्र में टक्कर के पश्चात कणों का वेग होगा

$$V_1' = V_1 - v$$

$$= 1.8 - 2.0$$

या $V_1' = -0.2$ मी./सै.

इसी प्रकार से

$$V_1' = V_2 - v = 2.8 - 2.0$$

या $V_1' = 0.8$ मी./सै.

संवेग संरक्षण की निश्चरता के लिये यह आवश्यक है कि कणों के कुल संवेग का मान गतिशील जड़त्वीय निर्देशतन्त्र में भी वही होना चाहिये जो स्थिर निर्देशतन्त्र में है ।

टक्कर से पूर्व S' निर्देशतन्त्र में प्रेक्षित कणों का कुल संवेग

$$m_1 u_1' + m_2 u_2'$$

$$= (20)(I)$$

$$= 20 \text{ ग्राम मी।/से.} \qquad \text{(vi)}$$

टक्कर से पश्चात S' निर्देशतन्त्र में प्रेक्षित कणों का कुल संवेग

$$= (20)(-0.2) + 30(0.8)$$

$$= -4 + 24$$

$$= 20 \text{ ग्राम मी/से.} \qquad \text{(vii)}$$

समीकरण (vi) व (vii) कणों के नियम के संवेग संरक्षण की निश्चरता के सिद्धान्त की पुष्टि करता है ।

उदाहरण 8.10 धरातल पर खड़े प्रेक्षक G के सापेक्ष v वेग से गतिशील रेलगाड़ी में बैठे प्रेक्षक T द्वारा एक प्रयोग किया जाता है । प्रेक्षक T रेलगाड़ी की गति की दिशा में t सेकिण्ड के लिये m द्रव्यमान के कण पर स्थिर परिणाम का बल F आरोपित करता है । सिद्ध कीजिए T व G प्रेक्षक द्वारा प्रेक्षित कार्यो का मान कण की गतिज ऊर्जाओं के अन्तर के तुल्य होगा ।

हल : यदि दिया गया कण आरोपित बल के प्रभाव में मुक्त रुप से गति कर रहा है तो कण त्वरण $a = \frac{F}{M}$ से गति करेगा । माना t=0 पर कण विरामवस्था में है । अत: प्रेक्षक T द्वारा t सेकण्ड में कण द्वारा तय की गयी दूरी का मान प्रेक्षित होगा

$$d_T = \frac{1}{2} a t^2$$

अत: T द्वारा किये गये कार्य का मान

$$W_T = (ma)\left(\frac{1}{2} a t^2\right) = \frac{1}{2} m a^2 t^2$$

सेकण्ड में प्रेक्षक G द्वारा प्रेक्षित कण द्वारा तय की गयी दूरी का मान होगा

$$d_G = \frac{1}{2}at^2 + vt$$

अतः G द्वारा किये गये कार्य का मान होगा

$$W_G = \frac{1}{2}ma^2t^2 + mavt$$

T प्रेक्षक द्वारा कण की गतिज ऊर्जा में प्रेक्षित परिवर्तन का मान होगा ।

$$\Delta K_T = \frac{1}{2}m\left[v_f\right]^2 - \frac{1}{2}m\left(v_i\right)^2$$

यहां $v_f = at$ तथा $v_i = 0$

अतः $\Delta K_T = \frac{1}{2}ma^2t^2$

G प्रेक्षक के द्वारा प्रेक्षित कण को प्रारम्भिक व अन्तिम वेगों का मान क्रमशः v व माल at+v है । अतः इसके सापेक्ष कण की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन का मान होगा

$$\Delta K_T = \frac{1}{2}m\left[\left(at+v\right)^2 - v^2\right] = \frac{1}{2}ma^2t^2 + mavt$$

अतः कार्य-ऊर्जा प्रमेय का कथन सभी समान वेग से सापेक्ष गति करने वाले निर्देश तन्त्रों में समान रुप से लागू नहीं होती है ।

उदाहरण 8.11 : दो कणों 1 व 2 के मध्य टक्कर पर विचार करें । टक्कर से पूर्व धरातल पर स्थित प्रेक्षक द्वारा प्रेक्षित कणों का द्रव्यमान क्रमशः m_1 व m_2 तथा वेग क्रमशः u_1 व u_2 हैं । टक्कर के पश्चात यह प्रेक्षक कणों के द्रव्यमानों को क्रमशः m'_1 व m'_2 तथा वेग क्रमशः V'_1 व V'_1 प्रेक्षित करता है ।

सिद्ध कीजिए की v वेग से गतिशील रेलगाड़ी में बैठे प्रेक्षक के लिये संवेग का मान तभी संरक्षित प्रेक्षित किया जायेगा जब कि निकाय के कणों का कुल द्रव्यमान संरक्षित हो ।

हल : धरातल से सम्बद्ध निर्देश तन्त्र के लिये संवेग संरक्षण नियम को निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं-

$$m_1u_1 + m_2n_{2=}m_1^{'}V_1^{'} + m_2^{'}V_2^{'}$$

रेलगाड़ी में बैठे प्रेक्षक के लिये टक्कर से पूर्व व टक्कर के पश्चात कणों के वेगों का मान क्रमशः होंगे

$$u_1 - v; \quad u_2 - v \quad \text{व} \quad u_1^{'} - v; \quad u_2^{'} - v$$

अतः इस स्थिति में संवेग संरक्षण का नियम को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जावेगा ।

$$m_1\left(u_1 - v\right) + m_2\left(u_2 - v\right) = m_1^{'}\left(u_1^{'} - v\right) + m_2^{'}\left(u_2^{'} - v\right)$$

सरल करने पर $\left[\left(m_1 + m_2\right) - \left(m_1^{'} + m_2^{'}\right)\right]v = \left(m_1u_1 + m_2u_2 - m_1^{'}u_1^{'} - m_2^{'}u_2^{'}\right)$

समीकरण (1) का उपयोग करने पर $\left[\left(m_1 + m_2\right) - \left(m_1^{'} + m_2^{'}\right)\right]v = 0$

चूंकि v>0 है अतः $m_1 + m_2 = m_1^{'} + m_2^{'}$

अर्थात रेलगाड़ी में बैठे प्रेक्षक के लिये संवेग के मान को उसी स्थिति में संरक्षित प्रेक्षित किया जायेगा जब निकाय के कणों का द्रव्यमान संरक्षित हो ।

8.4 सारांश (Summary)

- जड़त्वीय निर्देशतन्त्रो के निर्देशांकों के मध्य सम्बन्ध व्यक्त करने वाली समीकरणों को गेलेलियन रूपान्तरण समीकरण कहते हैं ।
- स्थिर वेग से X- दिशा में गतिशील निर्देशतन्त्र में गेलेलियन रूपान्तरण निम्न समीकरणों के द्‌वारा व्यक्त करते हैं ।

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z$$

- किसी स्वैच्छिक दिशा में गतिशील जड़त्वीय निर्देशतन्त्र के लिये गेलेलियन रूपान्तरण निम्न समीकरणों के द्‌वारा व्यक्त करते हैं ।
- व्युत्क्रम गेलेलियन रूपान्तरण समीकरणों को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है ।

$$x' = x - v_x t; \quad y' = y - v_y t; \quad z' = z + v_z t$$

- वेगों के गेलेलियन रूपान्तरण समीकरणों को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है ।

$$V' = V - v$$

- जहाँ V व V' क्रमशः स्थिर व गतिशील निर्देशतन्त्र में किसी पिण्ड के वेगों का मान है तथा v गतिशील निर्देशतन्त्र के वेग का मान है ।
- जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों में त्वरण के रूपान्तरण समीकरण को निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं।
- $\vec{a}' = \vec{a}$
- जहाँ $\vec{a}$ व $\vec{a}'$ क्रमशः स्थिर व गतिशील निर्देशतन्त्र में पिण्डों के त्वरण का मान है ।
- गेलेलियन के निश्चरता सिद्धान्त के अनुसार सभी जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों में सभी भौतिक नियम समान रूप से लागू होते है ।
- वे निर्देशतन्त्र जो गेलेलियन रूपान्तरण से सम्बन्धित हों में सभी भौतिक नियमों का प्रारूप समान होता है ।
- न्यूटन के प्रथम, द्‌वितीय व तृतीय नियमों का प्रारूप उन सभी निर्देश तन्त्रों में समान होता है जो एक दूसरे के सापेक्ष स्थिर वेग से गतिशील हैं ।

8.5 शब्दावली (Glossary)

अवधारणा	Hypothesis
अभीष्ट	Arbitrary
ऊर्जा	Energy
गतिज ऊर्जा	Kinetic energy
निश्चर	Invariant
निश्चरता	Invariance
मूलभूत नियम	Fundamental law
रूपान्तरण	Transformation
रेखीय संवेग	Linear momentum
वेग	Velocity

स्थिति	Position
समरूप	Identical

8.6 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1.	Feynman	Lecture's Physics Vol. I	CBS New Delhi
2.	Berkeley Physics Course	Mechanics Vol. I	Mc Graw-Hill International
3.	M. Alonso-E. J. Finn	Fundamental University	Addison Wesley
4.		Physics Vol. I	
5.	J.C. Upadhyay	Mechanics	Ram Prasad & Sons, Agra

8.7 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self Assessment questions)

1. प्रकाश के वेग की तुलना में अत्यल्प वेगों के लिये ।
2. हाँ
3. $-2\hat{i}$ मीटर
4. नहीं
5. $-3\hat{i}$ मीटर/सेकण्ड
6. V_0
7. $-2\hat{i}$ मीटर/सेकण्ड
8. नहीं
9. (i) 2 मीटर / से. स्थिर वेग से X-दिशा में गतिशील निर्देश तन्त्र
10. नहीं
11. दोनों (i) लम्बाई (ii) त्वरण
12. (अ) व (स)
13. $u_1^{'} = 0, u_2^{'} = -1$ मीटर/से.
14. $v_1^{'} = -$ मीटर/से. व $v_2^{'} = 0$

8.8 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. गेलेलियन रूपान्तरण क्या है ।
2. निश्चरता का अभिप्राय स्पष्ट कीजिये ।
3. गेलेलियन का निश्चरता का सिद्धान्त क्या है ।
4. गेलेलियन के संवेग संरक्षण नियम के निश्चरता सिद्धान्त क्या हैं ।
5. गेलेलियन के ऊर्जा संरक्षण नियम के निश्चरता के सिद्धान्त को लिखिये ।

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

6. समान सापेक्ष वेग से गतिशील दो प्रेक्षकों के लिये गेलेलियन रूपान्तरण समीकरण ज्ञात कीजिये।
7. S' निर्देशतन्त्र एक अन्य निर्देशतन्त्र के सापेक्ष समान वेग से गतिशील है । गेलेलियन रूपान्तरणों के रूप में (x, y, z, t) व (x', y', z', t') के मध्य सम्बन्ध ज्ञात कीजिये । t=0 समय पर दोनों निर्देशतन्त्रों के मूल बिन्दु एक दूसरे से संपातित हैं ।
8. सिद्ध कीजिये कि गेलेलियन रूपान्तरण के अनुसार दूरी व त्वरण का मान निश्चर होता है वेग का नहीं ।
9. न्यूटन के गति के समीकरण की निश्चरता सिद्धान्त की व्याख्या कीजिये ।
10. सिद्ध कीजिये कि गेलेलियन रूपान्तरणों के अनुसार रेखीय संवेग का मान संरक्षित होता है ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

11. S निर्देशतन्त्र में एक कण P के स्थिति सदिश का मान निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है।

$$\vec{r} = 3st\hat{i} - 4t^2\hat{j} + 2 \text{ किमी.}$$

S' का S के सापेक्ष वह वेग ज्ञात कीजिये जिसमें कण P का स्थिति सदिश निम्न प्रेक्षित किया गया हो ।

$$\vec{r}' = 4t\hat{i} - 4t^2\hat{j} + 2 \text{ किमी.}$$

(**उत्तर:** 1 मी./से.)

12. दो कण क्रमश: $3\hat{i} + 4\hat{j}$ व $\left(2\hat{i} + x\hat{j}\right)$(वेगों से गतिशील हैं । t=0 समय पर इनके स्थिति सदिशों का मान क्रमश: $\left(\hat{i} - \hat{j}\right)$ व $\left(3\hat{i} + x\hat{j}\right)$ है । x का मान क्या हो कि दोनों कण टक्कर करें ।

(**उत्तर:** x=3)

13. किसी क्षण दो कणों के स्थिति सदिश क्रमश: $4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ और $2\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$ मीटर हैं । यदि प्रथम कण के वेग का मान $0.4\hat{i}$ मीटर/से. हो तो दूसरे कण का वह वेग ज्ञात कीजिये जिसमें दोनों कण t=10 सेकण्ड पश्चात टक्कर करते हैं ।

(**उत्तर:** $0.6\left(\hat{i} - \hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}\right)$ मी./से.)

इकाई-9

सापेक्षिकता
(Relativity)

इकाई की रुपरेखा

9.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप सीख सकेंगे कि-

- उच्चवेग के मानों पर गेलेलियन रुपान्तरण लागू नही होते;
- गेलेलियन रुपान्तरणों से भिन्न सापेक्षिकता सिद्धान्त में दिक् व काल निरपेक्ष नहीं होते हैं;
- प्रकाश का वेग सभी जड़त्वीय निर्देश तन्त्रों में निश्चर होता है;
- एक ही घटना एक ही समय सापेक्ष गति करने वाली दो निर्देश तन्त्रों में प्रेक्षित की जाये तो दिक निर्देशांक भिन्न होगे;
- एक ही घटना एक ही स्थिति पर सापेक्ष गति करने वाली दो निर्देश तन्त्रों में प्रेक्षित की जाये तो काल (Time) का मान भिन्न होगा;

- चिरसम्मत यांत्रिकी के सिद्धान्त विशिष्ट सापेक्षिकता के लिये लागू नहीं होते हैं;
- कण का अधिकतम वेग प्रकाश वेग से अधिक नहीं हो सकता;
- प्रकाश के वेग का मान प्रेक्षक के गति पर निर्भर नहीं करता है ।

9.1 प्रस्तावना (Introduction)

पिछली इकाई में आपने गेलेलियन रुपान्तरणों की विस्तृत चर्चा पढ़ी । अध्ययन करते समय आपके मस्तिष्क में यह प्रश्न अवश्य आया होगा कि गतिशील निर्देशतन्त्र का वेग किस कोटि का होना चाहिए? क्या वेग का परिमाण अधिकतम संभावी वेग (प्रकाश के वेग) के तुल्य लिया जा सकता है । क्या ऐसी घटनायें जो अत्यल्प समय में घटती हैं उनके लिये गेलेलियन रुपान्तरणों की सार्थकता हो सकती है । इत्यादि इत्यादि......। इन सभी तथ्यों का अध्ययन करने के लिये विभिन्न प्रयोग किये गये । इन सभी प्रयोगों से एक मत उभर कर आया कि किसी आकाश (space) में घटित घटना को यदि दो भिन्न-भिन्न निर्देश-तन्त्रों (जिनका सापेक्ष वेग प्रकाश के वेग की कोटि का हो) में प्रेक्षित किया जाये तो उनका काल (time) भिन्न भिन्न होता है । दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि अधिक वेग से गतिशील निर्देशतन्त्र में **आकाश व काल** का अर्थ स्थिर निर्देशतन्त्र की तुलना में भिन्न होता है । इन आशयों की पुष्टि करने व समझने के लिये सबसे चर्चित प्रयोग माईकलसन व मोरले ने सम्पन्न किया ।

माईकलसन व मोरले के प्रयोग का सबसे महत्वपूर्ण प्रेक्षण यह था कि **सभी जड़त्वीय निर्देश-तन्त्रों में निर्यात में प्रकाश का वेग स्थिर रहता है ।** दूसरे शब्दों में प्रकाश के वेग का मान प्रेक्षक की गति पर निर्भर नहीं करता तथा सभी जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों में इसका मान स्थिर रहता है । ध्यान रहे कि यह तथ्य गेलेलियन रुपान्तरणों के विपरीत था जिसके अनुसार प्रकाश का वेग प्रेक्षक की गति पर निर्भर करना चाहिये । प्रायोगिक व चिरसम्मत यात्री (classical mechanics) के इन विपरीत अवाधारणाओ को आइन्सटाइन ने न्यूटोनियन यांत्रिकी के सिद्धान्तों में परिवर्तन करके समझाया । न्यूटोनियन यांत्रिकी के अनुसार दिक् व काल सभी प्रेक्षकों के लिये निश्चर है जबकि इस तथ्य के विपरीत आइन्सटाईन के सिद्धान्त (जिन्हें **विशिष्ट सापेक्षिकता के सिद्धान्तों** के नाम से जाना जाता है) अनुसार **दिक् व काल दोनों ही परिवर्तनशील हैं ।** आइन्सटाईन द्वारा प्रदत्त इन सिद्धान्तों के आधार पर ही यह स्पष्ट करना संभव हो सका कि दो बिन्दुओं के मध्य की दूरी का मान अर्थात् लम्बाई का मान प्रकाश के समकक्ष $\left(u \approx 0.9c\right)$ वेग से गतिशील निर्देशतन्त्र में वास्तविक लम्बाई के मान से कम होता है । इसी प्रकार से नाभिकीय घटनाओं में जैसे पॉयन π कण के क्षय में यह पाया गया कि इस कण की औसत आयुकाल का मान प्रयोगशाला में प्रेक्षित मान से भिन्न प्राप्त होता है इस घटना को भी सापेक्षिकता के सिद्धान्तों के आधार पर समझाया जा सकता है ।

इस इकाई के अनुच्छेद 9.2 में आप आइन्सटाईन द्वारा प्रदत्त विशिष्ट सापेक्षिकता के सिद्धान्त का अध्ययन करेंगे । अनुच्छेद 9.3 में लॉरेन्ज रूपान्तरण तथा अनुच्छेद 9.4 में इनके अनुप्रयोगों के आधार पर **लम्बाई आकुंचन** (length contraction) व काल विस्फरण (time dialation) को समझेंगे।

9.2 सापेक्षिकता का विशिष्ट सिद्धान्त (Special theory of relativity)

9.2.1 गेलेलियन रुपान्तरणों की असफलता (Failures of Galelian's transformations)

प्रायोगिक प्रेक्षणों, जैसे- पॉयन कण का क्षय, इलैक्ट्रॉन-पॉजीट्रॉन संलयन (anihilation) में उत्सर्जित ऊर्जा का मान, दो बिन्दुओं के मध्य प्रेक्षित दूरी का मान, को गेलेलियन रुपान्तरणों द्वारा स्पष्ट नहीं किया जा सकता । यदि गेलेलियन रुपान्तरणों के अनुसार सभी घटनाओं के लिये सभी जड़त्वीय निर्देशतन्त्रो में काल (time) का मान एक समान ले लें तो उक्त वर्णित प्रयोगों में प्राप्त प्रेक्षणों को समझाया नहीं जा सकता । दूसरे शब्दों में हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि गेलेलियन रुपान्तरण प्रकाश के वेग के तुल्य वेग से गतिशील निर्देश-तन्त्रों के लिये लागू नहीं हो सकते । अर्थात् उच्च वेग से गतिशील कणों के लिये गेलेलियन रूपान्तरण लागू नहीं होते हैं ।

9.2.2 आइन्सटाईन का विशिष्ट सापेक्षिकता सिद्धांत (Einstein's special theory of relativity)

सन् 1905 में आइन्सटाईन ने एक प्रयोग के परिणामों के आधार पर विशिष्ट सापेक्षता सिद्धांत की अवाधारणाओ का प्रतिपादन किया ।

आइन्सटॉइन की प्रायोगिक सोच इस तथ्य पर आधारित थी कि **यदि आप प्रकाश किरण के समान्तर प्रकाश वेग से गतिशील हों तो आपको प्रकाश के विद्युत एंव चुम्बकीय घटक स्थिर दिखायी देंगे ।** यद्यपि आइन्सटाईन इस तथ्य को जानते थे कि इस प्रकार के स्थैतिक विद्युत एवं चुम्बकीय घटक विद्युत-चुम्बकीय सिद्धान्तों के विपरीत हैं । इस स्थिति में इस घटना की पुष्टि करने के लिये आइन्सटाईन के सामने दो विकल्प थे-

(i) या तो विद्युत चुम्बकीय सिद्धान्त गलत माना जाये या फिर

(ii) चिरसम्मित यांत्रिकी के वे सिद्धान्त जो किसी प्रेक्षक को प्रकाश की किरण के समान्तर गति करने से रोकते हैं ।

निर्वात में प्रकाश का वेग सभी जड़त्वीय निर्देशतंत्रों में सभी दिशाओं में समान होता है।

आइन्सटाईन ने अपने स्वविवेक का उपयोग करते हुये विद्युत चुम्बकीय सिद्धान्तों को सही ठहराते हुए दूसरे तथ्य को समझाने के लिये न्यूटन व गेलेलियन के गतिकी (kinematics) के सिद्धान्तों की पुर्नविवेचना पर जोर दिया । इसके लिये उन्होंने न्यूटोनियन यांत्रिकी के सिद्धान्तों को पुन: परिभाषित किया तथा उन तथ्यों के आधार पर विशिष्ट सापेक्षिकता के सिद्धान्तों को प्रतिपादित किया ।

ये सिद्धान्त आइन्सटाईन की दो अभिगृहीत (postulates) के नाम से जाने जाते हैं ।

प्रथम अभिगृहीत (First postulates)

सभी जड़त्वीय निर्देश-तन्त्रों में भौतिक शास्त्र के नियम समान होते हैं । यह अवाधारणा इस तथ्य को प्रदर्शित करती है कि भौतिक शास्त्र के सभी नियम सभी जड़त्वीय निर्देशतन्त्र में निरपेक्ष व एकैकी (absolute and unique) होते हैं ।

यह अभिगृहीत गेलेलियन निश्चरता के सिद्धान्त के तुल्य है । इसे सापेक्षिकता का सिद्धान्त भी कहा जाता है ।

द्वितीय अभिगृहीत (Second Postulates)

सभी जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों के लिए मुक्त आकाश में प्रकाश का वेग समान होता है । इस अभिगृहीत को प्रकाश के वेग का स्थिरता सिद्धान्त भी कहते हैं ।

प्रारम्भिक तौर पर इन अभिगृहीतों को प्रायोगिक रुप से सिद्ध करना असंभव था ।

कालान्तर में उच्च ऊर्जा कण त्वरकों की खोज के पश्चात इन अभिगृहीतों की पुष्टि प्रायोगिक तौर पर सम्भव हो गयी है ।

इन दोनों अभिगृहीतों का संयुक्त निष्कर्ष इस प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है-

"किसी भी कण को प्रकाश के वेग के तुल्य वेग से त्वरित नहीं किया जा सकता चाहे उसकी ऊर्जा कितनी भी क्यों न हो ।"

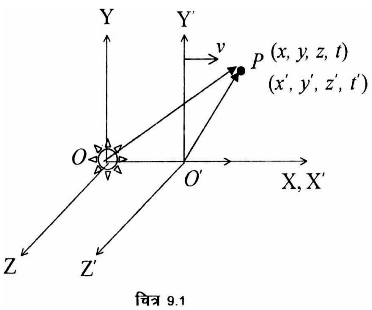
ध्यान रखना है कि यह निष्कर्ष चिरसम्मित यांत्रिकी के सिद्धान्त से भिन्न है । चिरसम्मित यांत्रिकी के सिद्धान्त के अनुसार किसी कण या पिण्ड के अधिकतम वेग की कोई सीमा नहीं होती है । **टिप्पणी (Comment)** सापेक्षिकता के सिद्धान्त के आधार पर यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि **समरुप निरपेक्ष चाल** का होना असम्भव है । इसका अर्थ यह हुआ कि यदि निरपेक्ष चाल होना सम्भव नहीं है तो भिन्न भिन्न प्रेक्षकों के लिये त्रिविमीय आकाश भिन्न-भिन्न होना चाहिये । दूसरी ओर एक से अधिक त्रिविमीय आकाश सम्भव नहीं है । वास्तव में आइन्सटाईन द्वारा 1905 में प्रतिपादित सापेक्षिकता के इन अभिगृहीतो में इस तथ्य का कहीं भी उल्लेख नही किया गया है कि सापेक्ष गति करने वाले प्रेक्षकों के लिये त्रिविमीय आकाश भिन्न भिन्न होता है । सन् 1908 में मिन्कावस्की नामक वैज्ञानिक ने एक अधिक दिक् (space) की अवाधारणा प्रतिपादित की । इन्होंने गणितीय विश्लेषण द्वारा इस तथ्य को स्पष्ट किया कि सापेक्षिकता के सिद्धान्त को समझने के लिये विश्व के दिक् को एक से अधिक अनन्त दिक् के रुप में माना जाये । भिन्न दिक् को मिन्कावसी आकाश (Minkowski space) कहा जाता है जो चार निर्देशांकों (तीन साधारण कार्तिय निर्देशांक व चतुर्थ समय) से निर्मित होता है ।

9.3 लॉरेन्ज रुपान्तरण (Lorentz transformations)

लॉरेन्ज रुपान्तरण, वे गणितीय सम्बन्ध हैं जिनके द्वारा हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि प्रकाश का वेग स्रोत या प्रेक्षक की स्थिति पर निर्भर नहीं करता है ।

9.3.1 लॉरेन्ज रुपान्तरण समीकरण (Lorentz Transformation Equations)

लॉरेन्ज रुपान्तरण सम्बन्धों को स्थापित करने के लिये दो जड़त्वीय निर्देश तन्त्रों S व S' पर विचार करते हैं । S' निर्देश तन्त्र s तंत्र के सापेक्ष X- दिशा में v वेग से गतिशील है । सुविधा के लिये हम यहां यह मानकर चलते हैं कि प्रारम्भ में (t = t' = 0 समय पर) दोनों निर्देश तन्त्रों के मूल बिन्दु O व O' संपातित हैं ।



चित्र 9.1

माना S निर्देश तन्त्र के मूल बिन्दु O पर एक प्रकाश स्रोत रखा हुआ है, जिससे उत्सर्जित; तरंगाग्र प्रेक्षण बिन्दु P पर पहुंचने पर तंत्र S तथा S' के प्रेक्षकों O व O' द्वारा इस बिन्दु के दिक् काल निर्देशांक क्रमशः (x, y, z, t) व (x', y', z', t')

प्रेक्षित किये जाते हैं । (चित्र 9.1)

यदि प्रकाश का वेग c है तो इस स्थिति में प्रकाश तरंगाग्र बिन्दु O से प्रेक्षण बिन्दु P पर पहुंचने में लगा समय होगा

$$t = \frac{OP}{c} = \frac{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{c}$$

या $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ ....(9.1)

सापेक्षिकता के सिद्धान्त के अनुसार S' निर्देश तन्त्र में भी प्रेक्षित प्रकाश का वेग c होगा । अत: इसके प्रेक्षक द्वारा प्रकाश तरंगाग्र को बिन्दु P तक पहुंचने में प्रेक्षित समय का मान होगा

$$t' = \frac{O'P}{c} \frac{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\, c\right)^{\frac{1}{2}}}{c}$$

या $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$ ....(9.2)

गेलेलियन रुपान्तरणों के अनुसार दो निर्देश तन्त्रों के दिक् काल निर्देशांकों (x, y, z, t) व (x', y', z', t') के सम्बन्धों को निम्न समीकरणों द्वारा व्यक्त किया जाता है

$x' = x - vt; \qquad y' = y; \qquad z'z; \qquad t' = t$ ....(9.3)

अत: समी. (9.3) का उपयोग समी. (9.2) में करने पर -

$$\left(x - vt\right)^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

या $x^2 - 2xvt + v^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$ ....(9.4)

अब समी (9.4) की तुलना समी. (9.1) से करने पर यह स्पष्ट होता है कि ये दोनों समीकरणें समरुप नहीं हैं । समीकरण (9.4) में समी (9.1) की तुलना में एक पद ($-2xvt+v^2t^2$) अतिरिक्त है। अत: यहाँ गेलेलियन रुपान्तरण सही नहीं हो सकते ।

इसलिये नये रुपान्तरणों का स्वरूप (from) इस प्रकार होना चाहिये कि वे सापेक्षिकता के सिद्धान्तों पर आधारित हो तथा जो समी. (9.2) को समी. (9.1) में रूपान्तरित कर दे । इसके अतिरिक्त $v/c \to 0$ के लिये नये रुपान्तरण समीकरण गेलेलियन रुपान्तरणों के प्रारुप को प्राप्त कर लें और इन रुपान्तरणों का प्रारुप गणितीय दृष्टि से **रेखीय** (linear) हो । यहाँ यह स्पष्ट होना चाहिये कि समी. (9.2) में यदि t=t' प्रयुक्त करें तो भी अनिच्छित पद $\left(-2xvt + v^2 t^2\right)$ निरस्त नहीं होता है।

इन तथ्यों के आधार पर सम्भावित रुपान्तरण समीकरणों का प्रारुप $x' = \alpha\left(x - vt\right)$ के अनुरुप लिखा जा सकता है । चूंकि दोनों निर्देश तन्त्रों में समय का मान भिन्न भिन्न होना चाहिये अत: समय प्रेक्षणों को सम्बंधित करने वाली समीकरणों के संभावित रेखीय प्रारुप को $t' = \alpha'\left(t + fx\right)$ के रुप में व्यक्त कर सकते हैं ।

यहीं α, α' व f स्थिरांक हैं जिनका मान ज्ञात करना है ।

समी. (9.2) में x', y', z' व t' का मान रखने पर

$$\alpha^2 \left(x - vt\right)^2 + y^2 + z^2 = c^2 \alpha'^2 \left(t + fx\right)^2$$

या $$\alpha^2\left(x^2+v^2t^2-2xvt\right)+y^2+z^2=c^2\alpha'^2\left(t^2+f^2x^2+2fxt\right)$$

या $$x^2\left(\alpha^2+f^2\alpha'^2c^2\right)-2xt\left(\alpha^2v+fc^2\alpha'^2\right)+y^2+z^2\left(\alpha'^2-\frac{\alpha'^2v^2}{c^2}\right)c^2t^2 \quad .....(9.5)$$

समी. (9.5) समी (9.1) के तुल्य होनी चाहिये । यह तभी सम्भव है जब

$$\alpha^2-f^2\alpha'^2c^2=1; \quad ....(9.6)$$

$$\alpha^2v+fc^2\alpha'^2=\alpha; \quad ......(9.7)$$

$$\alpha'^2-\frac{\alpha^2v^2}{c^2}=1 \quad ......(9.8)$$

समी. (9.6), (9.7) व (9.8) को हल करने पर

$$\alpha=\alpha'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad .....(9.9)$$

तथा $$f=-\frac{v}{c^2} \quad ......(9.10)$$

अतः α,α' व f के मानों का अनुप्रयोग करने पर

$$x^1=\alpha\left(x-vt\right)=\frac{\left(x-vt\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad .....(9.11)$$

तथा $$t'=\frac{\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad .....(9.12)$$

अतः नये रुपान्तरण समीकरण (जो प्रकाश के वेग की निश्चरता के सिद्धान्त को प्रतिपादित करती है) को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं-

$$x'=\frac{\left(x-vt\right)}{\sqrt{1=\frac{v^2}{c^2}}} \quad .....(9.13)$$

$$y'=y \quad .....(9.14)$$

$$z'=z \quad .....(9.15)$$

$$t'=\frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1=\frac{v^2}{c^2}}} \quad .....(9.16)$$

समी. (9.13 से 9.16) को **लॉरेन्ज रुपान्तरण (Lorentz Transformation)** के नाम से जाना जाता है ।

विशेष बिन्दु (Important Points)

1. यदि v<<c तो लॉरेन्ज रुपान्तरणों को निम्न समीकरणों के द्वारा व्यक्त कर सकते हैं ।

$$x' = x - vt \qquad \text{..... (9.17)}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

व $$t' = t$$

ये समीकरणें गेलेलियन रुपान्तरणों को व्यक्त करती है ।

2. लॉरेन्ज रुपान्तरण दिक् (space) व काल (time) की विवेचना गेलेलियन रुपान्तरणों से भिन्न है ।
3. लॉरेन्ज रुपान्तरण दिक् की निरपेक्षता के सम्बन्ध में कुछ नहीं बतलाते ।
4. उक्त समीकरणों मे $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ को सामान्यतया सापेक्षिकता गुणांक कहते हैं जिसे γ द्वारा व्यक्त करते है ।

9.3.2 व्युत्क्रम लॉरेन्ज रुपान्तरण समीकरण (Inverse Lorentz transformation equations)

यदि धनात्मक X दिशा में v वेग से गतिशील तंत्र S' में किसी घटना विशेष के लिए प्रेक्षित दिक् काल निर्देशांक (x', y', z', t') ज्ञात हों और स्थिर तंत्र S में तत्सम्बन्धित मान ज्ञात करने हों तो निम्न व्युत्क्रम समीकरणों का प्रयोग किया जाता है-

$$x = \frac{(x' + vt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad y' = y \quad z = z' \quad \text{व} \quad x = \frac{t' + \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

स्पष्ट है कि लॉरेन्ज रूपान्तरणों में v को -v से प्रतिस्थापित करके तथा निर्देशांकों के नामांकरणों को परस्पर परिवर्तित करने पर रूपान्तरण समीकरण प्राप्त किये जा सकते हैं ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. सापेक्षिकता सिद्धान्त के अनुसार सापेक्ष गति करने वाले जड़त्वीय निर्देश तन्त्रों में कौन सी राशियाँ निरपेक्ष नहीं होती हैं?

. . . .

. . . .

2. क्या लॉरेन्ज रुपान्तरण समीकरण प्रकाश की गति से गतिशील घटनाओं के लिये प्रयुक्त किये जा सकते हैं?

. . . .

. . . .

3. यदि कोई गतिशील निर्देशतन्त्र प्रकाश के वेग से गतिशील हो तो उसके लिये सापेक्षिकता गुणांक (γ) का मान क्या होगा ।

. . . .

. . . .

4. सापेक्षिकता गुणांक (γ) का मान अनन्त नहीं होना किस तथ्य को स्पष्ट करता है?

. . . .

. . . .

5. वेग मान v<<c के लिये लॉरेन्ज रुपान्तरण गेलेलियन रुपान्तरणों के तुल्य होते हैं । कैसे?

. . . .

6. क्या आइन्सटाइन के विशिष्ट सापेक्षिकता के अभिगृहीत प्रकाश के वेग से गतिशील कण के लिये लागू सकते हैं?

. . . .

7. क्या लॉरेन्ज रुपान्तरणों के अनुसार $\left(x^2 = c^2t^2\right)$ का मान $\left(x^2 = c^2t'^2\right)$ के तुल्य होता है?

. . . .

. . . .

8. यदि एक कण स्थिर निर्देशतन्त्र में v वेग से गतिशील हो तो गेलेलियन रुपान्तरणों के अनुसार उस निर्देशतन्त्र में कण का वेग क्या होगा जो स्वयं प्रकाश के वेग से गतिशील है ।

. . . .

9. एक हवाई जहाज पृथ्वी पर खड़े प्रेक्षक के ऊपर से उड़ रहा है । हवाई जहाज का वेग v है । जब पृथ्वी प्रेक्षक के ठीक सिर के ऊपर गुजरती है तो इसके केन्द्र पर रखे प्रकाश स्रोत से प्रकाश उत्सर्जित होता है । प्रकाश के इस प्रभाव को हवाई जहाज के अग्र भाग में बैठे प्रेक्षक A व पीछे के भाग में बैठे प्रेक्षक B द्वारा एक साथ प्रेक्षित किया जाता है । क्या प्रकाश संकेत दोनों प्रेक्षकों पर एक साथ पहुंचेगा ।

. . . .

. . . .

10. विशिष्ट सापेक्षिकता सिद्धान्त किस मूलभूत भौतिक नियतांक के विश्लेषण पर आधारित है ।

. . . .

11. न्यूटन के द्वितीय नियम का विशिष्ट सापेक्षिकता का प्रारुप लिखिये ।

. . . .

. . . .

12. क्या विशिष्ट सापेक्षिकता का सिद्धान्त ऐसे पिण्ड की गति के लिये प्रयुक्त किया जा सकता है जो एक समान त्वरण से त्वरित है ।

. . . .

13. लॉरेन्ज गुणज γ तथा चाल प्रचाल (parameter) के मध्य आरेख खींचिये ।

. . . .

. . . .

. . . .

विशिष्ट सापेक्षिता के अनुसार दिक व काल अन्तराल जड़त्वीय निर्देशतंत्रों में समान नहीं होता है।

उदाहरण 9.1 सिद्ध कीजिए की किसी निर्देशतन्त्र में घटित होने वाली दो घटनाओं का दिक् समय अन्तराल लॉरेन्ज रुपान्तरणों के अनुसार निश्चर होता है ।

हल : माना S निर्देशतन्त्र में घटित दो घटनाओं के निर्देशांक क्रमश: (x_1, y_1, z_1, t_1) व (x_2, y_2, z_2, t_2) हैं । अत: इन घटनाओं के लिये दिक् काल अन्तराल के वर्ग को निम्न प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं।

$$S'^2_{12} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1) + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \qquad ..... (9.18)$$

माना S' निर्देशतन्त्र में प्रेक्षित इन घटनाओं के निर्देशांक क्रमश: (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) व (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) हैं । अत: दिक् काल अन्तराल के वर्ग का मान होगा

$$S'^2_{12} = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1) + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 \qquad ..... (9.19)$$

लॉरेन्ज रुपान्तरणों के अनुसार

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt); \quad y'_1 = y_1; \quad z'_1 = z_1 \text{ तथा } t'_1 = \gamma\left(t_1 \frac{vx_1}{c^2}\right) \qquad .....(9.20)$$

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt); \quad y'_2 = y_2; \quad z'_2 = z_2 \text{ तथा } t'_2 = \gamma\left(t_2 \frac{vx_2}{c^2}\right) \qquad ..(9.21)$$

अत:

$$(x'_2 - x'_1) = \gamma(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1); \quad (y'_2 - y'_1) = y_2 - y_1 \text{ व } (z'_2 - z'_1) = z_2 - z_1$$

$$\text{तथा } (t'_2 - t'_1) = \gamma\left\{(t_2 - t_1) - \frac{v(x_2 = x_1)}{c^2}\right\}$$

अब $$S'^2_{12} = \gamma^2\{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)\}^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2\gamma^2\{(t_2 - t_1) - v(x_2 = x_1)/c^2\}^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

या $$S'^2_{12} = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2$$

अत: $$S'^2_{12} = S^2_{12}$$

नोट : इस उदाहरण से आपको यह जानकारी प्राप्त हुई होगी कि किन्हीं दो घटनाओं में दिक् व काल अन्तराल पृथक से तुल्य नहीं होते हैं ।

अर्थात् $t_2 - t_1 \neq t'_2 - t'_1$

तथा $\left\{ (x'_2 - x'_2)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 + z'_1)^2 \neq (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \right\}$

दूसरे शब्दों में अलग अलग प्रेक्षकों के लिये दिक् व काल अन्तराल निरपेक्ष न हो कर भिन्न भिन्न होंगे । इसके विपरीत चिरसम्मित यांत्रिकी के सिद्धान्त अन्तरालों के निश्चरता होना दर्शाते हैं ।

जिस निर्देश तंत्र में छड़ को गतिशील प्रेक्षित किया जाता है उस तंत्र में उसकी लम्बाई को आभासी लम्बाई कहते हैं ।

9.4 लम्बाई आकुंचन (Length contraction)

9.4.1 उचित लम्बाई - संकल्पना (Proper length concept)

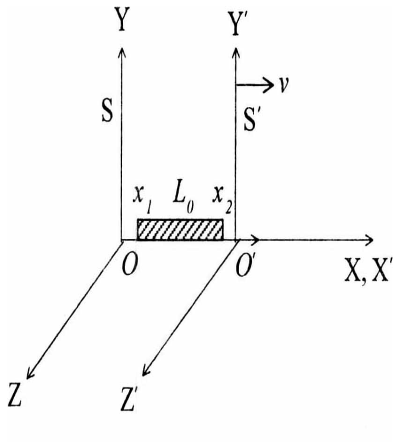
किसी वस्तु से सम्बद्ध (जुडे हुए) प्रेक्षक द्वारा अभीष्ट वस्तु से संबन्धित राशियों के मापे गए मानों को **उचित मान** (proper value) कहा जाता है । उदाहरणार्थ स्थिर छड से सम्बद्ध निर्देश-तंत्र में छड से जुडे प्रेक्षक द्वारा मापी गई लम्बाई को उचित लम्बाई कहते हैं और इस छड के सापेक्ष गतिशील प्रेक्षक द्वारा मापी गई लम्बाई को आभासी लम्बाई कहा जाता है ।

यदि छड गतिशील तंत्र में रखी है (यानी कि छड भी तंत्र के साथ गति कर रही है) तो गतिशील तंत्र में मापी गई लम्बाई को उचित लम्बाई कहा जाएगा और इस स्थिति में स्थिर तंत्र में मापी गई लम्बाई को आभासी लम्बाई कहेंगे ।

9.4.2 लम्बाई आकुंचन- व्यंजक (Length contraction - expression)

माना S निर्देशतन्त्र में X- दिशा के अनुदिश एक छड़ रखी गयी है जिसकी लम्बाई L_0 है (चित्र 9.2) । चूंकि S निर्देशतन्त्र में छड़ विरामावस्था में है अत: इस छड़ के सिरों के निर्देशांक x_1 व x_2 समय को t पर आश्रित नहीं होंगे । अत: छड़ की उचित लम्बाई (वास्तविक लम्बाई)

$$L_0 = x_2 - x_1 \qquad ..(9.22)$$



चित्र 9.2

माना S' निर्देशतन्त्र S के सापेक्ष X- दिशा में v वेग से गतिशील है । तंत्र S' में बैठा प्रेक्षक उसी क्षण (समय t' पर) छड़ के सिरों के निर्देशांकों को क्रमश: x'_1, व x'_2 प्रेक्षित करता है । अत: S' निर्देशतन्त्र में प्रेक्षक द्वारा प्रेक्षित छड़ की लम्बाई L होगी ।

$$L = x'_2 - x'_1 \qquad ..... (9.23)$$

जिस प्रेक्षक द्वारा जिस निर्देशतंत्रों में छड़ को स्थिर प्रेक्षित किया जाता है उसे उसकी उचित लम्बाई कहते हैं ।

लॉरेन्ज व्युत्क्रम रुपान्तरणों के अनुसार

$$x_1 = \gamma \left(x'_1 + vt' \right)$$

$$x_2 = \gamma \left(x'_2 + vt' \right)$$

अत: $$x_2 - x_1 = \gamma \left(x'_2 + x'_1 \right)$$

$$L_0 = \gamma L$$

या छड की आभासी लम्बाई $L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\left(1 = \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ..... (9.24)

इस सम्बन्ध को छड़ की अपनी लम्बाई के समान्तर गति करने पर उत्पन्न लॉरेन्ज-फिज्गेराल्ड (Fitzgerald) आकुंचन कहते हैं ।

छड आकुंचन से सम्बन्धित महत्वपूर्ण तथ्य निम्नप्रकार हैं -

1. गति की दिशा के अनुदिश छड़ की लम्बाई में आकुंचन प्रेक्षित किया जाता है ।
2. गति की दिशा के अनुदिश छड़ के लम्बाई के लम्बवत दिशा में आकुंचन नहीं होता है ।
3. यदि गतिशील निर्देश तन्त्र का वेग v प्रकाश के वेग की तुलना में अल्प हो तो $L=L_0$ होगा।
4. आकुंचन प्रेक्षित करने के लिये यह आवश्यक है कि छड़ के सिरों के निर्देशांक दोनों निर्देशतन्त्रों में एक ही क्षण मापे जायें । इस सिद्धान्त को सापेक्षिकता का समकालीनता (Simultaneity) सिद्धान्त भी कहते हैं ।

9.4.3 प्रतिशत आकुंचन (Contraction percentage)

समी. 9.2.4 के अनुसार छड की लम्बाई में प्रतिशत आकुंचन निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है-

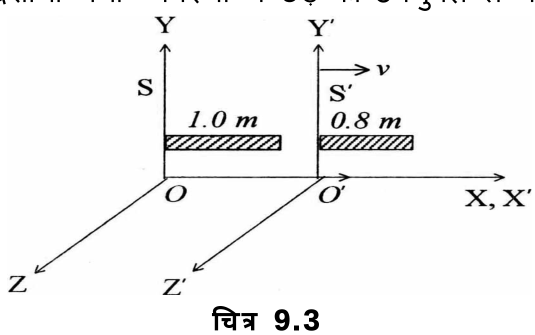
$$\frac{L_0 - L}{L_0}\times 100 = \frac{L_0 - L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{L_0}\times 100$$

$$= \left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\times 100 = \left\{1-1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\ldots\right\}\times 100$$

$$= \frac{50v^2}{c^2}\%$$

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

14. चित्र 9.3 में दर्शायी गयी व्यवस्था में छड़ की उपयुक्त लम्बाई का मान बतलाइये।

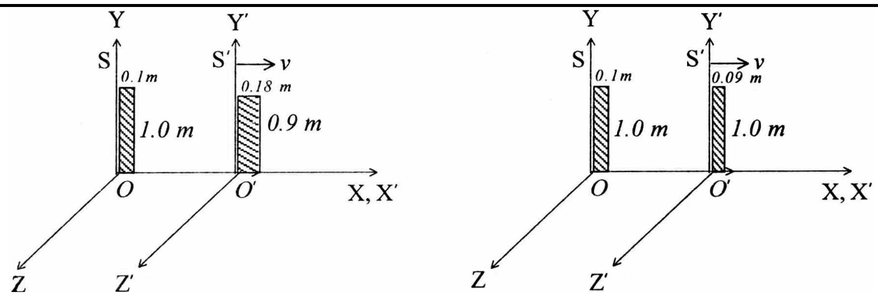


चित्र 9.3

. . . .

. . . .

15. चित्र 9.4 में दर्शायी गयी कौनसी व्यवस्था लॉरेन्ज रुपान्तरणों के अनुरुप है ।



चित्र 9.4

. . . .

. . . .

16. एक मीटर लम्बी छड़ स्थिर निर्देशतन्त्र में X- अक्ष के समान्तर रखी गयी है । S' निर्देशतन्त्र X- दिशा में v=0.6c वेग से गतिशील है । इस निर्देशतन्त्र में छड़ की लम्बाई में प्रतिशत आकुंचन का मान क्या होगा?

. . . .

. . . .

17. एक मीटर लम्बी छड़ को अन्तरिक्षयान में रखा गया है जो 0.4c वेग से पृथ्वी के सापेक्ष गतिशील है । अन्तरिक्षयान पृथ्वी या में से किस में बैठा प्रेक्षक, छड़ की लम्बाई का वास्तविक मान प्रेक्षित करेगा ।

. . . .

. . . .

18. क्या एक छड को वेग के तुल्य वेग से गति करवाया जा सकता है ।

. . . .

. . . .

उदाहरण 9.2 पिण्ड का वेग ज्ञात कीजिए जिसके कारण लॉरेन्ज गुणांक $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ का मान एकांक हो जाये ।

हल : लॉरेन्ज गुणांक $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ का मान एकांक होने के लिये $\frac{v}{c}$ शून्य होना चाहिये 1 अर्थात् कण के शून्य वेग के लिये लॉरेन्ज गुणांक का मान एकांक होगा ।

उदाहरण 9.3 एक कण 0.6c वेग से गतिशील है । इसके लिये लॉरेन्ज गुणांक का मान ज्ञात कीजिए।

हल: लॉरेन्ज गुणांक

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

V का मान रखने पर

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.36}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{0.64}}$$

$$\gamma = \frac{10}{8} = 1.25$$

उदाहरण 9.4 सिद्ध कीजिये कि $\beta = \frac{v}{c}$ के अल्पमान के लिये लॉरेन्ज रुपान्तरण समीकरण गेलेलियन रुपान्तरणों में परिवर्तित हो जाती है । लॉरेन्ज गुणांक γ के विस्तार में अगले पद के लिये v का वह मान ज्ञात करो जिसके लिये यह पद x के मान में 10% का योगदान करे ।

हल : लॉरेन्ज रुपान्तरण समीकरणों के अनुसार

$$x' = \gamma(x - vt);$$

$$y' = y;$$

$$z' = z;$$

तथा $$t' = \gamma\left(1 - \frac{vx}{c^2}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

अत: $$x' = \frac{(x - vt)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ से

$$x'(x - vt)(1-\beta^2)^{-1/2}$$

β के मान को अत्यल्प माना जाये तो $(1-\beta^2) \to 1$ रखने पर

$$x' = (x - vt);\ y' = y;\ z' = z; \quad \text{तथा } t' = (1-\beta^2)^{-1/2}\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) = t \quad (\text{यदि } \beta \ll 1)$$

अत: β के अल्प मान के लिये लॉरेन्ज रुपान्तरण गेलेलियन रुपान्तरण में परिवर्तित हो जाते हैं ।

पुन: विस्तार का अगला पद लिखने पर

$$x' = (x - vt)\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)$$

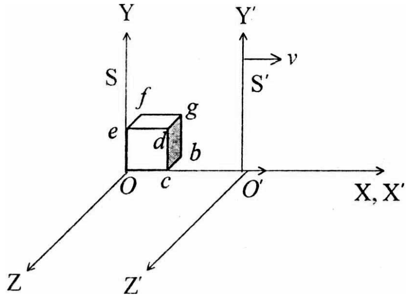
दिये गये प्रश्न के अनुसार

$$\frac{\beta^2}{2} = \frac{v^2}{2c^2} = 0.1$$

$$v = \sqrt{0.2c}$$

उदाहरण 9.5 स्थिर निर्देश तन्त्र में L_0 भुजा के घन का आयतन L_0^3 है । उस निर्देशतन्त्र में घन का आयतन ज्ञात कीजिए जो घन के एक किनारे के समान्तर v वेग से गतिशील है ।

हल : चित्र 9.5 में L_0 लम्बाई के एक घन को स्थिर निर्देशतन्त्र S में दर्शाया गया है । S' निर्देशतन्त्र X- दिशा में v वेग से गतिशील है । माना t=t'=0 पर दोनों निर्देशतन्त्रों के मूल बिन्दु परस्पर सम्पातित हैं ।



चित्र 9.5

लॉरेन्ज रुपान्तरणों के अनुसार गतिशील निर्देशतन्त्र S' में केवल गति की दिशा में घन की लम्बाई L_0 में आकुंचन होगा उसके लम्बवत दिशा में कोई आकुंचन नहीं होगा । यहां घन X- दिशा के समान्तर किनारे OC में लम्बाई में आकुंचन होगा । अत: गतिशील निर्देशतन्त्र S' में घन का आयतन होगा-

$$V = L_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}.L_0.L_0$$

$$V = L_0^3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

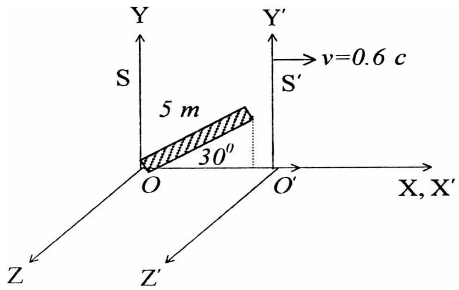
$$V = V_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{V_0}{\gamma}$$

अत: $V<V_0$ अर्थात् आयतन में आकुंचन केवल X- दिशा में घन की लम्बाई के आकुंचन के कारण ही होगा ।

नोट- पृष्ठ क्षेत्रफल तथा आयतन में प्रतिशत संकुचन का मान भी $\frac{50v^2}{c^2}$ होता है ।

उदाहरण 9.6 एक निर्देश तन्त्र 5 मी. लम्बाई की एक छड़ से 30^0 का कोण बनाते हुये 0.6 c वेग से गतिशील है । गतिशील निर्देशतन्त्र में छड़ का झुकाव व लम्बाई का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : दिये गये प्रश्न को चित्र 9.6 में दर्शाया गया है । S व S' निर्देशतन्त्र के मूल बिन्दु t = t' = 0 पर परस्पर संपातित है । यहाँ S' निर्देशतन्त्र X- दिशा में 0.6 c वेग से गतिशील है ।



चित्र 9.6

लॉरेन्ज रुपान्तरणों के सिद्धान्त के अनुसार S' निर्देशतन्त्र में छड़ की लम्बाई के X- घटक के मान में ही संकुचन होगा और ऊर्ध्वाधर घटक में कोई परिवर्तन नहीं होगा । यहाँ छड़ का X- दिशा में घटक

$$l'_{0x} = l_{0x}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= 5\cos 30\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}$$

$$= \frac{5\sqrt{3}}{2}\times 0.8$$

$$= 2\sqrt{3} \text{ मीटर}$$

तथा $$l'_{0y} = l_{0y} = l_0 \sin 30^0$$

$$= 5\sin 30^0 = 5/2 \text{ मीटर}$$

अत: गतिशील निर्देशतन्त्र में प्रक्षित छड़ की लम्बाई का मान होगा

$$l'_0 = \sqrt{l'^2_{0x} + l'^2_{0y}} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2\left(5/2\right)^2} = 4.27 \text{ मीटर}$$

यदि गतिशील निर्देशतन्त्र में छड़ द्वारा X- दिशा में बनाये गये कोण का मान θ हो तो

$$\tan\theta = \frac{l'_{0y}}{l'_{0x}} = \frac{5/2}{2\sqrt{3}} = 0.72$$

या $$\theta = \tan^{-1}\left(0.72\right) = 35.8^0$$

9.5 समय विस्फरण (Time dilation)

सापेक्षिक गति करते हुए प्रेक्षकों के लिए **किसी घड़ी के दो क्रमागत टिक् टिक् के समयान्तराल के मान में अनुभव होने वाली वृद्धि को समय विस्फरण (time dilation) कहते हैं ।**

माना एक घड़ी S निर्देशतन्त्र में स्थिरावस्था में है । किसी घड़ी से सम्बद्ध निर्देशतन्त्र में घड़ी द्वारा मापे गये समयान्तराल को **उचित समय** (proper time) कहते हैं तथा इसे सामान्यतया τ द्वारा व्यक्त करते हैं तथा घड़ी के सापेक्ष नियत वेग से गतिशील प्रेक्षक द्वारा मापे गए समय को आभासी समय (appearant time) कहते हैं ।

माना कि अभीष्ट निर्देशतन्त्र S में घड़ी x = 0 स्थिति पर स्थित है तथा दो क्रमागत घटनाओं (दो क्रमागत टिक् टिक् की आवाज) के लिए प्रेक्षित समय क्रमश: t_1 व t_2 हैं तो इस घटना में लगे समय-अन्तराल का मान होगा

$$\Delta t = \tau = t_2 - t_1 \qquad \text{..... (9.25)}$$

सापेक्षिकता प्रभाव के कारण गतिशील घड़ी सुस्त सीएचएएलएटीआई हुई प्रतीत होती है।

यह समय-अन्तराल घड़ी से सम्बद्ध तंत्र में मापा गया है अत: यह **उचित समय** कहलाता है । माना S' निर्देशतन्त्र, जो S के सापेक्ष X- दिशा में v वेग से गतिशील है, में घड़ी की उसी स्थिति (x = 0') पर इन क्रमिक घटनाओं के लिए प्रेक्षित समय को क्रमश: t'_1, व t'_2 मापा जाता है । अर्थात् घटना घटित होने में लगे समय-अन्तराल का मान निम्न होगा-

$$\Delta t' = t_2' - t_1' \qquad \text{..... (9.26)}$$

यह **आभासी समय-अन्तराल** है ।

लॉरेन्ज रुपान्तरण समीकरणों के अनुसार

$$t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{v}{c^2}x\right) = \gamma^{t_1}$$ चूंकि घटना स्थल x = 0 ..... (9.27)

तथा $$t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x\right) = \gamma^{t_2}$$ ..... (9.28)

अत: $$t'_2 - t'_1 = \gamma\left(t_2 - t_1\right) = \frac{\tau}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$ ..... (9.29)

अर्थात $$\Delta t' = \frac{\tau}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

अत: गतिशील निर्देशतन्त्र में उन्हीं घटनाओं को प्रेक्षित करने के लिये लगे समय (समय-अन्तराल) का मान अधिक होगा । इस प्रभाव को **समय विस्फरण** कहते हैं ।

दूसरे शब्दों में गतिशील निर्देशतन्त्र में दो क्रमागत घटनाओं के समयान्तराल का मान स्थिर निर्देशतन्त्र की तुलना में अधिक प्रतीत होता है । अर्थात्,

स्थिर घडियों की तुलना में गतिशील घड़ियां सुस्त चलती हुई प्रतीत होंगी ।

काल विस्फरण की प्रायोगिक पुष्टि (Experimental Verification of time dilation)-

(1) स्थिर निर्देशतन्त्र में μ- म्यूऑन कण का अर्द्ध आयुकाल 2.2 x 10^{-6} सेकण्ड होता है । ब्रह्माण्ड किरणें (Cosmic Rays) जब बाहय वायुमण्डल में प्रवेश करती हैं तो उसमें उपस्थित π - मेसोन कण μ- म्यूऑन कण में विघटित होते हैं । इस क्रिया में μ- म्यूऑन (या मेसोन) कण का वेग प्रकाश के वेग c से कम होता है । अत: इस कण द्वारा एक सेकण्ड में तय की गयी दूरी का मान (2.2 x 10^{-6} x 3 x 10^{8}) 0.66 किमी से कम होगा । यानि कि किसी भी प्रकार से **काल विस्फरण के** बिना यह कण 0.66 किमी से अधिक दूरी तय नहीं कर सकता । इससे यह स्पष्ट होता है कि ये कण वायुमण्डल के शीर्ष पर उत्पन्न नहीं हो सकते । परन्तु प्रेक्षण में यह पाया गया है कि ये कण वायुमण्डल में 10 किमी दूरी तय करने के उपरान्त भी पाये जाते हैं । यह तभी सम्भव हो सकता है जब μ- म्यूऑन कण का अर्द्ध आयुकाल विरामावस्था में प्रेक्षित मान से अधिक हो ।

(2) काल विस्फरण के प्रभाव को प्रायोगिक रुप में π^+ (पॉयोन) के पुंज **(beam)** लेकर स्पष्ट किया जा सकता है । इस प्रकार की पुंज सिन्क्रोसाइक्लोट्रोन से प्राप्त प्रोटॉन को किसी लक्ष्य पर टकराकर के प्राप्त किया जा सकता है । π^+ कण धनावेशित होता है जिसका द्रव्यमान इलेक्ट्रॉन के द्रव्यमान से 273 गुना होता है । यह कण μ^+ व न्यूट्रीनो में विघटित होता है । μ^+ कण का द्रव्यमान इलैक्ट्रॉन के द्रव्यमान का 215 गुना होता है तथा इसका औसत आयुकाल का मान स्थिर निर्देश तन्त्र में 25 x 10^{-8} सेकण्ड होता है । यदि π^+ कण के वेग का मान 0.9c हो तो प्रयोगशाला निर्देशतन्त्र में संभावित अर्द्ध आयुकाल का मान होगा

$$\Delta t' = \frac{2.5\times10^{-8}}{\left\{1-\left(\frac{0.9c}{c}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{2.5\times10^{-8}}{(1-0.81)^{\frac{1}{2}}} \cong 5.7\times10^{-8} \text{ सेकण्ड}$$

अत: π^+ कण के क्षय से पूर्व असापेक्षता (non relativistically) की तुलना में दुगनी दूरी तय करेगा । यदि π^+ कण के वेग का मान प्रकाश के वेग के तुल्य होता तो प्रयोगशाला निर्देशतन्त्र में इसके संभावित अर्द्ध आयुकाल का मान वास्तविक अर्द्ध आयुकाल की तुलना में बहुत अधिक होना चाहिये । प्रयोगों द्वारा π^+ कण के इस वेग के मान के लिये उसकी प्रेक्षित अर्द्ध आयु काल का स्पष्टीकरण काल विस्फरण के द्वारा किया जा सकता है ।

उदाहरण 9.7 प्रयोगशाला निर्देशतन्त्र में 2.5 x 10^{-8} मीटर सेकण्ड के वेग से गतिशील कण के अर्द्ध आयुकाल का मान 2.5 x 10^{-7} सेकण्ड प्रेक्षित किया जाता है । इस कण का वास्तविक अर्द्ध आयुकाल का मान ज्ञात कीजिए ।

हल: वास्तविक अर्द्ध आयुकाल

$$\tau = \Delta t'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$= \left(2.5\times10^{-7}\right)\sqrt{1-\left(\frac{2.8\times10^8}{3\times10^8}\right)^2}$$

$$= 9.0\times10^{-7} \text{ सेकण्ड}$$

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

19. स्थिर निर्देशतन्त्र में रखी एक घड़ी की दो टिक् टिक् के मध्य का समयान्तराल 1 सेकण्ड है । अन्तरिक्षयान में बैठे प्रेक्षक के लिये इस समयान्तराल का मान अधिक होगा या कम ।

. . . .

20. काल विस्फरण के प्रभाव के कारण स्थिर निर्देशतन्त्र में रखी घड़ी सुस्त या तेज चलती प्रतीत होगी ।

. . . .

. . . .

21. वास्तविक समय का मान गतिशील निर्देशतन्त्र में प्रेक्षित मान से कम होता है या अधिक?

. . . .

. . . .

22. यदि v वेग गतिशील निर्देशतन्त्र में रखी एक घड़ी द्वारा दो क्रमागत घटनाओं के

समयान्तराल का मान τ प्रेक्षित किया जाये तथा स्थिर निर्देशतन्त्र में उसी स्थिति के लिये यह मान τ' तो τ व τ' के मध्य संबंध लिखिये ।

. . . .

उदाहरण 9.8 पृथ्वी के सापेक्ष मेसोन कण का वेग 0.8c है । यदि स्थिर निर्देशतन्त्र में इसके उड़ान में लगा समय 2 x 10^{-8} सेकण्ड हो और इसका वेग स्थिर रहे तो पृथ्वी के सापेक्ष इस कण द्वारा तय की गयी दूरी का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : पृथ्वी के सापेक्ष मेसोन कण के उड़ान में लगा समय

$$\Delta t' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

मेसोन कण के वास्तविक अर्द्ध आयुकाल का मान

$$\tau = 2 \times 10^{-8} \text{ सेकण्ड}$$

अत:
$$\Delta t' = \frac{2 \times 10^{-8}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.8c}{c}\right)^2}}$$

या
$$= \frac{2 \times 10^{-8}}{0.6} = 3.33 \times 10^{-8} \text{ सेकण्ड}$$

पृथ्वी के सापेक्ष मेसोन कण द्वारा तय की गयी दूरी का मान होगा

$$= v\Delta t'$$

$$= \frac{0.8 \times 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-8}}{0.6} = 8 \text{ मीटर}$$

उदाहरण 9.9 प्रयोगशाला में कणों की एक पुंज का वेग 0.96c तथा अर्द्ध आयुकाल 2 x 10^{-6} सेकण्ड है । पुंज के फ्लक्स के प्रारम्भिक मान का आधा होने तक इसके द्वारा तय की गयी दूरी का मान ज्ञात करो ।

हल : प्रेक्षित अर्द्ध आयुकाल

$$\Delta t' = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$= \frac{2 \times 10^{-6}}{\sqrt{1 - (0.96c)^2}}$$

$$= \frac{2 \times 10^{-6}}{0.28} \text{ सेकण्ड}$$

स्पष्ट है कि पुंज के प्रारम्भिक फ्लक्स के मान का आधा होने तक यह समय लगेगा । इस समय में पुंज के द्वारा तय की गयी दूरी होगी ।

$$= v\Delta t'$$

$$= 0.96 \times 3 \times 10^8 \times \frac{2 \times 10^{-6}}{0.28} = 2000 \text{ मीटर}$$

9.6 सारांश (Summary)

- प्रकाश को गति करने के लिये ईथर जैसे किसी माध्यम की आवश्यकता नहीं होती है ।
- सभी जड़त्वीय निर्देशतन्त्रो में निर्वात में प्रकाश का वेग समान होता है ।
- प्रकाश के वेग की कोटि से गतिशील निर्देशतन्त्र के लिये गेलेलियन रुपान्तरण लागू नहीं होते हैं ।
- आइन्सटीन के अनुसार प्रकाश के वेग c का मान प्रेक्षक की गति पर निर्भर नहीं करता है।
- सापेक्षिकता सिद्धान्त का प्रतिपादन सन् 1905 में आइन्सटाइन ने किया था ।
- सापेक्षिकता सिद्धान्त के अनुसार सभी जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों में भौतिक नियम समान रुप से लागू होते हैं ।
- सभी जड़त्वीय निर्देशतन्त्रों में निर्वात में प्रकाश के वेग का मान समान होता है ।
- सापेक्षिकता सिद्धान्त के अनुसार दिक् व काल निरपेक्ष नहीं होते हैं ।
- गतिशील निर्देशतन्त्र में प्रेक्षक द्वारा प्रेक्षित छड़ की लम्बाई का मान छड़ की उपयुका लम्बाई से कम प्रतीत होता है । इस कथन को लॉरेन्ज फिटजगेराल्ड का संकुचन भी कहते हैं ।
- संकुचन का प्रभाव केवल गतिशील निर्देशतन्त्र की गति की दिशा में प्रेक्षित होना है उसके लम्बवत दिशा में नहीं ।
- स्थिर निर्देशतन्त्र में घड़ी द्वारा किसी घटना के लिये मापा गया समयान्तराल वास्तविक काल कहलाता है ।
- गतिशील निर्देशतन्त्र में किसी घटना के समयान्तराल की अवधि का मान स्थिर निर्देश तन्त्र की तुलना में अधिक होता है । इसे समय विस्फरण कहते हैं ।
- गतिशील निर्देशतन्त्र में किसी घटना के लिये लगे समयान्तराल का मान वास्तविक समयान्तराल τ से निम्न प्रकार सम्बन्धित होता है ।

$$\Delta t' = \frac{\tau}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

9.7 शब्दावली (Glossary)

काल विस्फरण	Time Dilation
चिरसम्मत	Classical
दिक्	Space
निर्वात	Vacuum
निश्चर	Invariant
भौतिक नियम	Physical laws
रुपान्तरण	Transformation
वास्तविक	Proper
विस्फरण	Dilation

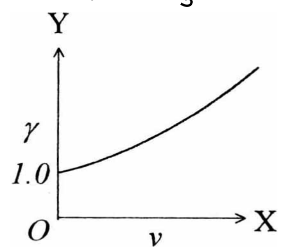
विशिष्ट सापेक्षिकता	Special Relativity
स्थिर	Constant
सापेक्षिकता	Relativity
संकुचन	

9.8 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1.	Feynman	Lecture's Physics Vol. I	CBS New Delhi
2.	Berkeley Physics Course	Mechanics Vol. I	Mc Graw-Hill International
3.	M. Alonso-E. J. Finn	Fundamental University Physics Vol. I	Addison Wesley
4.	J.C. Upadhyay	Mechanics	Ram Prasad & Sons, Agra

9.9 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment questions)

1. काल
2. नहीं
3. अनन्त
4. कण का वेग प्रकाश के वेग से अधिक नहीं हो सकता ।
5. हाँ
6. नहीं
7. हाँ
8. c
9. हाँ
10. प्रकाश का वेग c
11. $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ जहां $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$
12. हाँ, $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
13. आरेख चित्र 9.7 में दर्शाये अनुसार प्राप्त होता है ।



चित्र 9.7

14. 1.0 मीटर

15. ब
16. 18%
17. अन्तरिक्षयान
18. नहीं
19. अधिक
20. सुस्त
21. कम होता है
22. 22. $\tau' > \tau$

9.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. सापेक्षिकता की परिभाषा दीजिये ।
2. चिरसम्मत यांत्रिकी के अनुसार दिक् व काल निरपेक्ष हैं या सापेक्ष ।
3. मिन्काव्सकी आकाश कितने निर्देशांकों से निर्मित होता है ।
4. लम्बाई संकुचन क्या है ।
5. विशिष्ट सापेक्षिकता के सिद्धान्तों को लिखिये ।
6. काल विस्फरण को परिभाषित कीजिए ।
7. वास्तविक लम्बाई क्या है?
8. वास्तविक काल क्या है?

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

9. लम्बाई संकुचन क्या है? इसके लिये आवश्यक सूत्र की स्थापना कीजिए ।
10. काल विस्फरण से क्या अभिप्राय है? काल विस्फरण के लिये आवश्यक सूत्र की स्थापना कीजिए।
11. लॉरेन्ज रुपान्तरण क्या है? इन रुपान्तरणों के लिये आवश्यक समीकरणों की स्थापना कीजिए ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

12. S निर्देशतन्त्र में एक छड़ की लम्बाई 10 मीटर है । उस निर्देशतन्त्र S' में छड़ की लम्बाई का मान ज्ञात कीजिए जो S के सापेक्ष 0.8c वेग से गतिशील है ।

    संकेत- $L = L_0\sqrt{1 - v^2 . c^2}$ (**उत्तर:** 6 मीटर)

13. एक छड़ की लम्बाई 5 मीटर है । छड़ 0.5c वेग से पृथ्वी के सापेक्ष गतिशील है । छड़ के साथ गतिशील प्रेक्षक द्वारा प्रेक्षित छड़ की लम्बाई का मान ज्ञात कीजिए ।

    (**उत्तर:** 5 मीटर)

14. प्रयोगशाला के सापेक्ष एक छड़ 0.6c वेग से गतिशील है । यदि प्रयोगशाला में बैठा प्रेक्षक इस छड की लम्बाई का मान 1 मीटर प्रेक्षित करता हो तो इसकी वास्तविक लम्बाई का मान ज्ञात करो ।

    (**उत्तर:** 1.25 मीटर)

15. एक छड़ अपनी लम्बाई के सापेक्ष 60^0 का कोण बनाते हुए 0.8c वेग से गतिशील हो तो इसकी लम्बाई में प्रतिशत संकुचन ज्ञात कीजिए ।

(**उत्तर:** 8.3 %)

संकेत- $l'_x = l\sqrt{1-v^2/c^2}\cos 60^0 \quad l'_y = l\sqrt{1-v^2/c^2} sin 60^0 \Rightarrow l' 0.917 l$

अत: % संकुचन =(1-0.917)$\times$100=8.3%

16. पॉयन कण का वास्तविक अर्द्ध आयुकाल 2.5 x 10^{-8} सेकण्ड है तथा औसत आयुकाल 2.5 x 10^{-1} सेकण्ड । पॉयन कण का वेग ज्ञात कीजिए ।

(**उत्तर:** 0.993)

17. प्रयोगशाला में प्रेक्षित किसी कण का अर्द्ध आयुकाल यश 4x10^{-8} सेकण्ड तथा वेग 0.8c है, जब इसका वेग 0.6c होता है तो अर्द्ध आयुकाल 3 x 10^{-8} सेकण्ड होता है । इस तथ्य को समझाइये।

(**उत्तर:** दोनों स्थितियों में वास्तविक आयुकाल का मान 2.4 x 10^{-8} सेकण्ड है ।इसका अभिप्राय है कि कण के आयुकाल का मान प्रेक्षक की गति पर निर्भर नहीं करता है ।)

इकाई - 10

द्रव्यमान-केन्द्र
(Centre of Mass)

इकाई की रूपरेखा

10.0 उद्देश्य (Objectives)

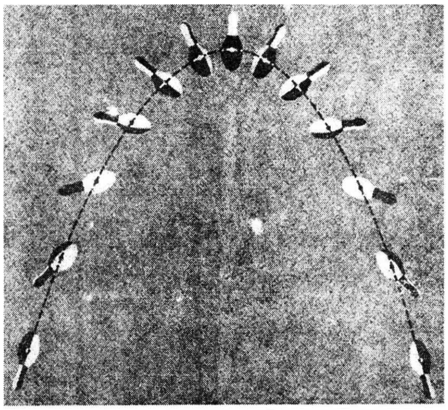
इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप

- द्रव्यमान-केन्द्र की अवधारणा समझ सकेंगे;

- द्विकण निकाय तथा प्रकृति में इनकी उपस्थिति के बारे में अध्ययन कुछ विशेष उदाहरणों सहित कर सकेंगे;
- समानीत द्रव्यमान की अवधारणा तथा प्रकृति में उपस्थित द्विकण निकायों के समानीत द्रव्यमान का परिकलन कर सकेंगे;
- बहुकणीय निकाय के द्रव्यमान-केन्द्र की स्थिति तथा वेग सदिश के व्यंजक प्राप्त कर द्रव्यमान-केन्द्र की गति का विस्तृत अध्ययन कर सकेंगे;
- कुछ नियमित आकार के दृढ़ पिण्डों के द्रव्यमान-केन्द्रों की स्थिति का परिकलन कर सकेंगे;
- किसी कण तथा दृढ़ पिण्ड की परिक्रमण गति का विस्तृत अध्ययन कर सकेंगे ।

10.1 प्रस्तावना (Introduction)

आप किसी क्रिकेट खिलाड़ी द्वारा उर्ध्वाधर ऊपर की ओर स्पिन कराकर फेंकी गई गेंद की गति को ध्यान पूर्वक देंखे । यदि आप अपना ध्यान गेंद की सतह पर स्थित किसी बिन्दु पर केन्द्रित करें तो आप पायेंगे कि इस बिन्दु का पथ सरल रेखीय या एकतलीय न होकर जटिल पथ होता है । अब यदि आप गेंद के केन्द्र बिन्दु की गति पर ध्यान केन्द्रित करें तो आप पायेंगे कि इसका पथ उर्ध्वाधर सरल रेखीय पथ होता है जो कि गेंद को बिना स्पिन कराये ऊपर फेंकने पर भी होता है अर्थात् क्रिकेटर द्वारा गेंद को स्पिन कराकर ऊपर की ओर फेंकने का इस केन्द्र बिन्दु की गति पर कोई प्रभाव नहीं आया है । इसी प्रकार चित्र 10.1 में प्रदर्शित यदि आप एक खिलाड़ी द्वारा उसके समीप खड़े अन्य खिलाड़ी की ओर फेंके गये एक ऐसे डम्बल की गति को देखे जो कि अपनी अक्ष के सापेक्ष घुर्णन व दोलनी गति करते हुये दूसरे खिलाड़ी की और गति करता है तो आप पायेंगे कि इनके केन्द्र बिन्दु कि गति सरल परवलय गति ही होती है जो कि डम्बल को घुर्णन तथा दोलन गति कराये बिना होती । उपरोक्त दोनों उदाहरणों से आप एक निष्कर्ष निकाल सकते है कि गेंद अथवा डम्बल का केन्द्र एक विशिष्ट बिन्दु है जिसकी गति समान द्रव्यमान के समान बल लगाये गये एकल कण कि गति के तुल्य होती है । जब किसी निकाय में कणो की संख्या अधिक होता है तो प्रत्येक कण गति को समझना कठिन होता है । इस प्रकार के निकाय की गति को समझने के लिए द्रव्यमान-केन्द्र की अवधारणा बहुत सहायक सिद्ध होती है । पिछली इकाईयों में आप पढ़ चुके हैं कि स्थानान्तरीय गति में पिण्ड के किसी एक कण की गति के द्वारा ही पूरे पिण्ड की गति को निरूपित किया जा सकता है क्योंकि पिण्ड के समस्त कणों का पथ परस्पर समान्तर होता है तथा किसी भी क्षण उसके प्रत्येक कण का विस्थापन समान रहता है । लेकिन यदि पिण्ड दोलनी या घूर्णन गति करते हुये स्थानान्तरित गति करे तो उसके समस्त कणों की रेखिक चाल समान नहीं होती फिर भी पिण्ड में एक बिन्दु ऐसा माना जा सकता है जो कि उसी प्रकार गति करता प्रतीत होता जैसे कि समान द्रव्यमान का कोई एकल कण समान बल लगाने से स्थानान्तरित होता हो । ऐसे बिन्दु को पिण्ड का द्रव्यमान-केन्द्र कहा जाता है।



चित्र 10.1

इस इकाई के अनुच्छेद 10.2 में आप द्रव्यमान-केन्द्र के बारे में तथा अनुच्छेद 10.3 में द्विकण निकाय का विवेचनात्मक अध्ययन करेंगे । द्रव्यमान-केन्द्र का अध्ययन आप कण तंत्र (system of particle) तथा दृढ़ पिण्ड (rigid body), दोनों अवस्थाओं में द्रव्यमान-केन्द्र का अध्ययन अनुच्छेद 10.4 में करेंगे । इसी अनुच्छेद में आप बहुकणीय निकाय के द्रव्यमान-केन्द्र की गति एवं इसकी गतिज ऊर्जा का अध्ययन करेंगे । अनुच्छेद 10.5 तथा 10.6 में क्रमश: परिक्रमण गति एवं दृढ़ पिण्ड की गति के बारे में पढेंगे ।

10.2 द्रव्यमान-केन्द्र की अवधारणा (Concept of centre of mass)

प्रेक्षणों के आधार पर यह तथ्य सामने आता है कि प्रत्येक भौतिक निकाय से सम्बद्ध एक बिन्दु ऐसा होता है जिसकी गति, पूरे निकाय की स्थानान्तरीय गति को प्रदर्शित करती है । इस बिन्दु को द्रव्यमान-केन्द्र कहा जाता है । यह तथ्य कण तंत्र तथा दृढ़ पिण्ड दोनों प्रकार के निकायों के लिये मान्य होता है । इसे आप निम्न रूप से भी परिभाषित कर सकते हैं ।

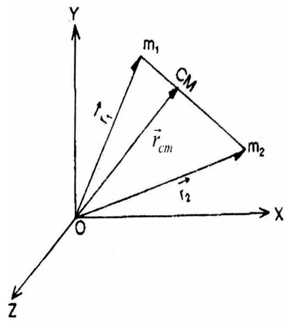
"किसी भौतिक निकाय का द्रव्यमान-केन्द्र वह बिन्दु होता है जिस पर उस निकाय के समस्त कणों का! सम्पूर्ण द्रव्यमान इसकी स्थानान्तरीय गति के अध्ययन के लिये प्रभावी रूप से केन्द्रित हुआ माना जा सकता है" यहाँ ध्यान रखने योग्य बात है कि यह आवश्यक नहीं है कि द्रव्यमान-केन्द्र पर भौतिक रूप से कोई द्रव्यमान उपस्थित हो ही । उदाहरण के लिये आप एक वलय पर विचार करें तो उसका द्रव्यमान-केन्द्र, ज्यामितीय केन्द्र पर स्थित होता है जहाँ पर कोई द्रव्यमान उपस्थित नहीं होता।

10.3 द्विकण निकाय एवं समानीत द्रव्यमान (Two particle system and centre of mass)

सामान्यत: कोई भी निकाय अनेक कणों से मिलकर बना होता है लेकिन सरलतम निकाय के रूप में पहले आप एक ऐसे निकाय का अध्ययन करेंगे जिसमें दो कण होते हैं । साथ ही आप द्विकण निकाय के द्रव्यमान केन्द्र, समानीत द्रव्यमान तथा प्रकृति में इनके उदाहरणों का अध्ययन भी इस शीर्षक के अन्तर्गत कर सकेंगे ।

10.3.1 द्विकण निकाय का द्रव्यमान-केन्द्र (Centre of mass of two particle system)

चित्र 10.2 में एक द्विकण निकाय को प्रदर्शित किया गया है जिसमें m_1 तथा m_2 द्रव्यमान के दो कण हैं जिनके मूल बिन्दु O के सापेक्ष स्थिति सदिश (position vector) क्रमश: $\vec{r_1}$ तथा $\vec{r_2}$ है । मूल बिन्दु O के सापेक्ष इस निकाय के द्रव्यमान-केन्द्र का स्थित सदिश $\left(\vec{r}_{cm}\right)$ को निम्न व्यंजक द्वारा व्यक्त किया जाता है-



चित्र 10.2

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2}$$

द्रव्यमान-केन्द्र के स्थिति सदिश के इस व्यंजक की उपपत्ति निम्नानुसार की जाती है ।

उपपत्ति (Proof)-

द्विकण निकाय के द्रव्यमान-केन्द्र के स्थिति सदिश के व्यंजक की उपपत्ति के लिए चित्र 10.2 में प्रदर्शित निकाय पर विचार कीजिए जिसमें निहित दोनों कणों पर बाह्य तथा आन्तरिक दोनों प्रकार के बल कार्यरत हैं । मान लीजिये कि $\vec{F_1}'$ प्रथम कण (द्रव्यमान m_1) पर बाह्य बल तथा $\vec{F}_1''$, से इस पर दूसरे कण (द्रव्यमान m^2) द्वारा आरोपित आन्तरिक बल का मान है । अतः प्रथम कण पर कार्यरत कुल परिणामी बल

$$\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_1'} + \overrightarrow{F_1''}$$

इसी प्रकार द्वितीय कण पर कार्यरत कुल परिणामी बल $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_2'} + \overrightarrow{F_2''}$

जहाँ $\vec{F}_2'$, द्वितीय कण पर कार्यरत बाह्य बल व $\vec{F}_2''$, द्वितीय कण पर प्रथम कण द्वारा आरोपित आन्तरिक बल है । जैसा कि आप पूर्व में पढ़ चुके हैं कि न्यूटन की गति के द्वितीय नियमानुसार दोनों कणों के संवेग में परिवर्तन की दर उन पर आरोपित बलों के तुल्य होती है । अतः

प्रथम कण के लिये $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_1'} + \overrightarrow{F_1''} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$ ..... (10.1)

था द्वितीय कण के लिये $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F_2'} + \overrightarrow{F_2''} = \dfrac{\overrightarrow{dp_2}}{dt}$ ......(10.2)

अतः समी. 10.1 व 10.2 से द्विकण निकाय पर कुल परिणामी बल $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$

$$\overrightarrow{F_1} = \left(\overrightarrow{F_1'} + \overrightarrow{F_1''}\right) + \left(\overrightarrow{F_2'} + \overrightarrow{F_2''}\right) = \frac{d\vec{P_1}}{dt} + \frac{d\vec{P_2}}{dt} \quad \text{..... (10.3)}$$

समी. 10.3 में $\overrightarrow{F_1''} + \overrightarrow{F_2''} = 0$, क्योंकि दोनों कणों के मध्य लगने वाले आन्तरिक बल परस्पर बराबर तथा विपरीत होते हैं । अतः

$$\vec{F} = \vec{F_1}' + \vec{F_1}'' = \frac{d}{dt}\left(\vec{P_1} + \vec{P_2}\right)$$

या $\vec{F} = \dfrac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)$ क्योंकि $\vec{P}_1 = m_1\vec{v}_1$ तथा $\vec{P}_2 = m_2\vec{v}_2$

अतः $\vec{F} = \dfrac{d}{dt}\left(m_1\dfrac{d\vec{r_1}}{dt} + m_2\dfrac{d\vec{r_2}}{dt}\right)$ $\quad \because \vec{v}_1 = \dfrac{d\vec{r_1}}{dt}$ तथा $\vec{v}_2 = \dfrac{d\vec{r_2}}{dt}$

या $\vec{F} = \dfrac{d^2}{dt^2}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right)$ .....(10.4)

चूँकि किसी भी निकाय का सम्पूर्ण द्रव्यमान $M\left(= m_1 + m_2\right)$ उसके द्रव्यमान केन्द्र पर केन्द्रित हुआ माना जाता है जिस पर बाह्य बल $\vec{F}$ लगाने से उसमें उत्पन्न त्वरण $\dfrac{d^2\vec{r}_{cm}}{dt^2}$ हो तो निकाय पर कार्यरत बल-

$$\vec{F} = \left(m_1 + m_2\right)\frac{d^2\vec{r}_{cm}}{dt^2}$$

अतः समी (10.4) से- $\left(m_1 + m_2\right)\dfrac{d^2\vec{r}_{cm}}{dt^2} = \dfrac{d^2}{dt^2}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right)$

या $$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$ ..... (10.5)

समी. 10.5 m_1 व m_2 द्रव्यमान वाले दो कणों के निकाय के द्रव्यमान-केन्द्र के स्थिति सदिश को प्रदर्शित करती है। यदि द्रव्यमान-केन्द्र मूल बिन्दु O पर स्थित हो तो $\vec{r}_{cm} = 0$ अत: समी. (10.5) की सहायता से आप लिख सकते है कि

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$$ ..... (10.6)

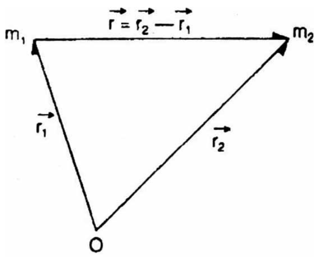
इस अवस्था में $\vec{r}_1$ तथा $\vec{r}_2$ दोनों कणों के द्रव्यमान-केन्द्र के सापेक्ष स्थिति सदिश कहलाते है। समी. 10.6 द्रव्यमान-केन्द्र के परितः कणों के द्रव्यमान आघूर्णों के सदिश योग को व्यक्त करती है जो कि शून्य होता है । अत: आप कह सकते हैं कि द्रव्यमान-केन्द्र वह बिन्दु है जिसके परितः निकाय के समस्त कणों के द्रव्यमान आघूर्णों का सदिश योग शून्य होता है ।

अर्थात $$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \vec{r}_i^{\,'} = 0$$

जहां $\vec{r}_i^{\,'}$ द्रव्यमान- केन्द्र के सापेक्ष i वे कण का स्थिति सदिश है ।

10.3.2 समानीत द्रव्यमान (Reduced Mass)

केन्द्रीय बल के अन्तर्गत दो कणों के निकाय की आपेक्षिक गति को एक आभासी कण की गति द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है । इस अभासी कण के प्रभावी द्रव्यमान को द्विकण तंत्र का समानीत द्रव्यमान (reduced mass) कहा जाता है । द्विकण तन्त्र के समानीत द्रव्यमान का व्यंजक प्राप्त करने के लिए चित्र 10.3 में प्रदर्शित एक द्विकण निकाय पर विचार कीजिये जिसमें स्थित दो कणों के द्रव्यमान क्रमश: m_1 व m_2 हैं । मूल बिन्दु O के सापेक्ष इनके स्थिति सदिश क्रमश: $\vec{r}_1$ व $\vec{r}_2$ हैं । मान लीजिये इन कणों के मध्य केवल अन्योन्य क्रिया बल ही कार्यरत है । कण m_1 पर कण m_2 द्वारा आरोपित पारस्परिक बल (केन्द्रीय बल) $\vec{F}_{21}$ तथा कण m_2 पर कण m_1 द्वारा आरोपित पारस्परिक बल $\vec{F}_{21}$ है ।



चित्र 10.3

$\vec{F}_{12}$ बल के प्रभाव मे m_1 द्रव्यमान वाले कण की गति का समीकरण-

$$\vec{F}_{12} = m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \quad \text{या} \quad \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1}$$ ....(10.7)

इसी प्रकार $\vec{F}_{21}$ बल के प्रभाव में m_2 द्रव्यमान वाले कण की गति का समीकरण-

$$\vec{F}_{21} = m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \quad \text{या} \quad \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$$ ....(10.8)

जैसा कि आप पूर्व में अध्ययन कर चुके हो कि न्यूटन की गति के तृतीय नियमानुसार-

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \vec{F} \quad \text{(माना)}$$

अत: $$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}=\frac{\vec{F}}{m_1},\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}=-\frac{\vec{F}}{m_2}$$ ....(10.9)

समी. 10.9 से $$\frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)=\vec{F}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)$$ ....(10.10)

यहाँ $\vec{r}_1-\vec{r}_2$ द्‌वितीय कण के सापेक्ष प्रथम कण का विस्थापन सदिश है जिसे $\vec{r}_{12}$ से लिखा जो सकता है, अत: समी 10.10 से

$$\frac{d^2\vec{r}_{12}}{dt^2}=\left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\right)\vec{F}$$ ....(10.11)

या $$\mu\frac{d^2\vec{r}_{12}}{dt^2}=\vec{F}$$ ....(10.12)

जहाँ $\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)=\mu$ को द्‌विकण निकाय का समानीत द्रव्यमान कहा जाता है ।

समी 10.12 μ द्रव्यमान वाले एकल कण की गति का समीकरण है जिसका मूल बिन्दु O के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{r}_{12}$ है । इस प्रकार आप कह सकते हैं कि किसी द्‌विकण निकाय में केवल पारस्परिक बलों के कारण कणों की आपेक्षिक गति में दोनों कणों के सदिश दूरी $\vec{r}_1$ तथा $\vec{r}_2$ की गणना की जाने वाली समस्या को एक कण के सदिश दूरी $\vec{r}_{12}$ की गणना में परिवर्तित किया जा सकता है जिसमें कण का तुल्य द्रव्यमान उसका समानीत द्रव्यमान $\mu\left(=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)$ होता है ।

10.3.3 प्रकृति में द्‌विकण निकायों के उदाहरण (Examples of two particle system in Nature)

प्रकृति में द्‌विकण निकायों के उदाहरण के रूप में आप निम्न निकायों पर विचार कर सकते हैं

(1) पृथ्वी एवं चन्द्रमा का निकाय

जैसा कि आप जानते हैं कि पृथ्वी के चारों ओर चन्द्रमा की परिक्रमण गति पृथ्वी तथा चन्द्रमा के मध्य पारस्परिक गुरूत्वाकर्षण बल जो कि एक केन्द्रीय बल होता है, के कारण होती है । यदि पृथ्वी तथा चन्द्रमा के द्रव्यमान क्रमश: M_e तथा M_m मान लिए जावें तो चन्द्रमा पर पृथ्वी के कारण गुरूत्वीय बल का मान निम्नानुसार होगा ।

$$\vec{F}_{me}=\mu.\frac{d^2\vec{r}_{me}}{dt^2}$$

जहाँ $\mu=\left(\frac{M_e M_{me}}{M_e+M_m}\right)$ पृथ्वी-चन्द्रमा निकाय का समानीत द्रव्यमान है तथा $\vec{r}_{me}$ चन्द्रमा का पृथ्वी के सापेक्ष स्थिति सदिश है ।

(2) इलेक्ट्रॉन- पॉजिट्रॉन निकाय या पॉजिट्रोनियम

इलेक्ट्रॉन (Electron) तथा पॉजिट्रान (Positron) मिलकर एक अस्थायी तंत्र बनाते हैं जिसे पॉजिट्रोनियम कहा जाता है। पॉजिट्रॉन का द्रव्यमान (m) इलेक्ट्रान के द्रव्यमान (m) के बराबर तथा आवेश इलेक्ट्रान के आवेश के बराबर तथा धनात्मक होता है । पॉजिट्रोनियम में इलेक्ट्रान-पॉजिट्रॉन पारस्परिक आर्कषण बल के प्रभाव में गति करते हैं । इस द्विकण तंत्र को आप एकल कण निकाय की तरह मान सकते हैं जिसका समानीत द्रव्यमान निम्नानुसार होगा-

$$\mu = \frac{m.m}{m+m} = \frac{m}{2}$$

(3) हाइड्रोजन परमाणु निकाय

हाइड्रोजन परमाणु निकाय इलेक्ट्रान तथा प्रोटीन का निकाय होता है जिसमें इलेक्ट्रान तथा प्रोटॉन पारस्परिक वैद्युत आर्कषण बल लगाते हैं तथा प्रोटीन के चारों और इलेक्ट्रॉन की परिक्रमण गति इस पारस्परिक वैद्युत आकर्षण बल (केन्द्रीय बल) के कारण होती है । इस द्विकण निकाय को आप एक कण निकाय की तरह मान सकते हैं, जिसका समानीत द्रव्यमान (μ_H) निम्नानुसार होगा

$$\mu_H = \frac{m_e.m_P}{m_e + M_P} = m_e\left(1+\frac{m_e}{M_P}\right)^{-1} = m_e\left(1-\frac{m_e}{M_P}\right)$$

आप जानते हैं कि $\frac{m_e}{M_P} = \frac{1}{1836}$, जो कि एक की तुलना में नगण्य है अत:

$$\mu_H = m_e$$

इस प्रकार आप कह सकते हैं कि हाइड्रोजन परमाणु का समानीत द्रव्यमान इलेक्टान के द्रव्यमान के बराबर होता है ।

(4) द्वि-परमाणुक अणु निकाय

किसी द्वि-परमाणुक अणु निकाय में उसके दोनों परमाणु पारस्परिक बन्धन बल से बन्धे रहते हैं । इस द्वि-कण निकाय को भी आप एक कण के रूप में समझ सकते हैं । उदाहरणार्थ H_2 का समानीत द्रव्यमान निम्नानुसार होगा

$$\mu_{H_2} = \frac{m_H.m_H}{m_H + m_H} = \frac{m_H}{2}$$; जहाँ m_H एक हाइड्रोजन परमाणु का द्रव्यमान है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. m तथा 2m द्रव्यमान के दो कण r दूरी पर स्थित है । निकाय के द्रव्यमान-केन्द्र की स्थिति क्या होगी ।

....

....

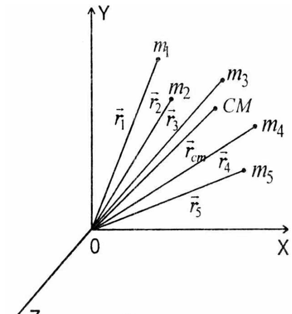
10.4 बहुकणीय निकाय एवं दृढ पिण्ड (Many particles system and rigid body)

बहुकणीय निकाय से आपका तात्पर्य ऐसे निकाय से होगा जिसमें कणों की संख्या दो से अधिक होती है । यदि किसी बहुकणीय निकाय में उसके अवयव कण काफी पासपास होते हों तथा इनके बीच अन्तराल भी काफी कम होता हो तो निकाय को सतत् द्रव्यमान वितरण का निकाय माना जा सकता

है जिसमें कणों के बीच दूरियाँ बाहय बल लगाने पर अपरिवर्तित रहती हैं । ऐसे बहुकणीय निकाय को आप दृढ़ पिण्ड कहेंगे । इस शीर्षक में आपको किसी बहुकणीय निकाय के द्रव्यमान-केन्द्र के स्थिति सदिश का व्यजंक प्राप्त करने की गणितीय व्याख्या के साथ-साथ किसी दृढ़ पिण्ड के द्रव्यमान-केन्द्र के स्थिति सदिश के व्यंजक के बारे में समझाया जायेगा ।

10.4.1 बहुकणीय निकाय का द्रव्यमान-केन्द्र (Centre of mass of many particles system)

चित्र 10.4 में एक बहुकणीय निकाय को प्रदर्शित किया गया है जिसमें कणों की संख्या n है । इस निकाय में स्थित कणों के द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, ...m_n$ हैं तथा इनके मूल बिन्दु O के सापेक्ष स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ...\vec{r}_n$ हैं । मान लीजिये कि इन कणों के द्रव्यमान-केन्द्र का मूल बिन्दु के सापेक्ष स्थिति सदिश $\overrightarrow{r_{cm}}$ है जहाँ निकाय का सम्पूर्ण द्रव्यमान $M\left(=m_1+, m_2+.......m_n\right)$ प्रभावी रूप से केन्द्रित माना जाता है । आपको इस द्रव्यमान-केन्द्र के स्थिति सदिश $\overrightarrow{r_{cm}}$ का व्यंजक निकाय के कणों के मूल बिन्दु O के सापेक्ष स्थिति सदिशों के रूप में प्राप्त करना है ।



चित्र 10.4

मान लीजिए कि निकाय के प्रत्येक कण पर आंतरिक तथा बाहय दोनों प्रकार के बल कार्यरत होते हैं । कणों पर आरोपित होने वाले बाहय बल क्रमशः $\overrightarrow{F_1}', \overrightarrow{F'_2}, ...\overrightarrow{F'_i}, ...\overrightarrow{F'_n}$ है । निकाय के प्रत्येक कण पर शेष बचे कणों के कारण आंतरिक बल भी कार्यरत होते है । यदि $\overrightarrow{F_{ij}^{"}}$ विचाराधीन i वे कण पर j वे कण के कारण आन्तरिक बल का मान हो तो i वे कण पर कुल आंतरिक बल के मान को निम्न रूप में लिख सकते हैं-

$$\overrightarrow{F_i^{"}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{j=n} F_{ij}^{"}$$

इस प्रकार i वे कण पर कार्यरत कुल बल का मान निम्न होगा

$$\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{F_i^{'}} + \overrightarrow{F_i^{"}} \qquad ....(10.13)$$

निकाय पर कार्यरत कुल बल F का मान आप समी. 10.13 का निकाय के सभी कणों के लिए बलों के योग से प्राप्त कर सकते हों अर्थात्

$$\vec{F} = \sum_{i=l}^{i=n} F_i^{'} + \sum_{i=l}^{i=n} \overrightarrow{F_i^{"}} \qquad ....(10.14)$$

समी. 10.14 के द्वितीय पद का मान शून्य होगा क्योंकि यह पद कण समूह के बीच पारस्परिक बलों का योग है जो कि हमेशा शून्य होता है अर्थात् $\sum_{i=l}^{i=n} \overrightarrow{F_l^{"}} = 0$

अतः $$\vec{F} = \sum_{i=l}^{i=n} \overrightarrow{F_i^{'}} \qquad ....(10.15)$$

समी 10.15 यह प्रदर्शित करती है कि निकाय पर परिणामी बल $\vec{F}$ समस्त कणों पर कार्यरत बाह्य बलों के योग के तुल्य है । न्यूटन की गति के द्वितीय नियम से आप जानते हो कि कणों की संवेग परिवर्तन की दरों का सदिश योग आरोपित बाह्य बल के बराबर होता है अत:

$$\vec{F} = \sum_{i=l}^{i=n} \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v_i}\right) \quad \text{या} \quad \vec{F} = \sum_{i=l}^{i=n} m_i \frac{d^2 \vec{r_i}}{dt^2} \quad \text{क्योंकि} \quad \vec{v_i} = \frac{d}{dt}\vec{r_i}$$

या $$\vec{F} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=l}^{i=n} m_i \vec{r_i} = M \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=l}^{i=n} \frac{m_i \vec{r}_i}{M} \qquad \text{........(10.16)}$$

जैसा कि आप पूर्व में जान चुके हो कि किसी निकाय का द्रव्यमान-केन्द्र इस प्रकार गति करता है जैसे कि निकाय का सम्पूर्ण द्रव्यमान उसी पर केन्द्रित हो एवं सभी कणों पर लगने वाले बल का समग्र प्रभाव द्रव्यमान-केन्द्र पर ही लग रहा हो-

अत: $$\vec{F} = M \frac{d^2 \overrightarrow{r_{cm}}}{dt^2} \qquad \text{..........(10.17)}$$

समी. 10.16 एवं 10.15 से आप लिख सकते हो कि

$$M \frac{d^2 \overrightarrow{r_{cm}}}{dt^2} = M \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=l}^{i=n} \frac{m_i \vec{r}_i}{M}$$

या $$\vec{r}_{cm} = \sum_{i=l}^{i=n} \frac{m_i \vec{r}_i}{M} \qquad \text{...........(10.18)}$$

या $$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \text{.........} + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \text{..........} m_n} \qquad \text{.........(10.19)}$$

समी 10.19 एक बहु कणीय निकाय में मूल बिन्दु O के सापेक्ष द्रव्यमान-केन्द्र के स्थिति सदिश का मान निकाय के कणों के मूल बिन्दु O के सापेक्ष स्थिति सदिशों के रूप में व्यक्त करती है ।

10.4.2 बहु कणीय निकाय के द्रव्यमान-केन्द्र का कार्तिय निर्देशांकों में निरूपण (Cartesian co-ordinates representation of centre of mass of many particles system)

मान लीजिये कि द्रव्यमान-केन्द्र के कार्तिय निर्देशांक (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}) हैं । अत:

द्रव्यमान-केन्द्र के स्थिति सदिश $\overrightarrow{r_{cm}}$ को कार्तिय निर्देशांकों में निम्न रूप से लिखा जा सकता है

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \hat{i}x_{cm} + \hat{j}y_{cm} + \hat{k}z_{cm}$$

यदि निकाय में स्थित कणों के कार्तिय निर्देशांक क्रमश:(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) .....(x_n,y_n,z_n) हों तो इन कणों के स्थिति सदिश निम्न प्रकार से लिखे जा सकते हैं

$$\vec{r_1} = \hat{i}x_1 + \hat{j}y_1 + \hat{k}z_1, \vec{r_2} = \hat{i}x_2 + \hat{j}y_2 + \hat{k}z_2 \text{........} \qquad \vec{r_n} = \hat{i}x_n + \hat{j}y_n + \hat{k}z_n$$

समी. 10.19 से आप जानते हैं कि

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \text{.........} + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \text{..........} m_n}$$

अत: $\hat{i}x_{cm}+\hat{j}y_{cm}+\hat{j}z_{cm}=\dfrac{m_1\left(\hat{i}x_1+\hat{j}y_1+\hat{j}z_1\right)+........m_n\left(\hat{i}x_n+\hat{j}y_n+\hat{j}z_n\right)}{m_1+m_2+.....m_n}$

L.H.S तथा **R.H.S** की तुलना करने पर आपको द्रव्यमान-केन्द्र के कार्तिय निर्देशांक प्राप्त हो जाते हैं ।

$$x_{cm}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+.........+m_nx_n}{m_1+m_2+.........m_n} \qquad ....(10.20)$$

$$y_{cm}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+.........+m_ny_n}{m_1+m_2+.........m_n} \qquad ....(10.21)$$

$$z_{cm}=\frac{m_1z_1+m_2z_2+.........+m_nz_n}{m_1+m_2+.........m_n} \qquad ....(10.22)$$

10.4.3 दृढ पिण्ड का द्रव्यमान-केन्द्र (Centre of mass rigid body)

जैसा कि आप जान चुके हो कि दृढ पिण्ड एक ऐसा बहु कणीय निकाय है जिसके अवयव कणों के बहु त पास-पास होने के कारण इनके बीच अन्तराल इतना कम होता है कि इसे सतत द्रव्यमान वितरण (Continuous distribution of mass) का निकाय माना जा सकता है तथा इसमें कणों के बीच की दूरियां बाहय बल लगाने पर अपरिवर्तित रहती हैं । सतत् द्रव्यमान वितरण होने के कारण द्रव्यमान-केन्द्र के सूत्रों में योग के चिन्ह को समाकलन (Integration) में बदल दिया जाता है । यदि पिण्ड के किसी अनन्त सूक्ष्म कण का द्रव्यमान dm तथा निर्देशांक (x,y,z) हो, तो पिण्ड के द्रव्यमान-केन्द्र के निर्देशांक (x_{cm},y_{cm},z_{cm}) निम्न सम्बन्ध से प्रदर्शित किये जाते है ।

$$x_{cm}=\frac{\int xdm}{M},\, y_{cm}=\frac{\int ydm}{M} \quad \text{तथा} \quad z_{cm}=\frac{\int zdm}{M} \qquad ....(10.23)$$

यहाँ समाकलन चरों की उचित सीमाओं को इस प्रकार लेते हैं कि वे यह समाकलन सम्पूर्ण पिण्ड के लिये हो। इसी प्रकार द्रव्यमान-केन्द्र का स्थिति सदिश निम्न रूप में लिखा जायेगा

$\vec{r}_{cm}=\dfrac{1}{M}\int\vec{r}dm,$ जहाँ $\vec{r}$ अनन्त सूक्ष्म कण का स्थिति सदिश है

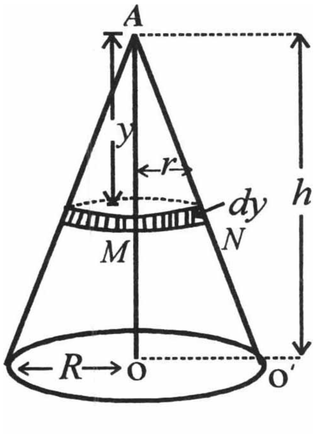
यहाँ ध्यान रखने योग्य है कि नियमित ज्यामितीय आकार के समांगी दृढ़ पिण्डों का द्रव्यमान-केन्द्र ऐसे बिन्दु पर स्थित होता है जिसके चारों और पिण्ड सममिति होता है उदाहारणर्थ घन, गोला, चकती, वलय, इत्यादि का द्रव्यमान-केन्द्र इनके ज्यामितीय केन्द्र पर स्थित होता है ।

10.4.4 कुछ नियमित दृढ पिण्डों के द्रव्यमान-केन्द्र की व्युत्पत्ति (Derivation of centre of mass of some regular rigid bodies)

इस शीर्षक में आप कुछ नियमित दृढ़ पिण्डों के द्रव्यमान-केन्द्र के स्थिति सदिश की व्युत्पत्ति का अध्ययन करेंगे जिनमें शंकु तथा अर्धगोलीय पिण्ड मुख्य हैं ।

(1) शंकु का द्रव्यमान-केन्द्र (Centre of mass of a cone)

चित्र 10.5 में एक शंकु (Cone) को प्रदर्शित किया गया है जिसका द्रव्यमान M, आधार त्रिज्या R व ऊँचाई h है । शंकु अक्ष AO के सापेक्ष सममिति है अत: इसका द्रव्यमान-केन्द्र इसी अक्ष पर कहीं स्थित होगा । आपको इस शंकु के द्रव्यमान-केन्द्र की स्थिति ज्ञात करनी है । इसके लिए आप शंकु को इसके आधार के समान्तर अनेक चकतियों से मिलकर बना मान सकते हैं । इन चकतियों की त्रिज्यायें O से R तक परिवर्तित होती है तथा इनके केन्द्र शंकु की सममिति अक्ष AO पर स्थित होते हैं । अब आप ऐसी ही एक चकती पर विचार करें जो कि शंकु के शीर्ष A से y दूरी पर स्थित है । इस विचाराधीन चकती की मोटाई dy व त्रिज्या r मान लीजिये । इस विचाराधीन चकती का आयतन (dV), $\pi r^2 dy$ के तुल्य होगा अत: इसका द्रव्यमान (dm) निम्न होगा-



चित्र 10.5

dm=$\pi r^2 dy \times$ शंकु के एकांक आयतन का द्रव्यमान (ρ)

यहाँ $$(\rho) = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 h} = \frac{3M}{\pi R^2 h}$$

अत: विचाराधीन चकती का द्रव्यमान dm $= \pi r^2 dy \left(\frac{3M}{\pi R^2 h}\right)$

या $$dm = \frac{3Mr^2 dy}{R^2 h} \qquad ....(10.24)$$

चित्र 10.5 की ज्यामिती से स्पष्ट है कि ΔAMN तथा $\Delta AOO'$ समरूप हैं अत:

$$\frac{r}{R} = \frac{y}{h} \text{ या } r = \frac{R}{h} y \qquad ....(10.25)$$

समी 10.25 से r का मान समी. 10.24 में रखने पर

$$dm = \frac{3M}{R^2 h}\frac{R^2}{h^2} y^2 dy = \frac{3My^2 dy}{h^3} \qquad ....(10.26)$$

यदि शंकु को ऐसा निकाय मानें जिसे दृढ़ पिण्ड कहा जा सकता हो तो इसका द्रव्यमान-केन्द्र का स्थिति सदिश $\vec{r}_{cm}$ निम्नानुसार ज्ञात किया जायेगा-

$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r} dm,$ यहाँ M शंकु का द्रव्यमान है ।

अत: शंकु के द्रव्यमान-केन्द्र की स्थिति (Y_{cm})

$$Y_{cm} = \frac{1}{M}\int y dm$$

यहाँ $\vec{r}_{cm}$ के स्थान पर Y_{cm} इस कारण से लिखा गया है कि शंकु की सममिति से यह निर्धारण किया जा सकता है कि इसका द्रव्यमान-केन्द्र AO या Y अक्ष पर ही स्थित होगा अत:

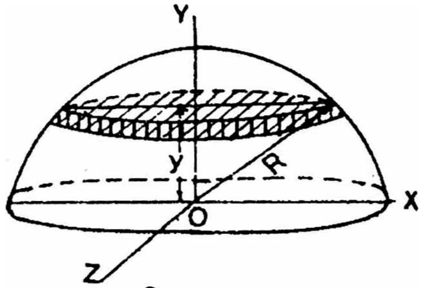
$$Y_{cm} = \frac{1}{M}\int_o^h y.\frac{3M}{h^3} y^2 dy \quad \text{या} \quad Y_{cm} = \frac{3}{h^3}\int_o^h y^3 dy = \frac{3}{h^3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^h$$

या $$Y_{cm} = \frac{3}{4h^3}.h^4 = \frac{3}{4}h$$ ....(10.27)

अत: शंकु के आधार से द्रव्यमान-केन्द्र की स्थिति (ऊँचाई) $= h - \frac{3}{4}h = \frac{h}{4}$

(2) अर्द्‌वगोलीय पिण्ड का द्रव्यमान-केन्द्र (Centre of mass of hemi spherical body)

चित्र 10.6 में एक अर्द्‌वगोलीय पिण्ड प्रदर्शित है जिसका द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है ।



चित्र 10.6

यह अर्द्‌वगोलीय पिण्ड Y- अक्ष के सापेक्ष सममिति है अत: इसका द्रव्यमान-केन्द्र Y- अक्ष पर ही कहीं स्थित होगा । आपको इस अर्द्‌वगोलीय पिण्ड के द्रव्यमान-केन्द्र की स्थिति ज्ञात करनी है । इसके लिए आप इस पिण्ड को इसके आधार के समान्तर अनेक चकतियों से मिलकर बना मान सकते हैं, जिनके केन्द्र Y- अक्ष पर स्थित होंगे । अब आप ऐसी ही एक चकती पर विचार करें जो कि पिण्ड के आधार से y दूरी पर है तथा जिसकी मोटाई dy है । इस विचाराधीन चकती का आयतन $\pi\left(R^2 - y^2\right) \times dy$ के तुल्य होगा (क्योंकि चकती की त्रिज्या $r = \sqrt{R^2 - y^2}$ होगी) । इस विचाराधीन चकती का द्रव्यमान dm निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है ।

$$dm = \pi\left(R^2 - y^2\right) \times dy \times \text{ अर्द्‌वगोलीय पिण्ड के एकांक आयतन का द्रव्यमान } (\rho)$$

यहाँ $$(\rho) = \frac{M}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{2\pi R^3}$$

अत: $$dm = \frac{\pi \times \left(R^2 - y^2\right)dy \times 3M}{2\pi R^3} = \frac{\left(R^2 - y^2\right)dy \times 3M}{2R^3}$$ ....(10.28)

यदि अर्द्‌वगोलीय पिण्ड को ऐसा निकाय मानें जिसे दृढ़ पिण्ड कहा जा सकता है तो इसके द्रव्यमान-केन्द्र का स्थिति सदिश $\vec{r}_{cm}$ निम्नानुसार ज्ञात किया जायेगा ।

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \vec{r}dm,$$ यहाँ M अर्द्‌वगोलीय पिण्ड का द्रव्यमान है ।

अत: अर्द्‌वगोलीय पिण्ड के द्रव्यमान-केन्द्र की स्थिति

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int ydm$$

यहाँ $\vec{r}_{cm}$ के स्थान पर Y_{cm} इस कारण से लिखा गया है कि अर्द्धगोलीय पिण्ड की सममिति से यह निर्धारण किया जा सकता है कि इसका द्रव्यमान-केन्द्र या Yअक्ष पर ही स्थित होगा । समी. 10.28 से dm का मान समी. 10.29 में रखने पर

अर्थात् $$Y_{cm} = \frac{1}{M}\int y \times \frac{3M\left(R^2 - y^2\right)dy}{2R^3}$$

या $$Y_{cm}=\frac{3}{2R^3}\int_O^R y\times\left(R^2-y^2\right)dy$$

या $$Y_{cm}=\frac{3}{2R^3}\int_O^R\left(R^2y-y^3\right)dy$$

या $$Y_{cm}=\frac{3}{2R^3}\left[\frac{1}{2}R^2y^2-\frac{y^4}{4}\right]_o^R$$

या $$Y_{cm}=\frac{3}{2R^3}\left[\frac{1}{2}R^2R^2-\frac{R^4}{4}\right]$$

या $$Y_{cm}=\frac{3}{8}R$$

अत: अर्द्धगोलीय पिण्ड का द्रव्यमान-केन्द्र आधार पर स्थित केन्द्र से $\frac{3}{8}R$ ऊँचाई पर स्थित होता है।

10.4.5 द्रव्यमान-केन्द्र की गति (Motion of centre of mass)

आप एक बहु कणीय निकाय पर विचार करें जिसमें कणों की संख्या n हैं जिनके द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots m_n$ हैं तथा एक निश्चित मूल बिन्दु O के सापेक्ष इनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \vec{r}_n$ हैं । मान लीजिये कि इन कणों पर आरोपित बाह्य बलों का मान $\overrightarrow{F_1'}, \overrightarrow{F_2'}, \overrightarrow{F_3'}, \ldots\ldots\overrightarrow{F_n'}$ है । समी 10.19 के अनुसार इस बहु कणीय निकाय के द्रव्यमान-केन्द्र का स्थिति सदिश $\vec{r}_{cm}$ का व्यंजक निम्न होगा-

$$\vec{r}_{cm}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\ldots\ldots\ldots+m_n\vec{r}_n}{M}$$

$\vec{r}_{cm}$ का समय के सापेक्ष अवकलन करने पर आप निम्न व्यंजक प्राप्त करेंगे-

$$\frac{d\overrightarrow{r_{cm}}}{dt}=\frac{1}{M}\left[m_1\frac{d\overrightarrow{r_1}}{dt}+m_2\frac{d\overrightarrow{r_2}}{dt}+\ldots\ldots\ldots m_n\frac{d\overrightarrow{r_n}}{dt}\right]$$

यहीं $\frac{d\overrightarrow{r_{cm}}}{dt}$ द्रव्यमान-केन्द्र के वेग को निरूपित करता है तथा $\frac{d\overrightarrow{r_1}}{dt}, \frac{d\overrightarrow{r_2}}{dt}, \ldots\ldots\frac{d\overrightarrow{r_n}}{dt}$ क्रमशः $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots\ldots m_n$ द्रव्यमान वाले कणों के मूल बिन्दु O के सापेक्ष वेग होंगे जिन्हें $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots\ldots\ldots\vec{v}_n$ से निरूपित किया जा सकता है । अत:

$$\overrightarrow{v_{cm}}=\frac{1}{M}\left(m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}+\ldots\ldots\ldots\ldots m_n\overrightarrow{v_n}\right)$$

या $$\overrightarrow{v_{cm}}=\frac{\sum_{i=l}^{i=n}m_i\overrightarrow{v_i}}{M} \qquad \ldots.(10.30)$$

यदि द्रव्यमान-केन्द्र मूल बिन्दु पर स्थित हो तो $\overrightarrow{v_{cm}}=0$ अत: समी 10.30 से

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + ...m_n\overrightarrow{v_n} = 0$$ ....(10.31)

यहाँ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, ...\vec{v}_n$ विभिन्न कणों के द्रव्यमान-केन्द्र के सापेक्ष वेग सदिश कहलायेंगे समी. 10.31 द्रव्यमान-केन्द्र के परितः कणों के रेखीय संवेगों के सदिश योग को व्यक्त करती है जिसका मान हमेशा शून्य होगा । अतः आप कह सकते हो कि द्रव्यमान-केन्द्र बिन्दु के सापेक्ष कण तंत्र के समस्त कणों का कुल रेखीय संवेग हमेशा शून्य होता है ।

अर्थात् $\sum_{i=l}^{i=n} m_i\overrightarrow{v_i'} = 0$ जहाँ $\vec{v}_i$ द्रव्यमान-केन्द्र के सापेक्ष i वे कण का वेग सदिश है ।

समी 10.30 का समय के साथ अवकलन करने पर द्रव्यमान-केन्द्र का त्वरण $\overrightarrow{\alpha_{CM}}$ ज्ञात किया जा सकता है । अर्थात्

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{v_{cm}} = \frac{1}{M}\left(m_1\frac{d\overrightarrow{v_1}}{dt} + m_2\frac{d\overrightarrow{v_2}}{dt} + ...m_n\frac{d\overrightarrow{v_n}}{dt}\right)$$

या $$\overrightarrow{\alpha_{cm}} = \frac{1}{M}\left(m_1\overrightarrow{a_1} + m_2\overrightarrow{a_2} + ...m_n\overrightarrow{a_n}\right)$$

या $$\overrightarrow{\alpha_{cm}} = \frac{1}{M}\sum_{i=l}^{i=n} m_i a_i$$ ....(10.32)

यहाँ $\sum_{i=l}^{i=n} m_i a_i$ निकाय के कणों पर लगने वाले कुल बल का व्यंजक है । ध्यान रहे कि इस व्यंजक में i वे कण का त्वरण $\overrightarrow{\alpha_1}$ है । किसी बहुकणीय निकाय के प्रत्येक कण पर शेष बचे कणों के द्वारा आन्तरिक बल भी कार्यरत होते हैं लेकिन न्यूटन की गति के तृतीय नियमानुसार निकाय के कणों के बीच लगने वाले कुल आन्तरिक बलों का योग शून्य होता है । अतः निकाय के कणों पर कार्यरत कुल बल $\sum_{i=l}^{i=n} m_i a_i$ उन पर कार्यरत कुल बाह्य बलों के मान के तुल्य होगा। अर्थात्

$$\sum_{i=l}^{i=n} m_i a_i = \vec{F}_{\text{बाह्य}} = F_1' + F_2' + F_3' + ...F_n'$$

समी 10.32 से

$$\overrightarrow{\alpha_{cm}} = \frac{1}{M}(\vec{F}_{\text{बाह्य}}) = \frac{F_1' + F_2' + F_3' + ...F_n'}{M}$$ ....(10.33)

अर्थात आप कह सकते हैं कि द्रव्यमान-केन्द्र का त्वरण, निकाय पर लगने वाले बाह्य बलों के सदिश योग में निकाय के कुल द्रव्यमान का भाग देने पर प्राप्त होता है । समी. 10.33 से स्पष्ट है कि किसी भी निकाय का द्रव्यमान-केन्द्र इस प्रकार गतिक व्यवहार करता है मानो कि निकाय का सम्पूर्ण द्रव्यमान उसी पर केन्द्रित हो तथा सभी बाहय बलों का परिणामी बल उसी पर कार्यरत हो ।

यदि निकाय पर कार्यरत बाहय बलों का परिणामी मान शून्य हो अर्थात् $\vec{F}_{\text{बाह्य}}$ का मान शून्य हो,

तो $\overrightarrow{\alpha_{cm}}$ = 0 अतः $\overrightarrow{v_{cm}}$ = नियत

अर्थात निकाय पर कार्यरत बाह्य बलों का सदिश योग शून्य हो तो द्रव्यमान-केन्द्र का वेग नियत रहता है । यदि प्रारम्भ में द्रव्यमान-केन्द्र विराम अवस्था में है, तो बाह्य बलो की अनुपस्थिति में द्रव्यमान-केन्द्र विराम अवस्था में ही रहेगा भले ही निकाय के विभिन्न कण अपनी स्थिति बदल लेते हों । यदि प्रारम्भ में द्रव्यमान-केन्द्र, किसी निश्चित दिशा में किसी चाल $\overrightarrow{v_{cm}}$ से गतिशील हो, तो बाह्य बल की अनुपस्थिति में द्रव्यमान-केन्द्र उसी चाल से उसी दिशा में गति करता रहेगा । यहाँ यह तथ्य उल्लेखनीय है कि द्रव्यमान-केन्द्र की स्थिति अथवा वेग आन्तरिक बलों के कारण कदापि परिवर्तित नही होते । ऐसा सिर्फ बाह्य बलों द्वारा ही सम्भव है । उदाहरण के रूप में आप किसी प्रक्षेप्य की गुरूत्वीय क्षेत्र के अन्तर्गत परवलय गति पर ध्यान केन्द्रित करें । यदि प्रक्षेप्य उड़ान के दौरान विस्फोटित हो जाता हो तो भी प्रक्षेप्य का द्रव्यमान-केन्द्र अविस्फोटित प्रक्षेप्य परवलय पथ के अनुदिश ही गति करता रहेगा । क्योंकि प्रक्षेप्य का विस्फोट आंतरिक बलों के कारण हुआ है । इसी प्रकार ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर गति करता कोई बम हवा में फट जाये तो उसके विभिन्न अवयव कण भले ही किसी अन्य पथ पर चलें लेकिन द्रव्यमान-केन्द्र ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर प्रारम्भिक पथ पर ही चलता रहेगा।

समी 10.30 से- $$M\overrightarrow{v_{cm}} = \sum_{i=l}^{i=n} m_i \vec{v}_i$$

अतः $$M\overrightarrow{v_{cm}} = m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + \text{..........} m_n\overrightarrow{v_n}$$

या $$M\overrightarrow{v_{cm}} = \vec{P}$$

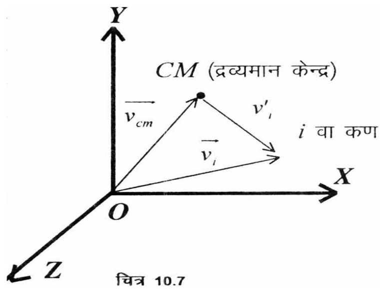
जहाँ $\vec{P}$ निकाय के कणों के रेखीय संवेगों का सदिश योग है

समी. 10.34 यह प्रदर्शित करनी है कि निकाय या कण तंत्र का कुल रेखीय संवेग, निकाय के कुल द्रव्यमान तथा द्रव्यमान-केन्द्र के वेग के गुणनफल के बराबर होता है ।

द्रव्यमान-केन्द्र का वेग $\overrightarrow{v_{cm}}$ शून्य होने निकाय के कणों का कुल रेखीय संवेग शून्य होगा, जबकि निकाय के कणों का वेग कुछ भी क्यों न हो ।

10.4.6 बहुकणीय निकाय की गतिज ऊर्जा (Kinetic Energy of a many particle system)

आप चित्र 10.7 में प्रदर्शित एक ऐसे बहुकणीय निकाय पर विचार केन्द्रित कीजिये जिसका द्रव्यमान-केन्द्र मूल बिन्दु O के सापेक्ष $\overrightarrow{v_{cm}}$ म वेग से गतिमान है । मान लीजिये कि मूल बिन्दु O के सापेक्ष इस निकाय के i वे कण (द्रव्यमान m) का वेग $\vec{v_i}$ है । अत: i वे कण की मूल बिन्दु O के सापेक्ष गतिज ऊर्जा E_{Ki} का मान निम्न होगा-



चित्र 10.7

$$E_{ki} = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i\left(\vec{v}_i, \vec{v}_i\right) \qquad \text{........(10.35)}$$

यदि i वे कण का द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष वेग सदिश $\vec{v}_i^{\,'}$ हो तो चित्र 10.7 की सदिश ज्यामिती से-

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i^{\,'} + \vec{v}_{cm} \qquad \text{.........(10.36)}$$

समी 10.36 का मान समी 10.35 में रखने पर

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i \left[\left(\vec{v}_i', \vec{v}_{cm} \right) \left(\vec{v}_i', \vec{v}_{cm} \right) \right]$$

या

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i \left[v_i'^2, v_{cm}^2 + 2 \left(\vec{v}_i', \vec{v}_{cm} \right) \right]$$

या

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{cm}^2 + m_i \left(\vec{v}_i', \vec{v}_{cm} \right) \quad \text{..........(10.37)}$$

कण तंत्र के समस्त कणों की गतिज ऊर्जा का योग ही कण तंत्र की कुल गतिज ऊर्जा का मान होता है अत: समी.

10.37 से

$$E_k = \sum_{i=l}^{i=n} E_{Ki} = \sum_{i=l}^{i=n} \frac{1}{2} m_1 v_i'^2 + \sum_{i=l}^{i=n} \frac{1}{2} m_1 v_{cm}'^2 + \sum_{i=l}^{i=n} m_1 \left(\vec{v}_i'.\vec{v}_{cm} \right) \quad \text{..........(10.38)}$$

या

$$E_k = \sum_{i=l}^{i=n} E_{Ki} = \sum_{i=l}^{i=n} \frac{1}{2} m_1 v_i'^2 + \frac{1}{2} v_{cm}^2 \sum_{i=l}^{i=n} m_i + \vec{v}_{cm}.\sum_{i=l}^{i=n} m_i \vec{v}_i' \quad \text{........(10.39)}$$

यहाँ समी 10.39 का अन्तिम पद द्रव्यमान-केन्द्र के सापेक्ष कण तंत्र के समस्त कणों का कुल रेखीय संवेग का मान है जो कि हमेशा शून्य होता है जिसके कारण अन्तिम पद शून्य हो जायेगा अत: समी 10.39 से

$$E_k = \sum_{i=l}^{i=n} \frac{1}{2} m_1 v_i'^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \quad \text{........(10.40)}$$

समी 10.40 में प्रथम पद द्रव्यमान-केन्द्र के सापेक्ष कण तंत्र के समस्त कणों की कुल गतिज ऊर्जा का मान व्यक्त करता है तथा द्वितीय पद द्रव्यमान-केन्द्र की स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा का मान है । इस प्रकार आप कह सकते हैं कि किसी बहुकणीय निकाय के गतिज ऊर्जा का मान उस तंत्र के द्रव्यमान-केन्द्र की स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा तथा द्रव्यमान-केन्द्र के सापेक्ष कण तंत्र के कणों की कुल गतिज ऊर्जा के योग के बराबर होती है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

2. समान द्रव्यमान वाले कणों के निकाय के द्रव्यमान-केन्द्र का स्थिति सदिश कहाँ होता है ?

. . . .

. . . .

उदाहरण 10.1 किसी कण तंत्र में 4 किग्रा., 8 किग्रा. तथा 2 किग्रा. द्रव्यमान के कण क्रमश: (2 ,2), (4,4) व (x,y) मीटर पर स्थित हैं । द्रव्यमान-केन्द्र की स्थिति (3,3) पर हो सकने के लिये (x,y) का मान ज्ञात कीजिये ।

हल : द्रव्यमान-केन्द्र के कार्तिय निर्देशांकों से आप जानते हैं कि यदि द्रव्यमान-केन्द्र के कार्तिय निर्देशांक (X_{cm} , Y_{cm}) हों तो

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad \text{या} \quad y_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

अत: $3 = \frac{4\times 2 + 8\times 4 + 2\times x}{14}$ या $42 = 8 + 32 + 2x$

या $2x = 42 - 40$ या $x = 1$ मीटर

इसी प्रकार $3 = \frac{4\times 2 + 8\times 4 + 2y}{14}$ या $2y = 2$

या $y = 1$ मीटर

अत: 2 किग्रा. का द्रव्यमान (1, 1) मीटर पर स्थित होगा ।

उदाहरण 10.2 एक 4 किग्रा. के पिण्ड का वेग $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ मीटर / सेकण्ड तथा 8 किग्रा. के एक पिण्ड का वेग $4\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$ मीटर / सेकण्ड है । इस द्विकण निकाय के द्रव्यमान-केन्द्र का वेग ज्ञात कीजिये ।

हल : जैसा कि आप 10.4.5 में जान चुके हो कि द्रव्यमान-केन्द्र का वेग $\overrightarrow{v_{cm}}$:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$ (समी। 10.30 से)

अत: $$\vec{v}_{cm} = \frac{4\left(2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}\right) + 8\left(4\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}\right)}{12}$$

$$= \frac{40\hat{i} + 60\hat{j} + 80\hat{k}}{12} = \frac{10}{3}\hat{i} + 5\hat{j} + \frac{20}{3}\hat{k}$$ मीटर / सेकण्ड

उदाहरण 10.3 यदि किसी स्थिर कण (द्रव्यमान m_2) से कोई अन्य कण (द्रव्यमान m_1) प्रत्यास्थ सीधी टक्कर के पश्चात् चिपक जाता हो तो टक्कर के पश्चात द्रव्यमान-केन्द्र निर्देश तन्त्र में संयुक्त कण का वेग परिकलित कीजिये ।

हल : मान लीजिये कि द्रव्यमान m_1 का कोई कण $\vec{u}_1$ वेग से द्रव्यमान m_2 के स्थिर कण से प्रत्यास्थ सीधी टक्कर करता है । इस निकाय के द्रव्यमान-केन्द्र का प्रयोगशाला निर्देश तन्त्र में वेग निम्न होगा-

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{u}_1}{m_1 + m_2} \qquad ....(10.47)$$

द्रव्यमान-केन्द्र निर्देश तन्त्र में द्रव्यमान m_1 वाले कण का वेग $\vec{u}_1^{\,'}$ (समी. 10.36 के अनुसार)-

$$\vec{u}_1^{\,'} = \vec{u}_1 - \vec{v}_{cm} = \vec{u}_1 - \frac{m_1\vec{u}_1}{m_1 + m_1} = \frac{m_1\vec{u}_1}{m_1 + m_1} \qquad ....(10.48)$$

इसी प्रकार द्रव्यमान-केन्द्र निर्देश तन्त्र में द्रव्यमान m_2 वाले कण का वेग $\vec{u}_2^{\,'}$-

$$\vec{u}_2^{\,'} = 0 - \vec{v}_{cm} = 0 - \frac{m_1\vec{u}_1}{m_1 + m_2} = -\frac{m_1\vec{u}_1}{m_1 + m_2} \qquad ....(10.49)$$

यदि द्रव्यमान-केन्द्र निर्देशतन्त्र में संयुक्त निकाय का वेग v' हो तो संवेग संरक्षण के नियम से

$$\left(m_1 + m_2\right)\vec{v}^{\,'} = m_1\vec{u}_1^{\,'} + m_2\vec{u}_2^{\,'} \qquad ....(10.50)$$

समी. 10.48 व समी. 10.49 से $\vec{u}_1^{'}$ तथा $\vec{u}_2^{'}$ के मान समी 10.50 में रखने पर R.H.S का मान शून्य प्राप्त होता है । अत: आप कह सकते हैं कि टक्कर से पूर्व द्रव्यमान-केन्द्र निर्देश तन्त्र में कणों का कुल संवेग शून्य है । चूँकि टक्कर के पश्चात दोनों कण चिपक जाते हैं अत: संयुक्त निकाय का टक्कर के पश्चात भी कुल संवेग द्रव्यमान-केन्द्र निर्देश तन्त्र में शून्य होगा अर्थात् टक्कर के पश्चात द्रव्यमान-केन्द्र निर्देश तन्त्र में संयुक्त निकाय स्थिर रहेगा ।

उदाहरण 10.4 दो कण जिनके वेग सदिश क्रमशः $\left(2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)$ तथा $\left(2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\right)$ मी / से. है, हि कण निकाय का निर्माण करते हैं । कणों के द्रव्यमान क्रमश: 1 किग्रा व 2 किग्रा है । कण तंत्र का द्रव्यमान-केन्द्र के सापेक्ष कुल रेखीय संवेग ज्ञात कीजिये ।

हल : कण तंत्र के द्रव्यमान-केन्द्र का वेग निम्न होगा-

$$\overrightarrow{v_{cm}} = \frac{1\left(2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)+2\left(2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\right)}{1+2} \quad \text{या} \quad \overrightarrow{v_{cm}} = \frac{6\hat{i}+10\hat{j}+14\hat{k}}{3}$$

यदि किसी i वे कण का द्रव्यमान-केन्द्र के सापेक्ष वेग $\vec{v}_1^{'}$ हो तथा मूल बिन्दु के सापेक्ष v_i हो तो समी. 10.36 से

$$\vec{v}_1^{'} = \vec{v}_i - \overrightarrow{v_{CM}}$$

$$\vec{v}_1^{'} = \left(2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\right) - \left(\frac{6\hat{i}+10\hat{j}+14\hat{k}}{3}\right) \quad \text{या} \quad \vec{v}_1^{'} = \frac{-4\hat{j}-8\hat{k}}{3}$$

इसी प्रकार

$$\vec{v}_2^{'} = \left(2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\right) - \left(\frac{6\hat{i}+10\hat{j}+14\hat{k}}{3}\right) \quad \text{या} \quad \vec{v}_1^{'} = \frac{2\hat{j}+4\hat{k}}{3}$$

अत: द्रव्यमान-केन्द्र के सापेक्ष कणों का कुल रेखीय संवेग-

$$\vec{P} = m_1\overrightarrow{v_1^{'}} + m_2\overrightarrow{v_2^{'}}$$

$$= 1\times\left(\frac{-4\hat{j}-8\hat{k}}{3}\right) + 2\left(\frac{2\hat{j}+4\hat{k}}{3}\right) = 0$$

या $\vec{P} = 0$

10.5 परिक्रमण गति (Rotatory motion)

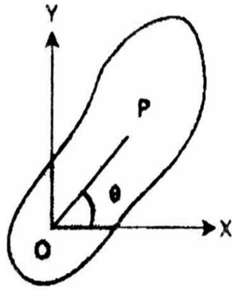
आपने छत के पंखे की गति, लट्टू का अपने स्थान पर नाचना, गतिपालक चक्र की गति इत्यादि का अनुभव अपने दैनिक जीवन में अवश्य किया होगा । यदि आप अपना ध्यान इनकी गति की ओर केन्द्रित करें तो आप पायेंगे कि इन सभी में दृढ़ पिण्ड अथवा निकाय किसी स्थिर अक्ष के चारों ओर घूमता है । ऐसी गति को आप परिक्रमण या घूर्णन गति कहेंगे । पिछली इकाईयों में आप किसी वस्तु की ऐसी गति के बारे में पढ़ चुके हैं जिसमें उसका प्रत्येक कण किसी दिये गये समय में समान दूरी तथा समान दिशा में विस्थापित होता है । ऐसी गति को स्थानान्तरीय गति कहा जाता है । घूर्णन गति में पिण्ड के सभी कण समान अथवा भिन्न-भिन्न त्रिज्याओं के वृत्तीय पथों पर परिक्रमण करते हैं । इन सभी तृतीय पथों के केन्द्र इनके तल के लम्बवत् एक अभीष्ट सीधी रेखा पर होते हैं जिसे घूर्णन अक्ष (Axis of rotation) कहा जाता है । घूर्णन अक्ष पर स्थित सभी कण स्थिरावस्था में रहते हैं

। जो कण घूर्णन अक्ष से कम दूरी पर होते हैं उनके पथों की त्रिज्या कम तथा जो घूर्णन अक्ष से अधिक दूरी पर होते हैं उनके पथों की त्रिज्या अधिक होती है लेकिन सभी कण अपना वृत्तीय पथ समान समय में पूरा करेंगे ।

यहाँ अब हम घूर्णन या परिक्रमण गति के विभिन्नों चरों (Variabls) का अध्ययन करेंगे ।

10.5.1 कोणीय विस्थापन (Angular displacement)

किसी दी गई अक्ष के सापेक्ष घूर्णन गति करते पिण्ड द्वारा निर्देश रेखा (reference line) से तय किया गया कोण पिण्ड का कोणीय विस्थापन कहलाता है । सामान्यत: कोणीय विस्थापन को θ से व्यक्त किया जाता है । चित्र 10.8 में एक दृढ़ वस्तु का X- अक्ष से कोणीय विस्थापन θ को प्रदर्शित किया गया है ।



चित्र 10.8

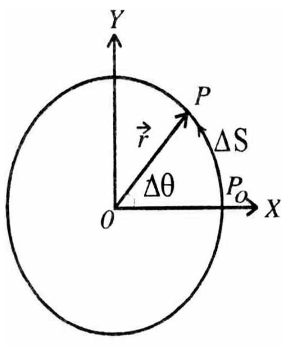
अत्यल्प कोणीय विस्थापन $\left(\overrightarrow{d\theta}\right)$ एक अक्षीय सदिश राशि होती है जबकि अधिक कोणीय विस्थापन एक अदिश राशि होती है । आप प्रथम इकाई में पढ़ चुके हैं कि सदिश राशि होने के लिए क्रम विनियम नियम (commutative law) का पालन होना आवश्यक है लेकिन अधिक कोणीय विस्थापन कम विनिमय नियम का पालन नहीं करता अर्थात्

$\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 \neq \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$ ($\vec{\theta}$ अधिक कोणीय विस्थापन)

$\overrightarrow{d\theta}_1 + \overrightarrow{d\theta}_2 = \overrightarrow{d\theta}_2 + \overrightarrow{d\theta}_1$ ($\overrightarrow{d\theta}$ अल्प कोणीय विस्थापन)

अत: अधिक कोणीय विस्थापन अदिश राशि होगी ।

जैसा कि आप पूर्व में भी समझ चुके हो किसी दृढ़ वस्तु का कोणीय विस्थापन निकालने के लिए आप उसके किसी एक कण का कोणीय विस्थापन निकाल लीजिये । यही दृढ़ पिण्ड का भी कोणीय विस्थापन होगा । किसी दृढ़ पिण्ड के सभी कण अपना वृत्तीय पथ समान समय में पूरा करते हैं अर्थात् एक निश्चित समयान्तराल में प्रत्येक कण का कोणीय विस्थापन समान होता है इस प्रकार आप कह सकते हो कि दृढ़ पिण्ड के किसी एक कण की घूर्णन गति सम्पूर्ण दृढ़ पिण्ड की घूर्णन गति को निरूपित कर सकती है ।



चित्र 10.9

चित्र 10.9 के अनुसार आप एक ऐसे दृढ़ पिण्ड पर विचार केन्द्रित करें जो कि अपने किसी बिन्दु O से होकर जाने वाली घूर्णन अक्ष Z(कागज के तल के लम्बवत) के परितः वामावर्त घूर्णन कर रहा है । इस पिण्ड के विभिन्न कणों के वृत्तीय पथ कागज के तल (X-Y) में होंगे । अब आप पिण्ड में घूर्णन अक्ष में r दूरी पर स्थित किसी कण p पर विचार करे जो कि r त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर गति करेगा । जब यह धनात्मक X अक्ष से कण p को $\Delta\theta$ कोणीय स्थिति तक पहुंचने में वृत्तीय पथ पर ΔS दूरी तय करनी पड़ती हो तो कण का कोणीय विस्थापन (θ)

$$\Delta\theta = \frac{\Delta S}{r} \qquad \text{.........} (10.41)$$

कोणीय विस्थापन का S.I मात्रक रेडियन है ।

10.5.2 कोणीय वेग (Angular velocity)

किसी दृढ़ पिण्ड के कोणीय विस्थापन में समय के सापेक्ष परिवर्तन की दर को कोणीय वेग कहा जाता है । यह एक अक्षीय सदिश राशि होती है । इसकी दिशा घूर्णन तल के लम्बवत् घूर्णन अक्ष के अनुदिश ली जाती है जिसे दाँये हाथ के अंगूठे के नियम से ज्ञात करते हैं । घूर्णन अक्ष को दाहिने हाथ से पकड़ने पर यदि अंगुलियाँ घूर्णन की दिशा में हो तो अंगूठा कोणीय वेग की दिशा निरुपित करेगा। सामान्यत: इसे ω से निरूपित किया जाता है । कोणीय वेग का S.I मात्रक रेडियन / सेकण्ड है ।

यदि किसी पिण्ड में विचाराधीन कोई कण, Δt समयान्तराल में $\Delta\theta$ से विस्थापित होता हो तो इस समयान्तराल में कण का औसत कोणीय वेग (ω_{av}) का मान निम्न होगा

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \text{........(10.42)}$$

यदि किसी निश्चित क्षण पर तात्क्षणिक कोणीय वेग (ω) ज्ञात करना हो तो इसे निम्न प्रकार लिखना होगा

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right) = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{........(10.43)}$$

यहाँ ध्यान रखने योग्य है कि तात्क्षणिक कोणीय वेग उसी अवस्था में निकाल सकते हैं कि जब आपको यह ज्ञात हो कि कोणीय विस्थापन θ का समय t के साथ क्या सम्बन्ध है । साथ ही ध्यान रहे कि घूर्णन गति करते पिण्ड के समस्त कणों का कोणीय वेग का मान एक समान होता है तथा यही दृढ़ पिण्ड का कोणीय वेग होता है ।

10.5.3 कोणीय त्वरण (Angular acceleration)

घूर्णन गति करते हु ये पिण्ड का घूर्णन अक्ष के परितः कोणीय वेग यदि समय के साथ परिवर्तित होता है तो इसे त्वरित घूर्णन गति कहा जाता है । समय के सापेक्ष कोणीय वेग में परिवर्तन की दर को पिण्ड का कोणीय त्वरण कहते हैं । सामान्यत: इसे α से प्रदर्शित किया जाता है । यह एक अक्षीय सदिश राशि होती है । कोणीय त्वरण का S.I मात्रक रेडियन / सेकण्ड^2 तथा इसकी विमा ($M^0L^0T^{-2}$) होती है । जिस प्रकार घूर्णन करते हु ये पिण्ड के समस्त कणों का कोणीय विस्थापन तथा कोणीय वेग के मान एक समान होते हैं, उसी प्रकार घूर्णन करते पिण्ड में उसके समस्त कणों के कोणीय त्वरण के मान भी समान होंगे ।

यदि किसी दृढ़ पिण्ड का Δt समयान्तराल में कोणीय वेग परिवर्तन $\Delta\omega$ हो तो पिण्ड का औसत कोणीय त्वरण (α_{av})

$$a_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ रेडियन / सेकण्ड}^2 \qquad \text{.........(10.44)}$$

जबकि किसी क्षण (t) पर इसका तात्क्षणिक त्वरण (α)

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right) = \frac{d\omega}{dt} \qquad \text{.......(10.45)}$$

समी. (10.26) में $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ रखने पर $\alpha = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right) = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ .... (10.46)

यदि पिण्ड नियत दर से घूर्णन गति कर रहा होता है तो उसके लिये औसत कोणीय त्वरण तथा तात्क्षणिक कोणीय त्वरण का मान समान होगा ।

उदाहरण 10.5 यदि कोई कण एक वृत्त की परिधि पर 10 चक्कर पूरे करता है तो इसका कोणीय विस्थापन कितना होगा?

हल: कोणीय विस्थापन $\theta = 2\pi n;$ जहाँ n चक्करों की संख्या है ।

अत: कोणीय विस्थापन $\theta = 2\pi \times 10 = 20\pi$ रेडियन

उदाहरण 10.6 यदि किसी दृढ़ पिण्ड के कोणीय विस्थापन θ तथा समय t में सम्बन्ध $\theta = 10 - 6t^2 + 5t^4$ से दिया जाता हो तो t = 2sec पर पिण्ड का तात्क्षणिक कोणीय वेग ज्ञात करो?

हल: कोणीय वेग $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(10 - 6t^2 + 5t^4\right) = -1\square\square 2t + 20t^3$

अत: t = 2sec पर कोणीय वेग $\omega_{t=2} = -12 \times 2 + 20 + 2^3 = -24 + 160 = 136$ रेडियन / सेकण्ड ।

10.6 दृढ पिण्ड की घूर्णन गति (Rotational motion of a rigid body)

जैसा कि अनुच्छेद 10.4 में आप अध्ययन कर चुके हो कि कोई भी वस्तु अनेक कणों से मिलकर बनी हुई मानी जा सकती है । यदि वस्तु पर बह्य बल या बलाघूर्ण आरोपित करने पर उसके अवयव कणो के मध्य आपेक्षिक दूरियाँ परिवर्तित नही होती हों तो ऐसी वस्तु को दृढ़ पिण्ड कहा जाता है । वास्तव में प्रकृति में कोई भी वस्तु आदर्श दृढ़ पिण्ड की श्रेणी मैं नही आती । प्रायोगिक रूप से आप पत्थर, स्टील, लकड़ी इत्यादि को दृढ़ पिण्ड की संज्ञा दे सकते हैं । एक दृढ़ पिण्ड स्थानान्तरीय अथवा घूर्णन दोनों प्रकार की गति कर सकता है । किसी दृढ़ पिण्ड की स्थानान्तरीय गति में उसके सभी अवयव कणों के रेखीय विस्थापन, रेखीय वेग तथा रेखीय कण समान रहते है तथा वे परस्पर समानान्तर पथ में गति करते हैं । यदि दृढ़ पिण्ड की गति घूर्णन गति हो तो उसमें निम्न अभिलाक्षणिक गुण पाये जाते हैं-

(i) दृढ़ पिण्ड की घूर्णन गति में उसके सभी अवयव कण वृत्ताकार पथों में गति करते हैं । इन वृत्ताकार पथों की त्रिज्याऐं समान अथवा भिन्न-2 हो सकती हैं । सभी वृत्तीय पथों के केन्द्र इनके तल के लम्बवत् एक अभीष्ट सीधी रेखा पर होते हैं जिसे घूर्णन अक्ष कहा जाता है ।

(ii) घूर्णन अक्ष पर स्थित सभी कण विरामावस्था में रहते हैं

(iii) घूर्णन करते दृढ़ पिण्ड के सभी कणों का कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग तथा कोणीय त्वरण तो एक समान होते हैं लेकिन उनके रेखीय विस्थापन, रेखीय वेग तथा रेखीय त्वरण अलग-अलग होते हैं । (इसके बारे में आप अनुच्छेद 10.5 में विस्तृत अध्ययन कर चुके हैं) ।

(iv) घूर्णन कर रही कोई भी वस्तु अपनी घूर्णन अवस्था में किसी भी प्रकार के परिवर्तन का विरोध करती है इस विरोध का माप जड़त्व आघूर्ण कहलाता है ।

10.7 सारांश (Summary)

- द्रव्यमान केन्द्र- किसी भौतिक निकाय से सम्बद्ध ऐसा बिन्दु किस पर कण तंत्र के समस्त कणों का सम्पूर्ण द्रव्यमान इसकी स्थानान्तरीय गति के अध्ययन के लिये प्रभावी रूप से केन्द्रीय हुआ माना जा सकता है ।
- द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष कण तंत्र के समस्त कणों का कुल द्रव्यमान आघूर्ण तथा कुल रेखीय संवेग हमेशा शून्य होता है ।
- द्रव्यमान केन्द्र की स्थिति निकाय के कणों की सापेक्ष स्थितियों, उनके द्रव्यमानों एव द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करती है ।
- द्रव्यमान -केन्द्र की गति हमेशा स्थानान्तरीय होती है ।
- द्विकण तंत्र - दो कणों का ऐसा निकाय जो पारस्परिक बलों के प्रभाव में गति करता है । इस निकाय की गति को एक कण की गति में समानीत द्रव्यमान द्वारा बदला जा सकता है ।
- शंकु के द्रव्यमान-केन्द्र की स्थिती- h ऊँचाई के सममिति शंकु का द्रव्यमान-केन्द्र इसकी सममिति अक्ष पर आधार से h/4 ऊँचाई पर स्थित होता है ।
- अर्द्धगोलीय पिण्ड का द्रव्यमान-केन्द्र - R त्रिज्या के किसी सममिति अर्द्धगोलीय पिण्ड का द्रव्यमान-केन्द्र इसकी सममिति अक्ष पर आधार से 3/8 R ऊँचाई पर स्थित होता है ।
- किसी बहुकणीय निकाय की गतिज ऊर्जा का मान उस तन्त्र के द्रव्यमान-केन्द्र की स्थानान्तरित गतिज ऊर्जा तथा द्रव्यमान-केन्द्र के सापेक्ष कण तंत्र के कणों की कुल गतिज ऊर्जा के योग के बराबर होती है ।
- दृढ़ पिण्ड की परिक्रमण गति-दृढ़ पिण्ड अथवा निकाय का किसी स्थिर अक्ष के चारों ओर घूमने को इसकी परिक्रमण या घूर्णन गति कहा जाता है ।

10.8 शब्दावली (Glossary)

घूर्णन गति	Rotatory motion
घूर्णन	Rotation
द्विपरमाणविक	Diatomic
दृढ़ पिण्ड	Rigid body
द्रव्यमान-केन्द्र	Centre of mass
समानीत द्रव्यामन	Reduced mass

10.9 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1.	D.S.Mathur	Mechanics	S.Chand & Co., New Delhi
2.	Berkley	Mechanics	New York
3.	Ghose	Mechanics	Shiv Lal & Co., Agra
4.	B.K.Agrawal & P.C.Agrawal	Mechanics	Sahitya Bhawan, Agra
5.	जगदीश चन्द्र उपाध्याय	नवीन यांत्रिकी	रामप्रसाद एण्ड सन्स, आगरा

6. के. के. सरकार-आर. एन. शर्मा	यांत्रिकी	साहित्य भवन, आगरा

10.10 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment Questions)

1. द्रव्यमान m वाले कण से 2r/3 दूरी पर
2. $\vec{r}_{cm} = \dfrac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + ... + \vec{r}_n}{n}$

10.11 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. क्या द्रव्यमान-केन्द्र बिन्दु पर भौतिक रूप से कोई द्रव्यमान उपस्थित होना आवश्यक है?
2. क्या द्रव्यमान-केन्द्र निर्देश तन्त्र की स्थिति पर निर्भर करता है?
3. यदि कण तंत्र के द्रव्यमान-केन्द्र का वेग शून्य हो तो क्या उसके अवयव कणों के वेग आवश्यक रूप से शून्य होंगे?
4. किसी कण तंत्र के कणों के बीच लगने वाले आंतरिक बल के कारण क्या द्रव्यमान-केन्द्र की स्थिति अपना वेग परिवर्तित हो सकता है?
5. सिद्ध करो कि यदि कण तंत्र का कुल रेखीय संवेग संरक्षित है तो उसका द्रव्यमान-केन्द्र या तो स्थिर है या फिर नियत वेग से गतिशील है ।
6. किसी पिण्ड की परिक्रमण गति की मुख्य विशेषताऐं लिखिए ।

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

7. द्रव्यमान-केन्द्र क्या होता है? किसी बहुकणीय निकाय के द्रव्यमान-केन्द्र के स्थिति सदिश तथा वेग सदिश के लिये व्यंजक प्राप्त कीजिये ।
8. सिद्ध कीजिये कि द्रव्यमान-केन्द्र निर्देश तन्त्र के सापेक्ष कण तन्त्र के कणों का कुल द्रव्यमान आघूर्ण तथा कुल रेखीय संवेग हमेशा शून्य होता है ।
9. सिद्ध कीजिये कि बहुकणीय निकाय की कुल गतिज ऊर्जा का मान-उस तंत्र के द्रव्यमान-केन्द्र की स्थानान्तरित गतिज ऊर्जा तथा द्रव्यमान-केन्द्र के सापेक्ष कण तंत्र के कणों की कुल गतिज ऊर्जा के योग के बराबर होती है ।
10. समानीत द्रव्यमान क्या होता है । समानीत द्रव्यमान की विचारधारा से किस प्रकार किसी द्विकण समस्या को एकल कण की समस्या में परिवर्तित किया जा सकता है ।
11. किसी सममिति शंकु के द्रव्यमान-केन्द्र की स्थिति का व्यंजक प्राप्त कीजिये ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

12. 2,4 व 6 ग्राम द्रव्यमान के तीन कण क्रमश: (0,0,0), (2,-2,-4) तथा (3,-3,3)ए पर स्थित है । कण तंत्र के द्रव्यमान-केन्द्र का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिये ।

(उत्तर: $\vec{r}_{cm} = \frac{26}{12}\hat{i} - \frac{26}{12}\hat{j} + \frac{2}{12}\hat{k}$ **)**

13. एक बम $10\hat{i}+2\hat{j}$ मीटर / सेकण्ड के वेग से गतिशील है । यह आन्तरिक बलों के कारण दो भागों में विस्फोटित हो जाता है । यदि छोटे भाग (द्रव्यमान M) का वेग $20\hat{i}+50\hat{j}$ मीटर / सेकण्ड हो तो बडे भाग (द्रव्यमान 3M) का वेग क्या होगा? इन दोनों भागों के द्रव्यमान-केन्द्र निर्देश तंत्र में वेग ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर:** $\frac{1}{3}\left(20\hat{i}-42\hat{j}\right)$ मीटर / सेकण्ड, $\left(10\hat{i}+48\hat{j}\right)$ मीटर/सेकण्ड, $\left(\frac{-10\hat{i}-48\hat{j}}{3}\right)$ मीटर / सेकण्ड)

14. दो कणों A तथा B प्रारम्भ में स्थिरावस्था में एक दूसरे से r दूरी पर स्थित है । अन्योन्य क्रिया के कारण ये कण एक दूसरे की ओर गति करने लगते हैं । किसी क्षण पर जब कण की चाल v है तो B की चाल 2v प्राप्त होती है । इस अवस्था में निकाय के द्रव्यमान-केन्द्र की चाल क्या होगी । कण A तथा B के द्रव्यमानों का अनुपात भी ज्ञात कीजिये।

(**उत्तर:** शून्य, 2:1)

15. विराम अवस्था में 2 रेडियन / सेकण्ड^2 के कोणीय त्वरण से एक पहिया घूर्णन गति प्रारम्भ करता है । कितने समय में यह 16 घूर्णन पूरे कर लेगा ।

(**उत्तर:** $t=\sqrt{32\pi}$ सेकण्ड)

16. एक घड़ी की (i) मिनट की सुई (ii) घण्टे की सुई की कोणीय चाल परिकलित कीजिये ।

(**उत्तर:** 1.74×10^{-3} रेडियन / सेकण्ड, 1.45×10^{-4} रेडियन / सेकण्ड)

इकाई-11

जड़त्व आघूर्ण-I
(Moment of Inertia-I)

इकाई की रूपरेखा

11.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप

- जड़त्व आघूर्ण की अवधारणा के साथ साथ आप इसके भौतिक महत्व को उदाहरणों सहित समझ सकेंगे;
- परिक्रमण त्रिज्या या घूर्णन त्रिज्या की संकल्पना कुछ विशिष्ट उदाहरणों सहित समझ सकेंगे;
- किसी घूर्णन गति करते हुए पिण्ड की गति के समीकरण के साथ साथ जड़त्वीय गुणांकों का अध्ययन एवं महत्व समझ सकेंगे;
- जड़त्व आघूर्ण की लम्बवत् तथा समान्तर अक्षों की प्रमेय के कथनों के साथ साथ इनकी उत्पत्ति भी कर सकेंगे ।

11.1 प्रस्तावना (Introduction)

वस्तु का यह गुण जिसके कारण वह अवस्था को स्वत: नहीं बदल सकती जड़त्व (Inertia) कहलाता है । जड़त्व किसी भी द्रव्य का मूल स्वाभाविक गुण है । जड़त्व के कारण ही कोई भी वस्तु उस बाहरी बल का विरोध करती है जो कि उसकी स्थिर अथवा समान रेखिक गति की अवस्था को

बदलने का प्रयत्न करता है । दिये गये बाह्य बल के लिए अलग-अलग वस्तुओं की विरोध करने की क्षमता भी अलग-अलग होती है । विरोध करने की यह क्षमता वस्तुओं में उनके द्रव्यमान से उत्पन्न होती है । अत: आप कह सकते हैं कि किसी वस्तु का द्रव्यमान उसके जड़त्व का गुणक होता है । इसी प्रकार यदि कोई वस्तु किसी अक्ष के चारों और घूमने के लिए स्वतंत्र हो तो वह अपनी समान रूप से घूर्णन की या विराम की अवस्था के परिवर्तन का विरोध करती है । घूर्णन गति में अवस्था परिवर्तन के विरोध करने वाले कारक को घूर्णन अक्ष के प्रति वस्तु का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) कहा जाता है । इस इकाई के अनुच्छेद 11.2 में आप जड़त्व आघूर्ण की संकल्पना का विवेचनात्मक अध्ययन करेंगे । अनुच्छेद 11.3 में घूर्णन त्रिज्या के बारे में, अनुच्छेद 11.4 में पिण्ड की गति का समीकरण एव अनुच्छेद 11.5 में जड़त्व आघूर्ण प्रमेयों का अध्ययन करेंगे ।

11.2 जड़त्व आघूर्ण की अवधारणा तथा इसका भौतिक महत्व (Concept of moment of inertia and its physical significance)

न्यूटन के गति के नियम घूर्णन गति में भी लागू होते हैं । जिस प्रकार कोई पिण्ड रेखीय गति में अपनी अवस्था (विराम अथवा गति) को स्वत: बदलने में असमर्थ होता है (जड़त्व का नियम) उसी प्रकार से **प्रत्येक पिण्ड अपनी घूर्णन अवस्था को स्वत: बदलने में असमर्थ होता है ।** घूर्णन गति में पिण्ड के इस गुण को जड़त्व आघूर्ण या घूर्णन जड़त्व (Rotational Inertia) कहते हैं । जड़त्व आघूर्ण के कारण यदि कोई वस्तु किसी घूर्णन अक्ष के परितः स्थिर है, तो वह स्थिर ही रहेगी और यदि वह किसी घूर्णन अक्ष के परितः एक नियत कोणीयचाल से घूम रही है, तो उस अक्ष के परितः उसी कोणीय चाल से घूमती रहेगी जब तक कि उस पर कोई बाह्य बल-आघूर्ण न लगाया जाये । जैसा कि आप जानते हो कि रेखीय गति में किसी वस्तु का द्रव्यमान अधिक होने पर उसकी स्थिति में परिवर्तन करने के लिये (दिये गये त्वरण के लिये) अधिक बल लगाना पड़ता है उसी प्रकार घूर्णन गति में वस्तु का जड़त्व आघूर्ण जितना अधिक होता है, उसकी कोणीय स्थिति में परिवर्तन करने के लिये (दिये गये कोणीय त्वरण के लिये) उतने ही अधिक बल आघूर्ण लगाने की आवश्यकता होती है । इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि घूर्णन गति में अवस्था परिवर्तन की असमर्थता का मापन ही पिण्ड या वस्तु का जड़त्व आघूर्ण होगा अर्थात् किसी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण उसके घूर्णन जड़त्व का गुणांक होता है । यही जड़त्व आघूर्ण का भौतिक महत्व है । जड़त्व आघूर्ण को से निरूपित किया जाता है । इस प्रकार यह स्पष्ट है कि जो कार्य रेखीय गति में द्रव्यमान (m) करता है, वही कार्य घूर्णन गति में जड़त्व आघूर्ण (I) करता है ।

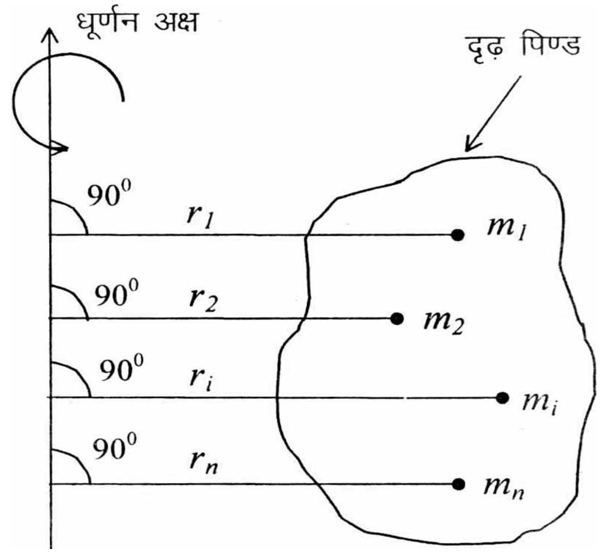
दैनिक जीवन में आप देखते हो कि मोटर कार, स्कूटर, रिक्शा, बच्चों के खिलौने, साइकिल आदि में पहिये का जड़त्व आघूर्ण बढाने के लिये पहियों का अधिकांश द्रव्यमान उनके रिमों पर स्थित कर दिया जाता है तथा रिम एवं पहिये की अक्ष का सम्बन्ध तानों (spokes) आदि की सहायता से कर दिया जाता है । पहिये के जड़त्व आघूर्ण अधिक होने के कारण ही जब आप साइकिल के पैडिल पर पैर चलाना बंद कर देते है तो भी कुछ दूरी तक अथवा कुछ समय तक साइकिल के पहिये घूमते रहते हैं ।

11.2.1 जड़त्व आघूर्ण का गणितीय व्यंजक (Mathematical expression of moment of inertia)

पिण्ड या वस्तु के किसी कण का दी गई घूर्णन अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण (I), उस कण के द्रव्यमान (m) तथा कण की घूर्णन अक्ष से लम्बवत् दूरी के वर्ग (r^2) के गुणनफल के बराबर होता है ।

अर्थात् $= mr^2$ .....(11.1)

जबकि किसी दृढ पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण उसके सभी अवयव कणों का घूर्णन अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्णो का बीजगणतीय योग के तुल्य होता है । चित्र 11.1 के अनुसार घूर्णन करते किसी पिण्ड के कणों के द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, \ldots\ldots m_n$ तथा घूर्णन अक्ष से इनकी लम्बवत् दूरियां क्रमशः r_1,



चित्र 11.1

$r_2 \ldots\ldots\ldots r_n$ हो तो घूर्णन अक्ष के परितः इन कणों के जड़त्व आघूर्ण क्रमशः $m_1 r^2_1, m_2 r^2_2, \ldots\ldots\ldots m_n r_n^2$, होंगे । अतः पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण-

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots m_n r_n^2,$$

या $$i = \sum_{i=l}^{i=n} m_i r_i^2 \qquad \ldots\ldots(11.2)$$

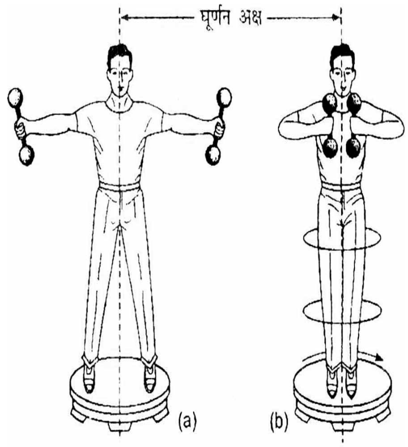
11.2.2 जड़त्व आघूर्ण के मुख्य तथ्य (Main Features of Moment of Inertia)

(i) जड़त्व आघूर्ण का S.I मात्रक किग्रा-मीटर^2 है ।

(ii) जड़त्व आघूर्ण प्रदिश राशि (Tensor) है लेकिन किसी निश्चित घूर्णन अक्ष के लिये यह एक अदिश राशि के रूप में प्रदर्शित होती है ।

(iii) वस्तु या पिण्ड के लिये जड़त्व आघूर्ण का मान घूर्णन अक्ष पर निर्भर करता है । घूर्णन अक्ष परिवर्तित होने पर जड़त्व आघूर्ण परिवर्तित हो जाता है । (उदाहरण 11.1 देखें)

(iv) किसी निश्चित अक्ष के लिये पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण का मान उसके द्रव्यमान आकृति एवं आकार पर निर्भर करता है । इसी प्रकार दी गई आकृत्ति, आकार, द्रव्यमान तथा घूर्णन अक्ष के लिये जड़त्व आघूर्ण का मान पिण्ड के द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करता है । पिण्ड का घूर्णन अक्ष से जितना अधिक द्रव्यमान का वितरण होगा,उतना ही अधिक जड़त्व आघूर्ण का मान होगा । प्रदर्शित चित्र 11.2 में एक व्यक्ति जिसके हाथों में भारी डम्बल है एवं भुजायें तथा टांगे फैली हुई है, यदि अपनी भुजाओं तथा टांगो को सिकोड लेता है तो डम्बल तथा टांगों की घूर्णन अक्ष से दूरी कम हो जाने पर निकाय का जड़त्व आघूर्ण कम हो जाता है ।



चित्र 11.2

(v) जड़त्व आघूर्ण का मान कोणीयवेग (ω), कोणीयत्वरण (α), बल आघूर्ण (ι) तथा कोणीयसंवेग (J) पर निर्भर नहीं करता ।

बोध प्रश्न (Self aeessment questions)

1. समान रूप से वितरित द्रव्यमान वाले कर तार का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है । इसके तल के लम्बवत् तथा केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये ।

. . . .

. . . .

2. जड़त्व तथा जड़त्व आघूर्ण में अन्तर स्पष्ट कीजिये ।

. . . .

. . . .

3. यदि एक चकती का ढालकर गोले में परिवर्तित कर दिया जाता हो तो उसके जड़त्व तथा जड़त्व आघूर्ण में क्या परिवर्तन होगा ।

. . . .

. . . .

4. समान घनत्व के ठोस गोलों का जड़त्व आघूर्ण उनकी त्रिज्या पर किस प्रकार निर्भर करता है ।

. . . .

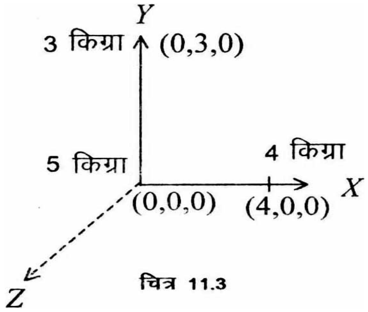
. . . .

5. समान द्रव्यमान एवं मोटाई की दो चकतियों के पदार्थ अलग अलग हैं । दी गई घूर्णन अक्ष के लिए कम घनत्व वाली चकती का जड़त्व आघूर्ण अधिक होगा या अधिक घनत्व वाली का ।

. . . .

. . . .

उदाहरण 11.1 चित्र 11.3 में प्रदर्शित निकाय का जड़त्व आघूर्ण क्रमश: X,Y एवं Z अक्ष के सापेक्ष ज्ञात करो ।



चित्र 11.3

हल:

$$I_x = 0 + 3\times\left(3^2\right) + 0 = 27 \text{ किग्रा-मी}^2$$

$$I_y = 4\times\left(4^2\right) + 0 + 0 = 64 \text{ किग्रा-मी}^2$$

$$I_z = 3\times\left(3^2\right) + 4\times\left(4^2\right) + 0 = 91 \text{ किग्रा-मी}^2$$

इस उदाहरण से आप समझ सकते हो कि घूर्णन अक्ष बदलने पर जड़त्व आघूर्ण का मान बदल जाता है ।

11.3 घूर्णन त्रिज्या (Radius of gyration)

समी. 11.2 से जैसा कि आप देख चुके हैं कि किसी पिण्ड का दी गयी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण निकालने के लिये पिण्ड के समस्त बिन्दु कणों का जड़त्व आघूर्ण निकालकर उनका योग करना पडता है जो कि व्यावहारिक नहीं होता अत: इसके लिए घूर्णन त्रिज्या की संकल्पना का उपयोग किया जाता है । दी गयी घूर्णन अक्ष के परितः किसी पिण्ड की घूर्णन त्रिज्या (K), घूर्णन अक्ष से वह लम्बवत् दूरी है, जिसके वर्ग (K2) को पिण्ड के द्रव्यमान से गुणा करने पर जड़त्व आघूर्ण का वही मान होता है जो कि पिण्ड के द्रव्यमान के वास्तविक वितरण के लिये उस घूर्णन अक्ष के परितः है अर्थात-

$$\left(\sum m_i\right)K^2 = \sum_{i-=1}^{i=n} m_i r_i^2 \qquad ...(11.3)$$

या $$K = \sqrt{\frac{m_1 r_1^{\,2} + m_2 r_2^{\,2} + ... + m_n r_n^{\,2}}{m_1 + m_1 + ... + m_n}}$$

यदि वस्तु संमागी (Homogeneous) है तथा समान द्रव्यमान के n कणों से मिलकर बनी है, तो वस्तु का कुल द्रव्यमान M = m.n, अत:

$$K = \sqrt{\frac{m\left(r_1^{\,2} + ... + r_n^{\,2}\right)}{m.n}}$$

या $$K = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 .... + r_n^2}{n}} \qquad ...(11.4)$$

अर्थात समांगी वस्तु जिसके कण समान द्रव्यमान के हो, की घूर्णन त्रिज्या समस्त कणों की घूर्णन अक्ष से वर्ग माध्य मूल दूरी के तुल्य होती है ।

घूर्णन त्रिज्या (K) घूर्णन अक्ष की स्थिति एवं इसके सापेक्ष द्रव्यमान वितरण पर निर्भर करती है, लेकिन वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती । यह सभी कोणीय भौतिक राशियों पर भी निर्भर नहीं करती है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

6. किसी वलय तथा चकती के उनके ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष घूर्णन त्रिज्या परिकलित कीजिये ।

   ....

   ....

7. बिना किसी बल आघूर्ण आरोपित करे एक वस्तु का कोणीय वेग एक चक्कर प्रति 16 सेकण्ड से बादल कर एक चक्कर प्रति सेकण्ड हो जाता है । इन दो स्थितियों में वस्तु की घूर्णन त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिये ।

   ....

   ....

उदाहरण 11.2 किसी M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या की घूमती हुई वलय की परिधि से एक अल्प द्रव्यमान (m) टूटकर अलग हो जाता है । द्रव्यमान के अलग होने के बाद घूर्णन त्रिज्या में क्या परिवर्तन होगा।

हल : द्रव्यमान (m) के वलय से अलग होने से पूर्व यदि ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष वलय की घूर्णन त्रिज्या K हो तो-

$$MK^2 = MR^2 \text{ या } \qquad K = \pm R$$

वलय की परिधि से m द्रव्यमान के अलग होने पर वलय का द्रव्यमान (M-m) रह जायेगा । इस अवस्था में इसका ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (M-mR^2) होगा । अब यदि घूर्णन त्रिज्या K' हो जाती हो तो

$$(M-m)K'^2 - = (m-m)R^2 \text{ या } K' = \pm R$$

जिससे यह स्पष्ट है कि घूर्णन त्रिज्या अपरिवर्तित रहेगी ।

उदाहरण 11.3 किसी M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या की घूमती हुई चकती की परिधि पर एक अल्प द्रव्यमान (m) रख दिया जाता है । चकती की घूर्णन त्रिज्या में क्या परिवर्तन होगा ।

हल: द्रव्यमान (m) के चकती से जुडाव से पूर्व यदि ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष चकती की घूर्णन त्रिज्या K हो तो-

$$MK^2 = \frac{MR^2}{2} \text{ या } K = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}$$

चकती की परिधि पर (m) द्रव्यमान के जुडने से इसका द्रव्यमान (M+m) हो जायेगा । इस अवस्था में

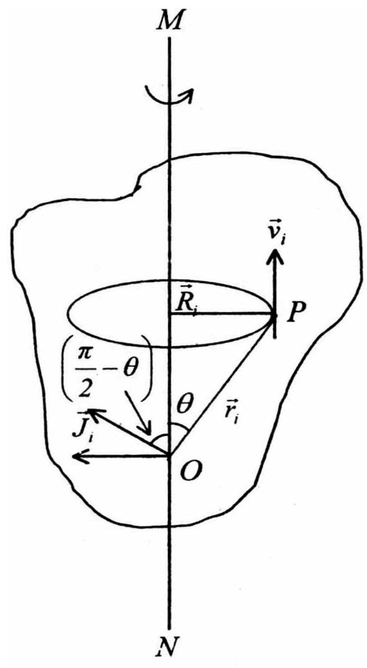
चकती का उसकी ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $\frac{MR^2}{2}+mR^2$ होगा I अत: अब यदि घूर्णन त्रिज्या K' हो जाती हो तो

$$(M+m)K'^2\frac{MR^2}{2}+mR^2 \quad \text{या} \quad (M+m)K'^2(M+2m)\frac{R^2}{2}$$

या $$K'=\pm\left(\sqrt{\frac{M+2m}{M+m}}\right)\frac{R}{\sqrt{2}} \quad \text{या} \quad K'=\pm\left(\sqrt{\frac{M+2m}{M+m}}\right)K$$

जिससे स्पष्ट है कि K' का मान K से अधिक है अर्थात् घूमती हु यी चकती की परिधि पर m द्रव्यमान के कण के जुडाव से घूर्णन त्रिज्या का मान बढ़ जाता है ।

11.4 घूर्णन करते दृढ़ पिण्ड की गति का समीकरण (Equation of motion of a rotating rigid body)



चित्र 11.4

चित्र 11.4 में प्रदर्शित एक ऐसे दृढ़ पिण्ड पर विचार केन्द्रित कीजिये जो कि एक स्थिर बिन्दु O में होकर जाती हुई अक्ष MN के सापेक्ष ω कोणीय वेग से घूर्णन कर रहा है । यहाँ कोणीय वेग $\vec{\omega}$ की दिशा घूर्णन अक्ष MN - अक्ष के अनुदिश है ।

पिण्ड के बिन्दु P पर स्थित i वें कण का द्रव्यमान m_i रेखीय वेग $\vec{v_i}$ तथा O के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{r_i}$ है । जैसा कि आप जानते हैं कि घूर्णन गति में पिण्ड का प्रत्येक कण वृत्ताकार गति करता है जिसका कोणीय वेग पिण्ड के कोणीय वेग के ही बराबर होता है अत: कण P भी MN- अक्ष के सापेक्ष ω कोणीय वेग से वृत्ताकार गति करेगा जिसकी त्रिज्या R_i मानी गई है ।

इस कण का रेखीय वेग $\vec{v_i}=\vec{\omega}\times\vec{r_i}$ से निरूपित होता है । यदि θ, $\vec{\omega}$ तथा $\vec{r}$ के बीच का कोण हो तो

$$\vec{v_1}=\omega(r_i\sin\theta)=\omega R_i\text{, क्योंकि } r_i\sin\theta=R_i$$

इस कण का बिन्दु O के सापेक्ष कोणीय संवेग $\vec{j_i}$ का मान निम्न होगा -

$$\vec{j_i}=\vec{r_i}\times\vec{p_i}=\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i=m_i\left[\vec{r}_i\times\left(\vec{\omega}\times\vec{v}_i\right)\right] \quad \text{....(11.5)}$$

समी 11.5 के अनुसार कोणीय संवेग $\vec{j}_i$ की दिशा $\vec{r}_i$ तथा $\vec{v}_i$ के लम्ब रूप होगी । चूंकि $\vec{r}_i$ तथा $\vec{v}_i$ परस्पर लम्ब रूप हैं अत: कोणीय संवेग का परिमाण $\left|\vec{j}_i\right|$ $m_ir_iv_i$ के बराबर होगा

तथा इसकी दिशा घूर्णन अक्ष से $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ कोण बनायेगी जैसा कि चित्र 11.4 में प्रदर्शित है । अतः घूर्णन अक्ष MN पर कोणीय संवेग $\vec{j}_i$ का घटक $\vec{j}_{iz}$ निम्न होगा-

$$j_{iz} = (m_i r_i v_i)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = (m_i r_i v_i)\sin\theta$$

या $$j_{iz} = m_i(r_i \sin\theta)v_i = m_i R_i v_i = m_i R_i \omega R_i = m_i R_i^2 \omega \qquad ....(11.6)$$

क्योंकि $r_i \sin\theta = R_i$ तथा $\vec{v} = \omega(r_i \sin\theta) = \omega R_i$

चूंकि समी 11.6 दृढ़ पिण्ड के एक कण P (द्रव्यमान= m) का घूर्णन अक्ष MN की दिशा में कोणीय संवेग के घटक का मान देती है, अतः पूरे निकाय या दृढ़ पिण्ड के कणों का घूर्णन अक्ष MN के सापेक्ष कोणीय संवेगों के घटकों का योग $\vec{j}_z$ निम्न होगा-

$$\vec{j}_z = \vec{j}_{1z} + \vec{j}_{2z} .... \vec{j}_{iz} + ... \vec{j}_{nz}$$

या $$\vec{j}_z = \sum_{i=1}^{i=n} J_{iz} \sum_{i=1}^{i=n}\left(m_i R_i^2\right)\vec{\omega} \qquad ....(11.7)$$

समी 11.7 में प्राप्त पद $\sum_{i=1}^{i=n}\left(m_i R_i^2\right)$, घूर्णन अक्ष MN के सापेक्ष दृढ़ पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण (I) का मान होता है अतः समी 11.7 से

$$\vec{j}_z = I\vec{\omega} \qquad ... (11.8)$$

यदि दृढ़ पिण्ड के लिए घूर्णन अक्ष उसकी सममिति अक्ष है तो घूर्णन अक्ष के एक ओर स्थित बिन्दुओं का घूर्णन अक्ष MN के लम्बवत् कोणीय संवेग घटकों का सदिश योग इसके विपरीत दिशा में स्थित बिन्दुओं का घूर्णन अक्ष के लम्बवत् कोणीय संवेग घटकों के सदिश योग द्वारा संतुलित हो जायेगा । इस प्रकार दृढ़ पिण्ड का परिणामी कोणीय संवेग $\vec{j}$ घूर्णन अक्ष की ही दिशा में होगा । अर्थात्

$$\vec{j} = I\vec{\omega} \qquad ...(11.9)$$

जैसा कि आप पूर्व इकाईयों में अध्ययन कर चुके हो कि यदि वस्तु सममिति अक्ष के सापेक्ष घूर्णन करती है तो कोणीय संवेग परिवर्तन की दर उस पर लगाये गये कुल बाहय बल आघूर्ण के तुल्य होती है अर्थात्

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d}{dt}\left(\vec{j}\right) \qquad ..... (11.10)$$

समी. 11.9 से $\vec{j}$ का मान समी 11.10 में रखने पर

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d}{dt}\left(I\vec{\omega}\right) = I\frac{d}{dt}\vec{\omega} = I\vec{\alpha} \qquad ...(11.10)$$

जहाँ $\vec{\alpha} = I\frac{d}{dt}\vec{\omega}$ पिण्ड का कोणीय त्वरण कहलाता है

समी 11.11 किसी दृढ़ पिण्ड के लिए घूर्णन गति का समीकरण कहलाता है ।

यदि किसी अवस्था में घूर्णन अक्ष सममिति अक्ष के अनुदिश नहीं हो तो

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d}{dt}\left(\vec{j_z}\right)\frac{d}{dt}\left(I\vec{\omega}\right) = I\frac{d}{dt}\vec{\omega} \qquad ....(11.12)$$

इस प्रकार दृढ़ पिण्ड के लिए घूर्णन गति समीकरण से स्पष्ट है कि यदि $\vec{\tau}_{ext}$ का मान शून्य हो तो $I\frac{d}{dt}\vec{\omega}$ भी शून्य होगा तथा $\vec{\omega}$ का मान नियत होगा अर्थात आप कह सकते हो कि बाहय बल आघूर्ण की अनुपस्थिति में दृढ़ पिण्ड का घूर्णन अक्ष के प्रति कोणीय वेग का मान नियत रहता है । यहाँ ध्यान रखने योग्य है कि यदि निकाय का जड़त्व आघूर्ण (I)परिवर्तनशील हो तो बाहय बल आघूर्ण की अनुपस्थिति में कोणीय वेग $\vec{\omega}$ का मान I के घटने पर बड़ेगा तथा I के बड़ने पर घटेगा । ऐसा इस कारण होता है कि $\vec{\tau}_{ext}$ का मान शून्य होने पर $I\vec{\omega}$ का मान नियत रहेगा (समी 11.12 से यह स्पष्ट हो रहा है)

$$\vec{\tau}_{ext} = 0 \text{ तो } I\vec{\omega} = \text{नियत}$$

$$I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2 \qquad ..... (11.13)$$

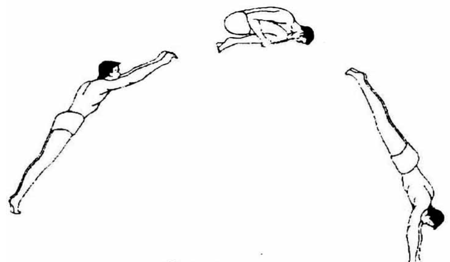
समी 11.13 को कोणीय संवेग संरक्षण का नियम कहा जाता है ।

उपरोक्त अध्ययन से आप निम्न निष्कर्षो पर पहुँचते हो-

(i) किसी अक्ष के प्रति घूर्णन कर रहे दृढ़ पिण्ड के लिए कोणीय संवेग परिवर्तन की दर बाहय बल आघूर्ण के बराबर होती है ।

(ii) घूर्णन कर रहे दृढ़ पिण्ड के कोणीय संवेग का परिमाण व दिशा में परिवर्तन सिर्फ बाहय बल आघूर्ण आरोपित करने पर ही सम्भव है । बाहय बल आघूर्णो की अनुपस्थिति में कोणीय संवेग परिमाण तथा दिशा दोनों में नियत रहता है (अर्थात् $\vec{j} = I\vec{\omega} =$ नियत) । यदि इस अवस्था में I परिवर्तनशील है तो $\vec{\omega}$ इस प्रकार परिवर्तित होगा जिससे कि $\vec{j}$ का मान नियत बना रहे ।

उदाहरणार्थ चित्र 11 .5 के अनुसार जब कोई तैराक ऊपर से जल में कूदता हे तो वह कूदने की किया में सीधे कूदने की बजाय अपने शरीर को मोडकर जड़त्व आघूर्ण को कम कर लेता है । यही बाह्य बल आघूर्ण शून्य है फलस्वरूप $I\omega$ के नियत रहने के कारण उसका कोणीय वेग ω का मान बढ जाता है । जल में गिरने से कुछ क्षण पहले वह अपने शरीर को पुन: सीधा कर लेता है जिससे बढ जाता है, तदानुसार ω घट जाता है । इसी प्रकार चित्र 11.6 के अनुसार बर्फ पर स्केटिंग करने वाले तथा नर्तक हाथों को सिकोड कर अथवा फैलाकर अपने शरीर से गुजरने वाली घूर्णन अक्ष के परित: घूर्णन गति अधिक या कम कर लेते हैं ।

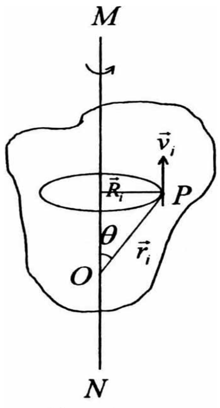


चित्र 11.5

चित्र 11.6

जड़त्वीय गुणांक (Inertial coefficients)

चित्र 11.7 में प्रदर्शित एक ऐसे दृढ़ पिण्ड पर विचार केन्द्रित कीजिये जो कि एक स्थिर बिन्दु O में होकर जाती हुई अक्ष MN के सापेक्ष ω कोणीय वेग से घूर्णन कर रहा है।



चित्र 11.7

पिण्ड के बिन्दु P पर स्थित i कण का द्रव्यमान m_i रेखीय वेग $\vec{v_i}$ तथा O के सापेक्ष स्थिति सदिश $\vec{r_i}$ है। निर्देशांक अक्षों पर स्थिति सदिश $\vec{\omega}$ तथा कोणीय वेग सदिश $\vec{\omega}$ को निम्न रूप में लिखा जा सकता है-

$$\vec{r_i} = \hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i$$

तथा $$\hat{\omega} = \hat{i}\,\omega_x + \hat{j}\,\omega_y + \hat{k}\omega_z$$

चूँकि i वें कण के रेखीय वेग का मान $\vec{v_i} = \vec{\omega} \times \vec{r_i}$ होता है अतः इसका O के सापेक्ष कोणीय संवेग

$$\vec{j} = \vec{r_i} \times \vec{p_i} = \vec{r_i} \times m_i \vec{v_i} = m_i\left[\vec{r_i} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r_i}\right)\right] \qquad \text{..... (11.14)}$$

अतः पूरे दृढ़ पिण्ड का O के सापेक्ष कोणीय संवेग

$$\vec{j} = \sum \vec{j_i} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[\vec{r_i} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r_i}\right)\right] \qquad \text{....(11.15)}$$

क्योंकि $$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A}.\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$$

अतः $$\vec{r} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r_i}\right) = \omega\left(\vec{r_i}.\vec{r_i}\right) - \vec{r_i}\left(\vec{r_i}.\vec{\omega}\right) = \omega r_i^2 - \vec{r_i}\left(\vec{r_i}.\vec{\omega}\right) \qquad \text{...(11.16)}$$

समी. 11.15 व समी. 11.16 से

$$\vec{j} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[\vec{\omega}\vec{r_i} - \vec{r_i}\left(\vec{\omega}.\vec{r_i}\right)\right] \qquad \text{...(11.17}$$

समी. 11.16 को आप घटकों के रूप में भी लिख सकते हैं-

$$j_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[\vec{\omega}_x \vec{r_i} - \vec{x_i}\left(\vec{\omega}.\vec{r_i}\right)\right]$$

या $$j_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[\vec{\omega}_x r^2{}_i - \vec{x_i}\left(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z\right)\right]$$

या $$j_x = \sum_{i=1}^{i=n}\left[\left\{m_i\left(r_i^2 - x_i^2\right)\omega_x\right\} - m_i x_i y_i \omega_y - m_i x_i z_i \omega_z\right] \qquad \text{...(11.18)}$$

इसी प्रकार $$j_y = \sum_{i=1}^{i=n}\left[-m_i x_i y_i \omega_x + \left\{m_i\left(r_i^2 - y_i^2\right)\omega\right\} - m_i z_i \omega_z\right]$$

तथा $$j_z = \sum_{i=1}^{i=n}\left[-m_i x_i y_i \omega_x - m_i y_i z_i \omega_x + \left\{m_i\left(r_1^2 - z_1^2\right)\right\}\omega_z\right] \qquad \text{.... (11.19)}$$

समी. 11.18,11.19 व 11.20 को क्रमशः निम्न रूप में लिखा जा सकता है-

$$j_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xy}\omega_z \qquad \text{...(11.21)}$$

$$j_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega \qquad \text{...(11.22)}$$

$$j_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \qquad \text{...(11.23)}$$

जहाँ $I_{xx}=\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(r_i^2-x_i^2\right), I_{yy}=\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(r_i^2-y_i^2\right), I_{zz}=\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(r_i^2-z_i^2\right)$

तथा $I_{xx}=Iyx=-\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i y_i, I_{xz}=I_{zx}\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i z_i, I_{yz}=I_{zy}\sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i z_i$

समी. 11.21,11.22 व 11.23 को मैट्रिक्स रूप में लिखा जा सकता है।

$$\begin{bmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} I_{xy} I_{xz} \\ I_{yx} I_{yy} I_{yz} \\ I_{zx} I_{zy} I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

यहाँ $I_{xx}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yx}, I_{yy}, I_{yz}, I_{zx}, I_{zy}, I_{zz}$ पिण्ड के जड़त्वीय गुणांक कहलाते हैं ।

ये 9 जड़त्वीय गुणांक एक द्वितीय कोटि टेंसर (second rank tensor) के घटक हैं । इस टेंसर को जड़त्व आघूर्ण टेंसर कहते हैं । चूँकि इस टेंसर के लिए I_{xy} = I_{yx}, I_{xz} = I_{zx} तथा I_{yz} =I_{zy} सत्य होता है अत: यह एक सममिति टेंसर (Symmetric tensor) है ।

यह टेंसर कोणीय संवेग सदिश $\vec{j}$ तथा कोणीय वेग सदिश $\vec{\omega}$ में संबन्ध स्थापित करता है ।

यदि उपरोक्त मेट्रिक्स के विकर्ण पदों (diagonal elements) पर ध्यान केन्द्रित करें तो यह पाया जाता है कि-

$$I_{xx}=\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(r_i^2-x_i^2\right)=\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i^2+y_i^2+z_i^2-x_i^2\right)=\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(y_i^2-z_i^2\right)$$

$$I_{yy}=\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i^2+z_i^2\right) \text{ तथा } I_{zz}=\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left(x_i^2+y_i^2\right)$$

यहाँ यह स्पष्ट है कि I_{xx} के पद में $\left(y_i^2+z_i^2\right)$,i कण की X- अक्ष से दूरी है अत: यह दृढ़ पिण्ड का X - अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण कहलायेगा । इसी प्रकार I_{yy} तथा I_{zz} पिण्ड के क्रमश: Y-अक्ष तथा Z- अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण कहलायेंगे ।

जैसा कि आप पढ़ चुके हो कि कोणीय संवेग सदिश $\vec{j}$ की दिशा सदैव घूर्णन अक्ष या कोणीय वेग सदिश $\vec{\omega}$ की दिशा में नहीं होती है । परन्तु ऐसा भी सम्भव है कि किसी भी आकार के दृढ़ पिण्ड के लिए तीन अभिलम्बीय अक्ष या दिशायें ऐसी हो सकती हैं जिनके लिए कोणीय संवेग सदिश $\vec{j}$ तथा कोणीय वेग सदिश $\vec{\omega}$ सम्पाती हों । ये अक्षें जड़त्व आघूर्ण की मुख्य अक्षें जड़त्व आघूर्ण (principal axes) कहलाती हैं ।

इस अवस्था में $I_{xy}=I_{yx}=I_{yz}=I_{zy}=I_{zx}=I_{xz}=0$ होगा अत:

$$j_x I_{xx}\omega_x, \qquad j_y I_{yy}\omega_x, \qquad j_z I_{zz}\omega_z$$

इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि जब कभी पिण्ड जड़त्व आघूर्ण के मुख्य अक्ष पर घूर्णन करती है तो $\vec{j}$ तथा $\vec{\omega}$ परस्पर समान्तर होते हैं तथा इस अवस्था में $\vec{j}=I\vec{\omega}$ सत्य होगा जहाँ I पिण्ड का मुख्य जड़त्व आघूर्ण अर्थात मुख्य अक्ष के सापेक्ष पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

8. यदि पृथ्वी के ध्रुवों पर स्थित समस्त बर्फ पिघल जाये तो दिन की अवधि पर क्या प्रभाव पड़ेगा ।

....

....

9. यदि द्रव्यमान को नियत रखते हुए पृथ्वी की त्रिज्या आधी कर दी जावे तो दिन की अवधि क्या हो जायेगी ।

....

....

10. यदि कोई बच्चा झूले पर झूल रहा है जिसके पैरों का पृथ्वी से कोई सम्पर्क नहीं है यदि बच्चा झूले पर खड़ा हो जाता हो तो झूले के कोणीय वेग पर क्या प्रभाव होगा।

....

....

11. किसी लकडी की छड़ के एक सिरे पर धागा बाँध कर धागे के दूसरे सिरे पर बंधे किसी पत्थर के छोटे टुकडे को घुमाया जा रहा है । यदि इसे रोक दिया जाये तो धागा लकडी पर लपेटने लगता है तथा उसका वेग लगातार बढ़ता जाता है । कारण स्पष्ट करें ।

....

....

12. यदि कोई असममिति वस्तु घूर्णन अक्ष पर घूर्णन कर रही हो तो क्या उसका कोणीय संवेग संरक्षित रहेगा ।

....

....

उदाहरण 11.4 - एक वलय जिसका द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है, कोणीय वेग ω से अपने केन्द्र से परित: ऊर्ध्वाधर अक्ष के सापेक्ष घूर्णन कर रही है । m द्रव्यमान के दो छोटे मोम के टुकडे धीरे से उसके व्यास के दोनों सिरों पर चिपका दिये जाते हों तो वलय का कोणीय वेग क्या होगा ।

हल: कोणीय संवेग संरक्षण से $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

जहाँ $(I_1\omega_1)$ तथा $(I_2\omega_2)$ वलय के जड़त्व आघूर्ण तथा कोणीय वेग मोम के टुकड़े चिपकाने से पूर्व तथा पश्चात् है ।

यहाँ $I_1 = MR^2, \omega_1 = \omega$

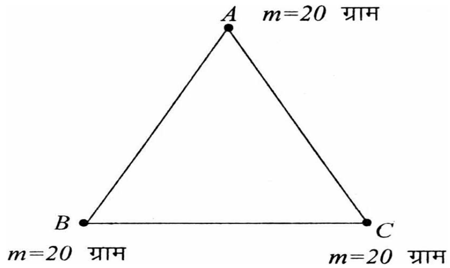
$$I_2 = MR^2 + mR^2 + mR^2 = (M+2m)R^2$$

$$\omega_2 = ?$$

अतः $(MR^2)\omega = (M+2m)R^2.\omega_2$

या $\omega_2 = \dfrac{MR^2\omega}{(M+2m)R^2}$ या $\omega_2 = \dfrac{M.\omega}{M+2m}$

उदाहरण 11.5 तीन कण जिनमें प्रत्येक का द्रव्यमान 20 ग्राम है, एक समबाहु त्रिभुज के तीनों कोनों पर स्थित है। यदि त्रिभुज के प्रत्येक भुजा की लम्बाई 10 सेमी हो तो इस निकाय का त्रिभुज के एक कोने से गुजरने वाली तथा त्रिभुज के तल के लम्बवत् अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण की गणना कीजिये। हल: संलग्न चित्र 11.8 में एक समबाहु त्रिभुज प्रदर्शित है जिसके प्रत्येक कोने पर 20 ग्राम द्रव्यमान के बिन्दु कण रखे हैं। त्रिभुज की प्रत्येक भुजा की लम्बाई 10 सेमी है। मान लीजिये कि आपको कोने



चित्र 11.8

A से गुजरने वाली तथा कागज के तल के लम्बवत् अक्ष के परित: इस तंत्र का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है। स्पष्ट है कि कोने A पर रखे कण की इससे गुजरने वाली लम्बवत् अक्ष से दूरी शून्य होगी जबकि कोने B तथा C पर रखे कणों की इससे दूरियाँ 10 सेमी होंगी अत: कोने A से गुजरने वाली लम्बवत अक्ष के सापेक्ष निकाय का जड़त्व आघूर्ण (I)

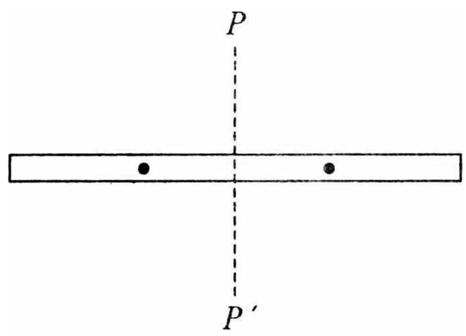
$$I = \sum mr^2$$

$$= 20\times(0)^2\ 20\times(10)^2 + 20\times(10)^2$$

=0+2000+2000

=4000 ग्राम × सेमी^{2}

उदाहरण 11.6 एक भारहीन छड़ अक्ष PP’ के परित: घूमने के लिये स्वतंत्र है। 2 किग्रा. के दो समान द्रव्यमान घूर्णन अक्ष PP' से 0.40 मीटर की समान दूरी पर रखे हैं। 1.0 न्यूटन-मीटर का बलाघूर्ण लगाने से निकाय PP' के परित: घूमता है। निकाय का कोणीय त्वरण ज्ञात कीजिये।



चित्र 11.9

हल : प्रत्येक द्रव्यमान का घूर्णन अक्ष PP' के परित: जड़त्व आघूर्ण

I_0 = द्रव्यमान × (घूर्णन अक्ष से दूरी)^2

या $I_0 = 2\times(0.40)^2 = 0.32$ किग्रा. - मीटर^2

अत: सम्पूर्ण निकाय का PP’ के परित: जड़त्व आघूर्ण

$I_0 = 2\times(0.40)^2 = 0.32$ किग्रा. - मीटर^2

(यहाँ छड़ चूंकि भारहीन है, अत: इसका कोई जड़त्व आघूर्ण नहीं होगा)

यदि निकाय पर बल आघूर्ण τ लगाने से उत्पन्न कोणीय त्वरण α होता हो तो

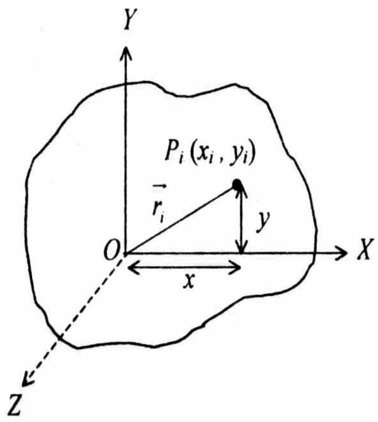
$$\tau = I.\alpha$$

अतः $$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{1.0}{0.64} = 1.56 \text{ रेडियन / सेकण्ड}$$

11.5 जड़त्व आघूर्ण प्रमेय (Theorems of moment of inertia)

गणितीय विधि से उस अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण का परिकलन सबसे सरल होता है जिसके परितः पिण्ड के द्रव्यमान का वितरण सममिति हो । परन्तु हमें ऐसी अक्षों के परितः भी जड़त्व आघूर्ण की गणना करनी होती है जिसके सापेक्ष द्रव्यमान का वितरण सममिति न हो । ऐसी अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण की गणना में आने वाली कठिनाई के निवारण हेतु दो प्रमेय प्रतिपादित की गई हैं जिन्हें क्रमशः लम्बवत् अक्षों की प्रमेय तथा समान्तर अक्षों की प्रमेय कहा जाता है । इस शीर्षक में आप इन प्रमेयों के कथन, उपपत्ति तथा इनके उपयोग का अध्ययन करेंगे ।

11.5.1 लम्बवत् अक्षों की प्रमेय (Theorem of perpendicular axes)



चित्र 11.10

इस प्रमेय के अनुसार किसी वस्तु या समतल पटल का उसके तल के लम्बवत् किसी अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण का मान तल में ही उपस्थित अन्य दो परस्पर लम्बवत् अक्षों के सापेक्ष जड़त्व आघूर्णी के योग के तुल्य होता है जबकि तीनो अक्ष एक ही कटान बिन्दु से गुजरती हैं ।

चित्र 11.10 के अनुसार यदि X, Y समतल पटल के तल में Z स्थित है तथा Z तल के लम्बवत् गुजरने वाली अक्ष हों तथा तीनों का कटान बिन्दु O हो तो लम्बवत् अक्षों की प्रमेय के अनुसार

$$I_z = I_x + I_y$$

जहाँ $I_x I_y$ एवम् I_z क्रमशः X, Y एवम् Z के सापेक्ष पटल के जड़त्व आघूर्ण हैं

उपपत्ति (Proof)

चित्र 11.10 में प्रदर्शित एक समतल पटल-पर विचार कीजिए जो कि n कणों से मिलकर बना है जिनके द्रव्यमान क्रमशः $m_1, m_2, ...m_{1,} ......m_n$ हैं । कणों की Z से लम्बवत् दूरियां क्रमशः $r_1, r_{2,} ....r_i ......r_n$ हैं तथा X व Y अक्षों से लम्बवत् दूरियां क्रमशः $y_1 y_{2,} ......y_i, ...y_n$ तथा $x_{2,} ......x_i, ...y_n$ हैं ।

X अक्ष के सापेक्ष समतल पटल का कुल जड़त्व आघूर्ण (I_x) अलग-अलग कणों के X अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्णी के योग के तुल्य होगा अर्थात-

$$I_x = m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2 + ... + m_1 y_i^2 ...... + m_n y_n^2$$

या $$I_x = \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i^2$$ ..... (11.24)

इसी प्रकार Y अक्ष के सापेक्ष समतल पटल का जड़त्व आघूर्ण (I_y

$$I_x = m_1x_1^2 + m_2x_2^2 + ... + m_1x_i^2 ...... + m_nx_n^2$$

या $$I_y = \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i^2 \qquad ..... (11.25)$$

तथा Z अक्ष के सापेक्ष समतल पटल का जड़त्व आघूर्ण (I_z)-

$$I_z = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + ... + m_1r_i^2 ...... + m_nr_n^2$$

या $$I_z = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 \qquad ...(11.26)$$

समी 11.24 व समी 11.25 को जोडने पर-

$$I_x + I_y = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$$

चित्र 11.10 की ज्यामिति से $x_i^2 + y_i^2 = r_i^2$

अत: $$I_x + I_y = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2$$

या $$I_x + I_y = I_z \qquad ....(11.27)$$

यही लम्बवत् अक्षों की प्रमेय है ।

(ध्यान रखें कि लम्बवत् अक्षों की प्रमेय का उपरोक्त व्यंजक सिर्फ द्विविमीय वस्तुओं के लिये ही सत्य है ।)

11.5.2 समान्तर अक्षों की प्रमेय (Theorem of parallel axes)

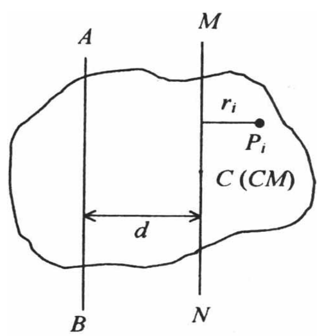
इस प्रमेय के अनुसार किसी पिण्ड का दी गई घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण का मान, उस पिण्ड के द्रव्यमान-केन्द्र से गुजरने वाली तथा दी गई अक्ष के समान्तर अक्ष के परित: पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण के मान तथा पिण्ड के द्रव्यमान M और दोनों समान्तर अक्षों के बीच लम्बवत् दूरी (d) के वर्ग के गुणनफल के योग के तुल्य होता है । अर्थात्-

$$I_{AB} + I_{CM} = Md^2$$

जहाँ I_{AB} दी गई घूर्णन अक्ष के सापेक्ष पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण तथा I_{CM} द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली तथा दी गई अक्ष के समान्तर अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण है ।

उपपत्ति (Proof):

चित्र 11.11 में प्रदर्शित एक पिण्ड पर विचार कीजिए जो कि n कणों से मिलकर बना है जिनके द्रव्यमान क्रमश: $m_1, m_{2,} .....m_i, ...m_n$ हैं तथा जिनकी द्रव्यमान-केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष MN से लम्बवत् दूरियां क्रमश: $r_1, r_{2,} .....r_i, ...r_n$ हैं । पिण्ड के बिन्दु P पर स्थित किसी i वें कण का द्रव्यमान m_i तथा इसकी इसकी MN से लम्बवत् दूरी r_i हो तो इस कण का अक्ष MN के सापेक्ष जड़त्व



चित्र 11.11

आघूर्ण -

अत: सम्पूर्ण पिण्ड का MN अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण-

$$I_{CM} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_i r_i^2 .... + m_n r_n^2$$

या $$I_{cm} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2$$

i वे कण की AB अक्ष से लम्बवत् दूरी $= r_i + d$

i वे कण का अक्ष AB के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $= m_i \left(r_i + d^2 \right)$ होगा ।

अत: सम्पूर्ण पिण्ड का अक्ष AB के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I_{AB} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(r_i + d \right)^2$$

या $$I_{AB} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left(r_i^2 + d^2 + 2 r_i d \right)$$ यहाँ d नियत है ।

अत: $$I_{AB} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 + d^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i \, 2d \sum_{i=1}^{i=} m_i r_i \qquad ...(11.28)$$

समी. 11.28 में $\sum_{i=1}^{i=} m_i r_i$ द्रव्यमान-केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष पिण्ड के समस्त कणों के आघूर्णों का बीजगणितीय योग (Algebric Sum) है जो कि हमेशा शून्य होता है । अत:

$$\sum_{i=1}^{i=} m_i r_i = 0$$

अत: समी 11.28 से $I_{AB} = I_{cm} + d^2 \sum_{i=1}^{i=} m_i$

या $I_{AB} = I_{cm} + Md^2,\qquad \sum_{i=1}^{i=} m_i = M$

अत: $$I_{AB} = I_{cm} + Md^2 \qquad ... (11.29)$$

यही समान्तर अक्षों की प्रमेय है । ध्यान रहे कि समान्तर अक्षों की प्रमेय द्विविमीय तथा त्रिविमीय सभी प्रकार के पिण्डों के लिये सत्य होती है ।

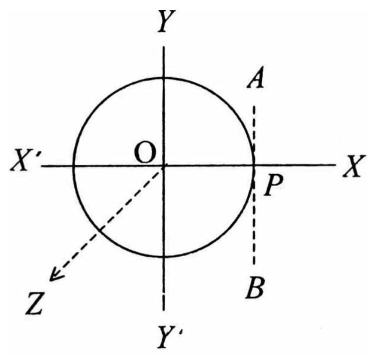
उदाहरण 11.7 द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R की वलय का उसकी ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण MR^2 होता है । वलय के लिए निम्न अक्षों के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण परिकलित कीजिए ।

(i) व्यास के सापेक्ष (ii) तल में तथा तल के लम्बवत् स्थित स्पर्श रेखा के सापेक्ष

हल: (i) वलय का उसके व्यास के परित: जड़त्व आघूर्ण

चित्र 11.12 में प्रदर्शित एक वलय (द्रव्यमान M, त्रिज्या R) के लिये XX' तथा YY' उसके तल में स्थित दो परस्पर लम्बवत अक्ष हैं जो कि वलय के व्यास कहलायेगी । मान लीजिए इन अक्षों के परित: वलय का जड़त्व आघूर्ण क्रमश: I_x तथा Iy हैं । चूँकि वलय के सभी व्यासों के प्रति द्रव्यमान वितरण समान होता है अत:

$$I_x = I_y = I$$



चित्र 11.12

Z अक्ष जो कि वलय के तल के लम्बवत है, के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_z\left(=MR^2\right)$ हो तो लम्बवत् अक्षों की प्रमेय से-

$$I_x = I_y = I_z$$

अतः $\quad I_{\text{व्यास}} I_{\text{व्यास}} = MR^2$

या $\quad I_{\text{व्यास}} = \dfrac{MR^2}{2}$ ....(11.30)

(ii) वलय का उसकी तल में तथा तल के लम्बवत् स्पर्श रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

चित्र 11.12 में प्रदर्शित वलय की परिधि पर स्थित बिन्दु P के परित: AB एक स्पर्श रेखा है जो कि वलय के तल में या तल के लम्बवत् हो सकती है । यदि वलय के तल में स्थित स्पर्श रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_{AB\,\text{तल}}$ हो तो समान्तर अक्षों की प्रमेय से

$$I_{AB\,\text{तल}} = I_{CM\ \text{व्यास}} + MR^2 = I_{\text{व्यास}} + MR^2$$

$$= \frac{MR^2}{2} + MR^2$$

$$= \frac{3}{2}MR^2 \qquad ...(11.31)$$

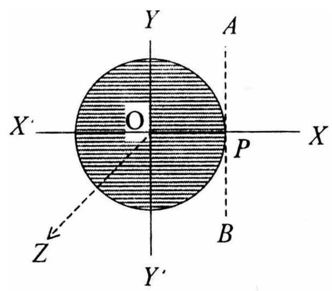
यदि वलय के तल के लम्बवत् स्थित स्पर्श रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_{AB\,\text{लम्बवत}}$ हो तो समान्तर अक्षों की प्रमेय से

$$I_{AB\,\text{लम्बवत}} = I_{CM\ \text{लम्बवत}} = MR^2 \quad = I_{\text{ज्यामितीय अक्ष}} + MR^2$$

$$= MR^2 + MR^2$$

$$= 2MR^2 \qquad .....(11.32)$$

उदाहरण 11.8 द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R की चकती का उसकी ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण $MR^2/2$ होता है । चकती के लिए निम्न अक्षों के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण परिकलित कीजिए । (i) व्यास के सापेक्ष (ii) तल में तथा तल के लम्बवत् स्थित स्पर्श रेखा के सापेक्ष



चित्र 11.13

हल: (i) चकती का उसके व्यास के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण-

चित्र 11.13 में प्रदर्शित एक चकती (द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R) में XY' तथाYY' दो परस्पर लम्बवत अक्ष हैं जो की चकती के व्यास कहलायेंगी I इन अक्षों के परितः चकती के जड़त्व आघूर्ण क्रमशः I_x तथा I_y हैं I चूंकि चकती का का उसके व्यासों के परितः द्रव्यमान वितरण समान होता । अत:

$$I_x = I_y = I_{\text{व्यास}}$$

Z अक्ष चकती के तल के लम्बवत् है जिसके परित: जड़त्व आघूर्ण

माना $I_x\left(=MR^2/2\right)$ है ।

अंत: लम्बवत् अक्षों की प्रमेय से $I_x+I_y=I_z$

अतः $$I_{\text{व्यास}}+I_{\text{व्यास}}=\frac{MR^2}{2}$$

या $$2I_{\text{व्यास}}=\frac{MR^2}{2}$$

या $$I_{\text{व्यास}}=\frac{MR^2}{4} \qquad ...(11.33)$$

(ii) चकती का उसकी ताल में तथा के लम्बवत स्थित स्पर्श रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण-

चित्र 11.13 के अनुसार माना चकती की परिधि पर स्थित बिन्दु P के परित: AB एक स्पर्श रेखा है जो कि चकती के तल में या तल के लम्बवत् हो सकती है । यदि चकती के तल में स्थित स्पर्श रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I_{AB}तल हो तो समान्तर अक्षों की प्रमेय से

$$I_{AB\,\text{तल}}=I_{CM\,\text{तल}}+MR^2=I_{\text{व्यास}}+MR^2$$

या $$I_{AB\,\text{तल}}=\frac{MR^2}{4}+MR^2=\frac{5}{4}MR^2 \qquad ...\ (11.34)$$

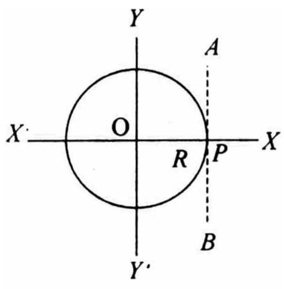
यदि चकती के तल के लम्बवत् स्थित स्पर्श रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_{AB\,\text{लम्बवत}}$ हो तो समान्तर अक्षों की प्रमेय से

$$I_{AB\,\text{लम्बवत}}=I_{CM\,\text{लम्बवत}}+MR^2=I_{\text{ज्यामितीय अक्ष}}+MR^2$$

या $$I_{AB\,\text{लम्बवत}}=\frac{MR^2}{2}+MR^2=\frac{3}{2}MR^2 \qquad .....(11.35)$$

उदाहरण 11.9 द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R के एक गोले का उसकी ज्यामितीय अक्ष (व्यास) के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण $\frac{2}{5}MR^2$ होता है । गोले के लिए उसकी स्पर्श रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण परिकलित कीजिए ।

हल: चित्र 11.14 के अनुसार द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R के ठोस गोले की परिधि पर स्थित बिन्दु P के परित: AB एक स्पर्श रेखा है । चूँकि यह स्पर्श रेखा AB गोले के व्यास के समान्तर होगी, अत: समान्तर अक्षों की प्रमेय से-



चित्र 11.14

चित्र 11.14

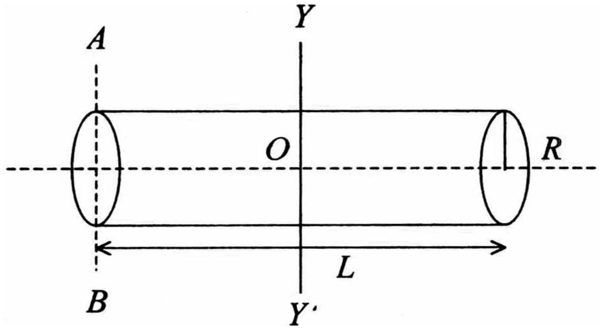
$$I_{AB}=I_{\text{व्यास}}+MR^2$$
$$=\frac{2}{5}MR^2+MR^2$$

या $$I_{AB}=\frac{7}{5}MR^2 \qquad ....\ (11.36)$$

उदाहरण 11.10 द्रव्यमान M, त्रिज्या R तथा लम्बाई L के किसी ठोस बेलन का उसके लम्बाई के लम्बवत् तथा एक किनारे को स्पर्श करती रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण परिकलित कीजिए । बेलन का उसके द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली तथा लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$M\left(\frac{L^2}{I2}+\frac{R^2}{4}\right)$ होता है ।

हल: चित्र 11.15 के अनुसार रेखा AB ठोस बेलन (द्रव्यमान M, त्रिज्या R तथा लम्बाई L) की लम्बाई के लम्बवत् तथा उसके एक किनारे को स्पर्श करती है । यदि I_{yy^1} उसके द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली



चित्र 11.15

तथा लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण हो तो समान्तर अक्षों की प्रमेय के अनुप्रयोग से-

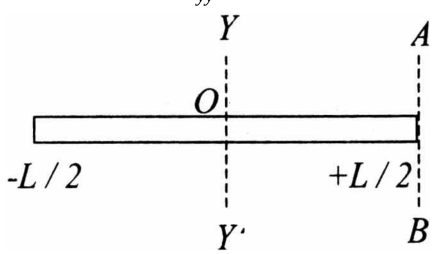
$$I_{AB}=I_{yy^1}+M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

या $$I_{AB}=M\left(\frac{L^2}{I2}+\frac{R^2}{4}\right)+\frac{ML^2}{4}$$

या $$I_{AB}=\frac{ML^2}{3}+\frac{MR^2}{4} \qquad ..... \ (11.37)$$

उदाहरण 11.11 द्रव्यमान M तथा लम्बाई L की एक पतली छड़ का उसके लम्बाई के लम्बवत् तथा एक किनारे को स्पर्श करती रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण परिकलित कीजिए । छड़ का उसके द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली तथा लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $\frac{ML^2}{I2}$ होता है ।

हल: चित्र 11.16 के अनुसार रेखा AB दी गई छड (द्रव्यमान M तथा लम्बाई L) की लम्बाई के लम्बवत् तथा उसके किनारे को स्पर्श करती है । यदि I_{yy^1} उसके द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली तथा



चित्र 11.16

लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण हो तो समान्तर अक्षों की प्रमेय के अनुप्रयोग से-

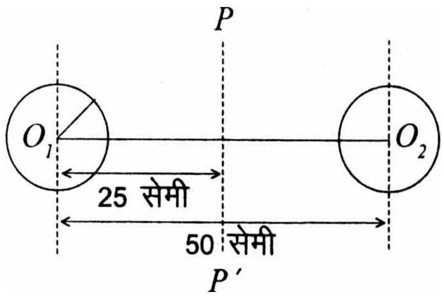
$$I_{AB} = I_{yy^1} M \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

या $$I_{AB} = \frac{ML^2}{I2} + \frac{MR^2}{4} \qquad \left(\because I_{yy^1} = \frac{ML^2}{I2}\right)$$

या $$I_{AB} + \frac{ML^2}{3} \qquad ...(11.38)$$

उदाहरण 11.12 एक अल्प द्रव्यमान की 50 सेमी. लम्बी छड़ के सिरों पर 1 किग्रा. द्रव्यमान तथा 5 सेमी. त्रिज्या की दो समरूप गोले सम्बद्ध हैं । छड़ के मध्य बिन्दु से गुजरने वाली लम्बवत् अक्ष के परित: निकाय का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये ।

हल : चित्र 11.17 के अनुसार 5 सेमी त्रिज्या के दो समरूप गोले 50 सेमी लम्बी एक अल्प द्रव्यमान की छड़ के सिरों पर सम्बद्ध है । हमें इस निकाय का जड़त्व आघूर्ण छड के मध्य बिन्दु O से गुजरने वाली



चित्र 11.17

अक्ष के सापेक्ष परिकलित करना है ।

गोले के केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष गोले का जड़त्व आघूर्ण (I_{CM}) का मान -

$$I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2 = \frac{2}{5} \times 1\left(5\times10^{-2}\right)^2 = 10^{-3} \text{ किग्रा. मी.}^2$$

इस गोले का अभीष्ट अक्ष PP' के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_{pp'}$ (समान्तर अक्षों की प्रमेय के उपयोग से)

$$I_{pp'} = I_{CM} + Md^2$$

$$= 10^{-3} + 1\times\left(\frac{25}{100}\right)^2 = 10^{-3} + 62.5\times10^{-3} = 63.5\times10^{-3} \text{ किग्रा. मी.}^2$$

दूसरे गोले का भी अभीष्ट अक्ष PP' के परित: इतना ही जड़त्व आघूर्ण होगा अत: निकाय का कुल जड़त्व आघूर्ण (I_0)

$$I_0 = 2\times63.5\times10^{-3} \text{ किग्रा. मी.}^2$$

10.6 सारांश (Summary)

- घूर्णन गति में घूर्णी जड़त्व की माप जड़त्व आघूर्ण कहलाती है ।

- घूर्णन त्रिज्या- घूर्णन अक्ष से वह लम्बवत् दूरी है जिसके वर्ग को वस्तु के कुल द्रव्यमान से गुणा करने पर वस्तु का वही जड़त्व आघूर्ण प्राप्त होता है जो कि उसे वितरित द्रव्यमान की मानने पर प्राप्त होता है ।
- किसी दृढ़ पिण्ड के लिए घूर्णन गति का समीकरण

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d}{dt}\left(I\vec{\omega}\right) = I\frac{d}{dt}\vec{\omega} = I\vec{\alpha}$$

जहाँ $\vec{\alpha} = I\frac{d}{dt}\vec{\omega}$ पिण्ड का कोणीय त्वरण है ।

- यदि कोई वस्तु या पिण्ड जड़त्व आघूर्ण के मुख्य अक्ष पर घूर्णन करे तो $\vec{j}$ तथा $\vec{\omega}$ परस्पर समान्तर होते है तथा इस अवस्था में

$\vec{j} = I\vec{\omega}$ जहाँ I मुख्य अक्ष के सापेक्ष पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण है ।

- लम्बवत् अक्षों की प्रमेय से $I_z = I_x + I_y$
- यहाँ x तथा y वस्तु के तल में स्थित परस्पर लम्बवत् अक्ष है तथा z वस्तु के तल के लम्बवत् तथा x, y के कटाव बिन्दु से गुजरती है ।
- समान्तर अक्षों की प्रमेय से

$$I_{AB} = I_{Cm} + Md^2$$

यहाँ अक्ष AB द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के समान्तर है, तथा d दोनों समान्तर अक्षों के बीच की लम्बवत् दूरी है ।

11.7 शब्दावली (Glossary)

घूर्णन त्रिज्या	Radius of gyration
घूर्णन अक्ष	Axis of rotation
चकती	Disc
जड़त्व	Inertia
जड़त्व आघूर्ण	Moment of inertia
जड़त्वीय गुणांक	Inertial coefficient
द्वितीय कोटि टेन्सर	Second rank tensor
मुख्य अक्ष	Principal axes
बल आघूर्ण	Torque
बल युग्म	Couple
बेलन	Cylinder
वलय	Ring
संरक्षण	Conservation
सममिति टेन्सर	Symmetric tensor

11.8 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1.	D.S Mathur	Mechanics	S.Chand & Co., New Delhi
2.	Berkley	Mechanics	New York
3.	B.K Agarwal & P.C Agarwal	Mechanics	Sahitya Bhawan, Agra
4.	जगदीश चन्द्र उपाध्याय	नवीन यांत्रिकी	रामप्रसाद एण्ड सन्स, आगरा
5.	के. के. सरकार-आर. एन. शर्मा	यांत्रिकी	साहित्य भवन, आगरा

10.9 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment questions)

1. MR^2
2. जड़त्व रेखीय गति में अवस्था परिवर्तन का विरोध करने वाला कारक है जबकि जड़त्व आघूर्ण कोणीय गति में अवस्था परिवर्तन का विरोध करने वाला कारक है ।
3. जड़त्व अपरिवर्तित रहेगा जबकि जड़त्व आघूर्ण का मान घट जायेगा ।
4. $I \propto R^2$
5. कम धनत्व वाली चकती के जड़त्व आघूर्ण का मान कम होगा ।
6. वलय के लिये $K = \pm R$ जबकि चकती के लिये $K = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$
7. $\frac{K_1}{K_2} = \frac{4}{1}$
8. दिन की अवधि बढ़ जायेगी ।
9. 6 घंटे
10. कोणीय वेग का मान कम हो जायेगा ।
11. इस अवस्था में $v = r\omega =$ नियत रहता है । अत: जैसे-जैसे r का मान कम होता जाता है ω का मान बढ़ता जाता है ।
12. नहीं ।

11.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise)

अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. जड़त्व आघूर्ण का S.I. मात्रक लिखिये ।
2. जड़त्व आघूर्ण पिण्ड के किन कारकों पर निर्भर करता है ।
3. क्या किसी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण उसके कोणीय त्वरण पर निर्भर करता है ।
4. क्या घूर्णन त्रिज्या का मान दृढ़ वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर करता है ।
5. घूर्णन त्रिज्या के निर्भरता कारक क्या है लिखिये ।
6. ω कोणीय वेग से घूर्णन करती वस्तु के लिये उसकी घूर्णन अक्ष से 1: 2 पर स्थित कणों के कोणीय वेगों का अनुपात क्या होगा ।

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

7. जड़त्व आघूर्ण क्या है? इसके भौतिक महत्व को समझाईये ।
8. लम्बवत् अक्षों की प्रमेय का कथन लिखिये तथा इसे प्रतिपादित कीजिये ।
9. समान्तर अक्षों की प्रमेय का कथन लिखिये तथा इसे प्रतिपादित कीजिये ।
10. किसी दृढ़ पिण्ड के जड़त्वीय गुणांकों से आप क्या समझते हैं । किसी दृढ़ पिण्ड के अपविकर्ण गुणांक किस अवस्था में शून्य होते हैं ।

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

11. किलोग्राम द्रव्यमान तथा 6 मीटर लम्बाई की एक समरूप छड को एक समषडभुज (Regular hexagon) के रूप में मोड दिया जाता है । समषडभुज के द्रव्यमान-केन्द्र से गुजरने वाली तथा तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण का मान परिकलित कीजिए ।

(उत्तर: 10 किग्रा. मी.^{2})

12. यदि पृथ्वी की त्रिज्या सिकुडकर अपनी वर्तमान त्रिज्या की आधी रह जाये तो दिन की नई अवधि क्या होगी।

(उत्तर: 6 घंटे)

13. 8 किलोग्राम द्रव्यमान तथा 8 मीटर लम्बाई की एक छड वर्ग के रूप में मोड दी जाती है । वर्ग के द्रव्यमान-केन्द्र से गुजरने वाली तथा तल के लम्बवत् अक्ष के -सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण का मान परिकलित कीजिए ।

(उत्तर: 10.66 किग्रा. मी.^{2})

14. एक समषडभुज जिसकी एक भुजा की लम्बाई 2a है, में 6 समान द्रव्यमान (m) उसके 6 कोनों पर रखे गये हैं । किन्हीं भी पास के दो द्रव्यमानों से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष निकाय का जड़त्व आघूर्ण परिकलित कीजिए।

(उत्तर: 30 ma^2)

15. समान द्रव्यमान (m) के 4 कण a भुजा वाले वर्ग के चारों कोनों पर रखे जाते हैं । किसी एक कण से होकर जाने वाली तथा वर्ग के तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष निकाय का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए ।

(उत्तर: 4 ma^2)

इकाई- 12

जडत्व आघूर्ण-II

(Moment of Inertia -II)

इकाई की रूपरेखा

12.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप

- विविक्त अथवा सतत द्रव्यमान की वस्तुओं के जड़त्व आघूर्ण की गणना करने के तरीके को समझ सकेंगे;
- कुछ नियमित आकार की वस्तुओं जैसे बेलन, गोलीय कोश, गोले, के जड़त्व आघूर्ण की गणना उनके ज्यामितीय अक्ष तथा अन्य अक्षों के सापेक्ष परिकलित करना समझ सकेंगे;
- किसी अनियमित आकृति की वस्तु के जड़त्व आघूर्ण का निर्धारण जडत्व आघूर्ण, मंच की सहायता से ज्ञात करने की प्रायोगिक विधि समझ सकेंगे;
- किसी गतिपालक चक्र का उसकी स्वयं की घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करने की प्रायोगिक विधि समझ सकेंगे ।

12.1 प्रस्तावना (Introduction)

उन घूर्णन अक्षों के परित: जड़त्व आघूर्ण की गणना करना सबसे सरल होता है जिनके सापेक्ष पिण्ड के द्रव्यमान का वितरण सममितीय (Symmetrical) होता है । यदि पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण

ऐसी अक्ष के परित: ज्ञात करना हो जिसके सापेक्ष पिण्ड के द्रव्यमान का वितरण सममितीय न हो तो लम्बवत अथवा समान्तर अक्षों की प्रमेयों का उपयोग करके किसी एक घूर्णन अक्ष के परित: पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण का मान ज्ञात होने पर, किसी अन्य अक्ष के परित: पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कर सकते हैं । पिण्डों के जड़त्व आघूर्ण का उपयोग एक स्थान पर स्थिर रखकर चलाये जाने वाले इन्जनों जैसे कि डीजल पम्पिंग सेट इत्यादि में किया जाता है । यदि आप अपना ध्यान डीजल पम्पिंग सेट में लगे बड़े पहिये पर केन्द्रित करें तो आप पायेंगे कि इसकी रिम काफी मोटी होती है तया बीच का भाग होता है । इस बनावट के कारण पहिये का जड़त्व आघूर्ण अधिक हो जाता है; इस पहिये को गतिपालक चक्र कहा जाता है । इन्जन को घुमाने के लिए पिस्टन की रेखिक गति को शाफ्ट की घूर्णन गति में परिवर्तित करते हैं । जिससे यह स्पष्ट है कि शाफ्ट की घूर्णन गति एक समान नहीं हो सकती । घूर्णन गति को एक समान करने के लिये शाफ्ट के साथ गतिपालक चक्र जोड़ दिया जाता है, जो कि शाफ्ट के साथ-साथ घूमता है । शाफ्ट को घुमाने वाले बल आघूर्ण का मान जब कम होता है तो गतिपालक चक्र अपने अधिक जड़त्व आघूर्ण के कारण उसी चाल से घूमता रहना चाहता है । जिससे शाफ्ट की घूर्णन गति में अधिक परिवर्तन नहीं हो पाता और शाफ्ट लगभग एक समान गति से घूमती है ।

इस इकाई के अनुच्छेद 12.2 में कुछ नियमित आकार के पिण्ड जैसे कि बेलन, गोला, गोलीय कोश इत्यादि के विभिन्न अक्षों के सापेक्ष जड़त्व आघूर्णों के मान की गणितीय विधि द्वारा गणना समझ सकेंगे । अनुच्छेद 12.3 में अनियमित आकृति वाली वस्तु के जड़त्व आघूर्ण तथा अनुच्छेद 12.4 में गति पालक चक्र का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना सीखेंगे।

12.2 जडत्व आघूर्ण की गणना (Calculation of M.I.)

किसी निकाय के जडत्व आघूर्ण की गणना करने के लिए यह जानना आवश्यक होता है कि निकाय के द्रव्यमान का वितरण विविक्त है या सतत् । अत: यहाँ दोनों अवस्थाओं में जडत्व आघूर्ण की गणना करना समझाया जा रहा है-

(अ) यदि निकाय के द्रव्यमान का वितरण विविक्त (discrete) है:

यदि निकाय के कण अलग-अलग वितरित हो तो प्रत्येक कण की घुर्णन अक्ष से लम्बवत दूरी के वर्ग में उसके द्रव्यमान का गुणा करके, उस कण का जडत्व आघूर्ण ज्ञात कर लेते हैं । अलग-अलग कणों के जडत्व आघूर्णों का योग ही निकाय के जडत्व आघूर्ण का मान होगा, अर्थात्

$$I = m_i r_1^2 + m_2 r_2^2 + ... + m_n r_n^2$$

(ब) यदि निकाय के द्रव्यमान का वितरण सतत (Continuous) हो:

इस अवस्था में सर्वप्रथम दी गई अक्ष के सापेक्ष वस्तु के अनन्त सूक्ष्म (Infinitesimal) द्रव्यमान dm के जड़त्व आघूर्ण के लिये व्यंजक $x^2 dm$ प्राप्त किया जाता है (जहाँ x घूर्णन अक्ष से द्रव्यमान dm की लम्बवत दूरी है) । तत्पश्चात् वस्तु की आकृति, आकार द्वारा निर्धारित सीमाओं के मध्य व्यंजक $x^2 dm$ को समाकलित कर लेते हैं । आवश्यकतानुसार जड़त्व आघूर्ण प्रमेयों का उपयोग करके विचाराधीन वस्तु का, अभीष्ट अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कर लेते हैं ।

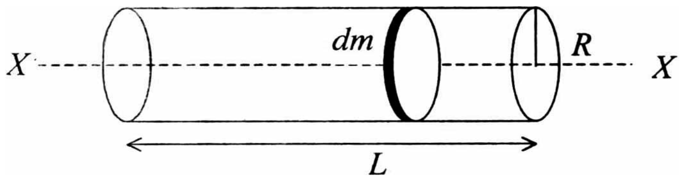
इस इकाई में आप कुछ नियमित आकार की वस्तुओं का उनकी ज्यामितीय अक्ष तथा अन्य दी गई अक्षों के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण की गणना का अध्ययन करेंगे ।

12.2.1 बेलन के जडत्व आघूर्ण की गणना (Calculation of moment of inertia of a cylinder)

यहाँ -हम किसी ठोस तथा खोखले बेलन के जड़त्व आघूर्ण की गणना उसकी विभिन्न अक्षों के परित: करेंगे-

(1) ठोस बेलन के लिए उसकी ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण की गणना (Calculation of moment of inertia of a solid cylinder about its geometrical axis)

चित्र 12.1 में प्रदर्शित द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R के एक ठोस बेलन पर विचार कीजिए जिसकी घूर्णन अक्ष XX' है । घूर्णन अक्ष XX' बेलन की अपनी ज्यामितीय अक्ष से सम्पातित है । ठोस बेलन को उसके ज्यामितीय अक्ष के अनुदिश अनेक समाक्षीय चकतियों में सतत रूप से विभाजित माना जा सकता है । आप ऐसी ही एक चकती (द्रव्यमान dm) पर विचार करें ।



चित्र 12.1

विचाराधीन चकती का घूर्णन अक्ष XX' के परित: जडत्व आघूर्ण $=\frac{1}{2}(dm)R^2$

बेलन का कुल जडत्व आघूर्ण इन चकतियों के XX' के परित: जडत्व आघूर्णों के योग के तुल्य होगा।

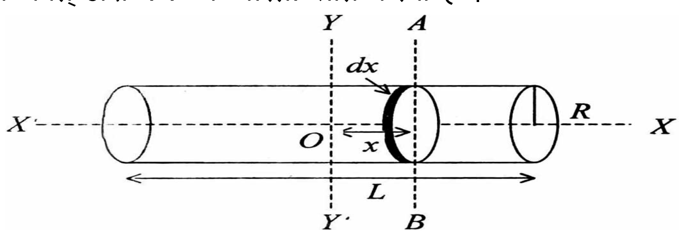
अर्थात् $I=\sum\frac{1}{2}(dm)R^2$

या $I=\frac{R^2}{R}\sum dm$

या $I=\frac{MR^2}{2}$ ... (12.1)

(2) ठोस बेलन का उसकी लम्बाई के लम्बवत् एवं द्रव्यमान-केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण (Moment of inertia of solid cylinder about an axis passing through its mass and perpendicular to its length)

चित्र 12.2 में प्रदर्शित एक ठोस बेलन पर विचार केन्द्रित कीजिए जिसके लिए द्रव्यमान M, त्रिज्या R तथा लम्बाई L है । इसके जडत्व आघूर्ण का मान इसके द्रव्यमान-केन्द्र o से गुजरने वाली तथा लम्बाई के लम्बवत् अक्ष YY' के परित: ज्ञात करना है ।



चित्र 12.2

ठोस बेलन को आप उसकी ज्यामितीय अक्ष XX' के अनुदिश अनेक समाक्षीय चकतियों का सतत् रूप से मिलकर बना मान सकते हैं । YY' अक्ष से x दूरी पर स्थित ऐसी ही एक चकती पर विचार कीजिए जिसकी मोटाई dx है ।

विचाराधीन चकती का आयतन $=\left(\pi R^2\right)dx$

ठोस बेलन के एकांक आयतन का द्रव्यमान $=\dfrac{M}{\pi R^2 L}$

अत: विचाराधीन चकती का द्रव्यमान $dm=\left(\pi R^2\right)dx.\dfrac{M}{\pi R^2 L}=\dfrac{M}{L}dx$

विचाराधीन चकती के द्रव्यमान-केन्द्र से गुजरती अक्ष AB चकती का एक व्यास होगी जिसके सापेक्ष इस चकती का जडत्व आघूर्ण

$$\delta I_{AB}=\left(\frac{M}{L}dx\right)\left(\frac{R^2}{4}\right)$$

अत: विचाराधीन चकती का YY' के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण

$$\delta I_{yy^1}=\delta I_{AB}+\left(\frac{M}{L}dx\right)x^2$$

$$\delta I_{yy^1}=+\left(\frac{M}{L}dx\right)\frac{R^2}{4}+\left(\frac{M}{L}dx\right)x^2=\frac{M}{L}\left(\frac{R^2}{4}+x^2\right)dx \qquad ...(12.2)$$

अतः सम्पूर्ण बेलन का YY' अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण का मान समी 12 .2 को $-\dfrac{L}{2}$ से $\dfrac{L}{2}$ सीमाओं के मध्य समाकलित करके ज्ञात किया जा सकता है ।

$$I_{yy^1}=\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}}\frac{M}{L}\left(\frac{R^2}{4}+x^2\right)dx$$

या $$I_{yy^1}=\frac{2M}{L}\int_{0}^{\frac{L}{2}}\left(\frac{R^2}{4}+x^2\right)dx\,\frac{2M}{L}\left(\frac{R^2}{4}x+\frac{x^3}{3}\right)_0^{\frac{L}{2}}$$

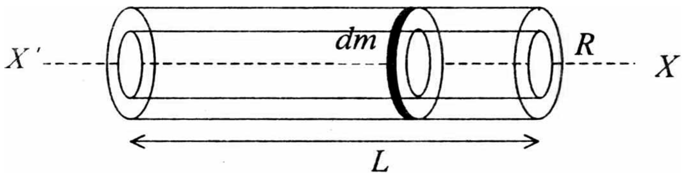
या $$I_{yy^1}=\frac{2M}{L}\left(\frac{R^2}{4}.\frac{L}{2}+\frac{L^3}{24}-0\right)$$

या $$I_{yy^1}=\frac{2M}{L}.\frac{L}{2}\left(\frac{R^2}{4}+\frac{L^2}{12}\right)$$

या $$I_{yy^1}=M\left(\frac{L^2}{12}+\frac{R^2}{4}\right) \qquad ....(12.3)$$

(3) खोखले बेलन के लिए उसकी ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण की गणना (Calculation of moment of inertia of hollow cylinder about its geometrical axis)

चित्र 12.3 में प्रदर्शित एक खोखले बेलन पर विचार केन्द्रित कीजिए जिसके लिए द्रव्यमान M, लम्बाई L तथा बाहय व आंतरिक त्रिज्याऐं क्रमश: R_2 तथा R_1 है । इसके जडत्व आघूर्ण का मान इसके ज्यामितीय अक्ष XX' के परित: ज्ञात करना है । खोखले बेलन को उसकी ज्यामितीय अक्ष XX' के लम्बवत् अनेक वलयाकार चकतियों (annular discs) मिलकर बना माना जा सकता है । ऐसे ही किसी एक



चित्र 12.3

चकती पर विचार करें जिसका द्रव्यमान dm है । इस विचाराधीन चकती का ज्यामितीय अक्ष XX' के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण (δI) -

$$\delta I = \frac{1}{2}(dm)\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

अत: सम्पूर्ण खोखले बेलन का ज्यामितीय अक्ष XX' के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण (I) -

$$I = \sum \frac{1}{2}(dm)\left(R_1^2 + R_2^2\right) = \frac{1}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right)\sum dm$$

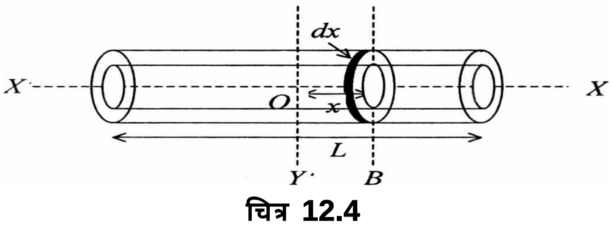
या

$$I = \frac{M}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

(ध्यान रहे कि किसी वलयाकार चकती का उसकी ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण का परिकलन आप पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं जिसका मान $I = \frac{1}{2}m\left(R_1^2 + R_2^2\right)$ के तुल्य होता है जहाँ m वलयाकार चकती का द्रव्यमान तथा R_2 व R_1 उसकी बाहय व आंतरिक त्रिज्याऐं हैं)

(4) खोखले बेलन का उसकी लम्बाई के लम्बवत् एवं द्रव्यमान-केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण (Moment of inertia of hollow cylinder about an axis passing through its centre of mass and perpendicular to its length)

चित्र 12.4 में प्रदर्शित एक खोखले बेलन पर विचार केन्द्रित कीजिए जिसके लिए द्रव्यमान M, लम्बाई L तथा बाहय व आंतरिक त्रिज्याऐं क्रमश: R_2 तथा R_2 है । इसके जडत्व आघूर्ण का मान इसके द्रव्यमान-केन्द्र O से गुजरने वाली तथा लम्बाई के लम्बवत् अक्ष YY' के परित: ज्ञात करना है ।



चित्र 12.4

खोखले बेलन को आप उसकी ज्यामितीय अक्ष XX' के अनुदिश अनेक समाक्षीय वलयाकार चकतियों का सतत् रूप से मिलकर माना जा सकता है । YY' अक्ष से x दूरी पर स्थित ऐसी ही एक चकती पर विचार कीजिए जिसकी मोटाई dx है ।

इस विचाराधीन वलयाकार चकती का आयतन $=\pi\left(R_2^2+R_1^2\right)dx$

विचाराधीन चकती का द्रव्यमान $=\pi\left(R_2^2+R_1^2\right)dx\times$ खोखले बेलन के एकांक आयतन का द्रव्यमान

यहाँ खोखले बेलन के एकांक आयतन का द्रव्यमान $\rho=\dfrac{M}{\pi\left(R_1^2+R_2^2\right)L}$

अत: विचाराधीन वलयाकार चकती का द्रव्यमान $dm=\pi\left(R_2^2+R_1^2\right)dx\dfrac{M}{\pi\left(R_2^2+R_1^2\right)L}=\dfrac{M}{L}dx$

अत: इस विचाराधीन वलयाकार चकती का अपने व्यास AB के अनुदिश जडत्व आघूर्ण

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{M}{L}dx\right)\left(R_1^2+R_2^2\right)\frac{1}{4}\left(R_1^2+R_2^2\right)dx$$

इस विचाराधीन वलयाकार चकती का YY' के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (δI) समान्तर अक्षों की प्रमेय के उपयोग से ज्ञात कर सकते हैं अर्थात्

$$\delta I=\frac{1}{4}\frac{M}{L}\left(R_1^2+R_2^2\right)dx+\left(\frac{M}{L}dx\right)x^2 \qquad \text{.. (12.4)}$$

अत: खोखले बेलन का YY' के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I का मान समी 12.4 को $-\dfrac{L}{2}$ से $\dfrac{L}{2}$ सीमाओं के मध्य समाकलित करके ज्ञात किया जा सकता है ।

$$I=2\int_0^{1/2}\frac{1}{4}\frac{M}{L}\left(R_1^2+R_2^2\right)dx\left(\frac{M}{L}dx\right)x^2$$

या $$I=2\int_0^{1/2}\frac{1}{4}\frac{M}{L}\left(R_1^2+R_2^2\right)dx+2\int_0^{1/2}\left(\frac{M}{L}dx\right)x^2$$

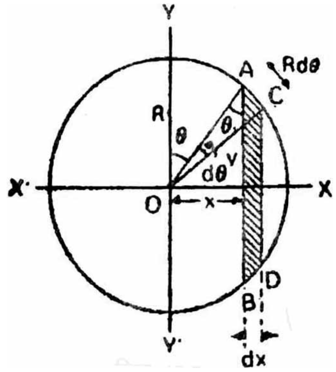
या $$I=\frac{M}{2L}\left(R_1^2+R_2^2\right)\int_0^{1/2}dx+\frac{M}{2L}\int_0^{1/2}dx$$

या $$I=\frac{M}{2L}\left(R_1^2+R_2^2\right)\left[x\right]_0^{L/2}\frac{2M}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{L/2}$$

या $$I=M\left[\frac{\left(R_1^2+R_2^2\right)}{4}+\frac{L^2}{12}\right] \qquad \text{...(12.5)}$$

12.2.2 गोलीय कोश के लिए उसकी ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण की गणना (Calculation of moment of inertia of a spherical shell about its geometrical axis)

चित्र 12.5 में प्रदर्शित M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या के एक गोलीय कोश पर विचार केन्द्रित कीजिए जिसका ज्यामितीय केन्द्र O है । कोश की मोटाई t अत्यल्प ($t \rightarrow 0$) होती है तथा द्रव्यमान उसके सम्पूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल पर समान रूप से वितरित होता है । आपको गोलीय कोश के केन्द्र से गुजरने वाली



चित्र 12.5

ज्यामितीय अक्ष XX' के परित: इसके जडत्व आघूर्ण का परिकलन करना है । चूंकि गोलीय कोश त्रिविमीय है अत: यह अक्ष उसका व्यास कहलाएगी । गोलीय कोश को आप उसके व्यास के अनुदिश विभिन्न त्रिज्याओं की वलयों से मिलकर बना मान सकते है । अत: अब आप गोलीय कोश के व्यास के अनुदिश उसके केन्द्र O से x दूरी पर मोटाई AC (चाप) तथा त्रिज्या y की ऐसी ही एक वलय पर

विचाराधीन वलय का क्षेत्रफल $(2\pi y)(AC) = (2\pi R\cos\theta)(Rd\theta) = 2\pi R(RCos\theta d\theta)$ ..(12.6)

चित्र की ज्यामिति से स्पष्ट है कि: $y = R\cos\theta = \sqrt{R^2 - x^2}$ तथा $x = R\sin\theta$

$x = R\sin\theta$ का अवकलन करने पर $dx = R\cos\theta d\theta$

अत: विचाराधीन वलय का क्षेत्रफल = $2\pi R(dx)$

चूँकि कोश के एकांक क्षेत्रफल का द्रव्यमान $\frac{M}{4\pi R^2}$ होता है अत: विचाराधीन वलय का द्रव्यमान (dm)-

$$dm = 2\pi R dx \frac{M}{4\pi R^2} = \frac{M}{2R}dx$$

विचाराधीन वलय का XX' अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण (δI) -

δI = द्रव्यमान $\times$ (त्रिज्या)2 $= \frac{M}{2R}dx \times y^2 = \frac{M}{2R}dx \times \left(R^2 - x^2\right)$ ...(12.8)

सम्पूर्ण कोश का XX' अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण I का मान समी 12.7 को -R से +R सीमाओं के मध्य समाकलित करके ज्ञात किया जा सकता है ।

$$I = \int_{-R}^{+R} \frac{M}{2R}\left(R^2 - x^2\right)dx = \frac{M}{2R}\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)_{-R}^{+R}$$

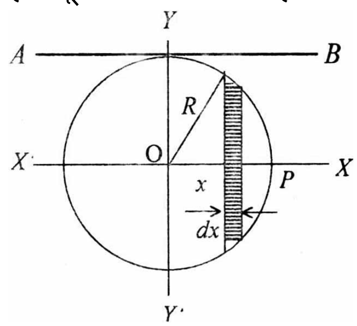
या $$I = \frac{M}{2R}\left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2}{3}MR^2 \qquad ...(12.8)$$

12.3.3 गोले के जड़त्व आघूर्ण की गणना (Calculation of moment of inertia of a sphere)

यहाँ आप किसी ठोस तथा खोखले गोले के जडत्व आघूर्ण की गणना विभिन्न अक्षों के सापेक्ष करेंगे-

(1) गोले का ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (Calculation of moment of inertia of a spherical shell about its geometrical axis)

चित्र 12.6 में प्रदर्शित M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या के एक ठोस गोले पर विचार केन्द्रित कीजिए जिसका ज्यामितीय केन्द्र O है। आपको गोले के केन्द्र से गुजरने वाली ज्यामितीय अक्ष XX' के परित: जडत्व आघूर्ण का परिकलन करना है। चूँकि गोला त्रिविमीय है अत: यह अक्ष उसका व्यास कहलाएगी।



चित्र 12.6

ठोस गोले को आप उसके व्यास के अनुदिश विभिन्न त्रिज्याओं की चकतियों से मिलकर बना मान सकते है। अब आप गोले के व्यास के अनुदिश उसके केन्द्र O से x दूरी पर dx मोटाई तथा y त्रिज्या की ऐसी ही एक चकती पर विचार करें।

विचाराधीन चकती का आयतन $=\left(\pi y^2\right)\times dx$

गोले के एकांक आयतन का द्रव्यमान $= \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

विचाराधीन चकती का द्रव्यमान $dm = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\left(\pi y^2\right)\times dx$

या $dm = \dfrac{3My^2 dx}{4R^3}$ यहाँ $y^2 = \left(R^2 - x^2\right)$

या $dm = 3M\dfrac{\left(R^2 - x^2\right)dx}{4R^3}$

अत: विचाराधीन चकती का XX' (चकती के लिये उसकी ज्यामितीय अक्ष) के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण $(I\delta)$-

$$I\delta = (dm) \times \frac{y^2}{2}$$

$$I\delta = \frac{3M\left(R^2 - x^2\right)dx}{8R^3} \qquad ...(12.9)$$

अत: गोले का XX' (गोले का व्यास) के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण, का मान समी 12.9 को -R से +R सीमाओं के मध्य समाकलित करके ज्ञात किया जा सकता है ।

$$I = \int_{-R}^{R} \frac{3M}{8R^3}\left(R^2 - x^2\right)dx$$

या $$I = \frac{2.3M}{8R^3}\int_0^R \left(R^4 + x^2 - 2R^2x^2\right)dx$$

या $$I = \frac{3M}{4R^3}\left[R^4x + \frac{x^5}{5} - \frac{2R^2x^3}{3}\right]_0^R$$

या $$I = \frac{3M}{4R^3}\left[R^5 + \frac{R^5}{5} - \frac{2R^5}{3}\right]$$

$$= \frac{3M}{4R^3}\left[\frac{15R^5 + 3R^5 - 10R^5}{15}\right] = \frac{3M}{4R^3}\frac{8R^5}{15}$$

या $$I = \frac{2MR^2}{5} \qquad ...(12.10)$$

यही गोले का उसके व्यास के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण का व्यंजक है ।

यदि ठोस गोले का उसकी स्पर्श रेखा के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण ज्ञात करना हो तो समान्तर अक्षों की प्रमेय का उपयोग किया जाएगा । प्रदर्शित चित्र 12 .6 के अनुसार द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R के ठोस गोले की परिधि पर स्थित बिन्दु P के परित: AB एक स्पर्श रेखा है । यह स्पर्श रेखा AB गोले के व्यास के समान्तर होगी । अत: समान्तर अक्षों की प्रमेय से-

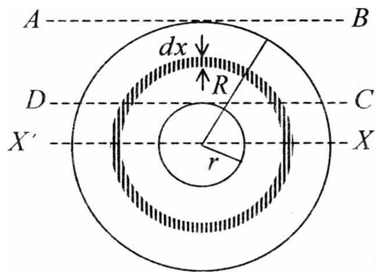
$$I_{AB} = I_{\text{व्यास}} + MR^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2$$

या $$I_{AB} = \frac{7}{5}MR^2 \qquad ...(12.11)$$

(2) खोखले गोले का उसकी ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (Calculation of moment of inertia of a hollow sphere about its geometrical axis)

चित्र 12.7 में प्रदर्शित M द्रव्यमान के एक खोखले गोले पर विचार केन्द्रित कीजिए जिसकी बाहय त्रिज्या R तथा

आंतरिक त्रिज्या r है । मान लीजिए कि उसका ज्यामितीय केन्द्र O है । आपको खोखले गोले के केन्द्र से गुजरने वाली ज्यामितीय अक्ष XX' के परित: जडत्व आघूर्ण का परिकलन करना है ।



चित्र 12.7

चूँकि खोखला गोला त्रिविमीय है अत: यह अक्ष उसका व्यास कहलाएगी । खोखले गोले को आप विभिन्न $f = T; kvk8(r \to R)$ की संकेन्द्रीय गोलीय कोश का मिलकर बना मान सकते है । केन्द्र से x दूरी पर dx मोटाई के एक गोलीय कोश की कल्पना कीजिए जिसका आयतन $4\pi x^2 dx$ होगा । सर्वप्रथम हम इस गोलीय कोश का उसके व्यास के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण ज्ञात करेंगे उसके पश्चात समाकलन द्वारा सम्पूर्ण खोखले गोले का जडत्व आघूर्ण ज्ञात करेंगे ।

खोखले गोले का आयतन $= \dfrac{4}{3}\pi\left(R^3 - r^3\right)$

खोखले गोले के एकांक आयतन का द्रव्यमान $\rho = \dfrac{3M}{4\pi\left(R^3 - r^3\right)}$

अत: गोलीय कोश का द्रव्यमान $= \left(4\pi x^2 dx\right) = \dfrac{3M}{4\pi\left(R^3 - r^3\right)} = \dfrac{3M}{\left(R^3 - r^3\right)} x^2 d\ x$

इस विचाराधीन गोलीय कोश का व्यास के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण (δI)

$$\delta I = \frac{2}{3}\frac{3M}{\left(R^3 - r^3\right)} x^2.dx.x^2 = \frac{2M}{\left(R^3 - r^3\right)} x^2.dx \qquad ....(12.12)$$

अत : सम्पूर्ण खोखले गोले का व्यास के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण का मान समी. 12.12 को r से R सीमाओं के मध्य समाकलित करके ज्ञात किया जा सकता है ।

$$I = \frac{2M}{\left(R^3 - r^3\right)}\int_r^R x^4.dx = \frac{2M}{\left(R^3 - r^3\right)}\left[\frac{x^5}{5}\right]_r^r$$

या
$$I = \frac{2}{5}M\left(\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}\right) \qquad ...(12.13)$$

यदि आपको खोखले गोले का चित्र 12.7 में प्रदर्शित उसकी बाहरी स्पर्श रेखा (I_{AB}) के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण ज्ञात करना है तो समान्तर अक्षों की प्रमेय का उपयोग करना होगा जिसके अनुसार आप जानते हैं कि

$$I_{AB} = I_{\text{व्यास}} + MR^2$$

अतः
$$I = \frac{2}{5}M\left(\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}\right) + MR^2$$

या
$$I = M\left[\frac{2}{5}\left(\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}\right) + R^2\right] \qquad ...(12.14)$$

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. एक बेलनाकार कोश (पतली दीवार का पाइप) जिसक द्रव्यमान M, लम्बाई L तथा त्रिज्या R है के एक सिरे से गुजरने वाली तथा लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये ।

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

2. द्रव्यमान M लम्बाई L तथा त्रिज्या R के एक बेलनाकार कोश का इसकी ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष घूर्णन त्रिज्या क्या होगी ।

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

3. एक ही पदार्थ से समान लम्बाई लेकिन भिन्न भिन्न त्रिज्या के अनेक बेलन बनाये जाते है इनकी ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण त्रिज्या की किस घात के समानुपाती होंगे ।

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

4. M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या के एक गोलीय कोश का उसकी स्पर्श रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण कितना होता है?

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

5. M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या के एक गोलीय कोश का उसकी स्पर्श रेखा के सापेक्ष घूर्णन त्रिज्या परिकलित कीजिये।

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

6. यदि किसी गोले का उसकी स्पर्श रेखा परित: जड़त्व आघूर्ण का मान I हो तो गोले का इसकी व्यास के परित: जड़त्व आघूर्ण परिकलित कीजिए ।

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

7. किसी गोले के लिए उसके व्यास के समान्तर x दूरी पर स्थित अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण तथा x के बीच ग्राफ प्रदर्शित कीजिए ।

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

8. चित्र 12.7 में प्रदर्शित M द्रव्यमान के किसी खोखले गोले(बाह्य व आन्तरिक त्रिज्याऐ R तथा r हैं) के लिए उसकी आन्तरिक स्पर्श रेखा CD के पारित जड़त्व आघूर्ण का व्यंजक लिखिए ।

....

....

उदाहरण 12.1 यदि किसी बेलन का स्वयं के अक्ष के परी जड़त्व आघूर्ण तथा इस अक्ष के लम्बवत द्रव्यमान - केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण परस्पर बराबर हो तो उसकी लम्बाई तथा त्रिज्या का अनुपात ज्ञात कीजिये।

हल आप जानते हैं कि किसी M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या के बेलन का उसकी स्वयं के अक्ष के प्रति परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{MR^2}{2}$$

इसी प्रकार यदि बेलन की लम्बाई L हो तो लम्बाई के लम्बवत तथा द्रव्यमान - के केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के प्रति परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}\right)$$

दिया गया है कि $I = I_1$

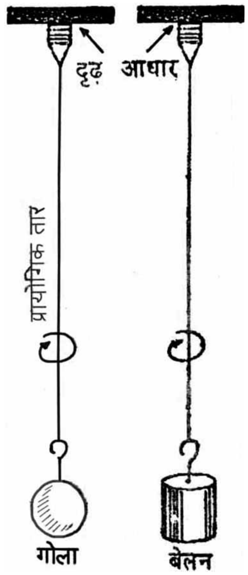
अतः $\frac{R^2}{2}\left(\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}\right)$ या $\frac{R^2}{2}\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}$

या $\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12}$ या $\frac{L^2}{12} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1}$

या $\frac{L}{R} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

12.3 जड़त्व आघूर्ण मंच की सहायता से किसी अनियमित आकृति की वस्तु के जड़त्व आघूर्ण का निर्धारण (Determination of moment of inertia of a body of irregular shape with the help of inertia table)

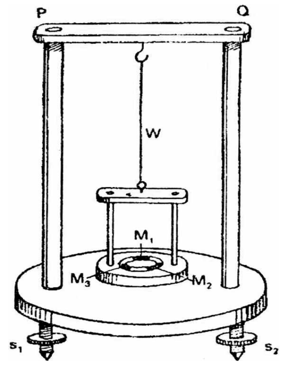
किसी अनियमित आकृति की वस्तु का जड़त्व आघूर्ण आप जडत्व मंच की सहायता से ज्ञात कर सकते है । जड़त्व मंच ऐंठन लोलक (Torsional pendulum) की भांति काम में लिया जाता हैं । मरोड़ी लोलक में एक प्रस्तास्थ तार का ऊपरी सिरा एक दृढ़ आधार से क्लैम्प किया हुआ होता और तार के निचले सिरे पर कोई भारी गोला या बेलन या वृत्ताकार चकती क्षैतिज रूप से लटकी रहती है (चित्र12.8)। मुक्त सिरे पर लटके गोले, बेलन या चकती की ज्यामितीय अक्ष तार के अक्ष के अनुदिश



चित्र 12.8

गतिकी होती है । चकती, बेलन या गोले को तार की अक्ष के समाक्षत रखकर तार में अल्प कोण का ऐंठन उत्पन्न करने पर प्रत्यास्थता गुण के कारण प्रत्यानन बल आघूर्ण उत्पन्न हो जाता है जिसके कारण पिण्ड मरोडी दोलन प्रारम्भ कर देता है ।

चित्र 12.9 में प्रदर्शित जडत्व मंच में भी मरोडी दोलक की भांति एक वृत्ताकार ऐलुमिनियम की चकती एक लम्बे और पतले धातु के तार की सहायता से क्षैतिज छड PQ से लटकी होती है । क्षैतिज छड़ PQ दो उर्ध्वाधर स्तम्भों पर सधी रहती है जो कि एक भारी आधार पर जडें रहते हैं ।



चित्र 12.9

इस आधार में तीन समंजनकारी पेंच S_1,S_2 व S_3 लगे रहते हैं । चकती के ऊपरी तल पर एक गोल खाँचा बना रहता है जिसमें चकती को क्षैतिज करने के लिए तीन धातु के टुकड़े रख दिए जाते हैं । सर्वप्रथम समंजनकारी पेचों S_1,S_2 व S_3 की सहायता से स्पिरिट लेबल रखकर लोहे के आधार को क्षैतिज किया जाता है । इसके पश्चात धातु के टुकड़ों द्वारा ऐलुमिनियम की डिस्क को क्षैतिज किया जाता है । अब यदि मरोडी दोलक की भाँति चकती को एक ओर क्षैतिज तल में घुमाकर अल्प कोण θ से ऐंठ दिया जाता है जिससे तार में कोण θ के समानुपाती प्रत्यानयन बल युग्म (restoring couple) उत्पन्न हो जायेगा । यदि तार में प्रति एकांक ऐंठन (per unit twist) प्रत्यानयन बल युग्म

का मान C हो तो θ ऐंठन के लिए इसका मान C θ होगा जो कि उस समय पर कोणीय त्वरण उत्पन्न कर देगा । स्पष्टत:

$$I = \frac{d^2\theta}{dt^2} - C\theta$$

(जहाँ I चकती आदि का तार के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण है तथा ऋणात्मक चिन्ह प्रत्यानयन बल युग्म की दिशा θ के विपरीत होने के कारण लिया गया है)

अत:
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{I}\theta = 0 \quad ..(12.15)$$

जो कि एक कोणीय सरल आवर्त्त गति का समीकरण है जिसका आवर्त्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$ के तुल्य होता है । अत: स्पष्ट है कि चकती आदि को एक ओर क्षैतिज तल में घुमाकर छोड़ देने पर यह ऐंठन दोलन (torsional oscillations) करना प्रारम्भ कर देती है । प्रयोग विधि में सर्वप्रथम आप खाली जड़त्व मंच (चकती) को दोलन कराकर सुग्राही घड़ी की सहायता से 30 या 40 दोलनों का समय निकालकर इसका आवर्त्तकाल T_0 ज्ञात कर लेते हैं ।

अतः
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \quad ..... (12.16)$$

जहाँ I खाली जड़त्व मंच का तार के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण है ।

अब नियमित ज्ञात जड़त्व आघूर्ण की वस्तु को जड़त्व मंच पर इस प्रकार रखा जाता है कि नियमित पिण्ड की ज्यामितीय अक्ष तार की अक्ष के सम्पाती हो जाये । इस अवस्था में निशिचित दोलनों का समय ज्ञात करके जड़त्व मंच तथा ज्ञात वस्तु संयोजन का आवर्त्तकाल T_1 ज्ञात कर लिया जाता है।

अत:
$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I+I_1}{C}} \quad ..... (12.17)$$

यहाँ I_1 ज्ञात वस्तु का तार की अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण है ।

तत्पश्चात् ज्ञात वस्तु को हटाकर उसके स्थान पर अनियमित अज्ञात वस्तु को जड़त्व मंच पर बीच में ऊपर बताये अनुसार रखकर नये संयोजन का आवर्त्तकाल T_2 कर लिया जाता है ।

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I+I_1}{C}} \quad ....(12.18)$$

यहाँ I_2 अनियमित अज्ञात वस्तु का तार की अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण है

समी. 12.17 के वर्ग में समी. 12.16 के वर्ग का भाग देने पर

$$\frac{T_1^2}{T_0^2} = \frac{I+I_1}{I} = 1 + \frac{I_1}{I} \quad .... (12.19)$$

या
$$\frac{I_1}{I} = \frac{T_1^2}{T_0^2} - 1 \frac{T_1^2 - T_0^2}{T_0^2} \quad .... (12.20)$$

इसी प्रकार समी. 12.18 तथा समी. 12.16 की सहायता से

$$\frac{I_2}{I} = \frac{T_2^2 - T_0^2}{T_0^2} \quad ..... (12.21)$$

समी.12.21 में समी. 12.20 का भाग देने पर

$$\frac{I_1}{I}=\frac{T_2^2-T_0^2}{T_1^2-T_0^2} \qquad ...(12.22)$$

अत:

$$I_2=I_1\left(\frac{T_2^2-T_0^2}{T_1^2-T_0^2}\right) \qquad .....(12.23)$$

समी 12.23 में नियमित ज्ञात पिण्ड के लिए I_1 का मान तथा T_0 , T_1 तथा T_2 के मान रखकर अज्ञात अनियमित पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण परिकलित कर लिया जाता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

9. मरोडी दोलक क्या होता है । परिभाषित कीजिए ।

....

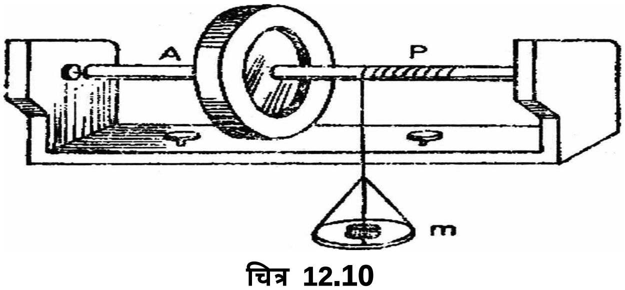
....

....

....

12.4 किसी गतिपालक चक्र का उसकी स्वयं की घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना (Determination of moment of inertia of a flywheel about its own axis of rotation)

गतिपालक चक्र घूर्णन ऊर्जा संग्रहित करने वाला एक बड़ा भारी पहिया होता है जो अपने केन्द्र से गुजरती हुई एक लम्बी बेलनाकार धुरी (cylindrical axle) पर घूमता है । गतिपालक चक्र के द्रव्यमान का अधिकांश भाग उसकी नेमि (rim) पर वितरित होता है तथा इसका द्रव्यमान - केन्द्र घूर्णन अक्ष पर होता है जिससे यह किसी भी स्थिति में ठहर सकता है । इसे दो बाल बियरिंग की सहायता से चित्र 12.10 के अनुसार इस प्रकार समंजित कर दिया जाता है कि इसकी धुरी फर्श से उचित ऊँचाई पर क्षैतिज स्थिति में बनी रहे । बाल बियरिंग में स्नेहक तरल लगाकर घर्षण को न्यूनतम कर लिया



चित्र 12.10

जाता है । चक्र की धुरी पर एक छोटी खूँटी (peg) P लगी रहती है । एक पतली डोरी के एक सिरे पर छोटा सा फंदा (loop) लगाकर खूँटी P में फंसा दिया जाता है जिससे कि आवश्यकता पडने पर डोरी खूँटी से आसानी से अलग हो जाये । डोरी की लगभग पूरी लम्बाई धुरी के ऊपर इस प्रकार लपेट दी जाती है कि उसके फेरे एक दूसरे के ऊपर न चढ़े । डोरी के दूसरे सिरे पर पलडे की सहायता से

द्रव्यमान m लटकाया जाता है । यहाँ ध्यान रखने योग्य है कि डोरी की लम्बाई खूँटी की फर्श से ऊँचाई की अपेक्षा कम होनी चाहिये ।

द्रव्यमान m को पृथ्वी के गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र में गिरने दिया जाता है । इससे डोरी की लपेटे खुलनी लगती है जिससे गतिपालक चक्र घूमने लगता है । जब लपेटी हुई पूरी डोरी खुल जाती है तो फंदा खूँटी से अलग हो जाता है । उपकरण में लगे गणक (counter) की सहायता से डोरी के अलग होने तक धुरी द्वारा लगाये गये चक्करों की संख्या ज्ञात हो जाती है । मान लिजिये कि इस दिशा पर द्रव्यमान m का रेखीय वेग v तथा चक्र का कोणीय वेग ωv हो जाता है । द्रव्यमान m के धुरी से h ऊँचाई नीचे गिरने पर उसकी स्थितिज ऊर्जा में mgh के तुल्य कमी हो जाती है । स्थितिज ऊर्जा में यह कमी गतिपालक चक्र तथा द्रव्यमान m को गतिज ऊर्जा प्रदान करने में तथा घर्षण के विपरीत कार्य करने में प्रयुक्त होती है । ऊर्जा संरक्षण से स्पष्ट है कि

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 + n_1 f \qquad ....(12.24)$$

जहाँ (i) $\frac{1}{2}mv^2$ गिरते हुये द्रव्यमान द्वारा प्राप्त गतिज ऊर्जा है,

(ii) $\frac{1}{2}I\omega_0^2$ गतिपालक चक्र द्वारा प्राप्त घूर्णन गतिज ऊर्जा है

तथा (iii) $n_1 f$ गतिपालक चक्र द्वारा n_1 चक्करों में घर्षण के विपरीत काम आयी कुल ऊर्जा है। (ऊर्जा f घर्षण के विपरीत प्रति चक्कर घूमने में काम आयी ऊर्जा है) ।

जब डोरी धुरी से अलग होती है उस अवस्था में गतिपालक चक्र अधिकतम कोणीय वेगω_0 से घूम रहा होता है । डोरी के अलग होने पर बाल बियरिंग पर घर्षण बल के कारण यह n_2 चक्करों के पश्चात स्थिर स्थिति प्राप्त कर लेता है । इस अवस्था में आप कह सकते हैं कि गतिपालक चक्र की पूरी घूर्णन गतिज ऊर्जा घर्षण के विपरीत काम करने में प्रयुक्त हो जाती है ।

अतः $n_2 f = \frac{1}{2}i\omega_0^{\ 2}$ तथा $f = \frac{1\omega_0^{\ 2}}{2n_2}$

F के इस मान को समी 12.24 में रखने पर

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2{}_2 + \frac{n_1}{2}\frac{I\omega_0^{\ 2}}{n_2}$$

या $mgh = \frac{1}{2}mr^2\omega^2{}_0 + \frac{1}{2}I\omega^2{}_0\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)$ यहाँ v=ω_0 (r धुरी की त्रिज्या हैं)

या $$I \frac{2mgh - mr^2\omega_0^{\ 2}}{\omega_0^{\ 2}\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right)}$$

यदि गतिपालक चक्र n_2 में t समय लगाता हो जिसमें उसका कोणीय वेग ω_0 से घटकर शून्य हो जाता है तो चक्र का मध्यमान कोणीय वेग $\omega_0/2$ होगा (यहीं यह मान लिया जाता है कि? समय के अन्तर्गत घर्षण समान बना रहेगा) ।

अत: $\frac{\omega_0}{2} = \frac{2rn_2}{t}$ या $\frac{\omega_0}{2} = \frac{2rn_2}{t}$

ω_0 के इस मान को समी. 12.25 में रखने पर

$$I = \frac{2mgh - mr^2 \frac{16r^2n^2{}_2}{t^2}}{\frac{16r^2n_2{}^2}{t^2}\left(1+\frac{n_1}{n_2}\right)} \quad ....(12.25)$$

समी 12.26 से किसी गतिपालक चक्र जड़त्व आघूर्ण परिकलित किया जा सकता हैं |.

बोध प्रश्न (self assessment questions)

10. गतिपालक चक्र क्या है । परिभाषित कीजिए ।

....

....

11. यदि यह मान लिया जावे कि किसी गतिपालक चक्र (त्रिज्या R) का' सम्पूर्ण' (M) उसकी रिम एकत्रित हो तो इसके जड़त्व आघूर्ण का व्यंजक क्या होगा ।

………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………

उदाहरण 12.2 एक R त्रिज्या व M द्रव्यमान का ठोस गोला क्षैतिज दिशा में बिना फिसले u वेग से लुढक रहा है । तत्पश्चात यह एक पहाड़ पर चढ़ जाता है । पहाड़ पर चढ़ने की अधिकतम ऊँचाई ज्ञात कीजिये ।

हल: चूँकि गोला बिना फिसले लुढ़क रहा है, अत: इसकी कुल गतिज ऊर्जा (E_p)

$$E_r = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mu^2 + \left(\frac{2}{5}MR^2\right)\frac{u^2}{R^2}$$

या $$E_r = \frac{7}{10}Mu^2$$

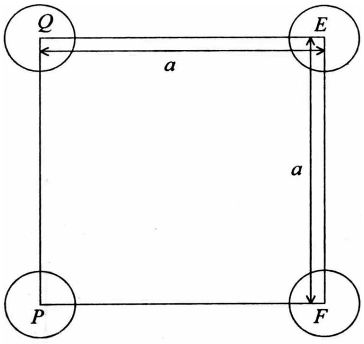
यदि पिण्ड h ऊँचाई तक पहाडी पर चढ़ता है तो इसकी कुल गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जायेगी क्योंकि गुरूत्व बल के अन्तर्गत पिण्ड की यांत्रिक ऊर्जा सुरक्षित रहती है । अत:

$$\frac{7}{10}Mu^2 = Mgh \text{ या } h = \frac{7u^2}{10g}$$

अर्थात् गोला अधिकतमh= $h = \frac{7u^2}{10g}$ ऊँचाई तक पहाडी पर चढेगा ।

उदाहरण 12.3 चार गोले जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या R तथा द्रव्यमान M है, एक a भुजा के वर्ग के चारों कोनों पर रखे हैं । सम्पूर्ण तंत्र के जड़त्व आघूर्ण का परिकलन वर्ग की किसी भुजा को अक्ष मानकर कीजिये ।

हल: चित्र 12.11 में चार समान गोले जिनके केन्द्र P,Q,E तथा F हैं; भुजा a के वर्ग के कोनों पर रखे हुये हैं । प्रत्येक गोले का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है । हम इसकी भुजा PQ के सापेक्ष तंत्र का जड़त्व आघूर्ण परिकलित करेंगे ।



चित्र 12.11

PQ भुजा के सापेक्ष P तथा Q गोलों का जड़त्व आघूर्ण $\frac{2}{5}MR^2+\frac{2}{5}MR^2$ होगा ।

अत: पूरे तंत्र का PQ के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I=\frac{2}{5}MR^2+\frac{2}{5}MR^2+Ma^2+\frac{2}{5}MR^2+\frac{2}{5}MR^2+Ma^2$$

या $$I=\frac{8}{5}MR^2+2Ma^2$$

उदाहरण 12.4 एक डोरी एक गतिपालक चक्र की धुरी (axle) जिसकी त्रिज्या 2 सेमी. है, के चारों ओर लपेटी गयी है और 2 किलोग्राम का एक द्रव्यमान डोरी के स्वतंत्र सिरे से लटकाया गया है । यह द्रव्यमान स्थिरावस्था में प्रारम्भ होकर 200 सेमी गिरकर धुरी से अलग हो जाता है । द्रव्यमान के अलग होने पर गतिपालक चक्र स्थिरावस्था में आने से पहले 8 सेकण्ड में 18 चक्कर लगाता है तो ज्ञात कीजिये-

(i) अलग होने के समय द्रव्यमान की गतिज ऊर्जा क्या होगी ।

(ii) गतिपालक चक्र का जड़त्व आघूर्ण क्या है ।

हल: धुरी से अलग होने पर द्रव्यमान की गतिज ऊर्जा (E)

$$E=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}M\pi^2\omega^2=\frac{1}{2}M\pi^2\left(\frac{4\pi n}{t}\right)^2$$

जहाँ $$\omega=\frac{4rn_2}{t}=4r\times\frac{18}{6}=12\pi$$

अत: $$E=\frac{1}{2}\times\left(2\times10^{-2}\right)^2\times144\pi^2$$

यदि को 10 मान लिया जाये तो

$$E=\left(2\times10^{-2}\right)^2\times1440=1440\times4\times10^{-4}=576\times10^{-3}\ j$$

$$E=567\times10^{-3}$$

गतिपालक चक्र का जड़त्व आघूर्ण (I)

$$I=\frac{m\left(ght^2-8r^2n^2r^2\right)}{8\pi^2n_2\left(n_1+n_2\right)}$$

अत: $$I=\frac{2\left[9.8\times(6)^2-8\pi^2\times(18)^2\times\left(2\times10^{-2}\right)^2\right]}{8\pi^2\times\left[18+\frac{50}{\pi}\right]}$$

जहाँ $n_1 = \frac{200}{2\pi \times 2} = \frac{50}{\pi}$

अत: $I = \frac{2\left[9.8 \times 72 - 8\pi^2 \times 1296 \times 10^{-4}\right]}{8\pi^2 \times 18 \times 33.9}$

या I=0.028 किग्रा - मी^{2}

12.5 सारांश (Summary)

बेलन, गोलीय कोश तथा गोले के विभिन्न अक्षों के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण के मान-

- ठोस बेलन के लिए उसकी ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण $I = \frac{MR^2}{2}$
- ठोस बेलन का उसकी लम्बाई के लम्बवत् एवं द्रव्यमान-केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जडत्व' आघूर्ण

$$I_{yy^1} = M\left(\frac{L^2}{12} + \frac{R^2}{4}\right)$$

- खोखले बेलन के लिए उसकी ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण $I = \frac{M}{2}\left(R_1^{\ 2} + R_2^{\ 2}\right)$
- खोखले बेलन का उसकी लम्बाई के लम्बवत् एवं द्रव्यमान-केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण

$$I = M\left[\frac{R_1^{\ 2} + R_2^{\ 2}}{4} \frac{L^2}{12}\right]$$

- गोलीय कोश के लिए उसकी ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जडत्व आघूर्ण $I = \frac{2}{3}MR^2$
- गोले का ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I = \frac{2}{5}MR^2$
- खोखले गोले का उसकी ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I = M\left[\frac{2}{5}\left(\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}\right)\right]$

12.6 शब्दावली (Glossary)

खोखला बेलन	Hollow cylinder
खोखला गोला	Hollow sphere
गतिपालक चक्र	Fly wheel
गणक	Counter
गोला	Sphere
गोलीय कोश	Spherical shell
घूर्णन अक्ष	Axis of rotation

जड़त्व आघूर्ण	Moment of inertia table
जड़त्व मंच	Inertia table
विविक्त	Discrete
बेलन	Cylinder
बेलनाकार कोश	Cylindrical shell
सतत	Continuous

12.7 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1.	D.S Mathur	Mechanics	S.Chand & Co., New Delhi
2.	Berkley	Mechanics	New York
3.	Ghose	Mechanics	Shiv Lal & Co., Agra
4.	B.K. Agrawal & P.C Agrawal	Mechanics	Sahitya Bhawan, Agra
5.	जगदीश चन्द्र उपाध्याय	नवीन यांत्रिकी	रामप्रसाद एण्ड सन्स, आगरा
6.	के.के सरकार -आर.एन.शर्मा	यांत्रिकी	साहित्य भवन, आगरा

12.8 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment question)

1. $I = M\left(\frac{R^2}{2} + \frac{L^2}{I2}\right)$

2. $I=MR^2$

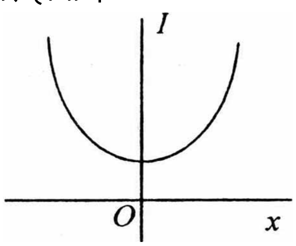
3. $I \alpha R^4$

4. $I = \frac{5}{3}MR^2$

5. $k = \pm\sqrt{\frac{5}{3}R}$

6. $I_{diameter} = \frac{2}{7}I$

7. ग्राफ चित्रानुसार होगा ।



8. $I = \frac{2}{3}M\left(\frac{R^2 - r^5}{R^3 - r^3}\right) + Mr^2$

9. मरोडी दोलक एक ऐसी व्यवस्था है जिसमें एक प्रस्तास्थ तार का ऊपरी सिरा एक दृढ़ आधार से क्लैम्प किया हुआ होता है और तार के निचले सिरे पर कोई भारी गोला या बेलन या वृत्ताकार चकती क्षैतिज रूप से लटकी रहती है । मुक्त सिरे पर लटके गोले, बेलन या चकती की ज्यामितीय अक्ष तार के अक्ष के अनुदिश होती है । चकती, बेलन या गोले को तार की अक्ष के समाक्षत रखकर तार में अल्प कोण का ऐंठन उत्पन्न करने पर प्रत्यास्थता गुण के कारण प्रत्यानन बल आघूर्ण उत्पन्न हो जाता है जिसके कारण पिण्ड मरोडी दोलन प्रारम्भ कर देता है ।

10. गतिपालक चक्र घूर्णन ऊर्जा संग्रहित करने वाला एक बड़ा भारी पहिया होता है जो अपने केन्द्र से गुजरती हुई एक लम्बी बेलनाकार धुरी पर घूमता है । गतिपालक चक्र के द्रव्यमान का अधिकांश भाग उसकी नेमि पर वितरित होता है तथा इसका द्रव्यमान-केन्द्र घूर्णन अक्ष पर होता है जिससे यह किसी भी स्थिति में ठहर सकता है ।

12.9 अभ्यासार्थ प्रश्न

अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type question)

1. समान द्रव्यमान, त्रिज्या तथा आकृति की खोखली तथा ठोस वस्तुओं में से किसका जड़त्व आघूर्ण अधिक होगा?
2. गतिशील वाहनों के पहिये बीच में से खोखले तथा परिधि पर मोटे क्यों बनाये जाते हैं?
3. एक M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या के गोलीय कोश के लिये उसकी ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष घूर्णन त्रिज्या का मान बताइये।
4. एक M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या के ठोस गोले का उसकी स्पर्श रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण का मान बताइये।
5. एक M द्रव्यमान के खोखले गोले जिसकी वाहरी तथा आंतरिक त्रिज्यायें क्रमश: R तथा r हैं का उसकी वाहरी स्पर्श रेखा के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण का मान बताइये ।

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type Question)

6. किसी ठोस बेलन का उसकी लम्बाई के लम्बवत् तथा द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण का परिकलन कीजिये ।
7. किसी ठोस बेलन का इसके व्यास के परित: जड़त्व आघूर्ण का परिकलन कीजिये ।
8. गोलीय कोंश का इसके केन्द्र के परित: अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण परिकलित कीजिये ।
9. किसी गतिपालक चक्र का उसकी स्वयं की घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण परिकलित करने की प्रायोगिक विधि समझाते हुए इसका व्यंजक परिकलित कीजिये ।
10. जड़त्व आघूर्ण मंच की सहायता से किसी अनियमित आकृति की वस्तु के जड़त्व आघूर्ण का निर्धारण किस प्रकार किया जा सकता है ।

आंकिक प्रश्न (Numerical Question)

11. भिन्न-भिन्न घनत्व लेकिन समान द्रव्यमान के ठोस गोलों के जड़त्व आघूर्ण का उनके घनत्व के साथ क्या सम्बन्ध होगा।

(**उत्तर:** $I\alpha \dfrac{1}{(d)^{2/3}}$)

12. एक गतिपालक चक्र जिसका द्रव्यमान 1000 किग्रा. तथा त्रिज्या 2 मी. है अपनी धुरी पर घूम रहा है । इसके चक्कर लगाने की आवृत्ति में 5 सेकण्ड में 15 की वृद्धि हो जाती हो तो इस पर लगाये गये बल आघूर्ण का परिकलन कीजिये ।

(**उत्तर:** 376 x10 न्यूटन-मी.)

13. किग्रा. द्रव्यमान तथा 0.20 की त्रिज्या के एक ठोस बेलन पर एक हल्की रस्सी लपेटी हुई है । रस्सी के खुले सिरे पर 60 न्यूटन का बल लगाकर खींचा जाता है । बेलन में उत्पन्न कोणीय त्वरण का मान ज्ञात कीजिये ।

(**उत्तर:** 120 रेडियन/सेकेण्ड^2)

14. r त्रिज्या के अर्द्ध गोले की समतल सतह को उसी पदार्थ के r त्रिज्या तथा $2l$ लम्बाई के बेलन की समतल सतह से चिपका दिया जाता है । यदि निकाय का कुल द्रव्यमान M हो तो इस निकाय का बेलन की ज्यामितीय अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण का मान परिकलित कीजिये ।

(**उत्तर:** $\left[\dfrac{Mr^2\left(I+\dfrac{4}{15}r\right)}{\left(2I+\dfrac{2}{3}r\right)}\right]$)

इकाई-13

पदार्थ के प्रत्यास्थ गुण
(Elastic Properties of Matter)

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप

- पदार्थ के प्रत्यास्थ गुण को समझ पायेंगे;
- पदार्थ की प्रत्यास्थ सीमा की अवधारणा की अनुभूति कर सकेंगे;
- पदार्थ पर बाहय बल लगाये जाने पर पदार्थ में हो सकने वाली विकृतियों के बारे में समझ सकेंगे;

- पदार्थ के विभिन्न प्रत्यास्थ गुणांकों की संकल्पना समझ सकेंगे;
- प्रत्यास्थ गुणांकों के आपसी सम्बन्ध जान सकेंगे ।

13.1 प्रस्तावना (Introduction)

पिछली इकाईयों में हमने यह पढ़ा है कि अनेक कणों से बने हुए पिण्ड (पदार्थ) में इसके कण एक बल द्वारा एक दूसरे के साथ जुड़े रहते हैं:, जिसे अन्योन्य बल कहते हैं । पिण्ड में कणों के मध्य लगने वाले सभी अन्योन्य बलों का कुल प्रभाव (कुल बल) शून्य होता है ।

जब किसी वस्तु या पिण्ड पर बाहय बल लगाने पर पिण्ड के कणों के मध्य की दूरी यथावत (अपरिवर्तित) रहती है तो उस पिण्ड या वस्तु को दृढ़ पिण्ड कहा जाता है । परन्तु कोई भी वस्तु या पिण्ड पूर्णतः (perfectly rigid) नहीं है:, इस कारण प्रत्येक वस्तु या पिण्ड को एक पर्याप्त मात्रा में बाहय बल लगा कर कम या अधिक मात्रा में विकृत किया जा सकता है । यानि कि बाहय बल लगाकर वस्तु का आकार (size) या इसकी आकृति (shape) में परिवर्तन किया जा सकता है ।

बाहय बल लगाने पर वस्तु की उत्पन्न विकृत अवस्था में वस्तु के कणों के मध्य की दूरी अपेक्षाकृत बदल जाती है और वस्तु (पिण्ड) में एक ऐसा गुण उत्पन्न हो जाता है जो बाहय लगने वाले बल का विरोध करता है । यह गुण, थोड़ी-बहुत मात्रा में सभी पदार्थो में मिलता है । इसी गुण के कारण बाहय बल को हटाने पर अभीष्ट वस्तु अपनी प्रारम्भिक अवस्था में आने का प्रयास करती है । इसी गुण को ही प्रत्यास्थता (elasticity) कहते हैं ।

इस इकाई के अनुच्छेद 13.2 व 13.3 में आप पदार्थ के प्रत्यास्थता गुण एवं प्रत्यास्थ सीमा के अतिरिक्त विभिन्न प्रत्यास्थ गुणांकों की संकल्पना का अध्ययन करेंगे । प्रत्यास्थता के गुण धर्मो को समझने के लिए आवश्यक प्रत्यास्थता प्रमेयों की अवधारणा का अध्ययन अनुच्छेद 13.4 में करेंगे । पदार्थ के लिए परिभाषित प्रत्यास्थ गुणांकों के विभिन्न सम्बन्धों को अनुच्छेद 13.5 में पढ़ेंगे ।

13.2 प्रत्यास्थता (Elasticity)

प्रत्यास्थता; पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण कोई वस्तु बाहय बल लगाने पर अपने आकार या आकृति के परिवर्तन का विरोध करती है । बाहय बल लगाने पर वस्तु की परिवर्तित अवस्था को विकृत-अवस्था (deformed state) कहते हैं और जिस बाहय बल के कारण वस्तु विकृत होती है, उसे विरूपक बल कहते हैं ।

प्रत्यास्थता के गुण के कारण ही विकृत अवस्था वाली वस्तु, बाहय बल हटा लेने पर, अपने प्रारम्भिक आकार या आकृति को प्राप्त करने का प्रयास करती है । सही मायनों में होता यह है कि जब किसी वस्तु पर बाहय बल लगाया जाता है तो उसके कणों में आपेक्षिक स्थानान्तर होता है और कणों के मध्य की दूरी बदलने से वस्तु विकुत हो जाती है । वस्तु की इस विकृति का विरोध करने के लिए पदार्थ में ही आन्तरिक प्रत्यानयन बल (पूर्व अवस्था में लाने वाला बल) लगने लगता है । शुरू में तो इन आन्तरिक प्रत्यानयन बलों का परिमाण कम होता है, लेकिन जस जैसे वस्तु अधिक विकृत होती जाती है तो आन्तरिक प्रत्यानयन बलों का परिमाण भी बढ़ने लगता है और अन्त में एक ऐसी स्थिति आ जाती है जब आन्तरिक प्रत्यानयन बल का मान, बाहय विरूपक बल के बराबर हो जाता है । और इस सन्तुलन अवस्था पर वस्तु का और अधिक विकृत होना रूक जाता है ।

प्रकृति (Nature) में ऐसी वस्तुयें भी हैं जिनसे विरूपक बाहय बल हटा लेने परे, वे पूर्णरूप से अपनी प्रारम्भिक अवस्था (आकार तथा आकृति) में आ जाती हैं:, उन्हें पूर्ण प्रत्यास्थ (perfectly elastic) वस्तु कहते हैं । इसके विपरीत ऐसी वस्तुयें भी हो सकती हैं बाहय बल लगाने पर स्थायी रूप से विकृत हो जाती है और बाहय बल हटा लेने पर अपनी प्रारम्भिक अवस्था में आने का तनिक भी प्रयास नहीं करती हैं अर्थात उनमें प्रत्यास्थता का गुण बिल्कुल भी नहीं होता:, उन्हें पूर्ण प्लास्टिक कहते हैं ।

वास्तव में तो कोई भी वस्तु पूर्ण-प्रत्यास्थ अथवा पूर्ण-प्लास्टिक नहीं है । भौतिक जगत की सभी वस्तुयें इन दोनों सीमाओं के मध्य होती हैं । लगभग पूर्ण प्रत्यास्थ वस्तु का उदाहरण क्वार्ट्ज की डोरी और लगभग पूर्ण प्लास्टिक का उदाहरण धान का छिलका या गीली मिट्टी है ।

पदार्थो में प्रत्यास्थता गुण का अध्ययन करने के लिए यहाँ सबसे पहले कुछ परिभाषाओं को समझना जरूरी है-

13.2.1 प्रतिबल (Stress)

पदार्थ पर बाहय बल लगाने पर जब इसकी विकृत सन्तुलित अवस्था प्राप्त हो जाती है तब विरूपक बाहय बल का मान पदार्थ के अन्दर उत्पन्न प्रत्यानयन बल के बराबर होता है । ऐसी विकृत साम्य अवस्था में वस्तु के इकाई क्षेत्रफल पर कार्य करने वाले आन्तरिक बलों (प्रत्यानयन बल) के परिमाण को **प्रतिबल** कहते हैं ।

यदि पदार्थ की साम्य विकृत अवस्था में क्षेत्रफल A पर कार्यरत बाहय बल (जो प्रत्यानयन बल के तुल्य है) I F है तो-

$$\text{प्रतिबल} = \frac{\text{साम्य विकृत अवस्था में प्रत्यानयन बल बाह्य बल}}{\text{प्रभावी क्षेत्रफल}} = \frac{\text{बाह्य बल } F}{\text{क्षेत्रफल} A} \qquad \text{.........(13.1)}$$

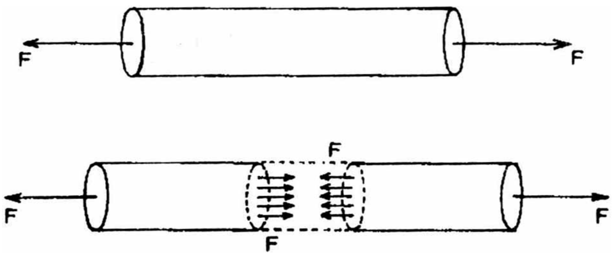
प्रतिबल का अन्तरराष्ट्रीय मात्रक "न्यूटन/मीटर^2," है ।

वस्तु पर लगने वाले बाहय बल की प्रकृति (nature) के अनुसार प्रतिबल कई प्रकार के होते हैं-

(i) अनुदैर्ध्य प्रतिबल (Longitudinal Stress)- किसी वस्तु की लम्बाई के समान्तर वस्तु के इकाई लम्बवत काट क्षेत्रफल पर लगने वाले बल के मान को अनुदैर्ध्य प्रतिबल कहते हैं ।

अनुदैर्ध्य प्रतिबल दो प्रकार के होते हैं ।

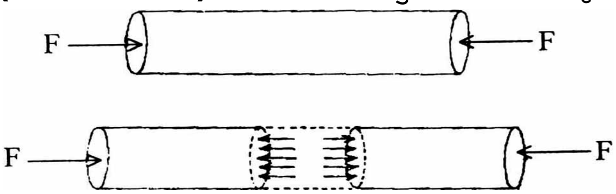
(a) **तनन प्रतिबल (Tensile Stress) -** किसी छड़ अथवा तार की अनुप्रस्थ लम्बवत काट पर बाहर की ओर (जो तम्बाई में वृद्धि करने में काम आता है) प्रति इकाई लम्ब काट पर लगने वाले बल के परिमाण को तनन **प्रतिबल** कहते हैं । देखिये चित्र 13.1 ।



चित्र 13.1

(b) **संकुचन प्रतिबल (Compressive Stress) -** किसी छड़ अथवा तार की लम्बकाट के लम्बवत अन्दर की ओर (जो लम्बाई में संकुचन करने में काम आता है) प्रति इकाई लम्ब काट पर लगने वाले बल के परिमाण को **संकुचन प्रतिबल** कहते हैं । देखिये चित्र 13.2।

(2) अभिलम्ब प्रतिबल (Nomal Stress)- जब किसी वस्तु पर बाहय बल, पृष्ठ के लम्बवत सभी:।

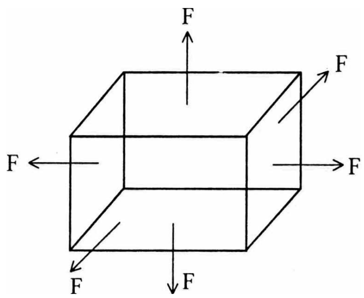


(3)

(4) चित्र 13.2

दिशाओं में कार्य करता है तो पृष्ठ के इकाई क्षेत्रफल पर लगे अभिलम्बवत बल के परिमाण को अभिलम्ब **प्रतिबल** कहते हैं । देखिये चित्र 13.3 ।

अभिलम्ब प्रतिबल से वस्तु या पिण्ड आकार में परिवर्तन होता है ।

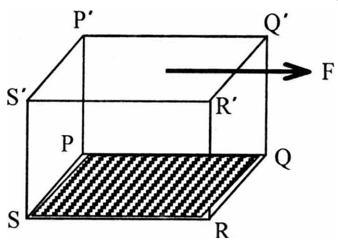


चित्र 13.3

यदि वस्तु के क्षेत्रफल A पर अभिलम्ब बल F हो तो अभिलम्ब प्रतिबल F/A होगा जो दाब P के रूप में भी परिभाषित होता है ।

(3) स्पर्शीय (अथवा अपरूपण) प्रतिबल (Tangential or Shearing Stress)- किसी वस्तु के पृष्ठ पर स्पर्शीय दिशा में इकाई क्षेत्रफल पर लगने वाले बल के परिमाण (मान) को स्पर्शीय (अथवा अपरूपण) प्रतिबल कहते हैं ।

चित्र 13.4 में दिखाये अनुसार आयताकार षटफलक का पृष्ठ PQRS स्थिर है और उसके समान्तर वाले पृष्ठ P'Q'R'S पर स्पर्शीय बल F लगाया गया है तो-



चित्र 13.4

जहाँ;A पृष्ठ P'Q'R'S का क्षेत्रफल है ।

स्पर्शीय या अपरूपण प्रतिबल $= \frac{\text{बल F}}{\text{प्रभावित क्षेत्रफल A}}$ ....(13.2)

ध्यान रहे कि **स्पर्शीय प्रतिबल,** वस्तु की **आकृति** (Shape) में **परिवर्तन** करता है ।

13.2.2 विकृति (Strain)

जब वस्तु पर बल लगाया जाता है तो वस्तु की लम्बाई आयतन या आकृति में परिवर्तन हो जाता है और हम उस वस्तु को **विकृत** (deformed) कहते हैं । इस प्रकार-

विकृत अवस्था में वस्तु में होने वाले भिन्नात्मक परिवर्तन (Fractional Change)को विकृति कहते हैं । अर्थात्

$$\text{विकृति} = \frac{\text{बाहय बल के करण वस्तु के आकार में परिवर्तन /}}{\text{वस्तु का प्रारम्भिक आकार}}$$

....(13.3)

विकृति तीन प्रकार की होती है-

(1) अनुदैर्ध्य विकृति (Longitudinal Strain) - वस्तु की लम्बाई के अनुदिश बाहय बल के कारण वस्तु की लम्बाई में होने वाले परिवर्तन तथा वस्तु की प्रारम्भिक लम्बाई के अनुपात को अनुदैर्ध्य विकृति कहते हैं । यदि L लम्बाई की वस्तु की लम्बाई के अनुदिश बल लगाने पर इसकी लम्बाई में परिवर्तन l हो तो वस्तु पर लगने वाले बल की प्रकृति (वृद्धि कारक या संकुचन कारक) के आधार पर अनुदैर्ध्य

$$\text{अनुदैर्ध्य विकृति} = \frac{\text{वस्तु की लम्बाई में परिवर्तन}}{\text{वस्तु की प्रारम्भिक लम्बाई}} = \frac{l}{L} \qquad ....(13.4)$$

विकृति दो प्रकार की हो सकती है-

(a) तनन विकृति (Tensile Strain) - यदि बाहय बल लगाने से वस्तु की लम्बाई में वृद्धि होती हो तो एकांक लम्बाई में होने वाली लम्बाई वृद्धि को तनन विकृति कहते हैं ।

(b) संकुचन या सम्पीडन विकृति (Compressive Strain) - यदि बाहय बल लगाने से वस्तु की लम्बाई में कमी होती हो तो एकांक लम्बाई में होने वाली लम्बाई संकुचन को संकुचन विकृति कहते हैं ।

(2) आयतन विकृति (Volume Strain) - जब किसी वस्तु के पृष्ठ के लम्बवत सभी दिशाओं में बाहय बल लगाया जाता है तो उस वस्तु के आयतन में परिवर्तन (वृद्धि या कमी) होता है । इस प्रकार-

बाहय विरूपक बल के कारण किसी वस्तु के आयतन में होने वाले परिवर्तन तथा उसके प्रारम्भिक आयतन के अनुपात को आयतन विकृति कहते हैं ।

यदि बाहय बल लगाने पर वस्तु का आयतन v से परिवर्तित होकर $v \pm \Delta v$ हो जाता हो तो-

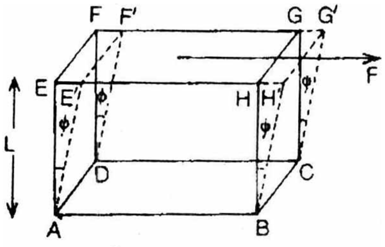
(3) अपरूपण विकृति (Shearing Strain) -किसी वस्तु के एक तल को स्थिर (Fixed) रख कर

$$\text{आयतन विकृति} = \frac{\text{आयतन में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक आयतन}} = \frac{\pm\Delta v}{v} \qquad ...(13.5)$$

उसके समान्तर तल पर **स्पर्शीय** बाहय बल लगाते हैं तो इस बाहय बल के कारण स्थिर तल और बाहय बल के लम्बवत तल एक निश्चित कोण से विस्थापित हो जाता है:, इसी कोण को अपरूपण विकृति या अपरूपण कोण **(Shearing angle)**हैं।

याद रखना है कि अपरूपण विकृति होने की अवस्था में वस्तु की लम्बाई या आयतन नहीं बदलता है ।

चित्र 13.5 में एक घनाभ का तल ABCD स्थिर है तथा इसके समान्तर तल EFGH पर एक स्पर्शीय बल F लगाया गया है जिसके कारण यह तल विस्थापित होकर E'F'G'H स्थिति में पहुंच गया है । यानि कि बाहय बल F के कारण स्थिर तल ABCD तथा कार्यकारी बल F के लम्बवत तल ABFE कोण से विचलित होकर ABF'E स्थिति में पहुंच जाता है ।



चित्र 13.5

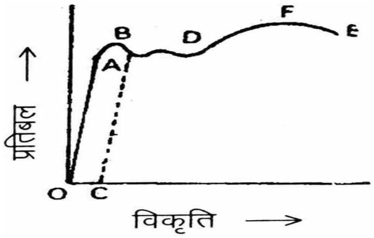
इस प्रकार कोण ϕ अपरूपण विकृति है ।चित्रानुसार AE=L तथा EE'= l हो तो

अपरूपण कोण या अपरूपण विकृति ϕ= l/L (13 .6)

यह एक विमा रहित राशि हैं ।

13.2.3 प्रत्यास्थ सीमा (Elastic limit)

वस्तु की लम्बाई की दिशा में लगाये जाने वाले बाहय बल का मान जैसे जैसे बढ़ाते जाते हैं:, तदनुसार वस्तु की लम्बाई में वृद्धि होतीं जाती है । इस क्रम में बाहय बल बढायें जाने पर एक ऐसी स्थिति **सीमा** (limit) आती है कि उसके बाद बाहय बल बढ़ाने पर लम्बाई में वृद्धि तुलनात्मक रूप से अधिक होने लगती है और वस्तु स्थायी रूप से विकृत हो जाती है तथा बाहय बल को हटाने पर भी वस्तु अपनी पूर्व अवस्था में नहीं आ पाती । इस सीमा का प्रत्यास्थ सीमा कहते हैं । अर्थात् **प्रत्यास्थ सीमा वस्तु का वह भौतिक गुण है जहां से वस्तु पर लगने वाले बाहय बल को हटाने पर वस्तु अपनी पर्व स्थिति में लौट सकती है ।** अत: वस्तु पर लगने वाले बाहय बल का वह सीमान्त मान, जहां तक वस्तु में प्रत्यास्थता गुण बना रहा है ,पदार्थ की प्रत्यास्थ-सीमा निर्धारित करता है । चित्र 13.6 में A बिन्दु प्रत्यास्थ सीमा व्यक्त करता है ।



चित्र 13.6

पदार्थ की प्रत्यास्थ सीमा के पश्चात भी यदि लगने वाले बाहय बल के मान को बढ़ाया जाता है तो एक स्थिति भी है कि बिना बाहय बल बढ़ाये भी वस्तु की लम्बाई में स्वत: वृद्धि प्रारम्भ हो जाती है:, इस विशेष स्थिति B को **पराभव बिन्दु** (yielding point) कहते हैं ।

पदार्थ के पराभव बिन्दु (वह स्थिति जिस पर बाहय बल में बिना वृद्धि किये, लम्बाई में स्वत: वृद्धि प्रारम्भ हो) के पश्चात विकृति में काफी वृद्धि हो जाती है और अन्तत: (तार के रूप में) टूट जाता है । इस स्थिति E को पदार्थ का **विच्छेदन बिन्दु** (Breaking point) कहते है ।

सामान्यत: जब वस्तु पर लगाये गये बाहय बल को हटा लिया जाता है तो वस्तु तुरन्त अपनी प्रारम्भिक अवस्था में न आकर पूर्व स्थिति में आने में कुछ समय लेता है । इस प्रकार किसी पदार्थ

से बाहय बल हटा लेने पर उसे अपनी पूर्व स्थिति में आने में लगे हुए समय को **प्रत्यास्थ श्रांति काल** (elastic relaxation time) कहते हैं|

अनुभव में ऐसा पाया जाता है कि जब किसी वस्तु पर बाहय बल को **शीघ्रता** से बढ़ाया जाता है तो बाहय बल को हटाने पर वस्तु अपने प्रत्यास्थता गुण का सही-सही पालन नहीं करती है । पदार्थ के इस गुण को **प्रत्यास्थ थकान** (Elastic fatigue) कहते हैं ।

पदार्थ में प्रत्यास्थ थकान के कारण:, पदार्थ में उत्पन्न विकृति सदैव प्रतिबल से तदनुसार पिछड़ जाती है फलत: पदार्थ पर भार बढ़ाते व घटाते समय वस्तु में उत्पन्न विकृतियों का मान समान नहीं रहता है ।

इस प्रकार वस्तु का वह गुण जिसके कारण विकृति, सदैव प्रतिबल से प्रकृति (कला) में पीछे रह जाती है, **प्रत्यास्थ शैथिल्यता** (Elastic Hysteresis)कहलाता हैं । अर्थात पदार्थ में विकृति का प्रतिबल से पिछड़ना **प्रत्यास्थ शैथिल्यता** का गुण कहा जाता है ।

13.2.4 हक का नियम (Hook’s Law)

वैज्ञानिक हुक द्वारा प्रतिपादित इस नियम के अनुसार

"प्रत्यास्थ सीमा में पदार्थ में उत्पन्न विकृति ,उस पर लग रहे प्रतिबल के समानुपाती होती है " अर्थात् कम प्रतिबल से कम विकृति और प्रतिबल अधिक होने पर उसी के अनुसार विकृति अधिक होती है । अत:-

$$\text{प्रतिबल} \propto \text{विकृति}$$

अर्थात्

$$\frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}} = \text{स्थिरांक } E \qquad ....(13.7)$$

यहां स्थिरांक E को प्रत्यास्थता गुणांक (Modulus of elasticity) कहते हैं । अन्तरराष्ट्रीय मात्रक पद्वति में प्रत्यास्थता गुणांक का मात्रक 'न्यूटन / मीटर^2 ' होता है ।

ध्यान रखना है कि प्रत्यास्थता गुणांक E का मान प्रतिबल तथा विकृति के मानों पर निर्भर नहीं करता है:, बल्कि केवल पदार्थ की भौतिक अवस्थाओं तथा पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है । प्रत्यास्थता गुणांक का मान पदार्थ के ताप पर भी निर्भर करता है ।

किसी पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणांक जितना अधिक होता है वह पदार्थ उतना ही अधिक प्रत्यास्थ कहा जाता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. प्रत्यास्थता से आप क्या समझते हैं ?

   ....

   ....

   ....

2. निम्न की परिभाषा एवं प्रकार समझाइए- (1) प्रतिबल (2) विकृति

....

....

....

3. प्रत्यास्थ सीमा से क्या अभिप्राय हैं |

....

....

....

....

4. पराभव बिन्दु तथा विच्छेदन की संकल्पना समझाइये|

....

....

....

5. हुक का नियम परिभाषित कीजिए

....

....

....

13.3 प्रत्यास्थता गुणांक (Modulus of Elasticity)

पदार्थ में कार्यरत अनुदैर्ध्य प्रतिबल, अभिलम्ब प्रतिबल तथा स्पर्शीय प्रतिबल के कारण पदार्थ में क्रमश: अनुदैर्ध्य विकृति; आयतन विकृति तथा अपरूपण विकृति उत्पन्न होती है । फलस्वरूप पदार्थ के तीन प्रकार के प्रत्यास्थता गुणांक परिभाषित होते हैं-

(i) यंग प्रत्यास्थता गुणांक (Young’ Modulus)-

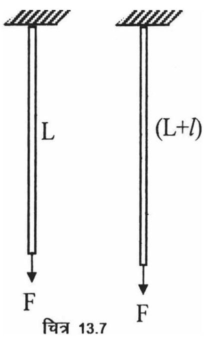
पदार्थ की प्रत्यास्थ सीमा में पदार्थ में कार्यरत अनुदैर्ध्य प्रतिबल; उसमें उत्पन्न अनुदैर्ध्य विकृति के अनुक्रमानुपाती होता है । इस प्रकार प्रत्यास्थ सीमा में-

अनुदैर्ध्य प्रतिबल तथा अनुदैर्ध्य विकृति के अनुपात को वस्तु के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता-गुणांक कहते हैं ।

यंग प्रत्यास्थता गुणांक को Y से व्यक्त करते हैं । अत:

अनुदैर्ध्य प्रतिबल

$$Y = \frac{\text{अनुदैर्ध्य प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}} \qquad ....(13.8)$$



चित्र 13.7

चित्र 13.7 में दर्शाए अनुसार यदि अनुप्रस्थ काट A तथा लम्बाई L के तार में लम्बाई के अनुदिश बल F लगाने पर लम्बाई वृद्धि l हो तो

अनुदैर्ध्य प्रतिबल =F/A

तथा अनुदैर्ध्य विकृति =l/L

ओयंग प्रत्यास्थता गुणांक $$Y = \frac{F/A}{l/L} = \frac{FL}{Al} \qquad ....(13.9)$$

यदि तार की त्रिज्या,r है तो लम्बकाट क्षेत्रफल A = πr^2

यंग प्रत्यास्थता गुणांक $= Y = \dfrac{FL}{\pi r^2 l}$ ....(13.9)

यंग प्रत्यास्थता गुणांक का S.I मात्रक न्यूटन/मीटर^2 है ।

(ii) आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (Bulk Modulus)

जब किसी ठोस अथवा तरल (द्रव अथवा गैस) पर अभिलम्ब अतिरिक्त बाहय बल लगाया (दाब परिवर्तन किया) जाता है तो उसका आयतन परिवर्तित होता है परन्तु इसकी आकृति (shape) अपरिवर्तित रहती है। इस स्थिति में निकाय की सतह पर समान रूप में लगा अतिरिक्त दाब (अभिलम्ब बाहय बल के कारण); अभिलम्ब प्रतिबल के बराबर होता है ।

हुक के नियम से प्रत्यास्थ सीमा में पदार्थ पर कार्यरत अभिलम्ब प्रतिबल (अतिरिक्त दाब) निकाय में उत्पन्न आयतन विकृति के अनुक्रमानुपाती होता है । इस प्रकार अभिलम्ब प्रतिबल तथा आयतन विकृति के अनुपात को आयतन प्रत्यास्थता गुणांक कहते है । आयतन प्रत्यास्थता गुणांक को k से प्रदर्शित करते हैं। अत: आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

$$\frac{K = \text{अभिलम्ब प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}} = \frac{\text{अतिरिक्त दाब}}{\text{आयतन विकृति}} \quad ....(13.11)$$

यदि निकाय का प्रारम्भिक दाब p तथा आयतन V है । और निकाय पर अतिरिक्त दाब Δp लगाने पर आयतन v-Δv जाता है तो

अभिलम्ब प्रतिबल= अतिरिक्त दाब Δp तथा आयतन विकृति $= -\dfrac{\Delta}{v} v$

$$\text{आयतन प्रत्यास्थता गुणांक } K = \frac{\text{अभिलम्ब प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}}$$

या आयतन प्रत्यास्थता गुणांक $k = \dfrac{\Delta p}{\dfrac{-\Delta v}{v}} = -v\left(\dfrac{\Delta p}{\Delta v}\right)$ ....(13.12)

यहाँ ऋण चिन्ह यह दर्शाता है कि निकाय पर दाब बढ़ने पर उसका आयतन कम होता है ।गैस निकाय में क्रमश: ताप अथवा ऊष्मा के नियत रहने पर

समतापीय आयतन प्रत्यास्थता गुणांक $k_T = -v\left(\dfrac{\Delta p}{\Delta v}\right)_T$ ....(13.13)

तथा समऊष्मीय आयतन प्रत्यास्थता गुणांक $k_Q = -v\left(\dfrac{\Delta p}{\Delta v}\right)_Q$ ....(1314)

के रूप में परिभाषित होते हैं ।

सम्पीड्यता (compressibility)

पदार्थो में सम्पीड्यता वह गुण है जिसमें बाहय बल लगाने पर उसके विकृत होने के परिमाण की अनुभूति होती है । दैनिक अनुभव में हम देखते हैं कि लोहे की पट्टिका पर हाथ के अँगूठे से बल लगाने पर पट्टिका पर कोई विकृति अनुभव नहीं (अत्यल्प होने के कारण) होती जबकि रबर की पट्टिका पर अँगूठे से बल लगाने पर पट्टिका थोड़ी दब जाती है । यानि कि लोहे में सम्पीड्यता कम और रबर में सम्पीड्यता अधिक होती है ।

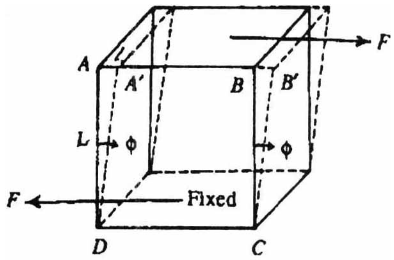
इस प्रकार पदार्थ के सम्पीड्यता गुण का मापन, उसके आयतन प्रत्यास्थता गुणांक के व्युत्क्रम के रूप में किया जाता है

सम्पीड्यता $= \dfrac{1}{\text{आयतन प्रत्यास्थता गुणांक}} = \dfrac{1}{k}$ ...(13.15)

निष्कर्षत: रबर की तुलना में लोहा अधिक प्रत्यास्थ और कम सम्पीड्य होता है ।

(iii) अपरूपण प्रत्यास्थता गुणांक या दृढता गुणांक (Modulus of Rigidity)

प्रत्यास्थ सीमा में स्पर्शीय अथवा अपरूपण बल लगाने पर पिण्ड या वस्तु का आयतन तो नियत रहता है लेकिन इसमें अपरूपण विकृति उत्पन्न हो जाती है । हुक के नियमानुसार प्रत्यास्थता सीमा में अपरूपण (अथवा स्पर्शीय) प्रतिबल, उत्पन्न अपरूपण विकृति के अनुक्रमानुपाती होती है । इस प्रकार प्रत्यास्थता सीमा में अपरूपण (अथवा स्पर्शीय) प्रतिबल और उत्पन्न अपरूपण विकृति के I अनुपात को दृढ़ता गुणांक कहते हैं । अपरूपण गुणांक या दृढ़ता गुणांक को η(ईटा) से प्रदर्शित करते हैं । चित्र 13.8



चित्र 13.8

चित्र 13.8 में दर्शाये अनुसार

$$\text{अपरूपण प्रतिबल } T = \frac{\text{स्पर्शीय बल } F}{\text{प्रभावी क्षेत्रफल } A}$$

तथा $$\text{अपरूपण विकृति } \phi = \frac{l}{L}$$

अत: $$\text{दृढ़ता गुणांक } \eta - = \frac{\text{अपरूपण प्रतिबल /}}{\text{अपरूपण विकृति}}$$

$$= \frac{T}{\phi} = \frac{F/A}{l/L} = \frac{FL}{Al} \quad ...(13.16)$$

दृढ़ता गुणांक का S.I मात्रक न्यूटन/ मीटर^2 हैं |

(iv) प्वाइसन निष्पत्ति (Poisson's Ratio)

प्वाइसन नामक वैज्ञानिक ने अनेक प्रयोगों के प्रेक्षण से यह पाया कि जब किसी वस्तु पर बल लगाया जाता है तो जहाँ एक ओर बल की दिशा में वस्तु की लम्बाई में परिवर्तन (वृद्धि या कमी) होती है, वहीं साथ-साथ बल के लम्बवत दिशा (चौड़ाई) में भी परिवर्तन (कमी या वृद्धि) प्रेक्षित होती है । इस प्रकार वस्तु पर बल लगाने से दो विकृतियाँ (i) अनुदैर्ध्य विकृति तथा (ii) अनुप्रस्थ विकृति साथ-साथ उत्पन्न होती है और ये दोनों विकृतियों में एक आपसी सम्बन्ध भी होता है ।

पदार्थ में साथ-साथ उत्पन्न विकृतियों को निम्नानुसार परिभाषित किया जाता है-

$$\text{अनुदैर्ध्य विकृति} = \frac{\text{बल की दिशा लम्बाई में परिवर्तन}}{\text{बल की दिशा में प्रारम्भिक लम्बाई}}$$

....(13.17)

(i) अनुदैर्ध्य विकृति को α से प्रदर्शित करते हैं ।

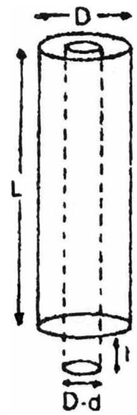
(ii) $$\text{अनुप्रस्थ विकृति} = \frac{\text{बल के लम्बवत दिशा में, चौड़ाई में परिवर्तन}}{\text{बल के लम्बवत दिशा में, चौड़ाई}} \quad ....(13.18)$$

अनुप्रस्थ विकृति β प्रदर्शित करते हैं |

प्वाइसन ने प्रेक्षणों से यह निष्कर्ष पाया कि किसी पदार्थ के लिए प्रत्यास्थ सीमा में अनुप्रस्थ विकृति (β) तथा अनुदैर्ध्य विकृति (α) का अनुपात **नियत** रहता है । इस प्रकार प्रत्यास्थ सीमा में अनुप्रस्थ विकृति (β) तथा अनुदैर्ध्य विकृति (α) के अनुपात को **प्वाइसन निष्पत्ति** (Poisson's Ratio) कहते हैं । प्वाइसन निष्पत्ति को σ से प्रदर्शित करते हैं ।

यह एक मात्रक रहित शुद्ध अनुपात है जिसका सैद्धान्तिक मान-1 ये 0.5 के मध्य होता है?

यदि हम दृढ़ आधार से लटके हुए लम्बाई L तथा व्यास D के तार के स्वतंत्र सिरे पर बलF



चित्र 13.9

लगाने पर लम्बाई में l तथा व्यास ने कमी d हो जाती है तो

अनुदैर्ध्य विकृति $\alpha = \frac{d}{D}$

तथा अनुप्रस्थ विकृति $\beta = \frac{d}{D}$

$$\therefore \text{प्वाइसन निष्पत्ति } \sigma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{d/D}{l/L} = \frac{dL}{lD} \qquad ....(13.19)$$

यदि लम्बाई में सूक्ष्मतम वृद्धि Δl तथा व्यास में कमी ΔD हो तो

$$\sigma = \frac{L}{D} = \frac{\Delta D}{\Delta L}$$

ठोस वस्तुओं में से प्वाइसन निष्पत्ति σ का प्रायोगिक मान 0.2 से 0.4 के मध्य पाया जाता है ।.

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

6. यंग प्रत्यास्थता गुणांक को परिभाषित कीजिए ।

....

....

....

7. आयतन प्रत्यास्थता गुणांक की परिभाषा दीजिए ।

....

....

....

8. दृढता गुणांक से आप क्या समझते है?

....

....

....

9. सम्पीड्यता से क्या आशय है?

....

....

....

10. प्वाइसन निष्पत्ति क्या है?

....

....

....

13.4 प्रत्यास्थता प्रमेय का कथन (statement of Theorems of Elasticity)

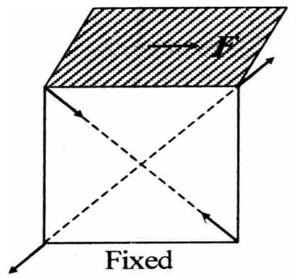
जब किसी वस्तु के आधार को स्थिर (fix) रख कर स्थिर तल के समान्तर, स्पर्शीय बल लगाया जाता है तो उसका आयतन तो नियत रहता है लेकिन वस्तु में अपरूपण (shearing) हो जाता है । वस्तु की इस अपरूपण स्थिति में प्रतिबल तथा विकृति के सन्दर्भ में निम्नांकित दो प्रमेय परिभाषित होती हैं- (1) अपरूपण प्रतिबल प्रमेय तथा (2) अपरूपण विकृति प्रमेय

13.4.1 अपरूपण प्रतिबल प्रमेय (Shearing stress theorem)

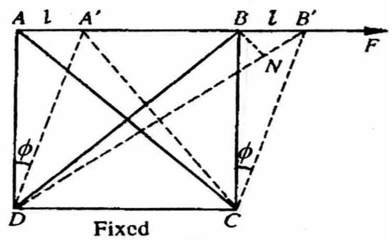
वस्तु की अपरूपण अवस्था में वस्तु के अन्दर उत्पन्न होने वाले दो परस्पर दिशाओं में कार्यरत **तनन प्रतिबल** तथा **संकुचन प्रतिबल** परस्पर परिमाण में बराबर एवं प्रत्येक का मान **स्पर्शीय अपरूपण प्रतिबल** के तुल्य होता है । अर्थात् अपरूपण अवस्था में:

तनन प्रतिबल = संकुचन प्रतिबल = स्पर्शीय प्रतिबल ..... (13.20)

जहाँ तनन प्रतिबल:, अभीष्ट अवयव में वृद्धि करता है जबकि संकुचन प्रतिबल लम्बवत् अवयव में



चित्र 13.10



चित्र 13.11

संकुचन करता है । **ध्यान रखना है कि** इन दोनों प्रकार के प्रतिबलों के प्रभाव से ही कुल अपरूपण विकृति प्राप्त होती है ।

13.4.2 अपरूपण विकृति प्रमेय (Shearing strain theorem)

अपरूपण अवस्था में वस्तु में परस्पर लम्बवत् दिशाओं में कार्य करने वाले **तनन प्रतिबल** एवं **संकुचन प्रतिबल** के कारण उत्पन्न विकृतियों के मान परस्पर बराबर तथा प्रत्येक का मान कुल अपरूपण विकृति के आधे के तुल्य होता है । इस प्रकार कुल अपरूपण विकृतिः, तनन विकृति एवं संकुचन विकृति के योग के तुल्य होती है । अर्थात्

तनन विकृति = संकुचन विकृति = $\frac{1}{2}$ अपरूपण विकृति ..... (13.21)

तथा कुल अपरूपण विकृति ϕ = तनन विकृति + संकुचन विकृति. .....(13.22)

बोध प्रश्न (self assessment questions)

11. अपरूपण प्रतिबल प्रमेय का कथन कीजिये ।

....

....

....

12. अपरूपण विकृति प्रमेय का कथन कीजिये ।

....

....

....

13.5 प्रत्यास्थता गुणांकों में सम्बन्ध (Relation between Elastic constants)

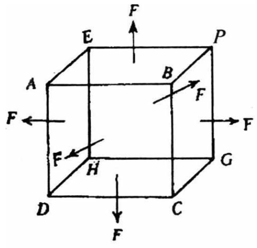
आपनेः, इस इकाई के अनुच्छेद 13.2 में यंग प्रत्यास्थता गुणांक Y आयतन प्रत्यास्थता गुणांक K दृढ़ता गुणांक η तथा प्वाइसन निष्पत्ति σ की संकल्पना को भली भाँति समझा है । अध्ययन करते समय आप स्पष्ट तौर पर समझ चुके हैं कि (i) वस्तु पर जब अभिलम्ब प्रतिबल कार्य करता है तो वस्तु का (आकार या आयतन) परिवर्तित होता है और उसकी **आकृति** (रूप) यथावत रहती है और (ii) जब वस्तु पर स्पर्शीय प्रतिबल लगाते हैं तो उसकी आकृति (रूप) बदलता है और आयतन जितना है, उतना ही रहता है । अर्थात् विशेष स्थिति में वस्तु के आकार और आकृति परस्पर स्वतंत्र रूप से बदले जा सकते हैं:, अत: प्रत्यास्थ गुणांकों (Y,Kη तथा σ) निन्नांकित दो पारिस्परिक सम्बन्ध स्थापित किये जाते हैं

(i)Y, K तथा σ (ii) Y, η तथा σ में

इन सम्बन्धी की सहायता से; गणितीय विधि द्वारा अन्य विविध सम्बन्ध भी प्राप्त कर सकते हैं ।

13.5.1 Y, K, तथा σ सम्बन्ध (Relation between Y, K and σ)

मान लीजिए कि A B C D E P G H एक घन है जिसकी भुजा **एकांक** लम्बाई की है । इस घन के प्रत्येक फलक पर एक बल F समान रूप से फलक के तल के लम्बवत् बाहर की ओर कार्य करता है । देखिये (चित्र 13.12) ।



चित्र 13.12

इस प्रकार प्रत्येक फलक पर

$$\text{अभिलम्ब प्रतिबल} = \frac{\text{कार्यरत अभिलम्ब बल}}{\text{प्रभावी क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{F}{1 \times 1} = F$$

यदि लगने वाले **बल की दिशा** में एकांक तनाव के कारण 'एकांक लम्बाई में वृद्धि α है तो भुजा AB, BD और BC भुजा वाले घन के प्रत्येक किनोर में खिंचाव के कारण वृद्धि $F\alpha$ होगी (क्योंकि एकांक तनाव से एकांक लम्बाई में वृद्धि हुई α है तो तनाव बल F हो जाने से वृद्धि F गुनी हो जायेगी) ।

इसी प्रकार यदि लगने वाले बल के लम्बवत् दिशा में एकांक तनाव के कारण एकांक लम्बाई में संकुचन β है तो AB, BP तथा BC में संकुचन का मान $F\beta$ होगा ।

चूँकि प्रत्येक किनोर पर बल की दिशा में वृद्धि तथा दो परस्पर लम्बवत् अनुप्रस्थ दिशाओं में संकुचन होगा अत: घन की किनोर-भुजाओ की परिणामी लम्बाईयाँ क्रमश: निम्नवत् प्राप्त होंगी-

l_x = भुजा AB की परिवर्तित लम्बाई $=1+F\alpha-F\beta-F\beta$

$= 1+F(\alpha-2\beta)$

l_y= भुजा BP की परिवर्तित लम्बाई $=1+F\alpha-F\beta-F\beta$

l_z= भुजा BC की परिवर्तित लम्बाई $=1+F\alpha-F\beta-F\beta$

$=1+F(\alpha-2\beta)$

अत: घन का परिवर्तित आयतन

$$v' = l_x l_y l_z = \left[1+F(\alpha-2\beta)\right]\left[1+F(\alpha-2\beta)\right]\left[1+F(\alpha-2\beta)\right] = \left[1+F(\alpha-2\beta)\right]^3 = 1+3F(\alpha-2\beta)$$

(द्विपद प्रमेय द्वारा)

यहाँ राशि α तथा βअत्यल्प हैं; इसलिए उच्च घातीय पदों को छोड़ दिया गया है । अत: आयतन में परिवर्तन Δv = परिवर्तित आयतन-प्रारम्भिक आयतन

$$\Delta v = -(1\times1\times1)$$

$$\Delta v = \left[1+3F(\alpha-2\beta)\right] - 13F(\alpha-2\beta)$$

और आयतन विकृति $= \dfrac{\Delta v}{v} = \dfrac{3f(\alpha-2\beta)}{1\times1\times1} = 3F(\alpha-2\beta)$

$$\therefore \text{ आयतन प्रत्यास्थता गुणांक } K\_ = \frac{\text{अभिलम्ब प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}}$$

या $\quad k = \dfrac{F/(1\times1)}{3F(\alpha-2\beta)} = \dfrac{1}{3(\alpha-2\beta)}$

या $$k = \frac{1}{3\alpha\left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)} = \frac{1/\alpha}{3\left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)}$$

परन्तु यहाँ α ; प्रति एकांक तनाव पर प्रति एकांक लम्बाई में वृद्धि का मान है तो स्पष्ट है कि

प्रतिबल का मान एकांक होने पर अनुदैर्ध्य विकृति $= \frac{\alpha}{l} = \alpha$

यंग प्रत्यास्थता गुणांक y = $\frac{\text{प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}} = \frac{l}{\alpha}$ ....(13.23)

तथा $\frac{\text{एकांक तनाव पर एकांक लम्बाई में अनुप्रस्थ संकुचन}}{\text{एकांक तनाव पर एकांक लम्बाई में अनुदैर्ध्य वृद्धि}} = \frac{\beta}{\alpha} = \sigma$ ....(13.24)

जहाँ σ प्वाइसन निष्पत्ति है ।अत: प्रत्यास्थ गुणांकों में सम्बन्ध है-

$$k = \frac{y}{3(1-2\sigma)} \qquad ....(13.35)$$

या $$y = 3k(1 = 2\sigma) \qquad ......(13.26)$$

13.5.2 y, η में σ सम्बंध(Relation between y,η and σ)

चित्र 13.13 में एक L भुजा के घन का सामने का फलक A B C D दिखाया गया है । इस घन के नीचे वाले फलक (भुजा DC) को स्थिर (fixed)ए रखते हुए, इसके समान्तर, ऊपर के फलक (भुजा AB) पर एक ही F स्पर्शीय बल I लगाया जाता है । इस स्पर्शीय बल F के कारण घन का फलक A'B'C'D रूप में अपरूपित हो जाता है तो

अपरूपण प्रतिबल T= $\frac{\text{स्पर्शीय बल}}{\text{ऊपरी फलक का क्षेत्रफल}} = \frac{F}{L^2}$

तथा अपरूपण विकृति $\phi = \frac{AA'}{AD} = \frac{BB}{Bc} = \frac{l}{L}$

$\therefore$ दृढ़ता गुणांक η अनुरूपण प्रतिबल / अपरूपण विकृति

लेकिन अनुच्छेद 13.4.1 में वर्णित अपरूपण प्रमेय से आप जानते हैं कि AB की दिशा में अपरूपण प्रतिबल T का मान स्वयं के मान के बराबर; विकर्ण BD की दिशा में लग रहे तनन प्रतिबल (जो विकर्ण की लम्बाई में विस्तार करता है) के मान के तुल्य होता है ।

अब यदि एकांक तनाव बल के कारण एकांक लम्बाई में अनुदैर्ध्य विस्तरण α तथा अनुप्रस्थ संकुचन β हो तो

विकर्ण DB पर तनन प्रतिबल T के कारण DB विकर्ण DB की लम्बाई वृद्धि

=(विकर्णDB की लम्बाई) x तनन प्रतिबल x α

=(विकर्ण DB की लम्बाई)Tα

साथ ही विकर्ण (AC पर) पर कार्य करने वाले संकुचन प्रतिबल T (यह तनन प्रतिबल की दिशा के अभिलम्बवत क्रियाशील) के कारण विकर्ण DBके अनुदिश लम्बाई वृद्धि

=(विकर्ण DB की लम्बाई)xTβ

अत: विकर्ण DB की लम्बाई में सम्पूर्ण वृद्धि = (DB) (T) $(\alpha+\beta)=L\sqrt{2T(\alpha+\beta)}$

अब चित्र की ज्यामिति से; यदि DB' पर BN लम्बा खींचा जाये तो DB विकर्ण की लम्बाई में वृद्धि NB' के तुल्य होगी।

अब, चूँकि कोण ϕ बहुत छोटा है अत: $\angle ABC = 90^0$ 'लगभग तथा $\angle BB'N = 45^0$ लगभग

इस प्रकार $NB' = BB'Cos45^0 = BB'/\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

अत : $NB' = L\sqrt{2}T(\alpha+\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

या $$T\ .\ \frac{L}{l} = \frac{1}{2\ (\alpha\ +\ \beta\ )} \qquad ......\ (13.27)$$

लेकिन दृढ़ता गुणांक की परिभाषा के अनुसार समी 13.27 का बायीं पक्ष

$$T\frac{L}{l} = \frac{T}{l/T} = \frac{T}{\phi} = \eta \text{ (दृढ़ता गुणांक)} \qquad .....\ (13.28)$$

तथा दायाँ पक्ष $$\frac{1}{2(\alpha+\beta)} = \frac{1}{(1+\beta/\alpha)} = \frac{1/\alpha}{(1+\beta/\alpha)} \qquad .....\ (13.29)$$

जहाँ $\frac{1}{\alpha} = Y$, तथा $\frac{\beta}{\alpha} = \sigma$ है, अत:

उक्त समीकरणों से $$\eta = \frac{Y}{2(1+\sigma)} \qquad ......(13.30)$$

या $$Y = 2\eta(1+\sigma) \qquad ......\ (13.31)$$

13.5.3 बिविध सम्बन्ध (Miscellaneous Relation)

अनुच्छेद 13.4.2 में आपने दो स्वतंत्र स्थितियों (i) रूप यथावत रखते हुए केवल आकार परिवर्तन तथा (ii) आकार यथावत रखते हुए केवल रूप परिवर्तन में प्रत्यास्थ गुणाको के मध्य सम्बन्धों का अध्ययन किया है ।

सामान्यत: जब वस्तु या पिण्ड पर विरूपक बल लगाया जाता है तो दोनों प्रक्रिया (आकार एवं आकृति परिवर्तन) साथ-साथ हो सकते हैं; इसलिए प्रत्यास्थ गुणांकों में अन्य सम्बन्ध निम्न प्रकार स्थापित किये जा सकते हैं ।

(अ) Y, K तथा σ में सम्बन्ध: अनुच्छेद 13.4.1 तथा 13.4.2 के समी 13.26 तथा 13.31 से

$$(1-\sigma) = \frac{Y}{3K} \quad \text{तथा} \quad (1+\sigma) = \frac{Y}{2\eta}$$

इन दोनों समीकरणों से σ का विलोपन करने पर

$$(1+\sigma) = \frac{Y}{2\eta} \text{ से } \quad \sigma = \frac{Y}{2\eta} - 1$$

के इस मान को $(1+2\sigma)=\dfrac{Y}{3K}$ में रखने पर

$$1-2\left(\frac{Y}{2\eta}-1\right)=\frac{Y}{3K} \quad \text{या} \quad 1-\frac{Y}{\eta}+2=\frac{Y}{3K} \quad \text{या} \quad \frac{Y}{\eta}+\frac{Y}{3K}=3$$

या
$$\frac{1}{\eta}+\frac{Y}{3\,K}=\frac{3}{Y} \qquad \text{..... (13.32)}$$

(ब) η **K और σ में सम्बन्ध:** अनुच्छेद 13.41 तथा 13.42 के समी 13.26 तथा 13.31 से

$Y=3K(1-\sigma)$ तथा $Y=2\eta(1+\sigma)$

इनसे Y का विलोपन करने पर

$3k(1-2\sigma)=2\eta(1+\sigma)$ या $3K=6K\eta=2\eta+2\eta\sigma$

$6K\sigma+2\eta\sigma=3K-2\eta$

$$\therefore \alpha=\frac{3K-2\eta}{6K+2\eta} \qquad \text{..... (13.33)}$$

(स) प्वाइसन निष्पत्ति का सीमान्त मान :-

समीकरण $3k(1-2\sigma)=2\eta(1+\sigma)$ में आयतन प्रत्यास्थ गुणांक K तथा दृढ़ता गुणांक η में आवश्यक रूप से घनात्मक राशियाँ हैं । अत:

(1) **यदि σ एक घनात्मक राशि है;** तो समीकरण का दायाँ पक्ष घनात्मक होगा और इस कारण बायाँ पक्ष भी घनात्मक ही होना चाहिए; जो केवल तभी सम्भव है जबकि

$(1-2\sigma)>0$ या $1 > 2\sigma$

या $\dfrac{1}{2}>\sigma$ या $\sigma<0.5$ ..... (13.34)

(2) **यदि σ ऋणात्मक राशि** हैं तो समीकरण का बायाँ पक्ष घनात्मक हो जाता है और इस कारण दायाँ पक्ष भी घनात्मक होना चाहिए । इसके लिए

$(1+\sigma)>0$

या $\sigma>-1$ ...... (13.35)

अत: सैदवान्तिक σ रूप से मान -1 से 0.5 के बीच होते हैं ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. प्रत्यास्थ गुणांकों में सम्बन्ध लिखिए-

(1) Y, K तथा σ (2) Y, η, K, तथा σ में

(3) Y, K तथा η में (4) K, η तथा σ में

....

....

....

....

2. प्वाइसन निष्पत्ति के सैद्धान्तिक सीमान्त मान लिखिये ।

....
....

उदाहरण 13.1 : यदि किसी रबर पट्टिका को खींचने पर उसमें आयतन परिवर्तन इसके अपरूपण की तुलना में नगण्य हो तो रबर के लिए प्वाइसन निष्पत्ति ज्ञात कीजिए ।

हल : यदि l लम्बाई तथा r त्रिज्या वाली रबर की पट्टिका (डोरी) को खींचने पर उसका आयतन लगभग नियत रहता है तो $V = \pi r^2 l =$ स्थिरांक का अवकलन करने पर

$$r^2 \Delta l + 2rl\Delta V = 0 \quad \text{या} \quad \frac{\Delta r}{r} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l}$$

तब प्वाइसन निष्पत्ति

$$\sigma = -\frac{\Delta r / r}{\Delta l / l} = -\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = 0.5$$

उदाहरण 13.2 रबर और स्टील में कौन अधिक प्रत्यास्थ है ।

हल: माना रबर और स्टील पदार्थ के समान त्रिज्या (r) और समान लम्बाई L के दो तार विचाराधीन है । यदि इन तारों पर समान भार W लटकाने पर रबर और स्टील के इन तारों में लम्बाई वृद्धि l_R तथा l_s हो तो परिभाषानुसार इनके यंग प्रत्यास्थता गुणांक क्रमशः

$$Y_S = \frac{WL}{\pi r^2 l_S} \quad \text{तथा} \quad Y_R = \frac{WL}{\pi r^2 l_R} \quad \text{अर्थात्} \quad \frac{Y_S}{Y_R} = \frac{l_S}{l_R}$$

परन्तु साधारण अनुभव से हम यह बात जानते हैं कि समान बल लगाने पर रबर के तार की लम्बाई में वृद्धि; स्टील के तार की अपेक्षाकृत अधिक होती है अतः $l_R > l_S$ के कारण

$$Y_S > Y_R$$

स्पष्टतः रबड़ की तुलना में **स्टील अधिक प्रत्यास्थ** है ।

उदाहरण 13.3 एक लिफ्ट का द्रव्यमान 500 किग्रा. है तथा लिफ्ट स्टील के मोटे तारों से सधी हुई है । यदि लिफ्ट अधिकतम 1 .2 मीटर / से^{2} के त्वरण से गति कर सके तथा तार का अधिकतम सुरक्षित प्रतिबल 0.7 x 10^8 न्यूटन / मीटर^2 हो तो तार कम से कम कितनी मोटाई का होना चाहिए ।

हल : जब लिफ्ट निश्चित त्वरण a से ऊपर की ओर गति करती है तो उस पर अधिकतम तनाव बल लगता है जो आभासी भार m(g+a) के तुल्य होता है ।

अतः आभासी अधिकतम भार = 500 (9.8 + 1.2) = 5500 न्यूटन

तब प्रतिबल $= \dfrac{F}{\pi(d/2)^2} = \dfrac{5500}{\pi(d/2)^2}$ या $0.7 \times 10^8 = \dfrac{5500}{\pi(d/2)^2}$

$$\therefore d = \sqrt{\frac{5500 \times 4 \times 7}{22 \times 0.7 \times 108}} = 0.01 \text{ मीटर}$$

उदाहरण 13.4 फौलाद के लिए प्वाइसन निष्पत्ति ज्ञात कीजिये जबकि

$$Y = 20 \times 10^{10} N/m^2 \quad \text{तथा} \quad \eta = 8 \times 10^{10} N/m^2$$

हल : $$\sigma = \frac{Y}{2\eta} - 1 = \frac{20 \times 10^{10}}{2 \times 8 \times 10^{10}} - 1 = 0.25$$

13.6 सारांश (Summary)

- **प्रत्यास्थता:** पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण विकृत अवस्था वाली वस्तु से लगाये गये बाहय बल को हटा लेने पर, वस्तु अपनी प्रारम्भिक आकृति या आकार को प्राप्त करने का प्रयास करती है ।
- **पूर्ण प्रत्यास्थ या प्लास्टिक:** कोई भी वस्तु पूर्ण प्रत्यास्थ या पूर्ण प्लास्टिक नहीं होती है । क्वार्ट्ज की डोरी लगभग पूर्ण प्रत्यास्थ तथा गीली मिट्टी लगभग पूर्णत: प्लास्टिक होती है।
- **प्रतिबल:** विकृत साम्य अवस्था में वस्तु के इकाई क्षेत्रफल पर कार्य करने वाले आन्तरिक बलों के परिमाण को प्रतिबल कहते हैं । पदार्थ की ज्यामिति एक लगने वाले बाहय बल की स्थिति के अनुसार प्रतिबल के प्रकार हैं-

(i) अनुदैर्ध्य प्रतिबल. (तनन या संकुचन) (ii) अभिलम्ब प्रतिबल तथा (iii) अपरूपण या स्पर्शीय प्रतिबल।

- **विकृति:** विकृत अवस्था में वस्तु में होने वाले भिन्नात्मक परिवर्तन को विकृति कहते हैं । विकृति तीन प्रकार की होती है- (i) अनुदैर्ध्य विकृति (ii) आयतन विकृति तथा (iii) अपरूपण विकृति
- **प्रत्यास्थ सीमा:** प्रत्यास्थ सीमा वस्तु का वह भौतिक गुण है जहाँ से वस्तु पर लगने वाले बाहय बल को हटाने पर वस्तु अपनी पूर्व स्थिति में लौट सकती है । पदार्थ में पराभव बिन्दु ऐसी स्थिति व्यक्त करता है जहाँ से बिना बाहय बल बढ़ाये हुए वस्तु की लम्बाई में स्वत वृद्धि प्रारम्भ हो जाती है । इसी क्रम में विकृति बहुत अधिक हो जाने पर पदार्थ (तार के रूप में) रू जाता है; इस स्थिति को विच्छेदन बिन्दु (breaking point) कहते हैं ।
- **श्रांति-काल प्रत्यास्थ-थकान एवं शैथिल्यता :** विकृत अवस्था से बल हटा लेने पर पदार्थ पर्व स्थिति में लौटने में जो समय लेता है, उसे श्रांतिकाल कहते हैं । पदार्थ पर बाहय बल को शीघ्रता से बढाने पर प्रत्यास्थ थकान के कारण प्रत्यास्थता का ठीक ठीक पालन नहीं करता; फलत: पदार्थ में उत्पन्न विकृति; सदैव प्रतिबल से पिछड़ जाती है । पदार्थ की इस प्रवृति को प्रत्यास्थ शैथिल्यता कहते हैं ।
- **हुक का नियम :** प्रत्यास्थ सीमा में प्रतिबल तथा विकृति का अनुपात नियत होता है; जिसे प्रत्यास्थता गुणांक कहते हैं।
- **प्रत्यास्थता गुणांक:** प्रतिबल एवं विकृति की प्रकृति के अनुसार अग्रांकित प्रत्यास्थता गुणांक परिभाषित होते हैं-

(1) यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y = \dfrac{\text{अनुदैध्य प्रतिबल}}{\text{अनुदैध्य विकृति}}$

(2) आयतन प्रत्यास्थता गुणांक $K = \dfrac{\text{अभिलम्ब प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}}$

(3) अपरूपण प्रत्यास्थता गुणांक $\eta = \dfrac{\text{स्पर्शीय प्रतिबल}}{\text{अपरूपण विकृति}}$

(4) प्वाइसन निष्पत्ति $\sigma = \dfrac{\text{अनुप्रस्थ विकृति}}{\text{अनुदैध्य विकृति}}$

नोट : आयतन प्रत्यास्थता गुणांक K के व्युत्क्रम में को सम्पीड्यता कहते हैं ।

- σ का सैद्धान्तिक मान - 1 तथा 0.5 के मध्य होता है ।

- **अपरूपण प्रमेय :** (1) **प्रतिबल प्रमेय :** अपरूपण स्थिति में परस्पर लम्बवत् कार्यरत **तनन प्रतिबल** तथा संकुचन प्रतिबल मान में बराबर तथा प्रत्येक का मान **स्पर्शीय प्रतिबल** के तुल्य होता है ।

(ii) विकृति प्रमेय: अपरूपण स्थिति में परस्पर लम्बवत् प्रतिबलों से उत्पन्न तनन विकृति तथा संकुचन विकृति परस्पर बराबर तथा प्रत्येक का मान; कुल अपरूपण विकृति के आधे के बराबर होता है । अर्थात

तनन विकृति = संकुचन विकृति =1/2 अपरूपण विकृति

तथा कुल अपरूपण विकृति = तनन प्रतिबल के कारण विकृति + संकुचन प्रतिबल के कारण विकृति

- **प्रत्यास्थ गुणांकों में सम्बन्ध:** Y, K , η, तथा σ में निम्न सम्बन्ध है-

$$K=\frac{Y}{3(1+\sigma)}, \quad \eta=\frac{Y}{2(1+\sigma)} \quad , \quad \frac{1}{\eta}+\frac{1}{3K}=\frac{3}{Y} \quad \sigma=\frac{3K-2\eta}{6K-2\eta}$$

13.7 शब्दावली (Glossary)

आयतन प्रत्यास्थता गुणांक	Bulk Modulus
दृढ़ता गुणांक	Modulus of rigidity
प्वाइसन निष्पत्ति	Poisson 's Ration
पराभव बिन्दु	Yielding Point
प्रत्यास्थता	Elasticity
प्रत्यास्थता गुणांक	Modulus of elasticity
प्रत्यास्थ थकान	Elastic fatigue
प्रत्यास्थ सीमा	Elastic fatigue
बिच्छेदन बिन्दु	Breaking point
यंग प्रत्यास्थ गुणांक	Young's Modulus
सम्पीड्यता	Compressibility
हुक का नियम	Hook 's Law

13.8 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1.	D.S. Mathur	Mechanics	S. Chand & Co., New Delhi
2.	Berkley	Mechanics	New York
3.	Ghose	Mechanics	Shiv Lal & Co., Agra
4.	B.K Agrawal & P.C Agrawal	Mechanics	Sahitya Bhawan, Agra
5.	जगदीश चन्द्र उपाध्याय	नवीन यांत्रिकी	रामप्रसाद एण्ड सन्स, आगरा
6.	के. के. सरकार-आर. एन. शर्मा	यांत्रिकी	साहित्य भवन, आगरा

13.9 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to Self Assessment question)

1. प्रत्यास्थता पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण, विकृत अवस्था वाली वस्तु से विरूपक बल को हटा लेने पर; वस्तु अपनी प्रारम्भिक अवस्था प्राप्त करने का प्रयास करती है ।
2. (1) प्रतिबल: विकृत साम्य अवस्था में वस्तु के इकाई क्षेत्रफल पर कार्यरत आन्तरिक बलों के परिमाण को प्रतिबल कहते हैं । प्रतिबल कई प्रकार के होते हैं जैसे तनन प्रतिबल व संकुचन प्रतिबल; अभिलम्ब प्रतिबल एवं अपरूपण प्रतिबल।
3. विकृति : विकृत अवस्था में वस्तु में होने वाले भिन्नात्मक परिवर्तन को विकृति कहते हैं । विकृति तीन प्रकार की होती है- जैसे अनुदैर्ध्य विकृति, आयतन विकृति तथा अपरूपण विकृति
4. प्रत्यास्थ सीमा : पदार्थ द्वारा विरूपक बल सहन करने की वह सीमा जहाँ से बल हटा लेने पर अपनी पहली स्थिति में लौट सकती हो; पदार्थ की प्रत्यास्थ सीमा कहलाती है ।
5. प्रत्यास्थ सीमा के बाद और अधिक विरूपक बल लगाने पर वस्तु की वह स्थिति जहाँ स्वतः ही विकृत होने लगती है, उसे पराभव बिन्दु कहलाती है और अन्ततः वस्तु, जब टूट जाती है, उसे विच्छेदन बिन्दु कहते हैं ।
6. हुक का नियम : प्रत्यास्थ सीमा में प्रतिबल, उत्पन्न विकृति के समानुपाती होता है ।
7. यंग प्रत्यास्थता गुणांक Y प्रत्यास्थता सीमा में अनुदैर्ध्य प्रतिबल तथा अनुदैर्ध्य विकृति के अनुपात को यंग प्रत्यास्थता गुणांक कहते हैं ।
8. आयतन प्रत्यास्थता गुणांक K प्रत्यास्थता सीमा में अभिलम्ब प्रतिबल एवं आयतन विकृति के अनुपात को आयतन प्रत्यास्थता गुणांक कहते हैं ।
9. दृढ़ता गुणांक η: प्रत्यास्थ सीमा में स्पर्शीय प्रतिबल एवं उत्पन्न अपरूपण विकृति के अनुपात को दृढ़ता गुणांक कहते हैं ।
10. सम्पीड्यता: आयतन प्रत्यास्थता गुणांक के व्युत्क्रम को सम्पीड्यता कहते हैं ।
11. प्वाइसन निश्पत्ति: प्रत्यास्थ सीमा में अनुप्रस्थ विकृति एवं अनुदैर्ध्य विकृति के अनुपात को प्वाइसन निष्पत्ति कहते हैं ।
12. अपरूपण प्रतिबल प्रमेय. अपरूपण स्थिति में परस्पर लम्बवत् कार्य करने वाले तनन प्रतिबल एवं संकुचन प्रतिबल परिमाण में बराबर एवं स्पर्शीय प्रतिबल के तुल्य होता है ।
13. अपरूपण विकृति प्रमेय : अपरूपण स्थिति में तनन एवं संकुचन प्रतिबलों के कारण उत्पन्न विकृतियाँ परिमाण में बराबर एवं अपरूपण विकृति के आधे के तुल्य होता है ।
14. प्रत्यास्थ गुणांकों में निम्न सम्बन्ध हैं-

(1) $K = \dfrac{Y}{3(1-2\sigma)}$ (2) $\eta = \dfrac{Y}{2(1+2\sigma)}$

(3) $\dfrac{1}{\eta} + \dfrac{1}{3K} = \dfrac{3}{Y}$ (4) $\sigma = \dfrac{3K-2\eta}{6K+2\eta}$

15. प्वाइसन निष्पत्ति का सिद्धान्त मान -1 से 0.5 के मध्य होता है

13.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. तनन प्रतिबल, संकुचन प्रतिबल, अभिलम्ब प्रतिबल तथा स्पर्शीय प्रतिबल में अन्तर स्पष्ट कीजिए।
2. अनुदैर्ध्य विकृति, आयतन विकृति एवं अपरूपण विकृति को परिभाषित कीजिये ।
3. प्रत्यास्थ सीमा क्या है । पराभव बिन्दु, विच्छेदन बिन्दु एवं प्रत्यास्थ थकान से आप क्या समझते हैं ।
4. प्वाइसन निष्पत्ति से आप क्या समझते हैं? इसके सीमान्त मान का निर्धारण कीजिये ।
5. सम्पीड्यता का अर्थ समझाइए ।
6. प्रत्यास्थ शैथिल्यता एवं प्रत्यास्थ विश्रान्ति काल का अर्थ बताइये ।

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

7. हुक का नियम क्या है? यंग प्रत्यास्थता गुणांक, आयतन प्रत्यास्थता गुणांक एवं अपरूपण गुणांक की परिभाषा दीजिये।
8. अपरूपण प्रतिबल प्रमेय का कथन कीजिए ।
9. अपरूपण विकृति प्रमेय का कथन कीजिए ।
10. यंग प्रत्यास्थता गुणांक Y, आयतन प्रत्यास्थता गुणांक K तथा प्वाइसन निष्पत्ति σ में सम्बन्ध स्थापित कीजिए।
11. यंग प्रत्यास्थता गुणांक Y, दृढ़ता गुणांक ग तथा प्वाइसन निष्पत्ति σ में सम्बन्ध स्थापित कीजिए ।
12. निम्न प्रत्यास्थता गुणांकों के मध्य सम्बन्ध स्थापित कीजिये

    (1) K, η, तथा σ (2) Y, K तथा η

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

13. एक 2 किग्रा. प्रति वर्ग मीटर प्रतिबल एक ऐसे तार पर लगाया जाता है जिसका यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y = 10 \times 10^{10} N/m^2$ है । लम्बाई में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करो ।

    (**उत्तर:** 0.0196%)

14. निम्न आकड़ों से चाँदी का प्वाइसन अनुपात ज्ञात करो-

    $Y = 7.25 \times 10^{10} N/m^2$, $K = 11 \times 10^{10} N/m^2$ (**उत्तर:** 0.39)

15. एक 2 सेमी. भुजा के ब्रास के घन पर एक तल युग्मों पर 10^4 किग्रा. का तनन तथा लम्बवत् दिशा में स्थित तल युग्मों पर 10^4 किग्रा. का सम्पीडन बल लगाया जाता है । यदि पदार्थ के लिए $Y = 10 \times 10^{10} N/m^2$ तथा σ =0.4 हो तो घन की परिणामी भुजाओं की लम्बाई तथा अपरूपण विकृति ज्ञात कीजिये ।

    (**उत्तर:** 1.93 से.मी., 2.0068 सेमी., 200 से.मी. तथा 6.86 x10^{-3} रेडियन)

इकाई- 14

दण्ड एवं बेलन

(Beam and Cylinder)

इकाई की रुपरेखा

14.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप

- दण्ड(beam) की अवधारणा समझ सकेंगे और दण्ड की उपादेयता से परिचित हो सकेंगे कि कैसी अनुप्रस्थ आकृति वाला दण्ड अधिक लोड सहन करने की क्षमता रखता है;
- जान सकेंगे कि दण्ड पर लोड पड़ने पर उसमें होने वाला झुकाव (अवनमन) किन किन तथ्यों से प्रभावित होता है;
- केण्टीलीवर के बारे में परिचित हो जायेंगे
- बेलन में मरोड़ एवं इसके अपरुपण के बारे में जान सकेंगे
- यह जान पायेंगे कि अधिक लम्बाई के पतले बेलन को मरोड़ना आसान क्यों होता है;

- यह अनुभूति कर सकेंगे कि मशीनों में प्रयुक्त होने वाली पोली शाफ्ट, ठोस की अपेक्षा अधिक मजबूत क्यों होती है।

14.1 प्रस्तावना (Introduction)

आप इकाई 13 में पदार्थ के प्रत्यास्थ गुण के बारे में पढ़ चुके हैं । इस इकाई में आप पदार्थ के प्रत्यास्थ गुण की दैनिक उपादेयता के बारे में पढ़ेगे । प्रत्यास्थ गुण का सबसे अधिक दैनिक उपयोग सिविल एवं मैकेनिकल इन्जीनियरिंग में किया जाता है । भवन निर्माण में किफायती एवं उच्च गुणवता के पिलर एवं बीमों (pillers & beams) की डिजायनिंग करने में प्रयुक्त छडों के प्रत्यास्थ गुण का ही उपयोग होता है । मशीनरी वर्क्स में भी प्रत्यास्थ गुण का उपयोग किया जाता है ।

इस इकाई के अन्तर्गत आप अनुच्छेद 14.2 में दण्ड (beams) एवं बंकन की अवधारणा एवं अनुच्छेद 14.3 में बंकन आघूर्ण का अध्ययन करेंगे । अनुच्छेद 14.4 में केण्टीलीवर और इसकी विभिन्न परिस्थितियों के अलावा यह अध्ययन करेंगे कि लोहे के गर्डर **I** (आई) आकृति के बनाये जाते हैं, तो इससे क्या फायदा होता है । इकाई के अन्तिम अनुच्छेद 14.5 में बेलन और इसके विमोटन के बारे में पढ़ेंगे और यह जान पायेंगे कि मशीनों में खोखली शाफ्ट क्यों उपयोगी है?

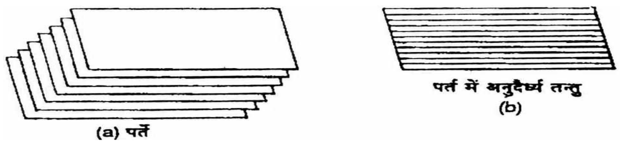
14.2 दण्ड बंकन (Bending of beam)

इस अनुच्छेद में दण्ड की संरचना एवं इसके दोनों सिरों पर (या मध्य में) बल लगाने से होने वाले ज्यामितीय परिवर्तन एवं होने वाले प्रभाव का अध्ययन करेंगें ।

एक समान अनुप्रस्थ काट की छड़, जिसकी मोटाई या चौड़ाई (या व्यास) की तुलना में लम्बाई अधिक हो **दण्ड** कहलाती है । यदि दण्ड (अधिक लम्बाई की छड़) का अनुप्रस्थ परिच्छेद आयताकार ज्यामिति का है तो उसे **आयताकार परिच्छेद वाला दण्ड** कहते हैं और यदि दण्ड का अनुप्रस्थ परिच्छेद वृत्ताकार हो तो उसे **वृत्ताकार परिच्छेद वाला दण्ड** कहते हैं।

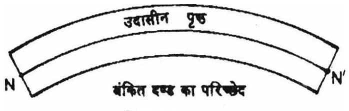
आयताकार परिच्छेद वाले दण्ड को बहुत पतली पतली क्षैतिज परतों (layers) के रुप में तथा वृताकार परिच्छेद वाले दण्ड को बहुत सी समाक्ष बेलनाकार कोशों (परतों) से बना हुआ माना जा सकता है ।

अब प्रत्येक परत को अभीष्ट दण्ड की लम्बाई के समान्तर अनेक रेशों (fibres) से मिलकर बना हुआ मान सकते हैं । इन रेशों को अनुदैर्ध्य तन्तु (longitudinal filaments) कहते हैं । देखिये चित्र (14.1)



चित्र 14.1

दण्ड की ज्यामिति और दण्ड के सिरों पर लम्बाई के लम्बवत् बल आरोपित करने पर उसकी आकृति में होने वाले प्रभाव (परिवर्तन) के अध्ययन के लिये सबसे पहले यहां हम कुछ परिभाषाओं को समझेंगे -



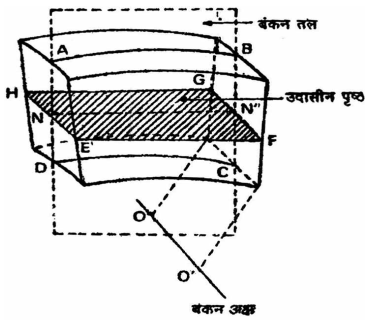
चित्र 14.2

उदासीन पृष्ठ (Neutral Surface)- जब किसी दण्ड को एक सिरे पर कस कर उसे इसके दूसरे सिरे पर भारित किया जाता है तो दण्ड की बंकित अवस्था में इसकी लम्बाई के समान्तर वाले तन्तु वक्र आकृति में मुड़ जाते हैं । इनमें उत्तल पृष्ठ की ओर स्थित पृष्ठों के अनुदैर्ध्य तन्तुओं की लम्बाई में तो वृद्धि हो जाती है तथा अवतल पृष्ठ की ओर स्थित पृष्ठों के तन्तुओं की लम्बाई में कमी हो जाती है ।

इस प्रकार अभीष्ट दण्ड के पृष्ठों के मध्य एक पृष्ठ ऐसा भी होता है जिसकी लम्बाई में न विस्तार होता है और न ही संकुचन । इस प्रकार की परत को उदासीन पृष्ठ कहते है ।

चित्र (14.2) में उदासीन पृष्ठ को NN' द्वारा दर्शाया गया है ।

बंकन तल (Plane of bending) - उदासीन पृष्ठ के लम्बवत तल को बंकन तल कहते हैं । बंकन तल में ही दण्ड बंकित होता है । जैसा कि चित्र 14.3 में दिखाया गया है कि दण्ड का अपनी लम्बाई के समान्तर एक सममिति तल होता है जो प्रत्येक अनुप्रस्थ परिच्छेद के लिये सममित अक्ष (axis of symmetry) है ।



चित्र 14.3

यदि दण्ड का बंकन समान (Uniform) है तो सभी अनुदैर्ध्य तन्तु, सममिति तल के समान्तर तलों में वृत्ताकार चापों के रुप में मुड़ जाते हैं और इस स्थिति में अनुदैर्ध्य तन्तुओं के **वक्रता केन्द्र** बंकन तल के लम्बवत एक रेखा पर स्थित होते हैं । यह रेखा बंकन अक्ष कहलाती है । चित्र (14.3) में OO' **बंकन अक्ष** प्रदर्शित करती है ।

उदासीन अक्ष (Neutral axis) - बंकन तल तथा उदासीन पृष्ठ (परस्पर लम्बवत होते हैं) की प्रतिच्छेदी रेखा (line of intersection) को उदासीन अक्ष कहते हैं । चित्र (14.3) में रेखा NN' ही उदासीन अक्ष है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. दण्ड की परिभाषा लिखिए ।

   ....

   ....

2. उदासीन पृष्ठ तथा बंकन पृष्ठ को परिभाषित कीजिए ।

   ....

   ....

3. उदासीन अक्ष क्या है?

   ....

   ....

4. बंकन अक्ष की परिभाषा लिखिए ।

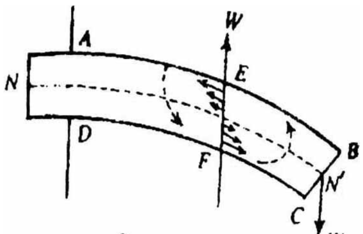
   ....

   ....

14.3 बंकन आघूर्ण (Bending Moment)

यदि एक क्षैतिज दण्ड के एक सिरे को कसकर इसके दूसरे सिरे पर भार लटकाया जाये तो लटकाये गये भार के कारण दण्ड में झुकाव आ जाता है ।

यदि यह बंकित दण्ड, प्रत्यास्थ सीमा के अन्तर्गत लटकाये गये भार के प्रभाव से सन्तुलन की अवस्था में है तो बंकित दण्ड में (NN' उदासीन अक्ष है तथा उदासीन पृष्ठ से उत्तल पृष्ठ की ओर स्थित परतों के तन्तुओं की लम्बाई बढ़ जाती है जबकि अवतल पृष्ठ की ओर स्थित परतों के तन्तुओं की लम्बाई घट जाती है । पदार्थ के प्रत्यास्थ गुण के कारण बंकित दण्ड के तन्तुओं को पूर्व अवस्था में लाने के लिये विपरीत प्रतिक्रिया बल उत्पन्न हो जाता है । फलत: दण्ड के तन्तुओं 'पर तनाव व सम्पीडन उत्पन्न करने वाले आन्तरिक बल कार्य करने लगते है ।



चित्र 14.4

ये आन्तरिक बल, **दण्ड के अनुप्रस्थ परिच्छेद के लम्बवत** होते हैं तथा उदासीन परत के ऊपर वाली परतों पर लगे बलों की दिशा नीचे की परतों पर लगने वाले बलों की दिशा के विपरीत होती है । देखिए चित्र 14.4 ।

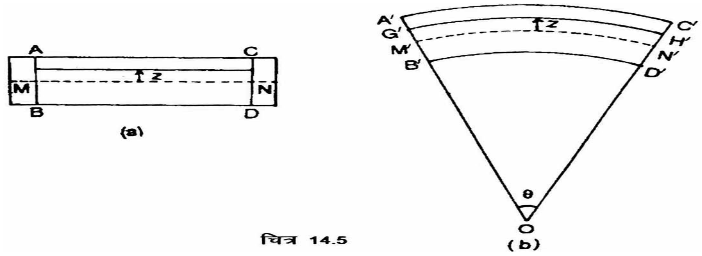
इस प्रकार बंकित दण्ड की साम्य स्थिति में उदासीन अक्ष के लम्बवत रेखा के परित: दण्ड में कार्यरत परस्पर समान्तर व विपरीत आन्तरिक बल. एक बलयुग्म (Couple) बनाते है । इस बलयुग्म को बंकन बलयुग्म (bending couple) तथा बलयुग्म के आघूर्ण को ही बंकन आघूर्ण कहते हैं ।

बंकन आघूर्ण की दिशा, बंकन उत्पन्न करने वाले बाहय बल आघूर्ण की दिशा के विपरीत होती है ।

साम्य अवस्था में बंकन आघूर्ण का मान बाहय बल आघूर्ण के बराबर होता है ।

बंकन आघूर्ण के लिये व्यंजक (Expression for Bending Moment)

चित्र 14.5 में एक समरुप दण्ड का एक छोटा भाग दर्शाया गया है । इस दण्ड के बंकन से AC भाग बढ़ कर A' C' तथा BD भाग संकुचित होकर B' D' हो जाता है । रेखा MN उदासीन पृष्ठ को दर्शाती है जिसकी लम्बाई में कोई परिवर्तन नहीं होता है । अत : MN = M'N'



चित्र 14.5

इस भाग को मोड़ने पर एक वृत्ताकार चाप बनता है जो कि केन्द्र O पर θ कोण बनाता है । माना बंकित उदासीन पृष्ठ M' N' की वक्रता त्रिज्या R है । रेखा MN से z की दूरी पर स्थित तन्तु बंकन के पश्चात G' H' हो जाता है तब तन्तु

$$G'H' = (R + z)\ \theta$$

जबकि बंकन से पूर्व, तन्तु $\quad GH = MH = R\ \theta$

$\therefore$ तन्तु की लम्बाई में वृद्धि = G'H" - GH = (R + z) θ- Rθ = zθ

अनुदैर्ध्य विकृति = $\frac{\text{लम्बाई में परिवर्तन/}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}} = \frac{z\theta}{R\theta} = \frac{z}{R}$ .....(14.1)

माना (चित्र 14.6 में दर्शाए अनुसार) pqrs दण्ड का एक अनुप्रस्थ परिच्छेद जिसकी चौड़ाई pq, तथा मोटाई qr, क्रमश: b तथा d हैं ।

यह परिच्छेद दण्ड की लम्बाई एवं बंकन तल के लम्बवत् है । रेखा mn उदासीन पृष्ठ पर हैं तथा उदासीन अक्ष के लम्बवत् है । इसके ऊपर तथा निचले भागों क्रमश: pqnm तथा rsmn पर कार्यरत बल परिच्छेद के लम्बवत् परन्तु विपरीत दिशाओं में कार्य करते हैं ।

माना कि एक सूक्ष्म क्षेत्रफल δa उदासीन पृष्ठ से z दूरी पर स्थित है । इस क्षेत्रफल से गुजरने वाले अभीष्ट अनुदैर्ध्य तन्तु में अनुदैर्ध्य विकृति उत्पन्न होती है ।

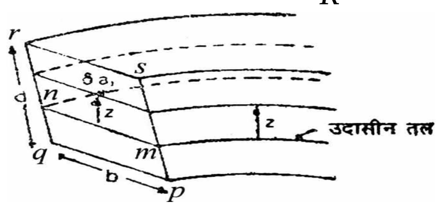
चूँकि दण्ड के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक

Y = $\frac{\text{अभिलम्ब प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}}$

$\therefore$ अभिलम्ब प्रतिबल = Y x अनुदैर्ध्य विकृति = $Y \times \frac{z}{R}$ ..... (14.2)

अत: δa क्षेत्रफल पर अभिलम्ब बल $= Y \times \frac{z}{R}\delta a$

अत: mn रेखा के परित: इस बल का आघूर्ण = $Y \times \frac{z}{R}\delta a$ xz $= Y \times \frac{z^2}{R}\delta a$



चित्र 14.6

परन्तु दोनों भागों pqnm तथा rsmn पर कार्य करने वाले आंतरिक लम्बवत् बलों के आघूर्णों की दिशा एक ही है अत: उदासीन परत में स्थित तथा उदासीन अक्ष के लम्बवत् रेखा mn के परित: pqrs पर लगने वाले सभी आन्तरिक बलों का आघूर्ण $= \sum \frac{Y}{R}\delta a.z^2 = \frac{Y}{R}\sum \delta a.z^2$

$$= \frac{Y}{R} I_g$$

जहां $I_g = \sum\left(\delta a z^2\right)$ रेखा mn के सापेक्ष दण्ड के **अनुप्रस्थ परिच्छेद का ज्यामितीय जड़त्व आघूर्ण** (geometrical moment of the cross-section of the beam) कहलाती है ।

चूंकि दण्ड के सम्पूर्ण अनुप्रस्थ परिच्छेद पर कार्य करने वाले समस्त आन्तरिक बलों का मत के परित: आघूर्णों का योग ही दण्ड का प्रत्यानयन बल युग्म अथवा बंकन आघूर्ण है, अत:

बंकन आघूर्ण $= \frac{Y}{R} I_g$ .... (14.5)

स्पष्ट है कि दण्ड को बंकित करने के लिये आवश्यक बंकन आघूर्ण का मान (i) पदार्थ की प्रकृति (प्रत्यास्थता गुणांक) तथा (ii) दण्ड के अनुप्रस्थ परिच्छेद की आकृति के अतिरिक्त (iii) बंकन की वक्रता त्रिज्या पर निर्भर करता है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

5. बंकन आघूर्ण का क्या अर्थ है, समझाइए ।

....

....

6. तन्तु की अनुदैर्ध्य विकृति किन किन कारकों पर निर्भर करती है ।

....

....

7. ज्यामितिय जड़त्व आघूर्ण का सूत्र लिखिए ।

....

....

8. आयताकार परिच्छेद वाले दण्ड का ज्यामितिय जड़त्व आघूर्ण का सूत्र लिखिए ।

....

....

14.4 कैंन्टीलीवर (Cantilever)

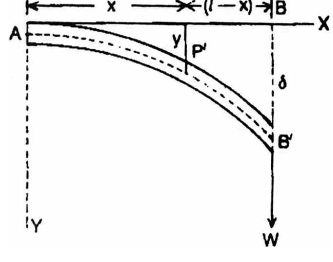
एक ऐसा क्षैतिज दण्ड (beam) जिसके एक सिरे को कसकर इसके दूसरे स्वतंत्र सिरे को भारित (loaded) किया गया हो; कैंन्टीलीवर कहलाता है ।

14.4.1 एक सिरे पर भारित कैंन्टीलीवर (Cantilever loaded at one end) -

माना एक क्षैतिज दण्ड AB, जिसकी लम्बाई l है एक सिरे A से दृढ आधार पर कसा हुआ है । माना दण्ड की लम्बाई के अनुदिश X-अक्ष तथा दण्ड के लम्बवत उर्ध्वाधर नीचे की ओर Y-अक्ष है । माना दण्ड के स्वतंत्र सिरे B पर भार w लटकाने पर बंकन के कारण B की स्थिति B' हो जाती है । माना दण्ड के कसे हुये सिरे A से x दूरी पर दण्ड के उदासीन अक्ष पर स्थित कोई बिन्दु P बंकन के पश्चात P' पर चला जाता है अर्थात् P' के निर्देशांक (x,y) हैं ।

चित्र 14.7 में भार W का p' के सापेक्ष

बल आघूर्ण = $W(l-x)$ ..... (14.6)



चूंकि झुकी हुई दण्ड सन्तुलन अवस्था में है अतः यह बाह्म बल आघूर्ण, बंकन आघूर्ण $\frac{YI_g}{R}$ के बराबर होगा । जहां Y दण्ड के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक, I_g दण्ड के अनुप्रस्थ काट का ज्यामितीय जड़त्व आघूर्ण तथा AP' चाप की वक्रता त्रिज्या R' है ।

अतः $$\frac{YI_g}{R} = W(l-x) \qquad ..... (14.7)$$

परन्तु वक्रता त्रिज्या $$R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$ .... (14.8)

चूंकि यहीं y का मान बहुत कम होता है अतः x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर के वर्ग $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ को 1 की तुलना में नगण्य मान सकते है,

अतः $$R=\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

समी. 14.9 से समी.14.7 में R का मान रखने पर

$$YI_g\frac{d^2y}{dx^2}=W(l-x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{W}{YI_g}(l-x)$$

समीकरण 14.10 का समाकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{W}{YI_g}\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)+C_1$$

जहाँ C_1 समाकलन स्थिरांक है ।

चूँकि $x=0$ पर $\frac{dy}{dx}=0$ $\therefore C_1=0$

अतः $$\frac{dy}{dx}=\frac{W}{YI_g}\left(lx-\frac{x^2}{2}\right)$$

समी. 14.11 का पुनः समाकलन करने पर

$$y=\frac{W}{YI_g}\left(l\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{6}\right)+C_2$$

जहाँ C_2 एक अन्य समाकलन स्थिरांक है ।

चूंकि $x=0$ पर $y=0$ अतः $C_2=0$

अतः $$y=\frac{W}{YI_g}\left(l\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{6}\right)$$ ..... (14.12)

दण्ड के स्वतंत्र सिरे B पर W भार के कारण अवनमन (depresion) अधिकतम (माना यह δ) है । तब $x=l$, $y=\delta$ रखने पर समी. 4.12 से

$$\delta=\frac{Wl^3}{3YI_g}\left(\frac{l^3}{2}-\frac{l^3}{6}\right) \quad \text{अथवा} \quad \delta=\frac{Wl^3}{3YI_g}$$

यदि दण्ड को M द्रव्यमान से भारित किया गया हो, तो

$$\delta = \frac{Mgl^3}{3YI_g} \qquad ..... (14.13)$$

आयताकार परिच्छेद के दण्ड के लिये $l_g = \frac{bd^3}{12}$ रखने पर अवनमन ..... (14.14)

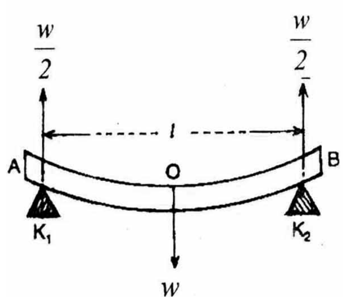
$$\delta = \frac{4Wl^3}{Ybd^3}$$

तथा बेलनाकार दण्ड के लिये $l_g = \frac{\pi r^2}{4}$ रखने पर अवनमन

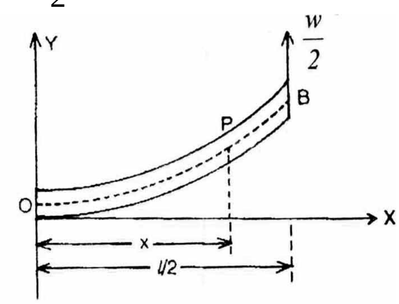
$$\delta = \frac{4Wl^3}{Ybd^4} \qquad ..... (14.15)$$

14.4.2 मध्य में भारित दण्ड (Beam loaded in the middle)-

माना एक दण्ड AB सममित रुप से, क्षैतिज तल l दूरी पर स्थित दो क्षुरधारों K_1 तथा K_2 पर टिका है । दण्ड के मध्य बिन्दु K_1 पर भार K_2 लटकाया गया है । दण्ड चित्र 14.8 की भांति (bent) बंकित हो जाता है तथा बिन्दु O पर अधिकतम अवनमन (depression) होता है । स्पष्टत: सन्तुलन के लिये प्रत्येक क्षुरधार पर ऊपर की ओर $\frac{w}{2}$ के बराबर प्रतिक्रिया बल होगा ।



चित्र 14.8.



चित्र 14.9

दण्ड का मध्य भाग लगभग क्षैतिज है, अत: दण्ड को OA तथा OB दो उल्टे रखे कैन्टीलीवरों (inverted cantilevers) से बना मान सकते हैं जिसमें से प्रत्येक कैन्टीलीवर की लम्बाई 1/2 होगी, O क्लैम्प किया हुआ सिरा और दूसरा सिरा w/2 भार से ऊपर की ओर भारित होगा । अत: क्षुरधारों के नीचे O का अवनमन, इस प्रकार के कैन्टीलीवर का निम्नतम स्थिति O से उत्थापन (elevation) के बराबर होगा ।

माना उल्टे कैन्टीलीवर OB के एक अनुप्रस्थ परिच्छेद P की O से दूरी x है तो चित्र (14.9) के अनुसार विक्षेपक बल आघूर्ण $= \frac{w}{2}.PB$

$$= \frac{w}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right) \qquad ..... (14.16)$$

सन्तुलन अवस्था में यह, बंकन आघूर्ण से सन्तुलित हो जाता है, अर्थात्

$$= \frac{w}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{YI_g}{R}$$

यदि P का X-अक्ष से उत्थापन y है, तो $R = \dfrac{1}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$ रखने पर

$$YI_g \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right)$$

अथवा

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{2YI_g}\left(\frac{1}{2} - x\right) \qquad .....(14.17)$$

समाकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{2YI_g}\left(\frac{lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

जब $x = 0\,, \dfrac{dy}{dx} = 0 \therefore C_1 = 0$

अत : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{w}{2YI_g}\left(\dfrac{lx}{2} - \dfrac{x^2}{2}\right),$ ..... (14.18)

पुन: समाकलन करने पर

$$y = \frac{w}{2YI_g}\left(\frac{lx^2}{4} = \frac{x^2}{6}\right) + C_2$$

जब $x = 0$, y =0, $\therefore C_2 = 0$

$$y = \frac{w}{2YI_g}\left(\frac{lx^2}{4} = \frac{x^2}{6}\right) \qquad ... (14.19)$$

स्वतंत्र सिरे $x = \dfrac{1}{2}$ पर $y = \delta$ (माना) त

$$\delta = \frac{w}{2YI_g}\left(\frac{l^3}{16} = \frac{l^3}{48}\right)$$

$$\delta = \frac{wl^3}{48YI_g}$$

14.4.3 गर्डर की आकृति (I की शक्ल) (Shape of Girder - I shape)

समी.14.20 से स्पष्ट है कि गर्डर (Girder) में झुकाव δ कम करने के लिये उसकी लम्बाई l कम एव चौड़ाई b मोटाई d तथा पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक Y अधिक होना चाहिये ।

जब कोई गर्डर अपने सिरों पर टिका होता है तो उदासीन पृष्ठ के ऊपर के अनुदैर्ध्य तन्तु संकुचित तथा नीचे के तन्तु विस्तारित होते हैं । गर्डर के तन्तुओं में संकुचन तथा विस्तार तन्तुओं की उदासीन पृष्ठ से दूरी के अनुक्रमानुपाती होता है अर्थात गर्डर के ऊपरी तथा नीचे के पृष्ठों पर

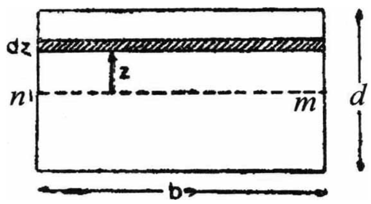
अधिकतम होता है तथा उदासीन पृष्ठ की ओर कम होता जाता है । फलत: गर्डर के ऊपरी तथा नीचे के फलकों पर प्रतिबल अधिकतम होता है और उदासीन पृष्ठ की ओर कम होता जाता है तथा उदासीन पृष्ठ पर शून्य होता है । अत: गर्डर के ऊपरी तथा निचले भाग उसके मध्य भाग के सापेक्ष मजबूत होने चाहिये । अत: गर्डर का मध्य भाग, ऊपरी तथा नीचे के पृष्ठों की अपेक्षा कम मोटा बनाया जा सकता है । अत: गर्डर I की शक्ल के बनाये जाते हैं जिससे उनके ऊपरी तथा निचले फलकों की चौड़ाई, मध्य भाग की अपेक्षा बहुत अधिक होती है । इस प्रकार गर्डर की सामर्थ्य में कमी किये बिना, पदार्थ की पर्याप्त बचत हो जाती है । इसी कारण सामर्थ्य में कमी किये बिना अपेक्षाकृत कम मेटेरियल के उपयोग से गर्डर I **की शक्ल** के बनाये जाते हैं ।

14.4.4 ज्यामितीय जडत्व आघूर्ण (Geometrical moment of inertia)

किसी दण्ड के लिये बंकन आघूर्ण का मान दण्ड के अनुप्रस्थ परिच्छेद की ज्यामिति पर निर्भर करता है । अभीष्ट दण्ड में यदि उदासीन अक्ष से z दूरी पर dz मोटाई वाले अवयव का क्षेत्रफल अल्पांश δa हो उदासीन अक्ष के सापेक्ष ज्यामितीय जड़त्व आघूर्ण

$$l_g = \int z^2 \delta a$$

उदाहरणार्थ - (1) आयताकार अनुप्रस्थ परिच्छेद वाले l लम्बाई के दण्ड की चौड़ाई b तथा मोटाई (गहराई) d है तो चित्र 14.10 के अनुसार dz मोटाई वाले क्षेत्रफल अल्पांश का मान δa = (bdz)होगा । अत: उदासीन अक्ष के सापेक्ष ज्यामितीय जड़त्व आघूर्ण



$$l_g = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} z^2 (bdz) = b\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}$$

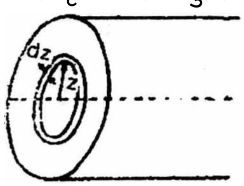
$$= \frac{bd^3}{12} \quad \text{... (14.21)}$$

$$= (bd)\frac{d^2}{12}$$

= अनुप्रस्थ परिच्छेद का क्षे.फ. $\times \dfrac{d^2}{12}$

= AK^2

जहाँ K उदासीन अक्ष के सापेक्ष दण्ड की घूर्णन त्रिज्या (radius of gyration) कहलाती है । इसी प्रकार वृत्ताकार अनुप्रस्थ परिच्छेद वाले दण्ड के लिये ज्यामितीय जड़त्व आघूर्ण



$$l_g = \frac{\pi r^4}{4} \quad \text{..... (14.22}$$

$$= (\pi r^2)\frac{r^2}{4} = AK^2$$

चित्र 14.11

जहाँ K घूर्णन त्रिज्या है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

9. केण्टीलीवर क्या है?

....

....

10. मध्य में भारित दण्ड से क्या अभिप्राय है ।

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

उदाहरण 14.1- एक 0.3 मिमी मोटी और 10 सेमी चौड़ी एक धातु की पत्ती को 50 सेमी वक्रता त्रिज्या में बंकित किया जाता है । धातु का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $15 x 10^{10}$ न्यूटन /मी.^{2} है तो ज्ञात कीजिए

(i) बंकन आघूर्ण तथा (ii) उत्तल सतह पर प्रतिबल तथा विकृति ।

हल: (i) बंकन आघूर्ण $= \frac{YI_g}{R}$

जहां आयताकार परिच्छेद के दण्ड का ज्यामितिय जड़त्व आघूर्ण $l_g = \frac{bd^3}{12}$

यहां Y = $15 x 10^{10}$ न्यूटन /मी.^{2};

चौड़ाई b = 0.10 मीटर

मोटाई d = $0.3 x 10^{-3}$ मीटर,

वक्रता त्रिज्या R = 0.5 मीटर

$\therefore$ बंकन आघूर्ण = $\frac{15\times10^{10}\times(0.10)(3\times10^{-4})^3}{0.5\times12} = 6.75\times10^{-2}$, न्यूटन मीटर

(ii) विकृति = $\frac{z}{R} = \frac{d}{2}\times\frac{1}{R} = \frac{3\times10^{-4}}{1.0} = 3\times10^{-4}$

तथा प्रतिबल = Y x विकृति = $15 x 10^{10} x 3 x10^{-4} = 45 x 10^6$ न्यूटन / मी.^{2}

उदाहरण 14.2 - एक मिमी त्रिज्या का एक तार को 40 सेमी वक्रता त्रिज्या के चाप के रुप में मोड़ दिया गया है । बंकन आघूर्ण तथा अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये ।

धातु के लिये = Y = $20 x 10^{10}$ न्यूटन / मी.^{2}

हल: बंकन आघूर्ण $= \frac{YI_g}{R}$ जहां $l_g = \frac{\pi r^4}{4}$

बंकन आघूर्ण $= \frac{20\times10^{10}}{0.4}\times\frac{\pi r^4}{4}\times\left(10^{-3}\right)^4 = 0.39$ न्यूटन मीटर

अधिकतम प्रतिबल = Y x अधिकतम विकृति

= Y x r/R

$$= \frac{20\times10^{10}\times10^{3}}{0.4} = 50\times10^{7}$$ न्यूटन / मी.^{2}

उदाहरण 14.3 - एक नियत पट्टीनुमा केन्टीलीवर का मुक्त सिरा किसी निश्चित भार के कारण 10 मिमी झुक जाता है। उतने ही भार से उस केन्टीलीवर के मुक्त सिरे पर अवनमन ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई 2 गुनी, चौड़ाई 2 गुनी तथा मोटाई 3 गुनी है ।

हल: आयताकार परिच्छेद वाले केन्टीलीवर के मुक्त सिरे पर अवनमन

$$\delta = \frac{4wl^3}{Ybd^3}$$

अतः समान भार से दो भिन्न केण्टीलीवर के मुक्त सिरों पर उत्पन्न अवनमन का अनुपात

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{l_1^3}{b_1 d_1^3}\left(\frac{b_2 d_2^3}{l_2^3}\right)$$

यहाँ $l_2 = 2l_1, b_2 =, \ d_2 = 3d_r, \ \delta = 10mm$

$$\delta_2 = \delta_1 \frac{b_1 d_1^3 l_2^3}{b_2 d_2^3 l_1^3}$$

$$= (10mm)\left(\frac{b_1}{2b_1}\times\frac{d_1^3}{(3d_1)}\times\frac{(2l_1)^3}{l_1^3}\right)$$

$$= (10mm)\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^3}\times2^3\right)$$

$$= \frac{4}{27}\times10mm = 1.48$$

14.5 बेलन का विमोटन (Twisting of cylinder)

किसी l लम्बाई व r त्रिज्या की एक बेलनाकार छड़ या तार के एक सिरे को दृढ़ आधार से कस (क्लैम्प) कर इसके मुक्त सिरे पर, लम्बाई के लम्बवत स्पर्शी बलयुग्म लगाया जाता है तो इसे बेलन का विमोटन कहते हैं। बेलन के विमोटन की प्रक्रिया में छड़ या तार का प्रत्येक अनुप्रस्थ परिच्छेद, एक निश्चित कोण से घूम (ऐंठ) जाता है ।

14.5.1 बेलन का ऐंठन तथा अपरूपण (Twisting and Shearing of cylinder)

बेलन के विमोटन में तार (या बेलन) के अनुप्रस्थ परिच्छेद द्वारा घूमे हुए कोण को ऐंठन कोण (angle of twist) कहते हैं। ऐंठन कोण को θ से व्यक्त किया जाता है। साथ ही बेलन के विमोटन में बेलन की बेलनाकार पृष्ठ में अपरुपण भी उत्पन्न होता है ।

चित्र 14.12 में दर्शाये अनुसार l लम्बाई और r त्रिज्या वाले बेलन को विमोटित करने पर, मुक्त सिरे पर उत्पन्न ऐंठन कोण θ तथा पृष्ठ का अपरुपण कोण ϕ है ।

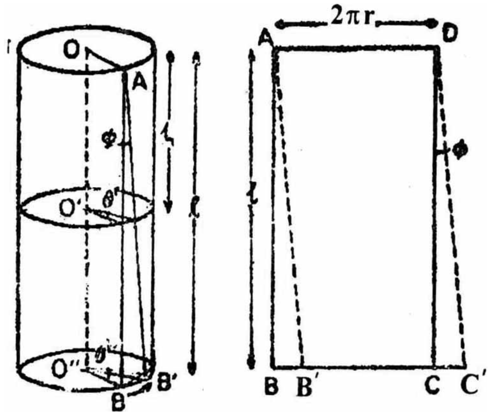
ध्यान रहे कि बेलन के मुक्त सिरे पर उत्पन्न ऐंठन कोण θ का मान बेलन के कसे हुए सिरे से विचारधीन बिन्दु की दूरी के अनुक्रमानुपाती होता है अर्थात्

$$\theta \propto l$$

जबकि बेलनाकार पृष्ठ पर उत्पन्न अपरुपण का मान बेलन की त्रिज्या r अनुक्रमानुपाती होता है अर्थात्

$$\phi \propto r$$

स्पष्ट है कि कसे हुए सिरे पर ऐंठन कोण शून्य और बेलन की अक्ष पर अपरुपण कोण शून्य होता है ।



चित्र 14.12

चित्र 14.12 की ज्यामिति से स्पष्ट है कि

$$BB' = r\theta = l\phi$$

अत: $$\theta = \left(\frac{\phi}{r}\right)l \quad \text{तथा} \quad \phi = \left(\frac{\theta}{l}\right)r$$

या $$\frac{\phi}{r} = \frac{\theta}{l} = \text{नियत}$$

निष्कर्षत: बेलन की बाह्यतम परत पर अपरुपण कोण अधिकतम व मुक्त सिरे पर ऐंठन कोण होता हैं

14.5.2 बेलन (ठोस) का विमोटन (Twisting of Solid Cylinder)

अब, हम एक सिरे पर कसे हुए बेलन के मुक्त सिरे को विमोटित करने के लिये आवश्यक बलयुग्म की गणना करेंगे।

बेलन की प्रत्येक परत पर कार्य करने वाले ऐंठन बलयुग्म की गणना करने के लिये बेलन को समअक्षीय बेलनाकार खोलों (Coaxial Hollow Cylinder) से मिलकर बना हुआ मान सकते हैं ।

सर्वप्रथम एक ऐसी समअक्षीय बेलनाकार खोल की कल्पना करते हैं जिसकी त्रिज्या x तथा मोटाई dx है । (अर्थात x तथा x+dx त्रिज्याओं के मध्य बनी खोल) । ऐंठन के कारण इस खोल में अपरुपण कोण ϕ तथा मुक्त सिरे पर ऐंठन कोण θ उत्पन्न हो जाता है । (देखिये चित्र 14.13)।

स्पष्ट है कि $BB' = l\phi = x\theta$

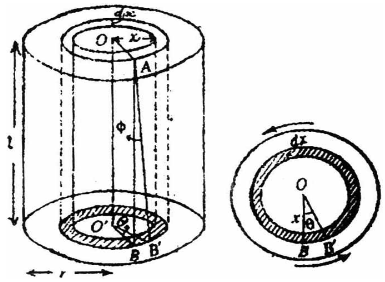
$\therefore$ अपरुपण कोण $\phi = \dfrac{x\theta}{l}$ ....(14.24)

यदि बेलनाकार खोल का आधार बनाने वाली वृत्ताकार परिच्छेद पर स्पर्शी प्रतिबल T(स्पर्शी बल तथा क्षेत्रफल का अनुपात) कार्य कर रहा हो तथा पदार्थ का अपरुपण (दृढ़ता) गुणांक η हो तो अपरुपण स्पर्शी प्रतिबल

$$\text{दृढता गुणांक } \eta = \frac{\text{अपरुपण स्पर्शी प्रतिबल}}{\text{अपरुपण विकृति}}$$

$$= \frac{T}{\phi} = \frac{T}{x\theta/l}$$

$\therefore$ स्पर्शी प्रतिबल $T = \dfrac{\eta x\theta}{l}$



चित्र 14.13

यहाँ बेलनाकार खोल के आधार का क्षेत्रफल

$$= \pi\left\{(x+dx)^2 - x^2\right\} = 2\pi x dx$$

अत: बेलनाकार खोल के आधार पर कार्य करने वाला **स्पर्शी बल** (tangential force)

= स्पर्शी प्रतिबल प्र क्षेत्रफल

$$= \quad T = \frac{\eta x\theta}{l} \times 2\pi x dx$$

इसलिये बेलन की अक्ष के सापेक्ष बल का आघूर्ण

$$= \left(\frac{\eta x\theta}{l} \times 2\pi x dx\right)x = \frac{2\pi\eta\theta}{l}x^3 dx \qquad ..... (14.25)$$

समी.14.25 की सहायता से अर्द्ध व्यास x की मानी गयी बेलनाकार खोल को θ कोण से विमोटित करने के लिये आवश्यक बलयुग्म का मान ज्ञात कर सकते हैं ।

अत: r त्रिज्या के बेलन को ऐंठने के लिये आवश्यक बलयुग्म का मान समीकरण को x=0 और x=r सीमाओं के मध्य समाकलित करके प्राप्त किया जा सकता है-

$$\therefore \text{ कुल ऐंठन बल युग्म } = \int_0^r \frac{2\pi\eta}{l}\theta x^3 dx = \frac{\eta\pi r^3}{2l}\theta = C\theta \qquad .... (14.26)$$

स्पष्ट है कि दिये हु ए पदार्थ के लिये बेलन में एकांक रेडियन ऐंठन के लिये बलयुग्म $\left(\frac{\eta\pi r^4}{2l}\right)$ निश्चित होता है और इसे पदार्थ की **मरोड़ी दृढता (torsional rigidity)** कहते हैं। जिसे C से दर्शाया जाता है।

अत: ठोस बेलने को विमोटित करने पर प्रति एकांक रेडियन ऐंठन के लिये बलयुग्म $C=\left(\frac{\eta\pi r^4}{2l}\right)$ का मान बेलन के पदार्थ के दृढ़ता गुणांक के अतिरिक्त बेलन की मोटाई तथा इसकी लम्बाई पर भी करता है।

14.5.3 पोले (खोखले) बेलन का विमोटन (Twisting of hollow cylinder)

एक l लम्बाई तथा आन्तरिक व बाहय त्रिज्या क्रमश: r_1 तथा r_2 वाले पोले (खोखले) बेलन को एक सिरे पर कस कर उसके मुक्त सिरे को विमोटित करने में आवश्यक बलयुग्म की गणना करने के लिये पोले बेलन को समाक्षीय परिवर्ती त्रिज्या x वाले बेलनाकार खोलों $\left(r_1 < x > r_2\right)$ से बना हु आ मान सकते हैं।

अब हम एक ऐसी बेलनाकार खोल की कल्पना करते हैं जिसकी त्रिज्या x तथा मोटाई d x हो जहां x का मान r_1 तथा r_2 के मध्य स्थित है। यदि ऐंठन के कारण x त्रिज्या वाली बेलनाकार परत पर अपरुपण कोण ϕ और बेलन के मुक्त सिरे पर ऐंठन कोण θ है तो ऐंठन कोण व अपरुपण कोण के मध्य सम्बंध समी. 14.24 से आप जानते हैं कि

अपरुपण कोण $\phi=\frac{x\theta}{l}$

यदि बेलनाकार खोल का आधार बनाने वाली वृत्ताकार परिच्छेद पर स्पर्शी प्रतिबल T (स्पर्शी बल तथा क्षेत्रफल का अनुपात) कार्य कर रहा हो तथा पदार्थ का अपरुपण (दृढ़ता) गुणांक η हो तो अपरुपण स्पर्शी प्रतिबल

$$\text{दृढता गुणांक } \eta = \frac{\text{अपरुपण स्पर्शी प्रतिबल/}}{\text{अपरुपण विकृति}}$$

$$= \frac{T}{\phi} = \frac{T}{x\theta/l}$$

$\therefore$ स्पर्शी प्रतिबल $T=\frac{\eta x\theta}{l}$

बेलनाकार खोल के आधार का क्षेत्रफल

$$=\pi\left\{\left(x+dx\right)^2-x^2\right\}=2\pi x dx$$

अत: बेलनाकार खोल के आधार पर- कार्य करने वाला स्पर्शी बल (tangential force) =स्पर्शी प्रतिबल $\times$ क्षेत्रफल

$$=\frac{\eta x\theta}{l}\times 2\pi x dx$$

इसलिये बेलन की अक्ष के सापेक्ष इस बल का आघूर्ण

$$=\left(\frac{\eta x\theta}{l}\times 2\pi x dx\right)x$$

$$=\frac{2\pi\eta\theta}{l}x^3 dx$$

यहां बेलन खोखला है जिसकी आन्तरिक एवं बाहरी त्रिज्याऐं क्रमश: r_1 तथा r_2 हैं तो $x=r_1$ तथा $x=r_2$ के मध्य समीकरण को समाकलित करने पर, खोखले बेलन के लिये,

कुल ऐंठन बलयुग्म $=\int_{r^1}^{r^2}\frac{2\pi\eta}{l}x^3 dx=\frac{\eta\pi\theta}{2l}\left(r_2^4-r_1^4\right)$ ..... (14.27)

यहां मरोड़ी दृढ़ता (एकांक ऐंठन के लिये बलयुग्म) का मान $C=\frac{\eta\pi}{2l}\left(r_2^4-r_1^4\right)$ हैं ।

14.5.4 शाफ्ट (Shaft)

शाफ्ट का उपयोग मशीनों में किया जाता है । शाफ्ट के रुप में ठोस बेलन या पोली बेलनाकार छड़ में से किसका उपयोग ज्यादा अच्छा रहता है इस तथ्य का पता लगाने के लिये इन पर एकांक ऐंठन उत्पन्न करने के लिये आवश्यक बल आघूर्णों की तुलना करते हैं ।

यदि समान लम्बाई एवं समान द्रव्यमान वाले एक ही पदार्थ के दो बेलन (एक ठोस तथा दूसरा पोला) पर विचार करें तो

ठोस बेलन में एकांक ऐंठन कोण उत्पन्न करने के लिये आवश्यक बल आघूर्ण

$$C=\left(\frac{\eta\pi r^4}{2l}\right) \qquad \text{... (14.28)}$$

तथा खोखले बेलन में एकांक ऐंठन कोण उत्पन्न करने के लिये आवश्यक बल आघूर्ण

$$C=\frac{\pi\eta}{2l}\left(r_2^4-r_1^4\right) \qquad \text{..... (14.29)}$$

$$\frac{C}{C}=\frac{r_2^4-r_1^4}{r^4}=\frac{\left(r_2^2+r_1^2\right)\left(r_2^2+r_1^2\right)}{r^4}$$

लेकिन दोनों के द्रव्यमान समान हैं, अत:

$$\pi\left(r_2^2+r_1^2\right)lp=\pi\left(r^2\right)l\rho \qquad \text{..... (14.30)}$$

या $\quad r_2^2+r_1^2=r^2$

या $\quad r_2^2+r_1^2+r^2$

$$\frac{C'}{C}=\frac{\left(r_2^2+r_1^2\right)}{r^2}=\frac{\left(r_2^2+r^2+r_1^2\right)}{r^4}$$

$$=\frac{2r_1^2+r^2}{r^2}=1+\frac{2r_1^2}{r^2}$$

$\therefore$ C' > C .... (14.30)

अत: एक ही पदार्थ तथा समान द्रव्यमान ओर समान लम्बाई के दो बेलन (एक ठोस तथा दूसरा पीला) दिये हुए हैं तो बराबर ऐंठन कोण उत्पन्न करने के लिये, पोले बेलन में ठोस बेलन की अपेक्षाकृत अधिक बल आघूर्ण लगाना पड़ेगा ।

इसलिये एक पोली शाफ्ट, समान ऐंठन के लिये अधिक बलयुग्म संचार कर सकती है । यही कारण है कि ठोस शाफ्ट की अपेक्षाकृत पोली शाफ्ट ही प्रयोग की जाती है ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

11. बेलन के कसे हुए सिरे पर ऐंठन कोण का मान कितना होता हैं ?

....

....

12. बेलन की अक्ष पर अपरूपण कोण अधिकतम होता हैं - कथन सत्य हैं या असत्य ।

....

....

13. मोटे तार को ऐंठन आसान नहीं होता हैं । क्यों ?

....

....

14. शाफ्ट पोली क्यों ली जाती हैं ।

....

....

उदाहरण 14.4 एक 100 सेमी लम्बाई और एक मिमी त्रिज्या के तार को एक सिरे के सापेक्ष दूसरे सिरे पर 18^0 से ऐंठा जाता है । अपरूपण कोण का महत्तम मान ज्ञात कीजिए । यही तार के पदार्थ का दृढता गुणांक $8\text{x}10^{10}$ न्यूटन / मी.^{2} हैं तो ऐंठन बल युग्म भी ज्ञात कीजिए ।

$$\text{दृढता गुणांक } \eta = \frac{\text{अपरूपण प्रतिबल/}}{\text{अपरूपण विकृति } \phi}$$

$\therefore$ अपरूपण प्रतिबल $= \eta\,\phi$

स्पष्ट है कि अपरूपण विकृति अधिकतम होने पर ही अपरूपण प्रतिबल का मान अधिकतम होगा । साथ ही आप यह भी जानते हैं कि अपरूपण विकृति का अधिकतम मान बेलन के पृष्ठ $(x = r)$ पर होता हैं अत:

$$\phi_{\max} = \frac{r\theta}{l} = \frac{1\times10^{-3}\times18^0}{1.0} = 0.18^0$$

तथा ऐंठन बलयुग्म $= C\theta = \dfrac{\pi\eta r^4}{2l}\theta$

$$= \frac{3.14\times8\times10^{10}\left(1\times10^{-3}\right)^4}{2\times1}\frac{18\times\pi}{180}$$

= 0.038 न्यूटन मीटर

उदाहरण 14.5 एक 50 सेमी लम्बाई और 1 मिमी त्रिज्या के तार को एक सिरे के सापेक्ष दूसरे सिरे पर 45^0 से ऐंठा जाता हैं । तार के पृष्ठ पर अपरूपण कोण ज्ञात कीजिए ।

हल : तार कि लम्बाई l = 0.5 मी., त्रिज्या r = 1×10^{-3} मीटर

ऐंठन कोण $\theta = 45^0$ अपरूपण कोण ϕ = ?

यहाँ तार के पृष्ठ पर अपरूपण कोण $\phi_{\max} = \frac{r\theta}{l}$

$$= \frac{1\times10^{-3}\times45^0}{0.5} = 0.09^0$$

उदाहरण 14.6 दो बेलनाकार छड़ों की लम्बाई l और $2l$ है तथा त्रिज्याऐं क्रमश: 2r व r हैं । इन्हें समाक्ष रुप से जोड़ दिया जाता है। इस व्यवस्था के एक सिरे को स्थिर रखकर दूसरे सिरे पर 110^0 से ऐंठा जाता है तो मोटी छड़ की ऐंठन ज्ञात कीजिए ।

हल: दोनों छड़ों पर बलयुग्म समान है अत:

$$\tau = \frac{\eta\pi\left(2r^4\right)\theta}{2l} = \frac{\eta\pi r^4(\theta-\theta)}{2\left(2l\right)}$$

से $$\theta = \frac{\theta}{33} = \frac{110^0}{33}$$

14.6 सारांश (Summary)

- **दण्ड:** एक समान अनुप्रस्थ काट की छड़, जिसकी लम्बाई इसकी चौड़ाई या मोटाई की तुलना में अधिक होती है, को दण्ड कहते हैं । दण्ड को अनेक अनुदैर्ध्य तन्तुओं से मिलकर बना हुआ मानते हैं ।
- **उदासीन पृष्ठ:** बंकित दण्ड के अन्दर एक ऐसा परत जिसकी लम्बाई में विस्तार या संकुचन नही होता है, उसे उदासीन पृष्ठ कहते हैं ।
- **बंकन तल:** जिस तल में दण्ड का बंकन होता है, उसे बंकन तल कहते हैं ।
- **बंकन अक्ष :** दण्ड के अनुदैर्ध्य तन्तुओं के वक्रता केन्द्र, बंकन तल के लम्बवत एक रेखा पर स्थित होते हैं, जिसे बंकन अक्ष कहते हैं ।
- **उदासीन अक्ष**: बंकन तल तथा उदासीन पृष्ठ की विच्छेदन रेखा उदासीन अक्ष कहलाती है ।
- **बंकन आघूर्ण:** दण्ड की बंकित साम्य स्थिति में, उदासीन अक्ष के लम्बवत रेखा के सापेक्ष, प्रत्यास्थता के कारण उत्पन्न आन्तरिक बलों के आघूर्णों को बंकन आघूर्ण कहते है । बंकन आघूर्ण का मान, बंकित दण्ड में लगे बाहय बल आघूर्ण के तुल्य होता है ।
- **बंकित दण्ड में-** (i) अनुदैर्ध्य विकृत $= z/R$; जहां z उदासीन अक्ष से अनुदैर्ध्य तन्तु की लम्बवत दूरी है । तथा R उदासीन परत की वक्रता त्रिज्या है] तथा (ii) बंकन आघूर्ण $= \frac{Yl_g}{R}$ यहाँ l_g उदासीन परत के सापेक्ष अनुप्रस्थ परिच्छेद का ज्यामितीय जड़त्व आघूर्ण तथा Yl_g पदार्थ की नमन दृढ़ता कहलाती है । आयताकार परिच्छेद वाले दण्ड के लिये $l_g = bd^3/12$

- **केन्टीलीवर:** क्षैतिज दण्ड को एक सिरे पर कसकर दूसरे स्वतंत्र सिरे को भारित करने पर बना हुआ निकाय केन्टीलीवर कहलाता है। केन्टीलीवर के स्वतंत्र सिरे पर उत्पन्न अवनमन $\delta = \frac{wl^3}{3Yl_g}$ होता है।
- वृत्ताकार परिच्छेद वाले दण्ड के लिये $l_g = \frac{\pi r^4}{4}$
- पोले वृत्ताकार परिच्छेद वाले दण्ड के लिये $l_g = \frac{\pi\left(r_2^4 - r_1^4\right)}{4}$
- **मध्य में भारित दण्ड:** सममिति रुप से मध्य में भारित दण्ड में भार w लटकाने पर उत्पन्न अवनमन $\delta = \frac{wl^3}{48Yl_g}$ तथा

  (i) आयताकार परिच्छेद वाले दण्ड में $\delta = \frac{wl^3}{4Ybd^3}$ या $Y = \frac{wl^3}{4bd^3\delta}$

  (ii) वृत्ताकार परिच्छेद वाले दण्ड में $Y = \frac{wl^3}{12\pi r^4\delta}$

  (iii) गर्डर **आई** आकार के होते हैं।
- **बेलन का विमोटन** करने पर

  (i) इसके बेलनाकार पृष्ठ पर अपरूपण होता है जबकि इसके मुक्त सिरे पर ऐंठन होता है।

  (ii) अपरूपण कोण का मान, बेलन की त्रिज्या के अनुक्रमानुपाती तथा ऐंठन कोण का मान, बेलन की लम्बाई के अनुक्रमानुपाती होता है।

  अर्थात् $l\phi = r\theta$ या $\frac{\phi}{r} = \frac{\theta}{r}$

  जहां θ ऐंठन कोण तथा ϕ अपरूपण कोण है।
- ठोस बेलन को विमोटित करने पर बल आघूर्ण $\tau = c\theta$

  जहां $C' = \frac{\pi\eta r^4}{2l}$ एकांक ऐंठन हेतु बल आघूर्ण है।
- पोले बेलन को विमोटित करने पर बल आघूर्ण $\tau' = c'\theta$

  जहां $C' = \pi\eta\frac{\left(r_2^4 - r_1^4\right)}{4}$ एकांक ऐंठन हेतु बल आघूर्ण है।
- **शाफ्ट:** ठोस बेलन की तुलना में पोली शाफ्ट अधिक सामर्थ्य का संचरण करती है।

14.7 शब्दावली (Glossary)

अपरूपण कोण	Angle of shear
उदासीन पृष्ठ	Neutral surface
ऐंठन कोण	Angle of twist
केण्टीलीवर	Cantilever

दण्ड	Beam
बंकन तल	Plane of bending
बंकन आघूर्ण	Bending moment,
बेलन	Cylinder
शाफ्ट	Shaft

14.8 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1.	D.S. Mathur	Mechanics	S. Chand & Co., New Delhi
2.	Berkley	Mechanics	New York
3.	Ghose	Mechanics	Shiv Lal & Co., Agra
4.	B.K Agrawal & P.C Agrawal	Mechanics	Sahitya Bhawan, Agra
5.	जगदीश चन्द्र उपाध्याय	नवीन यांत्रिकी	रामप्रसाद एण्ड सन्स, आगरा
6.	के. के. सरकार-आर. एन. शर्मा	यांत्रिकी	साहित्य भवन, आगरा

14.9 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment questions)

1. चौड़ाई व मोटाई की तुलना अधिक लम्बाई वाली एक समान अनुप्रस्थ काट की छड़ को दण्ड कहते हैं ।
2. बंकित दण्ड के अन्दर एक ऐसा परत जिस की लम्बाई में विस्तार या संकुचन नहीं होता है, उसे उदासीन पृष्ठ कहते हैं ।
3. बंकन तल तथा उदासीन पृष्ठ की विच्छेदन रेखा उदासीन अक्ष कहलाती है ।
4. दण्ड के अनुदैर्ध्य तन्तुओं के वक्रता केन्द्र, बंकन तल के लम्बवत एक रेखा पर स्थित होते है, जिसे दकन अक्ष कहते हैं ।
5. दण्ड की बंकित साम्य स्थिति में, उदासीन अक्ष के लम्बवत रेखा के सापेक्ष, प्रत्यास्थता के कारण उत्पन्न आन्तरिक बलों के आघूर्णो को बंकन आघूर्ण कहते है । बंकन आघूर्ण का मान, बंकित दण्ड में लगे बाहय बल आघूर्ण के तुल्य होता है ।
6. दण्ड में तन्तु की अनुदैर्ध्य विकृति, उदासीन तल की वक्रता त्रिज्या के व्युत्क्रमानुपाती तथा उदासीन तल से अभीष्ट तल की दूरी z के समानुपाती होती है ।
7. ज्यामितिय जड़त्व आघूर्ण
   $$l_g = \int z^2 \delta a$$
   इसका मात्रक मीटर होता है ।
8. आयताकार परिच्छेद वाले दण्ड का ज्यामितिय जड़त्व आघूर्ण $l_g = \dfrac{bd^3}{12}$

   b चौड़ाई तथा d मोटाई है ।

9. क्षैतिज दण्ड को एक सिरे पर कसकर दूसरे स्वतंत्र सिरे को भारित करने पर बना हुआ निकाय केन्टीलीवर कहलाता है। केन्टीलीवर के स्वतंत्र सिरे पर उत्पन्न अवनमन $\delta = \frac{wl^3}{3Yl_g}$ होता है। वृत्ताकार परिच्छेद वाले दण्ड के लिये $l_g = \frac{\pi r^4}{4}$ तथा पोले वृत्ताकार परिच्छेद वाले दण्ड के लिये $l_g = \frac{\pi\left(r_2^4 - r_1^4\right)}{4}$
10. मध्य में भारित दण्ड को दो उल्टे केण्टीलीवर के तुल्य माना जा सकता है। ऐसी व्यवस्था में मध्य में उत्पन्न अवनमन $\delta = \frac{Mgl^3}{4bd^3Y}$
11. बेलन के कसे हुए सिरे पर ऐंठन कोण शून्य होता है।
12. बेलन की अक्ष पर अपरूपण कोण शून्य (न्यूनतम) होता है, अत: दिया हुआ कथन असत्य है।
13. तार में एकांक ऐंठन उत्पन्न करने के लिये आवश्यक बलयुग्म $C = \frac{\pi\eta r^4}{2l}$ इस प्रकार मोटे तार के लिये बहुत अधिक मात्रा में बलयुग्म की आवश्यकता होगी इसलिये मोटे तार को ऐंठन आसान नहीं है।
14. पोली शाफ्ट अधिक बलयुग्म संचरित कर सकती है।

14.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अति लघुत्तरात्मक प्रश्न (Very short answers questions)

1. बेलन और बेलनाकार दण्ड में अन्तर स्पष्ट कीजिए।
2. आयताकार परिच्छेद के दण्ड के सन्दर्भ में परिभाषित कीजिए।
   (1) उदासीन अक्ष (2) बंकन तल (3) बंकन अक्ष (4) बंकन आघूर्ण

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

3. बंकन आघूर्ण का व्यंजक प्राप्त कीजिए।
4. ज्यामितीय जड़त्व-आघूर्ण का क्या अर्थ है। आयताकार परिच्छेद वाले दण्ड के लिए ज्यामितीय जड़त्व-आघूर्ण का व्यंजक प्राप्त कीजिए।
5. केण्टीलीवर क्या है? मध्य में भारित दण्ड के लिए अवनमन व्यंजक प्राप्त कीजिए।
6. ऐंठन कोण तथा अपरूपण कोण से आप क्या समझते हैं?
7. एकांक ऐंठन के लिए आवश्यक बल आघूर्ण का व्यंजक प्राप्त कीजिए।
8. समान लम्बाई तथा समान द्रव्यमान वाले ठोस बेलन की तुलना में पोला बेलन शाफ्ट के लिए अधिक उपयोगी है, क्यों?

आंकिक प्रश्न (Numerical questions)

9. एक प्रयोग में छड़ का व्यास 1.26 x 10^{-2} मीटर; क्षुरधारों के मध्य दूरी 0.7 मीटर एवं छड़ के मध्य बिन्दु पर भार 0.9 किग्रा. है । यदि अवनमन 0.025 x 10^{-2} मीटर है तो छड़ के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक ज्ञात कीजिए ।

(**उत्तर:** 20.38 x 10^{10} न्यूटन / मी.^{2})

10. यदि आयताकार परिच्छेद वाली छड़ की काट x तथा y भुजाओं का आयत हो तो दर्शाइये कि x एवं y को बारी-बारी से ऊर्ध्व रखने पर बने केण्टीलीवर में यदि किसी निश्चित भार के कारण मुक्त सिरों पर अधिकतम अवनमन क्रमश: δ ,तथा δ , हो तो

11. $\frac{\delta_x}{\delta_y} = \frac{y^2}{x^2}$

12. यदि r त्रिज्या तथा l लम्बाई वाले एक धातु के बेलन को पिघलाकर उसी लम्बाई तथा 5r त्रिज्या वाले पोले पाइप के रूप में दुबारा ढाला जाये तो पाइप की एकांक ऐंठन बल युग्म किस अनुपात में बढ़ जायेगा ।

(**उत्तर**: 49 गुना)

(संकेत: पाइप वही है अत: द्रव्यमान

$$\pi r^2 l\rho = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right) l\rho$$

यहाँ $$r^2 = r_2^2 - r_1^2$$

$$r^2 = 5r$$

$$\therefore\ r^2 = \left(5r\right)^2 - r_1^2 = 25r^2 - r_1^2$$

$$r^2 = 24r^2$$

अब $$\frac{C'}{C} = \frac{\pi\eta\left(r_2^4 - r_1^4\right)}{2l\frac{x\pi}{2l}\eta r^4} \frac{r_2^4 - r_1^4}{r^4}$$

$$= \frac{\left(5r\right)^4 - (24^2)^2}{r^4} = \frac{62r^4 - 57r^4}{r^4} = 49)$$

इकाई-15

प्रत्यास्थ गुणांकों का प्रायोगिक निर्धारण
(Experimental Determination of Elastic Constants)

इकाई की रूपरेखा

15.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप

- दण्ड बंकन एवं बेलन के विमोटन क्रिया के अनुप्रयोगों को भली भांति समझ सकेंगे;
- यह जान सकेंगे कि दण्ड बंकन में यंग प्रत्यास्थता गुणांक एवं तार (बेलन) के विमोटन में दृढ़ता गुणांक की संकल्पना काम में आती है;
- यह समझेंगे कि सर्ल उपकरण में उपयोग किये गये तार में बंकन करने पर यंग प्रत्यास्थता गुणांक Y का निर्धारण होता है और उसी तार में विमोटन करने पर दृढ़ता गुणांक η का मान ज्ञात किया जाता है;
- सर्ल उपकरण में Y,η ज्ञात हो जाने पर प्वाइसन निष्पत्ति σ का मान गुणांकों के मध्य सम्बंध से ज्ञात कर सकेंगे;
- जान सकेंगे कि मैक्सवेल निडिल प्रयोग और मरोड़ी लोलक में एक ही सिद्धान्त काम में आता है;
- प्वाइसन निष्पत्ति के प्रयोग में अनुदैर्ध्य विकृति एवं अनुप्रस्थ विकृति की अनुभूति कर सकेंगे।

15.1 प्रस्तावना (Introduction)

इकाई 13 में आप प्रत्यास्थता गुणांकों की अवाधारणाओं एवं उनके मध्य सम्बंधों को भली भांति पढ़ चुके हैं । इकाई 14 में आपने दण्ड बंकन एवं बेलन के विमोटन के बारे में विस्तृत रुप से पढ़ा है जिसके अन्तर्गत आप यह भली भाँति समझ चुके हैं कि दण्ड बंकन की क्रिया में पदार्थ के यंग प्रत्यास्थता गुणांक की संकल्पना जुड़ती है जबकि बेलन या तार के विमोटन में पदार्थ के दृढ़ता गुणांक सम्बद्ध होता है । पदार्थ के यंग प्रत्यास्थता गुणांक एवं दृढ़ता गुणांक ज्ञात होने पर उसी पदार्थ के लिये प्वाइसन निष्पत्ति का निर्धारण $\sigma = \left(\frac{Y}{2\eta} - \right)$ द्वारा किया जा सकता है ।

इस इकाई के अनुच्छेद 15.2 में दण्ड बंकन विधि से यंग प्रत्यास्थता गुणांक का निर्धारण, अनुच्छेद 15.3 में सर्ल विधि द्वारा Y, η तथा σ का निर्धारण पढ़ेंगे । अनुच्छेद 15.4 तथा 15.5 में बेलन के रुप में दिये गये तार की विमोटन क्रिया द्वारा दृढ़ता गुणांक ज्ञात करेंगे तथा अनुच्छेद 15.6 में प्रायोगिक विधि द्वारा प्वाइसन निष्पत्ति ज्ञात करने की प्रायोगिक विधि का अध्ययन करेंगे।

15.2 दण्ड बंकन विधि से यंग का प्रत्यास्थता गुणांक (Young's modulus by bending of beam method)

सिद्धान्त एवं सूत्र (Principal & formula):

एक आयताकार परिच्छेद के दण्ड को क्षुरधारों पर सममित रुप से आधारित कर मध्य में भारित करके (loaded) इसे बंकित किया जाता है । इस बंकित दण्ड को दो उल्टे केन्टीलीवरों से बना हुआ माना जा सकता है ।

इस विधि से दण्ड के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक

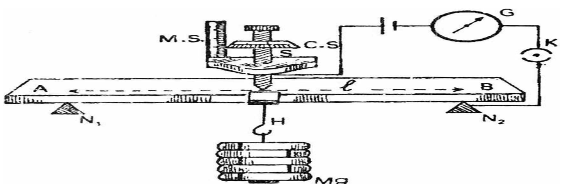
$$Y = \frac{Mgl^3}{4bd^3\delta} \qquad \text{... (15.1)}$$

यहां δ = अवनमन (स्फेरोमीटर से नापते हैं),

Mg = लटकाया गया भार

l,b तथा d क्षुरधारों के मध्य रखे दण्ड की क्रमश: लम्बाई, चौड़ाई तथा मोटाई है ।

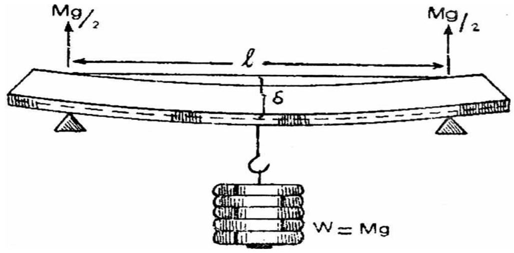
उपकरण परिचय (Introduction to apparatus) : आयताकार काट क्षेत्र वाली दण्ड AB को दो दृढ़ क्षुरधारों N_1 तथा N_2 पर रखा जाता है । यह दण्ड क्षुरधारों N_1 तथा N_2 पर सममिति (क्षुरधारों से बाहर निकले हुए भाग दोनों और बराबर) रखी जाती है और उसके ठीक मध्य में हेंगर लटकता है । यह हेंगर भी, दण्ड के ठीक मध्य में सम्पर्कित, क्षुरधार पर स्थित होता है । इस हेंगर पर खिसकाने वाले



चित्र 15.1

बांट रखने की व्यवस्था होती है । देखिये चित्र (15.1) ।

बंकन (bending) से उत्पन्न अवनमन नापने के लिये स्फेरोमीटर समंजित होता है । स्फेरोमीटर के पेच का सम्पर्क दर्शाने (प्रदर्शित) करने के लिये एक विद्युत परिपथ का उपयोग किया जाता है । बंकित स्थिति में दण्ड को सैद्धान्तिक चित्र (15.2) में दर्शाया गया है ।



चित्र 15.2

प्रयोग के पद (Steps of experiment)

आयताकार दण्ड को दृढ़ (मेज में लगे) क्षुरधारों पर सममितीय (Symmetrically) व्यवस्थित करने के लिये आयताकार पटल क्षुरधारों पर इस प्रकार रखा जाना चाहिये कि दोनों क्षुरधारों के बाहर छड़ की लम्बाई बराबर रहे । तथा इनके बीचों बीच हेंगर लटकना चाहिये ।

अब वर्नियर कैलीपर्स की सहायता से छड़ की चौड़ाई कई स्थानों पर (बिन्दुओं) पर ज्ञात करके माध्य चौड़ाई b ज्ञात कर लेते हैं । अभीष्ट आयताकार दण्ड की मोटाई के लिये कई स्थानों पर स्क्रूगेज की सहायता से प्रेक्षण लेते हैं । प्रेक्षणों से दण्ड की औसत मोटाई d ज्ञात कर लेते हैं ।

तत्पश्चात्, उपकरण के साथ लगे स्फेरोमीटर का अल्पतम माप ज्ञात करके, सर्वप्रथम (हेंगर पर बिना बांट चढ़ाये) स्फेरोमीटर के पेच को इतना घुमाइये कि वह दण्ड को स्पर्श करने लगे (इस स्थिति में व्यवस्थित विद्युत परिपथ में विक्षेप आने लगता है) । इस अवस्था में स्फेरोमीटर का पाठयांक नोट कर लेते हैं । अब, हैंगर पर आधा किलोग्राम का बांट चढ़ाते हैं तो छड़ (दण्ड) में बंकन के कारण विद्युत परिपथ भंग हो जाता है । इसलिये आप स्फेरोमीटर के पेच को फिर इतना घुमाइये कि उपकरण के साथ लगे परिपथ में पुन: विक्षेप आ जाये । यह प्रेक्षण आधा किलोग्राम भार के लिये है । इसे नोट कर लीजिये ।

इसी प्रकार, आधा-आधा किलोग्राम के बांट चढ़ाते जाइये तथा इसी विधि से तत्सम्बन्धित प्रेक्षण नोट करते जाइये । इस प्रकार भार बढ़ाते हुये 8 या 10 प्रेक्षण नोट कर लेते हैं । अब, उपरोक्त वर्णित प्रक्रिया को, हेंगर से आधा-आधा किलोग्राम भार घटाते हुए दुहराना है । ध्यान यह रखना है कि भार चढ़ाने या उतारने के तुरन्त बाद प्रेक्षण न लें । एक दो मिनिट का इन्तजार करने के बाद स्फेरोमीटर को समायोजित कर प्रेक्षण लेना है । इन प्रेक्षणों से औसत अवनमन δ प्राप्त कर लेते हैं ।

प्रेक्षण कैसे रिकॉर्ड करें (How to record the observations) :

(1) क्षुरधारों N_1 तथा N_2 पर टिके सममित दण्ड के लिए N_1 तथा N_2 के मध्य की लम्बाई सामान्य मीटर पैमाने की सहायता से ज्ञात कर लेते हैं । तत्पश्चात् वर्नियर केलीपर्स का अल्पतम मान ज्ञात करते हुए इसकी सहायता से दण्ड की चौड़ाई (b) ज्ञात करते हैं । अब स्क्रूगेज की अल्पतम माप ज्ञात करके दण्ड की मोटाई (d) ज्ञात कर लेते हैं । मापन की शुद्धता बढ़ाने की दृष्टि से प्रत्येक राशि से सम्बन्धित प्रेक्षणों को कई बार लेकर सम्बन्धित राशि का माध्य ज्ञात करते हैं ।

(2) अवनमन δ का मापन: दण्ड को मध्य में भारित करने पर उत्पन्न अवनमन δ के प्रेक्षण के लिए दण्ड पर लटके हुए हेंगर पर क्रमिक रूप से भार बढ़ाते हुए स्फेरोमीटर की सहायता से बंकित दण्ड में उत्पन्न अवनमन δ को रिकॉर्ड करते जाते हैं । इसके पश्चात् भार घटाते क्रम में स्फेरोमीटर की रीडिंग नोट करते जाते हैं । इस प्रकार प्रत्येक निश्चित भार (Mg) के लिए उत्पन्न औसत अवनमन δ का निर्धारण कर लेते हैं । अवनमन मापन में परिशुद्धता का विशेष ध्यान रखा जाना चाहिए ।

सामान्यत: अवनमन के मापन हेतु 8 या 10 प्रेक्षण लेने चाहिए । इन प्रेक्षणों से प्राप्त अवनमन मानों में 8वें प्रेक्षण से चौथे प्रेक्षण को घटाकर, 7 वें प्रेक्षण से तीसरे प्रेक्षण को घटाकर, 6, वें प्रेक्षण से दूसरे प्रेक्षण को घटाकर तथा 5 वें प्रेक्षण से पहले प्रेक्षण कों घटाकर; दो किलोग्राम भार के लिए अवनमन δ का मान निर्धारित कर लेते हैं । इन प्रेक्षपों से नियत भार (2Kg) के लिए औसत अवनमन ज्ञात कर लेते है ।

गणना (Calculation):

प्रेक्षणों में प्राप्त राशियों क्रमश: लम्बाई l,चौड़ाई b, तथा मोटाई d,और Mg = 2 किग्रा. के लिए प्राप्त औसत अवनमन मानों को सूत्र

$$Y = \frac{Mgl^3}{4bd^3\delta}$$

में प्रतिस्थापित कर गणना कर लेते हैं ।

ध्यान रखने योग्य बातें (Points to be noted) -

हैंगर पर उतारने या चढ़ाने के एक दो मिनट बाद स्फेरोमीटर समायोजित करना है जिससे कि दण्ड-भार तथा प्रत्यास्थता के मध्य साम्यावस्था स्थापित हो जाये । पाठयांक लेते समय स्फेरोमीटर को एक ही दिशा में चलाना चाहिये क्योंकि इन उपकरणों में पिच्छट त्रुटि होती है । पूरे प्रयोग में दण्ड की स्थिति बदलनी नही चाहिये अन्यथा बनने वाले केन्टीलीवरों की बदली हुई स्थिति से परिणामों में त्रुटि आ जायेगी ।

दण्ड की मोटाई का मापन स्क्रूगेज द्वारा यथार्थता से मापना चाहिये । पूरे प्रयोग को प्रत्यास्थ सीमा के अन्तर्गत ही करना चाहिये । क्षुर धार N_1 तथा N_2 की धार अति तीक्ष्ण होनी चाहिए जिससे कि घर्षण न्यूनतम हो जाये ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

1. मध्य में भारित दण्ड में अवनमन सूत्र लिखिए ।

   ....

2. आयताकार परिच्छेद वाले बंकित दण्ड के अवनमन में अवनमन मान दण्ड की आकृति पर कैसे निर्भर करता है?

   ....

3. बंकन विधि से Y ज्ञात करने में दण्ड की मोटाई पेंचमापी से ज्ञात करते हैं क्यों?

   ....

15.3 सर्ल उपकरण से यंग प्रत्यास्थता गुणांक Y, दृढ़ता गुणांक η तथा प्वाइसन निष्पत्ति σ (Young's Modulus Y, Modulus of Rigidity η and Possion ratio σ using searl's apparatus)

सिद्धान्त एवं सूत्र (Principal & formula) :

सर्ल के उपकरण की सहायता से प्रायोगिक तार के लिये

यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y = \dfrac{8\pi Il}{T_2^2 r^4}$,

दृढ़ता गुणांक $\eta = \dfrac{8\pi Il}{T_2^2 r^4}$

तथा प्वाइसन निष्पत्ति $\sigma = \dfrac{T_2^2}{2T_1^2} - 1$

जहां I=आयताकार या वृत्ताकार काट क्षेत्र वाली एक छड़ का (उसके केन्द्र से लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के प्रति) जड़त्व-आघूर्ण

l = प्रायोगिक तार की लम्बाई,

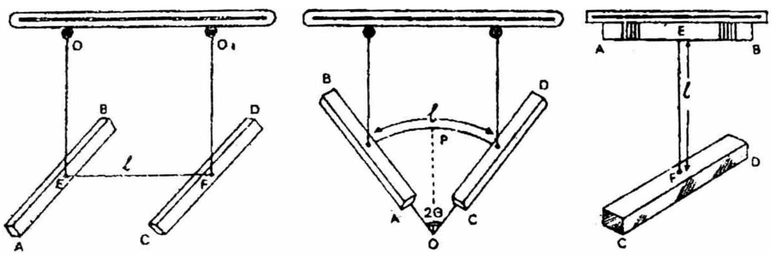
r = प्रायोगिक तार की त्रिज्या

T_1 = बंकित दोलन कराने पर आवर्तकाल,

T_2= विमोटित कम्पन कराने पर आवर्तकाल

उपकरण परिचय (Introduction to apparatus)

प्रायोगिक तार EF (जिसकी लम्बाई l तथा त्रिज्या r है), आयताकार (या वृत्ताकार) परिच्छेद वाली दो छड़ों AB तथा CD के मध्य कसा रहता है । प्रयोग द्वारा यंग प्रत्यास्थता गुणांक Y ज्ञात करने के लिये, स्टैण्ड पर धागे की सहायता से उपकरण को क्षैतिज तल में समंजित करके तार में बंकन उत्पन्न



चित्र 15.3 चित्र 15.4 चित्र 15.5

किया जाता है । इस प्रकार बंकन आघूर्ण $\dfrac{YI_g}{R}$ प्रत्यास्थता के कारण उत्पन्न प्रत्यानयन बल आघूर्ण $\left(I\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ से सन्तुलित हो जाता है और तार से सम्बद्ध छड़ें दोलन करना प्रारम्भ कर देती हैं । अर्थात्

$$\frac{YI_g}{R} + I\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

चित्र (15.4) से स्पष्ट है कि $\frac{l}{R} = 2\theta \qquad \therefore \frac{1}{R} = \frac{2\theta}{l}$

$$\therefore YI_g \times \frac{2\theta}{l} + I\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

या $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2YI_g}{Il}.\theta = 0$$

या $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

यहाँ $$\omega = \sqrt{\frac{2YI_g}{Il}}$$

तथा बेलन के रुप में प्रयुक्त प्रायोगिक तार के लिये $I_g = \frac{\pi r^4}{4}$

$$\therefore T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{Ol}{2YI_g}}$$

अर्थात् $$Y = \frac{8\pi Il}{T_1^2 r^4} \qquad (15.2)$$

उपर्युक्त समीकरण से Y की गणना की जा सकती है। पुन: उपकरण की एक छड़ को कसकर, दूसरी छड़ पर एक बलयुग्म लगाकर तार को अल्पकोण के लिये विमोटित (twist) कर दें तो प्रत्यास्थता के कारण, मुक्त छड़ CD, तार की अक्ष के अनुदिश दोलन करने लगती है। अर्थात्

बल आघूर्ण $$I.\frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta$$

या $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{I}.\theta = 0$$

यदि $\sqrt{\frac{C}{I}} = \omega'$ हो तो दोलन काल $T_2 = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{C}{I}}}$

या $$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\left(\pi\eta r^4 / 2l\right)}}$$

अर्थात् द्रढ़ता गुणांक $$\eta = \frac{8\pi Il}{T_2^2 r^4} \qquad ...(15.3)$$

अब समीकरण (15.2) तथा (15.3) से

$$\frac{Y}{\eta} = \frac{T_2^2}{T_1^2}$$

लेकिन प्वाइसन निष्पत्ति $\sigma = \frac{Y}{2\eta} - 1$ से

$$\sigma = \frac{T_2^2}{2T_1^2} - 1 \qquad ....(15.4)$$

प्रयोग के पद (Steps of experiment)

सर्वप्रथम वर्नियर कैलीपर्स की सहायता से आयताकार काट क्षेत्र वाली छड़ों की चौड़ाई B, कई स्थानों पर ज्ञात कर लेते हैं । इन प्रेक्षणों से छड़ की माध्य चौड़ाई ज्ञात कर लें । यदि छड़ बेलनाकार है तो वर्नियर कैलीपर्स की सहायता से छड़ का व्यास D ज्ञात कर लेते हैं जिसके माध्यमान से गणना करके छड़ की त्रिज्या R’ ज्ञात कर लेते हैं । भौतिक तुला द्वारा दोनों छड़ों को अलग अलग तौल कर, उनसे मध्यमान संहति ज्ञात करते है । मीटर स्केल की सहायता से छड़ की लम्बाई ज्ञात करके माध्य लम्बाई L ज्ञात कर लेते हैं ।

अब चित्र 15.3 के अनुसार, पूरे उपकरण को समायोजित करते हैं । छड़ों के दोनों सिरों (जो आपकी ओर हैं) को पास लाकर (चित्र 15.4) धागे की सहायता से तार में बंकन उत्पन्न करते हैं । यह ध्यान रखना है कि दोनों छड़ अपनी पूर्व स्थिति से समान झुकी हुई होनी चाहिए । जब निकाय स्थिरावस्था में हो तब धागे को जला दीजिए जिससे कि छड EO अक्ष के सापेक्ष दोलन करना प्रारम्भ कर दे । विरामघडी की सहायता से 30-40 दोलनों का समय नोट कर लेते हैं । यह क्रिया तीन चार बार दुहराते हैं तत्पश्चात माध्य T_1 ज्ञात कर लेते हैं ।

अब उपकरण को चित्र (15.5) के अनुसार, एक छड़ को दृढ़ आधार से बांध कर दृढ़ता से कस देते हैं तथा दूसरी छड़ CD के सीमान्त सिरों पर एक क्षैतिज बलयुग्म लगाकर प्रायोगिक तार को विमोटित कर देते हैं । ध्यान रहे कि ऐंठन कोण कम होना चाहिए । प्रत्यास्थता के गुण के कारण छड़ CD, अक्ष EF के सापेक्ष दोलन करती है । इस स्थिति में भी आवर्तकाल T_2, ज्ञात कर लेते हैं । अन्त में मीटर स्केल की सहायता से प्रायोगिक तार EF की लम्बाई l तथा पेंचमापी की सहायता से तार के अनेक स्थानों पर दो परस्पर लम्बवत् दिशाओं में व्यास ज्ञात कर लेते हैं और फिर मध्यमान त्रिज्या r ज्ञात कर लेते हैं ।

प्रेक्षण कैसे रिकॉर्ड करें (How to record the observation)

(1) छड़ के जड़त्व आघूर्ण I के लिये दोनों छड़ों को अलग-अलग तौल कर, मध्यमान संहति M ज्ञात कर लेते हैं । मीटर स्केल से एक छड़ की लम्बाई और वर्नियर केलीपर्स की सहायता से उसी छड़ की चौड़ाई b (या वृत्ताकार परिच्छेद वाली छड़ होने पर इसकी त्रिज्या R') ज्ञात कर लेते हैं ।

(2) आवर्तकाल T_1 तथा T_2 के लिये सर्वप्रथम क्षैतिज तल में होने वाले कम्पनों के आवर्तकाल के लिए ऐसी स्टॉप वॉच का उपयोग करते हैं जो 0.1 सेकण्ड तक माप सकती हो । प्रत्येक दोलन संख्या (20 या 30 या 40) के लिए कम से कम दो बार प्रेक्षण लेने हैं ताकि आवर्तकाल (दोलन काल) T_1 का परिशुद्ध मान ज्ञात किया जा सके । इसी प्रकार प्रायोगिक तार को विमोटित करके; मरोड़ी दोलनों का आवर्तकाल (दोलन काल) T_2, ज्ञात कर लेते हैं ।

यदि सर्ल के उपकरण से केवल पॉईसन निष्पत्ति ज्ञात करनी हो तो प्रयोग से केवल T_1 तथा T_2 के ही प्रेक्षक लिए जाते हैं।

(3) प्रायोगिक तार की लम्बाई l, साधारण पैमाने की सहायता से और तार की त्रिज्या r का मान स्क्रूगेज की सहायता से ज्ञात कर लेते हैं । चूँकि सूत्र में त्रिज्या की चार घात प्रभाव डालती हैं; अत: त्रिज्या के प्रेक्षण बहुत यथार्थता से ज्ञात करते हैं ।

गणना (Calculation) -

(1) छड़ का जड़त्व आघूर्ण I को

$$I = M\left(\frac{L^2 + B^2}{12}\right) \text{ (यदि छड आयताकार है)}$$

या $$I = M\left(\frac{L^2}{12} + \frac{R'^2}{4}\right) \text{ (यदि छड़ वृत्ताकार है)}$$

की सहायता से M,L,B या R' के मान रखकर ज्ञात कर लीजिए ।

(2) अब आप सूत्र $\frac{8\pi Il}{r^4}$ में छड़ के जड़त्व आघूर्ण I, तार की लम्बाई l तथा तार की त्रिज्या r का मान प्रतिस्थापित कर इस पद का मान ज्ञात कर लीजिए । तत्पश्चात $Y = \frac{8\pi Il}{r^4} \Big/ T_1^2$ तथा $\eta = \frac{8\pi Il}{r^4} \Big/ T_2^2$ का उपयोग करके क्रमश: Y तथा η की गणना कर लीजिए । अन्त में $\sigma = \frac{T_2^2}{2T_1^2} - 1$ की सहायता से प्वाइसन निष्पत्ति σ ज्ञात कर लीजिए ।

ध्यान रखने योग्य बातें (Points to be noted) -

तार की त्रिज्या को परिशुद्धता से ज्ञात करनी है क्योंकि इसकी चार घात होने से परिणाम में शुद्धता बढ़ेगी । कम्पन आयाम कम रहने चाहिये जिससे कि निकाय सरल आर्वत गति करे । बंकन तल क्षैतिज में रखने के लिये धागा अधिक लम्बाई का लेना चाहिये ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

4. सर्ल के उपकरण में छड और तार दोनों में से किसका प्रत्यास्थता गुणांक ज्ञात करते है ।

   ....

5. सर्ल उपकरण से Y ज्ञात करने में तार को ऐंठा जाता है या बंकित किया जाता है|

   ....

15.4 मरोड़ी लोलक द्वारा दृढ़ता गुणांक (Modulus of rigidity by torsonal pendulum)

सिद्धान्त एवं सूत्र (Principal & formula):

यदि एक सिरे पर कसे हुए प्रायोगिक तार को विमोटित करके छोड़ने पर उस तार के मुक्त सिरे पर लटका गोला (या बेलन) अपनी अक्ष पर दोलन करे तो तार के पदार्थ का दृढ़ता गुणांक

$$\eta = \frac{8\pi Il}{T^2 r^4}$$

यहां l= प्रायोगिक तार की लम्बाई,

r= प्रायोगिक तार की त्रिज्या

T= लोलक का आवर्तकाल,

I= गोले या बेलन का उसकी अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण

गोले की स्थिति में $I = \frac{2}{5}MR^2$

तथा बेलन होने की स्थिति में $I = \frac{1}{2}MR^2$

जहां M= द्रव्यमान

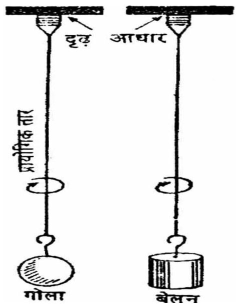
तथा R= तत्सम्बंधित त्रिज्या है ।

उपकरण परिचय (Introduction to apparatus) :

यदि किसी पतले और लम्बे तार का एक सिरा दृढ़ता से कस दें एवं दूसरे सिरे पर ज्ञात जड़त्व आघूर्ण वाली वस्तु (गोला या बेलन) लटका दें तो निकाय की यह अवस्था, **मरोड़ी दोलक** कहलाती है । यदि मरोड़ी लोलक में लटके भारी गोले (या बेलन) को क्षैतिज बल युग्म लगाकर तार में अल्प ऐंठन उत्पन्न कर दें तो लोलक प्रत्यास्थता के गुण के कारण मरोड़ी दोलन प्रारम्भ कर देता है ।

यदि तार में एकांक रेडियन ऐंठन उत्पन्न करने के लिये बलयुग्म C हो तथा किसी क्षण तार में ऐंठन कोण θ हो तो

$$I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta$$



चित्र 15.6

या कोणीय त्वरण

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{C}{I}.\theta$$

यह समीकरण, सरल आवर्त गति व्यक्त करता है जिसका आवर्तकाल

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}$$

स्पष्ट है कि मरोड़ी लोलक का आवर्तकाल T दोलनी पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण I एवं एकांक रेडियन ऐंठन उत्पन्न करने के लिये आवश्यक बल आघूर्ण C के मान पर निर्भर करता है ।

यहाँ $C = \frac{\pi\eta r^4}{2l}$ है

अत: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\frac{\pi\eta r^4}{2l}}}$

या $\eta = \frac{8\pi Il}{T^2 r^4}$ ....(15.5)

यहाँ संकेतों के सामान्य अर्थ हैं ।

प्रयोग के पद (Steps of experiment)

प्रायोगिक तार के सिरे से लटके गोले या बेलन को तार की अक्ष के सापेक्ष अल्प विमोटित कर छोड़ दिया जाये तो प्रत्यास्थता के गुण के कारण वह दोलन करने लगता है । विराम घड़ी की सहायता से 20,25,30 और 40 दोलनों का समय ज्ञात करके तत्सम्बंधित आवर्तकाल ज्ञात कर लेते हैं । इनसे आवर्तकाल T ज्ञात कीजिए ।

स्क्रूगेज की सहायता से तार की त्रिज्या के लिये तार के अनेक स्थानों पर प्रेक्षण लेते हैं । तार के अनेक बिन्दुओं पर परस्पर लम्बवत दिशाओं में लिये प्रेक्षणों से तार की माध्य त्रिज्या ज्ञात कर लीजिए । मीटर पैमाने पर तार की लम्बाई ज्ञात कर लेते हैं । वर्नियर कैलीपर्स से गोले (या बेलन) की त्रिज्या ज्ञात कर लेते हैं । अन्त में भौतिक तुला से गोले (या बेलन) का द्रव्यमान M ज्ञात कर लेते हैं ।

प्रेक्षण कैसे रिकॉर्ड करें (How to record observation)

(1) मरोड़ी दोलनों का आवर्तकाल ज्ञात करने के लिए ऐसी स्टॉप वॉच का उपयोग करते हैं जो 0.1 सेकण्ड तक नाप सकती हो । प्रत्येक दोलन संख्या (20 या 30 या 40) के लिए कम से कम दो बार प्रेक्षण लेनी चाहिए ताकि आवर्तकाल का यथार्थ मापन हो सके ।

(2) प्रायोगिक तार की लम्बाई l, साधारण पैमाने से तथा तार की त्रिज्या के लिए पेचमापी द्वारा तार के कई स्थानों पर प्रेक्षण लेने चाहिए ।

(3) गोला या बेलन का जड़त्व आघूर्ण I निर्धारित करने के लिए भौतिक तुला द्वारा द्रव्यमान तथा वर्नियर कैलीपर्स द्वारा त्रिज्या R का मान ज्ञात करना चाहिए ।

गणना (Calculation):

(i) गोले या बेलन का जड़त्व आघूर्ण (ज्यामिती अक्ष के सापेक्ष)

$I = \frac{2}{5}MR^2$ (गोले के लिये),

$I = \frac{1}{2}MR^2$ (बेलन के लिये)

(ii) दिये गये प्रायोगिक तार का दृढ़ता गुणांक

$$\eta = \frac{8\pi Il}{T^2 r^4}$$

(सूत्र में l, l, T तथा r के मान (प्रेक्षण तालिकाओ) प्रतिस्थापित करके दृढ़ता गुणांक का मान ज्ञात कर लीजिए)

ध्यान रखने योग्य बातें (Pointed to be noted)

प्रायोगिक तार बिना गांठ वाला, लम्बा व कम त्रिज्या का होना चाहिए जिससे कि आवर्तकाल का निर्धारण किया जा सके। दोलन पूर्णत: घूर्णी दोलन (rotational oscillations) होने चाहिए । तार में ऐंठन अल्प की जानी चाहिए जिससे कि निकाय सरल आवर्त गति करे । तार की त्रिज्या r का मापन यथार्थता से करना चाहिए । इसके कारण परिणाम काफी हद तक प्रभावित होते हैं ।

15.5 मैक्सवेल निडिल उपकरण से तार का दृढ़ता गुणांक (Modulus of rigidity of wire by using Maxwell's needle)

सिद्धान्त एवं सूत्र (Principle & formula) :

मैक्सवेल की सुई उपकरण की सहायता से तार के रुप में दिये गये पदार्थ का दृढ़ता गुणांक

$$\eta = \frac{2\pi l\left[M_S - M_H\right]L^2}{r^4\left(T_2^2 - T_1^2\right)} \qquad ....(15.6)$$

यहाँ l = प्रायोगिक तार की लम्बाई,

r= तार की त्रिज्या

L = पीतल की खोखली बेलनाकार नली की लम्बाई

M_H = प्रत्येक ठोस बेलन का द्रव्यमान,

M_H = प्रत्येक खोखले बेलन का द्रव्यमान

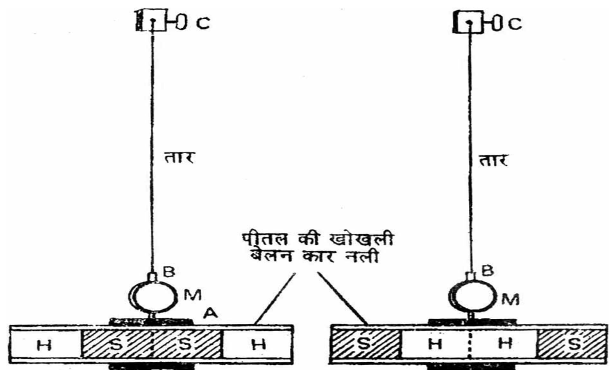
T_1 = आवर्तकाल जबकि ठोस बेलन खोखली नली के मध्य में (भीतर) व्यवस्थित किये गये हैं।

T_2 = आवर्तकाल जबकि खोखले बेलन, खोखली बेलनाकार नली के मध्य में व्यवस्थित हैं ।

उपकरण परिचय (Introduction to apparatus):

मैक्सवेल की सुई उपकरण, मरोड़ी लोलक (torsional pendulum) का एक संशोधित रुप है जिसमें गतिकीय विधि द्वारा तार के पदार्थ का दृढ़ता गुणांक यथार्थता से ज्ञात किया जा सकता है ।

इसमें पीतल की एक लम्बी खोखली बेलनाकार नली होती है जो कि प्रायोगिक तार द्वारा क्षैतिज स्थिति में लटकी रहती है । तार का ऊपरी सिरा क्लैम्प C में कला रहता है तथा दूसरा सिरा पीतल के तार B पर लगे समतल दर्पण के साथ व्यवस्थित रहता है । नली के भीतर चार छोटे छोटे (एक साइज के) पीतल के बेलन (प्रत्येक की लम्बाई खोखली नली की लम्बाई का एक चौथाई) फिट किये जाते हैं। इनमें दो बेलन H,H खोखले तथा दो बेलन B,B ठोस होते हैं । लम्बी खोखली बेलनाकार नली, एक छोटे पीतल के फ्रेम में फिट की हुई होती है ।



चित्र 15.7 **चित्र 15.8**

प्रयोग करने में नली को क्षैतिज तल में थोड़ा सा घुमाकर तार में विमोटन कर देते हैं । तार की प्रत्यास्थता के गुण के कारण निकाय दोलन करना प्रारम्भ कर देता है ।

मरोड़ी लोलक के सिद्धान्तानुसार (सभी 15.5) दृढ़ता गुणांक

$$\eta = \frac{8\pi Il}{T^2 r^4} \qquad \text{से} \quad T^2 = \frac{8\pi Il}{\eta r^4}$$

अब यदि चित्र 15.7 में दर्शाई गयी व्यवस्थानुसार तार (अक्ष) के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I, तथा मरोड़ी दोलन काल T_1 हो तो

$$T_1^2 = \frac{8\pi I_1 l}{\eta r^4} \qquad .....(15.7)$$

तथा चित्र 15.8 की व्यवस्थानुसार जड़त्व आघूर्ण I_2, व मरोड़ी दोलन काल T_2 होने पर

$$T_2^2 = \frac{8\pi I_2 l}{\eta r^4} \qquad ...(15.8)$$

अत: $$\left(T_2^2 - T_1^2\right) = \frac{8\pi Il}{\eta r^4}\left(I_2 - I_1\right)$$

या $$\eta = \frac{8\pi Il}{\left(T_2^2 - T_1^2\right) r^4}\left(I_2 - I_1\right) \qquad ...(15.9)$$

अब जड़त्व आघूर्ण की समान्तर अक्ष प्रमेय का उपयोग करने पर

$$\left(I_2 - I_1\right) = \left(M_S - M_H\right)\frac{L^2}{4} \qquad .....(15.10)$$

अत: समीकरण (15.9) तथा (15.10) से दृढ़ता गुणांक

$$\eta = \frac{2\pi l\left[M_S - M_H\right]L^2}{r^2\left(T_2^2 - T_1^2\right)}$$

प्रयोग के पद (Steps of Experiment)

सर्वप्रथम मैक्सवैल सुई (खोखली बेलनाकार नली) में चारों छोटे बेलनों को इस प्रकार रखते हैं कि दोनों ठोस बेलन अन्दर तथा खोखले बेलन बाहर की ओर रहें (चित्र 15.7) । तार की अक्ष के सापेक्ष क्षैतिज बलयुग्म द्वारा अल्प ऐंठन उत्पन्न करके निकाय को दोलन कराते हैं । इस स्थिति में 20,30,40 दोलनों का समय विराम घड़ी की सहायता से ज्ञात कर लेते हैं । इनसे दोलनकाल ज्ञात

करके माध्य दोलन काल T_1 ज्ञात करते हैं । पुन: नली में उपस्थित चारों बेलनों को चित्र 15.8 की भांति इस प्रकार व्यवस्थित करो कि अब बीच में खोखले बेलन तथा बाहरी ओर ठोस बेलन रखे हुए हों। अब ऊपर बताई गयी विधि की भांति दोलन कराकर दोलन काल T_1 ज्ञात कर लेते हैं । आप पायेंगे कि $T_2 > T_1$ है ।

स्क्रूगेज की सहायता से प्रायोगिक तार के अनेकों स्थानों पर परस्पर लम्बवत् दिशाओं में व्यास के लिये प्रेक्षण लीजिए। मीटर स्केल की सहायता से तार की L लम्बाई ज्ञात कर लेते हैं । मीटर स्केल से पीतल की खोखली नली (मैक्सवेल सुई) की लम्बाई L ज्ञात करके भौतिक तुला द्वारा ठोस तथा खोखले बेलनों के द्रव्यमानों का अन्तर (M_S-M_H) ज्ञात कर लेते हैं ।

प्रेक्षण कैसे रिकॉर्ड करें (How to record observation) -

(1) प्रायोगिक तार की लम्बाई L साधारण मीटर पैमाने से ज्ञात करते हैं । तार की त्रिज्या के मापन के लिए सुग्राही पेचमापी का उपयोग करते हैं । तार के कई स्थानों पर त्रिज्या के लिए प्रेक्षण लिये जाते हैं । जिनसे तार का माध्य व्यास ज्ञात करके तार की त्रिज्या ज्ञात की जाती है ।

(2) मैक्सवेल उपकरण के पाइप में व्यवस्थित होने वाले प्रत्येक ठोस व खोखले बेलनों की तौल ज्ञात करके ठोस बेलन का औसत द्रव्यमान M_S तथा खोखले बेलन का औसत द्रव्यमान M_H ज्ञात कर लेते हैं । साथ ही पाइप की लम्बाई L मीटर पैमाने से ज्ञात कर लेते हैं ।

(3) ठोस बेलन अन्दर की ओर और खोखले बेलन बाहर की ओर सममिति व्यवस्थित कर तार में द्रव्य विस्थापन के मरोड़ी दोलन उत्पन्न करते हैं । इस स्थिति में 0.1 सेकण्ड अल्पतम माप वाली स्टॉप वॉच से दोलनों में लगे समय का मापन करते हैं । इन प्रेक्षपों से दोलन काल T_1 ज्ञात कर लेते हैं । अब बेलनों की व्यवस्था बदल कर पुन: तार में मरोड़ी दोलन उत्पन्न करते हैं और दोलन काल T_2 ज्ञात कर लेते हैं ।

गणना (Calculation) :

दृढ़ता गुणांक के सूत्र

$$\eta = \frac{2\pi l\left[M_S - M_H\right]L^2}{r^2\left(T_2^2 - T_1^2\right)}$$

में सम्बंधित मानों को प्रतिस्थापित करके दृढ़ता गुणांक की गणना कर लेते हैं ।

ध्यान रखने योग्य बातें (Point to be noted)

तार लम्बा और पतला होना चाहिए जिससे कि दोलनकाल के मापन में त्रुटि न्यूनतम हो । तार में कोई गांठ या मोड़ नहीं होना चाहिए । अल्प ऐंठन के लिये ही सूत्र मान्य है अत: कम ऐंठन की जानी चाहिए । तार की त्रिज्या का मापन यथार्थता से करना है । इस मापन में की गई त्रुटि परिणाम पर अत्यधिक प्रभाव डालती है । प्रयोग में मैक्सवेल सुई क्षैतिज रहनी चाहिए (क्यों ?)

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

6. तार में मरोड़ी दोलन का दोलन काल तार की त्रिज्या पर किस प्रकार निर्भर करता है?

....
....

7. मोटा तार लेने पर प्रेक्षणों पर क्या प्रभाव पडेगा ।

....
....

8. मैक्सवेल निडिल उपकरण में प्रयुक्त तार पतला क्यों लेते हैं?

....
....

9. निडिल में बेलनों कि स्थिति बदल देने पर दोलन काल भिन्न क्यों हो जाता है|

....
....
....

10. यथार्थ परिणाम प्राप्त करने के लिये आप क्या करेंगे?

....
....
....

15.6 रबर के लिये प्वाइसन निष्पत्ति (Poission ratio of rubber)

सिद्धान्त एवं सूत्र (Principal & formula):

प्रयोगशाला में रबर की प्वाइसन निष्पत्ति निम्न सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं -

$$\sigma = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{a}\frac{dV}{dL}\right] \qquad .....(15.11)$$

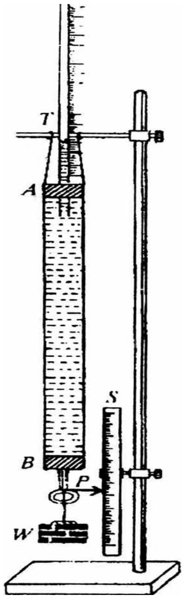
यहां a= रबर की नली का लम्ब काट क्षेत्रफल

dV = ट्यूब के आयतन में वृद्धि जबकि ट्यूब पर कुछ भार लगा कर विस्तरित की गई हो ।

dL = ट्यूब की लम्बाई में तत्सम्बंधित वृद्धि ।

उपकरण परिचय (Introduction to apparatus) -

इस उपकरण में लगभग एक मीटर लम्बी तथा 1.5 सेमी. व्यास की रबर नली होती है । नली का निचला सिरा B एक पीतल के टुकड़े से बन्द होता है जिसमें एक पीतल का छल्ला (या हैंगर या हुक) लगा रहता है । इस हुक की सहायता से लटके हैंगर में खांचेदार बांट चढ़ाकर, नली की लम्बाई में विस्तरण किया जाता है । फलत: नली का आन्तरिक आयतन थोड़ा बढ़ जाता है । अत: अंशाकित नली या ब्यूरेट में जल का तल कुछ नीचे गिर जाता है । नली की लम्बाई में परिवर्तन के मापन के लिये निचले तल पर एक संकेतक लाग रहता है जो निर्धारित स्केल पर पाठयांक देता है । ब्यूरेट में अंकित चिन्हों द्वारा जल की स्थिति का पाठयांक ले लेते हैं ।



चित्र 15.9

माना कि रबड़ की ट्यूब की प्रारम्भिक लम्बाई L, नली का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल A, आन्तरिक त्रिज्या r तथा आयतन V है तथा हैंगर पर भार लटकाने से ट्यूब की लम्बाई बढ़कर L+ dL तथा त्रिज्या घटकर r-dr हो जाती है जिससे अनुप्रस्थ क्षेत्रफल भी A-dA हो जाता है और आयतन V+ dV हो जाता है ।

अब, ट्यूब का प्रारम्भिक आयतन V =AL = $\pi r^2 L$

तथा अन्तिम आयतन

$$V+dV = (A-dA)(L+dL)$$
$$= AL+AdL-dAL-dAdL$$

यहां dA.dL नगण्य है तथा AL=V है ।

$$dV = AdL-LdA$$

परन्तु $dA = \pi r^2 - \pi (r-dr)^2 \approx 2\pi rdr$

$$A = \pi r^2$$

अतः $dV = \pi r^2 dL - L.2\pi rdr$

या $$\frac{dV}{dL} = \pi r^2 - 2\pi rL\frac{dr}{dL} \qquad .....(15.12)$$

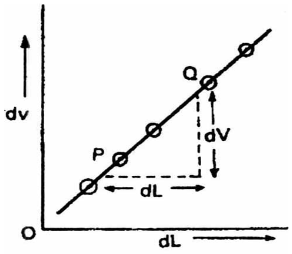
यहाँ प्वाइसन निष्पत्ति = $\frac{\text{अनुप्रस्थ विकृति}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}} = \frac{dr/r}{dL/L} = \frac{Ldr}{rdL}$

लेकिन समीकरण (15.12) से -

$$\frac{dr}{dL} = \frac{1}{2\pi rL}\left[\pi r^2 - \frac{dV}{dL}\right] \therefore \sigma = \frac{dr}{dL}.\frac{L}{r} = \frac{1}{2\pi rL}\left(\frac{L}{r}\right)\left[\pi r^2 - \frac{dV}{dL}\right]$$

या $$\sigma = \frac{1}{2\pi r^2}\left[\pi r^2 - \frac{dV}{dL}\right]$$

या $$\sigma = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{(\pi r^2)}\left(\frac{dV}{dL}\right)\right] \quad ....(15.13)$$



चित्र 15.10

प्रयोग द्वारा ट्यूब के आयतन में परिवर्तन dV तथा लम्बाई में परिवर्तन dl का मान ज्ञात करके dV तथा dl में ग्राफ खींचते हैं । (देखिये चित्र 15.10) । प्राप्त सरल रेखा की प्रवणता से $\left(\frac{dV}{dL}\right)$ का मान ज्ञात करके समी. (15.13) द्वारा का मान ज्ञात कर सकते हैं ।

प्रयोग के पद (Steps of Experiment)

रबर की नली को पानी से इतना भरते हैं कि पानी का तल ब्यूरेट की ऊपरी सतह के निकट हो । अब संकेतक P की स्थिति को स्केल पर पढ़ लीजिए तथा ब्यूरेट में पानी का तल भी नोट कर लें । यह शून्य स्थिति का पाठयांक कहा जाता है ।

अब, 100 ग्राम का बांट हैंगर पर लटका कर कुछ देर तक इंतजार करते हैं तथा संकेतक का और ब्यूरेट में जल के तल का पाठयांक नोट कर लीजिए । यह प्रक्रिया बांट बढ़ाकर दुहरायें तथा तत्सम्बंधित प्रेक्षण सैट नोट कर लेते हैं । अब, बांट उतारते हुए भी ऐसे ही प्रेक्षण नोट करते जाते हैं । अन्त में dV तथा dL की गणना कर लेते हैं ।

प्रेक्षण कैसे रिकॉर्ड करें (How to record observations) :

(1) सर्वप्रथम प्रायोगिक ट्यूब में कई स्थानों पर व्यास के लिए प्रेक्षण लेकर इसका माध्य व्यास ज्ञात करते हैं ।

(2) प्रायोगिक उपकरण में लगे हैंगर पर क्रमिक रूप से बाँट चढ़ाते जाते हैं और तत्सम्बन्धित स्थिति में संकेतक के पाठयांक और ट्यूब में उपर व्यवस्थित ब्यूरेट की सहायता से आयतन पाठयांक करते जाते हैं ।

(3) इन प्रेक्षणों से लम्बाई में वृद्धि dl, तथा आयतन में वृद्धि dV ज्ञात कर लेते हैं ।

गणना (Calculation) - प्रेक्षण सारणी से प्राप्त dV तथा dL में एक लेखाचित्र खींचिए । प्राप्त ग्राफ (लेखाचित्र) एक सरल रेखा प्राप्त होगी ।

ग्राफ से सरल रेखा की प्रवणता $\left(\frac{dV}{dL}\right)$ की गणना कर लेते हैं तथा प्राप्त मान को सूत्र

$$\sigma = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{a}\frac{dV}{dL}\right]$$

में प्रतिस्थापित कर गणना कर लेते हैं ।

यहां $a = \frac{\pi D^2}{4}$ द्वारा a की गणना कर लेते हैं ।

ध्यान रखने योग्य बातें (Points to be noted) -

प्रयोग को प्रत्यास्थ सीमा के अन्तर्गत ही करना चाहिए । भार में वृद्धि या कमी सावधानीपूर्वक करनी चाहिए तत्पश्चात कुछ क्षण रुक कर ही सावधानीपूर्वक प्रेक्षण लेने चाहिए । ट्यूब का व्यास वर्नियर कैलीपर्स द्वारा कई स्थानों पर सावधानी से नापना चाहिए । ट्यूब में वायु का कोई बुलबुला नहीं होना चाहिए ।

बोध प्रश्न (Self assessment questions)

11. प्वाइसन निष्पत्ति के सैद्धान्तिक मान की सीमाएं क्या हैं?

....

12. भार वृद्धि के पश्चात् कुछ क्षण रुककर प्रेक्षण लेना क्यों आवश्यक है?

....

....

13. ट्यूब का व्यास किस उपकरण से ज्ञात करते हैं?

....

....

14. प्वाइसन निष्पत्ति का प्रायोगिक मान अधिकतम कितना हो सकता है?

....

....

15. प्वाइसन निष्पत्ति के निर्धारण की यह विधि कितनी यथार्थ है?

....

....

15.7 सारांश (Summary)

- बंकन विधि से यंग प्रत्यास्थता गुणांक Y के निर्धारण की क्रिया में केण्टीलीवर सिद्धान्त कार्य करता है ।
- दो क्षुरधारों पर टिके तथा मध्य में भारित दण्ड, दो उल्टे केण्टीलीवरों के तुल्य होता है ।
- बंकन विधि से Y के निर्धारण में W भार के कारण दण्ड के मध्य भाग में उत्पन्न अवनमन

$$\delta = \frac{wl^3}{4bd^3Y} \text{ या यंग प्रत्यास्थता गुणांक } Y = \frac{wl^3}{4bd^3\delta}$$

यहां l दोनों क्षुरधारों के मध्य टिके सममित आयताकार परिच्छेद वाले दण्ड की लम्बाई, b चौड़ाई तथा d मोटाई है जिसमें लम्बाई l को मीटर पैमाने से और अवनमन δ को गोलाईमापी से नापते हैं ।

- सर्ल उपकरण दो समरूप एवं समान्तर छड़ों के मध्य बेलनाकार दण्ड के रुप में प्रायोगिक तार व्यवस्थित होता है ।
- लकड़ी के फ्रेम में धागे द्वारा दोनों छड़ों को क्षैतिज समतल में व्यवस्थित कर तार को बंकित किया जाता है और छड़ में क्षैतिज दोलन उत्पन्न किया जाता है । इस युक्ति से

$$\text{यंग का प्रत्यास्थता गुणांक } Y = \frac{8\pi Il}{T_1^2 r^4}$$

जहां I छड़ का उसकी लम्बाई के लम्बवत अक्ष के परित जड़त्व आघूर्ण, प्रायोगिक तार की लम्बाई तथा त्रिज्या क्रमशः l तथा r है ।

- सर्ल उपकरण की एक छड़ को फ्रेम में कस कर प्रायोगिक तार में दूसरी छड़ की सहायता से विमोटन उत्पन्न किया जाता है । इस प्रकार मरोड़ी दोलन का आवर्तकाल T_2 हो तो तार के पदार्थ का

$$\text{दृढ़ता गुणांक} \quad \eta = \frac{8\pi Il}{T_1^2 r^4}$$

- सर्ल उपकरण से Y तथा η ज्ञात होने पर

$$\sigma = \frac{Y}{2\eta} - 1 = \frac{T_2^2}{2T_1^2} - 1$$

- बेलन के रुप में प्रयुक्त तार के एक सिरे को दृढ़ आधार से कसकर, दूसरे सिरे पर सममित आवृति वाले पिण्ड को लटका कर तार को अल्प कोण से मरोड़ दिया जाये तो सममित पिण्ड मरोड़ी दोलन करने लगता है । मरोड़ी लोलक का दोलन काल

$$T = .2\pi\sqrt{\frac{1}{C}} \quad \text{जहाँ} \quad c = \frac{\pi\eta r^4}{2l}$$

- मरोड़ी लोलक की सहायता से तार के पदार्थ का दृढ़ता गुणांक

$$\eta = \frac{8\pi Il}{T_1^2 r^4}$$

- मैक्सवेल सुई उपकरण, मरोड़ी लोलक सिद्धान्त पर कार्य करता है ।
- तार से लटके क्षैतिज खोखले पाइप में दो भिन्न भिन्न द्रव्यमान वितरण की स्थिति में दोलन काल ज्ञात करते हैं -

$$\text{अर्थात्} \quad T_1^2 \frac{8\pi lI_1}{r^4\eta} \; , \; T_2^2 = \frac{8\pi lI_2}{\eta r^4}$$

- $$\therefore \left(T_1^2 - T_2^2\right) = \frac{8\pi l}{r^4}\left(I_1 - I_2\right)$$

$$\text{या} \quad \eta \frac{8\pi l\left(I_1 - I_2\right)}{r^4\left(T_1^2 - T_2^2\right)}$$

जहां I_1 = ठोस बेलन बाहर की ओर होने पर सममित निकाय का जड़त्व आघूर्ण

I_2 = ठोस बेलन अन्दर की ओर होने पर सममित निकाय का जड़त्व आघूर्ण

- रबर के लिये अनुप्रस्थ विकृति एवं अनुदैर्ध्य विकृति के अनुपात को रबर का प्वाइसन अनुपात कहते हैं । सैद्धान्तिक रुप से प्वाइसन निष्पत्ति का मान -1 से 0.5 के मध्य होता है जबकि प्रायोगिक युक्ति से इसका मान 0.2 से 0.4 के मध्य होता है ।

प्रायोगिक विधि से σ का मान

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a}\frac{dV}{dL}\right)$$

द्वारा ज्ञात करते हैं । यहां

a = रबर नली का लम्ब काट क्षेत्रफल

dV = ट्यूब में आयतन वृद्धि

dL = ट्यूब की लम्बाई में वृद्धि

15.8 शब्दावली (Glossary)

दृढ़ता गुणांक	Modulus of rigidity
प्वाइसन निष्पत्ति	Poisson's Ratio
प्रत्यास्थता	Elasticity
प्रत्यास्थता गुणांक	Modulus of elasticity
प्रत्यास्थ थकान	Elastic fatigue
प्रत्यास्थ सीमा	Elastic fatigue
मरोड़ी लोलक	Torsional pendulum
मैक्सवैल निडिल	Maxwell's needle
यंग प्रत्यास्थ गुणांक	Young's Modulus
हुक का नियम बंकन	Hook's Law
विमोटन	Twisting

15.9 संदर्भ ग्रन्थ (Reference book)

1.	D.S. Mathur	Mechanics	S.Chand & Co., New Delhi
2.	Berkley	Mechanics	New York
3.	Ghose	Mechanics	Shiv Lal & Co., Agra
4.	B.K. Agrawal & P.C. Agrawal	Mechanics	Sahitya Bhawan, Agra
5.	जगदीश चन्द्र उपाध्याय	नवीन यांत्रिकी	रामप्रसाद एण्ड सन्स, आगरा
6.	के. के. सरकार-आर. एन. शर्मा	यांत्रिकी	साहित्य भवन, आगरा

15.10 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to self assessment questions)

1. मध्य में भारित दण्ड में अवनमन

$$\delta = \frac{wl^3}{4bd^3y}$$

यहाँ l, दोनों क्षुरधारों के मध्य टिके सममित आयताकार परिच्छेद वाले दण्ड की लम्बाई, b चौड़ाई और d मोटाई है ।

2. अवनमन का मान, दण्ड की लम्बाई और मोटाई के अनुपात के घन के समानुपाती और चौड़ाई के व्युत्क्रमानुपाती होता है ।
3. दण्ड की चौड़ाई पेचमापी (अल्पतम माप 0.001 सेमी.) से नापने पर परिणाम की यथार्थता बढ़ती है ।
4. तार के रूप में दिये गये पदार्थ के प्रत्यास्थता गुणांकों का निर्धारण किया जाता है ।
5. तार के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक निर्धारण, इसके बंकन द्वारा किया जाता है ।
6. मरोड़ी दोलन का दोलन काल; तार की त्रिज्या के चतुर्थघात के व्युत्क्रमानुपाती होता है ।
7. मोटा तार लेने पर, दोलन काल अत्यन्त कम होने के कारण छड़ केवल कंपकंपा कर रह जायेगी और प्रेक्षण नही लिये जा सकेंगे ।
8. पतला तार लेने पर दोलन काल बढ़ जायेगा और जिसे आसानी से रिकार्ड कर सकेंगे ।
9. बेलनों की स्थिति बदलने पर, तार की अक्ष के सापेक्ष निकाय का जड़त्व-आघूर्ण परिवर्तित हो जाने के कारण दोलन काल भिन्न-भिन्न होगा ।
10. यथार्थ परिणाम प्राप्त करने के लिए मैक्सवेल निडिल का प्रायोगिक तार पतला और अधिक लम्बाई का होना चाहिए।
11. -1 से 0.5 के मध्य ।
12. ताकि प्रत्यास्थ साम्य स्थापित हो सके ।
13. वर्नियर कैलीपर्स से ।
14. अधिकतम मान 0.5 हो सकता है ।
15. यह विधि ज्यादा यथार्थ नहीं है ।

15.11 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न (Very short answer type questions)

1. दण्ड बंकन विधि से यंग प्रत्यास्थता गुणांक शांत करने का सूत्र लिखिए ।
2. दण्ड बंकन विधि में मोटाई पेचमापी से तथा अवनमन का मापन स्फेरोमीटर से करते हैं । क्यों? समझाइये ।
3. मरोड़ी लोलक में गोले के स्थान पर बेलन लटका कर प्रयोग करने पर तार के दृढ़ता गुणांक पर क्या प्रभाव पड़ेगा।

निबंधात्मक प्रश्न (Essay type questions)

4. दण्ड बंकन विधि से यंग प्रत्यास्थता गुणांक ज्ञात करने के **प्रयोग के पद** समझाते हुए ध्यान रखने योग्य बातों का उल्लेख कीजिये ।
5. सर्ल उपकरण में तार का **बंकन** तार का यंग प्रत्यास्थता गुणांक एवं **विमोटन** तार का दृढ़ता गुणांक निर्धारित करता है । सिद्धान्त समझाइये ।
6. सर्ल उपकरण से प्वाइसन निष्पत्ति कैसे ज्ञात करोगे, समझाइये ।
7. मरोड़ी लोलक क्या है । इससे तार के पदार्थ का दृढ़ता गुणांक कैसे ज्ञात करते हैं । प्रयोग के पद समझाइये ।

8. मैक्सवेल सुई से दृढ़ता गुणांक ज्ञात करने की विधि समझाइये । इस प्रयोग में ध्यान रखने योग्य बातों का उल्लेख कीजिए ।
9. रबर का प्वाइसन नियतांक ज्ञात करने की विधि का वर्णन कीजिये ।