एमटी–07

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

बीजगणित

MT - 07

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

बीजगणित

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

अध्यक्ष

प्रोफेसर (डॉ.) नरेश दाधीच
कुलपति
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

संयोजक / समन्वयक एवं सदस्य

विषय समन्वयक
प्रो. डी.एस. चौहान
गणित विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

सदस्य सचिव/समन्वयक
डॉ. अशोक शर्मा
सह आचार्य, राजनीति विज्ञान
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

सदस्य

1. **प्रो. वी. पी. सक्सेना**
   भूतपूर्व कुलपति एवं सेवानिवृत प्रोफेसर
   जीवाजी विश्वविद्यालय
   ग्वालियर (मध्यप्रदेश)
2. **प्रो. एस. सी. राजवंशी**
   गणित विभाग,
   इन्स्टीयूट ऑफ इंजीनियरिंग एण्ड टेक्नोलॉजी
   भड्डल, रोपड़ (पंजाब)
3. **प्रो. एस. पी. गोयल**
   गणित विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
4. **डॉ. ऐ.के. माथुर**
   सेवानिवृत्त सह आचार्य
   गणित विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
5. **डॉ. के. एन. सिंह**
   सह आचार्य
   गणित विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
6. **डॉ. परेश व्यास**
   सहायक आचार्य गणित विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
7. **डॉ. विमलेश सोनी**
   व्याख्याता - गणित
   राजकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय
   कोटा (राज.)
8. **डॉ. के. के. मिश्रा**
   व्याख्याता - गणित
   एम.एस.जे.महाविद्यालय
   भरतपुर (राज.)
9. **डॉ. के. एस. शेखावत**
   व्याख्याता - गणित
   राजकीय कल्याण महाविद्यालय, सीकर (राज.)

संपादन तथा पाठ लेखन

संपादक
प्रो डी. एस. चौहान
गणित विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

लेखक
1. **प्रो. के. एन. सिंह**
   एसोसियेट प्रोफेसर,गणित विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय,
   जयपुर (राज.)
2. **डॉ. परेश व्यास**
   सहायक आचार्य गणित विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय,
   जयपुर (राज.)
3. **राकेश पाण्डेय**
   एम.फिल
   व्याख्याता -गणित
   एस. एस. जैन सुबोध पी. जी. कॉलेज जयपुर
4. **डॉ. सुभाष यादव**
   व्याख्याता - गणित
   राजकीय महाविद्यालय, कोटपुतली, (राज.)
5. **डॉ. त्रिलोक माथुर**
   व्याख्याता - गणित
   बिरला इंस्टीट्यूट ऑफ टेक्नोलॉजी एंड साइंस पिलानी, (राज.)

अकादमिक एवं प्रशासनिक व्यवस्था

प्रो. (डॉ.) नरेश दाधीच
कुलपति
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय कोटा (राज.)

प्रो. अनाम जेटली
निदेशक
संकाय विभाग

योगेन्द्र गोयल
प्रभारी
पाठ्यक्रम सामग्री उत्पादन एवं वितरण विभाग

पाठ्यक्रम उत्पादन

योगेन्द्र गोयल
सहायक उत्पादन अधिकारी
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय कोटा (.राज)

ISBN-13/978-81-8496-132-4

सर्वाधिकार सुरक्षित : इस सामग्री के किसी भी अंश को व. म. खु. वि. कोटा की लिखित अनुमति के बिना किसी भी रूप में अथवा मिमियोग्राफी (चक्र मुद्रण) द्वारा या अन्यत्र पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं हैं।

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

बीजगणित

इकाई सं.	इकाई	पृष्ठ संख्या
इकाई 1.	समूह, उपसमूह (Group Subgroup)	8–40
इकाई 2.	क्रमचय समूह, चक्रीय समूह (Permutation Group, Cyclic Group)	41–90
इकाई 3.	सहकुलक, लेग्रेंज़- प्रमेय (Cosests,Lagrange's Theorem)	91–110
इकाई 4.	समूह समाकारिता (Group Homomorphism)	111–126
इकाई 5.	प्रसामान्य उपसमूह (Normal Subgroup)	127–143
इकाई 6.	विभाग समूह एवं समाकारिता की मूलभूत प्रमेय (Quotient Group and Fundamental Theorem of Homomorphism)	144–158
इकाई 7.	वलय (Rings)	159–186
इकाई 8.	पूर्णांकीय प्रान्त एवं क्षेत्र (Integral Domains and Fields)	187–203
इकाई 9.	वलय समाकारिता एवं अंतस्थापन (Ring Homomorphism and Embedding)	204–229
इकाई 10.	पूर्णांकीय प्रान्त का विभाग क्षेत्र एवं अभाज्य क्षेत्र (Field of Quotients for Integral Domain and Prime Fields)	230–243
इकाई 11.	गुणजावलियाँ एवं विभाग वलय (Ideals and Quotient Rings)	244–276
इकाई 12.	सदिश समष्टि, उपसमष्टि की परिभाषा, उदाहरण एवं इनकेगुणधर्म (Definition of Vector Space, Subspace, Examples and its Properties)	277–297
इकाई 13.	सदिषों का एकघात संचय, एकघाती स्वतन्त्रता एवं, आश्रितता (Linear Combination of Vectors, Linear Independence and Dependence)	298–313

इकाई 14.	सदिष समष्टि का आधार, विमा एवं इनके उदाहरण, परिमित विमीय सदिष समष्टियों के गुणधर्म, एकघाती विस्तृति एवं इससे जनित उपसमष्टि (Basis, Dimension of a Vector Space and their Examples, Properties of Finite Dimensional Vector Spaces,Linear Span and Subspace Generated by it)	314–327
इकाई 15.	दो उपसमष्टियों का योग, उपसमष्टियों का अनुलोम योग एवं पूरक उपसमष्टि एवं इसकी विमा (Sum of two Subspaces, Direct Sum of Subspaces and Complementary Subspace, Quotient Space and its Dimension)	328–341
	संदर्भ पुस्तकें (Reference Books)	

प्रस्तावना

प्रस्तुत पुस्तक "बीजगणित" वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा द्वारा प्रस्तावित पाठ्यक्रमानुसार बी. एस. सी. भाग तृतीय के गणित विषय प्रथम प्रश्न -पत्र के अध्ययन अध्यापन हेतु सृजित की गई है । पुस्तक की भाषा- शैली को सरल, रोचक एवं सुग्राह्य बनाने का अथक प्रयास किया गया है । गणित जैसे विषय की प्रवृत्ति को ध्यान में रखते हुए पुस्तक में अंग्रेजी शब्दों का समुचित प्रयोग किया गाया है । तथा पुस्तक को लिखते समय यह आवश्यक समझा गया कि हिन्दी भाषा के साथ-साथ आवश्यक शब्दावली अंग्रेजी में भी हो। पुस्तक की विभिन्न इकाइयों को विद्वान लेखकों द्वारा लिखा गया है । लेखकों ने पुस्तक को तथ्यपरक बनाने के लिए मानक ग्रन्थों की सहायता प्राप्त की है, इनके रचयिताओं के लिए कृतज्ञतापन इन पंक्तियों के माध्यम से प्रस्तुत है । यह पुस्तक विद्यार्थियों के लिए प्रतियोगी परीक्षाओं हेतु भी सही मार्गदर्शन प्रदान करने में सहायक होगी ।

इकाई 1 : समूह, उपसमूह (Group, Subgroup)

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य

1.1 प्रस्तावना

1.2 द्विचर संकिया या द्विआधारी संक्रिया

1.3 बीजीय पद्धति

1.4 समूह

- 1.4.1 सेमी ग्रुप
- 1.4.2 मोनोएड
- 1.4.3 समूह की परिभाषा
- 1.4.4 आबेली समूह या क्रमविनिमेय समूह
- 1.4.5 अनआबेली समूह या अक्रमविनिमेय समूह
- 1.4.6 परिमित तथा अपरिमित समूह
- 1.4.7 समूह की कोटि या समूह का सूचकांक

1.5 समूह के उदाहरण

1.6 समूह के साधारण गुणधर्म

1.7 उपसमूह (उपग्रुप)

- 1.7.1 उपसमूह के उदाहरण
- 1.7.2 समूह सम्मिश्र
- 1.7.3 उपसमूह से सम्बंधित प्रमेय

1.8 सारांश

1.9 शब्दावली

1.10 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1.11 अभ्यास प्रश्न

1.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप द्विचर संक्रिया, बीजीय पद्धति तथा समूह, उपसमूह की अवधारणा एवं इनके साधारण गुणधर्मों के बारे में जान सकेंगे ।

1.1 प्रस्तावना

इस इकाई की विषय-वस्तु किसी अरिक्त समुच्चय पर परिभाषित द्विचर संक्रिया (या द्विआधारी संक्रिया) एवं उनसे निर्मित बीजीय संरचनाऐं हैं, इन बीजीय संरचनाओं के अध्ययन में अन्तर निहित अवधारणाओं को समझना एवं मनन् करना आवश्यक है, यद्यपि ये संरचनाऐं अर्मूत है लेकिन आगामी इकाईयों में वर्णित वलय, क्षेत्र तथा सदिश समष्टि जैसी संरचनाओं का आधार है वस्तुत: इन बीजीय संरचनाओं में एक सोपान क्रम है ।

बीजीय पद्धतियों में सबसे सरल पद्धति समूह हैं । अत: समूह को विभिन्न बीजीय पद्धतियों के अध्ययन की शुरूआत मान सकते हैं ।

1.2 द्विचर संक्रिया या द्विआधारी संक्रिया

माना G एक अरिक्त समुचचय है तो,

$G \times G = \{(a, b); a \in G, b \in G\}$

यदि $*: G \times G \rightarrow G$ एक प्रतिचित्रण है तो '*' समुच्चय G में एक द्विचर संक्रिया या द्विआधारी संक्रिया कहलाती है ।

इस संक्रिया के अन्तर्गत $(a, b) \in G \times G$ से सम्बद्ध होने वाले अवयव को $a*b$ प्रतीक से व्यक्त करते हैं । अतएव '*', G में द्विचर संक्रिया होगी यदि और केवल यदि $a*b \in G, \forall a, b \in G$ तथा $a*b$ अद्वितीय हैं । इस प्रकार योग (+), G में द्विचर संक्रिया होगी यदि और केवल यदि $a+b \in G, \forall a,b \in G$ तथा $a+b$ अद्वितीय हैं ।

उदाहरणार्थ, प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में योग (+) द्विचर संक्रिया है क्योंकि कोई भी दो प्राकृत संख्याओं का योग एक प्राकृत संख्या ही होता है । इसलिये प्राकृत संख्याओं का समुच्चय N योग (+) संक्रिया के लिये संवृत है । अर्थात्

$a+b \in N, \forall a, b \in N$

इसी प्रकार प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N में गुणन (.) द्विचर संक्रिया है क्योंकि भी दो प्राकृत संख्याओं का गुणन प्राकृत संख्या ही होता है, इसलिये प्राकृत संख्याओं का समुच्चय N गुणन (.) संक्रिया के लिये संवृत है अर्थात्

$a+b \in N, \forall a,b \in G$

लेकिन व्यवकलन (-) तथा विभाजन (÷) संक्रिया समुच्चय N में द्विचर संक्रिया नहीं है क्योंकि,

$4 - 5 = -1 \notin N$, इसी प्रकार $4 \div 5 = 4/5 \notin N$, हैं, जबकि $4,5 \in N$

अतएव प्राकृत संख्याओं का समुच्चय N व्यवकलन (-) तथा विभाजन (÷) संक्रिया के लिये संवृत नहीं है । इसी प्रकार पूर्णांको के समुच्चय Z, परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q, वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R तथा समिश्र संख्याओं के समुच्चय C में योग (+), गुणन (.) तथा व्यवकलन (–) द्विचर संक्रियाऐं है, परन्तु इन समुच्चयों में विभाजन (÷) अवयव 0 के कारण द्विचर संक्रिया नहीं है ।

टिप्पणी 1 : अशून्य संख्याओं के समुच्चय $R-\{0\}$, $Q-\{0\}$ तथा $C-\{0\}$ [इन्हें R_0 , Q_0 तथा C_0 द्वारा भी व्यक्त करते हैं] विभाजन (÷) भी द्विचर संक्रिया होगी ।

टिप्पणी 2 : हम द्विचर संक्रिया को प्राय: $+, \times, \ldots *, \odot \oplus$ इत्यादि प्रतीक चिन्हों द्वारा भी व्यक्त करते हैं ।

टिप्पणी 3 : द्विआधारी संक्रिया को द्विआधारी संयोजन भी कहते हैं ।

टिप्पणी 4 : समूह (ग्रुप) के अध्ययन में द्विआधारी संक्रिया की ही आवश्यकता होती है, अतएव हम द्विआधारी संक्रिया के स्थान पर केवल संक्रिया शब्द भी प्रयोग में ले सकते हैं ।

स्वमूल्यांकन प्रश्न -1

1. किसी समुच्चय X के घात समुच्चय P(X) में समुच्चयों का संघ ($\cup$) तथा सर्वनिष्ठ ($\cap$) द्विआधारी संक्रियायें हैं । (सत्य/असत्य)
2. एक समतल में स्थित सभी सदिशों का समुच्चय V, सदिश गुणनफल (×) तथा अदिश गुणनफल (.) संक्रिया के लिये संवृत है । (सत्य/असत्य)

3. उपरोक्त समुच्चय V, सदिश योग संक्रिया के लिये संवृत है । (सत्य/असत्य)

4. समुच्चय $S=\left\{\frac{ir}{2}\middle| r\in R\right\}$ में गुणन द्विआधारी संक्रिया है | (सत्य/असत्य)

1.3 बीजीय पद्धति

माना कि अरिक्त समुच्चय G में एक या एक से अधिक द्विचर संक्रियायें है, अब यदि समुच्चय G को उसकी द्विचर संक्रिया के साथ लिखा जाता है तो यह बीजीय पद्धति या बीजीय निकाय कहलाता है अर्थात् यदि *,G में संक्रिया है तो (G,*)बीजीय पद्धति है उदाहरणार्थ,

यदि योग (+) तथा गुणन (.),G मे द्विआधारी संक्रियायें है तो (G,+),(G,.),(G,+,.) आदि प्रत्येक बीजीय पद्धति है ।

इस प्रकार, (N,+),(N,×),(Z,+),(Z,×),(Z,-),(Q,+),(Q,×),(Q,-),(R,+),(R,×),(R,-),(R_0,÷),(R,+,×),(C,+,×) इत्यादि प्रत्येक बीजीय पद्धति है, यहाँ R_0 अशून्य वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है ।

टिप्पणी : इस इकाई में हम एक द्विआधारी संक्रिया वाली बीजीय पद्धति समूह का अध्ययन करेगे तथा आगामी इकाईयों में हम दो द्विआधारी संक्रिया वाली बीजीय पद्धति वलय, क्षेत्र का अध्ययन करेंगे ।

1.4 समूह (ग्रुप)

समूह सबसे सरल बीजीय पद्धति है जो कि एक ही द्विचर संकिया के लिये कुछ विशेष अभिग्रहीतों के अन्तर्गत समूह कहलाती है सर्वप्रथम हम सेमीग्रुप तथा मोनोएड का अध्ययन करेंगे।

1.4.1 सेमीग्रुप

यदि (G,*) एक बीजीय पद्धति है तो यह बीजीय पद्धति (G,*) सेमीग्रुप कहलाती है यदि G में संक्रिया '*' सहचारी हो,

अर्थात् (a*b) * c = a *(b*c), ∀a,b,c∈G

उदाहरणार्थ, बीजीय पद्धति (N,+),(N,·),(Z,+),(Z,·),(Q,+),(Q,·),(R,+),(R,·),(C,+),(C,·) इत्यादि सभी सेमीग्रुप के उदाहरण है, जबकि (Z,-) सेमीग्रुप नहीं है क्योंकि 1,2,3∈Z के लिये

(1 - 2) - 3≠1 - (2 - 3) अर्थात् व्यवकलन (-),Z में सहचारी नहीं हैं ।

टिप्पणी: किसी समुच्चय X के घात समुच्चय । P(X) में समुच्चयों का संघ (∪) तथा सर्वनिष्ठ (∩) द्विचर संक्रियायें हैं यह संक्रियायें सहचारी भी हैं अर्थात् ।

$$(A\cup B)\cap C=A\cup (B\cup C),\ \forall A,B,C\in P(X)$$

इसी प्रकार

$$(A\cap B)\cap C=A\cap (B\cap C),\ \forall A,B,C\in P(X)$$

अतएव बीजीय पद्धति (P(X),∪) तथा (P(X),∩) सेमीग्रुप हैं ।

1.4.2 मोनोएड

यदि किसी सेमीग्रुप (G,*) में संक्रिया * का तत्समक अवयव विद्यमान हो तो (G,*) को मोनोएड कहते हैं अर्थात् $\exists\ e \in G$ ताकि $a * e = a = e * a,\ \forall a \in G$

उदाहरणार्थ, सेमीग्रुप (Z,+) में संक्रिया (+) के लिये तत्समक अवयव e = 0,Z में विद्यमान है क्योंकि $a + 0 = a = 0 + a,\ \forall a \in G$ अतएव सेमीग्रुप (Z,+) मोनोएड भी है, इसी प्रकार सेमीग्रुप (N,·) में गुणन (.) संकिया के लिये तत्समक अवयव e = 1,N में विद्यमान है क्योंकि $1.a = a = a.1,\ \forall a \in N$; अतएव सेमीग्रुप (N,.) मोनोएड भी है ।

इसी प्रकार (Q,+),(Q,.),(R,+),(R,.),(C,+),(C,.) इत्यादि मोनोएड के उदाहरण है क्योंकि इनमें योग संक्रिया तथा गुणन संक्रिया के लिये तत्समक अवयव क्रमश: 0 तथा 1 विद्यमान है ।

टिप्पणी 1 : सेमीग्रुप (N,+) मोनोएड नहीं है क्योंकि योग संक्रिया के लिये तत्समक अवयव 0 होता है । जो कि N में विद्यमान नहीं हैं ।

टिप्पणी 2 : यदि समुच्चय X का घात समुच्चय P (X) है तो सेमीग्रुप $(P(X), \cup)$, तथा $(P(X), \cap)$ मोनोएड है क्योंकि ϕ, और X,P(X) में क्रमश: संघ ($\cup$) और सर्वनिष्ठ ($\cap$) संक्रिया के लिये तत्समक है ।

1.4.3 समूह की परिभाषा

बीजीय निकाय (G, *) समूह (ग्रुप) कहलाता है यदि G में परिभाषित संक्रिया '*' के लिये निम्न प्रतिबन्ध सत्य है :

1. साहचर्यता : संक्रिया '*', G में सहचारी है अर्थात

$(a * b)* c = a*(b*c),\ \forall a,b,c \in G$

2. तत्समक अवयव का अस्तित्व : समुच्चय G में संक्रिया * के लिये एक तत्समक अवयव e इस प्रकार विद्यमान है ताकि

$(a*e)=a=e*a,\ \forall\ a \in G$

3. प्रतिलोम अवयव का अस्तित्व : समुच्चय G में प्रत्येक अवयव a के संगत एक अवयव b इस प्रकार विद्यमान है ताकि

$a*b = e = b*a$

हम b को a^{-1} से भी व्यक्त कर सकतें है अर्थात्

$a*a^{-1} = e = a^{-1}*a$

इस प्रकार G का प्रत्येक अवयव व्युत्क्रमणीय होना चाहिये ।

टिप्पणी : ग्रुप की परिभाषा से स्पष्ट है कि यदि मोनोएड के प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम विद्यमान है तो मोनोएड, समूह (ग्रुप) कहलाता है ।

1.4.4 आबेली समूह या क्रमविनिमेय समूह

यदि समूह (G,*) की संक्रिया क्रमविनिमेय हो, अर्थात्

$a*b=b*a, \qquad \forall a,b \in G$

तो समूह G आबेली समूह या क्रमविनिमेय समूह कहलाता है ।

1.4.5 अनआबेली समूह या अक्रमविनिमेय समूह

यदि समूह (G,*) की संक्रिया * अक्रमविनिमेय हो, अर्थात्

$a*b \neq b*a \qquad \forall\, a,b \in G$

तो समूह G अनआबेली समूह या अक्रमविनिमेय समूह कहलाता है ।

टिपणी 1 : हमने समूह की परिभाषा में G में द्विआधारी संक्रिया के लिये * प्रतीक चिन्ह का प्रयोग किया । यहाँ हम द्विआधारी संक्रिया के लिये * के स्थान पर .,+,⊕,⊙ ,..... इत्यादि भी प्रयोग कर सकते है ।

टिप्पणी 2 : नार्वे गणितज्ञ एन. एच. आबेल के नाम पर क्रमविनिमेय समूह, आबेली समूह कहलाता है ।

टिप्पणी 3 : समूह की परिभाषा से स्पष्ट है कि

सेमीग्रुप → 1. साहचर्यता
2. तत्समक अवयव का अस्तित्व
3. प्रत्येक अवयव के प्रतिलोम का अस्तित्व } मोनोएड } समूह } क्रमविनिमेय योग या आबेली समूह
4. क्रमविनिमेयता

टिप्पणी 4: समूह (G,*) एक अरिक्त समुच्चय ही नहीं अपितु एक बीजीय पद्धति है जो कि कुछ विशेष अभिग्रहितों के अन्तर्गत समूह है । हम सुविधा के लिए समूह (G, *) को G से व्यक्त कर सकते है ।

टिप्पणी 5: समूह G में तत्समक अवयव e का प्रतिलोम वह स्वयं ही होता है ।

टिप्पणी 6: यदि किसी समुच्चय में शून्य एक अवयव है तो यह समुच्चय संक्रिया के लिये समूह नहीं हो सकता, क्योंकि शून्य का गुणन प्रतिलोम 1/0 का अस्तित्व नहीं है ।

1.4.6 परिमित तथा अपरिमित (या अनन्त) समूह

यदि (G,*) एक समूह है तथा समुच्चय G में अवयवों की संख्या परिमित हैं यह परिमित समूह कहलाता है, परन्तु यदि अवयवों की संख्या अपरिमित हो तो यह अपरिमित (या अनन्त) कहलाता है ।

1.4.7 समूह की कोटि या समूह का समूहांक

समूह (G,*) के समुच्चय G में विभिन्न अवयवों की संख्या समूह G की कोटि या समूह का समूहांक कहलाती है तथा इसे संकेत रूप में O(G) से व्यक्त करते हैं ।

यदि समूह G में अवयवों की संख्या परिमित है तो यह परिमित कोटि का समूह कहलाता है, यदि समूह में अवयवों की संख्या अपरिमित है तो यह अपरिमित कोटि का समूह कहलाता है ।

1.5 समूह के उदाहरण

1. समुच्चय G = {1} गुणन संक्रिया तथा G = {0} योग संक्रिया के लिये कोटि के आबेली समूह है ।
2. निम्न बीजीय संरचनायें आबेली समूह के उदाहरण है :

$(Z,+),(Q,+),(R,+),(C,+),(Q_0,.),(R_0,.),(C_0,.)$ आदि ।

3. सम पूर्णांकों का समुच्चय E = {....-4,-2,0,2,4....}योग संक्रिया के लिये समूह है ।
4. चार कोटि का समुच्चय G = {e,a,b,c} द्विचर संक्रिया * के लिये आबेली समूह होता है, यदि निम्न सारणी सन्तुष्ट होती है ।

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि समूह G का तत्समक अवयव e है तथा अवयव e, a, b, c के प्रतिलोम क्रमश e,a,b,c ही है। इस समूह (G,*) को क्लीन 4 - समूह या k_4 समूह भी कहते हैं।

5. एक समतल में स्थित सभी सदिशों का समुच्चय V सदिश-योग संक्रिया के लिये एक आबेली समूह है, अर्थात् (V,+) आबेली समूह है । यहाँ शून्य सदिश $\vec{0}$तत्समक है तथा सदिश $\vec{a} \in V$ का प्रतिलोम श्रण सदिश $-\vec{a} \in V$ है ।

टिप्पणी: उपरोक्त समूह के उदाहरणों में (4) परिमित तथा अन्य अपरिमित आबेली समूहों के उदाहरण हैं ।

6. वास्तविक संख्याओं के n×n व्युत्क्रमणीय मेट्रिक्सों का समुच्चय गुणन संक्रिया के लिये अनआबेली समूह है ।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1 : प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय G = {1, - 1} गुणन संक्रिया के लिये परिमित आबेली समूह है । हल: यहाँ (G,•) की निम्न संक्रिया सारणी प्राप्त होती है -

.	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

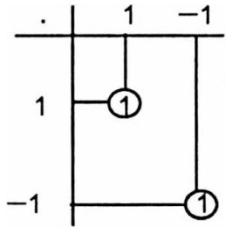
उपर्युक्त सारणी की सहायता से निम्न प्रतिबन्ध आसानी से देखे जा सकते हैं ।

1. संवृतता : संक्रिया सारणी के सभी अवयव G में विद्यमान है, अत: गुणन संक्रिया G में संवृत है ।
2. साहचर्यता : समुच्चय G के दोनों अवयव पूर्णांक है तथा पूर्णाकों के लिये गुणन संक्रिया साहचर्य होती है, अतएव G में गुणन संक्रिया साहचर्य होगी ।
3. तत्समक अवयव का अस्तित्व : संक्रिया सारणी की प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ से स्पष्ट है कि समुच्चय के अवयवों 1,-1 की 1 से संक्रिया होने पर पुन: यही अवयव आते हैं, इसलिये G में गुणन संक्रिया के लिये 1 तत्समक अवयव हैं ।
4. प्रतिलोम अवयव का अस्तित्व : संक्रिया सारणी से हैं कि
   $1 \times 1 = 1 = 1 \times 1$ तथा $(-1) \times (-1) = 1 = (-1) \times (-1)$

अत: 1, - 1 के प्रतिलोम क्रमश: 1 तथा -1 व अवयव ही होगें जो कि दोनों G में विद्यमान है, अतएव समुच्चय G के प्रत्येक अवयव के प्रतिलोम का अस्तित्व है तथा यह G में विद्यमान है ।

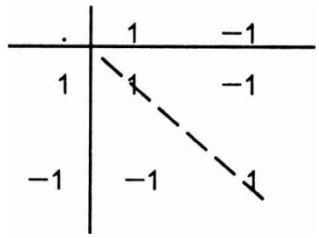
5. क्रमविनिमेयता : संक्रिया सारणी में प्रत्येक पंक्ति उसके संगत स्तम्भ के समरूप है अत: गुणन संक्रिया में क्रमविनिमेय है । यहाँ G में अवयवों की संख्या परिमित है अतएव (G,.) परिमित क्रमविनिमेय समूह है ।

टिप्पणी 1 : संक्रिया सारणी से प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम निम्न प्रकार भी ज्ञात किया जा सकता है-



यहाँ हम देखते हैं कि तत्समक अवयव जिन पंक्ति और स्तम्भ का प्रतिच्छेद है उनके शीर्षक एक दूसरे के प्रतिलोम होगे, अतएव स्पष्ट है कि अवयव 1 का प्रतिलोम 1 तथा अवयव -1 का प्रतिलोम -1 है ।

टिप्पणी 2 : क्रमविनिमेयता को संक्रिया सारणी में मुख्य विर्कण के सापेक्ष द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है, यहाँ संक्रिया सारणी निम्न है -



इस सारणी में मुख्य विर्कण के दोनों तरफ समान अवयव है अर्थात् सममितता है, अतएव उपर्युक्त उदाहरण में गुणन संक्रिया G में क्रमविनिमेय हैं ।

टिप्पणी 3 : यहाँ O(G)= 2, अतएव यह दो कोटि के क्रमविनिमेय (आबेली) का उदाहरण है ।

उदाहरण 2 : प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय G ={1,ω,ω^2} गुणन संक्रिया के एक क्रमविनिमेय समूह है, जहाँ ω^3 = 1 तथा 1,ω,ω^2 इकाई के घनमूल है ।

हल: यहाँ (G,.)

की निम्न संक्रिया सारणी प्राप्त होती है -

.	1	(1)	$(1)^2$
1	1	(1)	$(1)^2$
(1)	(1)	$(1)^2$	1
$(1)^2$	$(1)^2$	1	(1)

1. संवृतता : संक्रिया सारणी के सभी अवयव G मे विद्यमान है, अत: गुणन संक्रिया G में संवृत है ।

2. साहचर्यता : समुच्चय G का प्रत्येक अवयव सम्मिश्र संख्या है तथा हम जानते हैं कि सम्मिश्र संख्याओं के लिए गुणन संक्रिया साहचर्य होती है, इसलिए समुच्चय G में भी गुणन संक्रिया साहचर्य होगी ।

3. तत्समक अवयव का अस्तित्व : संक्रिया सारणी की प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ से स्पष्ट है कि समुच्चय के अवयव $1,\omega,\omega^2$ की 1 से संक्रिया होने पर पुन: यही अवयव आते हैं, इसलिये G में गुणन संक्रिया के लिये 1 तत्समक अवयव होगा ।

4. प्रतिलोम अवयव का अस्तित्व : संक्रिया सारणी से स्पष्ट है कि

$1\times1=1=1\times1, \omega\times\omega^2=1=\omega^2\times\omega$

अत: अवयव 1 का प्रतिलोम 1 है तथा ω का प्रतिलोम ω^2 एवं ω^2 का प्रतिलोम ω है इसलिये समुच्चय G के प्रत्येक अवयव के प्रतिलोम का अस्तित्व है एवं यह G में विद्यमान है ।

5. क्रमविनियेयता : संक्रिया सारणी में प्रत्येक पंक्ति उसके संगत स्तम्भ के समरूप है अत: गुणन संक्रिया G में क्रमविनिमेय है ।

अब G में अवयवों की संख्या परिमित है, अतएव (G,.) परिमित क्रम विनिमेय समूह है

टिप्पणी 1 : संक्रिया सारणी से प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम निम्न प्रकार भी ज्ञात किया जा सकता है -

.	1	ω	ω^2
1	1	–	–
ω	–	–	1
ω^2	–	1	–

यहाँ हम देखते हैं कि तत्समक अवयव जिन पंक्ति व स्तम्भ का प्रतिच्छेद है उनके शीर्षस्थ एक दूसरे के प्रतिलोम होंगे, अतएव स्पष्ट है कि अवयव 1 का प्रतिलोम 1 तथा अवयव ω, ω^2 का प्रतिलोम क्रमश: ω^2,ω होंगे ।

टिप्पणी 2 : यहाँ संक्रिया सारणी निम्न है -

.	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

इस सारणी में मुख्य विर्कण के सापेक्ष सममितता है अतएव गुणन संक्रिया G में क्रमविनिमेय है ।

टिप्पणी 3 : यहां 0(G)=3, अतएव यह तीन कोटि के क्रमविनिमेय (आबेली) समूह का उदाहरण है ।

उदाहरण 3. प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय G = {1,-1,i,-i} जहाँ i = $\sqrt{-1}$, गुणन संक्रिया के लिये एक क्रमविनिमेय समूह है ।

हल : यहाँ (G,.) की निम्न संक्रिया सारणी प्राप्त होगी

.	1	-1	i	-i
1	1	-1	i	-i
-1	-1	1	-i	I
I	I	-i	-1	1
-i	-i	i	1	-1

उपरोक्त सारणी से निम्न स्पष्ट है -

1. संवृतता : संक्रिया सारणी के सभी अवयव G में विद्यमान है, अत: गुणन संक्रिया G में संवृत है ।
2. साहचर्यता : समुच्चय G का प्रत्येक अवयव सम्मिश्र संख्या है तथा हम जानते हैं कि सम्मिश्र संख्याओं के लिए गुणन संक्रिया साहचर्य होती है, इसलिए समुच्चय G में भी गुणन संक्रिया साहचर्य होगी ।
3. तत्समक अवयव का अस्तित्व : संक्रिया सारणी की प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ से स्पष्ट है कि समुच्चय के अवयव 1, -1, i, -i की 1 से संक्रिया होने पर पुन: यही अवयव आते हैं इसलिये G में गुणन संक्रिया के लिये 1 तत्समक अवयव होगा ।
4. प्रतिलोम अवयव का अस्तित्व संक्रिया सारणी से स्पष्ट हैं कि

   $$1\times1=1=1\times,(-1)\times(-1)=1=(-1)\times(-1),i\times(-i)=1=(-1)\times i$$

   अतएव अवयव 1 का प्रतिलोम 1 है तथा अवयव -1, i, -i के प्रतिलोम क्रमश: -1,-i,i है, इसलिये G में प्रत्येक अवयव के प्रतिलोम का अस्तित्व है ।
5. क्रमविनिमेयता : संक्रिया सारणी में प्रत्येक पंक्ति उसके संगत स्तम्भ के है अत: गुणन संक्रिया G में क्रमविनिमेय है ।

अतएव (G,.), परिमित क्रमविनिमेय समूह है ।

टिप्पणी : यहाँ O(G)=4, अतएव यह चार कोटि का क्रमविनिमेय (आबेली) समूह है ।

उदाहरण 4 : प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय G = {0,1,2,3,4} संक्रिया $+_5$ (मॉड्यूलों योग 5 या समशेष मॉड 5) के लिये एक क्रमविनिमेय समूह है,

जहाँ संक्रिया $+_5$ निम्न प्रकार परिभाषित है -

$$a+_5 b=\begin{cases} a+b & \text{यदि } a+b>5 \\ a+b-5 & \text{यदि } a+b \end{cases}$$

हल : यहाँ $(G,+_5)$ की निम्न संक्रिया सारणी प्राप्त होगी

X_3	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि -

1. संवृतता : संक्रिया सारणी के सभी अवयव G में विद्यमान है, अत: $+_5$ गुणन संक्रिया G में संवृत है ।
2. साहचर्यता : समुच्चय G में संक्रिया $+_5$ का आधार संख्याओं के योग की संक्रिया है, जो कि सहचारी होती है इसलिये समुच्चय G में भी संक्रिया सहचारी होगी ।
3. तत्समक अवयव का अस्तित्व : संक्रिया सारणी में प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ से स्पष्ट है कि समुच्चय के अवयव 0,1,2,3,4 की 0 से संक्रिया होने पर पुन: यही अवयव आते हैं, इसलिये G मे संक्रिया $+_5$ के लिये 0 तत्समक अवयव होगा ।
4. प्रतिलोम अवयव कां अस्तित्व : संक्रिया सारणी से स्पष्ट हैं कि 0,1,2,3,4 के प्रतिलोम क्रमश: 0,4,3,2,1 है इसलिये G में प्रत्येक अवयव के प्रतिलोम का अस्तित्व है ।
5. क्रमविनिमेयता : संक्रिया सारणी में प्रत्येक पंक्ति उसके संगत स्तम्भ के समरूप है अत: संक्रिया $+_5$, G में क्रमविनिमेय है ।

अतएव $(G,+_5)$ एक परिमित क्रमविनिमेय समूह है ।

टिप्पणी : यहाँ $O(G,+_5)$ अतएव यह पांच कोटि का क्रमविनिमेय (आबेली) समूह है ।

उदाहरण 4: प्रदर्शित कीजिए कि समुच्च्य $G=\{0,1,2,3,4\}$ संक्रिया +, (मॉड्यूलों योग 5 या समशेष मोड 5) के लिए एक क्रमविनिमेय समूह है,

जहाँ संक्रिया +, निम्न प्रकार परिभाषित है-

$$a+_5 b=\begin{cases} a+5 & \textbf{यदि } a+b>5 \\ a+b-5 & \textbf{यदि } a+b\geq 5 \end{cases}$$

हल: यहाँ $(G,+_5)$ की निम्न संक्रिया सारणी प्राप्त होगी

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	1	1	2	3

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि-

1. संवृतता: संक्रिया सारणी के सभी अवयव जी में विद्यमान है, अतः $+_5$ गुणन संक्रिया G में संवृत है।

2. साहचर्यता; समुच्चय G में संक्रिया $+_5$ का आधार संख्याओं के योग की संक्रिया है, जो कि सहचारी होती है इसलिए समुच्चय जी में संक्रिया सहचारी होगी।

3. तत्समक अवयव का अस्तित्व : संक्रिया सारणी में प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ से स्पष्ट है कि समुच्चय के अवयव 0,1,2,3,4 की 0 से संक्रिया होने पर पुनः यही अवयव आते हैं, इसलिए G में संक्रिया $+_5$ के लिए 0 तत्समक अवयव होगा।

4. प्रतिलोभ अवयव का अस्तित्व : संक्रिया सारणी से स्पष्ट है कि 0,1,2,3,4 के प्रतिलोभ क्रमशः 0,4,3,2,1 है इसलिए G में प्रत्येक अवयव के प्रतिलोम का अस्तित्व है।

5. क्रमविनिमेय : संक्रिया सारणी में प्रत्येक पंक्ति उसके संगत स्तम्भ के संरूप है अतः संक्रिया $+_5$, G में क्रमविनिमेय है।

अतयव $(G,+_3)$ एक परिमित कमविनिमेय समूह है।

टिप्पणी 1: यहाँ $O(G,+_5)$ एक परिमित कमविनिमेय समूह है।

टिप्पणी 2 : यदि समुच्चय G = {1,2,3,4} ले तो संक्रिया $+_5$ इसमें संवृत नहीं होगी क्योंकि $1+_54 = 0$ जहाँ $0\notin G$, अत: संक्रिया $+_5$ इस समुच्चय में संवृत नही होगी ।

टिप्पणी 3 : यदि समुच्चय G = {0,1,2,3} ले तो संक्रिया $+_5$ इसमें भी संवृत नहीं होगी क्योंकि $2+_52 = 4$,जहाँ $4\notin G$

टिपणी 4 : समुच्चय G = {0,1,2,3...n-1},$n\in N$ संक्रिया $+_n$ (योग मॉड्यूलों n) के लिये क्रमविनिमेय समूह होगा, जहाँ

$$a+_n b=\begin{cases} a+b & \text{यदि } a+b<n \\ a+b-n & \text{यदि } a+b\geq n \end{cases}$$

उदाहरण 5: प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय G = {1,2,3,4} संक्रिया $\times_5$ (मॉड्यूलों गुणा 5) के लिये एक क्रमविनिमेय समूह है

जहाँ

$$ax_5b=\begin{cases} a\times b & \text{यदि } a\times b<5 \\ \dfrac{a\times b}{5} \text{ का शेशफल,} & \text{यदि } a\times b\geq 5 \end{cases}$$

हल : यहाँ $(G,\times_5)$ की निम्न संक्रिया सारणी प्राप्त होगी

x_5	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि -

1. इसके सभी अवयव G के अवयव है, अत: संक्रिया x_5, G में संवृत है ।
2. 1 संक्रिया का तत्समक अवयव है ।
3. 1,2,3,4 के प्रतिलोम क्रमश: 1,3,2,4 है |
4. यहाँ संक्रिया x_5 का आधार संख्याओं के गुणन की संक्रिया है जो कि क्रमविनिमेय होती है,

अत: x_5 संक्रिया भी G में सहचारी तथा क्रमविनिमेय होगी ।

अतएव (G, x_5) एक क्रमविनिमेय समूह है ।

टिप्पणी 1 : यदि समुच्चय G = {0,1,2,3,4} ले तो संक्रिया x_5 के लिये अवयव 0 के प्रतिलोम का अस्तित्व नहीं होगा, क्योंकि $0x_5a\neq 1$, $\forall$ $a\in G$

टिप्पणी 2 : यदि समुच्चय G = {1,2,3} में संक्रिया x_4 लें तो यह संक्रिया G संवृत नहीं होगी क्योंकि $2x_42=0$, जहाँ $0\notin G$

इसी प्रकार संक्रिया x_6 भी G में संवृत नहीं होगी क्योंकि $2x_63=0$, जहाँ $0\notin G$

टिप्पणी 3 : समुच्चय G = {1,2,4,.....p-1},x_p (मॉड्यूलों गुणा p) संक्रिया लिये आबेली समूह होगा, जहाँ p अभाज्य संख्या है, इस प्रकार G = {1,2},x_3 (मॉड्यूलों गुणा 3) संक्रिया के लिये आबेली समूह को उदाहरण होगा ।

(प्रथम दस अभाज्य सख्याऐं 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29 हैं)

उदाहरण 6 : प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय G = {A,B,C,D} जहाँ

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

आव्यूह गुणन (.) संक्रिया के लिये क्रमविनिमेय समूह है ।

हल : यहाँ (G,.) की निम्न संक्रिया सारणी प्राप्त होगी

.	A	B	C	D
A	A	B	C	D
B	B	C	D	A
C	C	D	A	B
D	D	A	B	C

उपरोक्त सारणी से निम्न स्पष्ट है -

1. इसके सभी अवयव G के अवयव है, अत: संक्रिया आव्यूह गुणन.,(G) में संवृत हैं
2. आव्यूह गुणन संक्रिया सहचारी होती है अत: G में संक्रिया सहचारी होगी ।
3. आव्यूह A संक्रिया का तत्समक अवयव है ।
4. A,B,C,D के प्रतिलोम क्रमश: A,D,C,B हैं
5. संक्रिया सारणी में प्रत्येक पंक्ति उसके संगत स्तम्भ के समरूप है अत: संक्रिया G में क्रमविनिमेय है अतएव (G,.) एक क्रमविनिमेय समूह है ।

टिप्पणी : यहाँ A एक एकैकी आव्यूह है इसलिये

AA=A, AB=BA=B,AC=CA=C,AD=DA=D

साथ ही

$$BB = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=C$$

तथा

$$BC=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=D$$

इसी प्रकार संक्रिया सारणी तैयार करने के लिये अन्य गुणनफल प्राप्त कर सकते हैं ।

उदाहरण 7 : प्रदर्शित कीजिए कि धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q^+ संक्रिया * के लिये एक क्रमविनिमेय समूह है, जहाँ संक्रिया * निम्न प्रकार परिभाषित है

$$a*b = \frac{ab}{2},\ \forall\ a,b\in Q^+$$

हल : यहाँ हम (Q^+,*) में निम्न समूह अभिगृहितों का परीक्षण करेंगे

1. संवृतता : यहाँ $a\in Q^+$, $b\in Q^+ \Rightarrow a*b = \frac{ab}{2} \in Q^+$

$\therefore$ संक्रिया *, Q^+ में संवृत है

2. साहचर्यता : माना कि $a,b,c \in Q^+$

अब

$$(a*b)*c=\left(\frac{ab}{2}\right)*c\left(\frac{abc}{4}\right)$$

तथा

$$a*(b*c)=a*\left(\frac{bc}{2}\right)=\frac{abc}{4}$$

$\therefore$ $(b*c)*c=a*(b*c)$, $\forall$ $a,b,c \in G$

अत: संक्रिया *, G में साहचर्य है ।

3. तत्समक अवयव का अस्तित्व : माना कि e तत्समक अवयव है, तब किसी स्वेच्छ अवयव $a \in G$ के लिये

$$a*b=a=e*a \Rightarrow \quad \frac{ae}{2}=a=\frac{ea}{2}$$

$$\Rightarrow \quad e = 2 \in Q^+$$

अत: $e=2, Q^+$, पर में संक्रिया * के लिये तत्समक अवयव होगा

4. प्रत्येक अवयव के प्रतिलोम का अस्तित्व : माना कि x अवयव $a \in Q^+$ का प्रतिलोम है अत: प्रतिलोम अवयव को परिभाषानुसार

$$a*x=e=a*x \Rightarrow \quad \frac{ax}{2}=2=\frac{ax}{2} \qquad (\because e=2)$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{4}{2}$$

$$\therefore a \in Q^+ \quad \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow \frac{4}{a} \in Q^+$$

अतएव स्वेच्छ अवयव $a \in Q^+$ का प्रतिलोम $\frac{4}{a} \in Q^+$ होगा, इसलिये Q^+ में प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम विद्यमान है ।

5. क्रमविनिमेयता : यदि $a,b \in Q^+$ तब

$$a*b=\frac{ab}{2}=\frac{ba}{2}=b*a$$ {$\therefore$ गुणन संक्रिया Q^+ में क्रमविनिमेय है अतएव ab = ba}

इसलिये Q^+ में संक्रिया * क्रमविनिमेय है

चूंकि Q^+ में दी गई संक्रिया * के लिये क्रमविनिमेय समूह हेतु सभी प्रतिबन्ध सत्य है, अत: $(Q^+,*)$ क्रमविनिमेय समूह है ।

उदाहरण 8 : प्रदर्शित कीजिए कि

$$A_\alpha=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}, \alpha \in R$$

आकार की सभी आव्यूह का समुच्चय, आव्यूह गुणन के लिये क्रमविनिमेय समूह है |

हल: 1. माना कि

$$G=\left\{A_\alpha \middle| A_\alpha=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix};\alpha\in R\right\}$$

तथा, $A_\alpha, A_\beta \in G$, जहाँ $\alpha,\beta,\in R$ तो

$$A_\alpha \cdot A_\beta=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}$$

$$=A_{\alpha+\beta}\in G$$

$$[\because \alpha,\beta\in R\Rightarrow\alpha+\beta\in R]$$

$\therefore\ \forall A_\alpha\in G, A_\beta\in G \Rightarrow A_\alpha\ A_\beta \in G$

फलत: G आव्यूह गुणन के लिये संवृत है

2. साहचर्यता : आव्यूह गुणन सहचारी होता है अतः G में आव्यूह गुणन सहचारी होगा ।

3. तत्समक का अस्तित्व: $\alpha = 0 = R$ के लिये

$$A_0=\begin{bmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\in G$$

यहाँ A_0, आव्यूह गुणन के लिये G में तत्समक अवयव होगा क्योंकि

$$A_0.\ A_\alpha= A_{0+\alpha} = A_{\alpha+0} =A\alpha.\ A_0$$

अर्थात्

$$A_0.\ A_\alpha= A_\alpha = A\alpha.\ A_0\ \forall A.A\alpha$$

अतएव आव्यूह गुणन संक्रिया के लिये G में A_0 तत्समक अवयव का अस्तित्व है

4. प्रतिलोम का अस्तित्व : यदि $A_\alpha\in G$ तब $(A_\alpha)^{-1}$ का अस्तित्व होगा क्योंकि $|A_\alpha|=\cos^2\alpha+\sin^2=1\neq 0$

इसलिये

$$(A_\alpha)^{-1}=\frac{AdjA_\alpha}{|A_\alpha|}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(-\alpha) & \sin(-\alpha)\\ -\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{bmatrix}=A\text{-}_\alpha$$

अब

$$\alpha\in R\Rightarrow -\alpha\in R\Rightarrow A_{-\alpha}\in G$$

अतएव प्रत्येक $A_\alpha\in G$ के लिये, $A_{(-\alpha)}\in G$ जो A_α का प्रतिलोम है क्योंकि

$$=A_{(-\alpha)}.A_\alpha=A_{(-\alpha+\alpha)}=A_0$$

तथा $= A_{(\alpha)}.A_{(-\alpha)} = A_{(\alpha-\alpha)} = A_0$

∴ G में प्रत्येक अवयव के प्रतिलोम का अस्तित्व है ।

5. क्रमविनिमेयता : G में किन्हीं दो स्वेच्छ अवयव A_α तथा A_β के लिये

$A_\alpha . A_\beta = A_{\alpha+\beta} = A_{\beta+\alpha} = A_\beta . A_\alpha$ $\quad [\because \alpha, \beta \in R \Rightarrow \alpha+\beta = \beta+\alpha]$

∴ G में आव्यूह गुणन संक्रिया क्रमविनिमेय है फलत: सिद्ध होता है कि G आव्यूह गुणन संक्रिया के लिये क्रमविनिमेय समूह है ।

टिप्पणी: यदि $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma \in G$

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, A_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \text{तथा } A_\gamma = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

अब

$$(A_\alpha.A_\beta).A_\gamma = A_\alpha.(A_\beta.A_\gamma), \ \forall A_\alpha, A_\beta, A_\gamma \in G$$

∴ G में आव्यूह गुणन संक्रिया सहचारी है, अतएव यह सिद्ध करके भी उपरोक्त उदाहरण में साहचर्यता को प्रदर्शित किया जा सकता है ।

उदाहरण 9 : प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय $G = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in Q\}$ योग संक्रिया के लिये क्रमविनिमेय समूह है

हल : 1. माना x, y, ∈ G जहाँ

$x = a + b\sqrt{2}, y = (c + d\sqrt{2})$ तथा a, b, c,d ∈ G

तो

$$x + y = (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})$$
$$= (a+c) + (b+d)\sqrt{2} \in G \qquad [\because a+c \in Q, b+d \in Q]$$

$\therefore x \in G, y \in G \Rightarrow x + y \in G$

परिणामत: G योग संक्रिया के लिये संवृत है

2. साहचर्यता : समुच्चय G के अवयव वास्तविक संख्याऐं हैं तथा वास्तविक संख्याओ के लिये योग सहचारी होता है अत: संक्रिया G में सहचारी है ।

3. तत्समक अवयव का अस्तित्व : यहाँ समुच्चय G में योग संक्रिया के लिये $0 + 0\sqrt{2} \in G$ तत्समक अवयव होगा क्योंकि किसी अवयव $a + b\sqrt{2} \in G$ के लिये

$$(0 + 0\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) = (0 + a) + (0 + b)\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$$

तथा $$(a + b\sqrt{2}) + (0 + 0\sqrt{2}) = (a + 0) + (b + 0)\sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$$

अतएव योग संक्रिया के लिये $0 + 0\sqrt{2}$ तत्समक अवयव G में विद्यमान है

4. प्रतिलोम का अस्तित्व प्रत्येक G के लिये A∈G जो G का प्रतिलोम है क्योंकि

$$(a + b\sqrt{2}) + (-a - b\sqrt{2}) = (a - a) + (b - b)\sqrt{2} = 0 + 0\sqrt{2}$$

तथा $$(-a - b\sqrt{2}) + (a + b\sqrt{2}) = (-a + a) + (-b + b)\sqrt{2} = 0 + 0\sqrt{2}$$

∴ G में प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम विद्यमान है

6. क्रमविनिमेयता : समुच्चय G के अवयव वास्तविक संख्याऐं हैं तथा वास्तविक के लिये योग संक्रिया क्रमविनिमेय होती है ।

∴ G में योग संक्रिया क्रमविनिमेय है

उपरोक्त विवेचन से सिद्ध होता है कि G योग संक्रिया के लिये क्रमविनिमेय समूह है ।

उदाहरण 10 : यदि G = $\{(a,b)|a,b \in R, a \neq 0\}$ तथा '.' संक्रिया G में निम्न प्रकार परिभाषित है -

$$(a,b).(c,d) = (ac, bc+d)$$

तो सिद्ध कीजिए कि (G,.) एक अक्रमविनिमेय समूह है ।

हल : 1. माना कि (a,b) तथा (c,d) जहाँ a≠0,c≠0,G के कोई दो स्वेच्छ अवयव है तो ac≠0 इसलिये

(a,b).(c,d) = (ac,bc+d)∈G $\quad [\because ac \in R, bc+d \in R]$

परिणामत: संक्रिया में द्विचर संक्रिया है ।

2. साहचर्यता : यदि (a,b),(c,d) तथा (e,f),G के कोई तीन अवयव है तो

[(a,b).(c,d)].(e,f) = (ac,bc+d).(e,f)

= [(ac).e, (bc+d)e+f]

= (ace,bce+de+f)

तथा (a,b).[c,d).(e,f)] = (a,b). (ce,de+f)

= [a(ce),b(ce)+de+f]

= (ace,bce+de+f)

फलत: G में संक्रिया '.' साहचर्य है ।

3. तत्समक अवयव का अस्तित्व. यदि (x,y) समुच्चय G में तत्समक अवयव है तो

(x,y).(a,b)=(a,b) ∀(a,b)∈G

$\Rightarrow (xa, ya+b) = (a,b)$

$\Rightarrow xa = a,$ तथा $ya + b = b$

$\Rightarrow x = 1, y = 0 \quad [\because a \neq 0]$

$\because (1,0)$ तत्समक अवयव है अतएव G में दी गई संक्रिया के लिये तत्समक अवयव (1,0) विद्यमान है

4. प्रतिलोम का अस्तित्व : यदि (a,b) ∈ G का प्रतिलोम अवयव (x,y) है तो

(a,b) .(x,y)=(1,0)

⇒ (ax,bx+y)= (1,0)

∴ ax=1,bx+y=0

या $x = \frac{1}{a}, y = -\frac{b}{a}$

अत: (a,b) का प्रतिलोम $\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right)$ है ।

अब क्योंकि a≠0 अत: $\frac{1}{a}, \frac{-b}{a} \in R$

परिमणामत: G में प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम का अस्तित्व है अतएव (G,.)एक समूह है ।

5. क्रमविनिमेयता : यदि (a, b) तथा (c, d), G के कोई दो अवयव है तो ।

(a,b).(c,d)=(ac,bc+d)

तथा (c,d).(a,b)=(ca,da+b)

अतएव (a,b).(c,d)≠(c,d).(a,b)

इसलिये संक्रिया '.' G में क्रमविनिमेय नहीं है

उपरोक्त विवेचन से सिद्ध होता है कि (G,.) एक अक्रमविनिमेय समूह है । ।

टिप्पणी : समूह की परिभाषा में हमने G के अवयवों के लिये कोई प्रतिबन्ध लिया है अत: G के अवयव कोई भी हो सकते हैं उदाहरणार्थ : संख्याऐं, समुच्चय, देश, विद्यार्थी इत्यादि । हमें केवल यह देखना है कि समुच्चय G में दी गई द्विआधारी संक्रिया के लिये समूह अभिगृहित सन्तुष्ट होते हैं या नहीं ।

1.6 समूह के साधारण गुणधर्म

समूह की परिभाषा का अध्ययन करते समय हमने देखा कि समूह G में तत्समक अवयव e का अस्तित्व इस प्रकार होना चाहिए की $e.a = a = a.e, \forall a \in G$ इसी प्रकार प्रत्येक अवयव a के प्रतिलोम अवयव a^{-1} का अस्तित्व इस प्रकार होना चाहिए की $a.a^{1} = e = a^{-1}.a,$ अब प्रश्न यह उठता है कि क्या समूह G में तत्समक अवयव एक से अधिक हो सकते है इसी प्रकार क्या समूह G में किसी अवयव के एक से अधिक प्रतिलोम हो सकते है ? इसके लिये हम समूह के कुछ साधारण गुणधर्मों का अध्ययन करेगें ।

यहाँ हम सुविधा के लिये समूह की द्विचर संक्रिया को प्राय: '.' से व्यक्त करेगें तथा a.b को ab से व्यक्त करेगें, जब तक की संक्रिया का कोई और प्रतीक चिन्ह न दिया गया हो ।

प्रमेय : यदि (G,.) एक समूह है तो

1. समूह G में तत्समक अवयव अद्वितीय होता है । (तत्समक की अद्वितीयता)
2. प्रत्येक अवयव a∈G का प्रतिलोम अद्वितीय होता है । (प्रतिलोम की अद्वितीयता)
3. (a^{-1}) =a, ∀a∈G
4. $(ab)^{-1} = b^{-1}, a^{-1}$, ∀a,b∈G (उत्क्रमण नियम)
5. ac=bc⇒ a=b, ∀a,b,c∈G (दक्षिण निरसन नियम)
6. ca=cb⇒ a=b, ∀a,b, c∈G (वाम निरसन नियम)
7. यदि a तथा b समूह G के कोई दो अवयव हो तो समीकरण ax=b तथा ya=b के समूह G में अद्वितीय हल होते हैं ।

उपपत्ति : 1. यदि सम्भव हो तो माना की समूह (G,.) में e तथा e' दो तत्समक अवयव है अब यदि e,G का तत्समक अवयव है

⇒ e·e'=e' ....(1)

इसी प्रकार यदि e', G का तत्समक अवयव है

⇒ e.e'=e ....(2)

परन्तु ee'G का अद्वितीय अवयव है इसलिये (1) व (2) से सिद्ध होता है कि e = e'
अत: समूह G में तत्समक अवयव अद्वितीय होता है ।

2. यदि संभव हो तो माना की समूह (G,.) मे किसी अवयव a के दो प्रतिलोम x तथा y है तो

$$ax=xa=e$$

तथा $$ay=ya=e$$

$$\therefore\ x=xe=x(ay)=(xa)y=ey=y$$

अत: समूह G में प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम अद्वितीय होता है ।

टिप्पणी : समूह G में प्रत्येक अवयव a का अद्वितीय प्रतिलोम होता है इस प्रतिलोम अवयव को a^{-1} से व्यक्त करते हैं अत:

$$x=y=a^{-1}$$

3. यदि e,G में तत्समक अवयव है तो

$$a.a^{-1}=a^{-1}.a=e$$

अब प्रतिलोम अवयव की परिभाषानुसार a का प्रतिलोम a^{-1} तथा a^{-1} का प्रतिलोम होगा ।
इसलिये a^{-1} का प्रतिलोमी = a $\Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$

4. माना कि a,b,∈G तथा a और b के G में प्रतिलोम क्रमश: a^{-1} तथा b^{-1} है तो ab तथा $a^{-1}b^{1}, b^{-1}a^{-1}$ सभी G के अवयव होंगे अत:,

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} \qquad \text{(साहचार्यता से)}$$

$$= (ae)a^{-1}$$

$$= aa^{-1} = e \qquad ....(1)$$

पुन: $$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b \qquad \text{(साहचार्यता से)}$$

$$= (b^{-1},e)\ b$$

$$= b^{-1}b=e$$

अतएव (1) व (2) से,

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e = (b^{-1}a^{-1})(ab)$$

$$\therefore\ (ab)^{-1} = b^{-1},a^{-1}$$

टिप्पणी 1 : गणितीय आगमन सिद्धान्त से उपरोक्त प्रमेय को व्यापक रूप में भी प्राप्त किया जा सकता है अतएव यदि a,b,c.....k∈G तो $(a,b,c.....k)^{-1} = k^{-1}.....c^{-1}b^{-1}a^{-1}$
यह व्यापकीकृत उत्क्रमण नियम कहलाता है ।

टिप्पणी 2 : यदि G क्रमनिविमेय समूह है तो a,b∈G के लिये

$$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \qquad \left[\because a^{-1}b^{-1}, b^{-1}a^{-1}\right]$$

5. यदि ac=bc $\Rightarrow$ (ac) c^{-1}= (bc) c^{-1}

$$\Rightarrow a(cc^{-1})=b(cc^{-1})$$

$$\Rightarrow ae=be$$

$$\Rightarrow a=b$$

6. यदि ca=cb $\Rightarrow c^{-1}(ca)=c^{-1}(cb)$

$\Rightarrow (c^{-1}c)a=(c^{-1}c)b$

$\Rightarrow ea=eb$

$\Rightarrow a=b$

7. $\therefore a\in G \Rightarrow a^{-1}b\in G$

$$\because a\in G, b\in G \Rightarrow a^{-1}b\in G$$

अब हम देखते हैं कि

$a(a^{-1}b)= (aa^{-1})b$

$= eb$

$= b$

$\therefore$ G में समीकरण ax = b का हल $x = a^{-1}$ b होगा ।

यह हल अद्वितीय होगा क्योंकि यदि समीकरण ax=b दो हल x_1, x_2 है तो $ax_1 = b$ तथा $ax_2= b$

$\Rightarrow ax_1 = ax_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (वाम निरसन नियम से)

अत: समीकरण ax = b का G में अद्वितीय हल होगा । इसी प्रकार सिद्ध किया सकता है कि समीकरण ya = b का भी अद्वितीय हल होगा ।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1 : यदि किसी समूह G के प्रत्येक अवयव का विलोम भी वही अवयव तो सिद्ध कीजिए कि G एक क्रमविनिमेय समूह है ।

हल : माना कि a तथा b समूह G के स्वेच्छ अवयव है तो समूह G में दिये गुणधर्म से,

$\forall a \in G \Rightarrow a = a^{-1}$

अब $\forall a, b \in G \Rightarrow ab \in G$ (संवृतता से)

$\Rightarrow (ab)^{-1} = ab$

$\Rightarrow b^{-1}a^{-1} = ab$ (उत्क्रमण नियम से $\forall a,b \in G \Rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$)

$\Rightarrow$ ba =ab ($a^{-1} = a, b^{-1} = b$ दिये गये गुणधर्म से)

अत: G एक क्रमविनिमेय समूह है ।

टिप्पणी : समुच्चय G ={1 ,- 1} गुणन संक्रिया के लिये समूह है, यह क्रमविनिमेय समूह भी होगा क्योंकि इसमें प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम भी वहीं अवयव है ।

उदाहरण 2 : यदि किसी समूह (G,.) के प्रत्येक अवयव 'a' के लिए $a^2 = e$ है तब सिद्ध कीजिए कि G एक क्रमविनिमेय समूह है ।

हल : समूह G में दिये हुए गुणधर्म से

$\forall a \in G \Rightarrow a^2 = e$

$\Rightarrow a.a = e$ $[\because a^2 = a.a]$

$\Rightarrow a^{-1}(a.a) = a^{-1}.e$ (दोनों पक्षों में a^{-1} संक्रिया से)

$\Rightarrow (a^{-1}.a).a = a^{-1}$ (साहचर्यता से)

$\Rightarrow \quad ea = a^{-1}$

$\Rightarrow \quad a = a^{-1}$

अब $\forall a, b \in G \Rightarrow \quad ab \in G$ (G में संवृतता से)

$\Rightarrow (ab^{-1}) = ab$

$\Rightarrow b^{-1}a^{-1} = ab$ (उत्क्रमण नियम से)

$\Rightarrow ba = ab$ ($a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$,G में दिये गये गुणधर्म से)

अत: G एक क्रमविनिमेय समूह है ।

उदाहरण 3: यदि समूह G सम ग्रुंपाक है तो सिद्ध कीजिए कि एक ऐसे अवयव $a \neq e$ का अस्तित्व होगा कि

$$a^2 = e$$

हल : समूह G सम ग्रुंपाक है अतएव G में अवयवों की संख्या सम होगी । समूह G में प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम अद्वितीय होता है तथा तत्समक अवयव e स्वयं का प्रतिलोम होता है इसलिये समूह G में तत्समक अवयव e के अतिरिक्त कम से कम एक अवयव a इस प्रकार होगा कि $a^{-1}=a$

अब $a^{-1} = a \quad \Rightarrow \quad aa^{-1} = aa$ (दोनों पक्षों को a से पूर्व संक्रिया करने पर)

$\Rightarrow e = a^2$

अत: $a \neq e$ समूह G में एक ऐसा अवयव है कि $a^2=e$

टिप्पणी : समुच्चय G = {1 ,- 1, i, - i} गुणन संक्रिया के लिये चार कोटि का समूह है अर्थात् G सम ग्रुपांक है यहाँ हम देखते हैं कि अवयव 1, i, -i के प्रतिलोम कमश: 1, -i, i हैं तथा अवयव - 1 इस प्रकार है कि जो स्वयं का प्रतिलोम स्वयं है । अर्थात्

$$(-1) = (-1)^{-1} \Rightarrow (-1)^2 = 1$$

उदाहरण 4 : सिद्ध कीजिए कि चार कोटि का प्रत्येक समूह क्रमविनिमेय होता है।

हल : माना कि G= {e,a,b,c} चार कोटि का एक समूह है जिसमें e तत्समक अवयव है । समूह G समग्रुपांक है, अतएव तत्समक अवयव e के अतिरिक्त कम से कम एक अवयव स्वयं का प्रतिलोम स्वयं होगा । अत: माना कि $a^{-1} = a$

अब यदि $b^{-1}=b$ तथा $c^{-1} = c$, तो G एक क्रमविनिमेय समूह होगा क्योंकि इसमें प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम वह स्वयं ही है

यदि $b^{-1}=c$ तथा $c^{-1}=b$ ले तो bc=e = cb, तथा $a^{-1}=a \Rightarrow aa=e$

इस स्थिति में संक्रिया सारणी निम्न प्रकार होगी -

.	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	-	-
b	b	-	-	-
c	c	-	e	-

यहाँ हम देखते हैं कि दूसरी पंक्ति में ab = b या ab = c

यदि ab = b $\Rightarrow$ a = e जो कि सम्भव नहीं है, $\therefore ab \neq b$

इसलिये ab = c होगा, अब उपरोक्त सारणी की प्रत्येक पंक्ति एवं स्तम्भ में समूह का अवयव केवल एक बार आना चाहिए । इस आधार पर संक्रिया सारणी निम्न प्रकार होगी -

·	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

इस संक्रिया सारणी में प्रत्येक पंक्ति उसके सगंत स्तम्भ के समरूप है । फलत: G क्रमविनिमेय समूह है ।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. धनात्मक अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय गुणन संक्रिया के लिये समूह होता है । (सत्य/असत्य)
2. समस्त विषम पूर्णांको का समुच्चय योगिक संक्रिया के लिये समूह होता है । (सत्य/असत्य)
3. परिमेय संख्याओं x का समुच्चय G जहाँ $0<x\leq 1$, गुणन संक्रिया के लिये समूह होता है । (सत्य/ असत्य)
4. समुच्चय G = {1,2,3,4,5} संकिया x_6 (मॉड्यूलों गुणा 6) के लिये समूह है । (सत्य/असत्य)
5. समूह जिसकी कोटि चार के बराबर अथवा कम है, सदैव आबेली समूह होता है । (सत्य/असत्य)
6. निम्न के प्रत्येक के लिये एक-एक उदाहरण दीजिए

(i) एक समूह का जो क्रमविनिमेय व परिमित हो

(ii) एक समूह का जो क्रमविनिमेय व अपरिमित हो

(iii) एक समूह का जो अक्रमविनिमेय व अपरिमित हो

1.7 उपसमूह (उपग्रुप)

समूह का अध्ययन करते समय हमने देखा कि कुछ ऐसे समूह है जो कि किसी बड़े समूह में निहित होते हैं, इससे उपसमूह की अवधारणा उत्पन्न होती है । उदाहरणार्थ- (Z,+), (Q,+) में तथा (Q,+), (R,+) में निहित है तथा ये सभी समूह (C,+) में निहित है अर्थात् उस बड़े समूह की प्रेरित संक्रिया के लिये स्वयं भी समूह है । ऐसे समूह को उस बड़े समूह का उपसमूह कहते हैं।

इस प्रकार यदि तें समूह H का अरिक्त उपसमुच्चय हैं तथा G की प्रेरित संक्रिया के लिये H स्वंय भी समूह हो तो, H समूह G का उपसमूह कहलाता है ।

प्रत्येक समूह जिसकी कोटि एक से अधिक हो के दो उपसमूह अवश्य होते हैं (i)G (स्वयं) (ii) {e}; तत्समक ग्रुप, इन्हें G के विषम उपसमूह कहते हैं इनके अतिरिक्त अन्य उपसमूह उचित उपसमूह कहलाते हैं

टिप्पणी : समुच्चय G स्वंय का उपसमुच्चय भी होता है अतएव समूह G स्वंय का उपसमूह भी कहलाता है ।

1.7.1 उपसमूह के उदाहरण

1. यदि किसी नियत पूर्णांक m पूर्णांकीय गुणजो का समुच्चय mZ है तो (mZ,+) समूह होगा लेकिन $mZ \subseteq Z$ इसलिये (mZ, +) समूह (Z,+) का उपसमूह होगा ।
2. गुणात्मक समूह $\langle \{1,-1\},. \rangle$ गुणात्मक समूह $\langle \{1,-1,i,-i\}.\rangle$ का उपसमूह है तथा ये दोनों अशून्य सम्मिश्र संख्याओं के समूह (C_0,.)के उपसमूह हैं ।
3. {0,4} यसमूह (Z_8, $+_8$) का उपसमूह है ।
4. पूर्णांकों का समूह (Z,+) परिमेय संख्याओं के समूह (Q,+) का एक उपसमूह है, तथा (Q,+) वास्तविक संख्याओं के समूह (R,+) का एक उपसमूह है तथा ये सभी सम्मिश्र संख्याओं के समूह (C,+) के उपसमूह है |
5. अशून्य परिमेय संख्याओं का समूह (Q_o,.) अशून्य वास्तविक संख्याओं के समूह (R_0,.) का एक उपसमूह है तथा ये दोनों अशून्य सम्मिश्र संख्याओं के समूह (C_0,.) के उपसमूह है ।

टिप्पणी: उपसमूह के कुछ अन्य उदाहरणों का अध्ययन हम अगले अध्याय में भी करेंगे ।

1.7.2 समूह सम्मिश्र

यदि G का कोई अरिक्त समुच्चय H है तो यह G का सम्मिश्र कहलाता है । यहाँ आवश्यक नहीं हैं कि H समूह G का उपसमूह हो ।

यदि H और K किसी समूह के कोई दो उपसमुच्चय (सम्मिश्र) है तो H^{-1} और HK निम्न प्रकार परिभाषित किये जाते हैं ।

$$H^{-1} = \{h^{-1} | h \in H\} \text{ तथा } HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$$

उदाहरणार्थ: 1. यदि H = {1,-1,i},K = {i} गुणात्मक ग्रुप $\langle \{1,-1,i,-i\} \rangle$ के दो सम्मिश्र है तो

$$H^{-1} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{i}\right\} = \{1,-1,-i\}$$

$$K^{1} = \left\{\frac{1}{i}\right\} = \{-i\}$$

$$HK = \{1.i, -1.i, i.i\} = \{i,-i,-1\}$$

उपरोक्त से स्पष्ट है कि $HK \subseteq G, H^{-1} \subseteq G$ तथा $K^{-1} \subseteq G$

2. यदि H = {1,7},K={6,10} समूह (Z, +) के दो सम्मिश्र हो तो

H^{-1} = {-1,-7},K^{-1}={-6,-10}

तथा HK = {1+6,1+10,7+6,7+10}

= {7,11,13,17}

किसी समूह के सम्मिश्र H_1, H_2 तथा H_3 के लिये निम्न गुणधर्म आसानी से स्थापित किये जा सकते हैं

(i) H_1 (H_2, H_3,) = (H_1, H_2,) H_3

(ii) $(H_1\ H_2)^{-1}$ = $H_2^{-1}H_1^{-1}$

(iii) यदि H_1, G का उपसमूह है तो $H_1^{-1} = H_1$ तथा $H_1H_1 = H_1$

टिप्पणी : समूह G का प्रत्येक उपसमूह G का सम्मिश्र है परन्तु प्रत्येक सम्मिश्र, G' का उपसमूह हो आवश्यक नहीं है, उदाहरणार्थ

समूह G = {1, -1,×} का एक सम्मिश्र H = {-1} है, अब H समूह G की प्रेरित के लिये संवृत नहीं है क्योंकि $-1 \in H, -1 \in H \Rightarrow (-1)\times(-1) = 1 \notin H$

अतएव H, G का उपसमूह नहीं है ।

1.7.3 उपसमूह से सम्बंधित प्रमेय

प्रमेय 1 : यदि H किसी समूह G का उपसमूह है तो

1. H का तत्समक अवयव तथा G का तत्समक अवयव समान होता है ।
2. H में किसी अवयव a का प्रतिलोम वही अवयव है जो G में a का प्रतिलोम है ।

उपपत्ति:

1. माना कि H किसी समूह G का उपसमूह है यदि e तथा e' क्रमश: G तथा H के तत्समक अवयव है तो

$a \in H \Rightarrow e'a = a = ae'$ (∵ e', H का तत्समक अवयव है)

पुन: $a \in H \Rightarrow a \in G \Rightarrow ea = a = ae$ (∵ e,H का तत्समक अवयव है)

∵ समूह G में, $e'a = ea = a$

या $e'a = ea \Rightarrow e' = e$ (G में दक्षिण निरसन नियम से)

अत: H और G का तत्समक एक ही अवयव है ।

2. माना कि समूह G तथा उपसमूह H का तत्समक अवयव e है, यदि H तथा G में स्वेच्छ अवयव a प्रतिलोम क्रमश: b तथा c है तो

$$\left.\begin{aligned} ab = e = ba \\ ac = e = ca \end{aligned}\right\} \Rightarrow ab = ac \Rightarrow b = c$$ (G में वाम निरसन नियम से)

अत: स्वेच्छ अवयव a का प्रतिलोम H तथा G में समान है इसलिये H में किसी अवयव का प्रतिलोम वही अवयव है जो G में उस अवयव का प्रतिलोम है ।

प्रमेय 2 : किसी समूह G का कोई अरिक्त उपसमुच्चय H, एक उपसमूह होगा यदि और केवल यदि

$a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ जहाँ b^{-1} समूह G में b का प्रतिलोम है ।

उपपत्ति : प्रतिबन्ध की आवश्यकता : माना कि H समूह G का उपसमूह है तथा $a,b \in H$, अब H में प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम विद्यमान होगा क्योंकि H स्वयं भी एक समूह है अत:

$b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$

$$\therefore a \in H, b \in H \Rightarrow a \in H, b^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow ab^{1} \in H$$ (उपसमूह H में संवृत गुणधर्म से)

अत: यदि H, G का उपसमूह है तो दिया गया प्रतिबन्ध आवश्यक है ।

प्रतिबन्ध की पर्याप्तता : माना कि H में दिया गया प्रतिबन्ध सत्य है अर्थात् $\in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, तो हम सिद्ध करेगे कि H एक उपसमूह होगा, दिया गया है कि H, G का अरिक्त उपसमुच्चय है

$\therefore H \neq \emptyset$, अतएव माना कि $a \in H$

अब

$a \in H,\ a \in H\ aa^{-1} = e \in H$ (दिये गये प्रतिबन्ध में)

$\therefore$ H में तत्समक अवयव विद्यमान है

पुन: माना कि $a \in H$ एक स्वेच्छ अवयव है तो

$e \in H,\ a \in H \Rightarrow ea^{-1} \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$

$\therefore$ H में प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम विद्यमान है

अब H का प्रत्येक अवयव समूह G में विद्यमान है तथा समूह G में द्विचर संक्रिया के लिये साहचर्य नियम का पालन होता है इसलिये H में भी साहचर्य नियम सत्य होगा

अन्त में, $a \in H, b \in H$

$$\Rightarrow a \in H, b^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow a\left(b^{-1}\right)^{-1} \in H \quad \text{(दिये गये प्रतिबन्ध से)}$$

$$\Rightarrow ab \in H$$

$\therefore$ H,G की संक्रिया के लिये संवृत है ।

अतएव H, G की संक्रिया के लिये स्वयं भी एक समूह है इसलिये H, G का होगा, जो कि सिद्ध करता है कि दिया गया प्रतिबन्ध H के उप समूह होने के लिये पर्याप्त है ।

टिप्पणी 1 : यदि H समूह (G, *) का कोई सम्मिश्र है तो (H, *) के समूह (G, *) के उपसमूह होने के लिये आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि

$a \in H,\ b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H$

जहाँ b^{-1}, संक्रिया * के सापेक्ष b का प्रतिलोम है

इस प्रकार यदि समूह की संक्रिया योग चिन्ह (+) से व्यक्त की जाये तो उपरोक्त प्रतिबन्ध निम्न प्रकार का होगा

$$a \in H, b \in H \Rightarrow a - b \in H$$

टिप्पणी 2 : यह प्रमेय उपसमूह का महत्वपूर्ण अभिलक्षण प्रदान करती है जब भी मे समूह G के किसी अरिक्त समुच्चय H को उपसमूह सिद्ध करना हो तो हम इस प्रमेय का उपयोग करते हैं, इसके लिये हम समुच्चय H के कोई दो स्वेच्छ अवयव a तथा b लेते हैं तथा यह प्रदर्शित करने का प्रयास करते हैं कि $ab^{-1} \in H$ यदि हम $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ सिद्ध कर देते हैं तो H,G का उपसमूह होता है ।

उपप्रमेय 1 : किसी समूह G का कोई अरिक्त H समुच्चय उपसमूह होगा यदि और केवल यदि

$HH^{-1} \subset H$

उपप्रमेय 2 : किसी समूह G का कोई अरिक्त उपसमुच्चय H, उपसमूह होगा यदि और केवल यदि

$HH^{-1} = H$

प्रमेय 3 : समूह G का कोई परिमित अरिक्त उपसमुच्चय H एक उपसमूह होगा और केवल यदि

$a \in H, b \in H \Rightarrow ab \in H$

उपपति प्रतिबन्ध की आवश्यकता : माना कि समूह G का H कोई परिमित उपसमूह है तब H, G की द्विचर संक्रिया के लिये संवृत होगा, परिणामत:

$a \in H, b \in H \Rightarrow ab \in H$

प्रतिबन्ध की पर्याप्तता : यदि H, G का एक परिमित अरिक्त उपसमुच्चय है तथा $a \in H, b \in H \Rightarrow ab \in H$ तो हमे सिद्ध करना है कि H, G का उपसमूह है दिये गये प्रतिबन्ध से H, G की द्विचर संक्रिया के लिये संवृत है, पुन: H का प्रत्येक अवयव G का भी अवयव है इसलिये H के अवयवों के लिये सहचारिता गुणधर्म भी सत्य होगा,

अब माना कि H का कोई एक स्वेच्छ अवयव a है तो

$a \in H,\ a \in H \Rightarrow aa = a^2 \in H$ (दिये गये प्रतिबन्ध में)

इसी प्रकार $a \in H,\ a^2 \in H \Rightarrow aa^2 = a^3 \in H$

....

....

$a \in H,\ a^{n-1} \in H \Rightarrow aa^{n-1} = a^n \in H,\ \forall n \in N$

अत: $a, a^2, a^3, \ldots\ldots, a^n, \ldots\ldots$ अन्त तक $\in H$ परन्तु H परिमित उपसमुच्चय है इसलिये अवयवों की पुनरावृति होगी अर्थात् a की कुछ घातें समान अवयव व्यक्त करेगी । माना कि

$a^i = a^{-j}$, जहाँ $i > j > 0$

$\Rightarrow a^i a^{-j} = a^j a^{-j}$ [$\because a \in G \Rightarrow \left(a^j\right)$ या $a^j \in G$]

$\Rightarrow a^{i-j} = a^{j-j} = a^0 = e$, जहाँ e समूह G का तत्समक अवयव है ।

$\because$ i - j धनात्मक पूर्णांक है अत: $a^{i-j} = e \in G$

अत: H में तत्समक अवयव a^{i-j} है

अब H में किसी स्वेच्छ अवयव a^k का प्रतिलोम a^{i-j-k} होगा क्योंकि

$$a^k . a^{i-j-k} = a^{i-j} = e = a^{i-j-k} . a^k$$

$\because$ H में प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम विद्यमान है । फलत: H, G का उपसमूह है ।

टिप्पणी 1 : $(Q_0, .)$ समूह का H = {1,-1} एक परिमित उपसमुच्चय है जो कि गुणन संक्रिया के लिये संवृत है अतएव उपरोक्त प्रमेय से यह इस समूह का उपसमूह होगा ।

टिपणी 2 : इस प्रमेय का प्रतिबन्ध समूह G के परिमित तथा अपरिमित उपसमुच्चयों के लिये सत्य हैं, परन्तु अपरिमित उपसमुच्चयों के लिये पर्याप्त नहीं है उदाहरणार्थ, (i) समूह (Z,+) का N एक ऐसा अपरिमित उपसमुच्चय है जो कि समूह कि संक्रिया के लिये संवृत है परन्तु यह G का उपसमूह नही है क्योंकि $0 \notin N$ अर्थात् संक्रिया का तत्समक अवयव N में विद्यमान नहीं तथा अवयवों के प्रतिलोम भी विद्यमान नहीं है ।

(ii) यदि G $=\{\ldots\ldots 3^{-3}, 3^{-2}, 3^{-1}, 3^0 = 1, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots\ldots\}$ ले तो यह गुणन संक्रिया के लिये समूह है परन्तु इसका परिमित उप समुच्चय $H=\{1, 3^1, 3^2, 3^3, \ldots\ldots\}$ गुणन संक्रिया के लिये संवृत तो है परन्तु अवयव व के अतिरिक्त किसी भी अवयव का गुणात्मक प्रतिलोम इसमें विद्यमान नहीं है।

उपप्रमेय : किसी समूह G का कोई अरिक्त परिमित उपसमुच्चय H उपसमूह होगा यदि और केवल यदि

HH = H

प्रमेय 4 : किसी समूह G के दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ G का उपसमूह होता है ।

उपपत्ति : माना कि H_1 तथा H_2 समूह G के दो उपसमूह है अत: कम से कम G तत्समक अवयव e, H_1 तथा H_2 दोनों में विद्यमान होगा ।

$$\because e \in H_1, e \in H_2 \Rightarrow e \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow H_1 \cap H_2 \neq \phi$$

अब माना कि $a, b \in H_1 \cap H_2$, तब

$$a, b \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow \begin{cases} a, b \in H_1 \Rightarrow a, b^{-1} \in H_1 & \text{उपसमूह है} \\ a, b \in H_2 \Rightarrow a, b^{-1} \in H_1 & \text{उपसमूह है} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \because H_1 \\ \because H_2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow a, b^{-1} \in H_1 \cap H_2$$

$\therefore H_1 \cap H_2$ भी G का उपसमूह होगा

उपप्रमेय : यदि H_1, H_2,.....,H_n समूह G उपसमूह है तो $H_1 \cap H_2 \cap ..... \cap H_n$ भी समूह G का उपसमूह होता है ।

टिप्पणी : समूह G में $H_1 \cap H_2$ सबसे बडा उपसमूह होता है जो कि उपसमूह H_1 तथा H_2 में अन्तर्विष्ट होता है ।

प्रमेय 5 : समूह G दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होता है यदि और केवल यदि एक दूसरे में अन्तर्विष्ट (निहित) है ।

उपपति : प्रतिबन्ध की आवश्यकता : माना कि H_1 तथा H_1 किसी समूह G के कोई उपसमूह है अब माना कि $H_1 \subseteq H_2$ या $H_2 \subseteq H_1$, तो

$$H_1 \cup H_2 = H_2 \text{ या } H_1$$

$$\Rightarrow H_1 \cup H_2 \text{ भी G का उपसमूह है ।}$$

प्रतिबन्ध की पर्याप्तता : माना कि $H_1 \cup H_2, G$ का उपसमूह है तो हम सिद्ध करेगे कि $H_1 \subseteq H_2$ या $H_2 \subseteq H_1$

यदि सम्भव हो तो माना कि $H_1 \not\subseteq H_2$ तथा $H_2 \not\subseteq H_1$

अब $H_1 \not\subseteq H_2$ का अर्थ है कि एक ऐसा अवयव a,H_1 में विद्यमान है जो कि H_2 में विमान नहीं है, इसी प्रकार $H_2 \not\subseteq H_1$ का अर्थ है कि एक अवयव b,H_2 में विद्यमान है जो कि H_1 में नहीं है, तब

$$a \in H_1 \Rightarrow a \in H_1 \cup H_2$$

$$a \in H_2 \Rightarrow b \in H_1 \cup H_2$$

यहाँ हमने माना है कि $H_1 \cup H_2$ उपसमूह है इसलिये

$$a \in H_1 \cup H_2, b \in H_1 \cup H_2 \Rightarrow ab \in H_1 \cup H_2$$ (सवृतंता गुणधर्म से)

$\Rightarrow ab \in H_1 \; ab \in H_2$

अब $a \in H_1, \; ab \in H_1 \Rightarrow a^{-1} \in H_1, \; ab \in H_1$

$\Rightarrow a^{-1}(ab) \in H_1$

$\Rightarrow (a^{-1}a)b \in H_1$

$\Rightarrow eb \in H_1 \Rightarrow b \in H^1$

जो कि उपरोक्त का विरोधाभास है । इसी प्रकार

$ab \in H_2, \; b \in H_2 \Rightarrow ab \in H_2, b^{-1} \in H_2$

$\Rightarrow (ab) \; b^{-1} \in H_2$

$\Rightarrow a(bb^{-1}) \in H_2$

$\Rightarrow ae = a \in H_2$

जो कि उपरोक्त का पुन: विरोधाभास है यह विरोधाभास हमे निम्न के मानने से प्राप्त हुआ है, $H_1 \not\subseteq H_2$ तथा $H_2 \not\subseteq H_1$ इसलिये $H_1 \subseteq H_2$ या $H_2 \subseteq H_1$ होगा ।

अतएव दो उपसमूहों H_1 तथा H_2 का संघ एक उपसमूह होगा । यदि और केवल यदि $H_1 \subseteq H_2$ या $H_2 \subseteq H_1$

टिप्पणी : किसी समूह के कोई दो उपसमूहों का संघ उपसमूह होना आवश्यक नहीं होता, उदाहरणार्थ (Z,+) एक समूह है तथा H_1 = {.....,-6,-4,-2,0,2,4.....} H_2 = {.....-9,-6,-3,0,3,6,9.....} इसके कोई दो उपसमूह है, अब $H_1 \cup H_2 = \{0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, ...\}$ से स्पष्ट है कि

$3 \in H_1 \cup H_2, 4 \in H_1 \cup H_2$ परन्तु $3+4=7 \notin H_1 \cup H_2$

अत: $H_1 \cup H_2$, समूह की संक्रिया (+) के लिये संवृत नहीं है, इसलिये $H_1 \cup H_2$, Z का उपसमूह नहीं है ।

प्रमेय 6 : यदि H तथा K किसी समूह G के कोई दो उपसमूह हो तो HK, G का उपसमूह होगा, यदि और केवल यदि HK = KH

उपपत्ति : माना कि H तथा K किसी समूह G के कोई दो उपसमूह है तो HK, G का उपसमूह होगा यदि हम यह सिद्ध कर दें कि (HK) (HK)-1 = HK, जबकि हमे दिया गया है HK = KH

अब $(HK)\,(HK)^{-1} = (HK)\,(K^{-1}H^{-1})$ $\left[\because (HK)^{-1} = K^1 H^{-1}\right]$

$= H\,(KK^{-1})\,H^{-1}$ (साहचर्यता से)

$= (HK)H$ ($\because$ K उपसमूह है $\Rightarrow KK^{-1}=K$)

$= (KH)H$ ($\because HK = KH$)

$= K(HH^{-1})$ ($\because$ H उपसमूह है $\Rightarrow HH^{-1}=H$)

$= KH$

$= HK$

$\therefore$ HK, G का उपसमूह है

विलोमत : माना कि HK,G का उपसमूह है तो हम सिद्ध करेंगे कि HK=KH

चूंकि HK,G का उपसमूह है

$\Rightarrow (HK)^{-1}=HK$

$\Rightarrow K^{-1}\ H^{-1}=HK$

$\Rightarrow KH=HK$ [$\because$ K उपसमूह है $\Rightarrow K^{-1} = K$ इसी प्रकार $H^{-1} = H$]

अत: HK उपसमूह है $\Leftrightarrow$ HK=KH

उपप्रमेय: किसी क्रमविनिमेय समूह G के दो उपसमूह H तथा K है तो HK= $\{hk|h \in H, k \in K\}, G$ का एक उपसमूह होता है ।

उपपति: हम जानते है कि H तथा K किसी समूह G के कोई दो उप समूह हो तो HK, G उपसमूह होता है यदि और केवल यदि HK=KH यहाँ क्रमविनिमेय समूह है तो HK सत्य होगा, अतएव HK क्रमविनिमेय समूह G का उपसमूह होगा ।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1 : सिद्ध कीजिए कि किसी नियत पूर्णाक n के पूर्णांकिय गुणजो का nZ पूर्णाको के समूह (Z,+) का उपसमूह है ।

हल : माना कि H={.....-3n,-2n,-n,0,n,2n,3n,.....}, जहाँ n∈Z तथा n नियत है, तो हमें सिद्ध करना है कि (H,+) एक उपसमूह है ।

यदि n=0 तब H= {0} अतएव $H \neq \phi$, इसलिये H,Z का अरिक्त उपसमुच्चय है

अब x∈H,y∈H $\Rightarrow \exists$r,s∈Z ताकि x=nr, y=ns

$\Rightarrow$x-y = n(r-s), परन्तु r,s∈Z$\Rightarrow$r-s∈Z

$\Rightarrow$x-y∈H

अर्थात् x∈H,yH⇒x-y∈H इससे सिद्ध होता है कि समूह (H,+) (Z,+) का उपसमूह होगा ।

टिप्पणी : इस उदाहरण को सिद्ध करने हेतु उपसमूह से सम्बंधित प्रमेय 2 का उपयोग किया है, आगे भी हम इस प्रमेय का उपयोग करेंगे |

उदाहरण 2 : सिद्ध कीजिए कि H =$\{a+ib|a,b \in Q\}$ समूह (C,+) का उपसमूह है |

हल : यहाँ $H \neq \phi$, अतएव H,C का एक अरिक्त उपसमुच्चय है

माना कि x,y∈H जहाँ $x = a_1 + ib_1, y = a_2 + ib_2; a_1, a_2, b_1, b_2 \in Q$ तो

$x-y = (a_1+ib_1)-(a_2+ib_2)$

$= (a_1+ a_2) + i(b_1+b_2)\in H$ $\quad [\because a_1 - a_2 \in Q, b_1 - b_2 \in Q]$

अर्थात X∈H, y∈H ⇒ x-y ∈H, अतः H समूह (C, +) का एक उपसमूह है ।

उदाहरण 3 : यदि

$$G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a,b,c,d \in R, ad - bc \neq 0\right\}$$

आव्यूह गुणन के लिये एक समूह हो, तो सिद्ध कीजिए की

$$H = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G, ad \neq 0\right\}$$,G का एक उपसमूह है

हल: स्पष्टत: $H \neq \phi$ तथा $H \subset G$

माना कि

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \in H,$ जहाँ $a_1, a_2, b_1, b_2, d_1, d_2 \in R$ तथा $a_1 d_1 \neq 0,\ a_2 d_2 \neq 0,$

अब आव्यूह गुणन संकिया के अन्तर्गत

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2} & \frac{-b_2}{a_2 d_2} \\ 0 & \frac{1}{d_2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore AB^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2} & \frac{-b_2}{a_2 d_2} \\ 0 & \frac{1}{d_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_2} & \frac{-a_1 b_2}{a_2 d_2} + \frac{b_1}{d_1} \\ 0 & \frac{b_1}{d_1} \end{pmatrix} \in H \qquad \left[\begin{array}{l} \because a_1 d_1 \neq 0, a_2 d_2 \neq 0, \\ \Rightarrow \frac{a_1 d_2}{a_2 d_2} \neq 0 \end{array}\right]$$

अर्थात $\forall A \in H, B \in H \Rightarrow AB^{-1} \in H,$ अतएव H,G का उपसमूह होगा ।

उदाहरण 4 : यदि a किसी G का एक अवयव है तथा N(a) $= \{x \in G \mid ax = xa\}$ तो सिद्ध कीजिए कि $N(a), G$ है ।

हल : $\because e \in G \Rightarrow ae = ea \Rightarrow e \in N(a) \Rightarrow N(a) \neq \phi$

अतएव $N(a),$ समूह G का अरिक्त उपसमुच्चय होगा ।

माना कि $x, y \in N(a)$ तो $N(a)$ की परिभाषा से

$ax = xa$ तथा $ay = ya$

अब $ay = ya \Rightarrow y^{-1}(ay)y^{-1} = y^{-1}(ya)y^{-1}$

$$\Rightarrow (y^{-1}a)(yy^{-1}) = (y^{-1}y)(ay^{-1})$$

$$\Rightarrow (y^{-1}a)e = e(ay^{-1})$$

$$\Rightarrow y^{-1}a = ay^{-1}$$

$$\Rightarrow y^{-1} \in N(a)$$

$$\therefore y \in N(a) \Rightarrow y^{-1} \in N(a)$$

पुनः $a(xy^{-1}) = (ax)y^{-1}$ (साहचर्यता से)

$= (xa)y^{-1}$ $\left[\therefore x \in N(a) \Rightarrow ax = xa\right]$

$$= x\left(ay^{-1}\right) \qquad \text{(साहचर्यता से)}$$
$$= x\left(y^{-1}a\right) \qquad \left[\because y^{-1} \in N(a) \Rightarrow ay^{-1} = y^{-1}a\right]$$
$$= \left(xy^{-1}\right)a \qquad \text{(साहचर्यता से)}$$

अर्थात् $xy^{-1} \in N(a)$

$$\therefore x \in N(a), y \in N(a) \Rightarrow xy^{-1} \in N(a)$$

अत: $N(a), G$ का एक उप समूह है ।

टिप्पणी : यदि G एक समूह है तथा a,G का कोई अवयव है तब अवयव a का समूह G में प्रसामान्यक $N(a)$ से व्यक्त किया जाता है । यह G में उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो कि अवयव a से क्रमविनिमेय है अर्थात्

$$N(a) = \{x \in G \mid xa = ax\}$$

उदाहरण 5 : किसी समूह G के लिये सिद्ध कीजिए कि

$$Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx, \quad \forall g \in G\}$$

समूह G का एक उपसमूह है ।

हल : $\because e \in G \Rightarrow \quad eg = ge, \quad \forall g \in G$

$$\Rightarrow \quad e \in Z(G)$$
$$\Rightarrow \quad Z(G) \neq \phi$$

अतएव $Z(G)$, समूह G का अरिक्त उपसमुच्चय होगा

माना कि $x, y \in Z(G)$, तो $Z(G)$ की परिभाषा से

$$xg = gx \text{ तथा } yg = gy, \forall g = \in G$$

अब
$$yg = gy \Rightarrow y^{-1}(yg)y^{-1} = y^{-1}(gy)y^{-1}$$
$$\Rightarrow \left(y^{-1}y\right)\left(gy^{-1}\right) = \left(y^{-1}g\right)\left(yy^{-1}\right)$$
$$\Rightarrow e\left(gy^{-1}\right) = \left(y^{-1}g\right)e$$
$$\Rightarrow gy^{-1} = y^{-1}g$$
$$\Rightarrow y^{-1} \in Z(G)$$
$$\therefore y \in Z(G) \Rightarrow y^{-1} \in Z(G)$$

पुनः
$$\left(xy^{-1}\right)g = x\left(y^{-1}g\right) \qquad \text{[साहचर्यता से]}$$
$$= x\left(gy^{-1}\right) \qquad \left[\because y^{-1} \in Zx(G)\right]$$
$$= (xg)y^{-1} \qquad \text{(साहचर्यता से)}$$
$$= (gx)y^{-1} \qquad \left[\because x \in Z(G)\right]$$
$$= g\left(xy^{-1}\right) \qquad \text{(साहचर्यता से)}$$

अर्थात् $xy^{-1} \in Z(G)$

$$\therefore x \in Z(G), y \in Z(G) \Rightarrow xy^{-1} \in Z(G)$$

अत: $Z(G), G$ का एक उपसमूह है ।

टिप्पणी : यदि G एक समूह हैं, जब G का केन्द्र $Z(G)$, समूह G के उन सभी अवयवों का समुच्चय हैं, जो G के प्रत्येक अवयव से क्रमविनिमेय हैं अर्थात्

$$Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx, \forall g \in G\}$$

अत: स्पष्ट हैं कि यदि G क्रमविनिमेय समूह हैं तब $Z(G)$=G होगा । उदाहरण 4 व 5 से स्पष्ट हैं कि किसी अवयव a का प्रसामान्यक तथा समूह G का केन्द्र $Z(G)$दोनो समूह G के उपसमूह होते हैं ।

टिप्पणी : यहाँ यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि

$$Z(G) = \bigcap_{a \in G} N(a)$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न-3

1. समूह (Z, +) के विषम उपसमूह (Z, +) तथा (0, +) होंगे (सत्य/असत्य)
2. समूह $\langle \{0,1,2,\}, +_3 \rangle$, समूह $\langle \{0,1,2,3,+_4\} \rangle$ का उपसमूह होगा (सत्य/असत्य)
3. अशून्य परिमेय संख्याओं का समूह ($Q_{0,}$.) समूह (Q,+) का उपसमूह है (सत्य/असत्य)
4. सिद्ध कीजिए कि H, समूह ($C_{0,}$.) का उपसमूह है जहाँ

$$H = \{a + b\sqrt{2} \mid a \in Q, b \in Q, a^2 + b^2 \neq 0\}$$

1.8 सारांश

इस इकाई में हमने ऐसे बीजीय निकायों का अध्ययन किया, जिनमें केवल मात्र एक संक्रिया प्रयुक्त थी, जो कि कुछ विशेष अभिगृहितो के अन्तर्गत इसे आबेली समूह बनाती है । समूह G अवयवों की संख्या के आधार पर परिमित अथवा अपरिमित समूह कहलाता है । समूह G में अवयवों की संख्या समूह G की कोटि कहलाती है ।

यदि समूह G का कोई उपसमुच्चय H , है तो H,G का उपसमूह कहलाता है यदि G की प्रेरित संक्रिया के लिये यह समूह की सभी अवधारणाओं को सन्तुष्ट करें ।

समूह G के उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी G का उपसमूह होता है, लेकिन इनका संघ G का उपसमूह हो आवश्यक नहीं होता ।

1.9 शब्दावली

समूह (ग्रुप)	Group
उपसमूह (उपग्रुप)	Subgroup
द्विआधारी संक्रिया	Binary Operation
बीजीय पद्धति	Algebric Structure
तत्समक अवयव	Identity element
प्रतिलोम अवयव	Inverse element

सेमी ग्रुप	Semi Group
मोनोएड	Monoid
क्रमविनिमेय (आबेली) समूह	Commutative(Abelian) Group
समूह की कोटि	Order of a Group
निरसन नियम	cancellation laws
उत्क्रमण नियम	Reversal law
समूह सम्मिश्र	Complex of a Group
प्रेरित संक्रिया	Induced Composition
विषम उपसमूह	Improper Subgroup
उचित उपसमूह	Proper Subgroup
प्रसामान्यक	Normalizer
समूह का केन्द्र	Center of the Group

1.10 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. सत्य, समुच्चय P(X) में समुच्चयों का संघ $(\cup)$ तथा सर्वनिष्ट $(\cap)$ द्विआधारी संक्रियाऐं हैं क्योंकि यदि $A, B \in P(X)$ तो $A \cup B \in P(X)$ तथा $A \cap B \in P(X)$
2. असत्य, हम जानते हैं कि एक समतल में स्थित दो सदिशों का सदिश गुणनफल, इस समतल के लम्बवत् सदिश होता है अर्थात्

   $$v_1 \in V, v_2 \in V \Rightarrow v_1 \times v_2 \notin V$$

   इसी प्रकार दो सदिशों का अदिश गुणनफल, एक अदिश राशि होती है ।
3. सत्य
4. असत्य, यदि $\frac{i}{2}, \frac{3i}{2} \in S \Rightarrow \frac{i}{2}, \frac{3i}{2} = \frac{-3}{4} \notin S$ अतएव समुच्चय S में गुणन द्विआधारी संक्रिया नहीं है

स्वमूल्यांकन प्रश्न- 2

1. सत्य
2. असत्य, संक्रिया (+) इस समुच्चय में संवृत नहीं है
3. असत्य, इस समुच्चय में अवयव 1 के अतिरिक्त अन्य अवयवों के प्रतिलोम विद्यमान नहीं है
4. असत्य, यदि $2 \in G, 3 \in G$ लें तो $2 \times_6 3 = 0 \notin G$ अर्थात संक्रिया इस समुच्चय में संवृत नहीं है
5. सत्य (आगामी इकाईयों में हम अध्ययन करेंगे कि समूह जिसकी कोटि अभाज्य है सदैव आबेली होता है. अतएव समूह जिसकी कोटि पांच है भी सदैव आबेली होगा)
6. $(i).\ \langle \{1, -1\} \rangle$ $\quad (ii).\ (Z, +)$ $\quad$ (iii). देखें उदाहरण (10)

स्वमूल्यांकन प्रश्न- 3

1. सत्य ।
2. असत्य, दोनों समूहों में संक्रिया असमान है ।
3. असत्य, दोनों समूहों में संक्रिया असमान है ।

1.11 अभ्यास प्रश्न

1. प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय $G=\{1,2,3,4,5,6\}$ संक्रिया x_7 (मॉड्यूलों गुणा 7) के लिये परिमित के लिए परिमित क्रमविनिमेय समूह है ।
2. सिद्ध करो कि समुच्चय $\{3^n; n \in Z\}$ गुणन संक्रिया के लिये क्रमविनिमेय समूह है ।
3. सिद्ध कीजिए कि $G=\left[\begin{pmatrix} & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a,b \in R\right]$ आकार की सभी आव्यूहों का समुच्चय, आव्यूह योग संक्रिया के लिये समूह है
4. प्रदर्शित कीजिए कि सभी अशून्य सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय गुणन संक्रिया के लिये क्रमविनिमेय समूह है
5. सिद्ध कीजिए कि धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q^+ संक्रिया * के लिये क्रम विनिमय समूह है, जहाँ * निम्न प्रकार परिभाषित है
$$a*b=\frac{ab}{2}\forall a,b \in Q^+$$
6. सिद्ध कीजिए कि यदि एक समूह G में तीन अवयव हो तो यह क्रम विनिमेय होता है ।
7. यदि a,b किसी समूह G के कोई दो अवयव है, तो प्रदर्शित कीजिए कि $(ab)^2=a^2b^2$ होगा यदि और केवल यदि G क्रमविनिमेय हो ।
8. सिद्ध कीजिए कि 1 के अतिरिक्त सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय G संक्रिया, * के लिये एक क्रमविनिमेय समूह है जहां संक्रिया * निम्न प्रकार परिभाषित है
$$a*b=a+b-ab, \qquad \forall a,b \in G$$
9. यदि G एक क्रमविनिमेय समूह है तो सिद्ध कीजिए कि
$$H=\{x \in G \mid x^2=e\}, G \text{ का उपसमूह है}$$
10. यदि a किसी समूह G का कोई अवयव है तो सिद्ध करो कि
$$H=\{x \in G \mid xa^2=a^2x\}, G \text{ का एक उपसमूह है}$$
पुन: सिद्ध करो कि
$$K=\{x \in G \mid xa=ax\}; H \text{ का उपसमूह है}$$
11. यदि G एक समूह है तथा H, K इसके उपसमूह है तो सिद्ध कीजिए कि
$$(HK)^{-1}=K^{-1}H^{-1}$$

इकाई 2 : क्रमचय समूह, चक्रीय समूह (Permutation Group, Cyclic Group)

इकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य

2.1 प्रस्तावना

2.2 क्रमचय

- 2.2.1 क्रमचयो के n घात समुच्चय में कुल क्रमचयो की संख्या
- 2.2.2 क्रमचय गुणन
- 2.2.3 क्रमचयो से सम्बन्धित परिभाषायें

2.3 क्रमचयो का समूह

2.4 चक्रीय क्रमचय या चक्र

- 2.4.1 चक्र की कोटि
- 2.4.2 चक्र का प्रतिलोम
- 2.4.3 असंयुक्त चक्र
- 2.4.4 क्रमचय की कोटि
- 2.4.5 पक्षान्तरण
- 2.4.6 सम और विषम क्रमचय

2.5 सम क्रमचयो का समूह (एकान्तर समूह)

2.6 समूह के किसी अवयव की पूर्णांक घात

2.7 समूह के किसी अवयव की कोटि

2.8 समूह के अवयव की कोटि पर आधारित प्रमेय

2.9 चक्रीय उपसमूह

2.10 चक्रीय समूह

2.11 चक्रीय समूह से सम्बन्धित प्रमेय

2.12 सारांश

2.13 शब्दावली

2.14 स्वमूल्याकन प्रश्नों के उत्तर

2.15 अभ्यास प्रश्न

2.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप क्रमचय समूह तथा चक्रीय समूह की अवधारणा एवम् इनके साधारण गुणधर्मों के बारे में जान पायेगे

2.1 प्रस्तावना

इकाई 1 में हमने क्रमविनिमेय समूह, उपसमूह तथा इनके साधारण गुणधर्मो का अध्ययन किया। इस इकाई में हम विशेष प्रकार के अक्रमविनिमेय समूह का अध्ययन करेगे जिसके अवयव एक

समुच्चय में परिभाषित एकैकी आच्छादक फलन है जिन्हे उस समुच्चय के क्रमचय कहते हैं । क्रमचय समूह द्वारा ही कैले प्रमेय सत्यापित की जाती है, जिसका अध्ययन हम आगामी इकाई में करेगे, जिसकी उपयोगिता इसके कथन से सिद्ध होती है कि प्रत्येक समूह एक क्रमचय समूह के तुल्याकारी होता है अर्थात अर्मूत रूप में इनकी आधारभूत सरंचना सर्वसम है ।

इस इकाई में हम समूह के अवयव की कोटि तथा एक विशेष प्रकार के समूह का भी अध्ययन करेगे जिसके सभी अवयव एक ही अवयव की पूर्णांक घातो के रूप में लिखे जा सकते है, जिसको चक्रीय समूह कहा जाता है ।

2.2 क्रमचय

माना कि S एक परिमित समुच्चय है तो समुच्चय S से S पर परिभाषित प्रत्येक एकैकी आच्छादक फलन को क्रमचय कहते है, अर्थात S→S एक क्रमचय है यदि यह एकैकी तथा आच्छादक है । यहाँ परिमित समुच्चय S में अवयवो की संख्या को क्रमचय की घात या अशांक कहते है ।

यदि $S=(a_1,a_2.....a_n)$,n अवयवो का परिमित समुच्चय है तब S के क्रमचय f को सुगमता के लिये दो पंक्तियो के निम्न संकेत से व्यक्त किया जाता है ।

$$f=\begin{pmatrix} a_1 & a_2.....a_n \\ f(a_1) & f(a_2).....f(a_n) \end{pmatrix}$$

इस संकेत में प्रत्येक अवयव के नीचे द्वितीय पंक्ति में उसका f-प्रतिबिम्ब लिखा है । चूंकि F, S एकैकी आच्छादक फलन है अत: द्वितीय पंक्ति में भी सभी n अवयव S के ही हैं, जिन्हे पहली पंक्ति के समान या किसी अन्य क्रम मे लिखा गया है

उदाहरणार्थ, यदि किसी समुच्चय S = {1,2,3,4,5} में f निम्न प्रकार परिभाषित फलन है

$f(1)=2, f(2)=3, f(3)=4, f(4)=5, f(5)=1$ तो

$$f=\begin{pmatrix} 12345 \\ 23451 \end{pmatrix}$$

यहाँ क्रमचय के उपरोक्त दो पंक्तियो के संकेत में स्तम्भो का क्रम बदलने पर नहीं बदलता, अर्थात

$$\begin{pmatrix} 12345 \\ 23451 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21345 \\ 32451 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 51234 \\ 12345 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 31245 \\ 42351 \end{pmatrix}, \text{आदि}$$

उदाहरण (1) समुच्चय S = {1, 2} से इसी मे परिभाषित किये जाने वाले फलन निम्न है

$$f_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, f_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, f_4=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

तो f_1 और f_2, S के क्रमचय है क्योकि ये S से S मे एकैकी आच्छादक फलन है, f_3 और f_4,S के क्रमचय नहीं है ।

उदाहरण 2 : यदि $S = \{1,\omega,\omega^2\}$ तथा

$f:S\to S, f(x) = \omega x \forall x\in S$,. तो

$$f = \begin{pmatrix} 1\omega\omega^2 \\ \omega\omega^2 1 \end{pmatrix} \qquad \left[\because \omega^3 = 1\right]$$

स्पष्टत: f,S का क्रमचय है

उदाहरण 3 : यदि S = (1,2,3,4) तथा

f:S→S, f(x) = x $\times_5$ 3, ∀x∈S, तो

$$f = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3142 \end{pmatrix}$$

अतएव f, S का एक क्रमचय है

उदाहरण 4 : यदि $S = (a_1, a_2, ...a_n)$ तथा

f:S→S, f(x) = x, ∀x∈S ,. तो

$$f = \begin{pmatrix} a_1, a_2 .... a_n \\ a_1, a_2 .... a_n \end{pmatrix}$$

स्पष्टतया f, S का एक क्रमचय है जो कि तत्समक क्रमचय है जिसका अध्ययन हम आगे करेगे।

उदाहरण 5: यदि हैं : $f : Z \to Z, f(x) = x + m, \ \forall x \in Z$ तथा m एक नियत पूर्णाक है तो हम देखते है कि Z के किन्ही दो अवयव x_1, x_2 के लिये

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 + m \neq x_2 + m \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$\therefore f$ एकैकी है

पुन: सहप्रान्त के किसी अवयव $x \in Z$ के लिये, f के प्रान्त Z में अवयव x - m इस प्रकार विद्यमान है कि

$$f(x - m) = x$$

$\therefore f$ आच्छादक है

अतएव f,Z में एकैकी आच्छादक फलन अर्थात् क्रमचय है ।

2.2.1 क्रमचयो के n घात समुच्चय में कुल क्रमचयो की संख्या

यदि परिमित समुच्चय S में अवयवो की संख्या n है तो S के अवयवो को $\underline{|n}$ विभिन्न क्रमो में लिखा जा सकता है अतएव हमें $\underline{|n}$ विभिन्न क्रमचय प्राप्त होगे । यहाँ प्रत्येक क्रमचय n घात या अशांक क्रमचय कहलाता है, उपरोक्त सभी क्रमचयो के समुच्चय को n घात सममित समुच्चय कहते है तथा इसे P_n द्वारा प्रदर्शित करते है अत: P_n = {f : f एक n घात का क्रमचय है}

उदाहणार्थ, समुच्चय S = {x,y,z} के 3 = 6 क्रमचय होगे, जो कि निम्न है

$$f_1 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & z & y \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & y & x \end{pmatrix}$$

अत: $P_3 = \{ f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \}$

2.2.2 क्रमचय गुणन

यदि समुच्चय S में n भिन्न-भिन्न अवयव है तो समुच्चय S के क्रमचयो की संख्या $\underline{|n}$ होगी । इसमें से यदि f तथा g दो क्रमचय है तो क्रमचय की परिभाषानुसार f तथा g दोनो समुच्चय S के स्वयं पर एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है, इसलिये सयुंक्त फलन gof तथा fog समुच्चय S पर परिभाषित होगें जो कि स्वंय समुच्चय S पर एकैकी तथा आच्छादक प्रतिचित्रण है, अत: किसी $x \in S$ के लिये

$$(gof)(x) = g\left[f(x)\right]$$

तथा $$(fog)(x) = f\left[g(x)\right]$$

यहाँ gof तथा fog क्रमश: g तथा f और f तथा g का क्रमचय गुणन कहलाते है । हम gof को gf तथा fog को fg से निरूपित करते है, अत: gf तथा fg,n अशांक के क्रमचय है

उदाहणार्थ, माना S = {1,2,3,4},

$$f = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,4\,3\,1 \end{pmatrix} \text{ तथा } g = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}$$

दो क्रमचय 4 घात के है तो स्पष्ट है कि

$$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 3, f(4) = 1$$

तथा $$g(1) = 2, g(2) = 1, g(3) = 4, g(4) = 3$$

अत:

$$fg(1) = fog(1) = f\left[g(1)\right] = f(2) = 4$$
$$fg(2) = fog(2) = f\left[g(2)\right] = f(1) = 2$$
$$fg(3) = fog(3) = f\left[g(3)\right] = f(4) = 1$$
$$fg(4) = fog(4) = f\left[g(4)\right] = f(3) = 3$$

$$\therefore \text{fg} = fog = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,2\,1\,3 \end{pmatrix}$$

पुनः

$$gf(1) = gof(1) = g\left[f(1)\right] = g(2) = 1$$
$$gf(2) = gof(2) = g\left[f(2)\right] = g(4) = 3$$
$$gf(3) = gof(3) = g\left[f(3)\right] = g(3) = 4$$
$$gf(4) = gof(4) = g\left[f(4)\right] = g(1) = 2$$

$$\therefore \text{gf} = gof = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,3\,4\,2 \end{pmatrix}$$

उपरोक्त क्रमचय गुणनो को हम सरलता पूर्वक निम्न प्रकार भी कर सकते है : क्रमचय f में स्तम्भो का क्रम इस प्रकार बदलते है कि f की प्रथम पंक्ति के अवयव उसी क्रम में लिखे हो, जिस क्रम में g की दूसरी पंक्ति के अवयव है । इस स्थिति में fg प्रथम तथा द्वितिय पंक्ति के अवयव क्रमश: g की प्रथम तथा f की द्वितीय पंक्ति के अवयव होगे । इस प्रकार

$$fg = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,4\,3\,1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}$$

$$= \rightarrow\begin{pmatrix} 2\,1\,4\,3 \\ 4\,2\,1\,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}^{\leftarrow}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,2\,1\,3 \end{pmatrix}$$

तथा

$$gf = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,4\,3\,1 \end{pmatrix}$$

$$= \rightarrow\begin{pmatrix} 2\,4\,3\,1 \\ 1\,3\,4\,2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,4\,3\,1 \end{pmatrix}^{\leftarrow}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,3\,4\,2 \end{pmatrix}$$

अतएव स्पष्ट है कि $fg \neq gf$

अर्थात् क्रमचय गुणन क्रमविनिमेय नहीं है। हम आगे अध्ययन में देखेगे कि व्यापक रूप में क्रमचय गुणन अक्रमविनिमेय होता है ।

2.2.3 क्रमचयो से सम्बन्धित परिभाषाये

1. **क्रमचयो की तुल्यता :** यदि n अवयवो के परिमित समुच्चय S पर परिभाषित f तथा g कोई दो क्रमचय है तो ये क्रमचय तुल्य होगे यदि इनके प्रतिचित्रण समान हो तो अर्थात्

$$f(x) = g(x), \forall x \in S$$

उदाहणार्थ,

यदि $f = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,4\,1 \end{pmatrix}$ तथा $g = \begin{pmatrix} 3\,2\,1\,4 \\ 4\,3\,2\,1 \end{pmatrix}$ दो क्रमचय 4 घात के है तो f = g, क्योकि दोनो क्रमचयो मे अवयव 1 का प्रतिबिम्ब 2, 2 का 3, 3 का 4 तथा 4 का प्रतिबिम्ब व है अर्थात्

$$f(1) = g(1), f(2) = g(2), f(3) = g(3), \text{ तथा } f(4) = g(4)$$

2. तत्समक क्रमचय **:** यदि परिमित समुच्चय S = (a_1, a_2,....a_n) का एक क्रमचय f इस प्रकार हो कि प्रत्येक अवयव का प्रतिचित्रण स्वयं पर हो तो यह तत्समक क्रमचय कहलाता है,

अर्थात $f(a_i) = a_i, \forall a_i \in S$ या $f = \begin{pmatrix} a_1 a_2 .... a_n \\ a_1 a_2 .... a_n \end{pmatrix}$, समुच्चय S पर परिभाषित एक n घात तत्समक क्रमचय है । इसे प्राय: I द्वारा निरूपित करते है ।

3. **प्रतिलोम क्रमचय :** यदि परिमित समुच्चय S के दो क्रमचयो का गुणनफल तत्समक क्रमचय हो तो ऐसे क्रमचयो को एक दूसरे का प्रतिलोम कहते है

उदाहणार्थ, क्रमचय का $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}$ प्रतिलोम $\begin{pmatrix} 2\,3\,1 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}$ अर्थात $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}$ है

क्योकि $\begin{pmatrix}1\,2\,3\\2\,3\,1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\,2\,3\\3\,1\,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{pmatrix}$

टिप्पणी : किसी n घात क्रमचय $f=\begin{pmatrix}a_1a_2....a_n\\b_1b_2....b_n\end{pmatrix}$ का प्रतिलोम क्रमचय $f^{-1}=\begin{pmatrix}b_1b_2....b_n\\a_1a_2....a_n\end{pmatrix}$ होगा, जिसे क्रमचय f में पंक्तियो को आपस में बदलकर प्राप्त किया जा सकता है ।

2.3 क्रमचयो का समूह

हम जानते है कि यदि परिमित समुच्चय S में n अवयव है तो S के सभी के समुच्चय को सममित समुच्चय P_n कहते है तथा $o(P)_n = \lfloor n$, यहाँ सममित समुच्चय P_n समूह की सभी अवधारणाओ को क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये सन्तुष्ट करता है जिसे हम निम्न प्रमेय में सिद्ध करेगे ।

प्रमेय : यदि n संकेतो के $\lfloor n$ क्रमचयो का समुच्चय P_n है तो यह क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये एक परिमित समूह है ।

उपपत्ति : यदि परिमित समुच्चय $S=\{c_1,c_2,....c_n\}$ में n अवयव है तो S पर परिभाषित सममित समुच्चय P_n में कुल क्रमचयो की संख्या $\lfloor n$ होगी, इनमें से यदि

$f=\begin{pmatrix}c_1c_2....c_n\\d_1d_2....d_n\end{pmatrix}$ तथा $g=\begin{pmatrix}b_1b_2....b_n\\c_1c_2....c_n\end{pmatrix}$ दो n घात क्रमचय है तो क्रमचय की परिभाषा से

$fg=\begin{pmatrix}b_1b_2....b_n\\d_1d_2....d_n\end{pmatrix}$

स्पष्टतया : fg भी एक n घात क्रमचय है चूंकि $b_1,b_2,....b_n$ तथा $d_1,d_2,....d_n$ समुच्चय S के n समान अवयवो $c_1,c_2,....c_n$ का ही एक अन्य क्रम है

$$\therefore fg\in P_n,\forall f,g\in P_n$$

अर्थात् समुच्चय P_n क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये संवृत हैं । अब हम P_n में समूह अभिग्रहितो का परीक्षण करेगे

(i) **साहचर्यता :** यदि $f=\begin{pmatrix}c_1c_2....c_n\\d_1d_2....d_n\end{pmatrix}$, $g=\begin{pmatrix}b_1b_2....b_n\\c_1c_2....c_n\end{pmatrix}$ तथा $h=\begin{pmatrix}a_1a_2....a_n\\b_1b_2....b_n\end{pmatrix}$ तीन n घात क्रमचय है, जहाँ $(a_1,a_2,....a_n)=(b_1,b_2,....b_n)=(c_1,c_2,....c_n)=(d_1,d_2,....d_n)$ अर्थात् सभी समुच्चय S के ही अवयव विभिन्न क्रमों में है तो $(fg)=\begin{pmatrix}b_1b_2....b_n\\d_1d_2....d_n\end{pmatrix}$

$$\therefore (fg)h=\begin{pmatrix}b_1b_2....b_n\\d_1d_2....d_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1a_2....a_n\\b_1b_2....b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1a_2....a_n\\d_1d_2....d_n\end{pmatrix},$$

पुनः $(gh)=\begin{pmatrix}a_1a_2....a_n\\c_1c_2....c_n\end{pmatrix}$

$$\therefore f(gh) = \begin{pmatrix} c_1c_2....c_n \\ d_1d_2....d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1a_2....a_n \\ c_1c_2....c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2....a_n \\ d_1d_2....d_n \end{pmatrix}$$

अतः (fg)h = f(gh)

इसलिये क्रमचय गुणन सहचारी संक्रिया है-

(ii) **तत्समक का अस्तित्व :** यदि

$I = \begin{pmatrix} c_1c_2....c_n \\ c_1c_2....c_n \end{pmatrix}$ या $\begin{pmatrix} d_1d_2....d_n \\ d_1d_2....d_n \end{pmatrix}$,n घात क्रमचय है तो $I \in P_n$

यदि $f = \begin{pmatrix} c_1c_2....c_n \\ d_1d_2....d_n \end{pmatrix}$ समुच्चय P_n का कोई अवयव है तो

$$fI = \begin{pmatrix} c_1c_2....c_n \\ d_1d_2....d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1c_2....c_n \\ c_1c_2....c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1c_2....c_n \\ d_1d_2....d_n \end{pmatrix} = f$$

तथा $If = \begin{pmatrix} d_1d_2....c_n \\ d_1d_2....d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1c_2....c_n \\ d_1d_2....d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1c_2....c_n \\ d_1d_2....d_n \end{pmatrix} = f$

$\therefore$तत्समक क्रमचय I, समुच्चय P_n में क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये तत्समक अवयव है ।

(iii) प्रतिलोम का अस्तित्व : यदि $f = \begin{pmatrix} c_1c_2....c_n \\ d_1d_2....d_n \end{pmatrix}$,S का एक क्रमचय है तो f, एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण स्वयं S पर है, तब

$f^{-1} = \begin{pmatrix} d_1d_2....d_n \\ c_1c_2....c_n \end{pmatrix}$ भी एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण स्वयं S पर है

अतः $f^{-1} \in P_n$, जो कि f का प्रतिलोम है क्योकि

$ff^{-1} = \begin{pmatrix} c_1c_2....c_n \\ d_1d_2....d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1d_2....d_n \\ c_1c_2....c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1d_2....d_n \\ d_1d_2....d_n \end{pmatrix} = I$, इसी प्रकार

$$f - f^{-1} = \begin{pmatrix} d_1d_2....d_n \\ c_1c_2....c_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1c_2....c_n \\ d_1d_2....d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1d_2....d_n \\ d_1d_2....d_n \end{pmatrix} = I$$

$$\therefore ff^{-1} = I = f^{-1}f$$

अत: P_n में प्रत्येक क्रमचय f का प्रतिलोम क्रमचय f^{-1} विद्यमान है । उपरोक्त विवेचन में सिद्ध होता है कि P_n एक परिमित समूह है जिसका ग्रुपांक 0 (P_n) = $\underline{|n}$ है । यह क्रमचयो का समूह या सममित समूह कहलाता है।

टिप्पणी 1: यदि $n = 1 \Rightarrow o(P_1) = \underline{|1} = 1,$ अब हम जानते है कि प्रत्येक एक कोटि का समूह क्रमविनिमेय होता है अत: (P_1,.) क्रमविनिमेय समूह है, यदि $n = 2 \Rightarrow o(P_2) = \underline{|2} = 2,$, पुन: प्रत्येक दो कोटि का समूह भी क्रमविनिमेय होता है अत: (P_2 ,.) क्रमविनिमेय समूह है

अब हम सिद्ध करेगे कि (P_n ,.) अक्रमविनिमेय समूह है यदि n > 2, इसके लिये माना कि

$f = \begin{pmatrix} 1\,2\,3....n\text{-}1n \\ 2\,1\,3....n\text{-}1n \end{pmatrix}$ तथा $g = \begin{pmatrix} 1\,2\,3....n\text{ - }1n \\ 2\,3\,4....n\ 1 \end{pmatrix}$, दो n घात क्रमचय है तो

$$fg = \begin{pmatrix} 1\,2\,3....n\text{-}1n \\ 21\,3....n\text{-}1n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3....n\text{-}1n \\ 2\,3\,4....n\ \ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3....n\text{-}1n \\ 1\,3\,4....n\ \ \ 2 \end{pmatrix}$$

तथा $gf = \begin{pmatrix} 1\,2\,3....n\text{-}1n \\ 23\,4....\,n\ \ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\,2\,3....n\text{-}1n \\ 2\,1\,3....n\text{-}1n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3....n\text{-}1n \\ 3\,2\,4....n\ \ 1 \end{pmatrix}$

स्पष्टतया: $fg \neq gf$, , अतएव (P_n ,.) अक्रमविनिमेय समूह है यदि n > 2

टिप्पणी 2 : यदि S प्रथम n प्राकृत संख्याओ का समुच्चय अर्थात् S = (1,2,3,....n) है तो S के क्रमचय समूह को n अशांक सममित समूह कहते हैं जिसे S_n द्वारा व्यक्त किया जाता है इसे P_n द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है इस प्रकार दो व तीन अशांक सममित समूह निम्न है

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

अब हम निम्न उदाहरण द्वारा प्रदर्शित करेगे कि S_3, क्रमचय गुणन संक्रिया के लिए एक परिमित अक्रमविनिमेय समूह है ।

उदाहरण : प्रदर्शित कीजिए की तीन अशांक सममित समूह S_3, क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये एक परिमित अक्रमविनिमेय समूह है ।

हल : यदि S = {1,2,3} तो $o(S_3) = \underline{|3} = 6$ होगा एवम् S_3, के अवयव निम्न होंगे

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\therefore S_3 = \{ f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \}$, अब S_3 में क्रमचय गुणन के लिये निम्न संक्रिया सारणी प्राप्त होगी

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_6	f_4	f_5
f_3	f_3	f_1	f_2	f_5	f_6	f_4
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

यहाँ सारणी का अवलोकन करने पर निम्न तथ्य स्पष्ट है :-

(i) उपरोक्त सारणी में सभी अवयव S_3 के सदस्य है अत: S_3 में क्रमचय गुणन द्विचर संक्रिया है

(ii) क्रमचय गुणन एक सहचारी संक्रिया है अत: S_3 में भी यह संक्रिया सहचारी होगी

(iii) सारणी से स्पष्ट है कि तत्समक क्रमचय f_1, संक्रिया का तत्समक अवयव है

(iv) $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ के क्रमश: $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ प्रतिलोम क्रमचय है

(v) सारणी मुख्य विकर्ण के सापेक्ष सममित नहीं है, अत: S_3 में क्रमचय गुणन संक्रिया अक्रमविनिमेय है ।

फलत: S_3 ,6 कोटि का परिमित अक्रमविनिमेय समूह है ।

टिप्पणी 1 : समूह जिसकी कोटि 5 या इससे कम है सदैव क्रमविनिमेय होता है अतएव सममित समूह S_3 प्रथम अक्रमविनिमेय समूह कहलाता है जिसकी कोटि 6 है । सममित समूह S_3 तथा इसके अवयवो का प्रयोग अक्सर विभिन्न तथ्य व प्रमेयो को समझने के लिये किया जाता है ।

टिप्पणी 2 : S_3 की संक्रिया सारणी से स्पष्ट है कि S_3 का उपसमुच्चय $\{f_1, f_2, f_3\}$ स्वयं भी समूह के सभी प्रतिबन्धो को सन्तुष्ट करता है, अत: यह S_3 का उपसमूह है जो कि क्रमविनिमेय भी है आगे हम अध्ययन करेगे कि यह समक्रमचयो का समूह A_3 है जिसका ग्रुपांक 3 है

2.4 चक्रीय क्रमचय या चक्र

यदि n अवयवो के परिमित समुच्चय $S=(x_1, x_2, ..., x_n)$ का कोई क्रमचय f इस प्रकार है कि

$$f(x_1)=x_2, f(x_2)=x_3, ..., f(x_m)=x_1; \text{ तथा } f(x_{m+1})=x_{m+1}, ..., f(x_n)=x_n$$

अर्थात्
$$f=\begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 .....x_m & x_{m+1} .....x_n \\ x_2 x_3 x_4 .....x_1 & x_{m+1} .....x_n \end{pmatrix}$$

तो f,m लम्बाई का चक्रीय क्रमचय कहलाता है । अन्य शब्दो में समुच्चय S का कोई क्रमचय f चक्रीय कहलाता है यदि S का एक परिमित उपसमुच्चय $(x_1, x_2, ..., x_m)$ इस प्रकार हो कि

$$f(x_1)=x_2, f(x_2)=x_3, ..., f(x_m)=x_1$$

तथा $f(x)=x$ यदि $x \in S$ परन्तु $x \notin (x_1, x_2, ...x_m)$

तब f,m लम्बाई का चक्रीय क्रमचय है । इस चक्रीय क्रमचय f को एक पंक्ति के संकेत द्वारा निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है

$$f=(x_1, x_2, x_3 .....x_m)$$

जिसमें प्रत्येक अवयव का f- प्रतिबिम्ब उसके आगे वाला अवयव एवं अन्तिम अवयव का f- प्रतिबिम्ब प्रथम अवयव है तथा शेष n - m. अवयवो के प्रतिबिम्ब वे अवयव स्वंय ही है ।

उदाहणार्थ :

(i) $f=(2435) \in S_6$, 4 लम्बाई का चक है

जिसमें $f=(2)=4, f(4)=3, f(3)=5, f(5)=2$ तथा $f(1)=1, f(6)=6,$

अतएव स्पष्ट है कि

$$f=\begin{pmatrix} 243516 \\ 435216 \end{pmatrix}$$

(ii) $g=\begin{pmatrix} 12345 \\ 42531 \end{pmatrix} \in S,.$ एक चक्रीय क्रमचय है क्योंकि इसे एक पंक्ति संकेत में निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$g = (1435)$$

(ii) $h = \begin{pmatrix} 123456 \\ 234165 \end{pmatrix} \in S_6$, एक चक्रीय क्रमचय नही है

क्योंकि अवयव 1, 2, 3, 4 को एक पंक्ति संकेत (1 2 3 4) लिख सकतें है परन्तु शेष अवयव 5 तथा 6 के f - प्रतिबिम्ब ये अवयव स्वयं नही है | यह असंयुक्त चक्रीय क्रमचय होगा, जिसका अध्ययन हम आगे करेगे

टिप्पणी 1 : m लम्बाई का चक्र m - चक्र भी कहलाता है |

टिप्पणी 2 : तत्समक क्रमचय एक लम्बाई का चक्र होता है इसको समुच्चय के किसी भी अवयव से व्यक्त किया जा सकता है उदाहरणार्थ

$$(1)(2435)(6) = (2435)$$

टिप्पणी 3 : चक्रीय क्रमचय के अवयवो का चक्रीय क्रम रखते हुए उसे कई प्रकार से लिख सकते है जैसे

$$(2435) = (4352) = (3524) = (5243)$$

टिप्पणी 4 : दो क्रमचयो का चक्रीय गुणनफल संबन्धित क्रमचय लिखकर गुणन विधि से ज्ञात किया जा सकता है जैसे

$$(1234)(1243) = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2341 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1234 \\ 2413 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1234 \\ 3124 \end{pmatrix}$$

$$= (132)(4) = (132)$$

2.4.1 चक्र की कोटि

यदि f कोई चक्रीय क्रमचय है तथा m एक धनात्मक पूर्णांक संख्या इस प्रकार है कि $f^m = I$, तो m को चक्रीय क्रमचय f कि कोटि कहते है, उदाहरणार्थ

यदि

$$f = (1435) \in S_6$$

$$f = \begin{pmatrix} 143526 \\ 435126 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 143526 \\ 351426 \end{pmatrix}$$

$$f^3 = \begin{pmatrix} 143526 \\ 514326 \end{pmatrix}$$

$$f^4 = \begin{pmatrix} 143526 \\ 143526 \end{pmatrix} = I$$

अतएव चक्रीय क्रमचय f की कोटि 4 है, इससे स्पष्ट है कि f एक m लंबाई का चक्रीय क्रमचय है तो इसकी कोटि भी m होती है जिसे हम निम्न प्रमेय से सिद्ध करेगे।

प्रमेय : m लंबाई के चक्र की कोटि m होती है।

उपपत्ति : माना कि $f=\left(x_1x_2.....x_m\right)$ एक m लम्बाई का चक्र है। इसलिए

$f\left(x_1\right)=x_2, f\left(x_2\right)=x_3,....., f\left(x_m\right)=x_1$

अब

$$f\left(x_1\right)=x_2$$
$$\therefore f^2\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=x_3$$
$$f^3\left(x_1\right)=f\left(x_3\right)=x_4$$
....

....
$$f^{m-1}\left(x_1\right)=f\left(x_{m-1}\right)=x_m$$
$$f^m\left(x_1\right)=f\left(x_m\right)=x_1$$

इसी प्रकार $f^m\left(x_2\right)=x_2, f^m\left(x_3\right)=x_3,....., f^m\left(x_m\right)=x_m$

अतः $f^m\left(x_i\right)=x_i, \forall i=1,2,.....,m$ .....(1)

यदि $x\notin\left\{x_1,x_2,.....,x_m\right\}$ परन्तु x , f के प्रान्त का सदस्य है

तो $f\left(x\right)=x\Rightarrow f^m\left(x\right)=x$ .....(2)

समीकरण (1) व (2) से

$f^m\left(x\right)=x, \forall x\in f$ का प्रांत

इस प्रकार f की कोटि m होगी जो चक्र की लंबाई के बराबर है।

उपप्रमेय: यदि $f=\left(x_1x_2.....x_m\right)$ तो इसका प्रतिलोम चक्रीय क्रमचय $f^{-1}=\left(x_mx_{m-1}.....x_2x_1\right)$ होगा।

उपपत्ति : यदि $f=\left(x_1x_2.....x_m\right)$ एक m लंबाई का चक्र है तो उपरोक्त प्रमेय से

$$f^{m-1}=\left(x_1x_mx_{m-1}.....x_3x_2\right)$$

इसके चक्रीय क्रम को रखते हुए निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है ।

$$f^{m-1}=\left(x_mx_{m-1}.....x_3x_2x_1\right)$$

परंतु $f^{m-1}.f=I$ $\left(\because f,m\right.$ लम्बाई का चक्र है $\Rightarrow f^m=I\left.\right)$

अतएव f^{m-1}, चक्र f का प्रतिलोम चक्र होगा

$$\therefore f^{-1}=f^{m-1}=\left(x_mx_{m-1}.....x_3x_2x_1\right)$$

उदाहणार्थ, f = (1 4 3 5) $\in S_6$ तो

$f^3 = (1\ 5\ 3\ 4)$

इसके चक्रीय क्रम को रखते हुए निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है

$f^3 = (5\ 3\ 4\ 1)$

अब f, 4 लम्बाई का चक्र है, $\therefore f^4 = I$

$\Rightarrow f^3 f = I$

$\Rightarrow f$ का प्रतिलोम चक्र f^3 है

$\therefore f^{-1} = f^3 = (5341)$

अतएव किसी चक्र के प्रतिलोम को निम्न प्रकार परिभाषित कर सकते है

2.4.2 चक्र का प्रतिलोम

परिभाषा : किसी चक्र f के अवयवो को उल्टे क्रम में लिखने पर प्राप्त चक्र, चक्र कहलाता है जिसे f^{-1} से व्यक्त करते है ।

उदाहणार्थ यदि f = (1 2 3 4 5) तो f^{-1}= (54321) = (15432)

2.4.3 असंयुक्त चक्र

परिभाषा : दो चक्रीय क्रमचय असंयुक्त कहलाते है यदि इनके एक पंक्ति संकेत में भी अवयव उभयनिष्ट नही हो अर्थात् दो समान अंशाक के चक्र f तथा g असंयुक्त होगे यदि और केवल

$$f(x) \neq x \Rightarrow g(x) = x$$

तथा $$g(x) \neq x \Rightarrow f(x) = x$$

उदाहणार्थ, चक्र (1 2 5) तथा (3 6 8 9) असंयुक्त है जबकि चक्र (1 3 4) तथा (3 4 5 6) असंयुक्त नही है ।

प्रमेय 1 : दो असंयुक्त चक्रो का गुणनफल क्रमविनिमेय होता है ।

उपपत्ति : माना कि f तथा g दो चक्र है, जिनके एक पंक्ति में कोई भी अवयव नहीं है । अतएव जो अवयव f द्वारा गतिमान है वह अवयव g द्वारा स्थिर छोड़ दिये जाते है, इसी प्रकार अवयव g द्वारा गतिमान है वह अवयव f द्वारा स्थिर छोड़ दिये जाते हैं ।

$$\therefore fg = gf$$

अर्थात् दो असंयुक्त चक्रो का गुणनफल क्रमविनिमेय होता है ।

उदाहणार्थ :

(ii) $f = (125) \in S_6$ तथा $g = (125) \in S_6$ तो

$$fg = (125)(346)$$

$$= \begin{pmatrix} 125346 \\ 251346 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 346125 \\ 463125 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 123456 \\ 254613 \end{pmatrix}$$

तथा

gf=(346) (125)

$$=\begin{pmatrix}346125\\463125\end{pmatrix}\begin{pmatrix}125346\\251346\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}123456\\254613\end{pmatrix}$$

स्पष्टत: fg = gf

(ii) यदि f = (1 2) $\in S_3$ तथा g = (1 3) $\in S_3$ तो

fg = (1 2) (1 3)

$$=\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}\begin{pmatrix}132\\312\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}132\\312\end{pmatrix}$$

तथा gf = (1 3) (1 2)

$$=\begin{pmatrix}132\\312\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}$$

स्पष्टत: fg ≠ gf

प्रमेय 2 : प्रत्येक क्रमचय को असंयुक्त चक्रो के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उपपत्ति : माना कि n अवयवो के परिमित समुच्चय S का f एक n अंशाक क्रमचय है । सर्वप्रथम हम जो अवयव इस क्रमचय में निश्चर है, उन्हे एक लम्बाई के चक्र में व्यक्त करते है, तदुपरान्त शेष अवयवों में से एक अवयव a को लेकर एक पंक्ति a,f^1(a),f^2(a),.....,प्राप्त करेगे । इस पंक्ति में S परिमित समुच्चय होने के कारण कुछ चरणो के पश्चात् हमे एक ऐसा अवयव प्राप्त होगा जिसका f- प्रतिबिम्ब a है । इस प्रकार प्राप्त यह पंक्ति एक चक्र को व्यक्त करेगी । यदि इस चक्र में S के सभी अवयव नहीं आ पाये है तो इस चक्र में अनुपस्थित S के अवयवो में से कोई एक अवयव लेकर पुन: इसी प्रक्रिया को दोहराते हुए दूसरा चक्र प्राप्त करेगे । इन दोनो चक्रो में कोई भी अवयव उभयनिष्ट नही होगा, इसलिये ये चक्र असंयुक्त होगे । इस प्रक्रिया को लगातार दोहराने पर हमे निश्चित संख्या में असंयुक्त चक्र प्राप्त होगे, जहाँ S का प्रत्येक अवयव किसी न किसी एक चक्र में विद्यमान होगा।

अतः f को असंयुक्त चक्रो के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है ।

उदाहणार्थ,

(i) यदि $f=\begin{pmatrix}12345678\\23465187\end{pmatrix}\in S_8$, तो इसे असंयुक्त चक्रो के गुणनफल के रूप मे लिखिए

हल : यहाँ

$$f = (5)(12346)(78)$$
$$= (12346)(78)$$

टिप्पणी : असंयुक्त चक्रो के गुणनफल में यदि एक लम्बाई का कोई चक्र है तो उसे नही लिखा जाता है ।

(ii) यदि $f = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 134526897 \end{pmatrix} \in S_9$ तो इसे असंयुक्त चक्रो के गुणनफल के रूप में लिखिये तथा f^{-1} भी ज्ञात कीजिये ।

हल: यहाँ $f = (1)(6)(2345)(789)$

$$= (2345)(789)$$
$$\therefore f^{-1} = \left[(2345)(789)\right]^{-1}$$
$$= (789)^{-1}(2345)^{-1} \qquad \left(\therefore \text{यदि g,h दो चक्र है तो } (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}\right)$$
$$= (987)(5432)$$

इस प्रकार हम देखते है कि किसी क्रमचय को असंयुक्त चक्रो के गुणनफल के रूप मे व्यक्त कर f^{-1} आसानी से ज्ञात किया जा सकता है ।

2.4.4 क्रमचय की कोटि

यदि f, कोई परिमित समुच्चय S का क्रमचय है तो वह न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक संख्या m जिसके लिए f^m = I, हो तो m को क्रमचय f की कोटि कहते हैं ।

हम जानते हैं कि क्रमचय f को असंयुक्त चक्रो के गुणनफल के रूप में व्यक्त जा सकता है

$\therefore f = f_1 f_2 ..... f_k$, जहाँ f_i तथा f_j असंयुक्त चक्र है यदि $i \neq j$

चूंकि असंयुक्त चक्रो का गुणनफल क्रमविनिमेय होता है

$$\therefore f^m = f_1^m f_2^m ..... f_k^m$$

अतः

$$f^m = I \Rightarrow f_i^m = I, \forall i = 1, 2 ..... k$$
$$\Rightarrow o(f_i) m, \forall i = 1, 2 ..... k$$
$$\Rightarrow o(f_1), o(f_2) ..... o(f_k); \text{ m के भाजक है}$$
$$\Rightarrow o(f_1), o(f_2) ..... o(f_k)$$

का लघुतम समापवर्तक (ल.स.प.) भी m का भाजक है

इस प्रकार यदि f की कोटि m है तो m न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक संख्या इस प्रकार है कि f^m =1, जहाँ m असंयुक्त चक्रो की कोटि का ल.स.प. है।

$\because o(f) = f$ के असंयुक्त चक्रो की कोटि का ल.स.प

लेकिन किसी चक्र की कोटि उस चक्र की लम्बाई के बराबर भी होती है अत: $o(f) = f$ के असंयुक्त चक्रो की लम्बाई का ल.स.प.

उदाहणार्थ :

(i) यदि $f = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 254631978 \end{pmatrix} \in S_9$ तो को असंयुक्त चक्रो के गुणनफल के रूप में लिखिये तथा f की कोटि भी ज्ञात कीजिये ।

हल : $$f = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 254631978 \end{pmatrix}$$
$$= (125346)(798)$$

जो कि असंयुक्त चक्रो के गुणनफल के रूप में है ।

अब f की कोटि के लिये

$o(f) = o(125346)$ तथा $o(798)$ का ल.स.प.

= 6 तथा 3 का ल.स.प.

= 6

(ii) यदि $f = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 46251387 \end{pmatrix} \in S_8$ तो f को असंयुक्त चक्रो के गुणनफल के रूप में लिखिये तथा f की कोटि भी ज्ञात कीजिए |

हल : $$f = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 46251387 \end{pmatrix}$$
$$= (145)(263)(78)$$

जो कि असंयुक्त चक्रो के गुणनफल के रूप में है , अब f की कोटि के लिये

$o(f) = o(145), o(263)$ तथा $o(78)$ का ल. स. प.

= 3, 3 तथा 2 का ल. स. प.

= 6

2.4.5 पक्षान्तरण

यदि किसी चक्रीय क्रमचय की लम्बाई 2 है तो वह पक्षान्तरण कहलाता है, अन्य शब्दो मे, पक्षान्तरण वह चक्रीय क्रमचय है जिसमें केवल दो अवयव एक दूसरे पर प्रतिचित्रित है तथा शेष अवयव क्रमचय में निश्चर है ।

उदाहणार्थ :

(i) चक्रीय क्रमचय $f = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2134 \end{pmatrix} = (12) \in S_4$ एक पक्षान्तरण है

(ii) चक्रीय क्रमचय $g = \begin{pmatrix} 12345 \\ 12543 \end{pmatrix} = (35) \in S_5$ भी एक पक्षान्तरण है ।

टिप्पणी 1 : यदि चक्रीय क्रमचय f एक पक्षान्तरण है तो इस चक्र की लम्बाई 2 होगी

$\therefore f^2 = I \Rightarrow f = f^{-1}$

अतएव प्रत्येक पक्षान्तरण स्वंय का प्रतिलोम होता है, उदाहणार्थ $(3\ 5)^{-1} = (5\ 3) = (3\ 5)$

टिप्पणी 2 : यदि $f = (a_1, a_2 .....a_m)$, m लम्बाई का एक चक्र है तो क्रमचय गुणन की सहायता से यह देखा जा सकता है कि

$$f = (a_1 a_m)(a_1 a_{m-1}).....(a_1 a_2)$$

अत: प्रत्येक m लम्बाई के चक्र को m - 1 पक्षान्तरणों के गुणनफल के रूप में लिखा सकता है, फलत: प्रत्येक चक्र को पक्षान्तरणों के गुणनफल के रूप में लिख सकते है लेकिन प्रत्येक क्रमचय असंयुक्त चक्रो के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है अतएव प्रत्येक क्रमचय को पक्षान्तरणों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है ।

उदाहणार्थ

चक्रीय क्रमचय

$f = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 231486975 \end{pmatrix} \in S_9$ को पक्षान्तरणों के गुणनफल के रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$\begin{aligned} f &= (4)(6)(123)(5879) \\ &= (123)(5879) \\ &= (13)(12)(59)(57)(58) \end{aligned}$$

2.4.6 सम और विषम क्रमचय

किसी भी क्रमचय को पक्षान्तरणों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करना अद्वितीय नहीं होता, जैसे कि

(2354) = (2354) (253) (352) [∵ (253) (352) तत्समक क्रमचय है]

=(24)(25)(23)(23)(25)(32)(35)

पुन: (1 2) (2 1) तत्समक क्रमचय है

∵ (2354) = (24)(12)(21)(25)(23)(23)(25)(32)(35)

अतएव किसी भी क्रमचय को पक्षान्तरणों के गुणनफल के रूप में अनन्त तरीको लिखा जा सकता है । परन्तु यह सिद्ध किया जा सकता है कि किसी भी क्रमचय के लिये इस तरह के गुणनफलो में पक्षान्तरणों की संख्या सदैव सम या विषम ही रहेगी । इस आधार पर सम और विषम क्रमचय निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है ।

परिभाषा : किसी क्रमचय को पक्षान्तरणों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करने यदि पक्षान्तरणों की संख्या सम हो तो यह सम क्रमचय एवम यदि पक्षान्तरणों की संख्या विषम हो तो यह विषम क्रमचय कहलाता है ।

उदाहणार्थ,

(i) क्रमचय $f = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 314286975 \end{pmatrix}$ एक समक्रमचय है क्योंकि

$$f = (1342)(5879)$$
$$= (12)(14)(13)(59)(57)(58)$$

= 6 (सम) पक्षान्तरणों का गुणनफल

$\because$ f एक सम क्रमचय है।

(ii) क्रमचय हैं f = (1 2 3 4 5) (1 2 3) (4 5) एक विषम क्रमचय है क्योंकि

f = (1 5) (1 4) (1 3) (1 2) (1 3) (1 2) (4 5)

= 7 (विषम) पक्षान्तरणों का गुणनफल

$\therefore$ f एक विषम क्रमचय है

टिप्पणी 1 : किसी भी n लम्बाई के चक्र को n - 1 पक्षान्तरणों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है, अतएव यदि n सम संख्या है तो चक्र विषम तथा n विषम संख्या है तो चक्र सम क्रमचय होगा ।

टिप्पणी 2 : प्रत्येक पक्षान्तरण एक विषम क्रमचय होता है ।

टिप्पणी 3 : तत्समक क्रमचय को दो पक्षान्तरणों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है जैसे कि

(1 2) (2 1) = I (तत्समक क्रमचय)

अतएव प्रत्येक तत्समक क्रमचय, समक्रमचय होता है ।

टिप्पणी 4 : दो सम (विषम) क्रमचयों का गुणनफल एक समक्रमचय होता है ।

टिप्पणी 5 : एक सम (विषम) तथा विषम (सम) क्रमचय का गुणनफल विषम क्रमचय होता है ।

टिप्पणी 6 : एक सम (विषम) का प्रतिलोम भी सम (विषम) क्रमचय होता है ।

2.5 सम क्रमचयो का समूह (एकान्तर समूह)

n कोटि (अंशाक) के सभी सम क्रमचयों का समुच्चय A_n क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये समूह की सभी अवरणाओं को सन्तुष्ट करता है । हम निम्न प्रमेय द्वारा इसे सिद्ध करेगें ।

प्रमेय : n कोटि (अंशाक) के सभी क्रमचयो का समुच्चय A_n ($n \geq 2$) क्रमचय गुणन संक्रिया के लिय $\frac{\lfloor n}{2}$ कोटि का समूह होता है

उपपत्ति : हम जानते है कि दो सम क्रमचयो का गुणनफल एक सम क्रमचय ही होता है अत: समुच्चय A_n क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये संवृत है । अब A_n को समूह सिद्ध करने के लिये निम्न प्रतिबन्धों का परिक्षण करेगें ।

(i) **साहचर्यता :** क्रमचय गुणन सहचारी संक्रिया होती है अत: यह समुच्चय A_n में भी सहचारी होगी।

(ii) **तत्समक का अस्तित्व :** चूंकि तत्समक क्रमचय एक सम क्रमचय होता है अत: n कोटि का तत्समक क्रमचय

I, समुच्चय A_n में तत्समक अवयव है इस प्रकार $I \in A_n$ तथा हैं $fI = I = If, \forall f \in A_n$

(iii) **प्रतिलोम का अस्तित्व :** प्रत्येक सम क्रमचय का प्रतिलोम भी एक सम क्रमचय होता है चूंकि A_n सभी सम क्रमचयो का समुच्चय है अवएव A_n में प्रत्येक क्रमचय का प्रतिलोम भी विद्यमान होगा ।

$\therefore f \in A_n \Rightarrow f^{-1} \in A_n$, जो f का प्रतिलोम है ।

अत: A_n में प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम विद्यमान है ।

उपरोक्त विवेचन से सिद्ध होता है कि A_n, क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये एक समूह है

अब हम सिद्ध करेगें कि $o(A_n) = \frac{\lfloor n}{2}$

यदि n अशांक के सभी क्रमचयो का समुच्चय है P_n तो $o(P_n) = \lfloor n$

अब माना कि P_n में $e_1, e_2, e_3 ..... e_m$ सम क्रमचय तथा $o_1, o_2, o_3, ... o_k$ विषम क्रमचय है तब,

$$P_n = \{e_1, e_2, ..., e_m, o_1, o_2, o_3 ..... o_k\}$$

यहाँ समुच्चय P_n मे सभी क्रमचय भिन्न होगे क्योंकि एक सम क्रमचय कभी भी विषम क्रमचय नहीं हो सकता,

अर्थात् $e_i \neq 0_j, \quad \forall i, j$

अतएव $o(P_n) = m + k = \lfloor n$

अब माना कि $\alpha \in P_n$, जहाँ α कोई पक्षान्तरण है, इसलिये α एक विषम क्रमचय है ।

चूंकि $(P_n, .)$ एक समूह है अतएव संवृतता गुणधर्म से,

$\alpha e_1, \alpha e_2 ..... \alpha e_m, \alpha o_1, \alpha o_2 ..... \alpha o_k$ सभी P_n के अवयव होगें, जहाँ $\alpha e_1, \alpha e_2 ..... \alpha e_m$ विषम क्रमचय है तथा $\alpha o_1, \alpha o_2 ..... \alpha o_k$ सम क्रमचय है, इन समक्रमचयो में से कोई भी दो समान नही है क्योंकि

$\alpha o_i, \alpha o_j \Rightarrow o_i = o_j$ (वाम निरसन नियम से)

इसी प्रकार $\alpha e_i \neq \alpha e_j$ यदि $i \neq j$

अब $\alpha e_1, \alpha e_2 ..... \alpha e_m$, प्रत्येक भिन्न-2 विषम क्रमचय है परन्तु हमने P_n में कुल विषम क्रमचय k लिये है,

$\therefore m \leq k$ ....(1)

इसी प्रकार $\alpha o_1, \alpha o_2 ..... \alpha o_k$ प्रत्येक भिन्न-2 सम क्रमचय है लेकिन P_n में हमने कुल सम क्रमचय m लिये है ।

$\therefore k \leq m$ .....(2)

अतएव समीकरण (1) व (2) से,

m = k

परंतु m + k = $\lfloor n$

$$\Rightarrow \quad 2m = \lfloor n \quad [\because m = k]$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow \quad o(A_n) = \frac{n}{2}$$

फलत: A_n समक्रमचयों का समुच्चय क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये एक समूह जिसकी कोटि n/2 है।

टिप्पणी 1 : A_n को n अंशाक एकान्तर समूह भी कहते है

टिप्पणी 2 : n अंशाक के विषम क्रमचयो का समुच्चय क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये समूह नही होता क्योकि दो विषय क्रमचयो का गुणन समक्रमचय होता है अर्थात् यह क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये संवृत नही है ।

टिप्पणी 3 : यहाँ $o(A_n)$ को निम्न प्रकार भी ज्ञात किया जा सकता है ।

यदि n अंशाक सममित समूह P_n में B_n सभी विषम क्रमचयो का समुच्चय है तो

$$o(P_n) = o(A_n) + o(B_n) = \lfloor n \qquad \text{.....(1)}$$

यदि α, P_n में एक नियत पक्षान्तरण है तो A_n से B_n में एक प्रतिचित्रण ϕ निम्न प्रकार से परिभाषित करते है ।

$$\phi : A_n \to B_n, \phi(\sigma) = \alpha\sigma, \forall \sigma \in A_n$$

यहाँ σ सम क्रमचय है तथा α विषम क्रमचय है इसलिये $\alpha\,\sigma$ विषम क्रमचय होगा, अतएव $\alpha\sigma \in B_n$ हम देखते है कि $\sigma_1, \sigma_2 \in A_n$ के लिये

$$\phi(\sigma_1) = \phi(\sigma_2) \Rightarrow \alpha\sigma_1 = \alpha\sigma_2$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha\sigma_1) = \alpha(\alpha\sigma_2)$$

$$\Rightarrow (\alpha\alpha)\sigma_1 = (\alpha\alpha)\sigma_2 \qquad (P_n \text{ में साहचार्यता से})$$

$$\Rightarrow I\sigma_1 = I\sigma_2 \qquad (\because \alpha \text{ पक्षान्तरण है}, \therefore \alpha\alpha = \alpha^2 = I)$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

$\therefore \phi$ एकैकी है

अब प्रत्येक $\rho \in B_n$ के लिये A_n में $\alpha\rho$ ऐसा अवयव विद्यमान है कि

$$\phi(\alpha\rho) = \alpha(\alpha\rho) = (\alpha\alpha)\rho = \rho \quad (\because \alpha^2 = I)$$

$\because$ ϕ आच्छादक है

अत: ϕ एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है अर्थात समुच्चय A_n तथा B_n के अवयवो में एकैकी सगंतता होती है, इस प्रकार समुच्चय A_n तथा B_n में अवयवो की संख्या समान है

$$\therefore o(A_n) = o(B_n) \qquad .....(2)$$

समीकरण (1) व (2) से

$$2.o(A_n) = \lfloor n$$

$$\Rightarrow o(A_n) = \frac{\lfloor n}{2}$$

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1 : चार संकेतो 1, 2, 3, 4 पर सभी क्रमचय लिखकर, सम क्रमचयो की सूची बनाईये।

हल : यदि S = {1,2,3,4} तो चार अंशाक के सममित समुच्चय P_4 में $\lfloor 4$ अर्थात् 24 क्रमचय होगे, जो कि निम्न प्रकार है

$$P = \left\{ \begin{matrix} (1),(12),(13),(14),(23),(24),(34),(123),(132),(124) \\ (142),(134),(143),(234),(243),(12),(34),(23),(14), \\ (31),(24),(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432) \end{matrix} \right\}$$

चार अंशाक के सम क्रमचयय के समुच्चय A_4 में $\frac{\lfloor 4}{2}$ या 12 अवयव होगें, जो निम्न प्रकार है

$$A_4 = \left\{ \begin{matrix} (1),(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234) \\ (243),(12)(34),(23)(14),(31)(24) \end{matrix} \right\}$$

उदाहरण 2 :

माना $f = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23451 \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} 12345 \\ 12453 \end{pmatrix}$, 5 संकेतो पर दो क्रमचय है, तो fog तथा gof ज्ञात कीजिये ।

हल :

$$fog = fg = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23451 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345 \\ 12453 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12453 \\ 23514 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345 \\ 12453 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12345 \\ 23514 \end{pmatrix}$$

$$= (12354)$$

तथा

$$gof = gf = \begin{pmatrix} 12345 \\ 12453 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345 \\ 23451 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 23451 \\ 24531 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345 \\ 23451 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12345 \\ 24531 \end{pmatrix}$$

$$= (12435)$$

उदाहरण 3 : निम्नलिखित α तथा β से $\alpha^1\beta\alpha$ का मान ज्ञात कीजिये

$$\alpha = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 25438761 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 76518324 \end{pmatrix}$$

अथवा α =(1258)(34)(67), β = (17263584)

हल : यहाँ $\alpha = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 25438761 \end{pmatrix}$

$$\therefore \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 25438761 \\ 12345678 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12345678 \\ 81432765 \end{pmatrix}$$

अतः $\alpha^{-1}\beta = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 81432765 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345678 \\ 76518324 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 76518324 \\ 67285413 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345678 \\ 76518324 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12345678 \\ 67285413 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \alpha^{-1}\beta\alpha = \left(\alpha^{-1}\beta\right)\alpha = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 67285413 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345678 \\ 25438761 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 25438761 \\ 75823146 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345678 \\ 25438761 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12345678 \\ 75823146 \end{pmatrix}$$

= (1 7 4 2 5 3 8 6)

उदाहरण 4 : यदि

$$\rho = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23154 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 12345 \\ 15432 \end{pmatrix}$$

तो निम्न ज्ञात कीजिये

(1) $\sigma\rho$ (2) $p^{-1}\sigma^{-1}$

हल : (1) $\sigma\rho = \begin{pmatrix} 12345 \\ 15432 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345 \\ 23154 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 23154 \\ 54123 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345 \\ 23154 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12345 \\ 54123 \end{pmatrix}$$

$$= (153)(24)$$

(2) $\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 23154 \\ 12345 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 12345 \\ 31254 \end{pmatrix}$$

तथा $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 15432 \\ 12345 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 12345 \\ 15432 \end{pmatrix}$$

अब $\rho^{-1}\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 12345 \\ 31254 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345 \\ 15432 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 15432 \\ 34521 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345 \\ 15432 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12345 \\ 34521 \end{pmatrix}$$

$$= (135)(24)$$

टिप्पणी : यहाँ $\rho^{-1}\sigma^{-1}$ को निम्न प्रकार भी ज्ञात किया जा सकता है

$$\rho^{-1}\sigma^{-1} = (\sigma\rho)^{-1} = \left[(153)(24)\right]^{-1}$$

$$= (24)^{-1}(153)^{-1}$$

$$= (42)(351)$$

$$= (24)(135) \qquad \left[\because (24) = (42), (351) = (135)\right]$$

$= (135)(24)\left[\because (24)\right.$ व (1 3 5) असंयुक्त चक्र है,$\left.) \therefore (24)(135) = (135)(24)\right]$

उदाहरण 5 : क्रमचय

$$\sigma = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 245138976 \end{pmatrix} \in S_9$$

को असयुंक्त चक्रो के गुणनफल के रूप में व्यक्त करके बताईये कि α सम क्रमचय है अथवा विषम क्रमचय तथा इसकी कोटि भी ज्ञात कीजिये ।

हल :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 245138976 \end{pmatrix}$$

$$= (124)(35)(6879)$$

$$\therefore \sigma = (124)(35)(6879)$$

जो कि असंयुक्त चक्रो के गुणनफल के रूप में है ।

पुन: σ को पक्षान्तरणों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करने पर

$$\sigma = (124)(35)(6879)$$

$$= (14)(12)(35)(69)(67)(68)$$

= 6 (सम) पक्षान्तरणों का गुणनफल

$\therefore \sigma$ एक सम क्रमचय है ।

अब σ की कोटि के लिये

$o(\sigma) = o(124), o(35)$ तथा $o(6879)$ का ल.स.प.

= 3,2 तथा 4 का ल. स. प.

= 12

उदाहरण 6 : यदि

$$\sigma = (17263584)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 25438761 \end{pmatrix}$$

तो सिद्ध कीजिये कि

$$\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(1)\rho(7)\rho(2)\rho(6)\rho(3)\rho(5)\rho(8)\rho(4))$$

हल :

$$\because \sigma = (17263584)$$
$$= \begin{pmatrix} 17263584 \\ 72635841 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 12345678 \\ 76518324 \end{pmatrix}$$
$$\therefore \rho\sigma = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 25438761 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345678 \\ 76518324 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 76518324 \\ 67821453 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345678 \\ 76518324 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 12345678 \\ 67821453 \end{pmatrix}$$

साथ ही

$$\rho^{-1} = \begin{pmatrix} 25438761 \\ 12345678 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 12345678 \\ 81432765 \end{pmatrix}$$
$$\therefore \rho\sigma\rho^{-1} = (\rho\sigma)\rho^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 12345678 \\ 67821453 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345678 \\ 81432765 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 81432765 \\ 36287541 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12345678 \\ 81432765 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 12345678 \\ 36287541 \end{pmatrix}$$
$$= (13265748)$$
$$= (26574813)$$
$$= (\rho(1)\rho(7)\rho(2)\rho(6)\rho(3)\rho(5)\rho(8)\rho(4))$$

उदाहरण 7 : यदि $\rho = (12.....(n-1))$ तथा $\sigma = (1n)$ तो प्रदर्शित कीजिए कि

$$\rho^k \sigma \rho^{-1} = (k+1n), k < n$$

हल : इस परिणाम को हम गणितीय आगमन विधि से सिद्ध करेगें

$$\because \rho^{-1} = ((n-1)(n-2).....21)$$
$$\because \rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(1)\rho(n))$$
$$= (2n) \qquad [\because \rho(1) = 2, \rho(n) = n]$$

अतः k = 1 < n के लिये यह परिणाम सत्य है ।

अब माना कि यह परिणाम धनात्मक पूर्णांक k = r < n के लिये यह भी सत्य है ।

तो

$$\rho^r \sigma \rho^{-r} = (r+1n), r+1<n$$

तब $$\rho^{r+1}\sigma\rho^{(-r+1)} = \rho(r+1n)\rho^{-1}$$

$$= (\rho(r+1)\rho(n))$$

$$= (r+2n) \qquad [\because \rho(r+1) = r+2, \rho(n) = n]$$

अतः एव यह परिणाम धनात्मक पूर्णांक k = r + 1< n के लिये यह भी सत्य है । इसलिए आगमन विधि द्वारा प्रदर्शित होता है कि

$$\rho^k \sigma \rho^{-k} = (k+1n), k<n$$

टिप्पणी : इस परिणाम से स्पष्ट है कि S_n के प्रत्येक क्रमचय को σ एवं p की पूर्णांक घातो के गुणन के रूप मे व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 8 : सिद्ध कीजिये निम्न चार क्रमचय, क्रमचय गुणन के लिए समूह बनाते है तथा तत्समक अवयय के अलावा प्रत्येक अवयव की कोटि 2 है ।

$$I, (ab), (cd), (ab)(cd)$$

हल : माना कि दिये हुए क्रमचयो का समुच्चय G है तथा

$$I = f_{1,}(ab) = f_{2,}(cd) = f_{3,}(ab)(cd) = f_4$$

यहाँ हम देखते है कि f_2 तथा f_3 पक्षान्तरण है इसलिये

$$f_{2,} f_2 = f_1, f_3 f_3 = f_1$$

इसी प्रकार f_2, f_3 असंयुक्त चक्र है

$$\therefore f_2 f_3 = f_3 f_2 = f_4$$

एवम्

$$f_2 f_4 = (ab)(ab)(cd) = I(cd) = (cd) = f_3$$

$$f_3 f_4 = (cd)(ab)(cd) = (cd)(cd)(ab) = I(ab) = (ab) f_2$$

$$f_4 f_4 = (ab)(cd)(ab)(cd) = (ab)(ab)(cd)(cd) = (I)(I) = I = f_1$$

$$[\because (ab)(cd) = (cd)(ab)]$$

उपरोक्त गुणनफलो से G की संक्रिया सारणी निम्न प्रकार है :

	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

सारणी के अवलोकन से स्पष्ट है कि

(i) इसका प्रत्येक अवयव G में है, अत: G क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये सवृंत है ।

(ii) क्रमचय गुणन सहचारी संक्रिया है इसलिये G में भी सहचारी होगी ।

(iii) f_1, तत्समक अवयव है ।

(iv) प्रत्येक अवयव स्वंय का प्रतिलोमी है ।

(v) सारणी मुख्य विकर्ण के सापेक्ष सममित है, अत: G में क्रमचय गुणन संक्रिया क्रमविनिमेय है।

उपरोक्त विवेचन से सिद्ध होता है कि G क्रमचय गुणन के लिये एक परिमित क्रमविनिमेय समूह है जिसकी कोटि चार हैं ।

पुन: क्योंकि $f_2^2 = I, f_3^2 = I, f_4^2 = I$

अत: f_2, f_3, f_4 प्रत्येक अवयव की कोटि 2 हैं ।

उदाहरण 9: सिद्ध कीजिए कि समुच्चय {a,b,c,} के सम क्रमचयो का समुच्चय $A_3 = \{(a),(abc),(acb)\}$, क्रमचय गुणन के लिये एक परिमित क्रमविनिमेय समूह है तथा तत्समक अवयव के अलावा दोनो अवयवों की कोटि 3 है ।

हल : माना कि,

$$f_1 = (a) = \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a\,b\,c \end{pmatrix}, f_2 = (abc) = \begin{pmatrix} a\,b\,c \\ b\,c\,a \end{pmatrix} \text{ तथा } f_3 = (abc) = \begin{pmatrix} a\,c\,b \\ c\,b\,a \end{pmatrix}$$

$$\therefore A_3 = \{f_1, f_2, f_3\}$$

अब A_3 में क्रमचय गुणन संक्रिया से प्राप्त गुणनफलों की परिकल्पना करने पर

$$f_1 f_1 = f_1, f_1 f_2 = f_2 = f_2 f_1, f_1 f_3 = f_3 = f_3 f_1$$

$$f_2 f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a & b \end{pmatrix} = f_3$$

$$f_2 f_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ a & c & b \end{pmatrix} = f_1$$

$$f_3 f_2 = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} = f_1$$

$$f_3 f_3 = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = f_2$$

उपरोक्त गुणनफलो से A_3 की संक्रिया सारणी निम्न प्रकार है :

*	f_1	f_2	f_3
f_1	f_1	f_2	f_3
f_2	f_2	f_3	f_1
f_3	f_3	f_1	f_2

सारणी के अवलोकन से स्पष्ट है कि

(i) इसका प्रत्येक अवयव A_3 में है, अत: A_3 क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये सवृंत हैं,

(ii) क्रमचय गुणन संक्रिया तीन घात के सममित समुच्चय P_3 में सहचारी होती है अतएव यह A_3 में भी सहचारी होगी ।

(iii) संक्रिया सारणी सें, क्रमचय f_1 इस प्रकार है कि

$$f_1 f_1 = f_1, f_1 f_2 = f_2 = f_2 f_1, f_1 f_3 = f_3 = f_3 f_1$$

$\therefore f_{1,} A_3$ में तत्समक अवयव है ।

(iv) पुन: सारणी से स्पष्ट है कि

$$f_1 f_1 = f_1, f_2 f_3 = f_1 = f_3 f_2$$

$$\therefore f_1^{-1} = f_1, f_2^{-1} = f_3, f_3^{-1} = f_2$$

अतएव A_3 मे प्रत्येक अवयव के प्रतिलोम का अस्तित्व है ।

(v) संक्रिया सारणी मुख्य विकर्ण के सापेक्ष सममित है अत: A_3 में क्रमचय गुणन संक्रिया क्रम विनिमेय है

उपरोक्त विवेचन से सिद्ध होता है कि A_3 क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये एक परिमित क्रमविनिमेय समूह है जिसकी कोटि 3 है पुन: क्योकि

$f_2^3 = f_1$ तथा $f_3^3 = f_1$, जहाँ f_1 तत्समक है

$\because A_3$ के अवयव f_2 तथा f_3 की कोटि 3 है

स्वंमूल्यांकन प्रश्न -1

निम्न में से कौन से कथन सत्य/असत्य है

(1) व्यापक रूप में क्रमचय गुणन क्रमविनिमेय होता है ।

(2) दो क्रमचयों का गुणनफल एक पक्षान्तरण हो तो वे प्रतिलोम क्रमचय कहलाते है ।

(3) प्रत्येक चक्र एक क्रमचय होता है ।

(4) प्रत्येक क्रमचय एक चक्र होता है ।

(5) 6 संकेतों के क्रमचय समुच्चय P_6 में 720 क्रमचय होते है ।

(6) किसी n लम्बाई के चक्र की कोटि तथा इसके प्रतिलोम चक्र की कोटि बराबर होती है ।

(7) 10 लम्बाई के चक्र कि कोटि 10 होगी ।

(8) तत्समक क्रमचय को दो पक्षान्तरण के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है ।

(9) तत्समक क्रमचय एक लम्बाई का चक्र होता है ।

(10) तत्समक क्रमचय को एक पक्षान्तरण से गुणन करने पर विषम क्रमचय प्राप्त होता है।

(11) दो असयुँक्त चक्रो का गुणन क्रमविनिमेय होता है ।

(12) A_3 क्रमविनिमेय समूह है ।

(13) 5 अशांक के सभी सम क्रमचयो का समुच्चय A_5 क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये एक समूह है जिसका ग्रुपांक 60 है ।

(14) यदि

$A = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23145 \end{pmatrix}$ तो o(A) = 6 होगा ।

(15) n अशांक के सभी विषम क्रमचयो का समुच्चय क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये एक समूह है जिसका ग्रुपांक $\frac{\lfloor n}{2}$ है ।

क्रमचय समूह के बाद हम एक विशेष प्रकार के समूह का वर्णन करेगे जिसे चक्रीय समूह कहते है, इसके लिये सर्वप्रथम समूह के अवयवों की कोटि का अध्ययन आवश्यक है ।

2.6 समूह के किसी अवयव की पूर्णांक घात

माना कि समूह (G,*) का कोई अवयव a है, तथा समूह G में सवृंतता से $a*a, a*a*a, a*a*a*a$.....आदि सभी G के अवयव होगे । अब समूह G में व्यापीकृत साहचर्य नियम से इन्हे क्रमश: a^2, a^3, a^4..... से व्यक्त किया जाता है । अत: $a^n = a*a*a....*a$ (n बार), जहाँ n धनात्मक पूर्णांक है ।

तथा

$$a^{-n} = \left(a^n\right)^{-1} = \left(a*a*a.....n\right)^{-1}$$
$$= a^{-1}*a^{-1}*a^{-1}.....n$$
$$= \left(a^{-1}\right)^n$$

$\therefore \left(a^{-n}\right) = \left(a^{-1}\right)^n$, जहां n धनात्मक पूर्णांक है

पुन: किसी भी अवयव की शून्य घात तत्समक के बराबर परिभाषित की जाती है अर्थात यदि समूह G में तत्समक अवयव e है तो

$$a^0 = e, \forall a \in G$$

उपरोक्त परिभाषाओं से समूह G में किसी अवयव a के पूर्णांक घातो के लिये निम्न सिद्ध किये जा सकते है।

(i) $a^{m+n} = a^m.a^n, \forall m,n \in Z$

(ii) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}, \forall m,n \in Z$

टिप्पणी : यदि समूह कि संक्रिया * , योग (+) से व्यक्त की जाती है तो $\forall a \in G$ के लिये

$a^n = a*a*a*.....*a$ (n बार)

$= a+a+a+....+a$ (n बार)

$= na$

तथा

$$(-na) = (-a)+(-a)+.....+(-a) \qquad \text{(n बार)}$$
$$= n(-a)$$

इसी प्रकार, योग संक्रिया के लिये निम्न नियम सिद्ध किये जा सकते है ।

$$ma+na=(m+n)a, \forall m,n \in Z$$

$$n(ma)=(nm)a, \forall m,n \in Z$$

2.7 समूह के किसी अवयव की कोटि

परिभाषा : माना समूह G के कोई अवयव a है तथा किसी न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक n का अस्तित्व इस प्रकार है कि $a^n = e$, तब n को अवयव a की कोटि कहते है जिसे o(a) से व्यक्त किया जाता है । यदि इस प्रकार के किसी धनात्मक पूर्णांक का अस्तित्व नही है तो a की कोटि अपरिमित या शून्य कहलाती है ।

टिप्पणी 1 : उपरोक्त परिभाषा से स्पष्ट है कि यदि n अवयव a की कोटि है तथा m कोई धनात्मक पूर्णाक इस प्रकार है कि $a^m = e$ तो $n \le m$ होता है ।

टिप्पणी 2 : समूह G में तत्समक अवयव e की कोटि 1 होगी, क्योकि 1 ऐसा न्यूनतम धनात्मक पूर्णाक है जिसके लिये $a^m = e$, अब यदि G में किसी अवयव a की कोटि भी 1 है तो $a^1 = e \Rightarrow a = e$ अतएव समूह G में तत्समक अवयव e ही ऐसा अवयव होगा जिसकी कोटि 1 है इसके अलावा कोई भी अवयव G में ऐसा नहीं होगा जिसकी कोटि 1 होगी ।

उदाहरण 1 : समूह में $G=\{1,-1.\}$ में 1 तत्समक अवयव है $\therefore o(1)=1$

अब

$$(-1)^1=-1,(-1)^2=1 \text{ (तत्समक अवयव)}$$

$$\therefore o(-1)=2$$

उदाहरण 2 : समूह $G=\{1,\omega,\omega^2,.\}$ में 1 तत्समक अवयव है, $\therefore o(1)=1$

अब

$$(\omega)^1=\omega,(\omega)^2=\omega^2,(\omega)^3=1 \text{ (तत्समक अवयव)}$$

$$\therefore o(\omega)=3 \qquad [\therefore \omega^3=1]$$

इसी प्रकार

$$(\omega^2)^1=\omega^2,(\omega^2)^2=\omega,(\omega^2)^3=1 \text{ (तत्समक अवयव)}$$

$$\therefore o(\omega^2)=3$$

उदाहरण 3 : समूह $G=\{1,-1,i,-i,.\}$ में 1 तत्समक अवयव है, $\therefore o(1)=1$

अब

$$(-1)^2=1 \Rightarrow o(-1)=2$$

तथा

$$(i)^4=1 \Rightarrow o(i)=4$$

$$(-i)^4=1 \Rightarrow o(-i)=4$$

उदाहरण 4 : समूह G = $\{0,1,2,3,+_4\}$ में 0 तत्समक अवयव है, अतएव 0 की कोटि 1 होगी,

$\therefore o(0) = 1$

तथा

$(1)^1 = 1, (1)^2 = 1 +_4 1 = 2, (1)^3 = 1 +_4 1 +_4 1 = 3, (1)^4 = 1 +_4 1 +_4 1 +_4 1 = 0$ (तत्समक अवयव)

$\therefore o(1) = 4$

इसी प्रकार

$(2)^2 = 2 +_4 2 = 0$ (तत्समक अवयव)

$\therefore o(2) = 2$

पुनः

$(3)^4 = 3 +_4 3 +_4 3 +_4 3 = 0$ (तत्समक अवयव)

$\therefore o(3) = 4$

उदाहरण 5 : समूह (Z,+) में तत्समक अवयव 0 की कोटि 1 है तथा शेष सभी अवयवो की कोटि अपरिमित है ।

उदाहरण 6 : समूह (Q_0,.) में तत्समक अवयव 1 की कोटि 1 तथा अवयव (-1) की कोटि 2 होगी, इनके अलावा सभी अवयवो की कोटि अपरिमित होगी ।

2.8 समूह के अवयव की कोटि पर आधारित प्रमेय

प्रमेय 1 : यदि समूह के किसी अवयव a की कोटि n हो तो

$a^m = e$ यदि और केवल यदि m,n का गुणज है

उपपत्ति :

प्रतिबंध की आवश्यकता - माना कि समूह के किसी अवयव a की कोटि n है तथा $a^m = e$, तो कोटि की परिभाषा से $m \geq n$, यदि $m=n$ तो $a^m = a^n = e, \because m,n$ का गुणज है

अब यदि $m>n$ तो पूर्णांको में विभाजन कलन विधि से $\exists q, r \in Z$ ताकि

$m = nq + r, 0 \leq r \leq n$

$\therefore a^m = e \Rightarrow a^{nq+r} = e$

$\Rightarrow a^{nq} a^r = e$ $\left[\because a^{m+n} = a^m a^n\right]$

$\Rightarrow \left(a^n\right)^q a^r = e$ $\left[\because a^{mn} = \left(a^m\right)^n\right]$

$\Rightarrow e^q a^r = e$ $\left[\because o(a) = n \Rightarrow a^n = e\right]$

$\Rightarrow a^r = e, 0 \leq r \leq n$ $\left[\because e^q = e\right]$

क्योंकि $o(a) = n, \because a^n = e$ (जहाँ n न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक है)

$\because a^r = e, 0 \leq r \leq n \Rightarrow r = 0$

$\Rightarrow m = nq$ अर्थात् m,n का गुणज है

प्रतिबन्ध की पर्याप्तता : यदि m,n का गुणज है अर्थात् $m = nq$ (जहाँ q धनात्मक पूर्णांक है) तब,

$$m = nq \Rightarrow a^m = a^{nq} = (a^n)^q = e^q = e$$

अत: $a^m = e \Leftrightarrow m, n$ का गुणज है

उपप्रमेय 1 : समूह के किसी अवयव a के पूर्णांक घात की कोटि, a की कोटि से अधिक नही होती ।

उपपत्ति : माना कि समूह G के किसी अवयव a की कोटि n है, अर्थात् $o(a) = n$ तो किसी $m \in Z$ के लिये

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m = e^m = e$$

$$\Rightarrow o(a^m) \le n$$

$$\Rightarrow o(a^m) \le o(a)$$

उपप्रमेय 2 : समूह के किसी अवयव a की कोटि तथा उसके प्रतिलोम की कोटि समान होती है, अर्थात

$$o(a) = o(a^{-1})$$

उपपत्ति : माना कि $o(a) = n$ तथा $o(a^{-1}) = m$

तो अवयव की कोटि की परिभाषा से,

$$0(a) = n \qquad \Rightarrow a^n = e$$

$$\Rightarrow (a^n)^{-1} = e^{-1}$$

$$\Rightarrow (a^{-1})^n = e \qquad [\because e^{-1} = e \text{ तथा } (a^n)^m = (a^m)^n \ ]$$

$$\Rightarrow 0(a^{-1}) \le n$$

$$\Rightarrow m \le n \qquad .....(1)$$

पुन: $o(a^{-1}) = m \qquad \Rightarrow (a^{-1})^m = e$

$$\Rightarrow (a^m)^{-1} = e$$

$$\Rightarrow [(a^m)^{-1}]^{-1} = e^{-1}$$

$$\Rightarrow a^m = e \qquad [\because (a^{-1})^{-1} = a]$$

$$\Rightarrow o(a) \le m$$

$$\Rightarrow n \le m \qquad .....(2)$$

अत: (1) व (2) से $n = m$ अर्थात $o(a) = o(a^{-1})$ साथ ही यदि $o(a)$ अनन्त हो तो $o(a^{-1})$ परिमित नही हो सकता, क्योंकि यदि $o(a^{-1})$ परिमित (माना m) हो तो

$$(a^{-1})^m = e \qquad \Rightarrow (a^m)^{-1} = e$$

$$\Rightarrow [(a^m)^{-1}] = e^{-1}$$

$$\Rightarrow a^m = e$$

$$\Rightarrow o(a) \le m$$

$\Rightarrow o(a)$ परिमित है

जो कि $o(a)$ अनन्त है का विरोधाभास है, इसलिये $o(a^{-1})$ भी अनन्त होगा ।

टिप्पणी : इस प्रमेय तथा इसके उपप्रमेयों को निम्न उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है -

यदि समूह $G=\{1,\omega,\omega^2,.\}$ ले तो $;o(1)=1, o(\omega)=3, o(\omega^2)=3$

(i) अब $o(\omega)=3 \Rightarrow \omega^3=1$, तो हम देखतें हे कि $\omega^6=1, \omega^9=1, \omega^{12}=1, ...$ अर्थात समूह के अवयव ω है तो $\omega^m=1$ होगा यदि $m, 3$ का गुणज है ।

(ii) यहां अवयव ω के पूर्णाक घात $\omega^2, \omega^3=1$ की कोटि ω की कोटि से अधिक नहीं हैं ।

(iii) (iii) ω के प्रतिलोम अवयव ω^2 की कोटि 3 है, $\therefore o(\omega)=o(\omega^2)$ अर्थात प्रतिलोम अवयवों की कोटि समान हैं ।

प्रमेय 2 : किसी परिमित समूह G में प्रत्येक अवयव की कोटि परिमित होती है तथा यह समूह की कोटि के कम या बराबर होती है अर्थात $o(a) \le o(G), \forall a \in G$

उपपत्ति : माना कि n कोटि के परिमित समूह G का कोई अवयव a है तो संवृतता गुणधर्म से $a^0=e, a^1, a^2, ..., a^n$ सभी G के अवयव होगें परन्तु G में n अवयव है तथा सख्या (n +1) है अत: इसमें से कम से कम कोई दो अवयव समान होगें,

माना कि $a^r=a^s, o \le r < s \le n$

तब

$$a^r = a^s \Rightarrow a^r . a^{-r} = a^s a^{-r}$$

$$\Rightarrow a^r . (a^r)^{-1} = a^{s-r}$$

$$\Rightarrow a^0 = a^{s-r}$$

$$\Rightarrow e = a^m \qquad \text{जहाँ } o < m = s-r \le n$$

$$\Rightarrow o(a) \le m \le n$$

$$\Rightarrow o(a) \le o(G), \forall a \in G \qquad [\because o(G)=n]$$

अत: o(a) परिमित होता है तथा यह o(G) के बराबर या इससे कम होता है ।

टिप्पणी : यह प्रमेय निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट है - '

यदि समूह $G=\{1,-1,i,-i,.\}$ ले तो o(G) = 4 तथा 0(1) = 1,0 (-1) = 2,0(i) = 0(-i) = 4 इस प्रकार हम देखतें हैं कि प्रत्येक अवयव की कोटि समूह G कोटि के कम या बराबर है ।

प्रमेय 3 : यदि a तथा b समूह G के कोई दो स्वेच्छ अवयव है तो सिद्ध कीजिए कि $0(b^{-1}ab)=0(a)$

उपपत्ति : माना कि $o(a)=n$ तथा $o(b^{-1}ab)=m$, तो

$$(b^{-1}ab)^n = (b^{-1}ab)(b^{-1}ab)(b^{-1}ab).....(b^{-1}ab), n \text{ बार}$$

$= b^{-1}abb^{-1}abb^{-1}ab.....b^{-1}ab$ (व्यापीकृत साहचर्य नियम से)

$= b^{-1}a\left(bb^{-1}\right)a\left(bb^{-1}\right)a.....\left(bb^{-1}\right)ab$

$= b^{-1}ae\ ae.....ae\ ab$

$= b^{-1}a^{n}b$

$= b^{-1}\ eb$ $\left[\because a^{n} = e\right]$

= e .....(1)

$\therefore o\left(b^{-1}ab\right) \le n \Rightarrow m \le n$

पुनः $o\left(b^{-1}ab\right) = m \Rightarrow \left(b^{-1}ab\right)^{m} = e$

$\Rightarrow b^{-1}a^{m}b = e$

$\Rightarrow b\left(b^{-1}a^{m}b\right)b^{-1} = beb^{-1}$

$\Rightarrow \left(bb^{-1}\right)a^{m}\left(bb^{-1}\right) = e$

$\Rightarrow ea^{m}e = e$

$\Rightarrow a^{m} = e$

$\Rightarrow n \le m$ .....(2)

(1) व (2) से, n = m $\Rightarrow o(a) = o\left(b^{-1}ab\right)$

यदि $o(a)$ अपरिमित हो तो $o\left(b^{-1}ab\right)$ भी अपरिमित होगा ।

उपप्रमेय : यदि a और b किसी समूह G के अवयव हो तो

$o(ab) = o(ba)$

उपपत्ति : $\because b^{-1}(ba)b = \left(b^{-1}b\right)(ab)$ [साहचार्यता से]

$= e(ab)$

= ab

अब उपरोक्त प्रमेय से

$o\left[b^{-1}(ba)b\right] = o(ba)$

$= o(ab) = o(ba)$ $\left[\because b^{-1}(ba)b = ab\right]$

प्रमेय 4 : यदि किसी समूह G के अवयव a की कोटि n है तो सिद्ध किजिए की a^{p} की कोटि भी n होगी, यदि p तथा n सापेक्षिक अभाज्य है ।

उपपत्ति : माना कि $o(a)^{p} = m$

$\because o(a) = n \Rightarrow a^{n} = e$

$\Rightarrow \left(a^{n}\right)^{p} = e^{p}$

$\Rightarrow \left(a^{p}\right)^{n} = e$ $\left[\because \left(a^{m}\right)^{n} = \left(a^{n}\right)^{m}\right.$ तथा $\left.e^{p} = e\right]$

$\Rightarrow o\left(a^{p}\right) \le n$

$$\Rightarrow m \le n \qquad ...(1)$$

यदि p और n सापेक्षिक अभाज्य है तो $\exists x, y \in Z$ ताकि $px + ny = 1$

$$\therefore a = a^1 = a^{px+ny} = a^{px}a^{ny} = \left(a^p\right)^x.\left(a^n\right)^y = \left(a^p\right)^x.e^y = \left(a^p\right)^x$$

अब $a^m = \left[\left(a^p\right)^x\right]^m = \left(a^p\right)^{mx} = \left[\left(a^p\right)^m\right]^x = e^x = e$, $\left[\therefore o\left(a^p\right) = m \Rightarrow \left(a^p\right)^m = e\right]$

$$\therefore o(a) \le m \quad \Rightarrow n \le m \qquad .....(2)$$

अत: (1) व (2) से n = m अर्थात $o(a) = o\left(a^p\right)$

टिप्पणी 1 : समूह $G = \{1, \omega, \omega^2, .\}$ मे अवयव ω की कोटि 3 है तो ω^2 की कोटि भी 3 होगी, क्योंकि 2 तथा 3 सापेक्षिक अभाज्य है ।

टिप्पणी 2 : 2 और 3 सापेक्षिक अभाज्य है तो $-1, 1 \in Z$ सख्याऐ इस प्रकार है कि

$2(-1) + 3(1) = 1$ अर्थात $px + ny = 1$ रूप में लिखा जा सकता है।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1 : समूह $G = \{1, 2, 3, 4, \times_5\}$ में प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिए ।

हल : समूह G का तत्समक अवयव 1 है अत: 0(1) = 1

तथा $2^4 = 2 \times_5 2 \times_5 2 \times_5 2 = 1 \Rightarrow 0(2) = 4$

$3^4 = 3 \times_5 3 \times_5 3 \times_5 3 = 1 \Rightarrow 0(3) = 4$

$4^2 = 4 \times_5 4 \qquad = 1 \Rightarrow 0(4) = 2$

उदाहरण 2 : यदि समूह G में a और b ऐसे अवयव है कि $a^5 = e$ तथा $aba^{-1} = b^2$, तो b की कोटि ज्ञात कीजिए ।

हल : यहाँ $\left(aba^{-1}\right)^2 = \left(aba^{-1}\right)\left(aba^{-1}\right)$

$= ab\left(a^{-1}a\right)ba^{-1}$ [साहचर्य नियम से]

$= abeba^{-1}$ $\left[\because a^{-1}a = e\right]$

$= ab^2a^{-1}$

$= aaba^{-1}a^{-1}$ $\left[\because b^2 = aba^{-1}\right]$

$$\therefore \left(aba^{-1}\right)^4 = \left[\left(aba^{-1}\right)^2\right]^2 = \left[a^2ba^{-2}\right]^2 = a^2ba^{-2}\ a^2ba^{-2}$$

$= a^2b^2a^{-2}$

$= a^2aba^{-1}a^{-2}$ $\left[\because b^2 = aba^{-1}\right]$

$= a^3ba^{-3}$

$$\therefore \left(aba^{-1}\right)^8 = \left[\left(aba^{-1}\right)^4\right]^2 \left[a^3ba^{-3}\right]^2 = a^3ba^{-3}a^3ba^{-3}$$

$$= a^3b^2a^{-3}$$

$$= a^3aba^{-1}a^{-3}$$

$$= a^4ba^{-4}$$

$$\therefore \left(aba^{-1}\right)^{16} = \left[\left(aba^{-1}\right)^8\right]^2 = \left[a^4ba^{-4}\right]^2 = a^4ba^{-4}a^4ba^{-4}$$

$$= a^4b^2a^{-4} = a^4aba^{-1}a^{-4} = a^5ba^{-5}$$

$$= ebe \qquad \left[\because a^5 = e \text{ तथा } a^{-5} = e\right]$$

$$= b$$

अत: $\left(aba^{-1}\right)^{16} = b$

$$\Rightarrow \left(b^2\right)^{16} = b \quad \left[\because aba^{-1} = b^2\right]$$

$$\Rightarrow b^{32} = b$$

$$\Rightarrow b^{31} = e$$

अब हम जानते है कि $b^m = e \Rightarrow o(b)m$

$$\Rightarrow o(b) \mid 31$$

$$\Rightarrow o(b) = 1 \text{ या } o(b) = 31$$

अतः यदि b = e है तो o(b) = 1 एवं यदि $b \neq e$ है तो o(b) = 31 होगा ।

उदाहरण 3 : यदि a,b समूह G में ऐसे अवयव है कि $a^m b^m = ba, \forall m,n \in Z$ तो सिद्ध किजिए कि $a^m b^{n-2}, a^{m-2}b^n$ तथा ab^{-1} में समान कोटि के अवयव है ।

हल: हम जानतें हैं कि a तथा $x^{-1}ax$ की कोटि समान होती है, जहाँ $x, a \in G$

अब $a^m b^{n-2} = a^m b^n b^{-2}$

$$= \left(a^m b^n\right) b^{-2}$$

$$= (ba) b^{-2}$$

$$= bab^{-1}b^{-1}$$

$$= b\left(ab^{-1}\right)b^{-1}$$

$$\therefore o\left(a^m b^{n-2}\right) = o\left[b\left(ab^{-1}\right)b^{-1}\right]$$

$$= o\left[\left(b^{-1}\right)^{-1}\left(ab^{-1}\right)\left(b^{-1}\right)^{-1}\right]$$

$$= o\left(ab^{-1}\right) \qquad \left[\because o\left(x^{-1}ax\right) = o(a), \forall x \in G\right]$$

पुन: $a^{m-2}b^n = a^{-2}a^m b^n$

$$= a^{-2}\left(a^m b^n\right)$$

$$= a^{-2}\left(ba\right)$$

$$= a^{-1}a^{-1}ba$$

$$= a^{-1}\left(a^{-1}b\right)a$$

$$\because \qquad o\left(a^{m-2}b^n\right) = o\left[a^{-1}\left(a^{-1}b\right)a\right] \qquad \left[\because o\left(x^{-1}ax\right) = o\left(a\right)\right]$$

$$= o\left(a^{-1}b\right)$$

$$= o\left[\left(a^{-1}b\right)^{-1}\right] \qquad \left[\because o\left(x\right) = o\left(x^{-1}\right), \forall x \in G\right]$$

$$= o\left(b^{-1}a\right) \qquad \left[\because \left(a^{-1}b\right)^{-1} = b^{-1}\left(a^{-1}b\right)^{-1} = b^{-1}a\right]$$

उदाहरण 4 : यदि किसी G में केवल एक ही अवयव a की कोटि 2 है तो सिद्ध कीजिए कि $ax = xa, \forall x \in G$

हल : हम जानते हैं कि समूह G में किसी अवयव a तथा $x^{-1}ax$ कि लिये

$$o\left(a\right) = o\left(x^{-1}ax\right), \forall x \in G$$

$$\therefore o\left(a\right) = 2 \Rightarrow o\left(x^{-1}ax\right) = 2$$

परन्तु G में 2 कोटि का एक ही अवयव a है अत:

$$o\left(a\right) = o\left(x^{-1}ax\right) \Rightarrow a = x^{-1}ax$$

$$\Rightarrow xa = x\left(x^{-1}ax\right)$$

$$\Rightarrow xa = \left(xx^{-1}\right)\left(ax\right)$$

$$\Rightarrow xa = eax$$

$$\Rightarrow xa = ax, \forall x \in G$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

(1) समूह $G = \{0,1,2,3,4,5,+_6\}$ के प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिए

(2) समूह $G = \{e,p,q,r,s,t,*\}$ के प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिए, जहाँ * निम्न संक्रिया से परिभाषित है -

*	e	p	q	r	s	t
e	e	p	q	r	s	t
p	p	q	e	t	r	s
q	q	e	p	s	t	r
r	r	s	t	e	p	q
s	s	t	r	q	e	p
t	t	r	s	p	q	e

(3) यदि $G=\{I,A,B,C,\}$ आव्यहों के गुणा के लिये समूह है तो प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

अब हम विशेष प्रकार के उपसमूहों का अध्ययन करेगें जिसके सभी अवयव एक ही अवयव की पूर्णांक घातों में लिखे जा सकतें हैं ।

2.9 चक्रीय उपसमूह

किसी समूह G का उपसमूह H चक्रीय उपसमूह कहलाता है यदि इसके सभी अवयव एक ही अवयव a की पूर्णांक घात के रूप में लिखे जा सकतें हैं । यह समूह G का ऐसा छोटा से छोटा उपसमूह होता है जिसमें अवयव a होता है । ऐसे उपसमूह की सरंचना से सम्बन्धित प्रमेय निम्न है -

प्रमेय : सिद्ध कीजिये कि यदि समूह G का a कोई अवयव है तो $H=\{a^n \mid n\in Z\}, G$ का उपसमूह होता है ।

उपपत्ति : $\forall x,y\in H \Rightarrow x=a^m, y=a^n$ जहां $m,n\in Z$

तब $$xy^{-1}=(a^m)(a^n)^{-1}$$

$$=a^m a^{-n}=a^{m-n}\in H \qquad [\because m-n\in Z]$$

$$\because x,y\in H \Rightarrow xy^{-1}\in H$$

साथ ही $H\neq\phi, \because n=1$ के लिये $a^1=a\in H$ में

इसलिये H,G का एक उपसमूह है

इस प्रमेय से स्पष्ट है कि समूह G का प्रत्येक अवयव एक समूह का जनन करता है, जिसे चक्रीय उपसमूह कहतें हैं अर्थात किसी समूह G के प्रत्येक अवयव a के लिये $H=\{a^n \mid n\in Z\}, G$ का एक उपसमूह होता है । जिसे a द्वारा जनित चक्रीय उपसमूह कहतें हैं । तथा $H=[a]$ सकेंत रूप में व्यक्त करतें हैं ।

उदाहरण : समूह $G=\{1,-1,i,-i,x\}$ का $H=\{1,-1,x\}$ चक्रीय उपसमूह है क्योंकि H के प्रत्येक अवयव को -1 कि पूर्णांक घात के रूप में लिखा जा सकता है, जैसे कि $1=(-1)^2, -1=(-1)^1$ इत्यादि ।

इसलिये H चक्रीय उपसमूह है जिसका -1 जनक अवयव है, अत: $H=[-1]$

2.10 चक्रीय समूह

यदि समूह G में एक ऐसा अवयव a विद्यमान है कि G प्रत्येक अवयव a की पूर्णांक घात के रूप मे व्यक्त किया जा सकता हो, अर्थात G का प्रत्येक अवयव a^n रूप का हो जहाँ $n\in Z$; तो G को a द्वारा जनित चक्रीय समूह कहतें हैं तथा a इसका जनक अवयव कहलाता है ।

अवयव a द्वारा जनित चक्रीय समूह G को संकेत $G=[a]$ द्वारा व्यक्त करतें हैं । अतएव स्पष्ट है कि यदि a समूह G का जनक अवयव है तो

$$G=\{....a^{-3},a^{-2},a^{-1},a^{0}=e,a^{1},a^{2},a^{3},.....\}$$
$$=\{a^{n}\mid n\in Z\}$$

यहाँ यह आवश्यक नहीं है कि प्रत्येक अवयव भिन्न - 2 हो

टिप्पणी 1 : चक्रीय समूह केवल एक अवयव द्वारा जनित हो जाता है इसलिये इसे मोनोजैनिक भी कहतें हैं ।

टिप्पणी 2 : चक्रीय समूह G में एक से अधिक भी जनक अवयव हो सकतें हैं ।

टिप्पणी 3 : यदि चक्रीय समूह G कि समूह संक्रिया योग चिन्ह (+) से व्यक्त की गई हो तो,

$$G=[a]=\{.....-3a,-2a,-a,0a,a,2a,3a.....\}$$

अर्थात G का प्रत्येक अवयव na रूप का होगा, जहाँ $n\in Z$

उदाहरण 1 : $G=\{1,\omega,\omega^{2},x\}$ एक चक्रीय समूह है जिसका ω जनक है , क्योंकि,

$$1=(\omega^{3}),\omega=(\omega^{1}),\omega^{2}=(\omega^{2})$$

अर्थात G का प्रत्येक अवयव जनक ω की पूर्णांक घात के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अतएव

$$G=(\omega^{1},\omega^{2},\omega^{3})$$

इसी प्रकार ω^{2} भी जनक है क्योंकि G का प्रत्येक अवयव ω^{2} की पूर्णांक घात के रूप में लिखा जा सकता है जैसे -

$$1=(\omega^{2})^{3},\omega=(\omega^{2})^{2},\omega^{2}=(\omega^{2})^{1}$$

अत: $G=\{(\omega^{2})^{1},(\omega^{2})^{2},(\omega^{2})^{3}\}$

$\therefore G=[\omega]=[\omega^{2}]$

उदाहरण 2 : $G=\{1,-1,i,-i,x\}$ एक चक्रीय समूह है जिसके जनक अवयव i तथा -i है क्योंकि G के प्रत्येक अवयव को i या -i कि पूर्णांक घात के रूप में लिखा जा सकता है जैसे

$$1=(i)^{4},-1=(i)^{2},i=(i)^{1},-i=(i)^{3}$$

इसी प्रकार

$$1=(i)^{4},-1=(-i)^{2},i=(-i)^{3},-i=(-i)^{1}$$

अतएव $G=\{i^{1},i^{2},i^{3},i^{4},\}$ या $G=\{(-i)^{1},(-i)^{2},(-i)^{3},(-i)^{4}\}$

$\therefore G=[i]=[-i]$

उदाहरण 3 : समूह $G=\{0,1,2,3,4,5,+_{6}\}$ चक्रीय समूह है जिसके जनक 1 तथा 5 है, यहाँ

$$1^{1}=1,1^{2}=1+_{6}1=2,1^{3}=1+_{6}1+_{6}1=3,1^{4}=1+_{6}1+_{6}1+_{6}1=4$$
$$1^{5}=1+_{6}1+_{6}1+_{6}1+_{6}1=5,1^{6}=1+_{6}1+_{6}1+_{6}1+_{6}1+_{6}1=0$$

अतः $G=\{1,1^2,1^3,1^4,1^5,1^6=0\}=[1]$

इसी प्रकार $5^1=5, 5^2=5+_6 5=4, 5^3=5+_6 5+_6 5=3, 5^4=5+_6 5+_6 5+_6 5=2$

$5^5=5+_6 5+_6 5+_6 5+_6 5=1, 5^6=5+_6 5+_6 5+_6 5+_6 5+_6 5=0$

अतः $G=\{5^1,5^2,5^3,5^4,5^5,5^6=0\}=[5]$

$\therefore G=[1]=[5]$

उदाहरण 4 : तीन अशांक एकान्तर समूह $A_3=\{(1),(123),(132)\}$ एक चक्रीय समूह है जिसके (123) तथा (132) जनक है।

उदाहरण 5 : $G=\left\{.....\frac{1}{16},\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,4,8,16.....\right\}$ गुणन संक्रिया के लिये एक चक्रीय समूह है जिसके जनक $\frac{1}{2}$ तथा 2 है ।

उदाहरण 6 : (Z,+) एक अपरिमित चक्रीय समूह है, जिसके 1 तथा -1 जनक हैं ।

2.11 चक्रीय से सम्बन्धित प्रमेय

प्रमेय 1 : प्रत्येक चक्रीय समूह क्रमविनिमेय होता है

उपपत्ति : माना कि G एक चक्रीय समूह है जिसका जनक a है तो G के प्रत्येक अवयव को a की पूर्णांक घात के रूप में व्यक्त किया जा सकता है । अब G के दो अवयव x तथा y लें तो, दो पूर्णांक r तथा s इस प्रकार होगें कि x = a^r तथा y = a^5

$\therefore xy=a^r a^s=a^{r+s}=a^{s+r}$ $\quad [\because r+s=s+r, \forall r,s\in z]$

$= a^{s+r}$

$= yx, \forall x, y\in G$

$\because$ G एक क्रमविनिमेय समूह है ।

टिप्पणी : इस प्रमेय का विलोम सदैव सत्य नहीं होता क्योंकि (R, +) एक क्रमविनिमेय समूह है परन्तु यह चक्रीय समूह नहीं है ।

प्रमेय 2 : यदि a किसी चक्रीय समूह का जनक हो तो, a^{-1} भी उसका जनक होता है ।

उपपत्ति : माना कि G एक चक्रीय समूह है जिसका जनक a है । यदि a^n,G का कोई अवयव है तो $a^n=(a^{-1})^{-n}$ अर्थात G के प्रत्येक अवयव को a^{-1} की पूर्णांक घात के रूप में भी लिखा जा सकता है । फलत: a^{-1} भी G का जनक होगा ।

टिप्पणी : समूह $G=\{1,\omega,\omega^2,\times\}$ एक चक्रीय समूह है जिसका ω जनक अवयव है तो हम देखते हैं कि ω का प्रतिलोम ω^2 भी जनक अवयव है इसी प्रकार चक्रीय समूह $G=\{1,-1,i,-i,\times\}$ में जनक अवयव i का प्रतिलोम -i भी G का जनक है ।

प्रमेय 3 : एक परिमित चक्रीय समूह की कोटि उसके जनक की कोटि के बराबर होती है ।

उपपत्ति : माना कि $G=[a]$ एक परिमित चक्रीय समूह है जिसके जनक अवयव a की कोटि n है, अर्थात् a^n=e जहाँ n न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक है ।

पुन: माना कि $H=\{a,a^2,.....a^n=e\}$ तब हम सिद्ध करेगें कि H = G इसके लिए सर्वप्रथम हम दर्शित करेगें कि समुच्चय H में कोई भी दो अवयव समान नहीं है । यदि सम्भव हो तो माना कि

$$a^i=a^j, 1\le j<i\le n$$

तब $a^i a^{-j}=a^j a^{-j}$

$\Rightarrow a^{i-j}=a^0=e$

$\Rightarrow o(a)\le i-j$

$\Rightarrow n\le i-j$ जो असम्भव है क्योंकि n न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक संख्या है जिसके लिये $a^n=e$ अत: समुच्चय G के सभी अवयव भिन्न - भिन्न होगें ।

पुन: माना कि x, कोई स्वेच्छ अवयव G का है चूकि G चक्रीय समूह है जिसका अववय a है इसलिये एक पूर्णाक l इस प्रकार होगा कि $x=a^l$

अब भाग कलन विधि से

$l=nq+r,\quad q,r\in Z, 0\le r<n$

$\therefore x=a^l=a^{nq+r}=a^{nq}a^r=\left(a^n\right)^q a^r=e^q a^r=a^r\in H$

परंतु $0\le r<n\Rightarrow a^r\in H\Rightarrow x\in H$

$\therefore \forall x\in G\Rightarrow x\in H$

अत: $G\subset H$ .....(1)

साथ ही सवृंतता गुणधर्म से H का प्रत्येक अवयव G में है,

इसलिये $H\subset G$ .....(2)

फलत: (i) व (ii) से

H = G

$\Rightarrow o(H)=o(G)$

परन्तु $o(H)=n=o(a)$

$\therefore o(G)=o(a)$

उपप्रमेय : एक n कोटि का परिमित समूह चक्रीय होता है यदि और केवल यदि इसमे n कोटि का एक अवयव विद्यमान हो

उपपत्ति : माना कि G एक n कोटि का परिमित चक्रीय समूह है जिसका जनक अवयव n है तो उपरोक्त प्रमेय से $o(a)=o(G)=n$

विलोमत : माना कि G, n कोटि का परिमित समूह है जिसमें a एक ऐसा अवयव विद्यमान है कि o(a) = n तब हम सिद्ध करेगें कि G चक्रीय समूह है । यदि H=[a] हो तो $H\subset G$ तथा

$o(a)=n \quad \Rightarrow o(H)=n$

$\Rightarrow o(H)=o(G)$

$\Rightarrow G=H=[a]$

$\Rightarrow G$ एक चक्रीय समूह है जिसका जनक अवयव a है

टिप्पणी : इस प्रमेय रो एक महत्त्वपूर्ण परिणाम निर्गम होता है । यदि G एक n कोटि का परिमित समूह है, अब यदि हमें यह ज्ञात करना है कि यह चक्रीय समूह है अथवा नहीं । इसके लिये हम G में एक ऐसा अवयव ढूंढतें है जिसकी कोटि n हो। यदि हमें ऐसा अवयव प्राप्त हो जाता है तो G चक्रीय होगा एवं वह अवयव इसका जनक होगा ।

उदाहणार्थ, समूह $G=\{1,-1,i,-i,x\}$ में अवयव i तथा -i इस प्रकार है कि जिनकी कोटि समूह H की कोटि के बराबर है अर्थात $o(G)=4=o(i)=o(-i)$ अत: G चक्रीय समूह होगा जिसके जनक अवयव i तथा -i होगें ।

प्रमेय 4 : सिद्ध करो कि अपरिमित चक्रीय समूह के दो और केवल दो जनक होते हैं ।

उपपत्ति : माना कि $G=[a]$ एक अपरिमित चक्रीय समूह है जिसका जनक a है तो इसका प्रतिलोम a^{-1} भी इसका जनक होगा ।

यह दोनों जनक भिन्न-भिन्न होगें, क्योंकि

$$a=a^{-1}\Rightarrow aa=a^{-1}a$$
$$\Rightarrow a^2=a^0=e$$
$$\Rightarrow o(a)=2$$
$$\Rightarrow o(G)=2$$

जो सम्भव नहीं है क्योंकि G एक अपरिमित समूह है, अत: $a\neq a^{-1}$

अब हम सिद्ध करेगें कि G का इन दोनों के अतिरिक्त अन्य कोई जनक नहीं है ।

सम्भव हो तो माना कि $a^m, m\neq\pm1$ भी G का एक जनक है ।

चूंकि $a\in G$, अत: कोई पूर्णाक r इस प्रकार होगा कि a को a^m कि पूर्णांक घात के रूप में व्यक्त किया जा सकता है ।

$$\therefore a=\left(a^m\right)^r=a^{mr}$$
$$\Rightarrow aa^{-1}=a^{mr}a^{-1}$$
$$\Rightarrow e=a^{mr-1}$$
$$\Rightarrow o(a)\leq mr-1$$
$$\Rightarrow o(G)\leq mr-1 \qquad \left[\because o(a)=o(G)\right]$$
$$\Rightarrow o(G) \text{ परिमत है}$$

जो कि विरोधाभास है अत: a^m, G का जनक नहीं हो सकता इसलिये G का a, a^{-1} के अतिरिक्त अन्य कोई जनक नहीं हो सकता ।

परिमाणत: G के दो और केवल दो ही जनक है ।

टिप्पणी : (Z, +) एक अपरिमित चक्रीय समूह है जिसके केवल दो ही जनक 1 तथा -1 है ।

प्रमेय 5 : एक चक्रीय समूह का प्रत्येक उपसमूह चक्रीय होता है ।

उपपत्ति : माना कि $G=[a]$ एक चक्रीय समूह है जिसका H एक उपसमूह है । यदि H=G या $H=\{e\}$, तो स्पष्ट H भी चक्रीय होगा ।

माना कि H, G एक उचित उपसमूह है अर्थात $H \subset G$, तो H का प्रत्येक अवयव a की घात में होगा तथा H में तत्समक अवयव के अलावा कम से कम एक अवयव $a^m (m \in Z, m \neq 0)$ होगा।

अब $a^m \in H \Rightarrow a^{-m} \in H$ [$\because H$ उपसमूह है]

चूंकि $0 \neq m \in Z \Rightarrow m > 0$ या $-m > 0$

अतएव H में a की धनात्मक पूर्णांक घात अवश्य विद्यमान है

माना कि m न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक इस प्रकार है कि $a^m \in H$, तब हम सिद्ध करेगें कि H के प्रत्येक स्वेच्छ अवयव a^s को a^m की पूर्णांक घात के रूप में लिखा जा सकता है । अर्थात $H\left[a^m\right]$

इस प्रकार यदि $a^5 \in H,$ तो भाग फलन विधि से r तथा q ऐसे दो पूर्णांक विद्यमान होगें कि

s = mq + r जहां $0 \leq r < m$

या r = s - mq

$\therefore a^r = a^{s-mq}$

अब चूँकि H, G का एक उपसमूह है इसलिये

$$a^s \in H, a^m \in H \Rightarrow a^s \in H, a^{-m} \in H$$

$$\Rightarrow a^s \in H, \left(a^{-m}\right)^q \in H \qquad [\because H \text{ में सवृंतता से}]$$

$$\Rightarrow a^s \in H, a^{-mq} \in H$$

$$\Rightarrow a^{s-mq} \in H \qquad [\because H \text{ में सवृंतता से}]$$

$$\Rightarrow a^{s-mq} \in H$$

$$\Rightarrow a^r \in H, \text{जहाँ } 0 \leq r < m \qquad [\because s - mq = r]$$

परन्तु m न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक है जिसके लिये $a^m \in H$ इसलिये $a^s \in H$ तभी सम्भव है जबकि r = 0

$$\because s = mq \Rightarrow a^s = a^{mq} = \left(a^m\right)^q$$

यहाँ a^s, H का स्वेच्छ अवयव है अत: H के प्रत्येक अवयव को (a^m) की पूर्णांक घात रूप में लिखा जा सकता है । फलत: $H = \left[a^m\right]$

अत: सिद्ध हुआ कि G का प्रत्येक उपसमूह भी चक्रीय होता है ।

उपप्रमेय : अपरिमित चक्रीय समूह का प्रत्येक उचित उपसमूह अपरिमित होता है ।

उपपत्ति : माना कि $G = [a]$ एक अपरिमित चक्रीय समूह है यदि H,G का उचित उपसमूह है तथा m एक न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक सख्याँ इस प्रकार है कि $a^m \in H,$ तब उपरोक्त प्रयोग से $H = \left[a^m\right]$

अब यदि सम्भव हो तो माना कि H परिमित समूह तथा $o(H) = n(n \in N),$

अब $o(H) = n \Rightarrow o\left(a^m\right) = n$

$$\Rightarrow \left(a^m\right)^n = e$$
$$\Rightarrow a^{mn} = e$$
$$\Rightarrow o(a) \le mn$$
$$\Rightarrow o(G) \le mn \qquad \left[\therefore o(a) = o(G)\right]$$
$$\Rightarrow o(G) \text{ परिमित है}$$

जो असम्भव है , अतः H की कोटि परिमित नहीं हो सकती। फलतः G का प्रत्येक उपसमूह अपरिमित है।

टिप्पणी : चक्रीय समूह $G = \{1, -1, i, -i, x\}$ का $H = \{1, -1, x\}$ एक उपसमूह है तो H भी चक्रीय होगा क्योंकि H के अवयवो को -1 की पूर्णांक घात के रूप में लिखा जा सकता है ।

टिप्पणी : अपरिमित चक्रीय समूह (Z,+) का $H = \{.....-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ..., +\}$ उपसमूह है तो H अपरिमित है ।

प्रमेय 6 : यदि चक्रीय समूह $G = [a]$ का समूंहाक n है तो सिद्ध किजिए कि a^m भी G का जनक होगा यदि और केवल यदि m,n परस्पर रूढ़ है अर्थात (m,n) = 1 है ।

उपपति : माना कि $G = [a]$ एक चक्रीय समूह है तथा $H = \left[a^m\right]$ एक चक्रीय उपसमूह है, जहाँ m वह न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक है जिसके लिये $a^m \in H$

स्पष्टत: $H \subseteq G$, , क्योंकि a^m की प्रत्येक पूर्णांक घात a की भी पूर्णांक घात है

यदि m तथा n परस्पर रूढ़ है तो x, y दो पूर्ण संख्याएँ इस प्रकार होगी कि

$$mx + ny = 1$$
$$\therefore a^{mx+ny} = a^1$$
$$\Rightarrow a^{mx} a^{ny} = a$$
$$\Rightarrow \left(a^m\right)^x \left(a^n\right)^y = a$$
$$\Rightarrow \left(a^m\right)^x e^y = a \qquad \left[\because o(a) = o(G) = n \Rightarrow a^n = e\right]$$
$$\Rightarrow \left(a^m\right)^x = a \qquad \left[\because e^y = e\right]$$

$\because a$ की प्रत्येक पूर्णांक घात a^m की भी पूर्णांक घात होगी, इसलिये $G \subseteq H$

अत: $G = H = \left[a^m\right]$ अर्थात G का जनक a^m है ।

विलोमत : माना कि a^m,G का जनक है परन्तु $a \in G$, इसलिये एक ऐसा पूर्णांक x विद्यमान होगा कि

$$\left(a^m\right)^x = a$$
$$\Rightarrow a^{mx} = a$$
$$\Rightarrow a^{mx}.e^y = ae^y = a$$
$$\Rightarrow a^{mx}\left(a^n\right)^y = a \qquad \left[\because a^n = e\right]$$

$\Rightarrow a^{mx}a^{ny} = a$

$\Rightarrow a^{mx+ny} = a$

$\Rightarrow mx + ny = 1$

$\therefore m,n$ परस्पर रूढ़ है अर्थात $(m,n) = 1$

टिप्पणी 1 : यदि अवयव a से जनित चक्रीय समूह का समूहांक n है तो G के जनकों की संख्या n से कम होगी । यहाँ a की वे सभी पूर्णांक घातें a^m चक्रीय समूह G की जनक होगी, जिनके लिये m तथा n परस्पर रूढ़ (सापेक्षिक अभाज्य) है

उदाहणार्थ, यदि चक्रीय समूह $G = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8 = e\}$ का समूहांक 8 है तो G के अन्य जनक a^3, a^5, a^7 होगें, क्योंकि. m = 3,5,7 संख्याऐं, 8 के सापेक्ष अभाज्य है ।

अत: G के सभी जनक है ; a, a^3, a^5, a^7

टिप्पणी 2 : यदि $G = [a]$ एक चक्रीय समूह है जिसका समूहांक अभाज्य संख्या p है तो इसके सभी जनक अवयव क्रमश: $a, a^2, ...a^{p-1}$ होगें, अतएव G के p -1 जनक होगें |

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1 : उस चक्रीय समूह के सभी जनक ज्ञात कीजिए जिसकी कोटि

(i) 7 (ii) 10 हो

हल : (i) माना कि $G = [a]$, 7 कोटि का चक्रीय समूह है तो G के जनक a^m रूप के होगें जहां $m < 7, 7$ के सापेक्ष अभाज्य है |फलत: m = 2,3,4,5,6

अतः G के सभी जनक $a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$ है |

(ii) माना कि $G = [a], 10$ कोटि का एक चक्रीय समूह है तो G के अन्य जनक a^m रूप के होगें जहां m =<10,10 के सापेक्ष अभाज्य है | फलत: m = 3,7,9

अतः G के सभी जनक a, a^3, a^7, a^9 हैं |

उदाहरण 2 : सिद्ध कीजिए कि समूह $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \times_7\}$ एक चक्रीय समूह है इसके सभी जनक ज्ञात कीजिए

हल : दिये गये समूह G कि कोटि 6 है अतः G चक्रीय होगा यदि इसमे समूह कि कोटि के बराबर किसी अवयव की कोटि हो |

$1^1 = 1 \Rightarrow o(1) = 1$

$2^1 = 2, 2^2 = 2x_7 2 = 4, 2^3 = 2x_7 2x_7 2 = 1 \Rightarrow o(2) = 3$

$3^1 = 3, 3^2 = 3x_7 3 = 2, 3^3 = 3x_7 3x_7 3 = 6$ इसी प्रकार $3^4 = 4, 3^5 = 5, 3^6 = 1 \Rightarrow o(3) = 6$

$4^1 = 4, 4^2 = 1 \Rightarrow o(4) = 3$

$5^1 = 5, 5^2 = 4, 5^3 =, 6, 5^4 = 2, 5^5 = 3, 5^6 = 1 \Rightarrow o(5) = 6$

$$6^1 = 6, 6^2 = 1 \Rightarrow 0(6) = 2$$

अतएव यहाँ अवयव 3 व 5 इस प्रकार है कि जिनकी कोटि समूह G की कोटि के बराबर है अर्थात

$$o(3) = 6 = o(G)$$

$$o(5) = 6 = o(G)$$

$\therefore G$ एक चक्रीय समूह है जिसके 3 और 5 दो जनक है।

$\therefore G = [3] = [5]$

उदाहरण 3 : निम्न में प्रत्येक का एक - एक उदाहरण दीजिए

(i) एक परिमित क्रमविनिमेय समूह जो चक्रीय नहीं है

(ii) 2 या 2 में बड़ी कोटि का एक चक्रीय समूह जिसमें तत्समक के अतिरिक्त प्रत्येक अवयव जनक है

हल : (i) $G = \{I, A, B, C\}$ आव्यूहों के गुणा के लिये एक परिमित क्रमविनिमेय समूह है जहाँ

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, अतएव o(G) =4

अब हम प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात करतें हैं

चूँकि 1 तत्समक अवयव है $\therefore o(I) = 1$

तथा

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I, \qquad \therefore o(A) = 2$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I, \qquad \therefore o(B) = 2$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I, \qquad \therefore o(C) = 2$$

$\therefore$ समूह G में कोई भी अवयव ऐसा विद्यमान नहीं हैं जिसकी कोटि समूह की कोटि के बराबर हो, अतएव परिमित क्रमविनिमेय समूह G चक्रीय नहीं है ।

(ii) समूह $G = \{1, \omega, \omega^2, \times\}$ एक 3 कोटि का चक्रीय समूह है जिसके तत्समक अवयव के अतिरिक्त दोनों अवयव ω तथा ω^2 जनक है ।

टिप्पणी : चक्रीय समूह $G = \{1, -1, \times\}$ तथा $G = \{a, a^2, ...a^p = e\}$ जहां p अभाज्य है, में भी तत्समक अवयव के अतिरिक्त प्रत्येक अवयव जनक अवयव है ।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 3

निम्न में से कौनसा कथन सत्य / असत्य है -

(1) प्रत्येक चक्रीय समूह आबेली होता है तथा इसका विलोम भी सदैव सत्य है

(2) चक्रीय समूह जिसकी कोटि 2 या 2 से ज्यादा है, का प्रत्येक अवयव जनक अववय होता है

(3) प्रत्येक 4 या 4 से कम कोटि का समूह चक्रीय होता है

(4) S_3,एक चक्रीय समूह है

(5) A^3, एक चक्रीय समूह है

(6) (Z, +) का प्रत्येक उपसमूह चक्रीय होता है

(7) प्रत्येक समूह का कम से कम एक चक्रीय उपसमूह होता है

(8) यदि किसी समूह के सभी उपसमूह चक्रीय हो तो वह चक्रीय समूह होता है

(9) यदि किसी चक्रीय समूह की कोटि 6 है तो इसमे से कम से कम एक अवयव की कोटि 6 होगी

(10) यदि किसी चक्रीय समूह की कोटि 11 है तो इसके 10 जनक होगें

2.12 सारांश

इस इकाई में हमने क्रमचय समूह का अध्ययन किया, जिसके अवयव एक समुच्चय पर परिभाषित एकैकी आच्छादक फलन होते है, जिन्हें क्रमचय कहा जाता है । यदि समुच्चय में n अवयव हो तो इन पर परिभाषित सभी क्रमचयों का समुच्चय P_n क्रमचय गुणन संक्रिया के लिये $\lfloor n$ कोटि का सममित समूह कहलाता है । यह सममित समूह $P_n, n>2$के लिये अक्रमविनिमेय होता है जिसका $\frac{\lfloor n}{2}$ कोटि का एक उपसमूह होता है । जिसे समक्रमचयों का समूह या एकान्तर A_n समूह कहतें हैं ।

क्रमचयों को दो पंक्ति संकेत द्वारा व्यक्त किया जाता है । लेकिन विशेष स्थिति में इन्हें एक पंक्ति सकेंत अर्थात चक्र के रूप में भी लिखा जाता है । दो लम्बाई का चक्र पक्षान्तरण कहलाता है जो कि विषम क्रमचय होता है । किसी भी क्रमचय को पक्षान्तरणों के गुणनफल के रूप में विभिन्न प्रकार से लिखा जा सकता है, लेकिन इस प्रकार के सभी गुणनफलों में पक्षान्तरणों की संख्या सदैव सम या विषम ही होती है । इस विशेष गुण के कारण ही कोई क्रमचय, सम या विषम क्रमचय कहलाता है

इस इकाई में हमनें समूह के किसी अवयव की कोटि तथा एक विशेष प्रकार के क्रमविनिमेय समूह का भी अध्ययन किया, जिसके सभी अवयव एक ही अवयव (जनक) के पूर्ण घातों के रूप में लिखे जा सकते हैं । जिसको चक्रीय समूह कहा जाता है। परिमित चक्रीय समूह की कोटि उसके जनक की कोटि के बराबर होती है । यदि a किसी चक्रीय समूह का जनक है तो a^{-1} भी उसका जनक होता है । लेकिन अपरिमित चक्रीय समूह के केवल दो ही जनक होते हैं ।

2.13 शब्दावली

क्रमचय समूह	Permutation group
चक्रीय समूह	Cyclic group
एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण	One-one onto mapping
क्रमचय की घात	Degree of Permutation
क्रमचय गुणन	Product of Permutation

क्रमचयों का समूह	Group of permutation
सममित समूह	Symmetric group
चक्रीय क्रमचय या चक्र	Cyclic permutation or cycles
चक्र की कोटि	Order of a cycle
असंयुक्त चक्र	Disjoint cycle
क्रमचय की कोटि	Order of permutation
पक्षान्तरण	Transposition
सम और विषम क्रमचय	Even or odd permutation
समूह में किसी अवयव का पूर्णांक घात	Integral power of an element in a group
जनक	Generaor
सापेक्षिक अभाज्य	Relative prime

2.14 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

(1) असत्य (2) असत्य, गुणनफल तत्समक क्रमचय होना चाहिए

(3) सत्य (4) असत्य

(5) सत्य (6) सत्य

(7) सत्य (8) सत्य

(9) सत्य (10) सत्य

(11) सत्य (12) सत्य

(13) सत्य (14) सत्य

(15) असत्य

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

$(1) o(0)=1, o(1)=6, o(2)=3, o(3)=2, o(4)=3, o(5)=6$

$(2) o(e)=1, o(r)=o(s)=o(t)=2, o(p)=o(q)=3$

$(3) o(I)=1, o(A)=o(B)=o(C)=2$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 3

(1) असत्य इसका विलोम सदैव सत्य नहीं है

(2) असत्य तत्समक अवयव जनक अवयव नहीं होगा

(3) असत्य देखें चक्रीय समूह का व्याख्यात्मक उदाहरण 3(i)

(4) असत्य (5) सत्य

(6) सत्य (7) सत्य

(8) असत्य (9) सत्य

(10) सत्य, यदि किसी चक्रीय समूह की कोटि p (अभाज्य संख्या) है तो इसके p-1 जनक होते हैं।

2.15 अभ्यास प्रश्न

1. यदि $f=\begin{pmatrix}1234\\3241\end{pmatrix}, g=\begin{pmatrix}1234\\4123\end{pmatrix}$ 4 संकेतो पर दो क्रमचय है तो fog तथा gof ज्ञात कीजिये।

उत्तर : fog = (23), gof = (12)

2. यदि $f=\begin{pmatrix}12345\\15324\end{pmatrix}, g=\begin{pmatrix}12345\\23145\end{pmatrix}$ 5 संकेतो पर दो क्रमचय है तो निम्न ज्ञात कीजिए।

$(i)\ gof\ (ii)\ fog\ \ (iii)\ f^{-1}\ (iv)\ g^{-1}\ (v)\ f^{-1}og^{-1}\ \ (vi)(fog)^{-1}\ (vii)(gof)^{-1}$

उत्तर

$(i)(1243)(ii)(1523)\ \ (iii)(245)\ (iv)(132)\ (v)(1342)(vi)(1325)\ (vii)(1342)$

3. यदि $A=\begin{pmatrix}12345\\23154\end{pmatrix}$ तो ज्ञात कीजिये

(i) A^{-1}(ii) A^2(iii) A^3 (iv) A की कोटि

उत्तर (i) (132) (45) (ii) (132) (iii) (45) (iv) o(A)=6

4. यदि $\rho=\begin{pmatrix}123456789\\314286975\end{pmatrix}\in S_9$ तो ρ को असंयुक्त चक्रो के गुणनफल के रूप में लिखिए, इस प्रकार या अन्य प्रकार ρ की कोटि ज्ञात कीजिए । यह भी बतलाईये कि यह सम या विषम क्रमचय है ।

उत्तर:

ρ = (1342)(5879), सम क्रमचय o (ρ) = 4

5. यदि $p=\begin{pmatrix}12345\\24531\end{pmatrix}, q=(234)$ तो सिद्ध कीजिए $pqp^{-1}=(p(2)\,p(3)\,p(4))$

6. यदि $f=\begin{pmatrix}lmno\\nomla\end{pmatrix}$ तो ज्ञात कीजिये

(i) f^2 (ii) f^{-1} (iii) o(f)

उत्तर (i) (lm) (no) (ii) (lomn) (iii) 4

7. निम्न क्रमचयो को पक्षान्तरण के गुणनफल के रूप में लिखिए । यह भी बतलाइए कि यह सम या विषम क्रमचय है

$(i)\ \begin{pmatrix}123456\\364125\end{pmatrix}\ \ (ii)\begin{pmatrix}a\,b\,c\,d\,e\\d\,e\,a\,c\,b\end{pmatrix}\ \ (iii)\begin{pmatrix}123456789\\234516798\end{pmatrix}$

उत्तर : (i) (14) (13) (25) (26), सम (ii) (ac) (ad) (be), विषम (iii) (15) (14) (13) (12) (89), विषम

8. यदि $a=\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}$ तो समीकरण ax = b का S_3 में हल ज्ञात कीजिए ।

उत्तर : (1 3 2)

9. यदि f = (123), g = (45) तथा h = (26) तीन चक है तो प्रदर्शित कीजिए कि

(i) $(fg)^{-1} = g^{-1} f^{-1}$ (ii) $(fgh)^{-1} = h^{-1} g^{-1} f^{-1}$

10. प्रदर्शित कीजिए कि n अशांक के सभी विषय क्रमचयो का समुच्चय, क्रमचय गुणन सक्रिया के लिये समूह नहीं होता है

11. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{a, b.c.d\}$ के क्रमचय

(a),(abcd),(ac)(bd),(adcd),(ab)(cd),(bc)(ad),(bd),(ac) क्रमचय गुणन के लिये परिमित अक्रमविनिमेय समूह बनाते है

12. परिभाषा दीजिए

(i) क्रमचय

(ii) चक्रीय क्रमचय

(iii) पक्षान्तरण

(iv) समूह में किसी अवयव की कोटि

(v) चक्रीय समूह

(vi) चक्रीय समूह का जनक

(vii) चक की कोटि

13. निम्न समूहो में प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिए

(i) $(Z_5,+_5)$

(ii) $(1,2,3,4,x_5)$

(iii) $\left[\{2^n, n \in Z\};\right],$

(iv) (Q,+)

(v) $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e;\}$

उत्तर

(i) =1,o(1) = 5,o(2) = 5,o(3) = 5,o(4) = 5

(ii) o(1) = 1,o(2) = 4,o(3) = 4,o(4) = 2

(iii) o(1) =1, शेष सभी अवयव अपरिमित कोटि के है

(iv) o(0) =1, शेष सभी अवयव अपरिमित कोटि के है

(v) o(a) = 6,o(a^2) = 3,o(a^3) = 2,o(a^4) = 3,o(a^5) = 6,o(e) = 1

14. निम्न चकीय समूहो में सभी जनक अवयव ज्ञात कीजिए

(i) $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, = e\}$

(ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6 +_7\}$

उत्तर (i) $a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}$ (ii) 1,2,3,4,5,6

15. निम्न कोटि के चक्रीय समूहो के जनको की संख्या ज्ञात कीजिए

(i)10 (ii) 11 (iii) 12 (iv) 13

उत्तर : (i) 4 (ii) 10 (iii) 4 (iv) 12

16. उस चक्रीय समूह के सभी जनक ज्ञात कीजिए जिसकी कोटि (i) प्ले (ii) 12 हो

उत्तर : i) यदि $G=[a],8$ कोटि का चक्रीय समूह है तो a,a^3,a^5,a^7 इसके जनक है

(ii) यदि $G=[a],12$ कोटि का चक्रीय समूह है तो a,a^5,a^7,a^{11} जनक है

17. यदि $\sigma\begin{pmatrix}1234\\2341\end{pmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\{\sigma,\sigma^2,\sigma^3,\sigma^4\}$ क्रमचय गुणन के लिये एक चक्रीय समूह है तथा σ की कोटि भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर. σ की कोटि 4 है

18. सिद्ध कीजिए कि n अशांक के सभी क्रमचयो का समुच्चय P_n, क्रमचय गुणन सक्रिया के लिये $\underline{|n}$ कोटि का समूह होता है

इकाई 3 : सहकुलक, लेग्रेंज - प्रमेय (Cosets, Lagrange's Theorem)

इकाई की रूपरेखा

3.0 उद्देश्य

3.1 प्रस्तावना

3.2 सहकुलक (सहसमुच्चय)

3.3 सहकुलक से सम्बंधित प्रमेय

3.4 लेग्रेंज-प्रमेय

3.5 उपसमूह का सूचकांक

3.6 समूह में एक उपसमूह के सापेक्ष सर्वांगसमता सम्बंध

3.7 सारांश

3.8 शब्दावली

3.9 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

3.10 अभ्यास प्रश्न

3.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप किसी समूह G में उपसमूह H के सहकुलको के बारे में जान सकेंगे । आप लेग्रेंज प्रमेय से जान पायेंगे कि किसी समूह की कोटि का इसके उपसमूह की कोटि या समूह के किसी अवयव की कोटि से क्या सम्बंध है ।

3.1 प्रस्तावना

इकाई 2 मे हमने क्रमचय समूह तथा चक्रीय समूह का अध्ययन किया। इस इकाई मे हम किसी समूह G मे परिभाषित एक सर्वागसम सम्बंध का अध्ययन करेंगे, जो कि समूह G को उपसमूह H के सापेक्ष परस्पर असंयुक्त तुल्यता वर्गो में विभाजित करता है। ये वर्ग समूह G के H में सहकुलक या सहसमुच्चय कहलाते हैं अर्थात् H के सहकुलक समूह G का विभाजन करते हैं । इसलिये इन सभी सहकुलकों का संघ G के बराबर ही होता है ।

इस इकाई में हम लेग्रेंज प्रमेय का भी अध्ययन करेंगे । लेग्रेंज प्रमेय द्वारा समूह G व उपसमूह H की कोटि तथा इसके सहसमुच्ययों की संख्या में एक महत्वपूर्ण परिणाम का निर्गम होता है ।

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप प्रसामान्य उपसमूह तथा विभाग समूह के अध्ययन के लिये तैयार हो सकेंगे ।

3.2 सहकुलक (सहसमुच्चय)

माना H, किसी समूह G का एक उपसमूह है तथा a, G का कोई अवयव है, यदि G में गुणन (.) द्विचर संक्रिया है, तब समुच्चय aH = $\{ah \mid h \in H\}$ को G मे H का वाम सहकुलक (सहसमुच्चय) कहते हैं ।

इसी प्रकार समुच्चय $Ha=\{ha\,|\,h\in H\}$ को G मे H का दक्षिण सहकूलक (सहसमुच्चय) कहते हैं। उपरोक्त परिभाषा से स्पष्ट हैं कि G के प्रत्येक अवयव के संगत G मे H का वाम सहसमुच्चय और एक दक्षिण सहसमुच्चय विद्यमान होता है तथा

$$aH\subset G, Ha\subset G \quad \forall a\in G$$

अब H, G का उपसमूह है इसलिये H में तत्समक अवयव e अवश्य विद्यमान ।

$$\therefore e\in H\Rightarrow ea\in Ha$$

$$\Rightarrow a\in Ha$$

तथा $e\in H \Rightarrow ae\in aH$

$$\Rightarrow a\in aH$$

अतएव सहसमुच्चय Ha तथा aH में कम से कम एक अवयव 8 अवश्य विद्यमान, इसलिये $Ha\neq\phi$ तथा $aH\neq\phi$ अर्थात् वाम तथा दक्षिण सहसमुच्चय अरिक्त होते हैं ।

यदि $a=e\in G$ तब

$$He=\{he\,|\,h\in H\}=\{h\,|\,h\in H\}=H \qquad [\because he=h, \forall h\in H]$$

तथा $$eH=\{he\,|\,h\in H\}=\{h\,|\,h\in H\}=H \qquad [\because eh=h, \forall h\in H]$$

इसलिये $He=H=eH$ अर्थात उपसमूह H, समूह G में स्वयं का एक वाम तथा दक्षिण सहसमुच्चय होता है ।

टिप्पणी 1: सामान्यतः $aH\neq Ha$, परन्तु क्रमविनिमेय समूह G के लिये $ha=ah,\ \forall h\in H$

अतएव $aH=\{ah\,|\,h\in H\}=\{ha\,|\,h\in H\}=Ha, \forall h\in G$

अर्थात यदि G क्रमविनिमेय समूह है तो समूह G में H के वाम सहसमुच्चय संगत दक्षिण सहसमुच्चय के बराबर होते हैं ।

टिप्पणी 2. यदि समूह Gकी संक्रिया योग (+) है तो

$a+H=\{a+h\,|\,h\in H\}$ तथा $H+a\{|\,h+a\,|\,h\in H\}$

क्रमशः G में H के वाम सहसमुच्चय तथा दक्षिण सहसमुच्चय होंगे ।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1 : समूह $G=[\{1,-1,i,-i,\};]$ में उपसमूह $G=[\{1,-1\};]$ के सभी ज्ञात कीजिए ।

हल : समूह G में H के विभिन्न वाम तथा दक्षिण सहसमुच्चय निम्न होंगे

$$1H=H1=\{1.1,-1.\}=\{1,-1\}=H$$

$$-1H=H(-1)=\{1.(-1),(-1).(-1)\}=\{-1,1\}=H$$

$$iH=Hi=\{1.i,-1.i\}=\{i,-i\}$$

$$-iH=H(-i)=\{1.(-i),-1.(-1)\}=\{-i,i\}=Hi$$

उपरोक्त से स्पष्ट है कि G में H के विभिन्न सहसमुच्चय निम्न हैं

$$H, Hi$$

या $$H, iH$$

साथ ही, $G=H\cup Hi=H\cup iH$

अतएव समूह G दक्षिण सहकुलकों के संघ के बराबर है, इसी प्रकार यह वाम सहकुलकों के संघ के बराबर भी है ।

टिप्पणी : यहाँ G क्रमविनिमेय हैं अतएव प्रत्येक वाम सहकुलक उसके संगत दक्षिण सहकुलक के बराबर होगा ।

उदाहरण 2 : समूह $(I,+)$ में $5I$ के सभी सहकुलक (सहसमुच्चय) ज्ञात कीजिए, जहाँ I पूर्णांको का समुच्चय है ।

हल : समूह $G=(I,+)=(.....-3,-2,-1,0,1,2,3,.....,+)$ है

अब माना कि $H=5I$ अतएव,

$$H=(.....-15,-10,-5,0,5,10,15.....)$$

स्पष्टत: H समूह G का उपसमूह हैं । यहाँ समूह G क्रमविनिमेय है,

अत: प्रत्येक वाम सहसमुच्चय उसके संगत दक्षिण सहसमुच्चय के समान होगा । अब समूह G में H के विभिन्न सहसमुच्चय निम्न होंगे-

$0\in G$ तथा $0+H=H+0=\{.....-14,-10,-5,0,5,10,15.....\}=H$

पुन: $1\in G$ तथा $1+H=H+1=\{.....-14,-9,-4,1,6,11,16.....\}$

$2\in G$ तथा $2+H=H+2=\{.....-13,-8,-3,2,7,12,17.....\}$

$3\in G$ तथा $3+H=H+3=\{.....-12,-7,-2,3,8,13,18.....\}$

$4\in G$ तथा $4+H=H+4=\{.....-11,-6,-1,4,9,14,19.....\}$

$5\in G$ तथा $5+H=H+5=\{.....-10,-5,-0,5,10,15.....\}=H$

$6\in G$ तथा $6+H=H+6=\{.....-9,-4,1,6,11,16.....\}=H+1$

....

$-1\in G$ तथा $-1+H=H+(-1)=\{.....-16,-11,-6,-1,4,9,14,.....\}=H+4$

$-2\in G$ तथा $-2+H=H+(-2)=\{.....-17,-12,-7,-2,3,8,13,.....\}=H+3$

$-3\in G$ तथा $-3+H=H+(-3)=\{.....-13,-8,-3,2,7,12,.....\}=H+2$

....

अत: उपरोक्त से स्पष्ट है कि G में H के केवल पांच विभिन्न सहसमुच्चय हैं

$$H, H+1, H+2, H+3, H+4$$

या $$H, 1+H, 2+H, 3+H, 4+H$$

साथ ही $G=H\cup(H+1)\cup(H+2)\cup(H+3)\cup(H+4)=H\cup(1+H)\cup(2+H)\cup(3+H)\cup(4+H)$

अतएव समूह G , सभी वाम अथवा दक्षिण सहसमुच्चयों के संघ के बराबर है

टिप्पणी: nI के $(I,+)$ में n सहसमुच्चय होते हैं ।

उदाहरण 3 : समूह $G=\{z_4,+4\}$ में $H=\{0,2\}$ के सभी सहसमुच्चय ज्ञात कीजिए

हल : समूह $G=\{z_4,+_4\}=\{0,1,2,3,+_4\}$ तथा $H=\{0,2\}$ स्पष्टत: H, समूह G का उपसमूह है । यहाँ समूह G क्रमविनिमेय है अत: प्रत्येक वाम सहसमुच्चय उसके संगत दक्षिण सहसमुच्चय के समान होगा । अत: समूह G मे H के विभिन्न सहसमुच्चय निम्न होंगे

$0\in G$ तथा $0+H=H+0=\{0+_4 0, 0+_4 2\}=\{0,2\}=H$

$1\in G$ तथा $1+H=H+1=\{1+_4 0, 1+_4 2\}=\{1,3\}$

$2\in G$ तथा $2+H=H+2=\{2+_4 0, 2+_4 2\}=\{2,0\}=H$

$3\in G$ तथा $3+H=H+3=\{3+_4 0, 3+_4 2\}=\{3,1\}=H+1$

अत: उपरोक्त से स्पष्ट है कि G में H के दो सहसमुच्चय है

$H, H+1$

या $H1+H$

3.3 सहकुलक से सम्बंधित प्रमेय प्रमेय

प्रमेय 1: यदि H, समूह G का कोई उपसमूह हैं तथा $H\in H$, तब $Hh=H=hH$

उपपति : माना कि $h\in H$ तब हमें सिद्ध करना हैं कि $Hh=H$

माना की $h'H$ को कोई स्वेच्छ अवयव हैं अत:

$h'\in H \Rightarrow h'h\in H \Rightarrow Hh\subseteq H$ (संवृतता से $h'\in H, h\in H \Rightarrow h'h\subseteq H$)

$h'=(h'h^{-1})h\in Hh \Rightarrow H\subseteq Hh$ $(\because h\in H\Rightarrow h^{-1}\in H)$

उपरोक्त से, $Hh=H$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $H=hH$

अत: $Hh=H=hH$

टिप्पणी : यहाँ सिद्ध होता है कि G के अवयव के संगत G में H का दक्षिण (वाम) सहसमुच्चय H ही होगा, यदि यह अवयव H में भी है

प्रमेय 2 : यदि समूह G का एक उपसमूह H है तथा $a,b\in G$ तो

(i) $Ha=Hb\Leftrightarrow ab^{-1}\in H$

(ii) $aH=bH\Leftrightarrow b^{-1}\in H$

उपपति: माना कि $Ha=Hb$, चूंकि a सहसमुच्चय Ha का अवयव है ।

$$\begin{aligned}\because a\in Ha\Rightarrow a\in Hb &\Rightarrow ab^{-1}\in (Hb)b^{-1}\\ &\Rightarrow ab^{-1}\in H(bb^{-1})\\ &\Rightarrow ab^{-1}\in He\\ &\Rightarrow ab^{-1}\in H\end{aligned}$$

विलोमत: माना कि

$$ab^{-1} \in H \Rightarrow Hab^{-1} = H \qquad (\because h \in H \Rightarrow Hh = H)$$
$$\Rightarrow Hab^{-1}b = Hb$$
$$\Rightarrow Hae = Hb$$
$$\Rightarrow Ha = Hb$$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$aH = bH \Rightarrow a^{-1}b \in H$$

हम जानते हैं कि H एक उपसमूह हैं तो प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम इसमें विद्यमान होगा अत:

$$a^{-1}b \in H \Rightarrow (a^{-1}b)^{-1} \in H$$
$$\Rightarrow b^{-1}(a^{-1})^{-1} \in H$$
$$\Rightarrow b^{-1}a \in H$$

इसलिये सिद्ध होता है कि

$$aH = bH \Leftrightarrow b^{-1}a \in H$$

प्रमेय 3 : किसी समूह के उपसमूह के कोई दो दक्षिण (वाम) सहसमुच्चय या तो सर्वसम होते हैं या असंयुक्त

उपपति : माना कि H किसी समूह G का एक उपसमूह हैं जिसके Ha और Hb ऐसे दो दक्षिण सहसमुच्चय हैं जो असंयुक्त नहीं है तो हम सिद्ध करेंगे कि $Ha = Hb$

$\because Ha \cap Hb \neq \phi$ इसलिये सहसमुच्चयों Ha तथा Hb में कम से कम एक अवयव (माना c) उभयनिष्ठ होगा

$\therefore c \in Ha$ तथा $c \in Hb$, जहाँ $c = h_1 a$ तथा $c = h_2 b; h_1, h_2 \in H$

$$\therefore h_1 a = h_2 b$$
$$\Rightarrow b = h_2^{-1} h_1 a$$
$$\therefore Hb = H(h_2^{-1} h_1 a) = (Hh_2^{-1} h_1)a = Ha \qquad \left[\because h_2^{-1} h_1 \in H \Rightarrow Hh_2^{-1} h_1 = H\right]$$

अत: यदि $Ha \cap Hb \neq \phi$ तो $Ha = Hb$

अर्थात् H के कोई दो दक्षिण सहसमुच्चय असंयुक्त नहीं है तो सर्वसम होंगे ।

अत: यह सिद्ध हुआ कि उपसमूह के कोई दो दक्षिण सहसमुच्चय या तो सर्वसम होते हैं या असंयुक्त दो वाम सहसमुच्चयों के लिये भी यह गुणधर्म इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है ।

टिप्पणी : इस प्रमेय से हमें ज्ञात होता है । कि यदि दो दक्षिण (वाम) सहसमुच्चयों में एक भी अवयव उभयनिष्ठ है तो वह सर्वसम होंगे ।

प्रमेय 4 : यदि H किसी समूह G का एक उपसमूह हैं तो G, H के सभी वाम (दक्षिण) सहसमुच्चयों के संघ के बराबर होता है, अर्थात् $G = \bigcup_{a \in G} aH = \bigcup_{a \in G} Ha$

उपपति :

$$\because a \in G \Rightarrow a \in aH$$

$$\Rightarrow a \in \bigcup_{a \in G} aH \qquad \text{.....(1)}$$

$$\therefore G \subseteq \bigcup_{a \in G} aH$$

पुन: क्योंकि $aH \subseteq G \ \forall a \in G$

$$\therefore \bigcup_{a \in G} aH \subseteq G \qquad \text{.....(2)}$$

समीकरण (1) और (2) से ।

$$G = \bigcup_{a \in G} aH$$

इसी प्रकार हम निम्न सिद्ध कर सकते हैं -

$$G = \bigcup_{a \in G} Ha$$

टिप्पणी : उदाहरण 1 ,2 व 3 में भी हमने देखा कि समूह G सभी वाम (दक्षिण) सहसमुच्चयों के संघ के बराबर ही है।

प्रमेय 5 : यदि H किसी समूह G का एक उपसमूह है तो किन्ही $a, b \in G$ के लिये

(i) $aH \sim bH$ तथा $Ha \sim Hb$

(ii) $aH \sim Ha$

उपपति : माना कि a,b समूह G के कोई दो स्वेच्छ अवयव है तथा aH व bH इसके दो वाम सहसमुच्चय हैं । अब aH व bH में एकैकी संगतता होगी यदि aH व bH में एक एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण विद्यमान हो

माना कि प्रतिचित्रण $f:(ah) = bh \ \ \forall h \in H$ में इस प्रकार परिभाषित है कि

$$f(ah) = bh, \quad \forall h \in H$$

अब हम देखते हैं कि aH के दो अवयव $ah_1 = bh_2$,के लिये

$$f(ah_1) = f(ah_2) \Rightarrow bh_1 = bh_2$$

$$\Rightarrow h_1 = h_2 \qquad \text{(G में वाम निरसन नियम से)}$$

$$\Rightarrow ah_1 = ah_2$$

$\therefore f$ एकैकी है

पुन: यदि bh, सहसमुच्चय bH का स्वेच्छ अवयव है तो

$$bh \in bH \Rightarrow h \in H$$

$$\Rightarrow ah \in aH$$

परन्तु $f(ah) = bh$

अतएव bH के प्रत्येक अवयव bh के लिये, aH के अवयव ah का अस्तित्व इस प्रकार हैं कि $f(ah) = bh$

$\therefore f$ आच्छादक है।

अत: f एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है । परिणामत: $aH \sim bH$ अर्थात् H के किन्ही दो वाम सहसमुच्चयों में एकैकी संगतता होती हैं । इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि $Ha \sim Hb$

(ii) किसी $a \in G$ के लिये एक प्रतिचित्रण $f : aH \to Ha$ में इस प्रकार परिभाषित है कि $f(ah) = ha, \ \forall h \in H$ हम देखते है कि aH के दो अवयव ah_1 व ah_2 के लिये

$$f(ah_1) = f(ah_2) \Rightarrow h_1 a = h_2 a$$

(G में दक्षिण निरसन नियम से)

$$\Rightarrow h_1 = h_2$$

$$\Rightarrow ah_1 = ah_2$$

$\therefore f$ एकैकी है

पुन: प्रत्येक $ha \in Ha$ के लिये, aH में ah ऐसा अवयव विद्यमान है कि

f(ah) = ha

$\therefore f$ आच्छादक है

अत: f एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है । परिणामत: $aH \sim Ha$

उप्रमेय 1. $H \sim aH, H \sim Ha, \ \forall a \in G$

अर्थात् H और H के प्रत्येक वाम (दक्षिण) सहसमुच्चयों में एकैकी संगतता होती है

उपपति : हम जानते हैं कि H स्वयं का एक वाम एवं दक्षिण सहसमुच्चय होता है । अत: उपरोक्त प्रमेय से यदि H वाम सहसमुच्चय हैं तो

$$H \sim aH \quad \forall a \in G$$

इसी प्रकार यदि प्त दक्षिण सहसमुच्चय हैं तो

$$H \sim Ha \quad \forall a \in G$$

उपप्रमेय 2 : यदि H,G का एक परिमित उपसमूह हैं तो

$$o(aH) = o(H) = o(Ha)$$

उपपति : यदि H,G का एक परिमित उपसमूह हैं तो हम जानते हैं कि aH तथा H में एकैकी संगतता होती है, अतएव सहसमुच्चय aH तथा H में अवयवों की संख्या समान होगी

$$\therefore o(aH) = o(H)$$

इसी प्रकार $o(H) = o(Ha)$

अत: $o(aH) = o(H) = o(Ha)$

टिप्पणी : यहाँ यह सिद्ध होता है कि यदि H,G का (एक परिमित उपसमूह हैं तो सभी वाम (दक्षिण) सहसमुच्चयों में अवयवों की संख्या समान होगी, इसी प्रकार यदि H,G का एक अपरिमित उपसमूह हैं तो सभी वाम (दक्षिण) सहसमुच्चयों की गणनता समान होगी ।

3.4 लेग्रेंज प्रमेय

प्रमेय : किसी परिमित समूह के प्रत्येक उपसमूह की कोटि समूह की कोटि भाजक होती है ।

उपपति : माना कि H एक परिमित समूह G का उपसमूह हैं तथा

$$o(G) = n \text{ और } o(H) = m$$

पुन: माना कि H के G में दक्षिण सहसमुच्चय निम्न है

$$Ha_1, Ha_2, Ha_3, \ldots\ldots\ldots\ldots Ha_n,$$

परन्तु H के सभी दक्षिण सहसमुच्चय भिन्न-2 नहीं होते अत: माना कि

$$Ha_{1,}Ha_2, Ha_3, ...Ha_k,$$

H मे k भिन्न-भिन्न दक्षिण सहसमुच्चय है जहाँ $k \le n$

हम जानते हैं कि सभी भिन्न-भिन्न दक्षिण सहसमुच्चयों का संघ समूह G के होता है ।

$$\therefore G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup Ha_3 ..... \cup Ha_k$$

यही दाहिने पक्ष में सभी सहसमुच्चय असंयुक्त है अत:

$$o(G) = o(Ha_1) + (Ha_2) + ... + o(Ha_k)$$

पुन:

$$o(Ha) = o(H),\ \forall a \in G$$

$$\therefore o(G) = o(H) + o(H) + ... + o(H), k \text{ बार}$$

$$\Rightarrow o(G) = k.o(H)$$

$$\Rightarrow n = km$$

$$\Rightarrow m \mid n$$

$\Rightarrow o(H), o(G)$ का भाजक है

टिप्पणी 1 : यहाँ k,H का समूह G में सूचकांक कहलाता है, चूंकि $m = \frac{n}{k}$, अतएव H का परिमित समूह G में सूचकांक समूह G की कोटि का भाजक होता है ।

टिप्पणी 2 : लेग्रेंज प्रमेय का विलोम सदैव सत्य नहीं होता, अर्थात् यदि m समूह G की कोटि n का भाजक हो तो यह आवश्यक नहीं है कि G के लिये m कोटि का एक उपसमूह विद्यमान हो । उदाहरणार्थ, हम जानते हैं कि P_4 क्रमचयों का 4 घात का सममित समुच्चय हैं अब यदि A_4 के का एकान्तर ग्रुप A_4 है तो

$$-(A_4) = \frac{o(P_4)}{2}$$

$$= \frac{24}{2} = 12$$

यदि A_4 में निम्न समक्रमचय है

$$A_4 = [I, (abc), (acb), (abd), (adb), (bcd), (bdc), (acd), (adc), (ab)o(cd), (ac)o(bd$$

तो हम देखते हैं कि 6 एकान्तर समूह A_4,की कोटि 12 का भाजक है परन्तु A_4के लिये 6 कोटि का कोई उपसमूह विद्यमान नही है ।

उपप्रमेय 1 : परिमित समूह के प्रत्येक अवयव की कोटि समूह की कोटि की भाजक होती है

उपपति : माना कि a किसी समूह G का स्वेच्छ अवयव है तथा 0(a) = m, तब m एक न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक संख्या इस प्रकार हैं कि $a^m = e$

अब माना कि एक समुच्चय H निम्न प्रकार है -

$$H = \{a, a^2, ...a^m = e\}$$

अतएव H, परिमित समूह G का अरिक्त उप समुच्चय होगा जो कि G की संक्रिया के लिये संवृत है क्योंकि यदि a^i तथा a^j के कोई दो अवयव है तो

$a^i a^j = a^{i+j} + j = a^{mq+r}$ (विभाजन कलन विधि से; i + j = mq + r जहां $0 \le r < m$)

$= a^{mq} a^r$

$= \left(a^m\right)^q a^r = e^q a^r = a^r \in H,$ चूँकि $0 \le r < m$

यहाँ समुच्चय H के सभी अवयव भी भिन्न-भिन्न हैं इसको सिद्ध करने के लिये यदि i तथा j दो पूर्णांक इस प्रकार हैं कि $i \le j < i < m$

$$a^i = a^j \Rightarrow a^i a^{-j} = a^j a^{-j} \Rightarrow a^i - j = a^0 \Rightarrow a^{i-j} = e$$

परन्तु i - j धनात्मक पूर्णांक है जो कि m से कम है, जबकि $a^{i-j} = e$

जो कि विरोधाभास है । अत: $a^i \ne a^j$ अर्थात् H का प्रत्येक अवयव भिन्न-भिन्न है फलत: H,G का उपसमूह हैं तथा $o(H) = m$

अब लेग्रेंज प्रमेय से o(H), o(G) का भाजक है इसलिये एक धनात्मक पूर्णाक k इस प्रकार होगा कि

$$\frac{o(G)}{o(H)} = k$$

$$\Rightarrow \frac{n}{m} = k$$

$$\Rightarrow \frac{o(G)}{o(a)} = k$$

$\Rightarrow o(a), o(G)$ भाजक है

चूंकि aस्वेच्छ अवयव है अतएव परिमित समूह के प्रत्येक अवयव की कोटि समूह की कोटि की भाजक होती है

उपप्रमेय 2 : यदि a किसी n कोटि के परिमित समूह G का कोई अवयव हो तो $a^n = e$

उपपति : माना कि o(a) = m तब m एक न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक इस प्रकार होगा कि $a^m = e$, यहाँ G एक परिमित समूह है अत: अवयव a की कोटि समूह G की कोटि का भाजक होगी ।

$\therefore \frac{o(G)}{o(a)} = k,$ जहां k कोई धनात्मक पूर्णाक है

$$\Rightarrow \frac{n}{m} = k$$

$$\Rightarrow n = mk$$

$$\Rightarrow a^n = a^{mk} = \left(a^m\right)^k = e^k = e \qquad \left[\because a^m = e\right]$$

टिप्पणी : इस उपप्रमेय में $a^n = e$ के स्थान पर $a^{o(G)} = e$ भी लिखा जा सकता है ।

उपप्रमेय 3 : अभाज्य कोटि के परिमित समूह का कोई उचित उपसमूह नहीं होता

उपपति : माना कि G एक परिमित समूह है तथा o(G) = p जहाँ p अभाज्य हैं यदि सम्भव हो तो माना कि G का एक उपसमूह H हैं जिसकी कोटि m है इसलिये लेग्रेंज प्रमेय से m,p का होना चाहिए, परन्तु p अभाज्य हैं ।

अत: m = p या m = 1

फलत: H = G या H = {e}

जो G के विषम उपसमूह है । अत: G का कोई उचित उपसमूह नहीं होता है

उपप्रमेय 4: सिद्ध कीजिए की अभाज्य कोटि का प्रत्येक समूह चक्रीय होता है ।

हल : माना कि G एक परिमित समूह है तथा o(G) = p, जहाँ p अभाज्य हैं तो सिद्ध करना है कि समूह G चक्रीय है । हम जानते है कि न्यूनतम धनात्मक अभाज्य संख्या 2 होती है अतएव G में कम से कम 2 अवयव होंगे, इसलिये G में एक ऐसे अवयव a का अस्तित्व होगा कि $a \neq$ तत्समक अवयव e, अत: $o(a) \geq 2$

अब माना कि o(a) = m तब H = [a] समूह G का चक्रीय उपसमूह होगा तथा o(H = o(a) = m) लेग्रेंज प्रमेय से, परिमित समूह के प्रत्येक उपसमूह की कोटि समूह की कोटि का भाजक होती है अत: m, p भाजक होगा, परन्तु p एक अभाज्य संख्या है तथा $m \geq 2$अत: m = p इसलिये H = G [a] इस प्रकार G एक चक्रीय समूह होगा जिसका जनक तत्समक के अतिरिक्त प्रत्येक अवयव है ।

टिप्पणी : इस प्रमेय से, अभाज्य कोटि का प्रत्येक समूह चकीय होता है, परन्तु हम जानते हैं कि चकीय समूह सदैव आबेली समूह होता है, अतएव अभाज्य कोटि का प्रत्येक समूह आबेली समूह! होगा ।

3.5 उपसमूह का सूचकांक

यदि H, समूह G उपसमूह है तो G के H मे सभी विभिन्न वाम सह समुच्चयों तथा सभी विभिन्न दक्षिण सहसमुच्चयों के समुच्चय के मध्य एकैकी संगतता होती है इसलिये परिमित समूह G के H में विभिन्न वाम सहसमुच्चयों तथा दक्षिण सहसमुच्चयों की संख्या समान होती है जो कि G का H में सूचंकाक कहलाती है । अतएव हम उपसमूह के सूचकांक को निम्न प्रकार परिभाषित कर सकते हैं ।

परिभाषा : यदि H किसी समूह G का एक उपसमूह हो तो G में H के विभिन्न वाम (दक्षिण) सहसमुच्चयों की संख्या H का G में सूचकांक कहलाती है जिसे संकेत रूप में [G:H] से व्यक्त करते हैं ।

यदि G एक परिमित समूह है तथा H के G में k असंयुक्त वाम (दक्षिण) सहसमुच्चय है तो लैंग्रेज प्रमेय से

$$o(G) = k.o(H)$$

$$\Rightarrow k = \frac{o(G)}{o(H)}$$ = उपसमूह H का G में सूचकांक

$$\Rightarrow \quad [G:H] = \frac{o(G)}{o(H)}$$

उदाहरणार्थ :

1. यदि $H = \{1, -1\}$ तथा $G = [\{1, -1, i, -i,\}]$ तो H का G में सूचकांक 2 होगा क्योंकि

$$o(H)=2, o(G)=4$$

$$\Rightarrow [G:H]=\frac{4}{2}=2$$

2. समूह $G=(Z_8,+_8)$ में $H=\{0,4\}$ के विभिन्न वाम (दक्षिण) सहसमुच्चयों की संख्या 4 होगी क्योकि

$$o(H)=2, o(G)=8$$

$$\Rightarrow [G:H]=\frac{8}{2}=4$$

3. यदि H = 2z तथा G = (z+) तो [G:H) = 2 होगा क्योंकि G में H के दो ही विभिन्न वाम (दक्षिण) सहसमुच्चय है जो कि निम्न प्रकार है

   H, 1 + H या H,H+1

4. यदि $H=\{(1),(12)\}, G=S_3$ तो $[G:H]=3$ होगा क्योंकि G में H के तीन ही विभिन्न वाम (दक्षिण) सहसमुच्चय हैं जो कि निम्न प्रकार है

   H, (23) H, (31) H या H,H (23), H (31)

3.6 समूह मे एक उपसमूह के सापेक्ष सर्वागसमता संबंध

माना कि H किसी समूह G का एक उपसमूह है तथा G का कोई अवयव a, दक्षिण सहसमुच्चय Hb का भी अवयव है तो

$a \in Hb$ अर्थात $ab^{-1} \in H$

तब a, b के माड्यूलों H सर्वागसम् कहलाता है

परिभाषा : माना कि H किसी समूह G का एक उपसमूह है तथा $a, b \in G$, तब a,b के माड्यूलों H सर्वागसम कहलाता है यदि और केवल यदि $ab^{-1} \in H$, जिसे निम्न संकेत रूप से व्यक्त करते हैं

a ≡ b (मॉड् H) यदि और केवल यदि $ab^{-1} \in H$

प्रमेय : किसी समूह G में उपसमूह H के सापेक्ष निम्न प्रकार परिभाषित सम्बंध a ≡ b (मॉड्H) $\Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ एक तुल्यता सम्बंध हैं ।

उपपति : इस सर्वागसमता सम्बन्ध को तुल्यता सम्बन्ध प्रदर्शित करने के लिये निम्न शर्तो का निरीक्षण करेंगे ।

1. स्वतुल्य : यदि a, G का कोई स्वेच्छ अवयव है तो

   $aa^{-1}e \in H$ ($\because H$ उपसमूह है)

   $\Rightarrow a \equiv a$ (मॉड् H), $\forall a \in G$

अत: यह सम्बंध स्वतुल्य हैं

2. सममित : यदि a तथा b,G के कोई दो अवयव है तथा $a \equiv b$ (मॉड् H) तो

   a ≡ b (मॉड् H) $\Leftrightarrow ab^{-1} \in H$

$\Rightarrow \left(ab^{-1}\right) \in H$ ($\because H$ एक उपसमूह है)

$\Rightarrow ba^{-1} \in H$

$\Rightarrow b \equiv a$ (मॉड् H)

अत: यह सम्बंध सममित है

3. संक्रामक : यदि a,b तथा c,G के कोई तीन अवयव है तथा $a \equiv b$ (मॉड् H) $b \equiv c$ (मॉड् H) तो $a \equiv b$ (मॉड् H), $b \equiv c$ (मॉड् H)

$\Rightarrow ab^{-1} \in H$ तथा $bc^{-1} \in H$

$\Rightarrow \left(ab^{-1}\right)\left(bc^{-1}\right) \in H$ (H में सवृंतता से)

$\Rightarrow a\left(b^{-1}b\right)\left(c^{-1}\right) \in H$

$\Rightarrow (ae)c^{-1} \in H$

$\Rightarrow ac^{-1} \in H$

$\Rightarrow a \equiv c$ (मॉड् H)

अत: यह सम्बंध संक्रामक है ।

इस प्रकार G में परिभाषित मॉड् H सर्वांगसमता सम्बंध एक तुल्यता सम्बंध है । यह सम्बंध तुल्यता सम्बंध होने से समूह G का H के सापेक्ष परस्पर असंयुक्त तुल्यता वर्गों में विभाजन करता है।

यदि किसी अवयव $a \in H$ के संगत तुल्यता वर्ग C (a) है तो हम प्रदर्शित करेंगे कि C(a) = Ha; इसके लिये तुल्यता वर्ग की परिभाषानुसार

$$C(a) = \left\{x \in G \middle| x \equiv a \text{ (मॉड् H) } \right\}$$

यदि y,C(a) का स्वेच्छ अवयव है तो

$$y \in C(a) \Rightarrow y \equiv a \text{ (मॉड् H)}$$

$$\Rightarrow ya^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow ya^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow y \in Ha$$

$\therefore C(a) \subseteq Ha$

पुन: यदि y,Ha का कोई स्वेच्छ अवयव है तो

$$y \in Ha \Rightarrow ya^{-1} \equiv \in Haa^{-1}$$

$$\Rightarrow ya^{-1} \in He$$

$$\Rightarrow ya^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow y \equiv a \text{ (मॉड् H)}$$

$$\Rightarrow y \in C(a)$$

$\therefore Ha \subseteq C(a)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि $C(a) = Ha, \forall a \in G$

यह तुल्यता सम्बंध समूह G का H के सापेक्ष परस्पर असंयुक्त तुल्यता वर्गों में विभाजन करता है जिनका संघ समूह G के बराबर होगा । यह विभाजन समूह G में H का दक्षिण सहसमुच्चय वियोजन ही है ।

टिप्पणी : समूह G में इसी प्रकार परिभाषित सर्वांगसम सम्बंध $a \equiv b$ (मॉड् H) $\Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ भी एक तुल्यता सम्बंध है जिसे भी आसानी से प्रदर्शित किया जा सकता है, जहाँ अवयव $a \in H$ के संगत तुल्यता वर्ग C(a),a के संगत H का वाम सहसमुच्चय aH ही होगा, अतएव यह विभाजन समूह G में H का वाम सहसमुच्चय वियोजन ही है।

व्याख्यात्मक उदाहरण

उदाहरण 1 : यदि H और K किसी क्रमविनिमेय समूह G के दो परिमित उपसमूह है और उनकी कोटि o(H) व o(K) हैं तो सिद्ध कीजिए कि

$$o(HK) = \frac{o(H).o(H)}{o(H \cap K)}$$

हल : हम जानते हैं कि $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$, अतएव $HK \subseteq G$, यहाँ यह आवश्यक नही हैं कि HK,G का उपसमूह हैं, o(HK) से हमारा तात्पर्य HK के विभिन्न अवयवों से हैं ।

माना कि $D = H \cap K$ तो $H \cap K = D \subseteq K$ तथा D, K का उपसमूह होगा । यदि K में D के m विभिन्न दक्षिण सहसमुच्चय हैं तो लेग्रेंज प्रमेय से,

$$m = \frac{o(K)}{o(D)} = \frac{o(K)}{o(H \cap K)}$$

यदि $Dk_1, Dk_2, Dk_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots Dk_m$; K में D के विभिन्न दक्षिण सहसमुच्चय है तो

$K = \bigcup_{i=1}^{m} Dk_i$, जहाँ $k_1, k_2 \ldots\ldots\ldots\ldots k_m$ सभी K के विभिन्न अवयव है

अब

$$HK = H\left(\bigcup_{i=1}^{m} Dk_1\right) = \bigcup_{i=1}^{m} HDk_i = \bigcup_{i-1}^{m} Hk_i \qquad [\because D \subseteq H \Rightarrow HD = H]$$

$$= Hk_1 \cup Hk_2 \ldots\ldots\ldots \cup Hk_m$$

हम यह सिद्ध करेंगे कि $Hk_1 Hk_2 \ldots\ldots\ldots Hk_m$ के कोई भी दो सहसमुच्च है क्योंकि

$$Hk_i = Hk_j \Rightarrow k_i k_j^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow k_i k_j^{-1} \in H \cap K \qquad [\because k_i, k_j \in K \Rightarrow k_i k_j^{-1} \in K]$$

$$\Rightarrow k_i k_j^{-1} \in D$$

$\Rightarrow Dk_i = Dk_j$ जो असत्य हैं

अत: $Hk_1, Hk_2, \ldots\ldots\ldots, Hk_m$ परस्पर असंयुक्त है तथा प्रत्येक में अवयवों की संख्या o(H) के समान है

अत:

$$o(HK) = o(Hk_1) + o(Hk_2) + ... + o(Hk_m)$$
$$= o(H) + o(H) + ... + o(H), m\text{बार}$$
$$= m \times o(H) = \frac{o(K)}{o(D)}.o(H)$$
$$= \frac{o(K).o(H)}{o(H \cap K)}$$

उपप्रमेय : यदि किसी परिमित समूह G के H तथा K उपसमूह है, यदि

$$o(H) > \sqrt{[o(G)]}, o(K) > \sqrt{[o(G)]}$$

तो सिद्ध कीजिए $H \cap K \neq \{e\}$

हल : $\therefore HK \subseteq G \Rightarrow o(HK) \leq o(G)$ .....(1)

परन्तु

$$o(HK) = \frac{o(H).o(K)}{o(H \cap K)} o(G) \geq \frac{o(H).o(K)}{o(H \cap K)} \qquad .....(2)$$

अब समीकरण (1) व (2) से,

$$o(G) \geq \frac{o(H).o(K)}{o(H \cap K)}$$
$$\Rightarrow o(G) \geq \frac{\sqrt{[o(G)]}.\sqrt{[o(G)]}}{o(H \cap K)}$$
$$\Rightarrow o(G) \geq \frac{o(G)}{o(H \cap K)}$$
$$\Rightarrow o(H \cap K) \geq 1$$
$$\Rightarrow H \cap K \neq \{e\}$$

उदाहरण 2 : यदि H, समूह G का उपसमूह हैं तथा

$$K = \{x \in G \mid xH = Hx\}$$

तो सिद्ध कीजिए कि K,G का उपसमूह है

हल : $\because e \in G \Rightarrow eH = H = He \Rightarrow e \in K \Rightarrow K \neq \phi$

माना कि $x_1, x_2 \in K,$ तो k की परिभाषानुसार

$$x_1 H = Hx_1$$

तथा $x_2 H = Hx_2$

अब

$$x_2H = H = Hx_2 \Rightarrow \quad x_2^{-1}\left(x_2H\right)x_2^{-1} = x_2^{-1}\left(Hx_2\right)x_2^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x_2^{-1}x_2\right)\left(Hx_2^{-1}\right) = \left(x_2^{-1}H\right)\left(x_2x_2^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad e\left(Hx_2^{-1}\right) = \left(x_2^{-1}H\right)e$$

$$\Rightarrow \quad Hx_2^{-1} = x_2^{-1}H$$

$$\Rightarrow \quad x_2^{-1} \in K$$

अब

$$\left(x_1x_2^{-1}\right)H = x_1\left(x_2^{-1}H\right)$$

$$= x_1\left(Hx_2^{-1}\right) \qquad \left[\because x_2^{-1} \in K \Rightarrow x_2^{-1}H = Hx_2^{-1}\right]$$

$$= \left(x_1H\right)x_2^{-1}$$

$$= \left(Hx_1\right)x_2^{-1} \qquad \left[\because x_1 \in K \Rightarrow x_1H = Hx_1\right]$$

$$= H\left(Hx_1x_2^{-1}\right)$$

$$\therefore x_1x_2^{-1} \in K$$

इस प्रकार $x_1 \in K, x_2 \in K \Rightarrow x_1x_2^{-1} \in K$

अत: K समूह G का उपसमूह है ।

उदाहरण 3 : यदि समूह G का एक उपसमूह H है और [G:H] = 2 तो सिद्ध-कीजिए कि

$$aH = Ha, \forall a \in G$$

हल : यहाँ उपसमूह G का एक में सूचकांक 2 है अत: H के G में केवल दो विभिन्न वाम (दक्षिण) सहसमुच्चय होंगे । चूंकि वे स्वयं भी एक वाम एवं दक्षिण सहसमुच्चय हैं अत: माना कि

$G = H \cup Ha$, जहाँ $H \cap Ha = \phi$ .....(1)

पुनः यदि H और bH दो असंयुक्त वाम सहसमुच्चय हो तो

$G = H \cap bH$, जहां $H \cap bH = \phi$ .....(2)

(1) और (2) से

$$G = H \cup Ha = H \cup bH \qquad \left[\because H \cap Ha = \phi = H \cap bH\right]$$

अत: $Ha = Hb$

पुन: $a \in Ha, Ha = bH \Rightarrow a \in bH$

$$\Rightarrow bH = aH \qquad \left[\because a \in aH\right]$$

$$\therefore Ha = bH = aH$$

$$\Rightarrow Ha = aH, \forall a \in G$$

उदाहरण 4 : यदि H किसी समूह G का एक उपसमूह हो तथा $a \in G$ कीजिए कि

$$(Ha)^{-1} = a^{-1}H$$

हल : यदि H किसी समूह G का एक उपसमूह है तथा $a \in G$ तो परिभाषानुसार

$$(Ha)^{-1} = \left\{(ha)^{-1} \mid h \in H\right\}$$

$$= \left\{a^{-1}h^{-1} \mid h \in H\right\}$$

$$= \left\{a^{-1}h^{-1} \mid h^{-1} \in H\right\} \qquad \left[\because h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H\right]$$

$$= a^{-1}H$$

उदाहरण 5 : यदि H किसी समूह G का एक उपसमूह है तो सिद्ध कीजिए कि दो दक्षिण सहसमुच्चय Ha,Hb भिन्न है यदि और केवल यदि दो वाम सह समुच्चय $a^{-1}H$, $b^{-1}H$ भिन्न है

हल : माना कि समूह G में H के दो भिन्न दक्षिण सहसमुच्चय Ha तथा Hb है, यदि सम्भव हो तो माना कि दो वाम सहसमुच्चय $a^{-1}H$, $b^{-1}H$ समान है तब,

$$a^{-1}H = b^{-1}H \Rightarrow \left(b^{-1}\right)^{-1} a^{-1} \in H \qquad \left[\because aH = bH \Rightarrow b^{-1}a \in H\right]$$

$$\Rightarrow \left(b^{-1}\right)^{-1} \in H$$

[∵ H उपसमूह है]

$$\Rightarrow \left(ba^{-1}\right)^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow \left(a^{-1}\right)^{-1} b^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow ab^{-1} \in H$$

$$\Rightarrow Ha = Hb \qquad \left[\because Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H\right]$$

जो कि विरोधाभास है अत:

$$Ha \neq Hb \Rightarrow a^{-1}H \neq b^{-1}H$$

इसी प्रकार

$$a^{-1}H \neq b^{-1}H \Rightarrow Ha \neq Hb$$

अत: $Ha \neq Hb \Rightarrow a^{-1}G \neq b^{-1}H$

उदाहरण 6 : सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G में उपसमूह H के वाम (दक्षिण) सहसमुच्चयों में केवल H ही उपसमूह होता है।

हल : माना कि समूह G में उपसमूह H का दक्षिण सहसमुच्चय Ha है, यदि Ha समूह G का उपसमूह है तो तत्समक अवयव e इसमें अवश्य विद्यमान होगा, परन्तु H भी G का उपसमूह है इसलिये

$$e \in H$$

अतः

$$e \in Ha \cap H \Rightarrow \; Ha \cap H \neq \phi$$

चूंकि दो दक्षिण सहसमुच्चय या तो एक समान होते हैं या असंयुक्त

इसलिये

Ha = G

अत: किसी समूह G में उपसमूह H के दक्षिण सहसमुच्चयों में केवल H ही उपसमूह होता है इसी प्रकार किसी समूह G में उपसमूह H के वाम सहसमुच्चयों में केवल से ही उपसमूह होता है

उदाहरण 7 : यदि H किसी समूह G का एक उपसमूह हो तथा $g \in G$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $gHg^{-1} = \{ghg^{-1}.|\, h \in G\}, G$ का एक उपसमूह है

(ii) यदि H परिमित हो, तो $o(H) = o(gHg^{-1})$

हल (i) $\because e \in G \Rightarrow (ge)g^{-1} \in gHg^{-1}$

$$\Rightarrow gg^{-1} \in gHg^{-1}$$
$$\Rightarrow e \in gHg^{-1}$$
$$\Rightarrow gHg^{-1} \neq \phi$$

अत: gHg^{-1} समूह G का अरिक्त उपसमुच्चय है । अब यदि gh_1g^{-1} तथा gh_2g^{-1}, gHg^{-1} के कोई दो अवयव है, जहाँ $h_1, h_2 \in H$

तब

$$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1})^{-1} = gh_1g^{-1}(g^{-1})^{-1}h_2^{-1}g^{-1}$$
$$= gh_1g^{-1}gh_2^{-1}g^{-1}$$
$$= gh_1h_2^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1} \qquad [\because h_1h_2^{-1} \in H]$$

इस प्रकार

$$gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1} \in gHg^{-1} \Rightarrow (gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1})^{-1} \in gHg^{-1}$$

$\therefore gh_2g^{-1}$ समूह G का एक उपसमूह है

(ii) माना कि एक प्रतिचित्रण $f : H \to gHg^{-1}$ में इस प्रकार परिभाषित है कि

$$f(h) = ghg^{-1}\ \forall h \in H$$
$$\because f(h_1) = f(h_2) \Rightarrow gh_1g^{-1} = gh_2g^{-1}$$
$$\Rightarrow h_1 = h_2 \qquad \text{(G में निरसन नियम से)}$$

$\therefore$ f एकैकी है

पुन: प्रत्येक $ghg^{-1} \in gHg^{-1}$ के लिये $h \in H$ ऐसा अवयव विद्यमान है कि $f(h) = ghg^{-1}$

$\therefore$ f आच्छादक है

अत: f,H से gHg^{-1} पर एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है

इसलिये $o(H) = o(gHg^{-1})$

उदाहरण 8 : सममित समूह S_3 में $H = \{(1),(12)\}$ के सभी दक्षिण को ज्ञात कीजिए ।

हल : सममित सह G = S_3 के अवयव क्रमचय है जो कि निम्न प्रकार है

$$f_1 = (1), f_2 = (12), f_3 = (23), f_4 = (31), f_5 = (123), f_6 = (132)$$

यदि सममित समूह G का उपसमूह $H = \{f_1, f_2\}$ है तो G मे H के दक्षिण निम्न होगें ।

$$Hf_1 = \{f_1 f_2, f_2 f_1\} = \{f_1, f_2\} = H$$

$$Hf_2 = \{f_1 f_2, f_2 f_2\} = \{f_2, f_2\} = H$$

$$Hf_3 = \{f_1 f_3, f_2 f_3\} = \{f_3, f_6\} \qquad [\because f_2 f_3 = f_6]$$

$$Hf_4 = \{f_1 f_4, f_2 f_4\} = \{f_4, f_5\}$$

$$Hf_5 = \{f_1 f_5, f_2 f_5\} = \{f_5, f_4\} = Hf_4$$

$$Hf_6 = \{f_1 f_6, f_2 f_6\} = \{f_6, f_3\} = Hf_3$$

स्पष्ट है कि G में H के निम्न तीन दक्षिण सहसमुच्चय है

$$H, Hf_3, Hf_4$$

उदाहरण 9 : यदि H और K किसी समूह G के दो ऐसे उपसमूह हो कि $H \subset K$ सिद्ध कीजिए कि

$$[G:H] = [G:K].[K:H]$$

हल : यदि H और K किसी समूह G के दो उपसमूह है तथा $H \subset K$ तो H, K का भी एक उपसमूह होगा । अब समूह में उपसमूह के सूचंकाक की परिभाषा से

$$[G:H] = \frac{o(G)}{o(H)} \qquad ...(1)$$

$$[G:K] = \frac{o(G)}{o(K)} \qquad ...(2)$$

तथा $$[K:H] = \frac{o(K)}{o(H)} \qquad .....(3)$$

(2) और (3) से

$$[G:K].[K:H] = \frac{o(G)}{o(K)}.\frac{o(K)}{o(H)}$$

$$= \frac{o(G)}{o(H)}$$

$$= [G:H]$$

या $$[G:K].[K:H] = [G:H]$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न -

बताइये कि निम्न कथन सत्य है या असत्य

1. 10 I के (I,+) में 10 विभिन्न वाम (दक्षिण) सहसमुच्चय होगे ।
2. किसी समूह के प्रत्येक उपसमूह का कम से कम एक वाम सहसमुच्चय होता है ।
3. यदि किसी समूह G की कोटि 11 है तो वह क्रमविनिमेय समूह होगा ।
4. यदि किसी समूह Gकी कोटि 10 है तो इसका एक उपसमूह 7 कोटि का होगा ।

5. यदि किसी समूह G की कोटि 5 है तो इसका कोई भी उचित उपसमूह नहीं होगा ।
6. यदि o(G) = 10 तथा o(H) = 5 तो G मे H के दो दक्षिण (वाम) सहसमुच्चय होगें ।
7. यदि किसी समूह G की कोटि 7 है तो यह चक्रिय समूह होगा तथा इसके 6 जनक अवयव होगे
8. समूह $G=\{0,1,2,3,4,5,+_6\}$ तथा $H=\{0,1,2,+_3\}$ तो $[G:H]=2$
9. S_4, में A_4 का सूचकांक 2 है ।
10. किसी समूह G में उपसमूह H के वाम (दक्षिण) सहसमुच्चयों में केवल H ही उपसमूह होता है ।

3.7 सारांश

इस इकाई ने हमने किसी समूह G मे उपसमूह H के वाम (दक्षिण) सहसमुच्चयों का अध्ययन किया जो कि समूह G का असंयुक्त तुल्यता वर्गों मे विभाजन करते है इसलिये इन सभी वाम (दक्षिण) सहसमुच्चयों का संघ G के बराबर ही होता है । सामान्यत: $aH \neq Ha$ परन्तु यदि G क्रमविनिमेय समूह है तो समूह G में H के वाम सहसमुच्चय संगत दक्षिण सहसमुच्चय के बराबर होते है । उपसमूह H, समूह G में स्वयं का एक वाम तथा दक्षिण सहसमुच्चय होता है तथा वाम (दक्षिण) सहसमुच्चयों में केवल H ही G का उपसमूह होता है। किसी समूह G में H के कोई दो दक्षिण (वाम) सहसमुच्चय या तो सर्वसम होते हैं या असंयुक्त

इस इकाई में हमने लेग्रेंज प्रमेय द्वारा ज्ञात किया कि उपसमूह H की कोटि समूह G की कोटि का भाजक होती है तथा अभाज्य कोटि का प्रत्येक समूह चक्रीय होता है एवं इसका कोई उचित उपसमूह नहीं होता ।

3.8 शब्दावली

सहसमुच्चय (सहकुलक)	Cosets
लेग्रेंज-प्रमेय	Lagrange's theorem,
उपसमूह का सूचकांक	Index of a Subgroup
विभाजन कलन विधि	Division algorithrn
माड्यूलो सर्वागसमता सम्बंध	Relation of congruence Modulo
सहसमुच्चय वियोजन	Cosets decornposition
प्रसामान्य उपसमूह	Normal subgroup
विभाग उपसमूह	Quotient group

3.9 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1. सत्य
2. सत्य
3. सत्य, अभाज्य कोटि का प्रत्येक समूह क्रमविनिमेय होता है ।
4. असत्य, उपसमूह H की कोटि समूह की कोटि का भाजक नहीं है ।

5. सत्य, अभाज्य कोटि के प्रत्येक समूह का उचित उपसमूह नहीं होता है ।
6. सत्य H का G में सूचकांक 2 है ।
7. सत्य, अभाज्य कोटि का प्रत्येक समूह चक्रीय होता है तथा तत्समक अवयव के अतिरिक्त प्रत्येक अवयव इसका जनक होता है
8. असत्य, H समूह G का उपसमूह नहीं है
9. सत्य, क्योंकि $o(S_4)=24, o(A_4)=12$ अतएव सूचकांक

   $$=\frac{o(S_4)}{o(A_4)}=\frac{24}{12}=2$$
10. सत्य

3.10 अभ्यास प्रश्न

1. समूह (Z +,) में H=3Z के सभी सहसमुच्चय ज्ञात किजिए

   (उत्तर : $H, H+1, H+2$ तथा $H, 1+H, 2+H$)
2. यदि $G=\{a, a^2, a^3, a^4=1\}, o(G)=4, H=\{1, a^2\}, G$ का उपसमूह है तो H के सभी सहसमुच्चय ज्ञात कीजिए तथा प्रदर्शित कीजिए की दो सहसमुच्चय या तो समान है या असंयुक्त
3. एक समूह G का उदाहरण दीजिए जिसका एक ऐसा उपसमूह H विद्यमान है कि G के दो अवयव a,b के लिये Ha = Hb परन्तु $aH \neq bH$

   (उत्तर : देखे 8, $Hf_3 \neq f_3H$)
4. यदि H किसी समूह G का एक उपसमूह हो, तो सिद्ध कीजिए कि

   (i) $a \in Hb \Leftrightarrow Ha = Hb$

   (ii) $a \in bH \Leftrightarrow aH = bH$
5. सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित समूह G मे इसके किसी उपसमूह H का सूचकांक, G की कोटि का भाजक होता है
6. सिद्ध कीजिए कि एक परिमित समूह की कोटि इसके उपसमूह की कोटि गुणक होती है
7. यदि H किसी समूह G का एक उपसमूह हो, तो सिद्ध कीजिए कि G में H वाम सहसमुच्चयों के समुच्चय एव दक्षिण सहसमुच्चयों के समुच्चय मे एकैकी सगंतता होती है।

इकाई 4 : समूह समाकारिता (Group Homomorphism)

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य

4.1 प्रस्तावना

4.2 समाकारिता

4.2.1 परिभाषा

4.2.2 समाकारिता के प्रकार

4.2.3 समाकारिता की अष्टि

4.3 समाकारिता के गुणधर्म

4.4 सारांश

4.5 शब्दावली

4.6 स्वमूलायांकन प्रश्नों के उत्तर

4.7 अभ्यास प्रश्न

4.0 उद्देश्य

इस इकाई में समूह समाकारिता इसके प्रकार एवं गुणधर्मों की चर्चा की गयी है । इस इकाई को पढ़ लेने के उपरान्त आप,

- समूह समाकारिता एवं इसके प्रकार के विषय में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे ।
- अन्तरकारिता एकैकी समाकारिता, आच्छादक समाकारिता, तुल्यकारिता, समाकारिता की अष्टि
- इत्यादि की जानकारी प्राप्त कर सकेंगे ।
- एक महत्त्वपूर्ण प्रमेय - कैले प्रमेय (Cayley) के विषय में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे ।

4.1 प्रस्तावना

अभी तक आपने द्विआधारी संक्रियाओं के किसी समूह (G, *) में गुणधर्मों का अध्ययन किया है। अब हम देखेगें कि जब हम एक समूह (G, *) से किसी अन्य समूह (G', *') पर कोई फलन परिभाषित करतें हैं तब यह फलन द्विआधारी संक्रियाओं के सापेक्ष किस प्रकार व्यवहार करता है । साथ ही हम तुल्यकारिता का अध्ययन करेंगें जो कि किन्हीं दो बीजीय सरचनाओं के एक दूसरे के समान होने की स्थिति को परिभाषित करती है ।

4.2 समाकारिता (Homomorphism)

4.2.1 परिभाषा : माना कि (G,*) एवं (G',*') दो समूह हैं । यदि एक $f : G \to G'$ निम्न प्रकार हो कि

$$f : (a*b) = f(a) * f(b), \forall a,b \in G$$

(अर्थात समूह G में सयोंजन का प्रतिबिम्ब = प्रतिबिम्ब का G ' में सयोंजन)

तो f को समाकारिता (Homomorphism) कहतें हैं ।

यहाँ हम यह भी कह सकतें है कि एक समाकारिता $f : G \to G'$ में अवयवों a एवं b के मध्य द्विआधारी संक्रिया को उनके प्रतिबिम्बों के समूह G ' में द्विआधारी संक्रिया के रूप में संरक्षित (Preserve) रखती है ।

टिप्पणी : यहाँ यह भी ध्यान देने योग्य है कि समूह G से समूह G' मे परिभाषित प्रत्येक प्रतिचित्रण समकारिता होना आवश्यक नहीं है, जो कि निम्न उदाहरण से स्पष्ट है ।

उदाहरण : माना $(C_0,\cdot)$ अशून्य सम्मिश्र संख्याओ का समूह है एवं माना $(R_0^+,\cdot)$ अशून्य वास्तविक धनात्मक संख्याओ का समूह है तब प्रतिचित्रण $f_1 : C_0 \to R_0^+ : f_1(z) = |z|, \forall z = C_0$ समूह ने $(C_0,\cdot)$ से समूह $(R_0^+,\cdot)$ पर एक समकारिता है, क्योंकि

$$f_1 = (z_1.z_2) = |z_1.z_2| = |z_1|.|z_2| = f_1(z_1).f_1(z_2) \forall z_1.z_2 \in C_0$$

परन्तु प्रतिचित्रण $f_2 : C_0 \to R_0 : f_2(z) = 2|\mathrm{Re}(z)| \forall z \in = C_0$

समूह $(C_0,\cdot)$ से समूह $(R_0^+,\cdot)$ पर एक समाकारिता नहीं है, क्योंकि यदि $z_1 = x_1 + iy_1 \in C_0$ एवं

$z_2 = x_2 + iy_2 \in C_0$

तब $\quad f_2(z_1 \cdot z_2) = f_2((x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1))$

$\quad = 2|x_1x_2 - y_1y_2|$

जबकि $\quad f_2(z_1).f_2(z_2) = 2|x_1|.2|x_2|$

$\quad = 4|x_1x_2|$

अर्थात् $\quad f_2(z_1.z_2) \neq f_2(z_1).f_2(z_1) \quad \forall z_1.z_2 \in C_0$

4.2.2 समकारिता के प्रकार (Types of homomorphism)

(i) अन्तरकारिता (Endomorphism) : समूह (G, *) से समूह (G, *) पर ही परिभाषित समाकारिता अन्तरकारिता कहलाती है

उदाहरणत : यदि (Z,+) पूर्णाको का समूह तो प्रतिचित्रण $f : Z \to Z : f(n) = 2(n) \forall n \in Z$ एक अन्तरकारिता है, क्योंकि

$$f(n_1 + n_2) = 2(n_1 + n_2)$$

$$= 2n_1 + 2n_2 = f(n_1) + f(n_2), \ \forall n_1 n_2 \in Z$$

(ii) **एकैकी समाकारिता (Momomorphism) :** समूह (G, *) से समूह (G', *') पर परिभाषित कोई समाकारिता f, एकैकी (one-one) प्रतिचित्रण हो, तो समाकारिता f एकैकी समाकारिता कहलाती है ।

उदाहरणत: यदि $G = \langle \{0,1,2,\}, +_3 \rangle$ एवं $G' = \langle \{1, \omega, \omega^2, \}; \rangle$

(जहाँ ω इकाई का सम्मिश्र घनमूल है)

तब समूह G से G' पर परिभाषित प्रतिचित्रण $f:G\to G',(\ )=\omega^m\ ,\forall m\in G$ एक एकैकी समकारिता है क्योंकि $f(0)=1, f(1)=\omega, f(2)=\omega^2$ साथ ही

$$f(m_1+_3 m_2)=\omega^{m_1+_3 m_2}=\omega^{m_1}.\omega^{m_2}=f(m_1).f(m_2)$$

अत: f एक समाकारिता है ।

स्पष्टत: f एक एकैकी समाकारिता है ।

(iii) **आच्छादक समाकारिता (Epimorphism) :** यदि समूह (G,*) से समूह (G',*') पर परिभाषित समाकारिता f आच्छादक (on to) प्रतिचित्रण हो तो समाकारिता f आच्छादक समाकारिता कहलाती है ।

उदाहरणत : (C, +) तथा (R, +) क्रमश: सम्मिश्र संख्याओं एवं वास्तविक संख्याओं के समूह हैं, तब प्रतिचित्रण

$f:C\to R: f(x+iy)=x, \forall x+iy\in C$

एक आच्छादक समकारिता है क्योंकि किन्ही $(x_1+iy_1),(x_2+iy_2)\in C$ के लिये,

$$f[(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)]=f[(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)=(x_1+x_2)=f(x_1+iy_1)+f(x_2+iy_2)$$

एवं, चूंकि प्रत्येक वास्तविक संख्या $x\in R$ के लिये एक सम्मिश्र संख्या x + iy का अस्तित्व इस प्रकार है कि f $(x+iy)=x$ इसलिये f आच्छादक फलन भी है ।

अत: f एक आच्छादक समाकारिता है।

(iv) **तुल्यकारिता (Isomorphism):** यदि समूह (G,*) से समूह (G,'*') पर परिभाषित समाकारिता f, एकैकी - आच्छादक प्रतिचित्रण हो तो समाकारिता f तुल्यकारिता कहलाती है।

उदाहरणत : (ii) मे परिभाषित प्रतिचित्रण एक तुल्यकारिता है, क्योकि $f:G\to G'$ एकैकी समाकारिता है, साथ ही $f(G)=\{l,\omega,\omega^2\}=G'$

(v) **तुल्यकारी समूह (Isomorphic groups):** यदि समूह (G,*) से समूह (G,'*') पर परिभाषित कोई प्रतिचित्रण तुल्यकारिता हो तो समूह G,G' तुल्यकारी समूह (Isomorphic group) कहलाते हैं । इसे निम्न संकेत से दर्शाते हैं G≅G'

उदाहरण : उदाहरण (ii) मे दिये दोनो समूह $G=\langle\{0,1,2\},+_3\rangle$ एवं $G'=\langle\{1,\omega,\omega^2\};\rangle$ (जहाँ ω इकाई का सम्मिश्र घनमूल है) तुल्यकारी समूह हैं, अत: G ≅ G'

(v) **स्वकारिता (Automorphism):** समूह (G,*) से (G,*) पर परिभाषित तुल्यकारिता, स्वकारिता कहलाती है ।

उदाहरण के लिये समूह (R,+) से समूह (R,+) पर परिभाषित प्रतिचित्रण f : $R\to R$ $f(x)=2x, \forall x\in R$ एक स्वकारिता है ।

4.2.3 समाकारिता की अष्टि (Kernel of Homomorphism): यदि दो समूहो (G,*) से (G',*') पर प्रतिचित्रण $f:G\to G'$ एक समाकारिता हो, तो G का निम्न उपसमुच्चय $K=\{x|x\in G$ एवं $f(x)=e')$ (जहाँ e' समूह G' का तत्समक अवयव है) समाकारिता f की अष्टि (kernel) कहलाता है ।

समाकारिता के उदाहरण :

उदाहरण 1 : माना (Z,+) पूर्णाको का समूह है एवं $G = \langle \{1, -1,\}; \rangle$ एक अन्य समूह है, तो प्रतिचित्रण

$$f : Z \to G : f(x) \begin{cases} 1, & \text{यदि x सम संख्या} \\ -1, & \text{यदि x विषम संख्या} \end{cases}$$

एक समाकारिता है, जो कि निम्न विवरण से स्पष्ट है:

माना $x, y \in Z$ दो पूर्णांक संख्याएं है, तब,

स्थिति (i) x एवं y दोनो ही सम संख्या है, तब $x + y$ भी एक सम संख्या होगी अत: $f(x+y) = 1$, $f(x) = 1 = f(y)$ इसलिए $f(x+y) = 1 = 1.1 = f(x).f(y)$

स्थिति (ii) x एवं y दोनो ही विषम संख्या है, तब भी $x + y$ एक सम संख्या, अत: हैं $f(x+y) = 1, f(x) = _1 = f(y)$ इसलिए $f(x+y) = 1 = (-1).(-1) = f(x).f(y)$

स्थिति (iii) x एवं y में से एक सम संख्या है एवं दूसरी विषम संख्या है माना x सम संख्या है एवं y विषम संख्या है, तब $x + y$ एक विषम संख्या होगी, अत: $f(x+y) = _1$ एवं $f(x) = +1, f(y) = _1$ इसलिए $f(x+y) = _1 = 1.(_1) = f(x).f(y)$

यदि x विषम संख्या एवं y सम संख्या है, तब भी उपरोक्त स्थिति ही होगी

अत: सभी स्थितियो मे $f(x+y) = f(x).f(y) \quad \forall x, y \in Z$ अत: f एक समाकारिता है ।

स्पष्टत: f आच्छादक भी है, अत: f एक आच्छादक समाकारिता है, परन्तु f एकाकी नहीं है क्योकि $f(2) = 1 = f(4)$ परन्तु $2 \neq 4$

प्रतिचित्रण f की अष्टि $K = \{x \in Z \mid f(x) = 1\}$ ($\because$ 1 समूह G का तत्समक अवयव है)

$$\Rightarrow K = \{x \in Z \mid x \text{ एक तत्समक अवयव है}\}$$

$$\Rightarrow K = \{2n \mid n \in Z\} = \text{ सभी सम संख्याओं का समूह}$$

उदाहरण 2 : प्रतिचित्रण $f : (C,+) \to (C,+); f(z) = az$ जहाँ $a(\neq 0) \in C$ है ।

यहाँ $z_1 \neq z_2 \Rightarrow az_1 \neq az_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$

अत: f एकैकी है । एवं प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $\omega \in C$ के लिये सम्मिश्र सख्या $z = \frac{\omega}{a}(a \neq o)$ इस प्रकार है कि $f(z) = a.\left(\frac{\omega}{a}\right) = \omega$ अत: f आच्छादक है ।

साथ ही,

$$f(z_1 + z_2) = a(z_1 + z_2) = az_1 + az_2 = f(z_1) + f(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in C$$

अतः f समूह (C,+) से (C,+) पर तुल्यकारिता है ।

इसलिये f स्वकारिता है

साथ ही f की अष्टि

$$K = \{z \in C \mid f(z) = 0\}$$
$$\Rightarrow K = \{z \in C \mid az = 0\}$$
$$\Rightarrow K = \{z \in C \mid z = 0\} \qquad (\because a \neq o)$$
$$\Rightarrow K = \{0\}$$

उदाहरण 3 : समूह $\langle Q,+\rangle$, समूह $\langle Q_0,.\rangle$ के साथ तुल्यकारी नहीं हो सकता (जहाँ Q_0=Q-{0}एवं Q परिमेय संख्याओ का समुच्चय है ।)

हल : माना कि $f : Q \to Q_0$ एक तुल्यकारिता है ।

तब चूंकि $2 \in Q_0$ एवं f आच्छादक है तब एक $\alpha \in (Q,+)$ इस प्रकार है कि f (∝) = 2

$$\Rightarrow f(\alpha/2 + \alpha/2) = 2$$
$$\Rightarrow f(\alpha/2).f(\alpha/2) = 2$$

माना $x = f(\alpha/2) \in Q_0 \qquad [\because \alpha \in Q \Rightarrow \alpha/2 \in Q \Rightarrow f(\alpha/2) \in Q_0]$

$$\Rightarrow x \cdot x = 2$$
$$\Rightarrow x^2 = 2$$

$\Rightarrow$एक अशून्य परिमेय संख्या $x \in Q_0$ इस प्रकार है कि $x^2 = 2$

जो कि एक विरोधाभास है, क्योकि ऐसी कोई परिमेय संख्या विद्यमान नहीं है जिसका वर्ग 2 है। अत: $\langle Q,+\rangle$ से $\langle Q_0;\rangle$ में कोई तुल्यकारिता नहीं हो सकती अर्थात् $\langle Q,+\rangle \ncong \langle Q_0,\cdot\rangle$

उदाहरण 4 : माना $G = \langle \{1,1,i,-i\};\rangle$, तब प्रतिचित्रण $f : (Z,+) \to (G,.); f(x) = i^x, \forall x \in Z$ आच्छादक समाकारिता है । यहाँ $f(x+y) = i^{(x+y)} = i^x, i^y = f(x).f(y) \forall x, y \in Z$

अत: f एक समकारिता है ।

पुन: $x \in Z$ तो प्रत्येक $p \in Z$ के लिये x = 4p या 4p + 1 या 4p + 2 या 4p + 3 में से कोई एक मान होगा

अत: $f(x) = i^x = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x = 4p \\ i, & \text{यदि } x = 4p+1 \\ -1, & \text{यदि } x = 4p+2 \quad \text{प्रत्येक } p \in Z \\ -i & \text{यदि } x = 4p+3 \end{cases}$

अत: f आच्छादक है ।

इसलिये हैं समूह (Z, +) से (G,.) पर आच्छादक समाकारिता है ।

यहाँ f की अष्टि, $K = \{x \in Z \mid i^x = 1\}$

$$= \{4p \mid p \in Z\}$$
$$\Rightarrow K = 4Z$$

उदाहरण 5 : किसी निश्चित अवयव $x \in G$ के लिये प्रतिचित्रण $f : G \to G, f(a) = x^{-1}ax, \forall a \in G$ समूह $(G,\cdot)$ की एक स्वकारिता है ।

हल : माना कि $a, b \in G$ तब

$$f(a) = f(a)$$

$$\Rightarrow x^{-1}ax = x^{-1}bx \qquad \text{[G में निरसन नियम से]}$$

$$\Rightarrow a = b$$

अत: f एकैकी है ।

पुन: G के प्रत्येक अवयव a के लिये

$$xax^{-1} \in G \qquad [\because x \in G, a \in G]$$

ऐसा अवयव विद्यमान है कि

$$f\left(xax^{-1}\right) = x^{-1}\left(xax^{-1}\right)x\left(x^{-1}x\right)a\left(x^{-1}x\right) = eae = a$$

अत: f आच्छादक है । साथ ही किन्ही $a, b \in G$ के लिये

$$f(ab) = x^{-1}(ab)x = x^{-1}a\left(xx^{-1}\right)bx = \left(x^{-1}ax\right)\left(x^{-1}bx\right)$$

$$\Rightarrow f(ab) = f(a).f(b)$$

अत: f समाकारिता है ।

इसलिये उपरोक्त से स्पष्ट है कि f एक स्वकारिता है ।

उदाहरण 6 : यदि $n \in N$, दर्शाइए अशून्य सम्मिश्र संख्याओं के गुणात्मक समूह में $f : C_0 \to C_0, f(z) = z^n$ अन्तकारिता है, तथा अन्तकारिता f की अष्टि ज्ञात कीजिए ।

हल : माना C_0 के कोई, दो अवयव z_1, z_2 है तब $f(z_1) = z_2^{\,n}$ तथा $f(z_2) = z_2^{\,n}$

अब $f(z_1 z_2) = (z_1 z_2)^n = Z_1^n . Z_2^n = f(z_1) f(z_2)$

अत: f, C_0 अन्तरकारिता है ।

पुन: 1, C_0 का तत्समक अवयव है, अत:

f की अष्टि $K = \{z \in C_0 : f(z) = 1\}$

$$= \{z \in C_0 : z^n = 1\}$$

$$= \{1, \alpha, \alpha^2, ...\alpha^{n-1}\}$$ जहाँ α इकाई का n वां मूल है ।

स्वमूल्यांकन प्रश्न -1

(i) अन्तरकारिता $f : G \to G$, जहाँ $f(x) = e$ (तत्समक अवयव) की अष्टि K = ... है ।

(ii) प्रतिचित्रण $f(C_0, \cdot) \to = (R_0^+, \cdot) : f(z) = |z|, \forall z \in C_0$ एक समाकारिता हाँ/नही

(iii) प्रतिचित्रण $f : Z \to \dfrac{Z}{Z_2} : f(n) = n + Z_2$ एक समाकारिता है । इस समाकारिता की अष्टि K = ... है ।

(iv) प्रतिचित्रण $f : (Z, +) \to = (Z, +) : f(x) = -x, \forall x \in Z$ एक ..... है ।

(v) प्रतिचित्रण $f:(R,+)\to=(C_0,.)\ f(x)=\cos x+i\sin x, \forall x\in R$ एक समाकारिता है । इसकी अष्टि K = ... है ।

2. निम्न प्रतिचित्रणों में से कौन-कौनसी समाकारिता है?

(i) $f:(Z,+)\to(Z,+), f(n)=n+1, \forall n\in Z$

(ii) $f:(R_0,\cdot)\to(R_0,\cdot), f(x)=x^2, \forall x\in R$

(iii) $f:(Z,+)\to(Q,+), f(x)=\dfrac{x}{q}, \forall x\in Z,$ जहाँ $q(\neq 0)\in Z$

(iv) $f:(Q_0,\cdot)\to=(Z+), f\left(\dfrac{p}{q}\right)=p+q, \forall r\dfrac{p}{q}\in Q$ जहाँ $p\neq 0$ एवं $q\neq 0$

3. सिद्ध कीजिए कि निम्न में प्रत्येक समूह समाकारिता हैं । प्रत्येक की अष्टि भी ज्ञात कीजिये :

(i) $f:(C,+)\to(C,+), f(x+iy)=iy, \forall x+iy\in C$

(ii) $f:(R_0,\cdot)\to=(R_0,\cdot)\ f(x)=x^4, \forall x\in R_0$

(iii) $f:(G,*)\to(G,*), f(x)=e, \forall x\in G,$ जहां e,G का तत्समक अवयव है

4.3 समाकारिता के गुणधर्म (Properties of homomorphism)

प्रमेय 1 : यदि $f:G\to G'$, समूह (G,*) से समूह (G,'*') में समाकारिता हो, एव e और e ′ क्रमश: समूह G एवं G' के तत्समक अवयव है तो सिद्ध कीजिये कि :

(i) $f(e)=e'$

(ii) $f(a^{-1})=[f(a)]^{-1}, \forall a\in G$

(iii) $f(a^n)=[f(a)]^n, \forall a\in G$ एवं $n\in Z$ के लिये

उपपत्ति :

(i) दिया हुआ है कि e ,G का तत्समक अवयव है, तब e * e = e

$\Rightarrow f(e*e)=f(e)\Rightarrow f(e)*'f(e)=f(e)$

$\Rightarrow f(e)*'=f(e)=f(e)*'e'$ [$\because e'G'$ का तत्समक अवयव है]

$\Rightarrow f(e)=e'$ [G' में निरसन नियम द्वारा]

अत: समाकारिता f के अन्तर्गत समूह G के तत्समक अवयव का प्रतिबिम्ब G' का तत्समक अवयव है ।

(ii) माना $a\in G, G$ का स्वेच्छित अवयव है तब $a*a^{-1}=e=a^{-1}*a$

$\Rightarrow f(a*a^{-1})=f(e)=f(a^{-1}*a)$

$\Rightarrow f(a)*'f(a^{-1})=e'=f(a^{-1})*'f(a)$

(क्योंकि f,G से G' में एक समाकारिता है एवं (i) से f(e) = e'

$\Rightarrow f\left(a^{1}\right)=\left[f(a)\right]^{-1}$ अत: समाकारिता f के अन्तर्गत समूह G के किसी अवयव a के प्रतिलोम का f-प्रतिबिम्ब समूह G' मे a के f-प्रतिबिम्ब का प्रतिलोम है ।

(iii) माना n धन पूर्णांक है तब किसी स्वेच्छित $a \in G$ के लिये

$$f\left(a^{n}\right)=f(a * a * \ldots\ldots * a)$$

(n बार)

$$=f(a)*' f(a)*' \ldots\ldots *' f(a)$$ (n बार)

(क्योकि f,G से G ′ में एक समाकारिता है।)

$$=\left[f(a)\right]^{n}$$

यदि n = 0 तब यह परिणाम (i) से स्पष्ट है एवं यदि n एक ऋणपूर्णांक हैं, तब (ii) यही परिणाम प्राप्त होगा । अत: $f\left(a^{n}\right)=\left[f(a)\right]^{n}, \ \forall\, n \in Z$

प्रमेय 2 : यदि हैं समूह (G,*) से समूह (G,'*') में समाकारिता है, तो सिद्ध ??, कि :

(i) यदि H, समूह G का उपसमूह है - $\Rightarrow f(H)$ समूह G' का उपसमूह है

(ii) यदि H', समूह G' का उपसमूह है - $\Rightarrow f^{-1}(H')=\left\{x \in G \mid f(x) \in H'\right\}$ समूह Gका उपसमूह है ।

उपपत्ति : (i) स्पष्टत: $f(H) \subset G'$, साथ ही $f(H) \neq \phi$, क्योंकि यदि H G, समूह G, का उपसमूह है । तब $e \in H \Rightarrow \ f(e) \neq e' \in f(H)$ जहाँ e एवं e', क्रमश: समूह G एव G' के तत्समक अवयव है । माना $a'b' \in f(H)$ तब $\exists a, b \in H$ ऐसे अवयव होगे कि

$$f(a)=a' \text{ एवं } f(b)=b'$$

$$\Rightarrow a'*'(b')^{-1}=f(a)*'\left[f(b)\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow f(a)*' f\left(b^{-1}\right)=f\left(a * b^{-1}\right)$$

परन्तु H एक उपसमूह है इसलिये $a, b \in H \Rightarrow a * b^{-1} \in H \Rightarrow f\left(a * b^{-1}\right) \in f(H)$

अत: $a', b' \in f(H) \Rightarrow a'*'(b')^{-1}=f\left(a * b^{-1}\right) \in f(H)$

$\therefore f(H), G'$ का उपसमूह है ।

(ii) स्पष्टत: $f^{-1}(H') \subset G$ एवं $f^{-1}(H') \neq \phi$

$\because e' \in H' \Rightarrow \ f(e) \in H' \Rightarrow e \in f^{-1}(H')$

माना कि $a, b \in f^{-1}(H') \Rightarrow \ f(a), f(b) \in H'$

साथ ही $f\left(a * b^{-1}\right)=f(a)*'\left[f(b)\right]^{-1} \in H'$ ($\because f$ एक समाकारिता है)

इस प्रकार $a, b \in f^{-1}(H') \Rightarrow a * b^{-1} \in f^{-1}(H')$

अत: $f^{-1}(H'), G$ का एक उपसमूह है ।

उपप्रमेय : यदि f समूह (G,*) से समूह (G,'*') में समाकारिता हो तो f (G), G' का उपससमूह है।

उपपत्ति: $f(G)=\left[f(x)\mid x\in G\right]$ स्पष्टत: $f(G)\subseteq G'$ माना $a',b'\in f(G)$ तब $\exists a,n\in G$ ताकि

$$f(a)=a',\ f(b)=b' \text{ अब}$$

$$a'*'(b)^{-1}=f(a)*'\left[f(b)\right]^{-1}$$

$$=f(a)*'f(b)^{-1}$$

$$=f\left(a*b^{-1}\right)\in f(G) \qquad \because a*b^{-1}\in G$$

इस प्रकार $a',b'\in G\Rightarrow a'*'(b')^{-1}ef(G)$

$\therefore f(G),G'$ का उपससमूह है ।

प्रमेय 3 : यदि f समूह (G,*) से समूह (G',*') में समाकारिता हो तो f की अष्टि K, समूह G का उपससमूह होता हैं ।

उपपत्ति : माना कि समूह (G, *) एवं (G',*')के क्रमश: तत्समक अवयव e तथा e' हैं । अत: अष्टि की परिभाषा से $K=\left\{x\in G\mid f(x)=e'\right\}$

स्पष्टत: $K\subseteq G,$ एवं $f(e)=e'$

अत: $e\in K\Rightarrow K\neq\phi$

माना $a,b\in K\Rightarrow f(a)=e'=f(b)$

तथा $f\left(a*b^{-1}\right)=f(a)*'\left[f(b)\right]^{-1}$

$$=e'*'(e')^{-1}$$

$$=e'*'e'=e'$$

अत: $a*b^{-1}\in K,$ इस प्रकार यह स्पष्ट है कि

$$a,b\in K\ \Rightarrow a*b^{-1}\in K$$

अत: अष्टि K, समूह G का एक उपससमूह है ।

प्रमेय 4 : (i) प्रत्येक क्रमविनिमेय समूह का समाकारी प्रतिबिम्ब भी क्रमविनिमेय होता है ।

(ii) प्रत्येक चक्रीय समूह का समाकारी प्रतिबिम्ब भी चक्रीय होता हैं ।

उपपत्ति : (i) माना (G,*) एक क्रमविनिमेय समूह है एवं (G',*') एक अन्य समूह है । यह भी माना कि $f:G\to G'$ एक समाकारिता है । अब हमें सिद्ध करना है कि f (G) भी एक क्रम विनिमेय समूह है ।

प्रमेय 2 से यह स्पष्ट है कि $f(G),G'$ का उपससमूह है, अत: f (G) स्वयं एक समूह है । f (G) को क्रमविनिमेय दर्शाने हेतु माना $a',b'\in f(G)$ तब $\exists a,b\in G,$ ताकि $f(a)=a',\ f(b)=b'$

$$a'*'b'=f(b)*'f(b)=f(a*b) \qquad [\because f \text{ एक समाकारिता है 1}$$

$$=f(b*a) \qquad [\because G \text{ एक क्रमविनिमेय है}]$$

$$= f(b)*' f(a)$$
$$= b'*'a'$$

इस प्रकार $a'b' \in = f(G) \Rightarrow a'*'b' = b'*'a'$

इसलिये f (G) भी एक क्रमविनिमेय है ।

(ii) माना चक्रीय समूह (G,*) से समूह (G',*') पर $f : G \Rightarrow G'$ एक है । साथ ही माना $a \in G$, चक्रीय समूह G का जनक है अत: G = $\langle a \rangle$

सिद्ध करना है कि f (G) भी चक्रीय समूह है ।

प्रमेय 2 से स्पष्ट है कि f (G) : G' का उपसमूह है, अत: f (G) स्वयं एक समूह है

माना $x \in f(G)$ कोई स्वेछित अवयव है तब $\exists n \in Z$ इस प्रकार है कि $x = f(a^n) \in f(G)$

साथ ही $f(a^n) = [f(a)]^n$ [प्रमेय 1 (iii) से]

$$\Rightarrow x = [f(a)]^n$$

$\Rightarrow f(G)$ का प्रत्येक अवयव f (a) की एक पूर्णाक घात है, f (a) समूह f (G) का जनक है, अर्थात् $f(G) = \langle f(a) \rangle$ अत: f (G) एक चक्रीय समूह है ।

टिप्पणी : उपरोक्त प्रमेय का विलोम सदैव सत्य नहीं है । उदाहरण के लिये S_3 एक 3-कोटि के सभी क्रमचयो का सममित समूह है, हम यह जानते है कि S_3 ना तो क्रमविनिमेय एवं ना ही चक्रीय समूह है ।

माना $G == \langle \{1, -1;\} \rangle$ एवं $f : S_3 \rightarrow G$ एक समाकारिता इस प्रकार है कि

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि x सम क्रमचय है} \\ -1, & \text{यदि x विषम क्रमचय है} \end{cases}$$

जिससे यह स्पष्ट है कि $f(S_3) = G$ चक्रीय तथा क्रमविनिमेय समूह है, S_3 न तो चक्रीय है, न ही क्रमविनिमेय समूह है।

प्रमेय 5 : माना f समूह (G,*) से समूह (G',*') में समाकारिता है । f एक समाकारिता है यदि और केवल यदि f की अष्टि K = {e}, जहाँ e $\in$G, G का तत्समक अवयव है ।

उपपत्ति : प्रतिबन्ध आवश्यक है:

माना कि $f : G \rightarrow G'$ एक एकैकी समाकारिता है एवं $x \in K$ कोई स्वेच्छित है, तो

$f(x) = e'$ [$\because x \in K$] यहाँ e',G' का तत्समक अवयव है]

$\Rightarrow f(x) = e' = f(e) \Rightarrow x = e$ [$\because$f एकैकी है)

किन्तु x, K का स्वेच्छित अवयव है, अत: K = {e} प्रतिबन्ध पर्याप्त है :

माना कि K={e} एवं x,y $\in$G इस प्रकार है कि f (x) = f (y)

$$\Rightarrow f(x) *' [f(y)]^{-1} = f(y) *' [f(y)]^{-1}$$

$$\Rightarrow f(x) *' f(y^{-1}) = e' \in G'$$

$$\Rightarrow f(x * y^{-1}) = e' \in G'$$ [∵ f एक समाकारिता]

$$\Rightarrow x * y^{-1} \in K = \{e\}$$

चूंकि K में सिर्फ एक ही अवयव e है अत: $x*y^{-1}= e$

$$\Rightarrow (x * y^{-1}) * y = e * y$$

$$\Rightarrow x * (y^{-1} * y) = y$$

$$\Rightarrow x * e = y$$

$$\Rightarrow x = y$$

अत: f एकैकी समाकारिता है ।

प्रमेय 6 : यदि f समूह (G,*) से समूह (G',*') पर समाकारिता है और $a \in G$ की कोटि परिमित हो तथा $n \in G$ के बराबर हो तो f (a) की कोटि n का भाजक है ।

उपपत्ति : यहाँ O (a) = n (दिया हुआ है)

अत: a^n = e, जहाँ e,G का तत्समक अवयव है एव n न्यूनतम धन पूर्णांक है

यदि e',G' का तत्समक अवयव है, तब e ′ = f(e) = f(a^n)

$$\Rightarrow e' = \left[f(a^n) \right]^n$$ (प्रमेय 1 (iii) से)

अत: यदि G' में O [f(a)]= m हो तो m,n का भाजक होगा ।

प्रमेय 7 : समूहों के समुच्चय में तुल्यकारिता का सम्बन्ध " ≅ " एक तुल्यता सम्बन्ध है ।

उपपत्ति : स्वतुल्यता (Reflexivity) : माना (G,*) एक समूह है तत्समक प्रतिचित्रण $I_G : G \to G; I_G = a \forall a \in G$ एक तुल्यकारिता है, क्योंकि I_G एकैकी आच्छादक है, तथा स्वेच्छित $a, b \in G$ के लिये

$$I_G(a * b) = a * b = I_G(a) * I_G(b) \qquad \therefore G \cong G \forall G$$

अत: सम्बन्ध ≅ स्वतुल्य है ।

सममितता (Symmetricity) : माना कि समुह (G,*) ≅ (G',*') अत: एक प्रतिचित्रण f:G → G ′ इस प्रकार है कि, f एक तुल्यकारिता है ।

चूंकि f एकैकी-आच्छादक प्रतिचित्रण है, अत: इसका प्रतिलोम $f^{-1} : G' \to G$ होगा, जो कि स्वयं भी एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण होगा ।

अब $a, b \in G$, एवं $a', b' \in G'$ इस प्रकार हो कि

$$f(a) = a'. f(b) = b'$$

$$\Rightarrow a = f^{-1}(a'), b = f^{-1}(b')$$

तब
$$f^{-1}(a'*'b') = f^{-1}\left[f(a)*'f(b)\right]$$
$$= f^{-1}\left[f(a*b)\right]$$
$$= a*b$$
$$= f^{-1}(a')*f^{-1}(b')$$

अतः f^{-1}, से समूह G ′ पर समाकारिता है उपरोक्त से स्पष्ट है कि f^{-1} आच्छादक समकारिता है। अत: f^{-1} तुल्यकारिता है, फलत: $G' \cong G$

$$\therefore G' \cong G \Rightarrow G' \cong G$$

अत: सम्बन्ध $\cong$ सममित है ।

संक्रामकता (Transitivity) : माना कि $(G,*),(G',*')$ एवं $(G'',*'')$ तीन ऐसे समूह है कि

$$G \cong G' \text{ एवं } G' \cong G''$$

अत: f एवं g क्रमश: तुल्यकारिताएं होगी कि

$$f : G \to G' \text{ एवं } g : G' \to G''$$

अब f एवं g एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है, इसलिये gof : $G \to G''$ भी आच्छादक प्रतिचित्रण होगा ।

माना $a, b \in G$

तब
$$(gof)(a*b) = g[f(a*b)]$$
$$= g[f(a)*'f(b)]$$
$$= g[f(a)]*''g[f(b)]$$
$$= gof(a)*''gof(b)$$

अत: gof समूह G से समूह G'' पर एक समाकारिता है ।

फलत: gof समूह G से समूह G'' पर एक तुल्यकारिता है ।

फलत: $G \cong G''$

अत:
$$G \cong G',\ G' \cong G'' \Rightarrow G \cong G''$$

अत: सम्बन्ध $\cong$ संक्रामक है ।

उपरोक्त से स्पष्ट है कि तुल्यकारिता का सम्बन्ध समूहो के समुच्चय पर स्वतुल्य सममित तथा संक्रामक सम्बन्ध है, इसलिये तुल्यता सम्बन्ध है ।

प्रमेय 8 : कैले-प्रमेय (cayley's theorem) : प्रत्येक परिमित समूह किसी क्रमचय समूह के तुल्यकारी होता है ।

उपपत्ति : माना कि $(G,*)$ एक परिमित समूह है, जिसका समूहांक n है, अर्थात् $O(G) = n$, अत: G में n अवयव है । हम प्रत्येक अवयव $a \in G$ के संगत एक प्रतिचित्रण $f_a : G \to G;\ f_a(x) = a*x, \forall x \in G$ परिभाषित करते है ।

जब

$$f_a(x) = f_a(y) \Rightarrow a * x = a * y$$
$$\Rightarrow x = y \qquad [G \text{ में वाम निरसन नियम से}]$$

अत: f_a एकैकी है ।

साथ ही f_a एक परिमित समुच्चय से स्वयं पर एकैकी प्रतिचित्रण है इसलिये f_a आच्छादक भी होगा ।

फलत: f_a समूह G का एक क्रमचय है ।

माना S_G, समूह G के सभी क्रमचयो का समूह है तब समुच्चय

$$(G', o) = G' = \{ f_a \; a \in G \}$$

S_G का उपसमुच्चय होगा । तथा अवयवो $a, b \in G$ के लिये

$$\begin{aligned}(f_a o f_b)(x) &= f_a(f_b(x)), \qquad \forall x \in G \\ &= f_a(b * x) \\ &= a(b * x) \\ &= (a * b) * x \\ &= f_{a*b}(x)\end{aligned}$$

अतः

$$f_a o f_b = f_{a*b}$$

तथा

$$\begin{aligned}f_e(x) &= e * x \\ &= x\end{aligned}$$

अत: f_e तत्समक क्रमचय है ।

एवं प्रत्येक $f_a \in G'$ के लिये

$$\begin{aligned}f_a o f_{a_{-1}} &= f_{a * a_{-1}} \\ &= f_e\end{aligned}$$

अत:

$$(f_a)^{-1} = f_{a_{-1}} \in G'$$

चूंकि फलनों के संयोजन की संक्रिया 'o' सदा सहचारी होती है. अत: (G', o) समूह S_G का एक उपसमूह है

एवं $O(G') = n$

अत: (G', o) एक क्रमचयों का परिमित समूह है ।

अब हम यह सिद्ध करेगे कि $G \cong G'$

इस हेतु एक प्रतिचित्रण $\phi : G \to G'$; इस प्रकार परिभाषित करते है कि

$$\phi(a) = f_a, \qquad \forall a \in G$$

अब किन्हीं दो अवयवों $a, b \in G$ के लिये

$$\phi(a) = \phi(b) \Rightarrow f_a = f_b$$
$$\Rightarrow f_a(x) = f_b(x) \qquad \forall x \in G$$
$$\Rightarrow a * x = b * x$$
$$\Rightarrow a = b$$

अत: ϕ एकैकी है ।

अब G एवं G' दोनो परिमित समुच्चय है, तथा दोनो में अवयवों की संख्या समान है इसलिये ϕ आच्छादक भी होगा ।

पुन:

$$\phi(a*b) = f_{a*b}$$
$$= f_a o f_b$$
$$= \phi(a) o \phi(b)$$

अत: ϕ, G से G' पर एकैकी आच्छादक समाकारिता है ।

अर्थात् ϕ, समूह G से क्रमचय समूह G' पर एक तुल्यकारिता है ।

फलत: $G \cong G'$

उदाहरण : गुणन संक्रिया वाले समूह $G = \{1, i, -1, -i\}$ का क्रमचय समूह कीजिये जो G के साथ तुल्यकारी है ।

हल : हम निम्न प्रतिचित्रण प्रत्येक $a \in G$ के लिये परिभाषित करते है,

$$f_a : G \to G, f_a(x) = ax, \forall x \in G$$

यह प्रतिचित्रण निम्न क्रमचय है :

$$a=1, \quad f_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ 1.1 & 1.(-1) & 1.i & 1.(-1) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1-1 & i-i \\ 1-1 & i-i \end{pmatrix}$$

$$a=-1, \; f_{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ (-1).1 & (-1).(-1) & (-1)i & (-1)(-i) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -1 & 1 & -i & i \end{pmatrix}$$

$$a=i, \quad f_i=\begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ i.1 & i.(-1) & i.i & i(-i) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ i & -i & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$a=-i \quad f_i=\begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ (-i).1 & (-i).(-1) & (-i).i & (-i).(-i) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -1 & i & -i \\ -1 & i & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

अतः कैले प्रमेय के अनुसार समूह G के तुल्याकारी क्रमचय समूह $G'=\{f_1, f_{-1}, f_i, f_{-i}\}$

4.4 सारांश

इस इकाई में आपने समूह समाकारिता के विषय में जानकारी प्राप्त की है । इनसे संबंधित कुछ महत्वपूर्ण परिणामों को ज्ञात किया और कैले प्रमेय और अन्य प्रमेयो का अध्ययन किया । समाकारिता तुल्यकारिता स्वकारिता, समाकारिता की अष्टि इत्यादि को अनेक उदाहरणों से समझा।

4.5 शब्दावली

समाकारिता	Homomorphism
आच्छादक समाकारिता	Epimorphism
तुल्यकारिता	Isomorphism
अन्तरकारिता	Endomorphism
एकैकी समाकारिता	Monomorphism
स्वकारिता	Automorphism
अष्टि	Kernel
तुल्यकारी समूह	Isomorphic Groups

4.6 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न -1

1. (i) G (ii) हाँ
   (iii) Z_2 (iv) स्वकारिता
   (v) चक्रीय उपसमूह $\langle 2\pi \rangle$
2. (i) नहीं
   (ii) हाँ
   (iii) हाँ
   (iv) नहीं
3. (i) R
   (ii) {1,-1}
   (iii) G

4.7 अभ्यास प्रश्न

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का एक उदाहरण दीजिये :
   (i) आच्छादक समाकारिता जो एकैकी समाकारिता न हो ।
   (ii) एकैकी समाकारिता जो आच्छादक समाकारिता न हो ।
   (iii) समाकारिता जो अन्तरकारिता न हो ।
   (iv) अन्तरकारिता जो तुल्यकारिता न हो ।
   (v) तुल्यकारिता, जो स्वकारिता न हो ।
2. माना f एवं g, $G \to G'$ में समाकारिता है, सिद्ध करो कि
   $H = \{x \models G \;\; f(x) = g(x)\} G$ का उपसमूह है ।
3. सिद्ध कीजिये कि
   $f:(C,+) \to (C,+), f(z) = \bar{z}, \forall z \in C$ एक स्वकारिता है ।
4. सिद्ध कीजिये कि समूह
   $G = \langle \{1, \omega, \omega^2\}, . \rangle$
   तथा समूह
   $G' = \langle (1), (123), (132) \}, o \rangle$ तुल्यकारी समूह है ।
5. सिद्ध कीजिये कि निम्न समूह तुल्यकारी समूह है ।
   (i) $\langle \{1,-1\}, . \rangle; \langle \{0,1\}, +_2 \rangle; \langle \{(1),(12)\}, o \rangle$
   (ii) $\langle \{1,2\};_3 \rangle; \langle \{\phi_1, \phi_2\}, o \rangle$, जहाँ $\phi_1(x) = x, \phi_2(x) = \frac{1}{x}$

इकाई 5 : प्रसामान्य उपसमूह (Normal Subgroup)

इकाई की रूपरेखा

5.0 उद्देश्य

5.1 प्रस्तावना

5.2 प्रसामान्य उपसमूह

5.2.1 परिभाषा

5.2.2 प्रसामान्य उपसमूह के उदाहरण

5.3 प्रसामान्य उपसमूह पर प्रमेय

5.4 दृष्टान्तीय उदाहरण

5.5 सारांश

5.6 शब्दावली

5.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

5.8 अभ्यास प्रश्न

5.0 उद्देश्य

इस इकाई में किसी समूह के विशेष प्रकार के उपसमूह - प्रसामान्य उपसमूह (Normal subgroup) के बारे में चर्चा की गई है । इस इकाई को पढ़ लेने के उपरान्त आप किसी समूह के प्रसामान्य उपसमूहों के गुणधर्मों के विषय में जान जायेगें एवं यह भी जानकारी प्राप्त कर सकेगें कि ये उपसमूह किसी समूह के विभाग समूह (Quotient group) को परिभाषित करने में भी महत्त्वपूर्ण है ।

5.1 प्रस्तावना

माना कि G एक समूह है जिसमें द्विआधारी संक्रिया गुणात्मक रूप में निरूपित होती है । माना कि H,G का कोई उपसमूह है । यदि $x \in G, G$ का कोई अवयव है तब $Hx = \{hx \mid h \in H\}, G$ में H का दक्षिण सहसमुच्चय (Right coset) है , और $xH = \{xh \mid h \in H\}, G$ में H का वाम सहसमुच्चय (Left coset) है | सामान्य परिस्थितियों में यह आवश्यक नहीं है कि H का दक्षिण सहसमुच्चय, H के वाम सहसमुच्चय के समान हो । किन्तु जब G क्रमविनिमेय (आबेली) समूह हो तो ये समान होते हैं । जब G आबेली समूह नहीं हो तब भी G के विशेष उपसमूह जिन्हें प्रसामान्य उपसमूह कहते हैं के लिये उपरोक्त संभव होता है । अब हम इन विशेष उपसमूहों को निम्नानुसार औपचारिक परिभाषित करतें हैं |

5.2 प्रसामान्य उपसमूह (Normal subgroup)

5.2.1 परिभाषा : किसी समूह G का कोई उपसमूह N, G का प्रसामान्य कहलाता है यदि प्रत्येक $g \in G$ तथा $x \in N$ के लिये $gxg^{-1} \in N$ यदि N, G का प्रसामान्य उपसमूह है तब हम इसे सकते $N \lhd G$ से व्यक्त करते हैं ।

टिप्पणी (1) : प्रसामान्य उपसमूह को निश्चिय उपसमूह (invariant subgroup) तथा स्वयं युग्मी उपसमूह (self conjugate subgroup) भी कहतें है ।

(2) : प्रसामान्य उपसमूह की परिभाषा से स्पष्ट है कि प्रत्येक समूह G के कम से कम दो प्रसामान्य उपसमूह G एवं {e} अवश्य होते हैं, इन्हें विषम प्रसामान्य उपसमूह (improper normal subgroup) कहतें हैं । G,{e} के अतिरिक्त समूह G के अन्य प्रसामान्य उपसमूह उचित प्रसामान्य उपसमूह (proper normal subgroup) कहलाते हैं ।

(3) : यदि किसी समूह का कोई भी उचित प्रसामान्य उपसमूह विद्यमान न हो तो समूह सरल समूह (simple group) कहलाता है ।

5.2.2 प्रसामान्य उपसमूह के उदाहरण:

उदाहरण 1 : माना $Q=\{\pm 1,\pm i,\pm j,\pm k\}$ जहाँ $i^2=j^2=k^2=-1$ एवं $ij=k,\ jk=i, ki=j,$ तब $\langle Q,.\rangle$ एक समूह है, जिसे चतुष्टय समूह (quaternion group) कहते है ।

इस समूह के सभी उपसमूह निम्नानुसार हैं

(i) $H_1=\{1\}$ $\quad \because x.1x^{-1}=xx^{-1}=1\in H_{1,}, \forall x\in G$

$$\Rightarrow H_1 \lhd Q$$

(ii) $H_2=\{1,-1\}$ $\quad \because x.1x^{-1}=H_2, \forall x\in G$ एवं

$$x.(-1).x^{-1}=-1\in H_2, \forall x\in G$$

$$\Rightarrow H_2 \lhd Q$$

(iii) $H_3=\{\pm 1,\pm i,\},$

$H_4=\{\pm 1,\pm j\},$

$H_5=\{\pm i,\pm k\}$

इसी तरह यह आसानी से सिद्ध किया जा सकता है कि

$$H_3 \lhd Q, H_4 \lhd Q \text{ एवं } H_5 \lhd Q$$

अत: हम देखते है कि Q का प्रत्येक उपसमूह एक प्रसामान्य उपसमूह है ।

टिप्पणी : यदि समूह का प्रत्येक उपसमूह, एक प्रसामान्य उपसमूह हो, तब उस समूह को हैमिल्टनी समूह (Hamiltonian group) कहते है ।

उदाहरण 2 : संकेतों पर सममित समूह ।

$$S_3=\{(1),(123),(132),(12),(23),(31)\}$$

का एकान्तर समूह $A_3=\{(1),(123),(132)\}, S_3$ का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है ।

इसी तरह,

$$A_4 \lhd S_4, A_5 \lhd S_5 \text{ एवं } A_n \lhd S_n, \forall n\in N$$

उदाहरण 3 : अभाज्य कोटि का प्रत्येक समूह, सरल समूह होता है ।

हल : चूंकि अभाज्य कोटि के एक समूह के कोई भी उचित उपसमूह नहीं होता (लग्रांज प्रमेयानुसार) अत: अभाज्य कोटि के एक समूह के कोई उचित प्रसामान्य उपसमूह भी नहीं होगा, फलत: अभाज्य कोटि का प्रत्येक समूह सरल समूह हैं ।

5.3 प्रसामान्य उपसमूह पर प्रमेय प्रमेय

प्रमेय 1 : किसी समूह का G एक उपसमूह H, प्रसामान्य होता है यदि और केवल यदि

$$xHx^{-1} = H, \forall x \in G$$

उपपत्ति : यहाँ $xHx^{-1} = \{xhx^{-1} | h \in H\}$

माना

$$xHx^{-1} = H, \forall x \in G$$

अतः

$$xHx^{-1} \subseteq H$$

अतः

$$xhx^{-1} \in H, x \in G, h \in H$$

परिभाषानुसार,

$$H \lhd G$$

विलोमत : माना

$$H \lhd G$$

अतः

$$xhx^{-1} \in H, \forall h \in H, x \in G$$

$$\Rightarrow xHx^{-1} \subseteq H \qquad .....(1)$$

तथा $x^{-1} \in G$ के लिये

$$x^{-1}H(x^{-1})^{-1} = x^{-1}Hx \subseteq H$$

$$\Rightarrow x(x^{-1}Hx)x^{-1} \subseteq xHx^{-1}$$

$$\Rightarrow (xx^{-1})H(xx^{-1}) \subseteq xHx^{-1}$$

$$\Rightarrow H \subseteq xHx^{-1} \qquad .....(2)$$

अत: (1) एवं (2) से

$$xHx^{-1} = H, \forall x \in G$$

प्रमेय 2 : किसी समूह G का एक उपसमूह H, G का प्रसामान्य उपसमूह होता है, यदि और केवल यदि G मे H का प्रत्येक वाम (दक्षिण) सहसमुच्चय G मे H का दक्षिण (वाम) भी है।

उपपत्ति : प्रतिबन्ध की आवश्यकता : माना कि समूह G का H एक प्रसामान्य है, तब प्रमेय 1 से

$$xHx^{-1} = H, \quad \forall x \in G$$
$$\Rightarrow (xHx^{-1})x = Hx, \ \forall x \in G$$
$$\Rightarrow xH(x^{-1}x) = Hx, \ \forall x \in G$$
$$\Rightarrow xHe = Hx, \quad \forall x \in G$$
$$\Rightarrow xH = Hx, \quad \forall x \in G$$

अत: G में H का प्रत्येक वाम (दक्षिण) सहसमुच्चय, G में H का दक्षिण (वाम) सहसमुच्चय भी है ।

प्रतिबन्ध की पर्याप्तता : माना G में H का प्रत्येक वाम (दक्षिण) सहसमुच्चय G मे H का दक्षिण (वाम) सहसमुच्चय है । अर्थात् यदि $x \in G$, वाम सहसमुच्चय xH , एक दक्षिण भी है $\Rightarrow$ xH एक दक्षिण सहसमुच्चय है

$$\because e \in H \Rightarrow xe = x \in xH$$

परंतु

$$e.x = x \Rightarrow x \in Hx \text{ (दक्षिण सहसमुच्चय)}$$

अत: x, xH एवं Hx दो दक्षिण सहसमुच्चय में है

चूंकि दो दक्षिण सहसमुच्चय या तो असंयुक्त होते है या सर्वसम होते है ।

अब चूंकि $x \in xH \cap Hx$, इसलिये $xH \cap Hx \neq \phi$

इसलिये

$$xH = Hx$$
$$\Rightarrow (xH)x^{-1} = (Hx)x^{-1}$$
$$\Rightarrow xHx^{-1} = Hxx^{-1} = He = H, \forall x \in G$$
$$\Rightarrow xHx^{-1} = H, \forall x \in G$$

तब प्रमेय 1 के अनुसार H, G का प्रसामान्य उपसमूह है ।

प्रमेय 3 : किसी समूह G का उपसमूह H, G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है यदि और केवल यदि G में H के दो दक्षिण सहसमुच्चयों का गुणनफल पुन: G में एक दक्षिण सहसमुच्चय हैं ।

उपपत्ति : माना कि H, G का प्रसामान्य उपसमूह है, और माना कि a एवं ते bG के कोई दो अवयव हैं,

तब Ha और Hb, G में H के दो दक्षिण सहसमुच्चय है,

अतः

$$(Ha)(Hb) = H(aH)b \qquad \text{[साहचर्यता के अनुसार]}$$
$$= H(Ha)b \qquad \text{[प्रमेय 2 से } H \lhd G \Leftrightarrow Ha = aH \ \forall a \in G\text{]}$$
$$= HH(ab) \qquad [\because HH = H]$$
$$= Hab$$

अब संवरक गुणधर्म से, $a, b \in G \Rightarrow ab \in G$

अतएव Hab और परिणामत: $(Ha)(Hb)$, G में H का दक्षिण सहसमुच्चय है ।

विलोमत: माना कि H के किन्हीं दो दक्षिण सहसमुच्चयो का गुणनफल G में H का दक्षिण सहसमुच्चय है । अब हम यह दर्शाएंगे कि $H \lhd G$, जिसके लिये यह दर्शाना पर्याप्त है कि $xhx^{-1} \in H, \forall x \in G$ एवं $\forall h \in H$

माना कि $x \in G, G$ का कोई स्वेच्छ अवयव है तब $x \in G \Rightarrow x^{-1} \in G$

फलत: Hx एवं Hx^{-1}, G में H के दो दक्षिण सहसमुच्चय है ।

अत: दी गई परिकल्पना के अनुसार $(Hx)(Hx^{-1})$ भी G में H का दक्षिण सहसमुच्चय है, अब H एक उपसमूह है, अत: $e \in H$

$$\Rightarrow e = xx^{-1} = (ex)(ex^{-1}) \in HxHx^{-1}$$

अत: (Hx) (Hx^{-1}) और H = He, G में H के दो दक्षिण सहसमुच्चय है, जिनमें प्रत्येक में e सर्वनिष्ठ है, अत:

$$(Hx)\ (Hx^{-1}) = H, \forall x \in G$$

$$\Rightarrow (h_1x)(hx^{-1}) \in H, \forall x \in G \text{ एवं } \forall h_1, h \in H$$

$$\Rightarrow h_1^{-1}h_1xhx^{-1} \in h_1^{-1}H, \forall x \in G. \text{ एवं } \forall h_1, h \in H$$

$$\Rightarrow xhx^{-1} \in H, \forall x \in G \text{ एवं } h_1, h \in H$$

$$[\because H \text{ एक उपसमुह है, } h_1^{-1} \in H \Rightarrow h_1^{-1}H = H]$$

$$\Rightarrow H \lhd G$$

प्रमेय 4 : एक आबेली समूह का प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य होता है ।

उपपत्ति : माना H एक, आबेली समूह G का उपसमूह है । अब यदि $g \in G$ एवं $x \in H$ हो तो

$$gxg^{-1} = (gx)g^{-1} = (xg)g^{-1} \qquad [\because x \in H \Rightarrow x \in G \text{ एवं } xg = gx]$$

$$= x(gg^{-1})$$

$$= xe$$

$$= x \in H$$

अतः $gxg^{-1} \in H, \forall x \in G$ एवं $\forall g \in G$

$$\Rightarrow H \lhd G$$

$\because H$ कोई स्वेच्छित उपसमूह है, अत: आबेली समूह G का प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य होता है

उपप्रमेय 1 : एक चक्रीय समूह का प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य होता है ।

उपपत्ति : चूंकि प्रत्येक चक्रीय समूह, आबेली है, अत: उपरोक्त प्रमेय से चक्रीय समूह का प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य होता है।

टिप्पणी : उपरोक्त प्रमेय का विलोम सत्य नहीं होता है । उदाहरण के लिये $\langle Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, .\} \rangle$ चतुष्टीय समूह का प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य है (उदाहरण 5.4.1) परन्तु चतुष्टीय समूह न तो आबेली है एवं न ही चक्रीय है ।

समूह का केन्द्र (Centre of group)

समूह G का केन्द, समूह के निम्न अवयवों का समुच्चय है :

$$Z(G)=\{g\in G \mid gx=xg, \forall x\in G\}$$

अगले प्रमेय में हम सिद्ध करेगे कि यह समुच्चय (समूह का केन्द्र) समूह G का एक प्रसामान्य उपसमूह है ।

प्रमेय 5 : समूह G का केन्द्र Z, G का प्रसामान्य उपसमूह होता है

उपपत्ति : परिभाषानुसार

$$Z=\{g\in G \mid gx=xg, \forall x\in G\}$$

माना $z_1, z_2 \in Z \Rightarrow z_1x = zx_1$ एवं $z_2x = xz_2, \forall x \in G$

अब

$$\begin{aligned}
z_2x = xz_2 &\Rightarrow z_1^{-1}(z_2x)z_2^{-1} = z_2^{-1}(xz_2)z_1^{-1}\\
&\Rightarrow (z_1^{-1}z_2)(xz_2^{-1}) = (z_2^{-1}x)(z_2z_2^{-1}), \forall x\in G\\
&\Rightarrow e(xz_2^{-1}) = (z_2^{-1}x)e, \forall x\in G\\
&\Rightarrow xz_2^{-1} = z_2^{-1}x, \forall x\in G\\
&\Rightarrow z_2^{-1}\in Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(z_1, z_2^{-1})(x) &= z_1(z_2^{-1}x)\\
&= z_1(xz_2^{-1})\\
&= (z_1x)z_2^{-1}\\
&= (xz_1)z_2^{-1}\\
&= (x)(z_1z_2^{-1}), \forall x\in G\\
&\Rightarrow z_1z_2^{-1}\in Z
\end{aligned}$$

$\Rightarrow Z, H$ का एक उपसमूह है ।

अब हम दिखाएंगे कि Z, G का प्रसामान्य उपसमूह है

माना $g\in Z$ एवं $x\in G$ तब

$$\begin{aligned}
xgx^{-1} &= (xg)x^{-1}\\
&= (gx)x^{-1}\\
&= g(xx^{-1})\\
&= g\in Z
\end{aligned}$$

$\Rightarrow xgx^{-1}\in Z, \forall x\in G$ एवं $g\in Z$

$\Rightarrow \quad Z \lhd G$

प्रमेय 6 : किसी समूह G के किन्हीं दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी उस समूह G का प्रसामान्य उपसमूह होता है ।

उपपत्ति : माना N_1 तथा N_2, समूह G के दो प्रसामान्य उपसमूह हैं । चूंकि यह पहले ही सिद्ध किया जा चुका है कि दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ एक उपसमूह होता है. अत: $N_1 \cap N_2, G$ का एक उपसमूह है

अब माना

$$n \in N_1 \cap N_2 \text{ एवं } x \in G \Rightarrow n \in N_1 \text{ एवं } n \in N_2 \text{ एवं } x \in G$$

चूंकि

$$N_1 \lhd G \text{ तब } n \in N_1 \text{ एवं } x \in G \Rightarrow xnx^{-1} \in N_1$$

इसी प्रकार

$$N_2 \lhd G \Rightarrow xnx^{-1} \in N_2$$
$$\Rightarrow xnx^{-1} \in N_1 \cap N_2$$

अतः

$$x \in G \text{ एवं } n \in N_1 \cap N_2$$
$$\Rightarrow xnx^{-1}n \in N_1 \cap N_2$$
$$\Rightarrow N_1 \cap N_2 \lhd G$$

प्रमेय 7 : यदि समूह G का एक उपसमूह H है, एवं $N \lhd G$, तो $H \cap N \lhd H$, जबकि $H \cap N$ का G में प्रसामान्य उपसमूह होना आवश्यक नहीं है ।

उपपत्ति : चूंकि किसी समूह के दो उपसमूहो का सर्वनिष्ठ एक उपसमूह होता है इसलिये $H \cap N$ समूह G का उपसमूह है। अब चूंकि $H \cap N \subseteq H \subseteq G$, एवं H एवं $H \cap N, G$ के उपसमूह है, इसलिये $H \cap N; H$ का भी उपसमूह है ।

अब माना कि

$$h \in H \cap N \text{ एवं } x \in H$$
$$\Rightarrow h \in H \text{ एवं } h \in N \text{ एवं } x \in H$$

$\because h \in H, x \in H$ एवं H का उपसमूह है

$$\Rightarrow xhx^{-1}n \in H \qquad \text{.....(1)}$$

$\therefore h \in N, x \in H \Rightarrow x \in G$ एवं $N \lhd G$

$$\Rightarrow xhx^{-1} \in N \qquad \text{.....(2)}$$

(1) एवं (2) से

$$xhx^{-1} \in H \cap N$$

अत: $xhx^{-1} \in H \cap N \; \forall h \in H \cap N, \forall x \in H$

$$\Rightarrow H \cap N \lhd H$$

$H \cap N$ का G में प्रसामान्य होना आवश्यक नहीं, उदाहरण के लिये

G = A_4 = चार संकेतो पर सम क्रमचयों का एकान्तर समूह

$$= \left\{ \begin{matrix} (1),(123),(124),(132),(134)(142),(143)(234), \\ (234),(12)(34),(13)(24),(14)(23) \end{matrix} \right\}$$

$$N = \{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$$
$$H = \{(1),(12)(34)\}$$

तब आप स्वयं यह जांच करके देख सकते है कि H समूह G का उपसमूह है, परंतु प्रसामान्य उपसमूह नहीं है, साथ ही $N \lhd G$

अब

$$H \cap N = H \lhd H \qquad [\because \text{ प्रत्येक समूह स्वयं का प्रसामान्य उपसमूह होता है}]$$

परन्तु $H \cap N = H$, G का प्रसामान्य उपसमूह नहीं है ।

प्रमेय 8 : यदि H किसी समूह G का एक प्रसामान्य उपसमूह है, तथा यदि K, G का एक उपसमूह इस प्रकार है कि $H \subseteq K \subseteq G$, तब H, K का भी प्रसामान्य उपसमूह होता है ।

उपपत्ति : चूंकि $H \lhd G \Rightarrow H, G$ का उपसमूह है एवं K,G का उपसमूह है तथा $H \subseteq K \Rightarrow H, K$ का उपसमूह है ।

माना

$$x \in K \Rightarrow x \in G$$

अब चूंकि $\quad H \lhd G \Rightarrow Hx = xH$

अत: H, K का उपसमूह है तथा $\quad Hx = xH, \forall x \in K$

$$\Rightarrow H \lhd K$$

टिप्पणी : इस प्रमेय का विलोम सत्य होना आवश्यक नहीं है, अर्थात् यदि H, N समूह G के उपसमूह इस प्रकार है कि $H \subseteq N \subseteq G$ एवं $H \lhd N$ तब H, G में भी प्रसामान्य हो यह आवश्यक नहीं है ।

उदाहरण के लिये प्रमेय 8 मे दिये उदाहरण के अनुसार G, N एवं H लेने पर $H \lhd N$ एवं $H \subseteq N \subseteq G$ परन्तु H, G में प्रसामान्य नहीं है ।

प्रमेय 9 : यदि H, G में सूचक (index) 2 का एक उपसमूह है, तो H, G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है ।

उपपत्ति : हम यह जानते है कि किसी उपसमूह H के किसी समूह G में विभिन्न वाम (दक्षिण) सहसमुच्चयों की संख्या को उस उपसमूह का सूचक (index) कहते है

एवं यह $[G:H] = \dfrac{O(G)}{O(H)} = \dfrac{\text{G का समुहांक}}{\text{H का समुहांक}}$ समुहाक होता है

अब चूंकि G में H का सूचक 2 है, अतः एव G में H के केवल 2 वाम (दक्षिण) सहसमुच्चय है । साथ ही $H = eH = He,$, अत: H स्वयं G में H का वाम एवं दक्षिण सहसमुच्चय है ।

माना $x \in G$ तब निम्नानुसार दो स्थितियां हो सकती हैं

स्थिति (i) xH: इस स्थिति में

$$xH = H = Hx \qquad [\because x \notin H]$$

स्थिति (ii) $x \notin H$, तो वाम सहसमुच्चय xH, H से भिन्न है

अर्थात् $xH \neq H$

इसी प्रकार दक्षिण सहसमुच्चय Hx भी H से भिन्न होगा

अर्थात् $Hx \neq H$

G का H के सापेक्ष सहसमुच्च्य वियोजन में

$$G = H \cup Hx \text{ या } G = H \cup xH$$

परन्तु H एवं Hx में कोई अवयव उभयनिष्ठ नहीं है अर्थात् $H \cap Hx = \phi$

इसी प्रकार

$$H \cap Hx = \phi$$

[$\because$ कोई दो वाम (दक्षिण) सहसमुच्चय या तो असंयुक्त होते हैं या समान होते हैं]

अत: $H \cup Hx = H \cup xH$ एवं $H \cap Hx = \phi = H \cap xH$

$$\Rightarrow Hx = xH$$

अत: उपरोक्त दोनो स्थितियो में $Hx = xH, \forall x \in G$, अत: परिभाषानुसार $H \lhd G$

प्रमेय 10: यदि H, एक समूह G का उपसमूह है तथा $N \lhd G$ तब

(i) HN, G का उपसमूह होता है

(ii) N $\lhd$ HN

उपपत्ति : (i) चूंकि H और N एक ही समूह G के उपसमूह है, इसलिये वे अरिक्त हैं, फलतः $HN \neq \phi$

माना $\alpha = h_1 n_1$ एवं $\beta = h_2 n_2$ HN के कोई दो अवयव है, जहाँ $h_1 n_2 \in H$ एवं $n_1 n_2 \in N$,

अब

$$\alpha\beta^{-1} = (h_1 n_1)(h_2 n_2)^{-1}$$

$$= h_1 n_1 n_2^{-1} h_2^{-1}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta^{-1} = h_1 h_2^{-1} \left\{ h_2 \left(n_1 n_2^{-1} \right) h_2^{-1} \right\} \quad ...(1)$$

परंतु H, G का उपसमूह है

$$\Rightarrow h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 h_2^{-1} \in H \quad ...(2)$$

इसी प्रकार N, G का उपसमूह है

$$\Rightarrow n_1, n_2 \in N \Rightarrow n_1 n_2^{-1} \in N$$

साथ ही $N \lhd G$ एवं $n_1 n_2^{-1} \in N$ एवं $h_2 \in H \subseteq G \Rightarrow n_2 \in G$

$$\Rightarrow h_2 \left(n_1 n_2^{-1} \right) h_2^{-1} \in N \quad ...(3)$$

अत: (1), (2) एवं (3) से

$$\Rightarrow \alpha\beta^{-1} = \left(h_1 \; h_2^{-1} \right) \left\{ h_2 \left(n_1 n_2^{-1} \right) h_2^{-1} \right\} \in HN$$

$\Rightarrow HN, G$ का उपसमूह हैं

इसी प्रकार हम यह भी सिद्ध कर सकते है कि NH, G का उपसमूह हैं ।

(ii) चूंकि H , G का एक उपसमूह है, अतःएव तत्समक अवयव $e \in H$ एवं किसी स्वेच्छ अवयव $n \in H$ के लिये

$$n = en \in HN \quad \forall n \in N$$

$$\Rightarrow N \subseteq HN$$

अब HN, G का एक उपसमूह हैं, N, G का उपसमूह हैं एवं $N \subseteq HN$, अत: N, HN भी उपसमूह है अब चूंकि $N \lhd H$

अत: $N \lhd HN$ (प्रमेय 8 से)

प्रमेय 11 : माना कि f समूह G से समूह G' में समाकारिता है । यदि N,G का प्रसामान्य उपसमूह है, तो प्रतिबिम्ब $f(N), f(G)$ का प्रसामान्य उपसमूह होगा ।

उपपत्ति : प्रथमत: हम यह सिद्ध करेगे कि $f(N), f(G)$ का उपसमूह है ।

माना $a,b \in f(N)$ तब $\exists n_1, n_2 \in N \lhd G$ ताकि $a = f(n_1)$ एवं $f(b) = n_2$

अब

$$n_1 n_2 \in N \Rightarrow n_1 n_2^{-1} \in N$$

$$\Rightarrow f\left(n_1 n_2^{-1}\right) \in f(N)$$

$$\Rightarrow \quad f(n_1).f\left(n_2^{-1}\right) \in f(N) \qquad [\because \text{ f एक समाकारिता है }]$$

$$\Rightarrow f(n_1)\left[f(n_2)\right]^{-1} \in f(N)$$

$$\Rightarrow ab^{-1} \in f(N)$$

फलत: $a,b \in f(N) \Rightarrow ab^{-1} \in f(N)$

साथ ही

$$f(N) \subseteq f(G)$$

$\Rightarrow f(N), f(G)$ का उपसमूह है ।

अब माना $x \in f(G)$ एवं $h \in f(N)$

$$\Rightarrow \exists y \in G \text{ एवं } n \in N \text{ ताकि } y = f(x) \text{ एवं } h = f(n)$$

चूंकि $N \lhd G$ एवं $n \in N, y \in G \Rightarrow yny^{-1} \in N$

$$\Rightarrow f\left(yny^{-1}\right) \in f(N)$$

$$\Rightarrow f(y) f(n) f\left(y^{-1}\right) \in f(N) \qquad [\because f \text{ एक समाकारिता है }]$$

$$\Rightarrow f(y) f(n)\left[f(y)\right]^{-1} \in f(N)$$

$$\Rightarrow xhx^{-1} \in f(N)$$

$$\Rightarrow f(N) \lhd f(G)$$

प्रमेय 12 : समूह G से G' पर परिभाषित समाकारिता f की अष्टि G का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

उपपत्ति : दिया है

$$f : G \to G \text{ एक समाकारिता है}$$

माना K समाकारिता f की अष्टि है, तब

$$K = \left\{x \in G \mid f(x) = e'\right\}$$ (जहाँ e,G ' का तत्समक अवयव

है)

अब चूंकि

$$f(e)=e \Rightarrow e \in K \Rightarrow K \neq \phi$$ (जहाँ e,G ′ का तत्समक अवयव है)

साथ ही $K \subseteq G$

माना $a,b \in K \Rightarrow f(a)=e'=f(b)$

अब

$$f(ab^{-1})=f(a)f(b^{-1})=f(a)[f(b)]^{-1}$$ [$\because$ f, एक समाकारिता है]

$$=e'(e)^{-1}$$

$$=e'$$

$$\Rightarrow ab^{-1} \in K$$

$\Rightarrow$ K, G का उपसमूह है ।

माना $g \in G$, कोई स्वैच्छिक अवयव है तथा $a \in K \Rightarrow f(a)=e'$

$$f(gag^{-1})=f(g)f(a)f(g^{-1})$$

$$=f(g)f(a)[f(g)]^{-1}$$ [$\because$ f, एक समाकारिता है]

$$=f(g)e'|[f(g)]^{-1}$$

$$=f(g)[f(g)]^{-1}$$

$$=e'$$

$$\Rightarrow gag^{-1} \in K$$

$$\Rightarrow K \lhd G$$

5.4 दृष्टान्तीय उदाहरण

उदाहरण 1 : माना n संकेतो पर सममित समूह S_n है तो सिद्ध कीजिये कि सम क्रमचयों का समूह A_n , S_n का उप समूह है अर्थात $A_n \lhd S_n$

हल : हम यह सिद्ध कर चुके हैं कि A_n ,S_n का उपसमूह है ।

यदि $\alpha \in S_n$ तथा $\beta \in A_n$ तब α सम या विषम क्रमचय हो सकता है, परन्तु β एक सम क्रमचय है । अब $\alpha\beta\alpha^{-1}$ पर विचार करते हैं ।

(i) जब α सम क्रमचय है, तो α^{-1} भी सम क्रमचय होगा इसलिये $\alpha\beta\alpha^{-1}$ सम क्रमचय होगा।

(ii) जब α विषम क्रमचय है, तो α^{-1} भी विषम क्रमचय होगा ।

इसलिये

$\alpha\beta\alpha^{-1}$ = (विषम क्रमचय) (सम क्रमचय) (विषम क्रमचय)

= सम क्रमचय

इसलिये α सम हो या विषम क्रमचय हो, $\alpha\beta\alpha^{-1}$ सम क्रमचय ही होगा ।

अत:

$$\alpha \in S_n, \beta \in A_n \Rightarrow \alpha\beta\alpha^{-1} \in A_n$$

$$\Rightarrow A_n \lhd S_n$$

उदाहरण 2 : यदि N और M,G के दो प्रसामान्य उपसमुच्चय हैं, तो दर्शाइयें कि N का प्रत्येक अवयव M के प्रत्येक से क्रम-विनिमेयी है । जहाँ $N \cap M = \{e\}$ हैं ।

हल : दिया है कि $N \lhd G$ एवं $M \lhd G$ साथ ही $N \cap M = \{e\}$

माना $n \in N$ एवं $m \in M$ तब सिद्ध करना है कि $nm = mn$

अब

$$nmn^{-1}m^{-1} = \left(nmn^{-1}\right)m^{-1}$$

परन्तु

$$M \lhd G \Rightarrow nmn^{-1} \in M \qquad [\because n \in N \subseteq G \Rightarrow n \in G]$$

साथ ही

$$m^{-1} \in M \text{ एवं } nmn^{-1} \in M \Rightarrow \left(nmn^{-1}\right)m^{-1} \in M \qquad .....(1)$$

पुनः

$$nmn^{-1}m^{-1} = n\left(mn^{-1}m^{-1}\right)$$

परंतु

$$N \lhd G \Rightarrow mn^{-1}m^{-1} \in N \qquad [\because m \in M \subseteq G \Rightarrow m \in G]$$

साथ ही

$$n \in N \text{ एवं } mn^{-1}n^{-1} \in N \Rightarrow n\left(mm^{-1}m^{-1}\right) \in N \qquad .....(2)$$

(1) एवं (2) से

$$nmn^{-1}m^{-1} \in M \cap N = \{e\}$$

$$\Rightarrow nmn^{-1}m^{-1} = e$$

$$\Rightarrow (nm)(mn)^{-1} = e$$

$$\Rightarrow nm = mn$$

उहाहरण 3 : माना कि परिमित समूह G का केवल H ही n कोटि (परिमित) का उपसमूह है । सिद्ध कीजिये

$$H \lhd G$$

हल : दिया हुआ है कि H, G का उपसमूह है, साथ ही o (H) = n एवं केवल H ही n कोटि का उपसमूह है ।

माना

$$H = \{h_1, h_2, ...h_n\}$$

हम जानते है कि

xHx^{-1} भी G का उपसमूह है, $\forall x \in G$

अतः

$$xHx^{-1} = \left\{ xh_1x^{-1}, xh_2x^{-1} .....xh_nx^{-1} \right\}$$

xHx^{-1} का प्रत्येक अवयव भिन्न है, यदि नहीं तो माना कि किसी $i \neq j$ के लिये

$$xh_ix-^1 = xh_jx-^1 \quad 1 \leq i, j \leq n$$

$$\Rightarrow h_i = h_j$$

जो कि संभव नहीं है क्योंकि यदि ऐसा हुआ तब O(H) < n

जबकि O(H) = n (दिया हुआ है)

अत:

$$O\left(xHx^{-1}\right) = n$$

अर्थात् xHx^{-1} भी nकोटि का उपसमूह है परन्तु n कोटि का केवल H ही उपसमूह है

अत:

$$xHx^{-1} = H, \ \forall x \in G \Rightarrow H \lhd G$$

उदाहरण 4 : यदि $H \lhd G$, एवं $K \lhd G$ तब सिद्ध कीजिये कि $HK \lhd G$

हल : सर्वप्रथम हम सिद्ध करेगे कि HK, G का उपसमूह है

माना $a, b \in HK \Rightarrow \exists h_1h_2 \in H$ एवं $k_1k_2 \in K$ ताकि

$a = h_1k_1$ एवं $b = h_2k_2$

अब

$$ab^{-1} = \left(h_1k_1\right)\left(h_2k_2\right)^{-1}$$
$$= h_1k_1\left(k_2^{-1}h_2^{-1}\right)$$
$$= h_1\left(k_1k_2^{-1}\right)h_2^{-1}$$

चूंकि $k_1, k_2 \in K \Rightarrow k_3 = k_1k_2^{-1} \in K$

तब

$$ab^{-1} = h_1k_3h_2^{-1}$$
$$= h_1\left(h_2^{-1}h_2\right)k_3h_2^{-1}$$
$$= \left(h_1h_2^{-1}\right)\left(h_2k_3h_2^{-1}\right)$$

अब $\because h_1h_2 \in H \Rightarrow h_1h_2^{-1} \in H$

साथ ही

$h_2 \in H \Rightarrow h_2 \in H$ एवं $K \lhd G \Rightarrow h_2k_3h_2^{-1} \in K$

अतः

$$ab^{-1} = \left(h_1h_2^{-1}\right)\left(h_2k_3h_2^{-1}\right) \in HK$$

$\Rightarrow HK, G$ का उपसमूह है ।

अब हम दर्शाएंगे कि $HK \lhd G$

अत: माना कि $x \in G$ एवं $a \in HK \Rightarrow \exists h \in H$ एवं $k \in k$ ताकि

$$a = hk$$

$$\because H \lhd G \Rightarrow xhx^{-1} \in H, \ \forall x \in G$$

एवं

$$K \lhd G \Rightarrow xkx^{-1} \in K, \forall x \in G$$

$$\Rightarrow \left(xhx^{-1}\right)\left(xkx^{-1}\right) \in HK, \forall x \in G$$

$$\Rightarrow xh\left(x^{-1}x\right)kx^{-1} \in HK, \forall x \in G$$

$$\Rightarrow xhekx^{-1} \in HK, \forall x \in G$$

$$\Rightarrow x\left(hk\right)x^{-1} \in HK$$

$$\Rightarrow xax^{-1} \in HK$$

$$\Rightarrow HK \lhd G$$

उदाहरण 5 : यदि H किसी समूह G का एक ऐसा उपसमूह है कि $x^2 \in H, \forall x \in G$, तो सिद्ध

$$H \lhd G$$

हल : $\forall g \in G, h \in H \Rightarrow gh \in G$

$$\Rightarrow (gh)^2 \in H$$

साथ ही

$$g \in G \Rightarrow g^{-1} \in G$$

$$\Rightarrow g^{-2} \in H,$$

$$h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$$

अत:

$$h^{-1}g^{-2} \in H$$

अब

$$(gh)^2 \in H, h^{-1}g^{-1} \in H \Rightarrow (gh)^2\left(h^{-1}g^{-2}\right) \in H$$

$$\Rightarrow gh\left(gh\,h^{-1}\right)g^{-2} \in H$$

$$\Rightarrow gh\,g\,g^{-2} \in H$$

$$\Rightarrow H \lhd G$$

उदाहरण 6 : यदि $N \lhd G$ एवं $O(N) = 2$ तब $N \subseteq Z(G)$ जहाँ $Z(G), G$ का केन्द्र है ।

हल : माना $N = \{a, e\}$, जहां $(a \neq e)$

चूंकि $e \in Z(G)$, अत: अब हमें सिद्ध करना है कि $e \in Z(G)$, अर्थात्

$$ag = ga, \forall g \in G$$

या $\quad g^{-1}ag = a, \ \forall g \in G$

अत: माना $g \in G$

चूंकि $a \in N$ एवं $N \lhd G \Rightarrow g^{-1}ag \in N$

$$\Rightarrow \ g^{-1}ag = a \ \text{ yaa } \ g^{-1}ag = e$$

परन्तु यदि

$$g^{-1}ag = e$$
$$\Rightarrow ag = ge$$
$$= g$$
$$= eg$$
$$\Rightarrow a = e$$ (निरसन नियम द्वारा)

जो कि सत्य नहीं है

अर्थात्

$$g^{-1}ag = a \Rightarrow a \in Z(G)$$

अत:

$$N \subseteq Z(G)$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. निम्न में प्रत्येक का एक उदाहरण दीजिये
   (i) अक्रमविनिमेय समूह G में उपसमूह H, जो G में प्रसामान्य नहीं है
   (ii) अक्रमविनिमेय समूह G में प्रसामान्य उपसमूह H
2. प्रत्येक समूह G में कम से कम दो प्रसामान्य उपसमूह होते है ।" क्या यह कथन सत्य है ?

हाँ / नहीं

3. $H \lhd G$ यदि और केवल यदि $\forall g \in G$ के लिये $gHg^{-1} = ...$
4. एक आबेली समूह के कितने उपसमूह, प्रसामान्य उपसमूह होते हैं ?

5.5 सारांश

इस इकाई में आपने किसी समूह के प्रसामान्य उपसमूहों का अध्ययन किया । प्रसामान्य उपसमूह के विभिन्न उदाहरणों की चर्चा की । साथ ही प्रसामान्य उपसमूह के विभिन्न गुणधर्मों का अध्ययनकर विभिन्न प्रमेयों को सिद्ध किया ।

5.6 शब्दावली

प्रसामान्य उपसमूह	Normal Subgroup
सहसमुच्चय	Coset
विषम प्रसामान्य उपसमूह	Improper Normal Subgroup
उचित प्रसामान्य उपसमूह	Proper Normal Subgroup
सरल समूह	Simple Group
समूह का केन्द्र	Centre of a Group
चतुष्टय समूह	Quaternion Group
समाकारिता	Homomorphism
समाकारिता की अष्टि	Kernel of Homomorphism

5.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नो के उत्तर

1. (i) माना G = S_3 (तीन जीन संकेतो पर सममित समूह)

   तब $O(G)=O(S_3)=6$ एवं स्पष्टत: G का अक्रमविनिमेय समूह है

   माना $H=\{e,(1,2)\}$

   तब

   $H \subseteq S_3$ एवं H , S_3 का उपसमूह है

   परन्तु

   (2 3) H = {(2,3), (2,3) (12)}

   = {(2,3),(1 32)}

   एवं

   H (23) = {(2,3), (1 2) (2 3)}

   = {(2,3),(123)}

   अत:

   (23) $H \neq H(23)$

   फलत: H, G का प्रसामान्य उपसमूह नहीं हैं ।

   (ii) माना G = चतुष्टय समूह Q

   $Q=\{\pm 1,\pm i,\pm j,\pm k,$ जहाँ $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, एवं $ij-k, ik=i, ki=j\}$

   साथ ही

   $ji=-k, kj=-i, ik=-i$

   तब

   $H=\{\pm 1,\pm i\} \lhd Q$

2. हां

3. H

4. सभी उपसमूह , प्रसामान्य उपसमूह होते है ।

5.8 अभ्यास प्रश्न

1. माना G वास्तविक संख्याओं पर परिभाषित मैट्रिक्स का निम्नानुसार समूह है:

   $$G=\left\langle \left\{\begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix} : ad-bc \neq 0\right\} \text{ मैट्रिक्स गुणन } \right\rangle$$

   एवं $$N=\left\langle \left\{\begin{bmatrix} ab \\ cd \end{bmatrix} : ad-bc \neq 1\right\} \text{ मैट्रिक्स गुणन } \right\rangle$$

   तो सिद्ध कीजिये $N \lhd G$

2. माना शइ वास्तविक संख्याओं पर परिभाषित मैट्रिक्स का निम्नानुसार समूह हैं:

$$G = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} ab \\ 0d \end{bmatrix} : ad \neq 0 \right\}, \quad \right\rangle \text{ मैट्रिक्स गुणन } \Big\rangle$$

एवं $N = \left\langle \left\{ \begin{bmatrix} 1b \\ 01 \end{bmatrix} : b \in R \right\}, \right.$ मैट्रिक्स गुणन $\Big\rangle$

3. सिद्ध कीजिये कि $N \lhd G$ यदि और केवल यदि

$$xy \in N \Rightarrow \quad yx \in N$$

4. माना H, समूह G का उपसमूह है एवं $N = \bigcap_{x \in G} xHx^{-1}$

तब सिद्ध कीजिये $N \lhd G$

इकाई 6 : विभाग समूह एवं समाकारिता की मूलभूत प्रमेय (Quotient Group and Fundamental Theorem of Homomorphism)

इकाई की रूपरेखा

6.0 उद्देश्य

6.1 प्रस्तावना

6.2 विभाग समूह या खण्ड समूह

6.3 विभाग समूह पर प्रमेय

6.4 समाकारिता की मूलभूत प्रमेय

6.5 दृष्टांतीय उदाहरण

6.6 सारांश

6.7 शब्दावली

6.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

6.9 अभ्यास प्रश्न

6.0 उद्देश्य

इस इकाई में विभाग समूह, इसके महत्त्वपूर्ण प्रमेय एवं समाकारिता की मूलभूत प्रमेय की चर्चा की गयी है । इस इकाई को पढ़ लेने के उपरांत आप विभाग समूह के गुणधर्मों के विषय में जान पायेंगें । आप समाकारिता की मूलभूत प्रमेय के विषय में एवं अनेक उदाहरणों द्वारा इसकी उपयोगिता के बारे में भी जान सकेंगे ।

6.1 प्रस्तावना

पिछले अध्याय में आपने प्रसामान्य उपसमूहों के बारे में अध्ययन किया । इस अध्याय में आप यह जान सकेंगे की प्रसामान्य उपसमूहों में क्या विशेष गुण है । मान लें कि N किसी समूह G का कोई प्रसामान्य उपसमूह है । चूंकि $N \lhd G$ अत: प्रत्येक $a \in G$ के लिये दक्षिण सहसमुच्चय Na, वाम सहसमुच्चय aN के बराबर है । अतःएव प्रसामान्य उपसमूह के संदर्भ में दक्षिण और वाम सहसमुच्चयों में कोई अंतर नहीं है, इसलिये हम कह सकतें हैं कि Na, G में N का एक सहसमुच्चय है । मान लें कि G/N,Gमें N के सभी सहसमुच्चयों का सग्रह है ।

अत: $G/N = \{Na \mid a \in G\}$

अब पिछले अध्याय से हम यह जानतें हैं कि G में N के दो सहसमुच्चयों का गुणनफल पुन:G में N का एक सहसमुच्चय है। अब सहज ही यह प्रश्न उठता है कि क्या समुच्चय G/N, सहसमुच्चयों के गुणन के सापेक्ष एक समूह है ? इस प्रश्न का उत्तर हमें निम्न प्रमेय से प्राप्त होता है ।

प्रमेय : किसी समूह G के एक प्रसामान्य उपसमूह N के सभी सहसमुच्चयों का समुच्चय G/N, सहसमुच्चयो के गुणन के सापेक्ष एक समूह होता है ।

उपपत्ति : दिया है कि $N \lhd G$ अतः $Ha = aN$, $\forall a \in G$ साथ ही $G/N = \{Na \mid a \in G\}$ अब हम G/N को सहसमुच्चयों के गुणन संयोजन के सापेक्ष एक समूह सिद्ध करेगें :

संवरक गुणधर्म : माना $Na, Nb \in G/N$,जहाँ $a, bc \in G$ तब $(Na)(Nb) = N(aN)b = N(Na)b$

अतः $(Na)(Nb) = NNab = Nab$

अब चूंकि $a, b, c \in G \Rightarrow ab \in G$

अतः $Nab \in G/N$

अतः G /N सहसमुच्चयों के गुणन के सापेक्ष संवरक (Closed) है ।

साहचर्यता : माना Na,Nb एवं Nc समुच्चय के G/Nकोई तीन अवयव है, जहाँ $a, b, c \in G$ तो

$$\begin{aligned} Na\left[(Nb)(Nc)\right] &= Na\left[Nbc\right] \\ &= Na(bc) \\ &= N(ab)c \qquad [\because a, b, c \in G \Rightarrow a(bc) = (ab)c] \\ &= N(ab)Nc \\ &= \left[(Na)(Nb)\right]Nc \end{aligned}$$

अत: G/N में गुणनफल साहचर्य नियम को संतुष्ट करता है ।

तत्समक की उपस्थिति :

चूंकि $N = Ne \in G/N$ (जहाँ e,Gका तत्समक अवयव है।) अतएव यदि $Na \in G/N$ तो

$$N = (Na) = (Ne)(Na) = Nea = Na$$

एवं $$Na(N) = (Na)(Ne) = Nae = Na$$

अत: सहसमुच्चय $N, G/N$ का तत्समक अवयव है ।

प्रतिलोम की उपस्थिति :

माना कि $Na \in G/N$ कोई अवयव है, अत: $a \in G \Rightarrow a^{-1} \in G$ [$\therefore$ G एक समूह है]

$\Rightarrow Na^{-1} \in G/N$ जहाँ

$$(Na) = (Na^{-1}) = Naa^{-1} = Ne = N$$

$$(Na^{-1})(Na) = Na^{-1}a = Ne = N$$

अत: सहसमुच्चय Na का प्रतिलोम $Na^{-1} \in G/N$

फलत: हम कह सकतें हैं कि G/N हें सहसमुच्चयों के गुणन के सापेक्ष एक समूह है ।

6.2 विभाग समूह या खण्ड समूह (Quotient or Factor Group)

परिभाषा : यदि G एक समूह है तथा N, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है, तो G में N के सभी सहसमुच्चयों का समुच्चय G/N, सहसमुच्चय के गुणन के सापेक्ष एक समूह होता है । यह N द्वारा G का विभाग समूह या खण्ड समूह कहलाता है ।

टिप्पणी : यदि समूह G में संक्रिया योगात्मक (+) हो तो G/N की संक्रिया निम्न प्रकार परिभाषित होगी

$$(N+a)+(N+b)=N+(a+b), \forall a,b \in G$$

उदाहरण 1 : माना $\langle Z,+\rangle$ पूर्णांकों का योगात्मक समूह है तथा

$$H=5Z=\{.....,-10,-5,0,5,10,15\} \subseteq Z$$

चूंकि $\langle Z,+\rangle$ क्रमविनिमेय समूह है, अत: H एक प्रसामान्य उपसमूह है ।

अब
$$H+1=\{.....,-9,-4,1,6,11,16,.....\}$$
$$H+2=\{.....,-8,-3,2,7,12,17,.....\}$$
$$H+3=\{.....,-7,-2,3,8,13,18,.....\}$$
$$H+4=\{.....,-6,-1,4,9,14,19,.....\}$$
$$H+5=\{.....,-5,0,5,10,15,.....\}=H=5Z$$

अब किसी भी $a \in Z$ के लिए

a = 5m+r जहाँ $m \in Z$ और r = 0, 1, 2, 3, 4

अतः
$$H+a=H+(5m+r)$$
$$=(H+5m)+r \qquad (\because 5m \in H \Rightarrow H+5m=H)$$
$$=H+r$$

अत:
$$\frac{Z}{5Z}=\{5Z,5Z+1,5Z+2,5Z+3,5Z+4\}$$

यहाँ यह स्पष्ट है कि $\frac{Z}{5Z} \cong (Z_5,+_5)$

जहाँ $Z_5=\{0,1,2,3,4\}$ एवं $+_5$ निम्न प्रकार परिभाषित है $a+_5 b=\begin{cases} a+b & if\ a+b \geq 5 \\ a+b-5 & if\ a+b \geq 5 \end{cases}$

जहाँ समाकारिता $f: Z/5Z \rightarrow Z_5$ इस प्रकार है।

$$f(5Z+a)=a \forall a \in G=Z$$

इसी प्रकार हम किसी भी $m \in Z$ के लिये कह सकतें हैं कि $\frac{Z}{mZ} \cong (Z_m,+_m)$

यहाँ यह भी ध्यान देने योग्य है कि $\langle Z,+\rangle$ एवं $\langle mZ,+\rangle$ दोनों ही अपरिमित समूह है. परन्तु $\frac{Z}{mZ}$ एक परिमित समूह है ।

उदाहरण 2 : विभाग समूह G /N ज्ञात कीजिये जबकि

$$G=\langle\{1,-1,i,-i\},\cdot\rangle \text{ और } N=\langle\{1,-1\},\cdot\rangle$$

क्योंकि G एक क्रमविनिमेय समूह है, अत: $N \lhd G$, फलस्वरूप G /N विद्यमान है ।

$$N1 = \{1\cdot 1, (-1)\cdot 1\} = \{1, -1\} = N$$
$$N(-1) = \{1\cdot(-1), (-1).(-1)\} = \{-1, 1\} = N$$
$$N(i) = \{i\cdot i, (-1)\cdot i\} = \{i, -i\} = Ni$$
$$N(-i) = \{1\cdot(-i), (-1)\cdot(-i)\} = \{-i, i\} = Ni$$

अत: $G/N = \{N, Ni\}$

उदाहरण 3 : हम जानतें हैं कि सममित समूह S_3 में एकान्तर समूह A_3 एक प्रसामान्य उपसमूह है, अत: $\frac{S_3}{A_3}$ परिभाषित है, साथ ही

$$S_3 = \{I, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$
$$A_3 = \{I, (123), (132)\}$$

अब $A_3 I = A_3 = 1A_3$

$$A_3 = (123) = A_3 \qquad [\because (123) \in A_3]$$
$$A_3(132) = A_3 \qquad [\because (132) \in A_3]$$
$$A_3(12) = \{I(12), (132)(12), (123)(12)\}$$
$$= \{(12), (13), (23)\}$$
$$A_3(13) = \{I(13), (132)(13), (123)(13)\}$$
$$= \{(13), (12), (23)\}$$
$$A_3(23) = \{I(23), (132)(23), (123)(23)\}$$
$$= \{(23), (12), (13)\}$$
$$\therefore A_3(12) = A_3(13) = A_3(23)$$

अत: $\frac{S_3}{A_3} = \{A_3, A_3(12)\}$

परन्तु यदि हम $H = \{(1), (12)\}$ उपसमूह लेते है तब H, S_3 में प्रसामान्य उपसमूह नहीं हैं क्योंकि

H (123) = {(1) (123), (12)(123)}
= { (123), (23)}
(123) H = { (123) (1), (123)(12)}
= { (123), (13)}

अब $H = (123) \neq (123)H$

अत: H, S_3 में प्रसामान्य उपसमूह नहीं, फलस्वरूप S_3/ H भी परिभाषित नहीं हैं ।

6.3 विभाग समूह पर प्रमेय

प्रमेय 1 : यदि N एक समूह G का प्रसामान्य उपसमूह

$$O(G/N)=\frac{O(G)}{O(N)}$$

उपपत्ति : समूह की कोटि की परिभाषा से

$$O\left(\frac{G}{N}\right)=\text{G में N के विभिन्न दक्षिण (वाम) सहसमुच्चय}$$

$$=\text{G में N का सूचक (Index)}$$

$$=\frac{\text{G में अवयवों का संख्या}}{\text{N में अवयवों कासंख्या [लग्रांज प्रमेय से]}}$$

$$=\frac{O(G)}{O(N)}$$

प्रमेय 2 : किसी आबेली समूह का विभाग समूह आबेली होता है परन्तु विलोम अनिवार्यत: सत्य नहीं है ।

उपपत्ति : माना N, एक आबेली समूह G का एक प्रसामान्य उपसमूह है । माना $Na, Nb \in G/N$ किसी $a, b \in G$ के लिये

$$(Na)(Nb)=Nab$$

$$=Nba \qquad [\therefore \text{ G आबेली है, अत: ab = ba }]$$

$$=(Nb)(Na)$$

$\therefore G/N$ आबेली है।

इसका विलोम सत्य नहीं है उदाहरणार्थ हम जानतें हैं कि $\frac{S_3}{A_3}$ एक विभाग समूह है, साथ ही

$$O\left(\frac{S_3}{A_3}\right)=\frac{O(S_3)}{O(A_3)}$$

$$\Rightarrow O\left(\frac{S_3}{A_3}\right)=\frac{6}{3}=2$$

अब चूंकि कोटि 2 का प्रत्येक समूह आबेली होता है अत: $\frac{S_3}{A_3}$ एक आबेली समूह है, परन्तु हम जानतें हैं कि

S_3 एक अक्रमविनिमेय समूह है ।

अत: हम यह कह सकतें हैं कि यदि G/N आबेली है तो यह आवश्यक नहीं है कि G आबेली हो।

प्रमेय 3 : किसी चक्रीय समूह का विभाग समूह चक्रीय होता है, परन्तु विलोम अनिवार्यत: सत्य नहीं हैं ।

उपपत्ति : माना कि N किसी चक्रीय समूह G का प्रसामान्य उपसमूह है एवं $a \in G$, चक्रीय समूह G का जनक है, अत: G=$\langle a \rangle$ माना कि $N\alpha \in G/N, G/N$ का कोई अवयव है ।

तब $\alpha \in G \Rightarrow \exists n \in Z$ ताकि $\alpha = a^n$ [$\therefore G$ चक्रीय है]

अत: $N\alpha = Na^n = Na \cdot a.....a$ (n बार)

$= Na\ Na\ Na....Na$ (n बार)

$= (Na)^n$

अत: G/N का प्रत्येक अवयव (Na) की कोई पूर्णांक घात है, अर्थात Na, G/N एक जनक है।

अत: G/N का एक चक्रीय समूह है ।

इसका विलोम सत्य नहीं है, उदाहरण के लिये हम पुन: विभाग समूह $\frac{S_3}{A_3}$ पर विचार करतें हैं ।

चूंकि $O\left(\frac{S_3}{A_3}\right) = 2$ अब चूंकि कोटि 2 का प्रत्येक समूह चक्रीय होता है, अत: $\frac{S_3}{A_3}$ एक चक्रीय समूह है, परन्तु हम जानतें है कि S_3 एक चक्रीय समूह नहीं है ।

अत: हम यह कह सकतें हैं कि यदि G/N चक्रीय समूह है तो यह आवश्यक नहीं है कि G चक्रीय हो ।

प्रमेय 4 : माना N एक समूह G का प्रसामान्य उपसमूह है, तब G/N में N की कोटि m,G में a की काटि n की एक भाजक है ।

उपपत्ति : विभाग समूह G/N का तत्समक अवयव N है ।

दिया है कि $o(a) = n$, जहाँ $a \in G$

$\Rightarrow a^n = e$, जहाँ e, G का तत्समक अवयव है ।

$\Rightarrow Na^n = Ne = N$

परंतु $Na^n = Na \cdot a.....a$ (n बार)

$= Na\ Na.....Na$ (n बार)

$= (Na)^n$

$\Rightarrow (Na)^n = N$

$\because G/N$ मे Na की कोटि है m तथा $(Na)^n = N$ अत: निश्चय ही n, m का एक गुणन, अर्थात m, n का भाजक होगा ।

प्रमेय 5 : यदि H_1 एवं H_2 समूह G के दो प्रसामान्य उपसमूह हों तो सिद्ध कीजिये

$$G/H_1 = G/H_2 \Leftrightarrow H_1 = H_2$$

उपपत्ति: माना $H_1 = H_2$ तब स्पष्ट है कि

$$\frac{G}{H_1} = \frac{G}{H_2}$$

विलोमत : माना कि $\frac{G}{H_1} = \frac{G}{H_2}$

अब चूंकि $H_1 \in \frac{G}{H_1} \Rightarrow H_1 \in \frac{G}{H_2}$

साथ ही $H_2 \in \dfrac{G}{H_2}$

अत: H_1, G में H_2 का सहसमूच्चय है, एवं H_2 भी G में H_2 का सहसमुच्चय है ।

परन्तु G में H_2 के दो सहसमुच्चय या तो असंयुक्त होंगे या सर्वसम होंगे । अब यदि व e, G का तत्समक अवयव है, तब चूंकि $H_1 \lhd G$ एवं $H_2 \lhd G \Rightarrow e \in H_1$ एवं $e \in H_2$

$\Rightarrow e \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow H_1 \cap H_2 \neq \phi$ [अत: H_1, H_2,असंयुक्त नहीं हैं]

$\Rightarrow H_1 = H_2$

प्रमेय 6 : माना कि $Z(G)$ एक समूह G का केंद्र है । यदि $G/Z(G)$ चक्रीय है, तो G आबेली समूह होगा ।

उपपत्ति : दिया है कि $G/Z(G)$ चक्रीय है, अत: माना कि किसी $a \in G$ के लिये $Z(G)a$, $G/Z(G)$ का जनक है ।

माना $x, y \in G$ तो हमें दर्शाना है कि $xy = yx$

$\because x \in G \Rightarrow Z(G)x \in G/Z(G) = \langle Z(G)a \rangle$

$\Rightarrow \exists n \in Z$ इस प्रकार है कि

$Z(G)x = (Z(G)a)^n = Z(G)a^n$ $\quad [\because Z(G) \lhd G]$

पुन: $x \in Z(G)x$, एवं $Z(G)x = Z(G)a^n$

$\Rightarrow x \in Z(G)a^n$

$\Rightarrow \exists z_1 \in Z(G) : x = z_1 a^n$

इसी प्रकार $y \in G$ के लिये $\exists z_2 \in Z(G)$ (एवं $\exists m \in Z$) $y = z_2 a^m$

अब $\quad xy = (z_1 a^n)(z_2 a^m)$

$= z_1(a^n z_2)a^m$

$= z_1 z_2 a^n a^m \qquad [\because z_2 \in Z(G) \Rightarrow z_2 a^n = a^n z_2]$

$= z_1 z_2 a^{n+m}$

साथ ही $yx = (z_2 a^m)(z_1 a^n)$

$= z_2 (a^m z_1) a^n$

$= z_2 z_1 a^m a^n \qquad [\because z_1, z_2 \in Z(G) \Rightarrow z_1 z_2 = z_2 z_1]$

$= z_1 z_2 a^{m+n} = z_1 z_2 a^{m+n} = xy$

अत: $xy = yx, \quad \forall \; x, y \in G$

$\Rightarrow \quad G$ एक आबेली समूह है ।

प्रमेय 7 : यदि $N \lhd G$, तब G/N आबेली समूह है यदि और केवल यदि $\forall \; x, y \in G$, $xyx^{-1} \in N$

उपपत्ति : माना कि $xyx^{-1}y^{-1} \in N$, $\forall \; x, y \in G$

$$\Rightarrow xyx^{-1}y^{-1}N = N, \forall\ x, y \in G \qquad [\because aH = H \Leftrightarrow a \in H]$$
$$\Rightarrow (xy)(yx)^{-1}N = N$$
$$\Rightarrow xyN = yxN$$
$$\Rightarrow (xN)(yN) = (yN)(xN)$$

$\Rightarrow G/N$ आबेली समूह है ।

विलोमत : माना कि G/N आबेली है, तब किसी $x, y \in G$ के लिये

$$(xN)(yN) = (yN)(xN)$$
$$\Rightarrow xyN = yxN$$
$$\Rightarrow (xy)(yx)^{-1} \in N \quad [\because aN = bN \Leftrightarrow ab^{-1} \in N]$$
$$\Rightarrow xyx^{-1}y^{-1} \in N$$

अत: G/N आबेली है यदि और केवल यदि $xyx^{-1}y^{-1} \in N$, $\forall\ x, y \in G$

प्रमेय 8 : प्रत्येक समूह अपने विभाग समूह के समाकारी होता है ।

उपपत्ति : माना N , किसी समूह G का प्रसामान्य उपसमूह है । अब एक प्रतिचित्रण f समूह G से समूह G/N पर निम्न प्रकार परिभाषित करतें हैं

$$f : G \to G/N,\ f(x) = Nx,\ \forall x, y \in G$$

स्पष्ट है कि $\forall Na \in G/N$ के लिये $a \in G$ ऐसा अवयव है कि $f(a) = Na$

$\because f$ आच्छादक है ।

पुन: $a, b \in G$ के लिये

$$f(ab) = Nab = (Na)(Nb) = f(a)\,f(b)$$

$\because f : G \to G/N$ पर आच्छादक एवं समाकारिता है, अर्थात G अपने विभाग समूह के समाकारी है ।

उपप्रमेय : यदि f, G से G/N पर इस प्रकार परिभाषित समाकारिता है कि $f(x) = Nx, \forall x \in G$ तो f की अष्टि = N

उपपत्ति : यदि f अष्टि K हो तो सिद्ध करना है कि $K = N$

यहाँ $K = \{x \in G \mid f(x) = N\}$

माना

$$x \in N \Rightarrow f(x) = N$$
$$\Rightarrow Nx = N \Rightarrow x \in N$$
$$\Rightarrow K \subseteq N \qquad .....(1)$$

माना

$$y \in N \Rightarrow Ny = N$$
$$\Rightarrow f(y) = N$$
$$\Rightarrow y \in K \quad [\therefore N, G/N \text{ की तत्समक अव्यव है }]$$

$$\Rightarrow N \subseteq K \qquad .....(2)$$

समीकरण (i) एवं (ii) से

$\Rightarrow N = K \Rightarrow f$ की अष्टि $= N$

6.4 समाकारिता की मूलभूत प्रमेय : (Fundamental Theorem on Homomorphism)

प्रमेय : प्रत्येक समूह G का समाकृतिक प्रतिबिम्ब G के किसी विभाग समूह के तुल्यकारी होता है ।

उपपत्ति : माना कि G' समूह G का समाकारी प्रतिबिम्ब है तथा f समूह G से समूह G' पर संगत आच्छादक समाकारिता है साथ ही माना $K=$ समाकारिता f की अष्टि ।

अत: पिछले अध्याय से $K \lhd G,$, एवं G/K एक विभाग समूह है ।

अब हमें सिद्ध करना है कि $G/K \cong G'$

माना समूह G/K से समूह G' पर प्रतिचित्रण ϕ निम्न प्रकार परिभाषित है

$$\phi : G/K \to G', \phi(Ka) = f(a), \ \forall a \in G$$

सर्वप्रथम हम यह सिद्ध करेगें कि ϕ सुपरिभाषित है, अर्थात $a, b \in G$ तथा $Ka = Kb \Rightarrow \phi(Ka) = \phi(Kb)$

किन्हीं $Ka, Kb \in G/K$ के लिए

माना

$Ka, Kb \Rightarrow ab^{-1} \in K$

$\Rightarrow f(ab^{-1}) = e'$ [जहाँ e', G' का तत्समक है]

$\Rightarrow f(a) f(b^{-1}) = e'$ [$\because f$ एक समाकारिता है]

$\Rightarrow f(a)[f(b)]^{-1} = e'$ [$\because f$ एक समाकारिता है]

$\Rightarrow f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \phi(Ka) = \phi(Kb)$

अत: ϕ एक सुपरिभाषित प्रतिचित्रण है ।

अब $Ka, Kb \in G/K$ के लिये

$$\phi[Ka, Kb] = \phi[Kab] = f(ab)$$
$$= f(a) f(b) = \phi(Ka)\phi(Kb)$$

$\therefore \phi, G/K$ से G' पर समाकारिता है ।

अब $\phi(Ka) = \phi(Kb) \Rightarrow f(a) = f(b)$

$$\Rightarrow f(a)[f(b)]^{-1} = f(b)[f(b)]^{-1} = e'$$
$$\Rightarrow f(a) f(b^{-1}) = e'$$
$$\Rightarrow f(ab)^{-1} = e'$$
$$\Rightarrow ab^{-1} \in K \Rightarrow Ka = Kb$$

$\therefore \phi$ एकैकी है ।

माना की x, G' का कोई अवयव है, तब चूंकि f एक आच्छादक समाकारिता है, अतः $\exists a \in G$ ताकि $x = f(a)$

$\because a \in G \Rightarrow Ka \in G/K$

$\therefore x \in G'$ के लिये $Ka \in G/K$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $\phi(Ka) = \phi(a) = x$

$\therefore \phi$, आच्छादक है ।

फलतः $\phi, G/K$ से G' पर एकैकी आच्छादक समाकारिता है, अर्थात $\phi, G/K$ से G' पर तुल्यकारिता है ।

अतः $G/K \cong G'$

6.5 दृष्टातीय उदाहरण

उदाहरण 1 : यदि p एक अभाज्य संख्या है और G कोटि p^3 का एक अक्रमविनिमेय समूह है, तो दर्शाइये कि $O(Z(G)) = p$, जहाँ $Z(G)$ समूह G का केंद्र है ।

हल : $\because O(G) = p^3 \Rightarrow Z(G) \neq \{e\} \Rightarrow O(Z(G)) > 1$

किन्तु $Z(G), G$ का एक उपसमूह है, अतः लग्रांज प्रमेय से $O(Z(G)), O(G)$ को विभाजित करेगा

अर्थात $O(Z(G)), p^3$ का एक भाजक होगा, चूंकि p अभाज्य संख्या है,

फलतः या तो $O(Z(G)) = p^3$ या $O(Z(G)) = p^2$ या $O(Z(G)) = p$ होगा ।

स्थिति (i)

यदि $O(Z(G)) = p^3 = O(G)$

$$\Rightarrow Z(G) = cG \Rightarrow G \text{ आबेली है}$$

जो कि असत्य है चूंकि $Z(G)$ क्रमविनिमेय है । अतः $O(Z(G)) \neq p^3$

स्थिति (ii)

यदि $O(Z(G)) = p^2$, तो

$$O(G/Z(G)) = \frac{O(G)}{O(Z(G))} = \frac{p^3}{p^2} = p$$

$\Rightarrow G/Z(G)$ अभाज्य कोटि का समूह है ।

$\Rightarrow G/Z(G)$ चक्रीय समूह है, तब प्रमेय 6 से G एक आबेली समूह है, जो कि सत्य नहीं है । अतः

$$O(Z(G)) \neq p^2$$

अब सिर्फ एक ही स्थिति है कि $O(Z(G)) = p$

अत: यदि G कोटि p^3 का अक्रमविनिमेय समूह है तब G का केन्द्र ठीक p अवयवों को अन्तर्विष्ट करता है ।

उदाहरण 2 : यदि $f: G \to G'$, एक आच्छादक समाकारिता है और f की अष्टि K है । G ′ के उपसमूह H' के लिये समुच्चय H ऐसे परिभाषित करतें हैं -

$$H = \{x \in G \mid f(x) \in H'\}$$

तब सिद्ध कीजिए कि :

(i) H, समूह G का उपसमूह है एवं $K \subseteq H$

(ii) $H' \lhd G' \Leftrightarrow H \lhd G$

(iii) यदि $H' \lhd G'$ तब $\dfrac{G'}{H'} \cong \dfrac{G}{H}$

हल : (i) $H \neq \phi$ चूंकि $f(e) = e' \in H' \Rightarrow e \in H$

माना $x, y \in H \Rightarrow f(x), f(y) \in H'$

$\Rightarrow f(x)[f(y)]^{-1} \in H'$ [$\because H'$ का उपसमूह है।)

$\Rightarrow xy^{-1} \in H' \Rightarrow H, G$ का उपसमूह है ।

चूंकि $x \in \ker f = K \Rightarrow f(x) = e' \in H'$

अत: $x \in H \Rightarrow K \subseteq H$

(ii) माना $H \lhd G, g' \in G', h' \in H'$ के लिए

चूंकि f एक आच्छादक समकारिता है माना $g \in G, h \in H$ इस प्रकार है कि $f(g) = g', f(h) = h'$

अब $g'^{-1} h' g' = [f(g)]^{-1} [f(h)] [f($

$= f(g^{-1}) f(h) f(g)$

$= f(g^{-1} hg)$

$\because H \lhd G \Rightarrow g^{-1} hg \in H, \quad \forall g \in G$ एवं $h \in H$ के लिये

$\Rightarrow f(g^{-1} hg) \in H'$

$\Rightarrow g'^{-1} h' g' \in H' \Rightarrow H' \lhd G'$

विलोमत: माना कि $H' \lhd G'$

$h \in H$ एवं $g \in G$ के लिये $f(g^{-1} hg) = f(g^{-1}) f(h) f(g)$

$\Rightarrow [f(g)]^{-1} f(h) f(g) \in H'$

$[\because f(h) \in H', f(y) \in G'$ एवं $H' \lhd G']$

$\Rightarrow g^{-1} hg \in H \Rightarrow H \lhd G$

(iii) एक प्रतिचित्रण $\phi: G \to \dfrac{G'}{H'}$ इस प्रकार परिभाषित है कि

$$\phi(g) = H' f(g)$$

तब ϕ सुपरिभाषित है, क्योंकि $g_1 = g_2$ होने पर $f(g_1) = f(g_2)$

$$\Rightarrow H' f(g_1) = H' f(g_2) \Rightarrow \phi(g_1) = \phi(g_2)$$

पुन: $g_1, g_2 \in G$ के लिये

$$\phi(g_1 g_2) = H' f(g_1 g_2) = H' f(g_1) f(g_2)$$
$$= H' f(g_1) H' f(g_2)$$
$$= \phi(g_1)\phi(g_2)$$

अत: ϕ एक समाकारिता है ।

अब $H' g' \in \frac{G'}{H'}$ लिये चुंकि हैं आच्छादक है, अत: $g' \in G'$

$$\Rightarrow \exists g \in G \text{ ताकि } f(g) = g'$$
$$\Rightarrow \phi(g) = H' f(g) = H' g'$$

अत: ϕ आच्छादक है ।

अब चूंकि ϕ एक आच्छादक समाकारिता G से $\frac{G'}{H'}$ पर है तब समाकारिता की मूलभूत प्रमेय से

$$\frac{G}{Ker\phi} \cong \frac{G'}{H'}$$

अब $x \in Ker\phi \Leftrightarrow \phi(x) = H'$

$$\Leftrightarrow H' f(x) = H'$$
$$\Leftrightarrow f(x) \in H' \Leftrightarrow x \in H'$$

अर्थात $Ker\phi = H$

अत: $\frac{G}{H} \cong \frac{G'}{H'}$

उदाहरण 3 : सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक परिमित चक्रीय समूह जिसकी कोटि n है, समूह Z/nZ के तुल्यकारी होता है । जहाँ $\langle Z, + \rangle$ पूर्णाकों का योगात्मक समूह है एवं nZ = $\langle n \rangle$ अर्थात Z का पूर्णांक n से जनित होने वाला उपसमूह है ।

हल : माना कि G = $\langle a \rangle$ एवं O (G) = n

जहाँ $a \in G, G$ का जनक अवयव है ।

अब एक प्रतिचित्रण $f : Z \to G$ इस प्रकार परिभाषित करतें हैं कि $f(m) = a^m \ \forall m \in Z$ तब स्पष्ट है कि f एक सुपरिभाषित फलन है ।

चूंकि $f(m+k) = a^{m+k} = a^m \cdot a^k = f(m) f(k)$

अत: f एक समाकारिता है, साथ ही है आच्छादक भी है चूंकि प्रत्येक $g \in G$ के लिये एक $m \in Z$ इस प्रकार है कि $g = a^m$ [$\because G$, चक्रीय है, एवं a,G जनक है]

$$\Rightarrow f(m) = g$$

अत: समाकारिता की मूलभूत प्रमेय से $G \cong \dfrac{Z}{\ker f}$

अब

$$\begin{aligned} m \in \ker f &\Leftrightarrow f(m) = e \\ &\Leftrightarrow a^m = e \\ &\Leftrightarrow O(a) \mid m \\ &\Leftrightarrow n \mid m \\ &\Leftrightarrow m \in nZ \qquad [\because O(a) = O(G) = n] \\ &\Leftrightarrow \ker f = nZ \cong (n) \end{aligned}$$

अतः $G \cong \dfrac{Z}{nZ}$ या $G \cong \dfrac{Z}{\langle n \rangle}$

टिप्पणी : कोई भी दो समान कोटि के परिमित चक्रीय समूह तुल्यकारी होतें है ।

उदाहरण 4 : माना $G = \langle R, + \rangle$ जहाँ R वास्तविक संख्याओं का समूह है एवं $N = \langle Z, + \rangle$ जहाँ Z पूर्णांको का समूह है, तब स्पष्टत: $N \lhd G$

माना $H = \{ z_2 \in C_0 : |z_2| = 1 \}$ तब $\langle H, \cdot \rangle$ अशून्य सम्मिश्र संख्याओ के गुणात्मक समूह $\langle C_0, \cdot \rangle$ का उपसमूह है ।

सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{G}{N} \cong H$$

हल : एक प्रतिचित्रण $f : G \to H$ इस प्रकार परिभाषित करतें हैं कि $f(\alpha) = e^{2\pi i\alpha} \forall \alpha \in R$

यहाँ $|f(\alpha)| = |e^{2\pi i\alpha}| = 1 \Rightarrow f(\alpha) \in H$ में स्पष्टत: f सुपरिभाषित है ।

माना $h \in H$ तब h = a + ib जहाँ $a, b \in R$ एवं $|h| = |a + ib| = 1 = \sqrt{a^2 + b^2}$

यदि $(a + ib) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

तब $|a + ib| = r = 1$

अत: $a + ib = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

तब $f\left(\dfrac{\theta}{2\pi}\right) = e^{\left(\frac{\theta}{e^{2\pi}} 2\pi i\right)} = e^{i\theta} = a + ib = h$

अत: f आच्छादक है ।

f समाकारिता है :

$$\begin{aligned} f(\theta_1 + \theta_2) &= e^{2\pi(\theta_1 + \theta_2)i} = e^{2\pi\theta_1^i} e^{2\pi\theta_2^i} \\ &= f(\theta_1) \cdot f(\theta_2), \forall \theta_1, \theta_2 \in G \end{aligned}$$

अत: f समाकारिता है ।

अब चूंकि $f : G \to H$ एक आच्छादक समाकारिता है, तब समाकारिता की मूलभूत प्रमेय से

$$H \cong \frac{G}{\ker f}$$

$$\alpha \in \ker f \Leftrightarrow f(\alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{2\pi i\alpha} = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\pi\alpha + i \sin 2\pi\alpha = 1 + i0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\pi\alpha + 1, \sin 2\pi\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\alpha = 2n\pi, \text{ जहां } n \in Z$$

$$\Leftrightarrow \alpha = n$$

$$\Leftrightarrow \alpha = N$$

$$\Rightarrow \ker f = N$$

अतः $H \cong \frac{G}{N}$

स्वमूल्यांकन प्रश्न 1

1. यदि G एक परिमित समूह है एवं K,G का प्रसामान्य समूह है तो O (G /K) = ...
2. यदि N_1 एवं N_2 एक समूह G के दो प्रसामान्य उपसमूह हैं तो $\frac{G}{N_1} = \frac{G}{N_2}$ यदि और केवल यदि.....
3. किसी समूह $\langle G,* \rangle$ के लिये तुच्छ प्रसामान्य उपसमूहों $\langle \{e\},* \rangle$ एवं $\langle G,* \rangle$ विभाग समूह ज्ञात कीजिए ।
4. $Z / 4Z$ के सभी अवयवों को ज्ञात कीजिये ।

6.6 सारांश

इस अध्याय में आपने किसी समूह के प्रसामान्य उपसमूह के सापेक्ष विभाग समूह या खण्ड समूह का अध्ययन किया है । विभाग समूहों का अध्ययन, किसी समूह के सभी गुणधर्मों के अध्ययन में बहुत महत्त्वपूर्ण है । कभी- कभी तो किसी समूह के गुणधर्मों के अध्ययन के लिये समूह के अध्ययन से अधिक उसके विभाग समूह का अध्ययन लाभकारी एवं सरल होता है । इसके अतिरिक्त इस अध्याय में आपने समकारिता की मूलभूत प्रमेय एवं उसके अनुप्रयोगों का अध्ययन भी किया जो कि किसी समूह के अध्ययन में समकारिताओं के अध्ययन की अनिवार्यता को सिद्ध करती है ।

6.7 शब्दावली

विभाग समूह	Quotient Group
सहसमुच्चय	Coset
प्रसामान्य उपसमूह	Normal Subgroup
सूचक	Index

6.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1. $\dfrac{O(G)}{O(K)}$
2. $N_1 = N_2$
3. $\dfrac{G}{\{e\}} = \{G\}$ एवं $\dfrac{G}{G} = \{\{e\}\}$
4. $\{4Z, 4Z+1, 4Z+2, 4Z+3\}$

6.9 अभ्यास प्रश्न

1. Z / 10Z के सभी उपसमूह ज्ञात कीजिये ।
2. सिद्ध कीजिये कि $Z/7Z \cong \langle Z_7, +_7 \rangle$
3. सिद्ध किजिये कि किसी समूह G पर परिभाषित समस्त आन्तरिक स्वाकारिताओं का समूह, G / Z (G) के साथ तुल्यकारिता है, जहाँ Z (G) समूह G का केंद्र है ।
4. सिद्ध कीजिये कि यदि $\langle Z, + \rangle$ पूर्णाकों का योगात्मक समूह हो एवं G = $\langle \{1, -1\}, \cdot \rangle$ तब प्रतिचित्रण

   $f : Z \to G$ जो निम्न प्रकार परिभाषित है :

   $$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{यदि n सम पूर्णांक सँख्या है} \\ -1, & \text{यदि n विषम पूर्णांक सँख्या है} \end{cases}$$

   एक आच्छादक समाकारिता है । इस समाकारिता की अष्टि K को भी ज्ञात कीजिए ।
5. माना R वास्तविक संख्याओ का समुच्चय है । $a, b \in R$ जहाँ $a \neq 0$

   यदि $\tau_{ab} : R \to R$ इस प्रकार है कि $\tau_{ab}(x) = ax + b$ एवं G = $\langle \{t_{ab} : a, b \in R$ एवं $a \neq 0\}, 0 \rangle$ तथा $N = \langle \{\tau_{1b} \in G\}, o \rangle$

   तो सिद्ध कीजिये कि $N \lhd$ एवं $\dfrac{G}{N} \cong \langle R_0, \cdot \rangle$ जहाँ $R_0 = R - \{0\}$

अभ्यास प्रश्नों के उत्तर

1. $\left\{ \dfrac{Z}{10Z}, \dfrac{2Z}{10Z}, \dfrac{5Z}{10Z}, \dfrac{10Z}{10Z}, \right\}$
2. $K = 2Z = \{....., -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$
3. संकेत: एक प्रतिचित्रण $\phi : G \to (R_0, .)$ में निम्न प्रकार परिभाषित करें $\phi(\tau_{ab}) = a$, जहाँ $a \in R_0$ अब दर्शाइये कि ϕ एक आच्छादक समाकारिता है । तब समाकारिता की मूलभूत प्रमेय से $\dfrac{G}{Ker\phi} \cong \langle R_0, \cdot \rangle$ पुन : दर्शाइये कि $\ker \phi = N$

इकाई 7 : वलय (Rings)

इकाई की रूपरेखा

7.0 उद्देश्य

7.1 प्रस्तावना

7.2 वलय

- 7.2.1 वलयों के प्रकार
- 7.2.2 वलयों के प्रारम्भिक गुणधर्म
- 7.2.3 वलय में शून्य का भाजक
- 7.2.4 वलय में नियमित एवं व्युत्क्रमणीय अवयव

7.3 वलय का अभिलक्षण

7.4 उपवलय

7.5 सारांश

7.8 शब्दावली

7.9 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

7.10 अभ्यास प्रश्न

7.0 उद्देश्य

पिछली इकाईयों में आपने ग्रुप का विस्तृत अध्ययन किया। आपने देखा कि ग्रुप केवल एक द्विचर संक्रिया सहित एक आधारभूत संरचना है। इस इकाई को लिखने का उद्देश्य दो द्विचर संक्रियाओं वाली आधारभूत संरचना का अध्ययन करना है, जिसे वलय (ring) कहते हैं। ऐसी आधारभूत संरचनाओं द्वारा बीजगणित की मूलभूत प्रमेय को सिद्ध करना अथवा कोण की त्रिखण्डीय समस्या को हल करना अत्यन्त सरल हो जाता है।

7.1 प्रस्तावना

प्रस्तुत इकाई में आप केवल वलय, वलयों के प्रकार एवं प्रारम्भिक गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे । वलय का अभिलक्षण एवं उपवलय से सम्बन्धित प्रमेयों को भी सिद्ध करेंगे ।

7.2 वलय (Rings)

माना R एक अरिक्त समुच्चय है तथा '+' एवं $\because R$ पर परिभाषित कोई दो संक्रियाएँ (operations) हैं । तब

संरचना $(R,+,.)$ एक वलय कहलाती है यदि

$(R_1)\, a \in R, b \in R \Rightarrow a+b \in R$ (योग का संवरक नियम)

$(R_2)\, (a+b)+c = a+(b+c) \;\; \forall\, a,b,c \in R$ (योग के लिये साहचर्य नियम)

(R_3) सभी अवयवों $a \in R$ के लिये एक अद्वितीय अवयव $0 \in R$ इस प्रकार है कि

$$a+0 = a = 0+a$$

'0' को योग का तत्समक अवयव अथवा R का शून्य (zero) कहते हैं ।

(R_4) प्रत्येक $a \in R$ के लिये एक अद्वितीय अवयव - $a \in R$ इस प्रकार है कि

$$a+(-a)=0=(-a)+a$$

'-a' को $a \in R$ का योग के लिये प्रतिलोम अवयव अथवा योगात्मक प्रतिलोम कहते हैं ।

(R_5) सभी अवयवों $a, b \in R$ के लिये

$$a+b=b+a$$ (योग के लिये क्रमविनिमेय नियम)

(R_6) $a \in R, b \in R \Rightarrow a \cdot b \in R$ (गुणन संवरक नियम)

(R_7) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in R$ (गुणन के लिये साहचर्य का नियम)

(R_8) सभी $a, b, c \in R$ के लिये

(i) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (वाम बंटन का नियम)

(ii) $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (दक्षिण बंटन का नियम)

टिप्पणी :

(1) वलय की उपरोक्त परिभाषा में अवधारणाओं (R_1) (अर्थात् योग का संवरक एवं (R_6) (अर्थात् गुणन का संवरक नियम) का अर्थ है कि संक्रियाएँ '+' तथा '.' अरिक्त समुच्चय R पर द्विचर संक्रियाएँ (binary operations) हैं ।

(2) समुच्चय R पर परिभाषित द्विचर संक्रियाएँ '+' तथा '.' आवश्यक नहीं कि (arithmetic) योग तथा गुणन संक्रियाएँ हों । ये कोई भी द्विचर संक्रियाएँ हो सकती हैं ।

(3) वलय की परिभाषा से स्पष्ट है कि समुच्चय R, योग की संक्रिया, '+' के सापेक्ष ती क्रम विनिमेय के नियम का पालन करता है, परन्तु गुणन की संक्रिया '.' के सापेक्ष नहीं । यह भी आवश्यक नहीं कि R में गुणन के सापेक्ष तत्समक अवयव (identity element) विद्यमान हो।

(4) वलय $(R,+,.)$ में '+' के सापेक्ष तत्समक अवयव 0 को योगात्मक तत्समक अथवा वलय R का (zero) शून्य कहते हैं । इसी प्रकार '.' के सापेक्ष तत्समक अवयव (यदि यह R में विद्यमान है ।) को वलय R का इकाई अवयव अथवा R की इकाई कहते हैं तथा इसे 1 द्वारा निरूपित करते हैं। यह रखना आवश्यक है कि 0 तथा 1 अंकगणितीय शून्य तथा एक नहीं हैं । ये वलय R के योगात्मक तत्समक अवयव तथा गुणन के सापेक्ष तत्समक अवयव को प्रतीकात्मक रूप में प्रदर्शित करते हैं ।

(5) स्पष्ट है कि संरचना $(R,+,.)$ एक वलय कही जा सकती है यदि

(i) $(R,+)$ एक आबेली ग्रुप है,

(ii) $(R,.)$ एक सामि ग्रुप (semi group) है, तथा

(iii) सभी $a, b, c \in R$ के लिये

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$(b+c)a = ba + ca \qquad \text{(बंटन के नियम)}$$

7.2.1 वलयों के प्रकार (Type of rings)

1. क्रमविनिमेय वलय (Commutative ring): यदि किसी वलय $(R,+,.)$ में गुणन की संक्रिया, क्रमविनिमेय नियम का पालन करती है, अर्थात यदि सभी $a,b \in R$ के लिये

$$a.b = b.a$$

तब $(R,+,.)$ एक क्रमविनिमेय वलय कहलाता है ।

2. तत्समकी वलय अथवा इकाई अवयव सहित वलय (Ring with unity) : वलय $(R,+,.)$ एक तत्समकी वलय अथवा इकाई अवयव सहित वलय कहलाता है यदि एक अद्वितीय अवयव $1 \in R$ इस प्रकार है कि सभी $a \in R$ के लिये

$$a.1 = 1.a$$

$1 \in R$ को वलय R का इकाई अवयव (unit element अथवा unity) कहते हैं ।

3. शून्य भाजक सहित वलय (Ring with zero divisor): वलय $(R,+,.)$ एक शून्य भाजक सहित वलय कहलाता है, यदि R में कोई दो अवयव a तथा b इस प्रकार हैं कि

$$a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow a.b = 0$$

ऐसी दशा में a वाम शून्य भाजक (left zero divisor) तथा b दक्षिण शून्य भाजक (right zero divisor) कहलाता है ।

4. शून्य भाजक रहित वलय (Ring without zero divisor): वलय $(R,+,.)$ एक शून्य भाजक रहित वलय कहलाता है, यदि सभी $a,b \in R$ के लिये

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ या } b = 0$$

अर्थात्

$$a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0 \forall a,b \in R$$

5. भागफल वलय (Division Ring): इकाई अवयव 1 सहित कोई वलय $(R,+,.)$ एक भागफल वलय कहलाता है, यदि R के प्रत्येक अशून्य अवयव का गुणन संक्रिया के सापेक्ष प्रतिलोम अवयव R में विद्यमान है । अर्थात् प्रत्येक $a \in R$ के लिये $(a \neq 0)$ एक अवयव $b \in R$ इस प्रकार है कि

$$ab = 1 = ba$$

b को a का गुणात्मक प्रतिलोम (multiplicative inverse) कहते हैं तथा इसे a^{-1} द्वारा निरूपित करते हैं । अत:

$$aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$$

6. बूलीय वलय (Boolean ring): वलय $(R,+,.)$ एक बूलीय वलय कहलाता है यदि

$$a.a = a \quad \forall \quad a \in R$$

उदाहरण 1 : सामान्य अंकगणितीय योगफल तथा गुणनफल संक्रियाओं के पूर्णांकों का समुच्चय, Z, वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R, एवं परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q सभी वलय की रचना करते हैं । अर्थात् $(Z,+,.)$, $(R,+,.)$ तथा $(Q,+,.)$ सभी वलय हैं, चूंकि

(i) प्रत्येक संरचना $(Z,+)$, $(R,+)$ तथा $(Q,+)$ एक आबेली ग्रुप (समूह) है ।

(ii) प्रत्येक संरचना $(Z,.)$, $(R,.)$ तथा $(Q,.)$ एक सामि ग्रुप अर्थात् सामि समूह (semi group) है ।

(iii) सभी $a,b,c \in Z$ (अथवा R अथवा Q) के लिये

$$a(b+c)=ab+ac$$

तथा $(b+c)a=ba+ca$

वास्तव मे $(Z,+,.)$, $(R,+,.)$ तथा $(Q,+,.)$ सभी क्रमविनिमेय वलय हैं, चूंकि प्रत्येक समुच्चय Z , R तथा Q ने तथा प गुणन संक्रिया के सापेक्ष क्रमविनिमेय नियम का पालन करता है।

उदहरण 2 : सामान्य योगफल एवं गुणनफल संक्रियों के सापेक्ष, सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय C एक वलय है । चूंकि

(i) यदि $z_1 = x_1 + iy_1$ तथा $z_2 = x_2 + iy_2 \in C$ जहाँ $x_1, x_2 y_1, y_2 \in R$ तब

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)$$
$$=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)\in C$$

(ii) यदि $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_3 = x_3 + iy_3 \in C$

तब $(z_1+z_2)+z_3=\left[(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)\right]+(x_3+iy_3)$

$$=\left[(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)\right]+(x_3+iy_3)$$
$$=\left[(x_1+x_2)+x_3\right]+i\left[(y_1+y_2)+y_3\right]$$
$$=\left[x_1+(x_2+x_3)\right]+i\left[y_1+(y_2+y_3)\right]$$
$$=(x_1+iy_1)+\left[(x_2+x_3)+i(y_2+y_3)\right]$$
$$=(x_1+iy_1)+\left[(x_2+iy_2)+(x_3+iy_3)\right]$$
$$=z_1+(z_2+z_3)$$

(iii) सभी $z = x + iy \in C$ के लिए एक सम्मिश्र संख्या $0=0+i0\in C$ इस प्रकार है कि

$$z+0=(x+iy)+(0+i0)$$
$$=(x+0)+i(y+0)$$
$$=x+iy$$

इसी प्रकार $0 + z = x + iy$ अत:

$$z+0=z=0+z \quad \forall \quad z\in C$$

(iv) प्रत्येक $z = x + iy \in C$ के लिये एक सम्मिश्र संख्या $-z=-x+i(-y)\in C$ इस प्रकार हैं कि

$$z+(-z)=(x+iy)+(-x+i(-y))$$
$$=[x+(-x)]+i[y+(-y)]$$
$$=0+i0=0$$

इसी प्रकार $(-z)+z=0$ अतः

$$z+(-z)=0=(-z)+z$$

(v) सभी $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2\in C$ के लिए

$$z_1+z_2=(x_1+iy_2)+(x_2+iy_2)$$
$$=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$
$$=(x_2+x_1)+i(y_2+y_1)$$
$$=(x_2+iy_2)+(x_1+iy_1)$$
$$=z_2+z_1$$

यदि $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2\in C$ तब

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$$

(vi) $$=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2-x_2y_1)\in C$$

(vii) यदि $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2, z_3=x_3+iy_3\in C$ तब

$$(z_1z_2)z_3=\left[(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)\right]\left[x_3+iy_3\right]$$
$$=\left[(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2-x_1y_2)\right]\left[x_3+iy_3\right]$$
$$=\left[(x_1x_2)x_3-(y_1y_2)x_3-(x_1y_2)y_3-(x_2y_1)y_3\right]$$
$$+i\left[(x_1x_2)y_3-(y_1y_2)y_3+(x_1y_2)x_3+(x_2y_1)x_3\right]$$
$$=\left[x_1(x_2x_3)-x_1(y_2y_3)-y_1(x_2y_3)-y_1(x_3y_2)\right]$$
$$+i\left[x_1(x_2y_3)+x_1(x_3y_2)+y_1(x_2y_3)-y_1(y_3y_2)\right]$$
$$=(x_1+iy_1)\left[(x_2x_3-y_2y_3)+i(x_2y_3+x_3y_2)\right]$$
$$=(x_1+iy_1)\left[(x_2+iy_2).(x_3+iy_3)\right]$$
$$=z_1(z_1z_3)$$

(viii) यदि $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2, z_3=x_3+iy_3\in C$ के लिए

$$z_1(z_2+z_3)=(x_1+iy_1)\left[(x_2+iy_2)+(x_3+iy_3)\right]$$
$$=(x_1+iy_1)\left[(x_2+x_3)+i(y_2+y_3)\right]$$
$$=\left[x_1(x_2+x_3)-y_1(y_2+y_3)\right]$$
$$+i\left[x_1(y_2y_3)+y_1(x_2+x_3)\right]$$
$$=\left[(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1x_3-y_1y_3)\right]$$

$$+i\left[\left(x_1y_2+y_1x_2\right)+\left(x_1y_3+y_1x_3\right)\right]$$
$$=\left[\left(x_1y_2-y_1y_2\right)+i\left(x_1y_2+y_1x_2\right)\right]$$
$$.\left[\left(x_1x_3-y_1y_3\right)+i\left(x_1y_3+y_1x_3\right)\right]$$
$$=\left(x_1+iy_1\right)\left(x_2+iy_2\right)+\left(x_1+iy_1\right)\left(x_3+iy_3\right)$$
$$=z_1z_3+z_1z_3$$

इसी प्रकार $\left(z_2z_3\right)+z_1=z_2z_1+z_3z_1$

अत: सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय C योग तथा गुणन की संक्रियाओं के सापेक्ष वलय की समस्त अभिग्रहीतो का पालन करता है ।

फलस्वरूप (C, +,.) एक वलय है ।

उदाहरण 3 : यदि F, वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित समस्त वास्तविक फलनों (स्थिरांक फलन सहित) का समुच्चय है, तब निम्न प्रकार परिभाषित योग तथा गुणन की संक्रियाओ के सापेक्ष, F एक वलय है।

$(i)\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$(ii)\ f(g)(x)=f(x).g(x)$

$\forall\ f,g\in f$ तथा प्रत्येक $x\in R$ के लिये

उपपत्ति

(i) माना $f,g\in F$ तब प्रत्येक $x\in R$ के लिये

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ जो कि $x\in R$ का एक फलन है । अत: $f+g\in F$

फलस्वरूप $f\in F, g\in F\Rightarrow f+g\in F$

(ii) माना $f,g,h\in F$ तब प्रत्येक $x\in R$ के लिये

$$\left[(f+g)+h\right](x)=(f+g)(x)+h(x)$$
$$=\left[f(x)+g(x)\right]+h(x)$$
$$=f(x)+\left[g(x)+h(x)\right]\quad\left(\because f(x),g(x)\text{ तथा } h(x)\in R\right)$$
$$=f(x)+(g+h)(x)$$
$$=\left[f+(g+h)\right](x)$$

अत: $(f+g)+h=f+(g+h)$

(iii) सभी फलनों $f\in F$ के लिये एक अद्वितीय फलन $0\in F$ (शून्य फलन) इस प्रकार है कि प्रत्येक $x\in R$ के लिये

$$(f+0)(x)=f(x)+0(x)$$
$$=f(x)+0$$
$$=f(x)\qquad\left(\because f(x)\in R\right)$$

इसी प्रकार

$$(0+f)(x)=f(x)$$

अत: $f+0=f=0+f \qquad \forall\ f \in F$

(iv) प्रत्येक $f \in F$ के लिये एक अद्‌वितीय फलन - $f \in F$ (फलन f का ऋणात्मक फलन) इस प्रकार है कि प्रत्येक $x \in R$ के लिये

$$\begin{aligned}\left[f+(-f)\right](x) &= f(x)+(-f)(x)\\ &= f(x)+\left[-\left(f(x)\right)\right]\\ &= f(x)-f(x)\\ &= 0(x)\end{aligned}$$

इसी प्रकार,

$$\left[(-f)+f\right](x)=0(x)$$

अत: $f+(-f)=0=(-f)+f$

(v) सभी $f, g \in F$ के लिये तथा प्रत्येक $x \in R$ के लिये

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ &= g(x)+f(x) \qquad \left[\because f(x).g(x) \in R\right]\\ &= g+f(x)\end{aligned}$$

अत: $f+g=g+f$

(vi) माना $f, g \in F$ तथा $x \in R$, तब

$(fg)(x)=f(x)g(x)$, जो कि का एक फलन है , अतः $f.g \in F$

फलस्वरूप $f \in F, g \in F \Rightarrow f.g \in F$

(vii) माना $f, g, h \in F$ तब प्रत्येक $x \in R$ के लिये

$$\begin{aligned}\left[(fg)h\right](x) &= \left[(fg)(x)\right]h(x)\\ &= \left[f(x)g(x)\right]h(x)\\ &= f(x)\left[g(x)h(x)\right] \qquad \left(\because f(x), g(x) \text{ तथा } h(x) \in R\right)\\ &= f(x)\left[(gh)(x)\right]\\ &= \left[f(gh)\right](x)\end{aligned}$$

अतः $(fg)h=f(gh)$

(viii) सभी $f, g, h \in F$ के लिये तथा प्रत्येक के लिये

$$\begin{aligned}\left[f(g+h)\right](x) &= f(x)\left[(g+h)(x)\right]\\ &= f(x)\left[g(x)+h(x)\right]\\ &= f(x)g(x)+f(x)h(x) \quad \left(\because f(x), g(x) \text{ तथा } h(x) \in R\right)\end{aligned}$$

$$=(fg)(x)+(fh)(x)$$
$$=(fg+fh)(x)$$

अत: $f(g+h)=fg+fh$

इसी प्रकार, $(g+h)f=gf+hf \quad \forall f,g,h\in F$

अत: (F, +,.) एक वलय है ।

उदाहरण 4 : यदि $\oplus$ एवं $\odot$ वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित संक्रियाएँ हैं, जहाँ,

$$a\oplus b=a+b+1$$

तथा $a\odot b=a+b+ab \quad \forall a,b\in R$

तब सिद्ध कीजिये कि $(R,\oplus,\odot)$ एक इकाई अवयव सहित क्रमविनिमेय वलय है ।

हल :

(i) माना $a,b\in R$ तब

$$a\oplus b=a+b+1\in R$$

अत: $a\in R, b\in R \Rightarrow a\oplus b\in R$

(ii) माना $a,b,c\in R$ तब

$$\begin{aligned}(a\oplus b)\oplus c&=(a+b+1)\oplus c\\&=(a+b+1)+c+1\\&=a+b+c+2\\&=a+(b+c+1)+1\\&=a\oplus(b+c+1)\\&=a\oplus(b\oplus c)\end{aligned}$$

(iii) चूंकि सभी $a\in R$ के लिये एक अद्वितीय वास्तविक संख्या -1 $\in R$ इस प्रकार है कि

$$a\oplus(-1)=a+(-1)+1=a$$

तथा $(-1)\oplus a=-1+a+1=a$

अत : -1$\in R$,R का शून्य अवयव है ।

(iv) चूंकि प्रत्येक $a\in R$ के लिये एक अद्वितीय अवयव $-a-2\in R$ इस प्रकार कि

$$\begin{aligned}a\oplus(-a-2)&=a+(-a-2)+1\\&=-1\end{aligned}$$

इसी प्रकार,

$$\begin{aligned}(-a-2)\oplus a&=(-a-2)+a-1\\&=-1\end{aligned}$$

अत: प्रत्येक $a\in R$ का योगात्मक प्रतिलोम $-a-2\in R$ ने के रूप में उपस्थित है ।

(v) सभी $a,b \in R$ के लिये

$$a \oplus b = a + b + 1$$
$$= b + a + 1$$
$$= b \oplus a$$

अत: $(R,\oplus)$ एक आबेली ग्रुप है ।

(vi) माना $a,b \in R$ तब

$$a \odot b = a + b + ab \in R$$

अतः $a \in R, b \in R \Rightarrow a \odot b \in R$

(vii) माना $a,b,c \in R$ तब

$$(a \odot b) \odot c = (a + b + ab) \odot c$$
$$= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c$$
$$= a + b + c + ab + ac + bc + abc$$
$$= a + b + c + ab + bc + ac + abc$$
$$= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc)$$
$$= a \odot (b + c + bc)$$
$$= a \odot (b \odot c)$$

(vi) तथा (vii)से स्पष्ट है कि ($R, \odot$) एक सामि ग्रुप है ।

(viii) सभी $a,b,c \in R$ लिये

$$a \odot (b \oplus c) = a \odot (b + c + 1)$$
$$= a + (b + c + 1) + a(b + c + 1)$$
$$= a + b + c + 1 + ab + ac + a$$
$$= (a + b + ab) + (a + c + ac) + 1$$
$$= (a \odot b) + (a \odot c) + 1$$
$$= (a \odot b) \odot (a \odot c)$$

इसी प्रकार $(b \oplus c) \odot a = (b \odot a) \oplus c \odot a$

अत: बंटन के नियम सत्य हैं ।

अतएव $(R,\oplus,\odot)$ एक वलय है ।

(ix) सभी $a,b \in R$ के लिये

$$a \odot b = a + b + ab$$
$$= b + a + ba$$
$$= b \odot a$$

(x) चूंकि सभी $a \in R$ के लिये एक अद्वितीय वास्तविक राशि $0 \in R$ इस प्रकार है कि

$$a \odot 0 = a + 0 + a.0 = a$$

इसी प्रकार

$$0 \odot a = 0 + a + 0.a$$
$$= a$$

अत: $0 \in R, R$ का इकाई अवयव है ।

फलस्वरूप $(R, \oplus, \odot)$ इकाई अवयव सहित एक क्रमविनिमेय वलय है ।

उदाहरण 5 : यदि $R = \{m + n\sqrt{2}; m, n \in Z\}$, तब प्रदर्शित कीजिये कि सामान्य योगफल तथा गुणनफल संक्रियाओं के सापेक्ष R इकाई अवयव सहित एक क्रमविनिमेय वलय है ।

हल :

(i) माना कि $m_1 + n_1\sqrt{2}, m_2 + n_2\sqrt{2} \in R$ जहां $m_1, n_1, m_2, n_2 \in Z$

तब $(m_1 + n_1\sqrt{2}) + (m_2 + n_2\sqrt{2}) = (m_1 + m_2) + (n_1 +, n_2)\sqrt{2} \in R$

अत: योग के सापेक्ष संवरक नियम सत्य है ।

(ii) सभी $m_1 + n_1\sqrt{2}, m_2 + n_2\sqrt{2}, m_3 + n_3\sqrt{2}, \in R$ के लिये

$$\left[(m_1 + n_1\sqrt{2}) + (m_2 + n_2\sqrt{2})\right] + (m_3 + n_3\sqrt{2}) = \left[(m_1 + m_2) + (n_1 + n_2)\sqrt{2}\right] + (m_3 + n_3\sqrt{2})$$
$$= \left[(m_1 + m_2) + m_3\right] + \left[(n_1 + n_2) + n_3\right]\sqrt{2}$$
$$= \left[m_1 + (m_2 + m_3)\right] + \left[n_1 + n_2 + n_3\right]\sqrt{2}$$
$$= (m_1 + n_1\sqrt{2}) + \left[(m_2 + m_3) + (n_2 + n_3)\sqrt{2}\right]$$
$$= (m_1 + n_1\sqrt{2}) + \left[(m_2 + n_2\sqrt{2}) + (m_3 + n_3\sqrt{2})\right]$$

(iii) सभी $m + n\sqrt{2} \in R$ के लिये एक अद्वितीय वास्तविक संख्या $0 = 0 + \sqrt{2} \in R$ इस प्रकार है कि

$$(m + n\sqrt{2}) + 0 = (m + n\sqrt{2}) + (0 + 0\sqrt{2})$$
$$= (m + 0) + (n + 0)\sqrt{2}$$
$$= m + n\sqrt{2}$$

अत $0 = 0 + \sqrt{2} \in R$, योग संक्रिया के सापेक्ष तत्समक अवयव है ।

(iv) प्रत्येक $m + n\sqrt{2} \in R$ के लिये चूंकि एक अद्वितीय वास्तविक संख्या $(-m) + (-n)\sqrt{2} \in R$ सदैव इस प्रकार है कि

$$(m + n\sqrt{2}) + \left[(-m) + (-n)\sqrt{2}\right] = \left[m + (-m)\right] + \left[n + (-n)\sqrt{2}\right]$$
$$= 0 + 0\sqrt{2}$$
$$= 0$$

इसी प्रकार $\left[(-m) + (-n)\sqrt{2}\right] + (m + n\sqrt{2}) = 0 + 0\sqrt{2} = 0$

अत. प्रत्येक $m+n\sqrt{2}\in R$ का योगात्मक प्रतिलोम $(-m)+(-n)\sqrt{2}\in R$ के रूप में विद्यमान है ।

(v) सभी $m_1+n_1\sqrt{2}, m_2+n_2\sqrt{2}\in R$ के लिये

$$\begin{aligned}\left(m_1+n_1\sqrt{2}\right)+\left(m_2+n_2\sqrt{2}\right)&=\left(m_1+m_2\right)+\left(n_1+n_2\right)\sqrt{2}\\&=\left(m_2+m_1\right)+\left(n_2+n_1\right)\sqrt{2}\\&=\left(m_2+n_1\sqrt{2}\right)+\left(m_2+n_1\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

अत: (R, +) एक आबेली ग्रुप है ।

(vi) माना $m_1+n_1\sqrt{2}, m_2+n_2\in R$ तब

$$\left(m_1+n_1\sqrt{2}\right)\left(m_2+n_2\sqrt{2}\right)=\left(m_1m_2+2n_1n_2\right)+\left(m_1n_2+m_2n_1\right)\sqrt{2}\in R$$

$$\left(\because m_1m_2+2n_1n_2, m_1n_2+m_2n_1\in Z\right)$$

अत: गुणन के सापेक्ष संवरक नियम सत्य है ।

(vii) सभी $m_1+n_1\sqrt{2}, m_2+n_2\sqrt{2}, m_3+n_3\sqrt{2}\in R$ के लिये

$$\begin{aligned}\left[\left(m_1+n_1\sqrt{2}\right)\left(m_2+n_2\sqrt{2}\right)\right]\left(m_3+n_3\sqrt{2}\right)&=\left[\left(m_1m_2+2n_1n_2\right)+\left(m_1n_2+m_2n_1\right)\sqrt{2}\right]\left(m_3+n_3\sqrt{2}\right)\\&=\left[\left(m_1m_2+2n_1n_2\right)m_3+2\left(m_1m_2+m_2n_1\right)n_3\right]\\&\quad+\left[\left(m_1m_2+2n_1n_2\right)n_3+m_3\left(m_1n_2+m_2n_1\right)\right]\sqrt{2}\\&=\left[m_1\left(m_2m_3+2n_2n_3\right)+2n_1\left(m_2n_3+m_3n_2\right)\right]\\&\quad+\left[n_1\left(m_2m_3+2n_2n_3\right)+m_1\left(m_2n_3+m_3n_2\right)\right]\sqrt{2}\\&=\left(m_1+n_1\sqrt{2}\right)\left[\left(m_2m_3+2n_2n_3\right)+\left(m_2n_3+m_3n_2\right)\sqrt{2}\right]\\&=\left(m_1+n_1\sqrt{2}\right)\left[\left(m_2+n_2\sqrt{2}\right)\left(m_3+n_3\right)\sqrt{2}\right]\end{aligned}$$

(viii) सभी $m_1+n_1\sqrt{2}, m_2+n_2\sqrt{2}, m_3+n_3\sqrt{2}\in R$ के लिए

$$\begin{aligned}\left(m_1+n_1\sqrt{2}\right)\left[\left(m_2+n_2\sqrt{2}\right)+\left(m_3+n_3\sqrt{2}\right)\right]&=\left(m_1+n_1+\sqrt{2}\right)\left[\left(m_2+m_3\right)+\left(n_2+n_3\right)\sqrt{2}\right]\\&=\left[m_1\left(m_2+m_3\right)+2n_1\left(n_2+n_3\right)\right]\\&\quad+\left[m_1\left(n_2+n_3\right)+\left(m_2+m_3\right)n_1\right]\sqrt{2}\\&=\left[\left(m_1m_2+2n_1n_2\right)+\left(m_1m_3+2n_1n_3\right)\right]\\&\quad+\left[\left(m_1n_2+m_2n_1\right)\sqrt{2}+\left(m_1n_3+m_3n_1\right)\sqrt{2}\right]\\&=\left[\left(m_1m_2+2n_1n_2\right)+\left(m_1n_2+m_2n_1\right)\sqrt{2}\right]\\&\quad+\left[\left(m_1m_3+2n_1n_3\right)+\left(m_1n_3+m_3n_1\right)\sqrt{2}\right]\\&=\left[\left(m_1+n_1\sqrt{2}\right)\left(m_2+n_2\sqrt{2}\right)\right]+\left[\left(m_1+n_1\sqrt{2}\right)\left(m_3+n_3\sqrt{2}\right)\right]\end{aligned}$$

इसी प्रकार दक्षिण बंटन नियम भी सत्य है ।

अत: (R, +,.) एक वलय है ।

(ix) चूंकि सभी $m_1+n_1\sqrt{2}, m_2+n_2\sqrt{2} \in R$ के लिये

$$\left(m_1+n_1\sqrt{2}\right)\left(m_2+n_2\sqrt{2}\right)=\left(m_1m_2+2n_1n_2\right)+\left(m_1n_2+m_2n_1\right)\sqrt{2}$$

$$=\left(m_2m_1+2n_2n_1\right)+\left(m_2n_1+m_1n_2\right)\sqrt{2}$$

तथा

$$=\left(m_2+n_2\sqrt{2}\right)\left(m_1+n_1\sqrt{2}\right)$$

(x) चूंकि सभी $m+n\sqrt{2} \in R$ के लिये एक अद्वितीय वास्तविक संख्या $1+0\sqrt{2} \in R$ इस प्रकार है कि

$$\left(m+n\sqrt{2}\right)\left(1+0\sqrt{2}\right)=\left(m.1+0\right)+\left(m.0+n.1\right)\sqrt{2}$$

$$= m+n\sqrt{2}$$

इसी प्रकार

$$\left(1+0\sqrt{2}\right)\left(m+n\sqrt{2}\right)=m+n\sqrt{2}$$

अत: $1+0\sqrt{2} \in R, R$ का इकाई अवयव है ।

अतएव $(R,+,.)$ इकाई अवयव सहित एक क्रमविनिमेय वलय है ।

उदाहरण 6 : प्रदर्शित कीजिये कि गाऊसींय पूर्णांकों (Gaussian integers) का समुच्चय $J=\{m+in : m,n \in Z\}$, सम्मिश्र संख्याओं के योगफल तथा गुणनफल संक्रियाओं के सापेक्ष एक वलय है ।

हल :

दिया है कि $J=\{m+in : m,n \in Z\}$ सभी गाऊसींय पूर्णांकों $m+in$, जहां $m,n \in Z$, का समुच्चय है।

(i) माना $m_1+in_1, m_2+in_2 \in J; m_1, n_1 m_2, n_2 \in Z$ तब

$$\left(m_1+in_1\right)+\left(m_2+in_2\right)=\left(m_1+m_2\right)+i\left(n_1+n_2\right) \in J$$

$$\left(\because m_1+m_2 \text{ तथा } n_1+n_2 \in Z\right)$$

अतः $m_1+in_1 \in J, m_2+in_2 \in J \Rightarrow \left(m_1+in_1\right)+\left(m_2+in_2\right) \in J$

इसी प्रकार ,

$$\left(m_1+in_1\right)+\left(m_2+in_2\right)=\left(m_1m_2-n_1n_2\right)+i\left(m_1n_2+m_2n_1\right) \in J$$

$$\left(\because m_1m_2-n_1n_2 \text{ तथा } m_1n_2+m_2n_1 \in Z\right)$$

अतः $m_1+in_1 \in J, m_2+in_2 \in J \Rightarrow \left(m_1+in_1\right)+\left(m_2+in_2\right) \in J$

अर्थात् सम्मिश्र संख्याओं के लिये योग तथा गुणन की संक्रियाएँ J, पर द्विचर (binary) संक्रियाएँ है । चूंकि J, सम्मिश्र राशियों का समुच्चय है, अत: वलय की अन्य समस्त अभिग्रहीतें उदाहरण 2 की तरह सत्य प्रदर्शित की जा सकती हैं । अत: (J, +,.) एक वलय है । पुन: चूंकि दो अशून्य सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल भी चूंकि एक अशून्य सम्मिश्र संख्या होती है, अत:

$m_1 + in_2 \neq 0 \in J, m_2 + in_2 \neq 0 \in J$

$$\Rightarrow (m_1 + in_1)(m_2 + in_2) = (m_1 m_2 - n_1 n_2) + i(m_1 n_2 - m_2 n_1) \neq 0$$

फलतः (J, +,.) एक शून्य भाजक रहित वलय है ।

उदाहरण 7 : प्रदर्शित कीजिये कि यदि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R के अवयवों के क्रमित युग्मों (ordered pairs) के समुच्चय $S = \{(a,b) : a,b \in R\}$ पर योग $\oplus$ तथा गुणन $\odot$ की संक्रियाएँ निम्न प्रकार परिभाषित हैं:

(i) $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$

(ii) $(a,b) \odot (c,d) = (ac, bd) \qquad \forall (a,b),(c,d) \in S$

तब $(S, \oplus, \odot)$ इकाई अवयव सहित, क्रमविनिमेय शून्य भाजक वल्य है ।

हल :

(i) माना $(a,b),(c,d) \in S$

तब $(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d) \in S \quad (\because a+c, b+d \in R)$

तथा $(a,b) \odot (c,d) = (ac, bd) \in S \quad (\because ac, bd \in R)$

अतः $(a,b) \in S, (c,d) \in S \Rightarrow (a,b) \oplus (c,d) \in S$ तथा $(a,b) \odot (c,d) \in S$

अर्थात् $\oplus$ एवं $\odot$ द्विचर संक्रियाएँ हैं ।

(ii) माना $(a,b),(c,d)(e,f) \in S$

तब
$$\begin{aligned}
[(a,b) \oplus (c,d)] \oplus (e,f) &= (a+c, b+d) \oplus (e,f) \\
&= ((a+c)+e, (b+d)+f) \\
&= (a+(c+e), b+(d+f)) \\
&= (a,b) \oplus (c+e, d+f) \\
&= (a,b) \oplus [(c,d) \oplus (e,f)]
\end{aligned}$$

तथा
$$\begin{aligned}
[(a,b) \odot (c,d)] \odot (e,f) &= (ac, bd) \odot (e,f) \\
&= ((ac,)e, (bd)f) \\
&= (a(ce), b(df)) \\
&= (a,b) \odot (ce, df) \\
&= (a,b) \odot [(c,d) \odot (e,f)]
\end{aligned}$$

अर्थात $\oplus$ एवं $\odot$ के सापेक्ष साहचर्य नियम सत्य हैं ।

(iii) चूंकि सभी $(a,b) \in S$ के लिये क्रमित युग्म $(0,0) \in S$

इस प्रकार है कि

$$(a,b) \oplus (0,0) = (a+0, b+0)$$

$$=(a,b)$$

इसी प्रकार,

$$(0,0)\oplus(a.b)=(0+a,0+b)$$
$$=(a,b)$$

तथा चूंकि सभी $(a,b)\in S$ के लिये क्रमित युग्म $(1,1)\in S$ इस प्रकार है कि

$$(a,b)\odot(1,1)=(a.1,b.1)$$
$$=(a,b)$$

इसी प्रकार,

$$=(1.1)\odot(a,b)=(1a,1b)$$
$$=(a,b)$$

अत: $(0,0)$ एवं $(1,1)\in S$, $\oplus$ एवं $\odot$ के लिये S क्रमश: शून्य एवं इकाई अवयव हैं

(iv) प्रत्येक क्रमित युग्म $(a,b)\in S$ के लिये एक अद्वितीय क्रमित युग्म $(-a,-b)\in S$ इस प्रकार है कि

$$(a,b)\oplus(-a,-b)=(a+(-a),b+(-b))$$
$$=(0,0)$$

इसी प्रकार,

$$(-a,-b)\oplus(a,b)=(0,0)$$

अत: S के प्रत्येक अवयव (a,b) का योगात्मक प्रतिलोम $(-a,-b)\in S$ में विद्यमान है ।

(v) सभी $(a,b),(c,d),(e,f)\in S$ के लिये

$$(a,b)\odot[(c,d)\oplus(e,f)]=(a,b)\odot(c+e,d+f)$$
$$=(a(c+e),b(d+f))$$
$$=(ac+ae,bd+bf)$$
$$=(ac,bd)\oplus(ae,bf)$$
$$=(a,b)\odot(c,d)\oplus(a,b)\odot(e,f)$$

इसी प्रकार,

$$[(c,d)+(e,f)]\odot(a,b)=(c,d)\odot(a,b)\oplus(e,f)\odot(a,b)$$

अर्थात् बंटन के नियमों का पालन होता है ।

(vi) सभी $(a,b),(c,d)\in S$ के लिये

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$=(c+a,d+b)$$
$$=(c,d)\oplus(a,b)$$

तथा

$$(a,b)\odot(c,d)=(ac,bd)$$
$$=(ca,db)$$
$$=(c,d)\odot(a,b)$$

अत: $\oplus$ एवं $\odot$ क्रमविनिमेय है ।

(vii) S शून्य भाजक सहित समुच्चय है चूंकि जैसे -

$$(5,0)\in S\left[(5,0)\neq(0,0)\right]$$

तथा $(0,2)\in S\left[(0,2)\neq(0,0)\right]$

परन्तु $(5,0)\odot(0,2)=(5\times 0,0\times 2)$

$$=(0,0)$$

अत: $(5,0)\neq(0,0),(0,2)\neq(0,0)\ \Rightarrow\ (5,0)\odot(0,2)=(0,0)$

फलत: $(S,\oplus,\odot)$ इकाई अवयव सहित एवं शून्य भाजक सहित एक क्रमविनिमेय वलय है ।

उदाहरण 8 : प्रदर्शित कीजिये कि समुच्चय $I_n=\{0,1,2,.....,n-1\}$, संक्रियाओं $+_n$ (योग प्रमाप n (addition modulo n)) तथा $\times_n$ (गुणन प्रमाप n (multiplication modulo n)) के सापेक्ष एक क्रमविनिमेय वलय है ।

हल :

(i) $+_n$ की परिभाषा से हम जानते हैं कि सभी $a,b\in Z$ के लिये $a+_n b=r$ जहाँ r वह न्यूनतम अऋणात्मक (non negative) पूर्णांक है जो a तथा b के साधारण योगफल $a+b$ को $_n$ से भाग देने पर शेषफल के रूप में प्राप्त होता है । स्पष्ट है कि $0\le r<n$

अब यदि $a,b\in I_n$, तब स्पष्ट है कि $a+_n b\in I_n$

$$\because\ a\in I_n, b\in I_n\ \Rightarrow\ a+_n b\in I_n$$

(ii) माना $a,b,c\in I_n$

तब चूंकि $(a+b)+c=a+(b+c)\quad\forall a,b,c\in Z$

$$=a+b+c$$

अत:

$(a+_n b)+_n c=$ वह न्यूनतम अऋणात्मक शेष पूर्णांक जो $a+b+c$ को $_n$ से विभाजित करने पर प्राप्त होता

इसी प्रकार,

$a+_n(b+_n c)$ वह न्यूनतम अऋणात्मक शेष पूर्णांक जो $a+b+c$ को $_n$ से विभाजित करने पर प्राप्त होता है

अत:

$$(a+_n b)+_n c=a+_n(b+_n c)$$

(iii) चूंकि सभी $a\in I_n$ के लिये एक अद्वितीय अवयव $0\in I_n$ इस प्रकार है कि

$a +_n 0 = a$ तथा ($\because a$ तथा 0 के साधारण योगफल a+0 को m से विभाजित करने पर शेष a प्राप्त होता है)

इसी प्रकार,

$0 +_n a = a$

अत: $0 \in I_n, I_n$ का शून्य है ।

(iv) प्रत्येक $a \in I_n$ $(a \neq 0)$ के लिये एक अद्वितीय अवयव $n - a \in I_n$ इस प्रकार है कि

$$a +_n (n-a) = 0 = (n-a) +_n a$$

अत: प्रत्येक अशून्य $a \in I_n$ का योगात्मक प्रतिलोम $n - a \in I_n$ के रूप में विद्यमान है । साथ ही चूंकि $0+0_n=0$, अत: 0 का योगात्मक प्रतिलोम 0 है ।

(v) सभी $a, b \in I_n$ के लिये

$a +_n b = b +_n a$ $\qquad (\because a+b=b+a \quad \forall a,b \in Z)$

अत: $(I_n, +_n)$ एक आबेली ग्रुप है ।

(vi) x_n की परिभाषा से हम जानते है कि सभी $a, b \in Z$ के लिये

$a \times_n b = r$ जहाँ r वह न्यूनतम अऋणात्मक शेष पूर्णांक है, जो a तथा b के साधारण गुणनफल ab को, n से विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल के रूप में होता है । स्पष्ट है कि $0 \leq r < n$

अत: यदि $a, b \in I_n$, तब स्पष्टत: $a, \times_n b \in I_n$, , इसलिये $a \in I_n, b \in I_n \Rightarrow a, \times_n b \in I_n$

(vii) माना $a, b \in I_n$, तब

चूंकि $(a.b).c = a(b.c) = a.b.c \quad \forall a,b,c \in Z$

अत: $(a \times_n b) \times_n c = a+b+c$ को n से विभाजित करने पर प्राप्त न्यूनतम अऋणात्मक शेष पूर्णांक इसी प्रकार $a \times_n (b \times_n c) =$ वह न्यूनतम अऋणात्मक शेष पूर्णांक जो a +b c को n से विभाजित करने पर प्राप्त होता है ।

अत: $(a \times_n b) \times_n c = a \times_n (b \times_n c)$

(viii) माना $a, b, c \in I_n$, तब

$a \times_n (b +_n c) = a \times_n (b+c)$

= न्यूनतम अऋणात्मक शेष पूर्णांक, जो $a(b+c)$ को n से विभाजित करने पर प्राप्त होता है ।

= न्यूनतम अऋणात्मक शेष पूर्णांक, जो ab+ac को n से विभाजित करने पर प्राप्त होता है ।

$= (ab) +_n (ac)$

$= (a \times_n b) +_n (a \times_n c)$

इसी प्रकार, $= (b +_n c) \times_n a = b \times_n a +_n c \times_n a$

(ix) चूंकि सभी $a,b \in Z$ के लिये ab = ba

अत: $a \times_n b = b \times_n \quad \forall a,b \in I_n$

अतएव $(I_n, +_n, \times_n)$ एक क्रमविनिमेय वलय है ।

7.2.2 वलयों के प्रारम्भिक गुणधर्म (Elementary propertiesof rings)

प्रमेय 1: यदि (R,+,.) एक वलय है, तब सभी $a,b,c \in R$ के लिये

(i) $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

(ii) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b$

(iii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

(iv) $a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$

(v) $(b-c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$

उपपत्ति :

(i) चूंकि $0 \in R$, अत:

$0+0=0$

$\Rightarrow a \cdot (0+0) = a \cdot 0 \qquad \forall a \in R$

$\Rightarrow a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$ (वाम बंटन नियम से)

$\Rightarrow a \cdot 0 = 0$ (योगात्मक ग्रुप R में वाम निरसन नियम से)

इसी प्रकार,

$0+0=0$

$\Rightarrow (0+0) \cdot a = 0 \cdot a \qquad \forall a \in R$

$\Rightarrow 0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a + 0$ (दक्षिण बंटन नियम से)

$\Rightarrow 0 \cdot a = 0$ (योगात्मक ग्रुप R में वाम निरसन नियम से)

अत:

$a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a \qquad \forall a \in R$

(ii) यह सिद्ध करने के लिये कि $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ हमें सिद्ध करना है कि

$a \cdot b + a \cdot (-b) = 0$

$a \cdot b + a \cdot (-b) = a \cdot [b + (-b)]$ (वाम बंटन नियम से)

$= a \cdot 0$

$= 0$ ((i) से)

अतः $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

इसी प्रकार

$a \cdot b + (-a) \cdot b = [a + (-a)] \cdot b$

$= 0 \cdot b$

$= 0$ ((i) से)

अत: $(-a)\cdot b = -(a\cdot b)$

फलस्वरूप

$$a\cdot(-b) = -(a\cdot b) = (-a)\cdot b$$

(iii) चूंकि $a\cdot(-b) = -(a\cdot b)$ ((ii) से)

अतः $(-a)\cdot(-b) = -[(-a)\cdot b]$

$= -[(-a\cdot b)]$ ((i) से)

$= a\cdot b$

(iv) $a\cdot(b-c) = a\cdot[b+(-c)]$

$= a\cdot b + a\cdot(-c)$ (बंटन नियम से)

$= a\cdot b + [-(a\cdot c)]$ ((ii) से)

$= a\cdot b - a\cdot c$

(v) $(b-c)\cdot a = [b+(-c)]\cdot a$

$= b\cdot a + (-c)\cdot a$ (बंटन नियम से)

$= b\cdot a + [-(c\cdot a)]$ ((ii) से)

$= b\cdot a - c\cdot a$

प्रमेय 2 : सिद्ध कीजिये कि वलय $(R,+,\cdot)$ एक शून्य भाजक रहित वलय होती है और केवल यदि R में निरसन नियम (cancellation laws) लागू होते हैं ।

उपपत्ति : केवल यदि भाग माना कि R एक शून्य भाजक रहित वलय है तथा माना $a,b,c \in R$,

जहाँ ab = ac तथा $a \neq 0$

तब $ab = ac \Rightarrow ab + [-(ac)] = ac + [-(ac)]$

$\Rightarrow ab + a(-c) = 0$

$\Rightarrow a[b+(-c)] = 0$ ($\because R$ शून्यभाजक रहित तथा $a \neq 0$)

$\Rightarrow b + (-c) = 0$

$\Rightarrow b = c$

अर्थात् R में वाम निरसन नियम सत्य है । इसी प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है कि R में निरसन नियम भी सत्य है ।

यदि भाग अब माना कि R में निरसन नियम लाग होते हैं तथा माना कि

$ab = 0; a \neq 0$

तब $ab = 0 \Rightarrow ab = a0$ $(\because a, 0 = 0)$

$\Rightarrow b = 0$ (वाम निरसन नियम से)

अत: $ab = 0 \Rightarrow b = 0,$ यदि $a \neq 0$

इसी प्रकार माना कि ab = 0 तथा $b \neq 0$

तब $ab = 0 \Rightarrow ab = 0b$

$\Rightarrow a = 0$ (दक्षिण निरसन नियम से)

अत: $ab = 0 \Rightarrow a = 0,$ अथवा $b \neq 0$

अतएव $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ अथवा $b = 0$

अर्थात् R शून्य भाजक रहित वलय है ।

7.2.3 वलय में शून्य का भाजक (Divisor of zero in a ring)

वलय $(R,+,\cdot)$ का कोई अशून्य अवयव a शून्य का वाम भाजक (left divisor of zero) है यदि कोई अशून्य अवयव $b \in R$ इस प्रकार हैं कि $a \cdot b = 0$

इस दशा में b को शून्य का दक्षिण भाजक (right divisor of zero)एकहते हैं । इसी प्रकार वलय R का कोई अशून्य अवयव b शून्य का दक्षिण भाजक कहलाता है यदि कोई अवयव $a \in R, a \neq 0$ इस प्रकार है कि $a \cdot b = 0$ अशून्य अवयव $a \in R$ यदि शून्य का वाम भाजक तथा दक्षिण भाजक भी है, तब यह शून्य का भाजक (divisor of zero) कहलाता है ।

7.2.4 वलय में नियमित एवं व्युत्क्रमणीय अवयव (Regular and singular elements in a ring)

इकाई अवयव 1 (पूर्णांक 1 नहीं) सहित वलय R में कोई अवयव a एक नियमित (Regular या nonsingular या invertible) अवयव कहलाता है, यदि गुणन संक्रिया के सापेक्ष इसका प्रतिलोम a^{-1}, R में विद्यमान है । ऐसा प्रत्येक अवयव जो नियमित नहीं है, वलय R का व्युत्क्रमणीय अवयव (singular element) कहलाता हैं ।

यह देखा जा सकता हैं कि वलय R का शून्य (योगात्मक तत्समक अवयव) व्युत्क्रमणीय होता हैं। वलय R का इकाई अवयव 1 तथा सभी नियमित अवयवों को वलय R का एकांक (units) भी कहते हैं ।

प्रमेय 3 : वलय $(R,+,\cdot)$ में नियमित अवयव (एकांक) शून्य का भाजक नहीं हो सकता ।

उपपत्ति : माना a, वलय R का कोई नियमित अवयव है । तब $a \neq 0$.

चूंकि a नियमित अवयव है, अत: अवश्य ही एक अवयव $a^{-1} \in R$ इस प्रकार है कि

$$an^{-1} = 1 = a^{-1}a$$

अब माना कि ab = 0 जहाँ b, R का कोई अवयव है । तब

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}0$$

$$\Rightarrow (a^{-1}a)b = 0 \quad (\because a^{-1} \cdot 0 = 0)$$

$$\Rightarrow 1b = 0 \quad (\because a^{-1}a = 1 \neq 0)$$

अत: a, शून्य का कोई वाम भाजक नहीं है । इसी प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता हैं कि a, शून्य का दक्षिण भाजक नहीं है ।

अर्थात् a, शून्य का भाजक नहीं है ।

प्रमेय 4 : इकाई अवयव सहित वलय $(R,+,\cdot)$ में सभी नियमित (एकांक) अवयवों का समुच्चय गुणन संक्रिया के सापेक्ष एक ग्रुप होता है ।

उपपत्ति : माना कि I, इकाई अवयव सहित वलय R में सभी एकांक (नियमित) अवयवों का समुच्चय है । माना $a,b \in I$ तथा माना कि a^{-1} तथा b^{-1} क्रमश: a तथा b के गुणनात्मक प्रतिलोम हैं । तब

$$(a\cdot b)(b^{-1}\cdot a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1}$$
$$= a\cdot 1\cdot a^{-1}$$
$$= aa^{-1}$$
$$= 1$$

इसी प्रकार,

$$(b^{-1}\cdot a^{-1})(a\cdot b) = b^{-1}(a^{-1}a)b$$
$$= b^{-1}1b$$
$$= b^{-1}b$$
$$=1$$

अर्थात् $ab \in R$, एक नियमित अवयव है तथा इसका गुणनात्मक प्रतिलोम $b^{-1}a^{-1}$ है अर्थात् $a\cdot b \in I$

अत: $a \in I, b \in I \Rightarrow a\cdot b \in I$

चूंकि $1 \subset R$, तथा R गुणन संक्रिया के लिये सहचारी है, इसलिये समुच्चय 1 गुणन संक्रिया के सापेक्ष साहचर्य नियम का पालन करता हैं ।

चूंकि 1.1= 1 , इसलिये 1 $\in$ 1, गुणन संक्रिया के लिये तत्समक अवयव है ।

चूंकि प्रत्येक नियमित अवयव a का गुणनात्मक प्रतिलोम a^{-1} भी एक नियमित अवयव

अत: $a \in I \Rightarrow a^{-1} \in I$

फलत : $(I,\cdot)$ एक ग्रुप है ।

उदाहरण 9 : यदि (R+,.) कोई वलय इस प्रकार हैं कि $a^2 = a \quad \forall a \in R$, तब प्रदर्शित कीजिये कि

(i) $a + a = 0 \ \forall a \in R$ (अर्थात् R का प्रत्येक अवयव स्वयं का प्रतिलोम है ।)

(ii) $a + b = 0 \Rightarrow a = b$

(iii) R एक क्रम विनिमेय वलय है ।

हल :

(i) माना $a \in R$

तब $a \in R \Rightarrow a + a \in R$

$$\Rightarrow (a+a)^2 = a + a \qquad \text{(दिया है ।)}$$

अब $(a+a)^2 = a + a$

$$\Rightarrow (a+a)(a+a) = a + a$$

$\Rightarrow (a+a)a+(a+a)a=a+a$ (वाम बंटन नियम से)

$\Rightarrow (a^2+a^2)+(a^2+a^2)=a+a$ (दक्षिण बंटन नियम से)

$\Rightarrow (a+a)+(a+a)=a+a$ $(\because a^2=a)$

$\Rightarrow (a+a)+(a+a)=(a+a)+0$

$\Rightarrow a+a=0$ (R में योग के सापेक्ष वाम निरसन नियम से)

(ii) हमने अभी सिद्ध किया है कि

$a+a=0$

अत: $a+b=0 \Rightarrow a+b=a+a \quad \forall a,b \in R$

$\Rightarrow b=a$ (R में योग के सापेक्ष वाम निरसन नियम से)

$\Rightarrow a=b$

(iii) माना $a,b \in R$, तब $a+b \in R$

अत: $(a+b)^2=a+b$ (दिया है ।)

$\Rightarrow (a+b)(a+b)=a+b$

$\Rightarrow (a+b)a+(a+b)b=a+b$ (वाम निरसन नियम से)

$\Rightarrow (a^2+ba)+(ab+b^2)=a+b$ (दक्षिण निरसन नियम से)

$\Rightarrow (a+ba)+(ab+b)=a+b$ $(\because a^2=a, b^2=b)$

$\Rightarrow (a+b)+(ba+ab)=(a+b)+0$ (योग के सापेक्ष साहचर्य एवं क्रमविनिमेय नियमों से)

$\Rightarrow ba+ab=0$ (योग के सापेक्ष वाम निरसन नियम से)

$\Rightarrow ab=ba$ (परिणाम (ii) से)

$\Rightarrow$ R एक क्रमविनिमेय वलय है ।

7.3 वलय का अभिलक्षण (Characteristic of a ring)

माना (R,+,.) एक वलय है । तब वह न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक (least positive integer)n जो इस प्रकार है कि प्रत्येक $a \in R$ के लिये $n.a=0, R$ का अभिलक्षण (Characteristic) कहलाता है । यदि कोई भी धनात्मक पूर्णांक n इस प्रकार नहीं है कि $n.a=0$, तब R अभिलक्षण 0 (शून्य) अथवा अनन्त (infinite) कहलाता है । अत: वलय R का अभिलक्षण 0 है यदि सभी $a \in R$ के लिये

$na \neq 0 \quad \forall n \in N$

स्पष्ट है कि यदि वलय R का अभिलक्षण एक धनात्मक पूर्णांक n है, तब R के प्रत्येक अवयव a की कोटि (order) (a को वलय R के योगात्मक ग्रुप (R,+) का अवयव मानते हुये), n को विभाजित करती है

उदाहरण के लिये, यदि हम पूर्णांकों की वलय (Z,+,.) ले, तब कोई भी धनात्मक पूर्णांक इस प्रकार विद्यमान नहीं है कि

$$na = 0 \quad \forall a \in Z$$

अर्थात् सभी $a \in Z$ के लिये

$$na \neq 0 \quad \forall n \in N$$

फलत: वलय (Z,+.) का अभिलक्षण 0 है ।

दूसरी ओर यदि हम योग प्रमाप 6 ($+_6$) तथा गुणन प्रमाप 6 ($\times_6$) के लिये वलय $(Z_6, +_6, \times_6)$ लें, जहाँ $Z_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$, तब हम देखते हैं कि 6 एक ऐसा न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक है कि

$$6 \times_6 a = 0 \forall a \in Z_6$$

तथा कोई भी ऐसा $n \in N\ (n<6)$ प्राप्त नहीं किया जा सकता कि

$$n \times_6 a = 0 \ \ \forall a \in Z_6$$

अत: वलय $(Z_6, +_6, \times_6)$ का अभिलक्षण 6 है ।

प्रमेय 5 : इकाई अवयव सहित वलय (R,+,.) का अभिलक्षण 0 अथवा एक पूर्णांक n होता हैं यदि R के इकाई अवयव 1 की कोटि, (1 को वलय R के योगात्मक ग्रुप का (R,+) अवयव लेते हुये) 0 अथवा n है ।

उपपत्ति : माना कि (R.+,.) इकाई अवयव 1 सहित एक वलय है । सर्वप्रथम माना कि इकाई अवयव 1 की कोटि 0 है । तब कोई भी धनात्मक पूर्णांक n इस प्रकार विद्यमान नहीं है कि

$n.1 = 0$

अत: $n.a \neq 0 \ \ \forall a \in R$ तथा $\forall n \in N$

अर्थात् R का अभिलक्षण 0 है । अब माना कि 1 की कोटि एक धनात्मक पूर्णांक n है | तब

$n.1 = 0$

$\Rightarrow 1+1.....$ पदों तक =0

$\Rightarrow (1+1.....n$ पदों तक) $a = 0.a \quad \forall a \in R$

$\Rightarrow 1a + 1a + ...n$ पदों तक =0 (दक्षिण बंटन नियम से)

$\Rightarrow a + a + ...n$ पदों तक =0

$\Rightarrow na = 0 \ \ \forall a \in R$

अर्थात् R का अभिलक्षण n है। फलत: R का अभिलक्षण 0 अथवा एक धनात्मक पूर्णांक n है, यदि इकाई अवयव 1 की कोटि 0 अथवा n है ।

स्वमूल्यांकन प्रश्न 1

1. यदि (R,+) एक आबेली ग्रुप तथा (R,.) एक सामि ग्रुप है । तब संरचना (R,+,.) वलय हैं यदि R में.....लागू होते हैं ।
2. वलय (R,+,.) में यदि कोई अवयव x इस प्रकार है कि सभी $a \in R$ के लिये ax = xa = a तब x,R..... कहलाता है ।
3. वलय (R,+,.) में कोई अशून्य अवयव a, शून्य का..... कहलाता है यदि कोई अशून्य अवयव $b \in R$ इस प्रकार है कि ab = 0
4. इकाई अवयव सहित वलय (R,+,.) में कोई अवयव a ,एक..... अवयव कहलाता है । यदि गुणन संक्रिया के सापेक्ष a का.....R में विद्यमान है।

5. इकाई अवयव सहित वलय (R,+,.) के समस्त नियमित अवयवों का समुच्चय I, गुणन संक्रिया के सापेक्ष.....एक होता हैं ।
6. वलय (R,+,.) में प्रत्येक अवयव a के लिये यदि $a^2 = a$,तब R एक..... होता है ।
7. यदि वलय (R,+,.) का अभिलक्षण 2 है, तब R एक .....वलय होती है।
8. वलय (R,+,.) में यदि सभी पूर्णांकों $n \in N$ के लिये $na \neq 0 \ \forall a \in R$ तब R का अभिलक्षण..... होता है ।
9. वलय (R,+,.) में यदि निरसन के नियम लागू होतें है, तब R एक .....वलय होता है ।

7.4 उपवलय (Subrings)

माना (R,+,.) एक वलय तथा S,R का कोई अरिक्त उप समुच्चय है । समुच्चय S,R पर परिभाषित द्विचर संक्रियाओं + तथा . के लिये स्थाई (stable) कहलाता है । यदि

(i) $a \in S, b \in S \Rightarrow a + b \in S$

(ii) $a \in S, b \in S \Rightarrow ab \in S$

(अर्थात् R पर परिभाषित द्विचर संक्रियाएँ + तथा . ,S पर भी द्विचर हैं ।) ऐसी दशा में संक्रियाएँ + तथा ., समुच्चय S पर प्रेरित संक्रियाएँ (inductd compositions)) कहलाती हैं ।

वलय (R,+,.) का उपसमुच्चय S,R, का एक उपवलय (subring) कहलाता है, यदि S,R की द्विचर संक्रियाओं के लिये स्थाई है तथा प्रेरित संक्रियाओं के सापेक्ष S,स्वयं एक वलय है । दूसरे शब्दों में कहा जा सकता हैं कि यदि वलय (R,+,.) का उपसमुच्चय S,R का एक उपवलय कहलाता है, यदि (S,+,.) स्वयं एक वलय है ।

उदाहरण के लिये (R,+,.), (Q,+,.) एवं (Z,+,.) सभी सामान्य योग तथा गुणन की संक्रियाओं के सापेक्ष वलय हैं, जहाँ R,Q तथा Z क्रमशः वास्तविक, परिमेय तथा पूर्णांक संख्याओं के समुच्चय हैं।

परन्तु चूंकि $Z \subset Q \subset R$, अतः (Q,+,.) वलय (R,+,.) तथा (Z,+,.) वलय (Q,+,.) का उपवलय है ।

प्रमेय 6 : वलय (R,+,.) के किसी अरिक्त उपसमुच्चय S को R का एक उपवलय होने के लिये आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि

(i) $a \in S, b \in S, \Rightarrow a - b \in S$

(ii) $a \in S, b \in S, \Rightarrow ab \in S$

उपपत्ति : आवश्यक प्रतिबन्ध माना कि S, वलय R का एक उपवलय है ।

तब

$$a \in S, b \in S, \Rightarrow a \in S, -b \in S \qquad (\because \text{ S स्वयं एक वलय है ।})$$

$$\Rightarrow a + (-b) \in S \qquad (\text{योग के संवरक नियम से})$$

$$\Rightarrow a - b \in S$$

पुनः $a \in S, b \in S, \Rightarrow a.b \in S,$ (चूंकि S स्वयं एक वलय है, अतः गुणन के लिये संवरक नियम से)

अतएव दिये हुये प्रतिबन्ध S के लिये आवश्यक है ।

पर्याप्त प्रतिबन्ध अब माना कि

(i) $a \in S, b \in S, \Rightarrow a - b \in S$

(ii) $a \in S, b \in S, \Rightarrow a.b \in S$

तब सिद्ध करना हैं कि S,R का एक उपवलय हैं, i.e.,S स्वयं एक वलय है ।

प्रतिबन्ध (i) से,

$$a \in S, a \in S \Rightarrow a - a \in S$$
$$\Rightarrow 0 \in S$$

पुनः प्रतिबन्ध (i) से)

$$0 \in S, a \in S \Rightarrow 0 - a \in S$$
$$\Rightarrow -a \in S$$

अतः $a \in S \Rightarrow -a \in S$

अब $a \in S, b \in S \Rightarrow a \in S, -b \in S$

$$\Rightarrow a - (-b) \in S \quad \text{(प्रतिबंध (i) से)}$$

अर्थात् S योग के लिये संवरक नियम का पालन करता है ।

प्रतिबंध (ii) से,

$$a \in S, b \in S \Rightarrow a.b \in S$$

अर्थात् S गुणन के लिये संवरक नियम का पालन करता है । चूंकि $S \subseteq R$ इसलिये S, योग एवं गुणन संक्रियाओं के लिये साहचर्य नियम का पालन करता है । साथ ही योग के लिये क्रमविनिमेय है तथा गुणन की संक्रिया योग संक्रिया पर बंटनीय है ।

अतएव S एक वलय है अर्थात् S, R का एक उपवलय है ।

प्रमेय 7 : वलय (R,+,.) के उपसमुच्चय S को R का एक उपवलय होने के लिये आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि

(i) $S + (-S) = S$

(ii) $SS \subseteq S$

उपपत्ति : प्रतिबन्ध की आवश्यकता माना S, वलय R, का एक उपवलय है । तब

$$a \in S, b \in S \Rightarrow a + (-b) b \in S + (-S)$$
$$\Rightarrow a - b \in S + (-S)$$

परन्तु S, R का उपवलय है, इसलिये

$$a \in S, b \in S \Rightarrow a - b \in S \qquad \text{(पिछली प्रमेय से)}$$

अतः $a - b \in S + (-S) \Rightarrow a - b \in S$

$$\therefore S + (-S) \subseteq S \quad .....(1)$$

अब $a \in S \Rightarrow a = a + (-0) \in S + (-S) \quad (\because 0 \in S \therefore -0 \in -S)$

$$\Rightarrow a \in S + (-S)$$
$$\therefore S \subseteq S + (-S) \qquad ....(2)$$

समीकरण (1) व (2) से

$S+(-S)=S$

यह प्रतिबन्ध (1) है

पुन: $a \in S, b \in S \Rightarrow ab \in SS$

परन्तु चूंकि S, R का उपवलय है

अत: $a \in S, b \in S \Rightarrow ab \in S$

अत: $ab \in SS \Rightarrow ab \in S$

अर्थात् $SS \subseteq S$

यह प्रतिबन्ध (2) है।

प्रतिबन्ध की पर्याप्तता

अब माना कि

(i) $S+(-S)=S$

(ii) $SS \subseteq S$

तब सिद्ध करना हैं कि S, वलय R का उपवलय है ।

अब $a \in S, b \in S \Rightarrow a+(-b) \in S+(-S)$

$\Rightarrow a-b \in S+(-S)$

$\Rightarrow a-b \in S$ ....(3) ((i) से)

तथा $a \in S, b \in S \Rightarrow ab \in SS$

$\Rightarrow ab \in S$ ....(4) ((ii) से)

समीकरण (3) तथा (4) से स्पष्ट है कि S, R का उपवलय है ।

प्रमेय 8 : सिद्ध कीजिए कि वलय R के किन्हीं भी दो उपवलयों का सर्वनिष्ट (intersection) भी R का एक उपवलय होता है ।

उपपत्ति : माना S_1 तथा S_2 वलय (R,+,.) के कोई दो उपवलय हैं । तब $S_1 \cap S_2$ को R का उपवलय प्रदर्शित करने के लिये हम यह प्रदर्शित करेंगे कि

(i) $a \in S_1 \cap S_2, b \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow a-b \in S_1 \cap S_2$

(ii) $a \in S_1 \cap S_2, b \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow ab \in S_1 \cap S_2$

अब

$a \in S_1 \cap S_2, b \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow a \in S_1, a \in S_2$ तथा $b \in S_1, b \in S_2$

परन्तु चूंकि S_1 तथा S_2 ,R के उपवलय हैं ।

इसलिये $a \in S_1, b \in S_1 \Rightarrow a-b \in S_1$

तथा $a \in S_1, b \in S_1 \Rightarrow ab \in S_1$

इसी प्रकार, $a \in S_2, b \in S_2 \Rightarrow a-b \in S_2$

तथा $a \in S_2, b \in S_2 \Rightarrow ab \in S_2$

अत: $a-b \in S_1, a-b \in S_2 \Rightarrow a-b \in S_1 \cap S_2$

तथा $ab \in S_1, ab \in S_2 \Rightarrow ab \in S_1 \cap S_2$

फलत: (i) तथा (ii) सत्य हैं । अर्थात् $S_1 \cap S_2, R$ का उपवलय है ।

उदाहरण 10 : यदि R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा $S=\left\{a+b\sqrt{2}; a,b\in Z\right\}$ तब सिद्ध कीजिये कि S, वलय (R,+,.) का एक उपवलय है ।

हल : S को R का उपवलय प्रदर्शित करने के लिये हम प्रदर्शित करेंगे कि

(i) $x\in S, y\in S \Rightarrow x-y\in S$

(ii) $x\in S, y\in S \Rightarrow xy\in S$

अब $x\in S, y\in S \Rightarrow x=a+b\sqrt{2}, y=c+d\sqrt{2}$ जहाँ $a,b,c,d\in Z$

तब $x-y=\left(a+b\sqrt{2}\right)-\left(c+d\sqrt{2}\right)$

$=\left(a-c\right)+\left(b-d\right)\sqrt{2}\in S$ $\quad\left[\because a,b,c,d\in Z\Rightarrow a-b, c-d\in Z\right]$

तथा $xy=\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right)$

$=\left(ac+2bd\right)+\left(ad+bc\right)\sqrt{2}\in S$ $\quad\left[\because a,b,c,d\in Z\Rightarrow ac+2bd,\right.$ तथा $\left.ad+bc\in Z\right]$

अतः $x\in S, y\in S\Rightarrow x-y\in S$ तथा $xy\in S$

फलस्वरूप S,R का उपवलय है ।

उदाहरण 11 : यदि (R,+,.) एक वलय है तथा $a\in R$, तब सिद्ध कीजिये S, R का उपवलय है, जहाँ $S=\left\{x\in R: ax=0\right\}$

हल : हम प्रदर्शित करेंगे कि

(i) $x\in S, y\in S\Rightarrow x-y\in S$

(ii) $x\in S, y\in S\Rightarrow xy\in S$

चूंकि $0\in R,$ तथा दिया है कि $a\in R$

अत: $a.0=0\in S$ (S की परिभाषा से)

अर्थात् S अरिक्त है ।

अब माना कि $x, y\in S$ तब

$x\in S, y\in S\Rightarrow ax=0, ay=0$

चूंकि $a\left(x-y\right)=a\left(x+\left(-y\right)\right)$

$=ax+a\left(-y\right)$

$=ax-ay$

$=0-0$

$=0$

इसलिये $\quad a\left(x-y\right)=0\Rightarrow x-y\in S$ ...(1)

पुन: चूंकि $\quad a\left(xy\right)=\left(ax\right)y$

$=0y=0$

इसलिये $\quad a\left(xy\right)=0\Rightarrow xy\in S$ .....(2)

(1) व (2) से स्पष्ट है कि

$x\in S, y\in S\Rightarrow x-y\in S$ तथा $x.y\in S$

अर्थात् S, R का उपवलय है ।

स्वमूल्यांकन प्रश्न 2

1. यदि S, वलय (R,+,.) का एक उपवलय है, तब R की द्विचर संक्रियाएँ + एवं S पर .....कहलाती हैं ।
2. यदि S वलय (R,+,.) का उपवलय हैं, तब $S+(-S)=S$ एवं ..... आवश्यक प्रतिबन्ध है ।
3. विषम पूर्णांकों का वलय, वलय (Z,+,.) का उपवलय ..... है |

7.5 सारांश

इस इकाई में आपने वलय की परिभाषा, उनके विभिन्न प्रकार एवं वलयो के प्रारम्मिक गुणधर्मों का अध्ययन किया । वलय का अभिलक्षण एवं उपवलय तथा उपवलय होने के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्धों से सम्बन्धित प्रमेयों को सिद्ध किया ।

7.6 शब्दावली

वलय	Ring
द्विचर संक्रियाएँ	Binary operations
इकाई अवयव	Unity element
शून्य का भाजक	Divisor of Zero
बूलीय वलय	Boolean ring
सामि ग्रुप	Semi group
गाऊसींय पूर्णांक	Gaussian integers
क्रमित युग्म	Ordered pair
योग प्रमाप	Addition Modulo n
गुणन प्रमाप	Multiplication modulo n
निरसन नियम	Cancellation laws
नियमित	Regular
एकांक अवयव	Unit element
व्युत्कमणीय	Singular
अभिलक्षण	Characteristic
उपलवय	Subring
प्रेरित संक्रियाएँ	Induced composition

7.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न-1

1. बंटन के नियम
2. इकाई अवयव
3. वाम भाजक
4. नियमित, प्रतिलोम a^{-1}
5. ग्रुप
6. क्रमविनिमेय वलय
7. कृक्रमविनिमेय वलय
8. शून्य

9. शून्य भाजक रहित

स्वमूल्यांकन प्रश्न -2

1. प्रेरित संक्रियाएँ
2. नहीं होता ।
3. $SS \subseteq S$

7.8 अभ्यास प्रश्न

1. सिद्ध कीजिये कि सभी 2 x 2 आव्यूहों (matrices) $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}, ab \in R$ का समुच्चय M, आव्युहों के लिये योग तथा गुणन संक्रियाओं के सापेक्ष एक वलय है ।
2. सिद्ध कीजिये कि (R,+,.) जहाँ $R = \left\{ a + b\sqrt{2} : a.b \in Z \right\}$ इकाई सहित एक क्रमविनिमेय वलय हैं, परन्तु R का कोई भी अवयव शून्य का भाजक नहीं है ।
3. सिद्ध कीजिये कि इकाई अवयव सहित वलय (R,+,.) में कोई भी नियमित अवयव (यदि विद्यमान है ।) शून्य का भाजक नहीं हो सकता ।
4. सिद्ध कीजिये कि यदि (R,+,.) शून्य भाजक रहित एक परिमित वलय है, तब R में इकाई अवयव 1 होता हैं ।
5. यदि वलय (R,+,.) का अभिलक्षण धनात्मक पूर्णांक 2 है, तब सिद्ध कीजिये
6. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 \forall a, b \in R$

इकाई 8 : पूर्णांकीय प्रान्त एवं क्षेत्र (Integral Domains and Fields)

इकाई की रूपरेखा

8.0 उद्देश्य

8.1 प्रस्तावना

8.2 पूर्णांकीय प्रान्त

8.2.1 पूर्णांकीय प्रान्त का अभिलक्षण

8.3 क्षेत्र

8.3.1 क्षेत्र का अभिलक्षण

8.4 क्रमित पूर्णांकीय प्रान्त

8.4.1 क्रमित क्षेत्र

8.5 उपक्षेत्र

8.5.1 क्षेत्र का अभाज्य क्षेत्र

8.6 सारांश

8.7 शब्दावली

8.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

8.9 अभ्यास प्रश्न

8.0 उद्देश्य

इस इकाई का उद्देश्य वलयों के दो विशेष प्रकार "पूर्णांकीय प्रान्त" तथा "क्षेत्र" का अध्ययन करना हैं । इन विशेष वलयों के गुणधर्मों का अमूर्त बीजगणित के विस्तार में अत्यन्त उपयोगी योगदान हैं ।

8.1 प्रस्तावना

इकाई के प्रथम भाग में पूर्णांकीय प्रान्त तथा क्षेत्र की परिभाषा एवं उनमें पारस्परिक सम्बन्धों को प्रमेयों के माध्यम से बताया गया हैं । पूर्णांकीय प्रान्त एवं क्षेत्र की अभिलक्षण तथा सम्बन्धित प्रमेयों का अध्ययन किया गया है । द्वितीय भाग में क्रमित पूर्णांकीय प्रान्त तथा क्रमित क्षेत्र की परिभाषाएँ तथा कुछ उदाहरण दिये गये हैं । इकाई के अन्त में उपक्षेत्र तथा अभाज्य क्षेत्र का अध्ययन किया गया है ।

8.2 पूर्णांकीय प्रान्त (Integral domains)

माना D एक अरिक्त समुच्चय तथा + एवं .,D पर परिभाषित कोई दो संक्रियाए हैं । तब सरंचना (D,+,.) एक पूर्णांकीय प्रान्त (integral domain) कहलाती हैं । यदि :

$(D_1)\, a \in D, b \in D \Rightarrow a+b \in D$ (योग का संवरक नियम)

$(D_2)\, (a+b)+c = a+(b+c)\ \forall a,b,c \in D$ (योग के लिये साहचर्य नियम)

(D_3) सभी $a \in D$ के लिये एक अद्वितीय अवयव $0 \in D$ इस प्रकार है कि

$$a+0=a=0+a$$

0 को D का शून्य अथवा योग का तत्समक अवयव कहते हैं ।

(D_4) प्रत्येक $a \in D$ के लिये एक अद्वितीय अवयव $b \in D$ इस प्रकार है कि

$$a+b=0=b+a$$

b का a ऋणात्मक अथवा योगात्मक प्रतिलोम कहते हैं तथा इसे -a द्वारा निरूपित करते हैं । अत: प्रत्येक $a \in D$ के लिए

$$a+(-a)=0=(-a)+a$$

(D_5) $a+b=b+a \ \forall a,b \in D$ (योग के लिये क्रमविनिमेय नियम)

(D_6) $a \in D, b \in D \Rightarrow ab \in D$ (गुणन का संवरक नियम)

$(D_7)(ab)c=a(bc) \forall a,b,c \in D$ (गुणन के लिये साहचर्य नियम)

$(D_8)(i) a.(b+c)=ab=ac$ तथा

(ii) $(b+c).a=ba+ca \forall a,b,c \in D$ (बंटन नियम)

(D_9) सभी $a,b \in D$ के लिये

$ab=ba$ (गुणन के लिये क्रम विनिमय का नियम)

(D_{10}) सभी $a \in D$ के लिये एक अद्वितीय अवयव $1 \in D$ इस प्रकार है कि

$$a.1=a=1a$$

1 को D का इकाई अवयव (unity element) कहते हैं । (1सामान्य पूर्णांक 1 नहीं हैं।)

(D_{11}) सभी $a,b \in D$ लिये $a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$

अर्थात् $ab=0 \Rightarrow a=0$ या $b=0$ (शून्य भाजक रहित गुण)

टिप्पणी:

1. अभिग्रहीतों (D_1) तथा (D_6) से स्पष्ट है कि + एवं ., अरिक्त समुच्चय D पर द्विचर संक्रियाएँ हैं ।

2. परिभाषा में प्रयुक्त से तक की अभिग्रहीतों से स्पष्ट है कि (D,+,.) एक वलय है, जबकि (D_1) से (D_9) तक की अभिग्रहीतें (D,+,.) को एक क्रमविनिमेय वलय के रूप में व्यक्त करती हैं । अभिग्रहीत (D_{10}) से यह स्पष्ट होता है कि संरचना (D,+,.) इकाई अवयव सहित एक क्रमविनिमेय वलय हैं । यदि हम अभिग्रहीत (D_{11}) को भी सम्मिलित कर दें तो यह देखा जा सकता है कि (D,+,.) इकाई अवयव सहित तथा शून्य भाजक रहित एक क्रमविनिमेय वलय हैं। अतएव कहा जा सकता है कि "इकाई अवयव सहित, शून्य भाजक रहित क्रमविनिमेय वलय एक पूर्णांकीय प्रान्त होता हैं ।

उदाहरण के लिये पूर्णांकों का समुच्चय Z, अंकगणितीय योग तथा गुणन संक्रियाओं के सापेक्ष एक पूर्णांकीय प्रान्त है ।

प्रमेय 1 : वलय $(Z_n, +_n, \times_n)$ जहाँ $Z_n=\{0,1,2,.....n-1\}$ एक पूर्णांकीय प्रान्त है यदि और केवल यदि n एक अभाज्य संख्या हैं ।

उपपत्ति : हम जानते है कि $(Z_n, +_n, \times_n)$ जहाँ $Z_n = \{0,1,2,.....,n-1\}$ एक क्रमविनिमेय वलय होता है (इकाई-7 का उदाहरण 8)

चूंकि सभी $a \in Z_n$ के लिये अद्वितीय अवयव $1 \in Z_n$ इस प्रकार है कि

$a \times_n 1 =$ वह न्यूनतम अऋणात्मक शेष संख्या जो a.1 को अर्थात् a को n से विभाजित करने पर प्राप्त होती है ।

= a $\qquad (\because a < n)$

इसी प्रकार

$1 \times_n a = a$

अत: $(Z_n, +_n, \times_n)$ इकाई अवयव 1 सहित एक क्रमविनिमेय वलय है ।

सर्वप्रथम माना कि $(Z_n, +_n, \times_n)$ एक पूर्णांकीय प्रान्त हैं । तब Z_n शून्य भाजक रहित है । अर्थात् सभी $a, b \in Z_n$ के लिये

$a \times_n b = 0 \Rightarrow a = 0$ या $b = 0$

हमें सिद्ध करना है कि n एक अभाज्य संख्या है । यदि सम्भव हो तो माना कि n अभाज्य नहीं है

तथा

$n = n_1.n_2$ जहाँ $0 < n_1 < n$ तथा $0 < n_2 < n$

तब $n_1 \times_n n_2 = n_1.n_2$ को n से विभाजित करने पर प्राप्त शेष न्यूनतम अऋणात्मक संख्या

= n को n से विभाजित करने पर प्राप्त शेष न्यूनतम अऋणात्मक संख्या ($\because n_1 n_2 = n$)

अत: Z_n में दो पूर्णांक n_1 तथा n_2 इस प्रकार हैं कि $n_1 \neq 0, n_2 \neq 0$ परन्तु $n_1 \times n_2 = 0$ अर्थात् Z_n शून्य भाजक रहित नहीं है, जो कि असत्य है, चूंकि Z_n एक पूर्णांकीय प्रान्त हैं । अत: n एक अभाज्य संख्या हैं ।

विलोमत: माना कि n एक अभाज्य संख्या है तब हम सिद्ध करेंगे कि $(Z_n, +_n, \times_n)$ एक पूर्णांकीय प्रान्त है । हम जानते है कि $(Z_n, +_n, \times_n)$ इकाई अवयव सहित एक क्रमविनिमेय वलय होता हैं ।

माना $a, b \in Z$ जहाँ $a \times_n b = 0$

तब

$a \times_n b = 0 \Rightarrow n, a.b$ का भाजक है

$\Rightarrow n, a$ का भाजक है या n, b का भाजक हैं ।

$\Rightarrow a = 0$ या $b = 0 (\because n,$ अभाज्य है तथा $0 \leq a, \leq n; u \leq b \leq n)$

अत: Z_n शून्य भाजक रहित है ।

अर्थात् $(Z_n, +_n, \times_n)$ एक पूर्णांकीय प्रान्त है ।

8.2.1 पूर्णांकीय प्रान्त का अभिलक्षण (Characteristic of an integral domain)

यदि (D,+,.) एक पूर्णांकीय प्राप्त है, तब वह न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक n जो इस प्रकार है कि na = 0 पूर्णांकीय प्रान्त D का अभिलक्षण कहलाता है ।

यदि कोई भी धनात्मक पूर्णांक n इस प्रकार नहीं है कि $na = 0 \ \forall a \in D$ अर्थात् यदि सभी $n \in N$ के लिये $na \neq 0 \ \forall a \in D$, तब पूर्णांकीय प्रान्त D का अभिलक्षण शून्य अथवा अनन्त कहलाता है

पिछली इकाई में हम सिद्ध कर चुके हैं कि इकाई अवयव सहित वलय अभिलक्षण शून्य अथवा एक धनात्मक पूर्णांक n होता है यदि इकाई अवयव 1 की कोटि (1 को योगात्मक ग्रुप का अवयव मानते हुये) शून्य अथवा n है । चूंकि पूर्णांकीय प्रान्त इकाई अवयव सहित एक क्रमविनिमेय वलय होता है जो कि शून्य भाजक अवयवों रहित है, अत: पूर्णांकीय प्रान्त (D,+,.) का अभिलक्षण निम्न प्रकार से भी परिभाषित किया जा सकता है:

वह न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक n (यदि यह विद्यमान हैं ।) जो इस प्रकार है कि $n.1 = 0$ जहाँ 1, पूर्णांकीय प्रान्त (D,+,.) का इकाई अवयव तथा 0,D का शून्य अवयव (योगात्मक तत्समक) है, पूर्णांकीय प्रान्त (D,+,.) का अभिलक्षण कहलाता है ।

यदि कोई भी धनात्मक पूर्णांक n इस प्रकार नहीं है कि $n.1 = 0$, अर्थात् यदि $n.1 \neq 0$ $\forall n \in N$ तब D का का अभिलक्षण शून्य अथवा अनन्त है ।

प्रमेय 2 : पूर्णांकीय प्रान्त (D,+,.) के किन्ही भी दो अशून्य अवयवों की कोटियाँ (order) उन्हें योगात्मक ग्रुप (D,+,.) के सदस्य मानते हुऐ सदैव समान होती है ।

उपपत्ति : माना (D,+,.) एक पूर्णांकीय प्रान्त है, तथा $a, b \in D$ जहाँ $a \neq 0, a \neq 0$. माना योगात्मक ग्रुप के अवयव मानते हुये a की कोटि n है । तब n वह न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक है कि $n.a = 0$

परन्तु $na = 0 \Rightarrow (na)b = 0.b = 0$

$\Rightarrow (a + a + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n$ पद) b = 0

$\Rightarrow ab + ab + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n$ पद = 0 (बंटन नियम से)

$\Rightarrow (a + b + b + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n$ पद) = 0 (बंटन नियम से)

$\Rightarrow a\,(nb) = 0$

$\Rightarrow nb = 0$ ($\because a \neq 0$ तथा D शून्य भाजक रहित हैं ।)

$\Rightarrow O(b) \leq n$

$\Rightarrow O(b) \leq O(a)$ ....(1)

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते है कि

$O(a) \leq O(b)$ .....(2)

समीकरण (1) व (2) से

$O(a) = O(b)$

अब यदि a की कोटि शून्य है $i.e. O(a) = 0$

तब हम सिद्ध करेंगे कि O(b) भी शून्य है । यदि नहीं तो माना कि O(b) = m, जहां m एक धनात्मक पूर्णांक है ।

तब

$$O(b) = m \Rightarrow mb = 0$$
$$\Rightarrow a(mb) = 0$$
$$\Rightarrow a(b + b + \ldots\ldots\ldots\ldots m \text{ पद}) = 0$$
$$\Rightarrow ab + ab + \ldots\ldots\ldots\ldots m \text{ पद} = 0$$
$$\Rightarrow (a + a + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots m \text{ पद})\ b = 0$$
$$\Rightarrow (ma)b = 0$$
$$\Rightarrow ma = 0 \qquad (\because D \text{ शून्य भाजक रहित है तथा } b \neq 0)$$
$$\Rightarrow O(a) \leq m$$

जो प्रदर्शित करता है कि $O(a) \neq 0$, एक विरोधाभास, चूँकि $O(a) = 0$. अत: हमारी परिकल्पना असत्य है अर्थात् $O(b) = 0$ यदि $O(a) = 0$

अतएव प्रत्येक स्थिति में $O(a) = O(b)$

प्रमेय 3 : पूर्णांकीय प्रान्त (D,+,.) का अभिलक्षण शून्य अथवा एक घनात्मक पूर्णांक n होता है, यदि D के किसी भी स्वेच्छ अशून्य अवयव को a (a को योगात्मक ग्रुप (D,+,.) का सदस्य मानते हुये) की कोटि शून्य अथवा n है ।

उपपत्ति : माना कि (D,+,.) एक पूर्णांकीय प्रान्त है तथा $a \in D$, कोई स्वेच्छ अशून्य अवयव है। यदि a की कोटि शून्य है, तब कोई भी धनात्मक पूर्णांक n इस प्रकार नहीं है कि na = 0

अत: सभी $n \in N$ के लिये

$$nb \neq 0 \quad \forall b \in D$$

फलस्वरूप D का अभिलक्षण शून्य है । अब माना कि योगात्मक ग्रुप D का सदस्य मानते हुये, अशून्य अवयव a की कोटि एक परिमित धनात्मक पूर्णांक n है । तब n वह न्यून्तम धनात्मक पूर्णांक है कि na = 0

अत:

$$na = 0 \Rightarrow (na)b = 0\ \forall b \in D$$
$$\Rightarrow (a + a + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n \text{ पद})\ b = 0$$
$$\Rightarrow ab + ab + \ldots\ldots\ldots\ldots n \text{ पद}) = 0 \qquad \text{(बंटन नियम से)}$$
$$\Rightarrow a(b + b + \ldots\ldots\ldots\ldots n \text{ पद} = 0 \qquad \text{(बंटन नियम से)}$$
$$\Rightarrow a(nb) = 0$$
$$\Rightarrow nb = 0 \qquad (\because D \text{, शून्य भाजक रहित है तथा } a \neq 0)$$

अत: n वह न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक है कि

$$nb = 0 \quad \forall b \in D$$

अर्थात् D का अभिलक्षण n है ।

प्रमेय 4 : पूर्णांकीय प्रान्त का (D,+,.) अभिलक्षण शून्य अथवा एक अभाज्य संख्या होती है ।

उपपत्ति : माना कि (D,+,.) एक पूर्णांकीय प्रान्त है तथा माना कि $a \in D$ कोई स्वेच्छ अशून्य अवयव है । यदि योगात्मक ग्रुप (D,+) का सदस्य मानते हुये a की कोटि शून्य है, तब D का अभिलक्षण शून्य है । अत: प्रमेय सिद्ध होती है ।

परन्तु यदि a की कोटि एक परिमित धनात्मक पूर्णांक है, तब D का अभिलक्षण भी n है । हम सिद्ध करेंगे कि n एक अभाज्य संख्या है । यदि सम्भव हो तो माना n एक अभाज्य संख्या नहीं है तथा $n = n_1.n_2$, जहाँ $n_1 \neq 1, n_2 \neq 2$ एवं $n_1 < n_2, n_2 < n$. अब चूँकि D का अभिलक्षण n है तथा m एकन्यूनता धनात्मक पूर्णांक इस प्रकार है कि

na = 0 (चूँकि O(a) = n)

इसलिये

$$(n_1 n_2)a = 0$$

$$\Rightarrow (n_1 n_2)b = 0.b = 0 \qquad \forall b \in D, \text{ जहां } b \neq 0$$

$$\Rightarrow [n_1(n_2 a)]b = 0$$

$$\Rightarrow [n_1(a + a + \ldots\ldots\ldots\ldots n_2 \text{ पद}) \text{ b} = 0$$

$$\Rightarrow n_1[(a + a \ldots\ldots\ldots\ldots n_2 \text{ पद}) \text{ b}] = 0$$

$$\Rightarrow n_1[ab + ab + \ldots\ldots\ldots\ldots n_2 \text{ पद}) = 0$$

$$\Rightarrow n_1[a(b + b + \ldots\ldots\ldots\ldots n_2 \text{ पद})] = 0$$

$$\Rightarrow n_1[a(n_2 b)] = 0$$

$$\Rightarrow (n_1 a)(n_2 b) = 0$$

$$\Rightarrow n_1 a = 0 \text{ या } n_2 b = 0$$

(चूंकि D एक पूर्णांकीय प्रान्त है अत: शून्य भाजक रहित गुण से)

सर्वप्रथम माना कि $n_1 a = 0$

$$\Rightarrow O(a) \leq n_1 \leq n$$

जो असत्य है, चूँकि $O(a) = n$

इसलिये माना कि $n_2 b = 0$

तब

$$O(b) \leq n_2 < n$$

जो पुन: असत्य है, चूँकि $O(b) = O(a) = n$

अत: हमारी परिकल्पना कि n एक अभाज्य संख्या नहीं है, असत्य है । अर्थात् n अभाज्य संख्या है ।

8.3 क्षेत्र (Field)

माना F एक अरिक्त सुच्चय है तथा + एवं .,F पर परिभाषित कोई दो संक्रियाएँ हैं तब संरचना (F,+,.) एक क्षेत्र कहलाती है यदि :

(F_1) $a \in F, b \in F \Rightarrow a + b \in F$

(F_2) $(a + b) + c \Rightarrow a + (b + c) \forall a, b, c \in F$

(F_3) सभी $a \in F$ के लिये एक अद्वितीय अवयव $0 \in F$ इस प्रकार है कि

$$a + 0 = a = 0 + a$$

$0 \in F$ को F का शून्य अथवा योगात्मक तत्समक कहते हैं ।

(F_4) प्रत्येक $a \in F$ के लिये एक अद्वितीय अवयव $b \in F$ इस प्रकार है कि

$$a+b=0=b+a$$

$b \in F$ को a का ऋणात्मक अथवा योगात्मक प्रतिलोम कहते हैं तथा इसे -a द्वारा निरूपित करते हैं । अत: प्रत्येक $a \in F$ के लिये

$$a+(-a)=0=(-a)+a$$

(F_5) $a+b=b+a \quad \forall a,b \in F$

(F_6) $a \in F, b \in F \Rightarrow a.b \in F$

$(F_7)(a.b)c=a.(b.c) \forall a,b,c \in F$

(F_8) (i) $a(b+c)=ab+ac$ तथा

(ii) $(b+c)a=ba+ca \forall a,b,c \in F$

(F_9) $a.b=b.a \forall a,b \in F$

(F_{10}) सभी $a \in f$ के लिए एक अद्वितीय अवयव $1 \in f$ इस प्रकार है कि

$$a \cdot 1=a=1 \cdot a$$

$1 \in F$ को, F का इकाई अवयव अथवा गुणात्मक तत्समक कहते हैं।

(F_{11}) प्रत्येक अशून्य अवयव $a \in F$ के लिए अद्वितीय अशून्य अवयव $b \in F$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$$ab=1=b \cdot a$$

b को अशून्य अवयव का $a(a \neq 0)$ का गुणात्मक प्रतिलोम (multiplicative inverse) कहते हैं तथा इसे a^{-1} द्वारा निरूपित करते हैं। अत: प्रत्येक $a \in F(a \neq 0)$ के लिए एक अद्वितीय अवयव $a^{-1} \in F(a^{-1} \neq 0)$

इस प्रकार है कि

$$aa^{-1}=1=a^{-1}a$$

टिप्पणी :

1. अभिग्रहीतों से (F_1) से $(F_8),(F_{10})$ तथा (F_{11}) से स्पष्ट है कि $(F,+,\cdot)$ एक भागफल वलय (division ring) है।

2. अभिग्रहीतों (F_1) से (F_{11}) द्वारा स्पष्ट है कि $(F,+,\cdot)$ एक क्रमविनिमेय, भागफल वलय है। अत: कहा जा सकता है कि क्रमविनिमेय भागफल वलय (commutative division ring) एक क्षेत्र होता है।

उदाहरण के लिये $(F_n,+_n,\times_n)$ जहाँ $Z_n=\{1,2.....,n-1\}$ तथा n एक अभाज्य संख्या है, एक क्षेत्र है।

प्रमेय 5 : प्रत्येक क्षेत्र शून्य भाजक रहित होता है।

अथवा

प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकीय प्रान्त होता है।

उपपप्ति : माना कि $(F,+,\cdot)$ एक क्षेत्र है। तब F, इकाई अवयव 1 सहित एक क्रमविनिमेय वलय है, जिसमें प्रत्येक अशून्य अवयव का गुणन के सापेक्ष प्रतिलोम अवयव विद्यमान है। हमें सिद्ध करना है कि F, शून्य भाजक रहित है।

माना $a,b \in F$ जहाँ $a \neq 0$ तथा ab = 0

तब चूँकि

$$a \neq 0$$

इसलिये

$$a^{-1} \in F$$

अब

$$ab = 0 \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0$$
$$\Rightarrow (a^{-1}a)b = 0$$
$$\Rightarrow 1b = 0$$
$$\Rightarrow b = 0$$

अत:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ यदि } a \neq 0$$

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं। कि

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ यदि } b \neq 0$$

अतएव

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ यदि } b = 0 \quad \forall \quad a,b \in F$$

अर्थात् F शून्य भाजक रहित है।

दूसरे शब्दों में F एक पूर्णांकीय प्रान्त है।

प्रमेय 6 : शून्य भाजक रहित परिमित क्रमविनिमेय वलय एक क्षेत्र होती है।

उपपत्ति : माना कि $(R,+,\cdot)$, शून्य भाजक रहित एक परिमित क्रमविनिमेय वलय है, जहाँ $R = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ R, को एक क्षेत्र प्रदर्शित करना होगा कि R इकाई अवयव सहित वलय है तथा R के प्रत्येक अशून्य अवयव का गुणन के सापेक्ष प्रतिलोम अवयव R में विद्यमान है।

माना $a \in R$ तथा $a \neq 0$

माना

$$Ra = \{a_1a, a_2a, ...a_na\}$$

हम प्रदर्शित करेंगे कि Ra के सभी अवयव भिन्न (distinct) हैं। यदि नहीं तो माना कि

$$a_ia = a_ja \Rightarrow a_i = a_j, \text{ जहाँ } i < j \text{ तथा } i, j \leq n$$

तब

$$a_ia = a_ja \Rightarrow a_i = a_j$$

(चूंकि R शून्य भाजक रहित है तथा $a \neq 0$ अत: दक्षिण निरसन नियम से)

यह असत्य है चूंकि $a_i \neq a_j$

अत: हमारी परिकल्पना अमान्य है, अर्थात् Ra के सभी अवयव भिन्न हैं जिनकी कुल संख्या n है।

पुनः गुणन के संवरक नियम से स्पष्ट है कि Ra का प्रत्येक अवयव R में है, $i.e. Ra \subseteq R$

अत:

$$Ra = R \quad (\because Ra \subseteq R \text{ तथा Ra एवं R के अवयव संख्या में समान हैं})$$

चूंकि $a \in R$, इसलिये $a \in Ra$

अतएव एक अवयव $a_i \in R$ इस प्रकार अवश्य होगा कि $a = a_i a$

तथा चूंकि R क्रमविनिमेय वलय है, इसलिये

$$a_i a = a = a a_i$$

हम सिद्ध करेंगे कि यह अवयव a_i ही R का इकाई अवयव 1 है।

माना $b \in R, R$ का कोई भी अवयव स्वेच्छ अवयव है, तब

$$b \in Ra \qquad (\because Ra = R)$$

$$\Rightarrow b = a_j a \qquad (\text{किसी अवयव } a_j \in R \text{ के लिये})$$

अब

$$a_i b = a_i (a_j a) = a_i (a a_j) \qquad (\because \text{ R क्रमविनिमेय है।})$$

$$= (a_i a) a_j = a a_j \qquad (\because a_i a = a)$$

$$= a_j a$$

$$= b$$

अत:

$$a_i b = b \qquad \forall \; b \in R$$

$$\Rightarrow a_i = 1 \in R$$

पुनः चूंकि $1 \in R$ इसलिये $1 \in Ra$

अत: एक अवयव $a_k \in R$ इस प्रकार अवश्य है कि

$$1 = a_k a$$

$$\Rightarrow a^{-1} = a_k \quad (\because a \neq 0)$$

अतएव R के प्रत्येक अशून्य अवयव का गुणन के सापेक्ष प्रतिलोम अवयव R में विद्यमान है। फलस्वरूप R एक क्षेत्र है।

प्रमेय 7 : परिमित पूर्णांकीय प्रान्त सदैव एक क्षेत्र होता है।

उपपत्ति : माना $(D, +, \cdot)$ एक परिमित पूर्णांकीय प्रान्त है, जहाँ $D = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ तब D, इकाई अवयव सहित एक शून्य भाजक क्रमविनिमेय वलय है। अत: D को एक क्षेत्र प्रदर्शित करने के लिये हमें केवल यह सिद्ध करना है कि D के प्रत्येक अशून्य अवयव का गुणन के सापेक्ष प्रतिलोम अवयव D में विद्यमान है।

माना $a \in D$ तथा $a \neq 0$

माना $D^* = [a_i a : a_i \in D$ तथा $a_i \neq 0]$

सर्वप्रथम हम प्रदर्शित करेंगे कि D^* के सभी अवयव भिन्न हैं। यदि नहीं तो माना कि

$$a_i a = a_j a \text{ जहाँ } i \neq j; i, j \leq n$$

तब निरसन नियम से

$$a_i = a_j \qquad (\because \text{ D शून्य भाजक रहित है।})$$

जो कि असत्य है चूंकि D के सभी अवयव भिन्न हैं। अत: हमारी परिकल्पना अमान्य है, अर्थात् D^* के सभी अवयव भिन्न हैं, जिनकी संख्या (n-1) है तथा साथ ही D^* के सभी अवयव अशून्य भी है।

पुनः गुणन के संवरक नियम से D^* के सभी अवयव D के अवयव हैं, अत: $D^* \subseteq D$

फलतः

$$D^* = D - \{0\} \qquad (\because D^* \text{ में D के सभी (n - 1) अवयव हैं।})$$

अब चूंकि $1 \in D$ तथा $1 \neq 0$

इसलिये $1 \in D^*$

अत: एक अवयव $a_i \in D$ इस प्रकार है कि

$$1 = a_i a$$

$$\Rightarrow a^{-1} = a_i \in D$$

अर्थात् D के प्रत्येक अशून्य अवयव का गुणन के सापेक्ष प्रतिलोम अवयव D में विद्यमान है। अतएव D एक क्षेत्र है।

8.3.1 क्षेत्र का अभिलक्षण (characteristic of a field)

हम सिद्ध कर चुके हैं कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकीय प्रान्त होता है। इस आधार पर क्षेत्र के अभिलक्षण को निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है :

यदि $(F, +, \cdot)$ कोई क्षेत्र है, तब क्षेत्र F का अभिलक्षण वह न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक n है (यदि यह विद्यमान है।) कि $n \cdot 1 = 0$, जहाँ 1, F का इकाई अवयव एवं 0, F का योगात्मक तत्समक है।

यदि कोई भी धनात्मक पूर्णांक n इस प्रकार नहीं है की $n \cdot 1 = 0$, तब F का अभिलक्षण शून्य अथवा अनन्त कहलाता है।

यह देखा जा सकता है कि वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र का अभिलक्षण सदैव शून्य होता है। इसी प्रकार क्षेत्र $(Z_7, +_7, \times_7)$, जहाँ $Z_7 = \{0, 1, 2, ...6\}$ का अभिलक्षण 7 है।

8.4 क्रमित पूर्णांकीय प्रान्त (Ordered integral domain)

माना $(D, +, \cdot)$ एक पूर्णांकीय प्रान्त है। तब $(D, +, \cdot)$ एक क्रमित पूर्णांकीय प्रान्त कहलाता है यदि D का कोई उपसमुच्चय D^+ इस प्रकार है कि

(i) D^+, D पर परिभाषित संक्रियाओं + एवं $\cdot$ के लिये संवृत्त है अर्थात्

$$a \in D^+, b \in D^+ \Rightarrow a + b \in D^+$$

$a \in D^+, b \in D^+ \Rightarrow a \cdot b \in D^+$

(ii) सभी अवयवों $a \in D$ के लिये निम्न में एक और केवल एक कथन ही सत्य है

$a = 0, a \in D^+, -a \in D^+$

D^+ के सभी अवयव क्रमित पूर्णांकीय प्रान्त D के धनात्मक अवयव (positive elements of D) तथा D के अन्य सभी अशून्य अवयव, D के ऋणात्मक अवयव (negative elements) कहलाते हैं।

8.4.1 क्रमित क्षेत्र (Ordered field)

क्षेत्र F एक क्रमित क्षेत्र कहलाता है यदि यह एक पूर्णांकीय प्रान्त के स्वरूप में क्रमित है।

प्रमेय 8 : यदि $(D,+,\cdot)$ इकाई अवयव 1 सहित एक क्रमित पूर्णांकीय प्रान्त है, तब 1,D का धनात्मक अवयव होता है $(i.e, 1 \in D^+)$

उत्पत्ति: माना $(D,+,\cdot)$ इकाई अवयव 1 सहित एक क्रमित पूर्णांकीय प्रान्त है। माना 1, D का धनात्मक अवयव D के सभी धनात्मक अवयवों का समुच्चय है।

हमें सिद्ध करना है कि $1 \in D^+$

यदि सम्भव हो तो माना की $1 \notin D^+$

तब चूंकि $1 \neq 0$ तथा $1 \notin D^+$ इसलिये क्रमित पूर्णांकीय प्रान्त की परिभाषा से $-1 \neq D^+$

अत:

$$-1 \neq D, -1 \in D^+ \Rightarrow (-1)(-1) \in D^+ \ (\because D^+, \text{ गुणन के लिये संवृन्त है।})$$
$$\Rightarrow 1 \in D^+$$

जो कि एक विरोधभास है।

अत: $1 \in D^+$

अर्थात् 1, D का धनात्मक अवयव है।

उदाहरण 1 : प्रदर्शित कीजिये कि $(C,+,\cdot)$, जहाँ C सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है, क्रमित नहीं है।

हल : यदि सम्भव हो, तो माना की $(C,+,\cdot)$ एक क्रमित क्षेत्र है तथा C^+, C के धनात्मक अवयवों का समुच्चय है।

अब चूंकि $i \in C$ तथा $i \neq 0$, इसलिये

$$i \in C^+ \text{ या } -i \in C^+$$

यदि $i \in C^+$, तब क्रमित क्षेत्र की परिभाषा से

$$i \in C^+, i \in C^+ \Rightarrow i.i \in C^+$$
$$\Rightarrow -1 \in C^+$$

पुनः परिभाषा से

$$i \in C^+, -i \in C^+ \Rightarrow i(-1) \in C^+$$
$$\Rightarrow -i \in C^+$$

अतः

$$i \in C^+ \Rightarrow -i \in C^+,$$ जो कि एक विरोधाभास है |

इसी प्रकार यदि हम $-i \in C^+$ लें तब

$$-i \in C^+ \Rightarrow i \in C^+,$$ जो कि एक विरोधाभास है |

अतः न तो $i \in C^+$ तथा न ही $-i \in C^+$ अर्थात् $(C,+,.)$ क्रमित क्षेत्र नहीं है |

उदाहरण 2 : प्रदर्शित कीजिये कि $(Z_n,+_n,\times_n)$, जहाँ n एक अभाज्य संख्या है ,एक क्रमित क्षेत्र नहीं है |

हल : यदि सम्भव हो, तो माना कि $(Z_n,+_n,\times_n)$, एक क्रमित क्षेत्र है तथा Z_n^+, Z_n के धनात्मक अवयवों का समुच्चय है |

हम जानते है कि क्षेत्र Z_n का इकाई अवयव 1 तथा शून्य अवयव (योगात्मक तत्समक) 0 होता है तथा $1 \neq 0$ पुनः 1 का योगात्मक प्रतिलोम $(n-1)$ है तथा हम जानते हैं कि इकाई अवयव $1 \in Z_n, Z_n$ का धनात्मक अवयव होता है (प्रमेय 8)

इसलिये $1 \in Z_n^+$

अब योग के संवरक नियम से

$$1 \in Z_n^+ \Rightarrow 1+_n 1+_n \ldots\ldots\ldots +_n \left[(n-1) \text{ पदों तक } \right] \in Z_n^+$$

$$\Rightarrow n^{-1} \in Z_n^+$$

इसलिये $(Z_n,+_n,.)$ तथा 1 का ऋणात्मक $(n^{-1}) \in Z_n^+$, जो कि विरोधाभास है

अतः $(Z_n,+_n,.)$ क्रमित नहीं है |

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. यदि $(R,+,.)$ इकाई अवयव 1 सहित एक क्रमविनिमेय वलय है, जिसमें निरसन के नियम लागू होते हैं | तब R एक ..... है |
2. $(Z_n,+_n,\times_n)$ एक पूर्णांकीय प्रान्त है, यदि और केवल यदि n एक ..... है |
3. इकाई अवयव सहित वलय $(R,+,.)$ एक भागफल वलय (division ring) कहलाती है और यदि केवल R का प्रत्येक अशून्य अवयव एक ..... है |
4. भागफल वलय में शून्यभाजक अवयव ..... है |
5. प्रत्येक पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र ..... है |
6. यदि $(D,+,.)$ एक क्रमित पूर्णांकीय प्रान्त है, तब D का इकाई अवयव 1,D का ..... अवयव होता है |

8.5 उपक्षेत्र (Subfield)

क्षेत्र $(F,+,.)$ का कोई अरिक्त उपसमुच्चय K क्षेत्र F का एक उपक्षेत्र कहलाता है यदि K,F पर परिभाषित संक्रियाओं + एवं . के लिये स्थायी (stable) है तथा प्रेरित संक्रियाओं (induced compositions) के सापेक्ष स्वयं एक क्षेत्र है |

दूसरे शब्दों में क्षेत्र $(F,+,.)$ का अरिक्त एक उपसमुच्चय K, क्षेत्र F का एक उपक्षेत्र है | यदि $(K,+,.)$ स्वयं एक क्षेत्र है |

8.5.1 क्षेत्र का अभाज्य क्षेत्र (Prime field of a field)

क्षेत्र $(F,+,.)$ के समस्त उपक्षेत्रों का सर्वनिष्ठ भी F का अभाज्य क्षेत्र (prime field) कहते हैं | स्पष्ट है कि क्षेत्र $(F,+,.)$ का अभाज्य क्षेत्र F का लघुतम (smallest) उपक्षेत्र होता है |
अर्थात् क्षेत्र $(F,+,.)$ एक अभाज्य क्षेत्र है यदि F का कोई वास्तविक उपक्षेत्र होता है |

प्रमेय 9: क्षेत्र $(F,+,.)$ के किसी अरिक्त उप समुच्चय K को F का उपक्षेत्र होने के लिये आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि

(i) $a \in K, b \in K \Rightarrow a-b \in K$

(ii) $a \in K, b \in K, (b \neq 0) \Rightarrow ab^{-1} \in K$

उपपत्ति : आवश्यक प्रतिबन्ध सर्वप्रथम माना कि K क्षेत्र F का एक उपक्षेत्र है | तब K स्वयं एक उपक्षेत्र है |
अतः

$$a \in K, b \in K \Rightarrow a \in K, -b \in K$$
$$\Rightarrow a(-b) \in K \qquad \text{(योग के संवरक नियम से)}$$
$$\Rightarrow a-b \in K$$

पुनः चूंकि K स्वयं एक क्षेत्र है इसलिये

$$b \in K, (b \neq 0) \Rightarrow b^{-1} \in K$$

अतः

$$a \in K, b \in K, (b \neq 0) \Rightarrow a \in K, b^{-1} \in K$$
$$\Rightarrow ab^{-1} \in K \qquad \text{(गुणन के संवरक नियम से)}$$

अतएव प्रतिबन्ध आवश्यक है |

पर्याप्त प्रतिबन्ध : अब माना कि क्षेत्र F के अतिरिक्त उपसमुच्चय K के लिये

(i) $a \in K, b \in K \Rightarrow a-b \in K$ तथा

(ii) $a \in K, b \in K, (b \neq 0) \Rightarrow ab^{-1} \in K$

तब हमें सिद्ध करना है कि K,F का उपक्षेत्र है अर्थात् K स्वयं एक क्षेत्र है
अब (i) से

$$a \in K, a \in K \Rightarrow a-a \in K$$
$$\Rightarrow 0 \in K$$

पुनः (i) से

$$0 \in K, aK \Rightarrow 0-a \in K$$

इसलिये

$$a \in K \Rightarrow -a \in K$$

अब

$$a \in K, b \in K \Rightarrow a \in K, -b \in K$$
$$\Rightarrow a-(-b) \in K$$
$$\Rightarrow a+b \in K \quad \text{[(i) से]}$$

अर्थात् K,+ के लिये संवृत्त है |

पुनः (ii) से

$$a \in K, a \in K\,(a \neq 0) \Rightarrow aa^{-1} \in K$$
$$\Rightarrow 1 \in K$$

तथा (ii) से ही

$$1 \in K, a \in K, (a \neq 0) \Rightarrow 1a^{-1} \in K$$

इसलिये

$$a \in K, (a \neq 0) \Rightarrow a^{-1} \in K$$

अब $\quad a \in K, b \in K, (b \neq 0) \Rightarrow a \in Kb^{-1} \in K$

$$\Rightarrow a\left(b^{-1}\right)^{-1} \in K$$

[(ii) से]

$$\Rightarrow ab \in K$$

अर्थात् K,. के लिये संवृत्त है

चूंकि K,F का उपसमुच्चय है इसलिये K के अवयव, योग संक्रिया + तथा गुणन संक्रिया . के लिये साहचर्य एवं क्रमविनिमेय नियमों का पालन करते हैं | साथ ही बंटन के नियमों का भी पालन होता है |

अतएव K प्रेरित संक्रियाओं + तथा . के सापेक्ष एक क्षेत्र है | फलस्वरूप K,F का एक उपक्षेत्र है |

उदाहरण 3 : सिद्ध कीजिये कि परिमेय संख्याओं का क्षेत्र $(Q,+,.)$ एक अभाज्य क्षेत्र होता है |

हल : माना $(Q,+,.)$ परिमेय संख्याओं का क्षेत्र है तथा K,Q का कोई उपक्षेत्र है | तब $K \subseteq Q$

अब चूंकि K स्वयं एक क्षेत्र है, इसलिये $1 \in K$

अतः

$$1 \in K \Rightarrow 1+1.....m \text{ बार } \in K \quad \text{(योग के लिये संवरक के नियम से)}$$
$$\Rightarrow m \in K$$

इसी प्रकार

$$1 \in K \Rightarrow 1+1.....n \text{ बार } \in K$$
$$\Rightarrow n \in K$$

अब माना $\frac{m}{n} \in Q,$ जहाँ $m, n \in Z$ तथा $n \neq 0$

चूंकि $n \neq 0$ तथा $n \in K$

इसलिये n का गुणात्मक प्रतिलोम

$$\frac{1}{n} \in K$$

पुनः गुणन के लिये संवरक नियम से

$$m \in K, \frac{1}{n} \in K \Rightarrow m.\frac{1}{n} \in K$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} \in K \quad (n \neq 0)$$

अतः

$$\frac{m}{n} \in Q \Rightarrow \frac{m}{n} \in K$$

$$\Rightarrow Q \subseteq K$$

परन्तु $K \subseteq Q$

अतएव $K = Q$

अर्थात् $(Q,+,.)$ एक अभाज्य क्षेत्र है |

उदाहरण 4 : क्षेत्र $(Z_n, +_n, \times_n)$, जहाँ $Z_n = \{0,1,2,.....,n-1\}$ तथा n एक अभाज्य (prime) संख्या है, एक अभाज्य क्षेत्र है |

हल : माना K क्षेत्र $(Z_n, +_n, \times_n)$ का एक उपक्षेत्र है | तब

$$K \subseteq Z_n \qquad ....(i)$$

अब चूंकि K स्वयं एक क्षेत्र है , इसलिये $1 \in K$

अतः $+_n$ योग के लिये संवरक नियम से

$$1 \in K \Rightarrow 1 +_n 1 = 2 \in K$$

$$2 \in K \Rightarrow 2 +_n 1 = 3 \in K$$

.....

$$n-2 \in K \Rightarrow (n-2) +_n = n-1 \in K$$

परन्तु

$$n-1 \in Z_n$$

इसलिये

$$n-1 \in Z_n \Rightarrow n-1 \in K$$

$$Z_n \subseteq K \qquad ....(2)$$

(1) तथा (2) से $K = Z_n$

अर्थात् $(Z_n, +_n, \times_n)$ एक अभाज्य क्षेत्र है |

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. क्षेत्र $(F,+,.)$ का इकाई अवयव 1 सहित उपवलय एक ..... होता है |
2. क्षेत्र $(F,+,.)$ के किसी अरिक्त उपसमुच्चय K को F का उपक्षेत्र होने के लिये प्रतिबन्ध $a \in K, b \in K \Rightarrow a-b \in K$ तथा प्रतिबन्ध ..... आवश्यक है |
3. यदि किसी क्षेत्र $(F,+,.)$ का कोई भी उपक्षेत्र विद्यमान नहीं है तब F एक ..... कहलाता है |

4. "वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र $(R,+,.)$ सम्मिश्र संख्याओं के $(C,+,\cdot)$ का उपक्षेत्र होता है " कथन सत्य है अथवा असत्य ?

8.6 सारांश

इस इकाई में आपने पूर्णांकीय प्रान्त एवं क्षेत्र कि परिभाषा तथा उनमें परस्पर सम्बन्धों का अध्ययन किया | पूर्णांकीय प्रान्त का अभिलक्षण तथा क्रमित पूर्णांकीय प्रान्त एवं क्रमित क्षेत्र कि परिभाषा तथा संबन्धित उदाहरणों द्वारा इनका विषय अध्ययन किया | अन्त में क्षेत्र के उपक्षेत्र कि परिभाषा एवं उपक्षेत्र के होने के लिये आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध प्राप्त किये |

8.7 शब्दावली

पूर्णांकीय प्रान्त	Integral domain
अभिलक्षण	Characteristic
क्षेत्र	Field
भागफल वलय	Division ring
क्रमित पूर्णांकीय प्रान्त	Ordered integral domain
धनात्मक अवयव	Positive element
ऋणात्मक अवयव	Negative element
क्रमित क्षेत्र	Ordered field
उपक्षेत्र	Subfield
अभाज्य क्षेत्र	Prime field

8.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. पूर्णांकीय प्रान्त
2. अभाज्य संख्या
3. नियमित अवयव
4. नहीं होता
5. नहीं होता
6. धनात्मक अवयव

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. पूर्णांकीय प्रान्त
2. $a \in K, b \in K, (b \neq 0) \Rightarrow ab^{-1} \in K$
3. अभाज्य क्षेत्र
4. सत्य

8.9 अभ्यास प्रश्न

1. सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक क्षेत्र का एक पूर्णांकीय प्रान्त होता है परन्तु इसका विलोम सर्वदा सत्य नहीं है |
2. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है |
3. सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकीय प्रान्त का अभिलक्षण या तो शून्य होता है या फिर एक अभाज्य संख्या |

4. सिद्ध कीजिए कि यदि $(D,+,\cdot)$ एक क्रमित पूर्णांकीय प्रान्त है, तब D का इकाई अवयव 1,D का धनात्मक अवयव होता है |

5. सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र F के अरिक्त उपसमुच्चय K को F का उपक्षेत्र होने के लिये आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध है :

$$a \in K, b \in K \Rightarrow a - b \in K$$

एवं $a \in K, b \in K, (b \neq 0) \Rightarrow ab^{-1} \in K$

इकाई 9 : वलय समाकारिता एवं अंतः स्थापन (Ring Homomorphism and Embedding)

इकाई की रूपरेखा

9.0 उद्देश्य

9.1 प्रस्तावना

9.2 वलय समाकारिता

9.2.1 वलय समाकारिता की अष्टि

9.3 वलयों एवं पूर्णांकीय प्रान्तों का अन्तः स्थापन

9.4 भागफल क्षेत्र

9.5 सारांश

9.6 शब्दावली

9.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

9.8 अभ्यास प्रश्न

9.0 उद्देश्य

इस इकाई का उद्देश्य वलयों के मध्य समरूपता एवं इस समरूपता के अंतर्गत, विशेष प्रकार के वलयो के गुणों की सहायता से संगत समरूपी वलय के गुणों का अध्ययन करना है।

9.1 प्रस्तावना

इस इकाई को मूलत: दो भागों में विभक्त किया गया है | प्रथम भाग में वलयों की समाकारिता एवं तुल्याकारिता का अध्ययन करते हुए विभिन्न प्रमेयों के माध्यम से समाकारी एवं तुल्याकारी वलयों के गुणों के मध्य संबंधो का अध्ययन किया गया है | इकाई के द्वितीय भाग में वलयों के अन्त: स्थापन की परिभाषा देते हुए विभिन्न प्रमेयों के द्वारा सिद्ध किया गया है कि किसी गुण विशेष वलय अथवा पूर्णांकीय प्रान्त का किसी पूर्णांकीय प्रान्त अथवा क्षेत्र में अंत: स्थापन सम्भव है अथवा नहीं |

9.2 वलय समाकारिता (Ring homomorphism)

माना $(R,+,.)$ तथा $(R,\oplus,\odot)$ कोई दो वलय है | तब एक फलन

$$f:R\to R' \text{ जहाँ }, \ f(a)=a'\forall a\in R$$

वलय R से वलय R ′ में एक समाकारिता कहलाता है, यदि सभी $a,b\in R$ के लिये

(i) $f(a+b)=f(a)\oplus f(b)$

(ii) $f(a.b)=f(a)\odot f(b)$ (संक्रिया संरक्षण गुण)

हम कहते हैं कि R, वलय R ′ के समाकारी (homomorphic) है |

विशिष्ट गुणधारी वलय समकारिताओं को उनके गुणों के आधार पर प्रकट किया जाता है | जैसे -

1. समकारिता $f:R\to R'$ एकैकी समकारिता (Hmomorphism) कहलाती है, यदि प्रतिचित्रण f, एकैकी (one - one) है |

2. समकारिता $f: R \to R'$ आच्छादक समकारिता (epimorphism) कहलाती है, यदि f, एक आच्छादक (onto) प्रतिचित्रण है |
3. समकारिता $f: R \to R'$ एकैकी - समकारिता अथवा तुल्याकारिता (Ismorphism) कहलाती है, यदि प्रतिचित्रण f एकैकी तथा आच्छादक है |
4. वलय R से स्वयं R में, समकारिता $f: R \to R,$ एक अंतराकारिता (endomorphism) कहलाती है |
5. वलय R से स्वयं R पर समकारिता $f: R \to R,$ स्वाकारिता (automorphism) कहलाती है, यदि f एकैकी एवं आच्छादक (one - one onto) अर्थात् एक तुल्याकारिता है |

टिप्पणी :

(i) यदि वलय $(R,+,.)$ वलय $(R,\oplus,\odot)$ के समाकारी (homomorphic) है, तब यह सर्वदा सम्भव है कि R' पर परिभाषित द्विचर संक्रियाओं + एवं ., R' पर परिभाषित द्विचर संक्रियाओं $\oplus$ एवं $\odot$ से मूलत: भिन्न हो, परन्तु फिर भी सुविधा के लिये भविष्य में हम R' पर परिभाषित द्विचर संक्रियाओं $\oplus$ एवं $\odot$ को क्रमश: + एवं . के रूप में ही लेंगे |

(ii) वलय समाकारिता की परिभाषा से स्पष्ट है कि योग संक्रिया + के सापेक्ष वलय समाकारिता , मूलत: ग्रुप समाकारिता ही है | अतः योग संक्रिया का संदर्भ में ग्रुप समाकारिता से संबन्धित सभी परिणाम वलय समाकारिता के लिये भी सत्य हैं |

उदाहरण 1 : सिद्ध कीजिये कि पूर्णांकों का वलय $(Z,+,.)$ सम पूर्णांकों के वलय $(2Z,+,*)$ के तुल्याकारी (Isomophic) होता है, जहाँ

$$a*b=\frac{ab}{2}\,\forall a,b\in 2Z$$

हल : हम जानते हैं कि समपूर्णांकों का समुच्चय 2Z समान्य योग संक्रिया के सापेक्ष एक ग्रुप होता है, अर्थात् $(2Z,+)$ एक ग्रुप है |

अब यदि $a,b\in 2Z$ तब

$a*b=\frac{ab}{2}\in 2Z$ [चूंकि सम पूर्णांकों के गुणनफल का आधा भी एक सम पूर्णांक होता है।]

तथा सभी $a,b,c\in 2Z$ के लिए

$$(a*b)*c=\left(\frac{ab}{2}\right)*c=\frac{\left(\frac{ab}{2}\right)\cdot c}{2}$$

$$=\frac{(ab)c}{4}=\frac{a(bc)}{4}$$

$$=\frac{a\cdot\left(\frac{bc}{2}\right)}{2}=a*\left(\frac{bc}{2}\right)$$

$$=a*(b*c)$$

अतः $(2Z,*)$ एक सामि ग्रुप है।

अब सभी $a,b,c \in Z$ के लिए

$$a*(b+c)=\frac{a(b+c)}{2}$$
$$=\frac{ab+ac}{2}$$
$$=\frac{ab}{2}+\frac{ac}{2}$$
$$=a*b+a*c$$

इसी प्रकार $(b+c)*a=b*b+c*a$

अत: * संक्रिया, + संक्रिया पर बंटनीय है।

अतएव $(2Z,+,*)$ एक वलय है ।

अब माना की $f:Z\to 2Z$, जहां $f(a)=2a \ \forall a\in Z$

तब f एकैकी है, चूंकि

यदि $a,b,\in Z$ एवं $f(a), f(b)\in 2Z$

अतः $f(a)=f(b)\Rightarrow 2a=2b$

$$\Rightarrow a=b$$

f आच्छादक भी है चूंकि प्रत्येक समपूर्णांक $2a\in 2Z$ के लिए एक पूर्णांक $a\in Z$ इस प्रकार $f(a)=2a.$

अन्त में सभी $a,b\in Z$ के लिये

$$f(a+b)=2(a+b)=2a+2b=f(a)+f(b)$$

तथा $$f(ab)=2ab=\frac{(2a)\cdot(2b)}{2}=2a*2b$$
$$=f(a)*f(b)$$

अतः $f,(Z,+,\cdot)$ से $(2Z,+,*)$ पर एक तुल्याकारिता है।

उदाहरण 2 : यदि $(M_2,+,\cdot)$, आव्यूहों का एक वलय है जहाँ $M_2=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}: a\in R\right\}$ तथा $(R,+,\cdot)$ वास्तविक संख्याओं का वलय हैं, तब प्रतिचित्रण $f:M_2\to R$, जहां $f\left[\begin{pmatrix} a0\\ 00\end{pmatrix}\right]=a\forall\begin{pmatrix} a0\\ 00\end{pmatrix}\in M_2$ एक एकैकी आच्छादक-समाकारिता (तुल्याकारिता) है ।

हल :सभी $\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in M_2$ के लिए

$$f\left[\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]=f\left[\begin{pmatrix} a+b & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]$$
$$=a+b$$

$$= f\left[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] + f\left[\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

तथा

$$f\left[\begin{pmatrix} a0 \\ 00 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b0 \\ 00 \end{pmatrix}\right] = f\left[\begin{pmatrix} ab+00+0 \\ 0+00+0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= f\left[\begin{pmatrix} ab0 \\ 00 \end{pmatrix}\right]$$

$$= ab$$

$$= f\left[\begin{pmatrix} a0 \\ 00 \end{pmatrix}\right] \cdot f\left[\begin{pmatrix} b0 \\ 00 \end{pmatrix}\right]$$

अतः f एक समाकारिता है।

चूंकि यदि $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ तब

$$f\left[\begin{pmatrix} a0 \\ 00 \end{pmatrix}\right], f\left[\begin{pmatrix} b0 \\ 00 \end{pmatrix}\right] \in R$$

तब, $f\left[\begin{pmatrix} a0 \\ 00 \end{pmatrix}\right] = f\left[\begin{pmatrix} b0 \\ 00 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow a = b$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}$$

अर्थात f एकैकी है।

पुनः प्रत्येक $a \in R$ के लिए एक आव्यूह $\begin{pmatrix} a\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix} \in M_2$ इस प्रकार है की $f\begin{pmatrix} a\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix} = a$

अतः f आच्छादक भी है।

फलस्वरूप f एक तुल्याकारिता है।

प्रमेय 1 : यदि $f : R \to R'$, वलय $(R,+,\cdot)$ से वलय$(R,+,\cdot)$ पर एक समकारिता (तुल्याकारिता) है, तब

(i) $f(0) = 0'$, जहाँ 0 तथा 0' क्रमशः वलयो तथा R' के योग के तत्समक अवयव हैं।

(ii) $f(-a) = -(a) \qquad \forall a \in R$

उपपत्ति (i) : चूंकि 0 + 0 = 0

इसलिए $f(0+0) = f(0)$

$\Rightarrow f(0) + f(0) = f(0) + 0'$ [चूंकि 0' R' का शून्य है]

$\Rightarrow f(0) = 0'$

उपपत्ति (ii) : चूंकि प्रत्येक $a \in R$ के लिए

a + (-a) = 0

इसलिये $f(a+(-a)) = f(0)$

$\Rightarrow f(a) + f(-a) = 0'$ [चूंकि $f(0) = 0'$

$\Rightarrow -f(a) = f(-a)$

अर्थात् $f(-a) = -f(a) \quad \forall a \in R$

प्रमेय 2 : प्रत्येक क्रमविनिमेय वलय का समाकारी (तुल्याकारी) प्रतिबिम्ब भी क्रमविनिमेय होता है।

उपपत्ति : माना R एक क्रमविनिमेय वलय है जिसका समाकारी (तुल्याकारी) प्रतिबिम्ब f (R) है। माना f संगत समाकारिता (तुल्याकारिता) है | तब सिद्ध करना है कि f (R) भी क्रमविनिमेय है |

माना $f(a), f(b) \in f(R)$

तब $f(a) f(b) = f(ab) = f(ba)$ [चूंकि R क्रमविनिमेय है]

$= f(b) f(a)$

अतः $f(a) f(b) = f(b) f(a) \quad \forall f(a), f(b) \in f(R)$

अर्थात $f(R)$ क्रमविनिमेय है।

प्रमेय 3 : यदि $f : R \to R'$, वलय $(R,+,\cdot)$ से वलय $(R,+,\cdot)$ मे कोई समाकारिता है (homomorphism) तथा यदि $S' \subseteq R'$, वलय R का समाकारी प्रतिबिम्ब है तब S',R' का उपवलय होता है।

उपपत्ति : माना $f : R \to R'$, जहाँ $f(a) = a' \quad \forall a \in R$

वलय $(R,+,\cdot)$ से वलय $(R,+,\cdot)$ मे कोई समाकारिता है तथा माना $S' \subseteq R'$, समाकारिता f के अन्तर्गत वलय R का समाकारी प्रतिबिम्ब है।

तब f (R) = S'

माना $a', b' \in S'$,

चूंकि S', वलय R का समाकारी प्रतिबिम्ब है, इसलिये

$a, b \in R$ इस प्रकार अवश्य है कि

$$f(a) = a'; f(b) = b'$$

अब

$a' - b' = f(a) - f(b) = f(a) + f(b)$

$= f(a+(-b)) = f(a-b) \in S'$ [चूंकि $a \in R, b \in R$

$\Rightarrow a \in R, -b \in R$

$\Rightarrow a + (-b) = a - b \in R$

अतः $a' - b' \in S'$

पुनः $a' - b' = f(a) f(b) = f(ab) \in S'$ [चूंकि $a \in R, b \in R$

$\Rightarrow ab \in R$]

अत: $a' \in S, b' \in S' \Rightarrow a' - b' \in S'$ तथा $a'b' \in S'$

अर्थात् S,R' का एक उपवलय है ।

प्रमेय 4 : इकाई अवयव सहित वलय का समाकारी (तुल्याकारी) प्रतिबिम्ब भी इकाई अवयव सहित वलय होता है

उपपति : माना $(R,+,\cdot)$ इकाई अवयव सहित वलय $(R,+,\cdot)$ का समाकारी (तुल्याकारी) है। माना $f(R) = S'$ वलय R का समाकारी (तुल्याकारी) प्रतिबिम्ब है। तब सिद्ध करना है कि S' भी इकाई अवयव सहित वलय है।

अब चूंकि $1 \in R$ इसलिए $f(1) \in S'$

पुनः यदि $f(a) \in S'$

तब $f(a) f(1) = f(a \cdot 1) = f(a)$

तथा $f(1) f(a) = f(1 \cdot a) = f(a)$

अतः सभी के $f(a) \in S'$ लिये

$$f(a) f(1) = f(a) = f(1) f(a)$$

अर्थात् $f(1), S'$ का इकाई अवयव है।

अतएव S' इकाई अवयव सहित वलय है।

प्रमेय 5 : सिद्ध कीजिये कि शून्य भाजक रहित वलय का तुल्याकारी प्रतिबिम्ब भी एक शून्य भाजक रहित वलय होता है ।

उपपत्ति : माना $f : R \to R'$ शून्य भाजक रहित वलय $(R,+,\cdot)$ से वलय $(R,+,\cdot)$ पर एक तुल्याकारिता है ।

माना कि $S' = f(R) \subseteq R'$ शून्य भाजक रहित वलय R का तुल्याकारी प्रतिबिम्ब । तब हमें सिद्ध करना है कि S' भी शून्य भाजक रहित है ।

अब $0 \in R \Rightarrow f(0) = 0' \in S$

पुन: चूंकि f एकैकी है (one - one) है । [चूंकि f एक तुल्याकारिता है।] इसलिये यदि $a, b \in R$, जहां $a \neq 0, b \neq 0$, तब $f(a) \neq 0, f(b) \neq 0'$ तथा $f(a), f(b) \in S'$.

पुनः $a \in R, b \in R \Rightarrow ab \in R$ तथा $ab \neq 0$

(चूंकि R शून्य भाजक रहित है तथा $a \neq 0$ एवं $b \neq 0$)

$\Rightarrow f(ab) \in S'$

$\Rightarrow f(ab) \neq 0'$ [चूंकि f एकैकी है तथा f(0) 0=']

$\Rightarrow f(a) f(b) \neq 0'$

अत: $f(a) \neq 0', f(b) \neq 0' \Rightarrow f(a) f(b) \neq 0'$ अर्थात् S' शून्य भाजक रहित है ।

9.2.1 वलय समाकारिता की अष्टि (Kernel of ring homomorphism)

माना $f: R \to R'$ वलय $(R,+,\cdot)$ से वलय $(R,+,\cdot)$ में कोई समाकारिता है। तब समुच्चय $K = \{a \in R : f(a) = 0'\}$, जहाँ 0' वलय R' का शून्य है,

समाकरिता f की अष्टि कहलाता है ।

प्रमेय 6 : यदि $f: R \to R'$ वलय $(R,+,\cdot)$ से वलय $(R',+,\cdot)$ में कोई अष्टि K है, तब K वलय R का उपवलय होता है ।

उपपत्ति : चूंकि दिया है कि K वलय R से वलय R' में समाकारिता f की अष्टि है, इसलिये K की परिभाषा से

$$K = \{a \in R : f(a) = 0'\}$$

K को R का उपवलय प्रदर्शित करने के लिये हम सिद्ध करेंगे कि

$a \in K, b \in K \Rightarrow a - b \in K$ तथा $ab \in K$

अब $a \in K, b \in K \Rightarrow f(a) = 0', f(b) = 0'$

अत: $f(a-b) = f(a+(-b)), f(a) + f(-b)$

$$= f(a) + [-f(b)] = 0' + (-0')$$

$$= 0'$$

$$\Rightarrow a - b \in K$$

तथा $f(ab) = f(a) f(b) = 0' \cdot 0'$

$$= 0'$$

$$\Rightarrow ab \in K$$

इसलिये $a \in K, b \in K \Rightarrow a - b \in K$ तथा $ab \in K$

$\Rightarrow K, R$ का उपवलय हैं ।

प्रमेय 7 : यदि $f: R \to R'$ वलय $(R,+,\cdot)$ से वलय $(R,+,\cdot)$ पर एक समाकारिता है, जिसकी अष्टि K है, तब f को एक तुल्याकारिता होने के लिये आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि K = {0}

उपपत्ति : माना $f: R \to R'$ जहाँ $f(a) = a' \forall a \in R$ वलय $(R,+,\cdot)$ से वलय $(R',+,\cdot)$ पर एक समाकारिता है, जिसकी अष्टि K है । तब

$$K = \{a \in R; f(a) = 0'\}$$

आवश्यक प्रतिबन्ध : माना कि f एक तुल्याकारिता है तथा $a \in K$ तब

$$a \in K \Rightarrow f(0) = 0'$$

$$\Rightarrow f(a) = f(0) \qquad \text{[चूंकि f (0) =0']}$$

$$\Rightarrow a = 0 \qquad \text{[चूंकि f एकैकी है]}$$

अत: $a = 0 \quad \forall a \in K$

अर्थात् $K = \{0\}$

पर्याप्त प्रतिबन्ध : अब माना कि K = {0}

तब f को एक तुल्याकारिता प्रदर्शित करने के लिये हमे केवल यह प्रदर्शित करना है कि f एकैकी है ।

माना $a,b \in R$ ने

तब $f(a), f(b) \in R'$

अब $$f(a) = f(b) \Rightarrow f(a) + [-f(b)] = f(b) + [-f(b)]$$
$$\Rightarrow f(a) + f(-b) = 0'$$
$$\Rightarrow f(a + (-b)) = 0'$$
$$\Rightarrow f(a - b) = 0'$$
$$\Rightarrow a - b \in K \qquad \text{[K,f की अष्टि है ।]}$$
$$\Rightarrow a - b = 0' \qquad [\because K = \{0\}]$$
$$\Rightarrow a = b$$

अत: f एकैकी है । परिणामस्वरूप f एक तुल्याकारिता है ।

स्वमूल्यांकन प्रश्न -1

1. 1. यदि $(Z,+,\cdot)$ तथा $(2Z,+,\cdot)$ साधारण योग तथा गुणन की संक्रियाओं के वलय हैं तब $(Z,+,\cdot)$, वलय $(2Z,+,\cdot)$ के समाकारी है । सत्य/असत्य?
2. यदि K वलय R से वलय R' पर किसी समाकारिता की अष्टि है, तब f तुल्याकारिता है यदि
3. समाकारिता $f : R \to R'$ एक ..... कहलाती है ।
4. तुल्याकारिता $f : R \to R$ एक ..... कहलाती है ।
5. एकैकी तथा आच्छादक समाकारिता एक ..... कहलाती है ।
6. शून्य भाजक रहित वलय का समाकारी प्रतिबिम्ब भी शून्य भाजक रहित होता है । सत्य/असत्य ?

9.3 वलयो एवं पूर्णांकीय प्रान्तों का अन्तः स्थापन (Embedding of Rings and Integral domins)

माना कि वलय R वलय R' के एकैक की समाकारी(monomorphic) है यदि R' का कोई उपवलय S इस प्रकार है कि वलय R, इस उपवलय S के तुल्याकारी (isomorphic) है तब वलय R वलय R ′ में अन्तः स्थापित कहलाता है। R' को वलय R का विस्तार कहते है।

परिभाषा से स्पष्ट है कि यदि वलय R 'वलय R का विस्तार है तथा यदि $f : R \to R'$ वलय R से वलय R' में एकैकी समाकारी है, तब वलय R, $f(R)(\subseteq R')$ के तुल्याकारी (isomorphic) है ।

वलय सिद्धान्त में अन्त: स्थापन का विशेष महत्व है । यदि हम किसी वलय R को वलय में R' अंत: स्थापित कर सकते हैं तथा वलय R' के गुणधर्मों एवं विशेषताओं की जानकारी हमें उपलब्ध है, तब अंत: स्थापन विधि की सहायता से वलय R के गुणों की जानकारी आसानी से प्राप्त की जा सकती है ।

उदाहरण 3 : माना $f:(Z,+,\cdot)\to(M_2(Z),+,\cdot)$

जहाँ $f(a)=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\ \forall a\in Z$

तब हम देखते हैं सभी $a,b\in Z$ के

$$f(a+b)=\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$=f(a)+f(b)$$

तथा

$$f(ab)=\begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$=f(a)f(b)$$

अत: f एक वलय समाकारिता है । साथ ही f एकैकी भी है, चूंकि यदि $a,b\in Z$

तब $f(a),f(b)\in M_2(Z)$

$$f(a)=f(b)\Rightarrow\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

तथा

$$\Rightarrow a=b$$

अत: f एकैकी है ।

फलत: f एकैकी समाकारी (monomorphism) है । अर्थात् वलय $(Z,+,\cdot)$ वलय $(M_2(Z),+,\cdot)$ में अंत: स्थापित है, जहाँ Z पूर्णांकों का समुच्चय है ।

उदाहरण 4 : गाऊसींय पूर्णांकों का वलय $(J,+,\cdot)$ जहाँ $J=\{m+in;m,n\in Z\}$ सभी 2 x 2 वास्तविक आव्यूहों (real matrices(के वलय $(M_2,+,.)$ में अंत: स्थापित किया जा सकता है।

चूंकि यदि हम $M_2=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};a,b,c,d\in R\right\}$ का कोई उपसमुच्चय $M_z=\left\{\begin{pmatrix} mn \\ -nm \end{pmatrix};m,n\in Z\right\}$ लें तब यह दर्शित किया जा सकता है कि प्रतिचित्रण तब यह $f:J\to M_2$ जहां

$$f(m+in)\begin{pmatrix} mn \\ -nm \end{pmatrix},m,n\in Z$$

वलय J से वलय M_z पर एक तुल्याकारिता है ।

प्रमेय 8 : इकाई अवयव रहित वलय को किसी इकाई अवयव सहित वलय में अंतस्थापित किया जा सकता है ।

उपपत्ति: माना $(R,+,\cdot)$ इकाई अवयव रहित कोई वलय है । माना $S=Z\times R=\{(m,a):m\in Z,a\in R\}$ जहाँ Z पूर्णांकों का समुच्चय है ।

माना S पर परिभाषित संकियऐं + एवं . निम्न प्रकार परिभाषित हैं :

(i) $(m,a)+(n,b)=(m+n,a+b)$

(ii) $(m,a).(n,b)=(mn,mb+na+ab)\forall(m,a),(n,b)\in S$

चूंकि $m,n\in Z$ तथा $a,b\in R$, इसलिये $m+n,m.n\in Z$ तथा $a+b,mb+na+ab\in R$

अर्थात् $(m+n,a+b)\in S$ तथा $(mn,mb+na+ab)\in S$

अत: हम देखते हैं कि

$$(m,a)\in S,(n,b)\in S\Rightarrow(m,a).(n,b)\in S$$

तथा $$(m,a)\in S,(n,b)\in S\Rightarrow(m,a).(n,b)\in S$$

अर्थात् +एवं .,S पर द्विचर सकियाऐं हैं ।

अब सभी $(m,a),(n,b)(p,c)\in S$ के लिये

$$\begin{aligned}\left[(m,a)+(n,b)\right]+(p,c)&=(m+n,a+b)+(p,c)\\&=((m+n)+p,(a+b)+c)\\&=(m+(n+p),a+(b+c))\\&=(m,a)+(n+p,b+c)\\&=(m,a)+\left[(n,b)+(p,c)\right]\end{aligned}$$

इसी प्रकार

$$\begin{aligned}(m,a)\left[(n,b).(p,c)\right]&=(mn,mb+na+ab).(p,c)\\&=((mn)p,(mn)c+p(mb+na+ab)+(mb+na+ab)c)\\&=(m(np),m(nc+pb+bc)+(np)a+a(nc+pb+bc))\\&=(m,a)(nc,nc+pb+bc)\\&=(m,a)\left[(n,b).(p,c)\right]\end{aligned}$$

अत: S, योग तथा गुणन के लिये साहचर्य है ।

चूंकि सभी $(m,a),(n,b)\in S$ के लिये

$$\begin{aligned}(m,a)+(n,b)&=(m+n,a+b)\\&=(n+m,a+b)\\&=(n,b)+(m,a)\end{aligned}$$

अत: समुच्चय S योग संक्रिया के लिये क्रम विनिमेय है ।

सभी $(m,a)\in S$ के लिये एक अद्वितीय क्रमित युग्म $(0,0)\in S$ इस प्रकार है कि

$$(m,a)+(0,0)=(m+0,a+0)=(m,a)$$

इसी प्रकार $(0,0)+(m,a)=(m,a)$

अत: $(0,0)\in S$ योग का तत्समक अवयव है ।

प्रत्येक $(m,a)\in S$ के लिये एक अद्वितीय अवयव $(-m,-a)\in S$ [चूंकि यदि $m\in Z, a\in R$ तो $-m\in Z, -a\in R$ फलस्वरूप $(-m,-a)\in S$] इस प्रकार है कि

$$(m,a)+(-m,-a)=(m+(-m),a+(-a))$$
$$=(0,0)$$

इसी प्रकार $(-m,-a)+(m,a)=(0,0)$

अत. प्रत्येक $(m,a)\in S$ का ऋणात्मक (negative) अर्थात् योग का प्रतिलोम $(-m,-a)\in S$ के रूप में विद्यमान है ।

सभी $(m,a)(n,b),(p,c),\in S$ के लिये

$$(m,a)[(n,b)+(p,c)]=(m,a)(n+p,b+c)$$
$$=(m(n+p),m(b+c)+(n+p)a+a(b+c))$$
$$=(mn+mp,(mb+na+ab)+(mc+pa+ac))$$
$$=(mn,mb+na+ab)+(mp,mc+pa+ac)$$
$$=(m,a)(n,b)+(m,a)(p,c)$$

इसी प्रकार $[(n,b)+(p,c)].(m.a)=(n,b)(m,a)+(p,c)(m,a)$

अत: वाम तथा दक्षिण बंटन नियम लागू होते हैं ।

उपरोक्त तथ्यों के आधार पर हम देखते हैं कि $(S,+,\cdot)$ एक वलय हैं, जहाँ $S=Z\times R$

अब हम प्रदर्शित करेंगे कि $(S,+,\cdot)$ में गुणन संक्रिया के सापेक्ष इकाई अवयव विद्यमान है ।

चूंकि सभी $(m,a)\in S$ के लिये क्रमित युग्म (1 ,0)$\in S$ इस प्रकार है कि

$$(m,a).(1,0)=(m.1,m.0+1.a+a.0)$$
$$=(m,a)$$

इसी प्रकार, $(1,0)\cdot(m,a)=(m,a)$

इसलिये $(1,0)\in S, S$ का इकाई अवयव है । अतएव $(S,+,\cdot)$ इकाई अवयव सहित वलय है ।

अब हम समुच्चय S का एक उपसमुच्चय S' लेते हैं, जहाँ $S'=\{0\}\times R=\{(0,a):a\in R\}$

चूंकि सभी $(0,a),(0,b),\in S'$ के लिये

$$(0,a)-(0,b)=(0,a)+(0,-b)$$
$$=(0+0,a+(-b))$$
$$=(0,a-b)\in S'$$ [चूंकि $a\in R, b\in R$ इसलिये $a-b\in R$]

तथा $(0,a).(0,b)=(0.0,0b+0a+ab)$

$$=(0,ab)\in S'$$

इसलिये $(0.a)\in S',(0,b)\in S'$

तथा $(0,a)\cdot(0,b)\in S'$

अर्थात् S' इकाई अवयव सहित वलय का उपवलय है ।

अभी हमें वलयों R तथा S' के मध्य तुल्याकारिता प्रदर्शित करना शेष है ।

माना $\phi : R \Rightarrow S'$ जहाँ $\phi(a) = (0, a) \quad \forall a \in R$

तब (i) सभी $a, b \in R$ के लिये

$$\phi(a+b) = (0, a+b) = (0,a) + (0,b)$$
$$= \phi(a) + \phi(b)$$

एवं
$$\phi(ab) = (0, ab) = (0,a)(0.b)$$
$$= \phi(b)\phi(b)$$

इसलिये ϕ एक वलय समाकारिता है ।

(ii) यदि $a, b \in R$ तब $\phi(a), \phi(b) \in S'$ तथा $\phi(a) = \phi(b) \Rightarrow (0,a) = (0,b) \Rightarrow a = b$

इसलिये ϕ एकैकी है ।

(iii) प्रत्येक $(0,a) \in S'$ के लिये एक अवयव $a \in R$ इस प्रकार है कि $\phi(a) = (0,a)$ इसलिये ϕ आच्छादक है । अतएव ϕ वलयों R तथा S' के मध्य एक तुल्याकारिता है ।

फलस्वरूप वलय R को इकाई अवयव सहित वलय $S = Z \times R,$ में अंत: स्थापन किया जा सकता है ।

प्रमेय 9 : प्रत्येक पूर्णांकीय एक क्षेत्र में अंत: स्थापित किया जा सकता है ।

अथवा किसी भी शून्यभाजक रहित, क्रमविनिमेय वलय का एक क्षेत्र में अंतःस्थापन किया जा सकता है।

उपपत्ति : माना $(D, +, \cdot)$ कोई पूर्णांकीय प्राप्त है तथा D_0, D के समस्त अशून्य अवयवों का एक अरिक्त समुच्चय है । माना $S = D \times D_0$ जहाँ

$$D \times D_0 = \{(a,b); a, b \in D; b \neq 0\}$$

हम समुच्चय S पर एक सम्बन्ध (relation) "$\sim$" निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं |

(a,b) $\sim$ (c,d) यदि और केवल यदि ad = bc जहाँ (a,b),(c,d) $\in S$

हम प्रदर्शित करेंगे कि उपरोक्त सम्बंध $\sim$ एक तुल्यता सम्बन्ध है ।

स्वतुल्यता (Reflexivity) : सभी $a, b \in D(b \neq 0)$ के लिये चूंकि $ab = ba$ (D क्रमविनिमेय है)

इसलिये $(a,b) \sim (a,b) \forall (a,b) \in S$

सममितता (Symmetry) : माना $(a,b), (c,d) \in S$ तब

$$(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow ad = bc$$
$$\Rightarrow cbc = da \quad (\because \text{ D, क्रमविनिमेय है})$$
$$\Rightarrow (c,d) \sim (a,b)$$

संक्रामकता (Transitivity):माना $(a,b) \sim (c,d)$ तथा $(c,d) \sim (e,f)$, जहाँ $(a,b), (c,d), (e,f) \in S$

अब $(a,b) \sim (c,d), (c,d) \sim (e,f) \Rightarrow ad = bc, cf = de$

$$\Rightarrow ad(f) = (bc)f, b(cf) = b(de)$$
$$\Rightarrow ad(f) = b(de) \quad [\because (bc)f = b(cf)]$$
$$\Rightarrow a(df) = b(de)$$
$$\Rightarrow a(fd) = b(ed)$$
$$\Rightarrow (af)d = (be)d$$
$$\Rightarrow (af)d - (be)d = 0$$
$$\Rightarrow (af - be)d = 0$$
$$\Rightarrow af - be = 0 \quad [\because d \neq 0 \text{ तथा D शून्यभाजक रहित है ।}]$$
$$\Rightarrow af = be$$
$$\Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$$

अत: सम्बन्ध $\sim, S$ पर एक तुल्यता सम्बन्ध है । फलत: यह समुच्चय S को असंयुक्त तुल्यता वर्गों (disjoint equivalence classes) में विभाजित करता है ।

माना अवयव $(a,b) \in S$ द्वारा जनित तुल्यता वर्ग $\frac{a}{b}$ द्वारा निरूपित होता है, अर्थात्

$$\frac{a}{b} = \{(c,d) : (a,b) \sim (c,d) : (c,d) \in S\}$$

तथा माना कि F ऐसे सभी तुल्यता वर्गों का अरिक्त समुच्चय हैं । अर्थात्

$$F = \left\{\frac{a}{b} : a \in D, b \in D_0\right\}$$

अब हम अरिक्त समुच्चय F पर योग तथा गुणन की संक्रियाओं को निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं :

(i) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

(ii) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F$ [चूंकि D शून्य भाजक रहित है, इसलिये $b \neq 0, d \neq 0 \Rightarrow bd \neq 0$]

स्पष्ट है कि $\frac{ad+bc}{bd}$ तथा $\frac{ac}{bd}$ समुच्चय F के अवयव हैं। अर्थात् F पर परिभाषित योग तथा गुणन की सक्रियाऐं संवरक नियम का पालन करती हैं। हम प्रदर्शित करेंगे कि उक्त दोनों संक्रियाऐं सुपरिभाषित (well defined) है ।

माना कि $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ तथा $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$

तब हम प्रदर्शित करेंगे कि

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} \text{ तथा } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$$

अब $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ तथा $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Rightarrow ab' = ba'$ तथा $cd' = dc'$

यह प्रदर्शित करने के लिये कि

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}+\frac{c'}{d'}$$

हम प्रदर्शित करेंगे कि

$$\frac{ad+bc}{bd}=\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

अर्थात् प्रदर्शित करेंगे कि

$$(ad+bc)b'd'=bd(a'd'+b'c')$$

अब

$$\begin{aligned}(ad+bc)b'd' &= adb'd'+bcb'd' \\ &= ab'dd'+bb'cd' \\ &= ba'dd'+bb'd'c' \qquad [\because ab'=ba';cd'=dc'] \\ &= bda'd'+bdb'c' \\ &= bd(a'd'+b'c')\end{aligned}$$

इसी प्रकार यह प्रदर्शित करने के लिये कि

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a'}{b'}\cdot\frac{c'}{d'}$$

हम प्रदर्शित करेंगे कि

$$\frac{ac}{bd}=\frac{a'c'}{b'd'}$$

अर्थात् प्रदर्शित करेंगे कि

$$acb'd'=bda'c'$$

अब $acb'd'=ab'cd'=ba'dc'$ $\qquad [\because ab'=ba'$ तथा $cd'=dc']$

$$=bda'c'$$

अत: + एवं . संक्रियाऐं सुपरिभाषित हैं । अब हम सिद्ध करेंगे कि $(F,+,\cdot)$ एक क्षेत्र है ।

हम पूर्व में सिद्ध कर चुके हैं कि F,+ तथा . की संक्रियाओं के लिये संवृत्त है ।

योग तथा गुणन के लिये साहचर्यता : माना कि $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}\in F,$ तब

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{ad+bc}{bd}+\frac{e}{f} &= \frac{(ad+bc)f+(bd)e}{(bd)f} \\ &= \frac{adf+bcf+bde}{bdf}=\frac{a(df)+b(cf+de)}{b(df)} \\ &= \frac{a}{b}+\frac{cf+de}{df} \\ &= \frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)\end{aligned}$$

एवं
$$\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}.\frac{e}{f}=\frac{(ac)e}{df}$$
$$=\frac{a(ce)}{b(df)}=\frac{a}{b}.\frac{ce}{df}$$
$$=\frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.\frac{e}{f}\right)$$

योग तथा गुणन के सापेक्ष शून्य एवं इकाई अवयव : सभी $\frac{a}{b}\in F$ के लिये अद्वितीय अवयव $\frac{0}{d}\in F$ इस प्रकार है कि

$$\frac{a}{b}+\frac{0}{d}=\frac{ad+b.0}{bd}=\frac{ad}{bd}$$
$$=\frac{a}{b} \qquad (\because abd=bad)$$

इसी प्रकार
$$\frac{0}{d}+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

अत: $\frac{0}{d}\in F, F$ का शून्य (योग का तत्समक) है ।

[ध्यान रहे कि $\frac{0}{d}=\frac{0}{f}\forall d, f\in D_0$ तथा $\frac{a}{b}=\frac{0}{d}$ यदि और केवल यदि a = 0]

तथा सभी $\frac{a}{b}\in F$ के लिये एक अद्वितीय अवयव $\frac{c}{c}\in F$, जहाँ $c\neq 0$ इस प्रकार है कि

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{c}=\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$$

इसी प्रकार
$$\frac{c}{c}.\frac{a}{b}=\frac{ca}{cb}=\frac{a}{b}$$

अत: $\frac{c}{c}\in F, F$ का इकाई अवयव है ।

[ध्यान रहे कि $\frac{c}{c}=\frac{d}{d}\quad \forall c,d\in D_0$]

योग तथा गुणन के लिये क्रमविनियमेयता :

सभी $\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in F$ के लिये

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{cb+da}{db}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

तथा
$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}.\frac{a}{b}$$

योग तथा गुणन के सापेक्ष प्रतिलोम अवयव की उपस्थिति :

प्रत्येक $\frac{a}{b} \in F$ के लिये एक अद्वितीय अवयव $-\frac{a}{b} \in F$ इस प्रकार है कि

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{ab+b(-a)}{bb}=\frac{ab-ab}{bb}=\frac{0}{b^2}$$

$$=\frac{0}{a} \text{ (माना)} \qquad \left[\because 0a=b^2 0\right]$$

अत: $\frac{a}{b} \in F$ प्रत्येक का योगात्मक प्रतिलोम $-\frac{a}{b} \in F\,(a \neq 0)$ के रूप में विद्यमान है।

पुन: प्रत्येक अशून्य अवयव $\frac{a}{b} \in F\,(a \neq 0)$ के लिये एक अद्वितीय अवयव $\frac{b}{a} \in F$ इस प्रकार है कि

$$\frac{a}{b}.\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=\frac{ab}{ab}=\frac{a}{a} \text{ (माना) } (a \neq 0)$$

अत: प्रत्येक अशून्य अवयव $\frac{a}{b} \in F$ का गुणन के सापेक्ष प्रतिलोम अवयव $\frac{b}{a} \in F$ के रूप में विद्यमान है ।

बंटन नियम की पालना : सभी $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f} \in F$ के लिये

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\left(\frac{cf+de}{df}\right)=\frac{a(cf+de)}{b(df)}$$

$$=\frac{(acf+ade)bdf}{(bdf)(bdf)}$$

$$=\frac{(acf)(bdf)+(bdf)(ade)}{(bdf)(bdf)}$$

$$=\frac{acf}{bdf}+\frac{ade}{bdf}$$

$$=\frac{af}{bd}+\frac{ae}{bf}$$

$$=\frac{a}{b}.\frac{c}{d}+\frac{e}{f}.\frac{a}{b}$$

इसी प्रकार $\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.\frac{a}{d}+\frac{e}{f}.\frac{a}{b}$

अत: बंटन के नियम लाग होते हैं । अतएव $(F,+,\cdot)$ एक क्षेत्र है। अब हम F का एक उपसमुच्चय E लेंगे कि D तथा E परस्पर तुलयाकारी हों ।

माना कि $E=\left\{\frac{ax}{x} \in F; a \in D; x \in D_0\right\}$

माना $\phi; D \to E,$ जहां $\phi(a) = \frac{ax}{a} \forall a \in D$

तब यदि $a, b \in D,$ तो $\phi(a), \phi(b) \in E$

अब चूंकि

$$\phi(a) = \phi(b) \Rightarrow \frac{ax}{x} = \frac{bx}{x}$$
$$\Rightarrow axx = bxx$$
$$\Rightarrow ax^2 = bx^2$$
$$\Rightarrow ax^2 - bx^2 = 0$$
$$\Rightarrow (a-b)x^2 = 0$$
$$\Rightarrow (a-b) = 0 \qquad [\because x^2 \neq 0]$$
$$\Rightarrow a = b$$

इसलिये एकैकी है ।

चूंकि प्रत्येक के लिये एक अवयव इस प्रकार है कि $\phi(a) = \frac{ax}{x}$

इसलिये आच्छादक है ।

पुन: $\forall a, b \in D$

$$\phi(a+b) = \frac{(a+b)x}{x}$$
$$= \frac{ax+bx}{x}$$
$$= \frac{ax}{x} + \frac{bx}{x} = \phi(a) + \phi(b)$$

तथा
$$\phi(a \cdot b) = \frac{(ab)x}{x}$$
$$= \frac{(ab)xx}{xx} = \frac{ax \cdot bx}{x \cdot x}$$
$$= \frac{ax}{x} . \frac{bx}{x} \phi(a) \cdot \phi(b)$$

अत: से पर एक तुल्याकारिता है ।

फलस्वरूप पूर्णांकीय प्रान्त को क्षेत्र में अंत: स्थापित किया जा सकता है ।

9.4 भागफल क्षेत्र (Quotient field)

यदि $(D, +, \cdot)$ कोई शून्य भाजक रहित क्रमविनिमेय वलय (पूर्णांकीय प्रान्त) है, तब हमने देखा कि D को एक क्षेत्र (field) F में अंत: स्थापित किया जा सकता है, अर्थात् क्षेत्र F का एक ऐसा उपसमुच्चय E प्राप्त किया जा सकता है कि D समुच्चय E पर एक तुल्याकारिता (isomorphism) हो । हम D के अवयवों की सहायता से ऐसे क्षेत्र F का निर्माण कर सकते हैं

तथा F का एक ऐसा उपसमुच्चय E इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं कि D,E पर तुल्याकारी हो जाये। ऐसी दशा $F,(D,+,\cdot)$ में क्षेत्र का भागफल क्षेत्र (quotient field) कहलाता है ।

चूंकि D, उपसमुच्चय E पर तुल्याकारी है, इसलिये हम कह सकते हैं कि D तथा E अमूर्तत: परस्पर सर्वसम (identical) है । फलत: उपसमुच्चय E को D के रूप में लिया जा सकता है, तथा तब हम कह सकते हैं कि D का भागफल क्षेत्र F,D को अन्तर्विष्ट करने वाला (containing D) क्षेत्र है । यह देखा जा सकता है कि D का भागफल क्षेत्र D को अन्तर्विष्ट करने वाले समस्त क्षेत्रों का सर्वनिष्ट होता है। अर्थात् D का भागफल क्षेत्र, D को अन्तर्विष्ट करने वाला लघुतम (smallest) क्षेत्र होता है ।

प्रमेय 10 : पूर्णांकीय प्रान्त $(D,+,\cdot)$ का भागफल क्षेत्र, D को अन्तर्विष्ट करनेवाला लघुतम क्षेत्र F होता है ।

उपपत्ति : माना कि $(D,+,\cdot)$ एक पूर्णांकीय प्रान्त है तथा K,D को अन्तर्विष्ट वाला कोई क्षेत्र है। माना F, D का विभाग क्षेत्र है । तब

$$F=\left\{\frac{(a)}{b};a,b\in D,b\neq 0\right\}$$

चूंकि D क्षेत्र K में निहित है, इसलिये

$$a,b\in D,b\neq 0\Rightarrow a,b\in K,b\neq 0$$

$$\Rightarrow ab^{-1}\in K \text{ [चूंकि K क्षेत्र है ।]}$$

यदि $K'=\{ab^{-1};a,b\in D,b\neq 0\}$, तब स्पष्ट है कि $K'\subset K$ हम प्रदर्शित करेंगे कि K', क्षेत्र K का उपक्षेत्र हैं ।

माना $ab^{-1},cd^{-1}\in K'$, जहाँ $a,b,c,d\in D$ तथा $b\neq 0,d\neq 0$.

तब $ab^{-1},cd^{-1}=a\left(dd^{-1}\right)b^{-1}-c\left(bb^{-1}\right)d^{-1}$ [चूंकि $b\neq 0,d\neq 0$ इसलिये $bb^{-1}=1$ तथा dd^{-1}]

$$=(ad)d^{-1}b^{-1}-(cb)b^{-1}d^{-1}$$

$$=(ad)d^{-1}b^{-1}-(bc)d^{-1}b^{-1} \qquad \text{[चूंकि D क्रमविनिमेय है ।]}$$

$$=(ad-bc)d^{-1}b^{-1}$$

$$=(ad-bc)(bd)^{-1}\in K' \qquad \text{[चूंकि } ad-bc,bd\in D \text{ तथा } bd\neq 0\text{]}$$

पुनः यदि तब

$$\left(ab^{-1}\right)\left(cd^{-1}\right)^{-1}=\left(ab^{-1}\right)\left(dc^{-1}\right)=(ad)\left(b^{-1}c^{-1}\right)$$

$$=(ad)(cb)^{-1}\in K' \quad \text{[चूंकि } ad,cb\in D \text{ तथा } cb\neq 0\text{]}$$

अत: उपक्षेत्र होने के लिये आवश्यक प्रतिबन्ध सत्य हैं अर्थात् K' क्षेत्र K उपक्षेत्र है ।

अब हम प्रदर्शित करेंगे कि पूर्णांकीय प्रान्त D का भागफल क्षेत्र F, इस K' के तुल्याकारी है ।

माना $f:F\to K'$ जहां $f\left(\frac{a}{b}\right)=ab^{-1} \quad \forall\frac{a}{b}\in F$

माना $\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in F$ तब $f\left(\frac{a}{b}\right),f\left(\frac{c}{d}\right)\in K'$

अब $f\left(\frac{a}{b}\right)=f\left(\frac{c}{d}\right)\Rightarrow ab^{-1}=cd^{-1}$

$$\Rightarrow \left(ab^{-1}\right)\left(bd\right)=\left(cd\right)^{-1}\left(bd\right)$$
$$\Rightarrow a\left(b^{-1}b\right)d=c\left(d^{-1}b\right)d$$
$$\Rightarrow a.1.d=c\left(bd^{-1}\right)d$$
$$\Rightarrow ad=cb\left(d^{-1}d\right)$$
$$\Rightarrow ad=cb.1$$
$$\Rightarrow ad=bc$$
$$\Rightarrow \left(a,b\right)\sim\left(c,d\right)$$
$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

अत: f एकैकी है ।

f आच्छादक भी है, चूंकि प्रत्येक $ab^{-1}\in K'$ के लिये एक अवयव इस प्रकार है कि $f\left(\frac{a}{b}\right)=ab^{-1}$ पुन: $\frac{a}{b},\frac{c}{d}\in F$ सभी के लिये

$$f\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=f\left(\frac{ab+bc}{bd}\right)=\left(ad+bc\right)\left(bd\right)^{-1}$$
$$=\left(ad+bc\right)\left(d^{-1}b^{-1}\right)$$
$$=\left(ad\right)\left(d^{-1}b^{-1}\right)+\left(bc\right)\left(d^{-1}b^{-1}\right)$$
$$=a\left(dd\right)^{-1}b^{-1}+\left(cb\right)\left(b^{-1}d^{-1}\right)$$
$$=ab^{-1}+cd^{-1}$$
$$=f\left(\frac{a}{b}\right)+f\left(\frac{c}{d}\right)$$

तथा $f\left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right)=f\left(\frac{ac}{bd}\right)=\left(ac\right)\left(bd\right)^{-1}$

$$=ab^{-1}+c\left(bb^{-1}\right)d^{-1}$$
$$=\left(ac\right)\left(d^{-1}b^{-1}\right)$$
$$=\left(ab^{-1}\right)\left(cd^{-1}\right)$$
$$=f\left(\frac{a}{b}\right).f\left(\frac{c}{d}\right)$$

अत: f भागफल क्षेत्र F से क्षेत्र K के उपक्षेत्र K' पर एक तुल्याकारिता है ।

फलस्वरूप यदि पूर्णांकीय प्रान्त D किसी क्षेत्र के में अन्तर्विष्ट है, तब D का भागफल क्षेत्र F भी K में अन्तर्विष्ट है । अतएव D का भागफल क्षेत्र F, D को अन्तर्विष्ट करने वाला लघुतम क्षेत्र है |

प्रमेय 11 : तुल्याकारी पूर्णांक प्रान्तों के भागफल क्षेत्र भी परस्पर तुल्याकारी हैं ।

उपपत्ति : माना D तथा D' कोई दो परस्पर तुल्याकारी पूर्णांकीय प्रान्त हैं तथा माना $\phi; D \to D'$, जहाँ $\phi(a) = a' \forall a \in D$ संगत तुल्याकारिता (isomorphism) है ।

माना कि E तथा E' पूर्णांकीय प्रान्तों क्रमश: D तथा D' के भागफल क्षेत्र हैं । माना $f : E \to E'$, जहाँ $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\phi(a)}{\phi(b)}; \forall a, b \in D, b \neq 0$

तथा माना $\frac{a'}{b'} \in E'$ जहाँ $a', b' \in D'$ तथा $b' \neq 0$

तब चूंकि D तथा D' परस्पर तुल्याकारी हैं इसलिये अवयव a तथा $b \in D, b \neq 0$ सदैव इस प्रकार है कि $\phi(a) = a'$ तथा $\phi(b) = b'$

अत: प्रत्येक $\frac{a'}{b'} \in E'$ के लिये एक अवयव $\frac{a}{b} \in E, b \neq 0$ इस प्रकार है कि $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\phi(a)}{\phi(b)} = \frac{a'}{b'}$

अर्थात् f आच्छादक फलन है ।

अब माना कि $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in E$, जहाँ तथा $b \neq 0, d \neq 0$.

तब $f\left(\frac{a}{b}\right), f\left(\frac{c}{d}\right) \in E'$

इसलिये $f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{c}{d}\right) \Rightarrow \frac{\phi(a)}{\phi(b)} = \frac{\phi(c)}{\phi(d)}$

$$\Rightarrow \phi(a)\left[\phi(d)\right] = \phi(c)\left[\phi(b)\right] \qquad (\because \phi \text{ तुल्याकारी है})$$

$$\Rightarrow \phi(ad) = \phi(cb) \qquad (\because \phi \text{ एकैकी है})$$

$$\Rightarrow ad = bc$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

अत: एकैकी है ।

अन्त में सभी $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in E$ के लिये, जहाँ $b \neq 0, d \neq 0$

$$f\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = f\left(\frac{ad + bc}{bd}\right) = \frac{\phi(ad + bc)}{\phi(bd)}$$

$$= \frac{\phi(ad) + \phi(bc)}{\phi(bd)} \qquad \text{[चूंकि एक तुल्याकारिता है ।]}$$

$$= \frac{\phi(a)\phi(d)+\phi(b)\phi(c)}{\phi(b)\phi(d)}$$

$$= \frac{\phi(a)\phi(d)}{\phi(b)\phi(d)} + \frac{\phi(b)\phi(c)}{\phi(b)\phi(d)}$$

$$= \frac{\phi(a)}{\phi(b)} + \frac{\phi(c)}{\phi(d)}$$

$$= f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{c}{d}\right)$$

इसी प्रकार

$$f\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right) = f\left(\frac{ac}{ad}\right) = \frac{\phi(ac)}{\phi(bd)}$$

$$= \frac{\phi(a)\phi(c)}{\phi(b)\phi(d)}$$

$$= \frac{\phi(a)}{\phi(b)}\cdot\frac{\phi(c)}{\phi(d)}$$

$$= f\left(\frac{a}{b}\right) f\left(\frac{c}{d}\right)$$

फलतः f एक तुल्याकारिता है । अर्थात पूर्णांकीय प्रान्त D का भागफल क्षेत्र E तथा पूर्णांकीय प्रान्त D' का भागफल क्षेत्र E' परस्पर तुल्याकारी है ।

प्रमेय 12 : शून्य अभिलक्षण का प्रत्येक अभाज्य क्षेत्र, परिमेय संख्याओं के क्षेत्र के तुल्याकारी होता है ।

उपपत्ति : माना कि F, शून्य अभिलक्षण कोई अभाज्य क्षेत्र है । सुविधा हेतु माना कि F का इकाई अवयव e है । चूंकि F का अभिलक्षण शून्य है, अतः सभी धनात्मक पूर्णांकों n के लिये जहाँ 0,F का शून्य अवयव है । अब माना कि F', का कोई उपसमुच्चय है, जहाँ

$$F' = \left\{\frac{me}{ne}; m, n \in Z; n \neq 0\right\}$$

चूंकि $ne \in F$ तथा इसलिये ne का गुणन के सापेक्ष प्रतिलोम अवयव $(ne)^{-1} \in F$

फलस्वरूप $\frac{me}{ne} = (me)(ne)^{-1} \in F$

प्रदर्शित करेंगे कि F' क्षेत्र F का उपक्षेत्र है।

माना , जहां $m_1, n_1, m_2, n_2 \in Z$ तथा

तब $$\frac{m_1 e}{n_1 e} - \frac{m_2 e}{n_2 e} = \frac{(m_1 e)(n_2 e) - (n_1 e)(m_2 e)}{(n_1 e)(n_2 e)}$$

$$= \frac{(m_1n_2)e^2 - (n_1m_2)e^2}{(n_1n_2)e^2}$$

$$= \frac{(m_1n_2)e - (n_1m_2)e}{(n_1n_2)e} \qquad [\because e^2 = e]$$

$$= \frac{(m_1n_2 - n_1m_2)e}{(n_1n_2)e} \in F'$$

$[\because m_1n_2 - n_1m_2 \in Z$ तथा $n_1n_2 \neq 0]$

पुन: यदि $\frac{m_1e}{n_1e}, \frac{m_2e}{n_2e} \in F'$, जहाँ $\frac{m_2e}{n_2e} \neq 0$

तब $m_1, n_1, m_2, n_2 \in Z$ तथा $n_1 \neq 0; m_2 \neq 0, n_2 \neq 0$

इसलिए $\frac{m_1e}{n_1e} \cdot \left(\frac{m_2e}{n_2e}\right)^{-1} = \frac{m_1e}{n_1e} \cdot \frac{n_2e}{m_1e} = \frac{(m_1n_2)e^2}{(n_1m_2)e^2}$

$= \frac{(m_1n_2)e}{(n_1m_2)e} \in F'$ $[\because e^2 = e$ तथा $m_1, n_2, n_1, m_2 \in Z$ $n_1m_2 \neq 0]$

अत: $\frac{m_1e}{n_1e}, \frac{m_2e}{n_2e} \in F' \Rightarrow \frac{m_1e}{n_1e} - \frac{m_2e}{n_2e} \in F'$

तथा $\frac{m_1e}{n_1e}, \frac{m_2e}{n_2e} \in F'$, जहाँ $\frac{m_2e}{n_2e} \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{m_1e}{n_1e}\right)\left(\frac{m_2e}{n_2e}\right)^{-1} \in F'$

अर्थात् F' क्षेत्र F का उपक्षेत्र है। परन्तु चूंकि F एक अभाज्य क्षेत्र है, F' = F

फलस्वरूप $F = \left\{\frac{me}{ne}; m, n \in Z; n \neq 0\right\}$

अब माना कि $(Q, +, \cdot)$ परिमेय संख्याओं का एक क्षेत्र है ।

जहाँ $Q = \left\{\frac{m}{n}; m, n \in Z; n \neq 0\right\}$

तथा माना $f : F \to Q,$ जहाँ $f\left(\frac{me}{ne}\right) = \frac{m}{n}$ $\forall m, n \in Z; n \neq 0$

सर्वप्रथम हम प्रदर्शित करेंगे कि f सुपरिभाषित है ।

माना $\frac{m_1e}{n_1e}, \frac{m_2e}{n_2e} \in F$

तब $\frac{m_1e}{n_1e} = \frac{m_2e}{n_2e} \Rightarrow (m_1e)(n_1e) = (n_1e)(m_2e)$

$\Rightarrow (m_1n_2)e^2 = (n_1m_2)e^2$

$\Rightarrow (m_1n_2)e = (n_1m_2)e$ $\qquad [\because e^2 = e]$

$$\Rightarrow (m_1n_2)e = (n_1m_2)e = 0 \qquad [\because e \neq 0]$$
$$\Rightarrow m_1n_2 - n_1m_2 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{m_1e}{n_1e}\right) = f\left(\frac{m_2e}{n_2e}\right)$$

अत: f सुपरिभाषित है ।

अब हम प्रदर्शित करेंगे कि f एक तुल्याकारिता है।

f एकैकी है : माना $\frac{m_1e}{n_1e}, \frac{m_2e}{n_2} \in F$

तब $$f\left(\frac{m_1e}{n_1e}\right), f\left(\frac{m_2e}{n_2e}\right) \in Q$$

अब $$f\left(\frac{m_1e}{n_1e}\right) = f\left(\frac{m_2e}{n_2e}\right) \Rightarrow \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$$
$$= m_1n_2 = n_1m_2$$
$$= (m_1n_2)e^2 = (n_1m_2)e^2$$
$$= (m_1e)(n_2e) = (n_1e)(m_2e)$$
$$= \frac{m_1e}{n_1e} = \frac{m_2e}{n_2e}$$

अत: f एकैकी है ।

f आच्छादक है : प्रत्येक $\frac{m}{n} \in Q\ (n \neq 0)$ के लिये एक अवयव $\frac{me}{ne} \in F$ इस प्रकार है कि $f\left(\frac{me}{ne}\right) = \frac{m}{n}$

अत: f आच्छादक है।

संक्रिया संरक्षण : सभी $\frac{m_1e}{n_1e}, \frac{m_2e}{n_2} \in F$ के लिये

$$f\left(\frac{m_1e}{n_1e} + \frac{m_2e}{n_2e}\right) = f\left(\frac{(m_1e)(n_2e) + (n_1e)(m_2e)}{(n_1e)(n_2e)}\right)$$
$$f\left(\frac{(m_1n_2)e^2 + (n_1m_2)e}{(n_1n_2)e^2}\right)$$
$$= f\left(\frac{(m_1n_2)e + (n_1m_2)e}{(n_1n_2)e}\right)$$

$$= f\left(\frac{(m_1n_2 + n_1m_2)e}{(n_1n_2)e}\right)$$

$$= \frac{m_1n_2 + n_1m_2}{n_1n_2}$$

$$= \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}$$

$$= f\left(\frac{m_1e}{n_1e}\right) + f\left(\frac{m_2e}{n_2e}\right)$$

तथा $$f\left(\frac{m_1e}{n_1e} \cdot \frac{m_2e}{n_2e}\right) = f\left(\frac{(m_1n_2)e^2}{(n_1n_2)e^2}\right)$$

$$= f\left(\frac{(m_1m_2)e}{(n_1n_2)e}\right)$$

$$= \frac{m_1m_2}{n_1n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2}$$

$$= f\left(\frac{m_1e}{n_1e}\right) f\left(\frac{m_2e}{n_2e}\right)$$

अत: f एक तुल्याकारिता है।

अर्थात् अभाज्य क्षेत्र F, परिमेय संख्याओ के क्षेत्र Q के तुल्याकारी है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. यदि R इकाई अवयव रहित तथा S इकाई अवयव सहित वलय हैं, तब वलय R को वलय S में अंत: स्थापित ..... है ।
2. ; fn R इकाई अवयव सहित वलय है, जिसका विस्तार (extension) वलय S है, तब S का इकाई अवयव, R के इकाई अवयव से भिन्न ..... है ।
3. शून्य भाजक सहित वलय का, पूर्णांकीय प्रान्त में अंत:स्थापन ..... है ।
4. परस्पर तुल्याकारी पूर्णांकीय प्रान्तों के भागफल वलय ..... है ।
5. यदि F एक अभाज्य क्षेत्र है जिसका अभिलक्षण शून्य है तथा Q परिमेय संख्याओं का कोई क्षेत्र है तब F तथा Q ..... होते हैं ।

9.5 सारांश

इस इकाई में आपने वलयों की समाकारिता एवं तुल्याकारिता के बारे में विस्तृत जानकारी प्राप्त की । वलयों एवं पूर्णांकीय प्रान्तों के अंत: स्थापन का अध्ययन किया एवं सम्बंधित प्रमेयों को सिद्ध किया । भागफल क्षेत्रों, एवं अभाज्य क्षेत्रों के लिये तुल्याकारिताओं सम्बंधित प्रमेयों को भी सिद्ध किया ।

9.6 शब्दावली

समाकारिता	Homomorphism
एकैकी समाकारिता	Monomorphism
आच्छादक समाकारिता	Epimorphism
एकैकी आच्छादक समाकारिता	Isomorphism
तुल्याकारिता	Isomorphism
अंतराकारिता	Endomorphism
स्वाकारिता	Automorphism
अष्टि	Kemel
अंत: स्थापन	Embedding (Imbedding)
वास्तविक आव्यूह	Real Matrix
तुल्यता सम्बन्ध	Equivalence relation
भागफल क्षेत्र	Quotient field (field of quotients)

9.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. असत्य
2. K = {0}
3. अंतराकारिता
4. स्वाकारिता
5. तुल्याकारिता
6. असत्य

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. किया जा सकता
2. हो सकता
3. सम्भव नहीं
4. परस्पर तुलयाकारी होते
5. तुल्याकारी

9.8 अभ्यास प्रश्न

1. सिद्ध कीजिये कि क्रमविनिमेय वलय का समाकारी (तुल्याकारी) प्रतिबिम्ब भी एक कम विनिमेय वलय होता हे ।
2. सिद्ध कीजिये कि इकाई अवयव सहित वलय का समाकारी (तुल्याकारी प्रतिबिम्ब) भी इकाई सहित वलय होता है ।
3. यदि वलय R से वलय R' में एक समाकारिता है जिसकी अष्टि K है, तब K वलय R का एक उपवलय होता है ।

4. सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक शून्य भाजक रहित वलय का तुल्याकारी प्रतिबिम्ब भी एक शून्य भाजक रहित वलय होता है ।
5. सिद्ध कीजिये कि पूर्णांकीय प्राप्त D का भागफल क्षेत्र, D को अन्तर्विष्ट करने वाला लघुतम क्षेत्र होता है ।
6. सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक पूर्णांकीय प्रान्त को क्षेत्र में अन्त:स्थापित किया जा सकता है ।
7. सिद्ध कीजिये कि परिमित पूर्णांकीय प्रान्त का भागफल क्षेत्र, स्वयं वही पूर्णांकीय प्रान्त होता है।

इकाई 10: पूर्णांकीय प्रान्त का विभाग क्षेत्र एवं अभाज्य क्षेत्र (Field of Quotient for Integral Domain and Prime Field)

इकाई की रूपरेखा

10.0 उद्देश्य

10.1 प्रस्तावना

10.2 विभाग क्षेत्र या भागफल क्षेत्र

10.2.1 प्रमेय

10.2.2 प्रमेय

10.3 अभाज्य क्षेत्र

10.3.1 प्रमेय

10.3.2 प्रमेय

10.4 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

10.5 सारांश

10.6 शब्दावली

10.7 अभ्यास प्रश्न

10.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन से आप

1. पूर्णांकीय प्रान्त के विभाग क्षेत्र एवं तत्सम्बन्धी गुणधर्मों को प्रमेयों के माध्यम से सिद्ध करने में सक्षम होंगे ।
2. अभाज्य क्षेत्र की अवधारणा एवं तत्सम्बन्धी गुणधर्मों को जानेंगे ।

10.1 प्रस्तावना

इस इकाई की विषय-वस्तु पूर्व इकाइयों में वर्णित अवधारणाओं का विस्तार है । पूर्व इकाइयों में आपने वलय, पूर्णांकीय प्रान्त, क्षेत्र की अवधारणाओं एवं वलय की समाकारिता तथा अन्त: स्थापन को समझा है । पूर्णांकीय प्रान्त का विभाग क्षेत्र "अन्त: स्थापन" से सम्बन्धित होता है । इसी प्रकार अभाज्य क्षेत्र एक विशेष प्रकार के क्षेत्र हैं जो कतिपय महत्त्वपूर्ण गुणधर्म प्रदर्शित करते हैं। उपरोक्त विषय-वस्तु पर प्रमेयों एवं उदाहरणों के माध्यम से प्रकाश डाला गया है ।

10.2 विभाग क्षेत्र या भागफल क्षेत्र

माना D एक पूर्णांकीय प्रान्त है जिसमें एक से अधिक अवयव विद्यमान हैं । माना F एक क्षेत्र है तथा ϕ, D से F में एकैकी समाकारिता (Monomorphism) इस प्रकार है कि F के प्रत्येक अवयव a को $\frac{\phi(x)}{\phi(y)} \forall x, y \in D, y \neq 0$ रूप में व्यक्त किया जा सके, तो युग्म (F, ϕ) को D का विभाग क्षेत्र कहते हैं ।

अब चूंकि $D \cong f(D)$ एवं $\phi(D) \subset F$ अत: हम D की $\phi(D)$ के रूप में पहचान करतें हैं तथा D को क्षेत्र F का उपवलय मानते हैं ।

उपरोक्त विवेचन क्षेत्र F में पूर्णांकीय प्रान्त D के अन्त: स्थापन को भी इंगित कर है । अत: विभाग क्षेत्र को समझने से पूर्व "अन्त: स्थापन" की अवघारणा को भली भांति समझना अत्यावश्यक है ।

10.2.1 प्रमेय : पूर्णांकीय प्रान्त D को समाहित करने वाले क्षेत्र F का उपक्षेत्र K इस प्रकार विद्यमान होता है कि K, D के विभाग क्षेत्र के तुल्याकारी होता है ।

या

पूर्णांकीय प्रान्त D का विभाग क्षेत्र D को समाहित करने वाला सबसे छोटा क्षेत्र होता है

प्रमाण : माना F क्षेत्र तथा D पूर्णांकीय प्रान्त इस प्रकार हैं कि

$$D \subset F \qquad \text{.....(1)}$$

माना a, b D के स्वेच्छ अवयव हैं जहाँ $b \neq 0$

तब

$$a, b \in D \Rightarrow \; a, b \in K \qquad [\because D \subset F]$$

$$\Rightarrow ab^{-1} \in F \qquad [\because F \text{ क्षेत्र है तथा } b \neq 0]$$

प्रमेय की सिद्धि हेतु हम F का उपक्षेत्र (माना कि) K ज्ञात करेंगे जो कि D के विभाग क्षेत्र के तुल्यकारी होगा ।

अब समुच्चय $K = \{ab^{-1} | a \in D, 0 \neq b \in D\}$ पर विचार करते हैं । स्पष्ट है कि $K \subset F$

चरण 1 : K,F का उपक्षेत्र है :

माना $ab^{-1} \in K, cd^{-1} \in K,$, जहाँ $a, b, c, d \in D, b \neq 0, d \neq 0$

अब $ab^{-1} - cd^{-1} = a.1.b^{-1} - c.1.f^{-1}$, जहाँ $1 \in F$ का इकाई अवयव (गुणनात्मक तत्समक) है।

$$ab^{-1} - cd^{-1} = a(dd^{-1})b^{-1} - c(bb^{-1})d^{-1} \qquad [\because bb^{-1} = 1, dd^{-1} = 1]$$

$$= (ad)(d^{-1}b^{-1}) - (cd)(b^{-1}d^{-1})$$

$$= (ad)(d^{-1}b^{-1}) - (cd)(d^{-1}b^{-1})$$

[क्षेत्र मे क्रमविनिमेयता से $d^{-1}b^{-1} = b^{-1}d^{-1}, cb = bc$]

$$= (ad - bc)(d^{-1}b^{-1})$$

$$= (ad - bc)(bd)^{-1} \in K \qquad \text{.....(2)}$$

$$\left[\begin{array}{ll} ad - bc \in D & [\because a, b, c, d \in D] \\ \text{पुनः} \quad \text{Ɔ}, 0 \neq d \in D \Rightarrow (bd)^{-1} \in D & \\ \text{फलतः} \quad)(bd)^{-1} \in K & \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow ab^{-1} - cd^{-1} \in K \quad \forall \quad a, b, c, d \in D, b \neq 0, d \neq 0$$

पुनः $ab^{-1} \in K, cd^{-1} \in K$

$$\Rightarrow \left(ab^{-1}\right)\left(cd^{-1}\right) = \left(ab^{-1}\right)\left(dc^{-1}\right)$$
$$= \left(dc^{-1}\right)\left(ab^{-1}\right) \in K$$
$$\begin{bmatrix} \because 0 \neq c, d \in K \Rightarrow dc^{-1} \in K \\ 0 \neq b, a \in K \Rightarrow ab^{-1} \in K \end{bmatrix}$$

अतएव

$$\left(ab^{-1}\right)\left(cd^{-1}\right) \in K \quad \forall ab^{-1} \in K, cd^{-1} \in K \qquad .....(3)$$

(2) व (3) से स्पष्ट है कि K, क्षेत्र F का उपक्षेत्र है ।

चरण 2 : हम दिखायेंगे कि पूर्णांकीय प्रान्त D के लिये परिभाषित विभाग क्षेत्र $F' = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in D, a \neq b \neq D \right\}$

इस प्रकार विद्यमान है कि $F' \cong K$

$F' \cong K$ सिद्ध करने के लिये हम निम्न प्रकार से परिभाषित फलन ϕ,

$$\phi :: F' \to K$$

इस प्रकार कि

$$\phi\left(\frac{a}{b}\right) = ab^{-1} \quad \forall \frac{a}{b} \in F'$$

को एकैकी, आच्छादक एवं समाकारी प्रदर्शित करेंगे ।

(1) ϕ एकैकी है : माना $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} F'$ के स्वेच्छ अवयव हैं ।

तब माना

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{c}{d}\right)$$

$$\Rightarrow \quad ab^{-1} = cd^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(ab^{-1}\right)(bd) = \left(cd^{-1}\right)(bd)$$

$$\Rightarrow \quad a\left(b^{-1}b\right)d = \left(cd^{-1}\right)(db)$$

$$\Rightarrow \quad a\left(b^{-1}b\right)d = c\left(d^{-1}d\right)b$$

$$\Rightarrow \quad ad = cd$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

अतएव,

$$\phi\left(\frac{a}{b}\right)=\phi\left(\frac{c}{d}\right)\Rightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \forall \frac{a}{b},\frac{c}{d}\in F'$$

अतः ϕ एकैकी है ।

(ii) ϕ **आच्छादक है :** ϕ की परिभाषा से स्पष्ट है कि ϕ आच्छादक है क्योंकि $ab^{-1}\in K$ के $\frac{a}{b}\in F'$ इस प्रकार विद्यमान है कि $\phi\left(\frac{a}{b}\right)=ab^{-1}$

(iii) ϕ समाकारिता है :

हम दिखायेंगे कि

$$\phi\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=\phi\left(\frac{a}{b}\right)+\phi\left(\frac{c}{d}\right)$$

एवं

$$\phi\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)=\phi\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\phi\left(\frac{c}{d}\right)$$

अब

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)&=\phi\left(\frac{ad+bc}{bd}\right)\\ &=(ad+bc)\left(bd^{-1}\right) && (\phi \text{ की परिभाषा से})\\ &=(ad+bc)\left(d^{-1}b^{-1}\right)\\ &=add^{-1}b^{-1}+bcd^{-1}b^{-1}\\ &=a\left(dd^{-1}\right)b^{-1}+\left(cd^{-1}\right)\left(bb^{-1}\right)\\ &=a\cdot 1\cdot b^{-1}+cd^{-1}\cdot 1\\ &=ab^{-1}+cd^{-1}\\ &=\phi\left(\frac{a}{b}\right)+\phi\left(\frac{c}{d}\right)\end{aligned}$$

पुनः

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)&=\phi\left(\frac{ac}{bd}\right)\\ &=(ac)(bd)^{-1}\\ &=(ac)\left(d^{-1}b^{-1}\right)\\ &=a\left(cd^{-1}\right)b^{-1}\\ &=\left(ab^{-1}\right)\left(cd^{-1}\right)\\ &=\phi\left(\frac{a}{b}\right)\phi\left(\frac{c}{d}\right)\end{aligned}$$

उपरोक्त विवेचन से स्पष्ट है ϕ एकैकी, आच्छादक एवं समकारिता है फलतः ϕ तुल्याकारिता है अतएव,

$$F' \cong K$$

10.2.2 प्रमेय : किन्ही दो तुल्याकारी पूर्णांकीय प्रान्तों के विभाग क्षेत्र भी तुल्याकारी होते हैं ।

प्रमाण - माना D_1, D_2 दो पूर्णांकीय प्रान्त है जो कि फलन ϕ के संगत तुल्याकारी हैं । अर्थात् $\phi : D_1 \to D_2$ एवं $D_1 \cong D_2$

$$\Rightarrow \qquad \phi(a) \in D_2 \quad \forall a \in D_1$$

अब माना F_1, F_2 क्रमशः D_1 एवं D_2 के विभाग क्षेत्र हैं । अतएव, F_1, F_2 निम्न प्रकार से होंगे

$$F_1 = \left\{ \frac{a}{b} \middle| a \in D_1, 0 \in b \in D_1 \right\} \qquad .....(1)$$

$$F_2 = \left\{ \frac{\phi(a)}{\phi(b)} \middle| \phi(a) \in D_2, 0 \neq \phi(b) \in D_2 \right\} \qquad .....(2)$$

अब फलन

$$f : F_1 \to F_2$$

इस प्रकार कि

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\phi(a)}{\phi(b)} \quad \forall \quad \frac{a}{b} \in F_1 \qquad .....(3)$$

पर विचार करते हैं । हमें दिखाना है कि $F_1 \cong F$ इसके लिये हम सिद्ध करेंगे कि फलन f, तुल्याकारी है ।

(i) ϕ एकैकी है :

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F_1$ के लिए

माना

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{c}{d}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\phi(a)}{\phi(b)} = \frac{\phi(c)}{\phi(d)} \qquad \text{[f की परिभाषा (3) से]}$$

$$\Rightarrow \qquad \phi(a)\phi(d) = \phi(b)\phi(c)$$

$$\phi(ad) = \phi(bc) \qquad [\because \phi \text{ समाकारिता है }]$$

या $\qquad ad = bc \qquad [\because \phi$ एकाकी है]

या $\qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

अतएव हमने पाया कि

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{c}{d}\right) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

अर्थात् f एकाकी है ।

(ii) ϕ **आच्छादक है :** f की परिभाषा से स्पष्ट है कि f आच्छादक है क्योंकि स्वेच्छ $\frac{\phi(a)}{\phi(b)} \in F_2$ के लिये $\frac{a}{b} \in F_1$ इस प्रकार विद्यमान है कि

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\phi(a)}{\phi(b)}$$

(ii) **f समाकारिता है :** हम दिखायेंगे कि स्वेच्छ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in F_1$ के लिये

$$f\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{c}{d}\right)$$

तथा

$$f\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = f\left(\frac{a}{b}\right) \cdot f\left(\frac{c}{d}\right)$$

अब

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) &= f\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) \\
&= \frac{\phi(ad+bc)}{\phi(bd)} && \text{(f की परिभाषा (3) से)} \\
&= \frac{\phi(ad)+\phi(bc)}{\phi(b)\phi(d)} && (\because \phi \text{ समाकारिता है}) \\
&= \frac{\phi(a)+\phi(d)+\phi(b)\phi(c)}{\phi(b)\phi(d)} \\
&= \frac{\phi(a)}{\phi(b)} + \frac{\phi(c)}{\phi(d)} \\
&= f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{c}{d}\right) && \text{(f की परिभाषा से)}
\end{aligned}$$

पुनः

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) &= f\left(\frac{ac}{bd}\right) \\
&= \frac{\phi(ac)}{\phi(bd)} \\
&= \frac{\phi(a)\phi(c)}{\phi(b)\phi(d)} \\
&= \frac{\phi(a)}{\phi(b)} \cdot \frac{\phi(c)}{\phi(d)}
\end{aligned}$$

$$= f\left(\frac{a}{b}\right)\cdot f\left(\frac{c}{d}\right)$$

उपरोक्त विवेचन से स्पष्ट है कि हैं $f : F_1 \to F_2$ तुल्याकारिता है

अतएव, $F_1 \cong F_2$

उदाहरण : 1 अवशेष कक्षा (मॉड्यूलो 3) के पूर्णांक प्रान्त का विभाग क्षेत्र ज्ञात कीजिये ।

हल : अवशेष कक्षा (मॉड्यूलो 3) का समुच्चय A है तो

A = {0, 1, 2}.

अब हम जानते है कि $D = \left(\{0,1,2\}, +_3, \times_3\right)$ एक पूर्णांकीय प्रान्त होता है । याद कीजिये कि $\left(Z_p, +_p, \times_p\right)$ पूर्णांकीय प्रान्त होगा यदि p अभाज्य हो । यहाँ p = 3 अभाज्य है ।

D का विभाग क्षेत्र ज्ञात करना

माना

$$D_0 = \{1,2\}$$

तब

$$D \times D_0 = \{(a,b) | a \in D, b \in D_0\}$$

$$\Rightarrow \quad D \times D_0 = \{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

हम $D \times D_0$ पर तुल्यता सम्बन्ध ~ निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं -

$(a,b) \sim (c,d)$ यदि ad = bc

यह तुल्यता पर सम्बन्ध $\sim, D \times D_0$ का तुल्यता वर्गो में विभाजन कर देता है । (a,b) के तुल्यता वर्ग में $D \times D_0$ के वे अवयव होंगे जिनके लिये $(a,b) \sim (c,d)$ अर्थात् ad = bc सम्बन्ध को संतुष्ट करेंगे (a,b) के तुल्यता वर्ग को $\frac{a}{b}$ से व्यक्त करें तो

$$\frac{a}{b} = \{(c,d) | (a,b) \sim (c,d) \in D \times D_0\}$$

आपने पूर्व की इकाई में देखा है कि तुल्यता वर्गो का समुच्चय विहित योग एवं गुणन के लिये क्षेत्र बनाता है । जिसमें D का अन्त: स्थापन किया जा सकता है ।

अब, निम्न तीन तुल्यकारी वर्ग होंगे

$$(a) \quad \frac{0}{1} = \{(0,1),(0,2)\}$$

$$(b) \quad \frac{1}{1} = \{(1,1),(2,2)\}$$

$$(c) \quad \frac{2}{1} = \{(2,1),(1,2)\}$$

अब

$$(0,1) \sim (0,2) \Rightarrow \quad 0 \cdot 2 = 1 \cdot 0 \qquad [\because "ad = bc"]$$

$$(1,1) \sim (2,2) \Rightarrow \qquad 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1$$

$$(1,2) \sim (2,1) \Rightarrow \qquad 1 \cdot 1 = 2 \cdot 2$$

1 = 4 सत्य है क्योंकि 4 = 1 (mod 3)

अत: D के विभाग क्षेत्र के अवयव $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}$ हैं जो कि तुल्यकारिता से D के 0,1,2 के समान हैं। अत: D का विभाग क्षेत्र D स्वयं है ।

10.3 अभाज्य क्षेत्र

एक क्षेत्र F अभाज्य क्षेत्र कहलाता है यदि इसका कोई उचित उपक्षेत्र विद्यमान नहीं हो । चूंकि प्रत्येक समुच्चय अपना उपसमुच्चय होता है अतएव अभाज्य क्षेत्र F का उपक्षेत्र स्वयं F होता है ।

उदाहरण 1 : प्रत्येक अभाज्य संख्या p के लिये क्षेत्र $\left(Z_p, +_p, \times_p\right)$ अभाज्य होता है ।

जहाँ $Z_p = \{0, 1, 2....., p-1\}$

हल : माना सदि संभव है तो F, क्षेत्र Z_p का उपक्षेत्र है अर्थात्

$$F \subset Z_p \qquad .....(1)$$

चूंकि F उपक्षेत्र अतएव F में इकाई अवयव विद्यमान होगा अर्थात $1 \in F$ जहाँ 1 अवयव है । अब

$$1 \in F \Rightarrow \qquad 1+1 = 2 \in F \qquad \text{(F में योगिक संवृत्तता)}$$

इसी प्रकार

$$2+1 = 3 \in F$$

प्रक्रिया को दोहराने पर,

$$(p-2)+1 = p-1 \in F$$

परंतु

$$p-1 \in Z_p$$

अतएव

$$p-1 \in F \Rightarrow \qquad Z_p \subset F$$

(1), (2) से

$$F = Z_p$$

अर्थात् Z_p अपना उपक्षेत्र स्वयं है फलत: Z_p अभाज्य क्षेत्र है ।

10.3.1 प्रमेय : प्रत्येक शून्य अभिलक्षण का अभाज्य क्षेत्र परिमेय संख्याओं के क्षेत्र Q के तुल्याकारी होता है ।

प्रमाण : माना F एक शून्य अभिलाक्षणिक का अभाज्य क्षेत्र है । चूंकि F का अभिलक्षण शून्य है अतएव F एक अपरिमित क्षेत्र होगा ।

माना e, F का इकाई अवयव है तब समुच्चय $F_1 = \{ne | n \in Z\}$ पर विचार करते हैं

स्पष्टत: $F_1 \subset F$

अब Z से F पर परिभाषित फलन f पर विचार करते हैं जो कि निम्न प्रकार परिभाषित है -

$$F : Z \to F$$

इस प्रकार कि $$f(n) = ne \quad \forall \; n \in Z$$

हम दिखायेंगे कि f तुल्यकारिता है ।

(i) f एकैकी है :

माना $m, n \in Z$ इस प्रकार है कि

$$f(m) = f(n) \Rightarrow \quad me = ne$$

$$\Rightarrow \quad me = ne = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-n)e = 0$$

$$\Rightarrow \quad m - n = 0 \qquad (\because F \text{ का अभिलक्षण शून्य है})$$

अतएव

$$f(m) = f(n) \Rightarrow \quad m = n \quad \forall \; m, n \in Z$$

$\Rightarrow \quad f$ एकैकी है।

(ii) f आच्छादक है :

f की परिभाषा से स्पष्ट है कि f आच्छादक है क्योंकि प्रत्येक $ne \in F_1$ के लिये $n \in Z$ विद्यमान है।

(iii) f समकारिता है :

हम दिखायेंगे कि $\forall \; m, n \in Z$ के लिये

$$f(m+n) = f(m) + f(n)$$
$$f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$$

अब

$$\begin{aligned} f(m+n) &= f(m+n)e \\ &= me + ne \\ &= f(m) + f(n) \end{aligned}$$

पुनः

$$\begin{aligned} f(m \cdot n) &= f(m \cdot n)e \\ &= (m.n)(e.e) \\ &= (me)(ne) \\ &= f(m)\, f(n) \end{aligned}$$

अतएवं f तुल्यकारिता है फलत: $Z \cong F_1$

उपरोक्त का तात्पर्य है कि f पूर्णांकीय प्राप्त Z से पूर्णांकीय प्रान्त F_1 पर तुल्याकारिता है ।

अब चूंकि $F_1 \subset F$, अत: अभाज्य क्षेत्र F जो कि पूर्णांकीय प्रान्त F_1 को समाहित है आवश्यक रूप से F_1 का विभाग क्षेत्र होगा, जहाँ F_1 का विभाग क्षेत्र निम्न प्रकार परिभाषित होगा -

$$F = \left\{ (ne)(me)^{-1} m, n \in Z, m \neq 0 \right\}$$

पुन: क्षेत्र Q पूर्णांकीय प्रान्त Z का विभाग क्षेत्र होता है क्योंकि $\forall \ m, n \in Z, m \neq 0$ के लिये

$\frac{n}{m} \in Q$ अथवा $nm^{-1} \in Q$

तब स्पष्टत: F एवं Q तुल्यकारी होगे अर्थात्

$F \cong Q$

अतएव फलन $f : Q \to F$

इस प्रकार होगा कि

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{ne}{me} = (ne)(me)^{-1}$$

10.3.2 प्रमेय अशून्य अभिलक्षण p का अभाज्य क्षेत्र $(Z_p, +_p, \times_p)$, जहाँ $Z_p = \{0, 1, 2, 3....., p-1\}$ है, के तुल्यकारी होता है ।

प्रमाण : माना F वह अभाज्य क्षेत्र है जिसका अभिलक्षण $p \neq 0$ है

फलत: p भी अभाज्य संख्या है । (देखें उदाहरण - 1)

माना F का इकाई अवयव e है तब क्षेत्र की अभिलक्षण की परिभाषानुसार

$p \cdot e = 0$, जहाँ 0, क्षेत्र F का शून्य है ।

अब हम समुच्चय

$F_1 = \{ne \mid 0 \leq n \leq p-1\}$ पर विचार करते हैं ।

माना एक फलन f, Z_p से F_1 पर निम्न प्रकार परिभाषित है -

$$f : Z_p \to F_1$$

इस प्रकार कि $f(n) = ne, \quad 0 \leq n \leq p-1$

F_1 की परिभाषा से स्पष्ट है कि यदि

$me, ne \in F_1$ तो $0 \leq me \leq p-1, 0 \leq ne \leq p-1$

$$\Rightarrow \quad me + ne = \begin{cases} (m+n)e & \text{यदि } 0 \leq m+n \leq p-1 \\ (m+n-p)e & \text{यदि } m+n > p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad me + ne = (m +_p n)e$$

पुनः

$$(me)\cdot(ne) = m(en)e$$
$$= m(ne)e$$
$$= (mn)e^2$$
$$= (mn)e$$

अब विभाजन फलन से, पूर्णांक r,q इस प्रकार होंगे कि

$$m\cdot n = rp + q, \text{ जहाँ } 0 \le q < p, r \in N$$

अतएव,

$$(me)(ne) = (mn)e$$
$$= (rp+q)e$$
$$= (rp)e + qe$$
$$= r(pe) + qe$$
$$= r.0 + qe \quad [\because p.e = 0]$$
$$= 0 + qe$$
$$= qe$$
$$= (m \times_p n)e$$

$[q = m \times_p n$ चूंकि $0 \le q < p$ क्योंकि $m \times_p n$ के मान से तात्पर्य p से mn विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल होता है और मॉड्यलो गणित के कारण यह शेषफल 0 एवं p के मध्य का कोई पूर्णांक होगा ।

अतएव हम पाते हैं कि $\forall \; m, n \in Z_p$

$$f(m +_p n) = (m +_p n)e$$
$$= me + ne$$
$$= \phi(m) + \phi(n)$$

एवं

$$f(m \times_p n) = (m \times_p n)e$$
$$= (me)\cdot(ne)$$
$$= f(m)\, f(n)$$

अतएव f समाकारिता है ।

(ii) f एकैकी है :

माना स्वेच्छ $m, n \in Z$ इस प्रकार है कि

$$f(m) = f(n)$$

$$\Rightarrow \quad me = ne$$

$$\Rightarrow \quad me - ne = 0$$

$$\Rightarrow \quad (m-n)\cdot e = 0$$

परन्तु $p, (Z_p, +_p, \times_p)$ का अभिलक्षण है

अतएका $(m-n)\cdot e = 0$ तात्पर्य है कि $p, (m-n)$ को विभाजित करता है ।

परन्तु $0 \le m < p-1, \quad 0 \le n \le p-1$ है

$$\Rightarrow \quad m - n < p$$

अत: $p, (m-n)$ को विभाजित नहीं करेगा एवं $(m-n)\cdot e = 0$ तभी सत्य होगा जबकि

$(m-n) = 0$ या m = n

इस प्रकार हमने पाया कि $\forall \; m, n \in Z$

$$f(m) = f(n) \quad \Rightarrow \quad m = n$$

अतएव f एकैकी है ।

(iii) f आच्छादक है :

f की परिभाषा से स्पष्ट है कि हे आच्छादक है क्योंकि प्रत्येक $ne \in F_1$ के संगत $n \in Z_p$ में विद्यमान है ।

अत: उपरोक्त विवेचन से पाया कि f तुल्यकारिता है ।

$$\Rightarrow \quad Z_p \cong F_1$$

$\Rightarrow$ चूंकि Z_p एक क्षेत्र है अतएव F_1 भी एक क्षेत्र है ।

फलत: F_1, F का उपक्षेत्र है परन्तु चूंकि F अभाज्य क्षेत्र है अतएव इसका उचित उपक्षेत्र नहीं हो सकता है ।

फलत: $F_1 = F$

$$\Rightarrow \quad F \cong Z_p$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न -1

1. निम्नलिखित में से अभाज्य क्षेत्र है -

$(a) \quad (Z, +, \times) \qquad (b)(R, +, \times)$

$(c) \quad (Z_4, +_4, \times_4) \qquad (d)(Z_5, +_5, \times_5)$

2. यदि अभाज्य क्षेत्र का अभिलक्षण 3 है तो वह तुल्यकारी होगा -

(a) क्षेत्र $(R-\{3\},+,\times)$ के (b) क्षेत्र $(Z_5,+_5,\times_5)$

(c) क्षेत्र $(Z_9,+_9,\times_9)$ (d) क्षेत्र $(Z_3,+_3,\times_3)$

3. निम्नलिखित में सत्य कथन है -

(a) $(Q-\{0\},+,\times)$ अभाज्य क्षेत्र है ।

(b) $(R-\{0\},+,\times)$ अभाज्य क्षेत्र है परन्तु Q अभाज्य क्षेत्र नहीं है ।

(c) $(Z_7,+_7,\times_7)$ अभाज्य क्षेत्र नहीं है परन्तु $(Q,+,\times)$ अभाज्य क्षेत्र हैं ।

(d) $(Z_7,+_7,\times_7)$ एव $(Q,+,\times)$ अभाज्य क्षेत्र हैं।

10.4 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न -1

1. (d)
2. (d)
3. (d)

10.5 सारांश

इस इकाई में आपने विभाग क्षेत्र एवं अभाज्य क्षेत्र की अवधारणा को समझा है । आपने देखा कि किस प्रकार पूर्णांकीय प्रान्त के किसी क्षेत्र में अन्तःस्थापन की अवधारणा के विस्तार से विभाग क्षेत्र की रचना की जाती है ।

क्या विभाग क्षेत्र, समूह के विभाग समूह से कुछ साम्यता नहीं दर्शाता ? आपको स्मरण है कि किसी समूह G का विभाग समूह उसके प्रसामान्य उपसमूह H के सापेक्ष निर्मित सभी सहकुलकों का समुच्चय होता है जो सहकुलकों की गुणन संक्रिया के लिये समूह बनाता है ।

ये सहकुलक परस्पर समान या पूर्णतः असंयुक्त होते है फलतः $G=\bigcup_{a\in G} Ha$ एवं $\frac{G}{H}=\{Ha|a\in G\}$ इस प्रकार $\frac{G}{H}$, परस्पर अंसयुक्त उपसमुच्चयों $Ha, a\in G$ का समुच्चय होता है ।

इसी प्रकार पूर्णांकीय प्रान्त D का विभाग क्षेत्र भी समुच्चय $D\times D_0$ में तुल्यता सम्बन्ध से प्रेरित होता है । आप जानते हैं कि तुल्यता सम्बन्ध समुच्चय का तुल्यता वर्गो में विभाजन करता है जहाँ दो तुल्यता वर्ग समान अथवा पूर्णतः अंसयुक्त हैं ।

अभाज्य क्षेत्र वे क्षेत्र होते हैं जिनका कोई उचित उपक्षेत्र नहीं होता है । अभाज्य क्षेत्र द्वारा प्रदर्शित गुणधर्मो को प्रमेयों के रूप में प्रतिपादित किया गया है ।

10.6 शब्दावली

अन्तःस्थापन	Embedding
पूर्णांकीय प्रान्त	Integral domain
विभाग क्षेत्र या भागफल क्षेत्र	Field of quotients

एकैकी समाकारिता	Monomorphism
अभाज्य क्षेत्र	Prime field
उचित उपक्षेत्र	Proper subfield
तुल्यता सम्बन्ध	Equivalence relation

10.7 अभ्यास प्रश्न

1. विभाग क्षेत्र को परिभाषित कीजिये ।
2. सिद्ध कीजिये कि पूर्णांकीय प्रान्त $(Z_5, +_5, \times_5)$ स्वयं अपना विभाग क्षेत्र है ।
3. सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक पूर्णांकीय प्रान्त का विभाग क्षेत्र होता है ।

इकाई 11 :गुणजावलियाँ एवं विभाग वलय (Ideal and Quotient Ring)

इकाई की रूपरेखा

11.0 द्देश्य

11.1 प्रस्तावना

11.2 गुणजावलियाँ

11.2.1 गुणजावली एवं गुणधर्म

11.2.2 मुख्य गुणजावली

11.3 विभाग वलय

11.4 अभाज्य गुणजावली

11.5 उच्चिष्ठ गुणजावली

11.6 सारांश

11.7 शब्दावली

11.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

11.9 अभ्यास प्रश्न

11.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन से आप

1. गुणजावली की अवधारणा, उनके प्रकार एवं गुणधर्मों से परिचित होंगे ।
2. पूर्व इकाई में वर्णित खण्ड समूह (Quotient group) जैसी बीजीय संरचना "खण्ड वलय" (Quotient ring) से परिचित होंगे एवं इनके गुणधर्मों को जानेंगे ।

11.1 प्रस्तावना

इस इकाई की विषय-वस्तु का आधार गुणजावली की अवधारणा है । किसी वलय की गुणजावली वस्तुतः " किसी समूह के विशिष्ट उपसमूह" की अवधारणा से कुछ साम्यता रखती है । वस्तुतः किसी वलय का उपवलय कतिपय गुणधर्मों का पालन करने पर गुणजावली कहलाता है। गुणजावली उपवलय तो होती है परन्तु इसमें उपवलय की तुलना में कुछ अन्य प्रतिबन्ध भी होते हैं।

11.2 गुणजावली

गुणजावली को परिभाषित करने से पूर्व वाम गुणजावली एव दक्षिण गुणजावली भी समझना आवश्यक है । वाम गुणजावली : माना I, वलय R का अरिक्त उपसमुच्चय है तो I, वलय R की वाम गुणजावली कहलाता है यदि -

(i) I, R में परिभाषित योग संक्रिया हेतु R का उपसमूह है ।

तथा (ii) $r \cdot a \in I, \quad \forall \; a \in I, \; r \in R$

दक्षिण गुणजावली : वलय Rका अरिक्त उपसमुच्चय I, R की दक्षिण कहलाती है यदि -

(i) I, R में परिभाषित योग संक्रिया हेतु R का उपसमूह है ।

तथा (ii) $a \cdot r \in I, \quad \forall \ a \in I, \ r \in R$

11.2.1 गुणजावली : वलय R का अरिक्त उपसमुच्चय I, R की गुणजावली है यदि -

(i) I, R में परिभाषित योग संक्रिया हेतु R का उपसमूह है ।

तथा (ii) $r \cdot a \in I, a \cdot r \in R; \quad \forall \ a \in I, \ r \in R$

टिप्पणी :

1. परिभाषा से स्पष्ट है कि R यदि क्रम विनिमेय वलय (अर्थात $x \cdot y = y \cdot x \quad \forall \ x, \ y \in R$) है तो

$$r \cdot a = a \cdot r$$

अर्थात क्रमविनिमेय वलय की वाम एवं दक्षिण गुणजावली समान होती हैं

2. बहुधा गुणजावली को द्विपक्षीय गुणजावली भी कहा जाता है ।
3. प्रत्येक वलय R की दो गुणजावली सर्वदा विद्यमान होती हैं जिन्हें विषम कहते हैं । ये विषम गुणजावली है -

वलय R स्वयं तथा शून्य गुणजावली {0}।

इन दो विषम गुणजावलियो के अतिरिक्त वलय R की अन्य गुणजावली को उचित गुणजावली कहते हैं ।

सरल वलय : वलय R को सरल वलय कहते हैं यदि वलय R की कोई भी गुणजावली विद्यमान नहीं हो। अर्थात् वलय, सरल वलय होगा यदि उसकी समस्त गुणजावली विषम हों ।

उदाहरणार्थ : $(Z_5, +_5, \times_5)$ सरल वलय है ।

उदाहरण 1 : सिद्ध कीजिये कि 2Z, वलय $(Z, +, \times)$ की गुणजावली है । जहाँ Z, पूर्णांकों का समुच्चय है

हल : (2Z,+),(Z,+) का उपसमूह है तथा

प्रत्येक $a \in 2Z, \ r \in Z$ के लिये

$a \cdot r \in 2Z$ एवं $r \cdot a \in 2Z$

उदाहरणार्थ : a = 2 एवं r = - 3 लेते हैं तो

$$2 \cdot (-3) = -6 \in 2Z, \quad (-3) \cdot 2 = -6 \in 2Z$$

टिप्पणी : $2Z = (0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...)$

उदाहरण 2. क्या वलय $(Z_5, +_5, \times_5)$ की उचित गुणजावली विद्यमान है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिये ।

हल : वलय $(Z_5, +_5, \times_5)$ में $(Z_5, +_5)$ का कोई उचित उपसमूह $(I, +)$ विद्यमान नहीं है

फलत: दिये गये वलय की उचित गुणजावली विद्यमान नहीं है ।

उदाहरण 3 : क्या पूर्णांकों का समुच्चय Z, वलय $(Q, +, \times)$ की गुणजावली है?

हल : Q = परिमेय संख्याओं का समुच्चय

Z = पूर्णांकों का समुच्चय

अतएव $Z \subset Q.$

$(Z,+)$ समूह है अतएव $(Z,+)$ समूह $(Q,+)$ का उपसमूह है ।

परन्तु Z,Q की गुणजावली नहीं है क्योंकि प्रत्येक $a \in Z$ के लिये $r \in Q$ का अस्तित्व इस प्रकार नहीं होता है कि

$$a \cdot r \in Z, \quad r \cdot a \in Z$$

उदाहरणार्थ : $5 \in Z$ एवं $\frac{3}{7} \in Q$

परन्तु $5 \times \frac{3}{7} \notin Z$ एवं $\frac{3}{7} \times 5 \notin Z$

उदाहरण 4 : परीक्षण कीजिये कि क्या समुच्चय

$$S = \left\{ A \middle| A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ n & 0 \end{bmatrix}; m, \quad n \in Z \right\}$$

वलय $$R = \left\{ B \middle| B = \begin{bmatrix} m & p \\ n & q \end{bmatrix}; m, n, p, q \in Z \right\}$$

की गुणजावली है?

हल : माना $A_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ n_1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ n_2 & 0 \end{bmatrix} \in S$

जहां $m_1, n_1, m_2, n_2 \in Z$

अब

$$A_1 - A_2 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ n_1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ n_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_1 - m_2 & 0 \\ n_1 - n_2 & 0 \end{bmatrix} \in S \qquad \left[\because m_1 - m_2 \in Z, \quad n_1 - n_2 \in Z \right]$$

पुन: माना $r = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in R$ स्वेच्छ अवयव है जहां $a, b, c, d \in Z$

तब

$$A_1 r = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ n_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 a & m_1 b \\ n_1 a & n_2 b \end{bmatrix} \notin S$$

पुनः

$$rA_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} am_1 + bn_1 & 0 \\ cm_1 + dn_1 & 0 \end{bmatrix} \in S$$

अतएव हमने पाया कि

$$A_1 - A_2 \in S, rA_1 \in S \forall A_1, A_2 \in S, r \in R$$

$\Rightarrow S, R$ की वाम गुणजावली है परन्तु S,R, ने की दक्षिण गुणजावली नही है क्योंकि $A_1 r \notin S$

उदाहरण 5 : माना x, वलय Rका कोई नियत अवयव है तब समुच्चय

$A = \{a \in R | ax = 0\}$ R की वाम गुणजावली है ।

हल : स्पष्ट है कि $A \subset R$

माना $a_1, a_2 \in A$ तब A की परिभाषा से,

$$a_1 x = 0, a_2 x = 0$$

$$\Rightarrow a_1 x - a_2 x = 0$$

या $$(a_1 - a_2) x = 0$$

$$\Rightarrow a_1 - a_2 \in A \quad .....(1)$$

पुन: माना, $r \in R$ तब $ra_1 \in R$

तब पर $(ra_1) x$ विचारते हैं

$$(ra_1) x = r(a_1 x)$$

$$= r0$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow ra_1 \in A$$ (A की परिभाषा से) .....(2)

(1), (2) से

$\Rightarrow A, R$ की गुणजावली है

गुणजावलियों के गुणधर्म :

गुणजावलियाँ कतिपय गुणधर्मों का पालन करती है। जिन्हें निम्नलिखित प्रमेयों से रेखांकित किया गया है। प्रमेयों की सिद्धि की क्रियाविधि आपके लिये तभी सहज होगी जबकि आप प्रत्येक पद में अन्तर्निहित प्रक्रिया को समझें ।

प्रमेय 1 : वलय R की किन्हीं भी दो गुणजावलियों का उभयनिष्ठ भी वलय R की गुणजावली होता है ।

प्रमाण : माना I_1 तथा I_2 स्वेच्छ वलय R की स्वेच्छ गुणजावली हैं ।

$\Rightarrow (I_1,+,)$, समूह $(R,+)$ का उपसमूह है ।

$\Rightarrow (I_2,+,)$, समूह $(R,+)$ का उपसमूह है ।

$\Rightarrow (I_1 \cap I_2,+)$, समूह $(R,+)$ का उपसमूह है ।

क्योंकि दो उपसमूहों का उभयनिष्ठ भी उपसमूह होता है ।

माना $a \in I_1 \cap I_2$ का स्वेच्छ अवयव है तथा $r \in R$ का कोई स्वेच्छ अवयव है

अब

$$a \in I_1 \cap I_2 \Rightarrow a \in I_1 \text{ एवं } a \in I_2 \qquad .....(1)$$

$$r \in R \qquad ..... (2)$$

अब

$$a \in I_1, r \in R \Rightarrow a.r \in I_1 \text{ एवं } r.a \in I_1 \qquad ..... (1)$$

$$a \in I_2, r \in R \Rightarrow a.r \in I_2 \text{ एवं } r.a \in I_2 \qquad ..... (2)$$

$[\because I_1, I_1, R$ की गुणजावली हैं]

(1), (2) से

$a.r \in I_1 \cap I_2, r.a \in I_1 \cap I_2 \forall a \in I_1 \cap I_2, r \in R$

$\Rightarrow I_1 \cap I_2, R$ की गुणजावली है ।

उदाहरण : $I_1 = 2Z, I_1 = 4Z$ वलय $(Z,+,\times)$ की गुणजावलियाँ है ।

सिद्ध कीजिये कि $I_1 \cap I_2$ भी $(Z,+,\times)$ की गुणजावली है ।

हल :

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$$

$$I_1 = 2Z = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\}$$

$$I_2 = 4Z = \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, ...\}$$

$$\Rightarrow I_1 \cap I_2 = \{\pm 4, \pm 8, \pm 12, ...\}$$

$$= 4Z$$

जोकि $(Z,+,\times)$ की गुणजावली है ।

प्रमेय 2 : माना I_1, I_2, वलय R की गुणजावलियाँ है तो

$$I_1, I_2 = \{a_1 + a_2 | a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$$

भी R की गुणजावली होती है जहाँ I_1, I_2 दोनों में समाविष्ट होंगे ।

प्रमाण : माना $a = a_1 + a_2; b = b_1 + b_2, I_1 + I_2$ के स्वेच्छ अवयव है जहाँ स्पष्टत: $a_1, b_1 \in I_1$ तथा $a_2, b_2 \in I_2$ अब $I_1, I_2 R$ की गुणजावलियाँ है अत: $I_1, I_2 R$ के उपसमूह है

फलत: $a_1, b_1 \in I_1, a_2, b_2 \in I_2$ सभी के लिये

$a_1 - b_1 \in I_1$ तथा $a_2 - b_2 \in I_2$

$I_1 + I_2$ की R गुणजावली सिद्ध करने के लिये दिखायेंगे कि

(i) $I_1 + I_2, (R, +)$ का उपसमूह है

तथा (ii)प्रत्येक $x \in I_1 + I_2, r \in R$ के लिये

$$x.a \in I_1 + I_2, a.x \in I_1 + I_2$$

अब, माना

$$x = x_1 + x_2 \in I_1 + I_2$$

प्रमेय 3 : किसी भी क्षेत्र की उचित गुणजावली विद्यमान नहीं होती है ।

प्रमाण : माना S, क्षेत्र F की कोई स्वेच्छ गुणजावली है ।

यदि S = {0} तो प्रमेय स्वत: सिद्ध है ।

माना $S \neq \{0\}$ तथा a, S का कोई स्वेच्छ अशून्य अवयव है ।

अब

$$a \in S, S \subset F \Rightarrow a \in F$$

$$\Rightarrow a^{-1} \in F \qquad [\because a \neq 0 \text{ अतः } \forall a \in F; a^{-1} \in F]$$

अब S गुणजावली है इसलिये

$$a \in S, a^{-1} \subset F \Rightarrow aa^{-1} \in S$$

$$\Rightarrow e \in S$$

जहाँ e, F का इकाई अवयव है तब,

$$b \in F, e \in S \Rightarrow eb \in S \text{ या } b \in S$$

$b \in S$ का अर्थ है कि F का प्रत्येक अवयव b, S का अवयव है अर्थात्

$$F \subseteq S \qquad .....(1)$$

परन्तु

$$S \subseteq F \qquad .....(2)$$

समीकरण (1) व (2) से

$$\Rightarrow S = F$$

अत: F की दो गुणजावलियाँ F एवं {0} ही हैं

फलत: F की कोई उचित गुणजावली नहीं है ।

प्रमेय 4 : यदि I इकाई सहित वलय R की गुणजावली है तथा $e \in I$ तब I = R, जहाँ e, R का इकाई अवयव है ।

प्रमाण : माना $a \in R$ तब

$$a \in R, e \in I \Rightarrow ae = a \in I \quad \text{[I की परिभाषा से]}$$

$$\Rightarrow R \subseteq I \qquad .....(1)$$

चूंकि I, R की गुणजावली है तब

$$I \subset R \qquad .....(2)$$

(1), (2) से

I = R

प्रमेय 5 : माना I, वलय R की गुणजावली इस प्रकार है कि R का कुक्रमणीय अवयव a,I में विद्यमान है तो

I = R

प्रमाण : a, वलय R का युक्तमणीय अवयव है तथा $a \in I$

$$\Rightarrow a^{-1} \in R$$

फलत: $a^{-1} \in R, a \in I \Rightarrow a^{-1}a \in I$

या $\qquad e \in I$

अत: प्रमेय 4 से

I = R

प्रमेय 6 : माना R क्रमविनिमेय वलय है तथा a,R का स्वेच्छ अवयव है, तब समुच्चय $R_a = \{ra | r \in R\} R$ की गुणजावली है ।

प्रमाण : स्पष्ट है कि

$$R_a \subset R \qquad .....(1)$$

माना $x, y \in R_a$ के स्वेच्छ अवयव है

R_a को R की गुणजावली सिद्ध करने हेतु हम दिखायेंगे कि

(i) $x - y \in R_a; \forall x, y \in R_a$

(ii) $rx \in R_a, x \in R_a; \forall x \in R_a, r \in R$

अब $\because x, y \in R_a$ अत: R_a की परिभाषानुसार

$r_1, r_2 \in R$ इस प्रकार विद्यमान होंगे कि

$$x = r_1 a, y = r_2 a$$

पुन:

$$r_1, r_2 \in R \Rightarrow r_1 - r_2 \in R \qquad [\because \text{ R वलय है }]$$

$$\Rightarrow (r_1 - r_2).a \in R_a \qquad [R_a \text{ परिभाषा से}]$$

$$\Rightarrow r_1 a - r_2 a \in R_a \qquad [\text{वलय ने में बंटनशीलता से}]$$

$$\Rightarrow x - y \in R_a \qquad [\because x = r_1 a, y = r_2 a]$$

पुन: $r \in R, x \in R_a$ तब $r_3 \in R$ का अस्तित्व इस प्रकार होगा कि

$$x = r_3 a$$

अब

$$r \in R, x \in R_a \Rightarrow rx = r(r_3 a) = (rr_3) a \in R_a$$

$$\Rightarrow rx \in R_a$$

पुन: $R_a \subset R$ एवं R क्रमविनिमेय है । फलत: $xr \in R_a$

अतएव हमने अभीष्ट प्रतिबंधो (i), (ii) की सिद्धि की है । फलत: R_a, R की है ।

प्रमेय 7 : इकाई सहित क्रमविनिमेय वलय R क्षेत्र होता है यदि और केवल R सरल वलय है ।

प्रमाण : माना क्रमविनिमेय इकाई सहित वलय R की कोई उचित गुणजावली है । R को क्षेत्र सिद्ध करने हेतु हमें दिखाना पर्याप्त है कि R के प्रत्येक अशून्य अवयव a का गुणनात्मक प्रतिलोम a^{-1}, R में है ।

माना $0 \neq a \in R$ तब प्रमेय 6 से

$R_a = \{ra | r \in R\} R$ की गुणजावली है ।

चूंकि R की कोई उचित गुणजावली विद्यमान नहीं है

अत: $R_a = R$ या $R_a = \{0\}$

चूंकि R इकाई सहित वलय है अत: $e \in R,$ जहाँ e, R का इकाई अवयव है |

$e \in R \Rightarrow e.a = a \in R_a$ एवं $a \neq 0$

$\Rightarrow R_a \neq \{0\}$

अब

$\because R_a \neq \{0\} \Rightarrow R_a = R$ [समीकरण (1) से]

$R = R_a$ का अर्थ है कि R के प्रत्येक अवयव को R_a के अवयवों $ra, r \in R$ लिखा जा सकता है।

$\because e \in R \Rightarrow x \in R$ इस प्रकार है कि $xa = e$

$\Rightarrow xa = ax = e$ [$\because$ R क्रमविनिमेय है]

$\Rightarrow x = a^{-1} \in R$

अत: R के प्रत्येक अवयव का गुणनात्मक प्रतिलोम R में है ।

फलत: R क्षेत्र है ।

विलोमत: माना क्षेत्र R है अत: आगामी प्रमेय 8 से R एक सरल वलय है ।

प्रमेय 8 : प्रत्येक क्षेत्र सरल वलय होता है अर्थात् क्षेत्र की कोई भी उचित गुणजावली नहीं होती है।

प्रमाण : माना F क्षेत्र है और I, F की अशून्य गुणजावली है अर्थात् $I \neq \{0\}, I \subset F$

माना $0 \neq a, I$ का स्वेच्छ अवयव है ।

$\because I \subset F$ एवं $a \in I$ अतः $a \in F$ फलत: $a^{-1} \in F$

[$\because$ क्षेत्र के प्रत्येक अशून्य अवयव का गुणनात्मक प्रतिलोम क्षेत्र में होता है]

अब

$a \in I, a^{-1} \in F \Rightarrow aa^{-1} \in I$ [I की परिभाषा से]

$\Rightarrow e \in I$ [जहाँ e, इकाई अवयव है]

अतएव $e \in I, x \in F$ के लिये $ex \in I \forall x \in F$

या $x \in I \Rightarrow F \subset I$ $[\because x \in F]$

अतएव,

$I \subset F, F \subset I \Rightarrow I = F$

अतएव,

$$I \neq \{0\} \text{ एवं } I = F$$

फलत: F की कोई उचित गुणजावली नहीं है अर्थात् F सरल वलय है ।

प्रमेय 9 : वलय R से R ′ में परिभाषित वलय समाकारिता की अष्टि K, वलय R की गुणजावली होती है ।

प्रमाण : माना $f : R \to R'$ वलय समाकारिता है

अर्थात्

$$f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$$
$$f(a.b) = f(a) \odot f(b)$$

जहाँ $+, \oplus$ तथा $\cdot, \odot$ क्रमश: R, R ′ की योगिक तथा गुणन संक्रियायें हैं ।

माना 0 एवं 0 ′ R तथा R ′ के योगिक तत्समक हैं ।

अब K, f की अष्टि है अत: $K = \{x \in R \mid f(x) = 0'\}$

$\because f(0) = 0' \Rightarrow 0 \in K$ अतः $K \neq \phi$

माना $a, b \in K$

तब

$$f(a) = 0', f(b) = 0' \qquad \text{.....(1)}$$

पुन

$$\begin{aligned} f(a-b) &= f[a+(-b)] \\ &= f(a) \oplus f(-b) \\ &= f(a) - f(b) \\ &= 0' - 0' \\ &= 0' \end{aligned}$$

अतएव

$$f(a-b) = 0' \Rightarrow a - b \in K \qquad \text{...(2)}$$

पुन: माना r,R का कोई स्वेच्छ अवयव है ।

तब $\forall a \in K$ के लिये,

$$f(a.r) = f(a) \odot f(r) = 0' \odot f(r) = 0'$$

एवं $$f(r.a) = f(r) \odot f(a) = f(r) \odot 0' = 0'$$

$$\Rightarrow a.r \in K, r.a \in K \qquad \text{...(3)}$$

(2) व (3) से हम पाते हैं कि

$$\forall a, b \in K, r \in R \Rightarrow a - b \in K, ar \in K, ra \in K$$

फलत: K, R की गुणजावली है ।

प्रमेय 10 : माना I_1 एवं I_2, वलय R की गुणजावलियाँ हैं । तब

$$I_1 + I_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in I, x_2 \in I_2\}$$

वलय R की गुणजावली होती है $I_1 + I_2$ तथा I_1 एवं I_2 दोनों समाहित होते है ।

प्रमाण : माना $a_1 = x_1 + x_2 \in I_2 + I_2, , b_1 = y_1 + y_2 \in I_1 + I_2$

$$\Rightarrow x_1 y_1 \in I_1 \text{ एवं } x_2 y_2 \in I_2$$

चूंकि I_1, I_2 वलय R की गुणजावली हैं अत:

$$x_1 - y_1 \in I_1, x_2 - y_2 \in I_2; x_1, y_1 \in I_1, x_2, y_2 \in I_2$$

फलत:

$$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) \in I_1 + I_2 \forall x_1 - y_1 \in I_1, x_2 - y_2 \in I_2$$

या

$$(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \in I_1 + I_2$$

या

$$a_1 - a_2 \in I_1 + I_2 \forall a_1, a_2 \in I_1 + I_2 \qquad .....(1)$$

पुनः माना $r \in R$ तब

$$r \in R, x_1 + x_2 \in I_1 + I_2$$

$$\Rightarrow r \in R, x_1 \in I_1, x_2 \in I_2$$

$$\Rightarrow x_1 r \in I_1, r x_1 \in I_1 \qquad [\because I_1 \text{ गुणजावली है }]$$

एवं $$x_2 r \in I_2, r x_2 \in I_2 \qquad [\because I_2 \text{ गुणजावली है }]$$

$$\Rightarrow x_1 r + x_2 r \in I_1 + I_2 \text{ एवं } r x_1 + r x_2 \in I_1 + I_2$$

या $$(x_1 + x_2) r \in I_1 + I_2 \text{ एवं } r(x_1 + x_2) \in I_1 + I_2$$

या $$a_1 r \in I_1 + I_2 \text{ एवं } r a_1 \in I_1 + I_2 \qquad .....(2)$$

(1) व (2) से स्पष्ट है कि $I_1 + I_2, R$ की गुणजावली है

सिद्ध करना है कि $I_1 \subset I_1 + I_2, I_2 \subset I_1 + I_2$

$$\because x_1 \in I_1 \Rightarrow x_1 + 0 \in I_1 + I_2 \qquad [\text{चूंकि } 0 \in I_2 \ ]$$

$$\Rightarrow x_1 \in I_1 + I_2$$

परन्तु

$$x_1 \in I_1 \Rightarrow I_1 \subset I_1 + I_2$$

इसी प्रकार,

$$I_2 \subset I_1 + I_2$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न -1

1. निम्नलिखित में वलय $(Z, +, \cdot)$ की गुणजावली है -

   (a) $(4Z, +, \cdot)$ (b) $(5Z, +, \cdot)$

   (c) $(7Z, +, \cdot)$ (d) उपरोक्त सभी

2. यदि $I_1 = (2Z, +, \cdot), I_2 = (Z, +, \cdot)$ तब

   (a) $I = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, ...\}, (Z, +, \cdot)$ की गुणजावली है क्योंकि $I = I_1 \cup I_2$

(b) $I=\{0,\pm3,\pm6,\pm9,.....\},(Z,+,\cdot)$ की गुणजावली नहीं है

(c) $I=\{0,\pm3,\pm6,\pm9,.....\},(Z,+,\cdot)$ की गुणजावली है क्योंकि $I=I_1\cap I_2$

3. निम्नलिखित में सत्य है -

(a) $(Z,+,\cdot),(Q,+,\cdot)$ की गुणजावली है परन्तु उपवलय नहीं है

(b) $(Z,+,\cdot),(Q,+,\cdot)$ की गुणजावली नहीं है

(c) $(Z,+,\cdot),(Q,+,\cdot)$ की उपवलय नहीं है परन्तु गुणजावली है ।

(d) उपरोक्त में से कोई नहीं

4. क्षेत्र $(Q,+,\cdot)$ के लिये निम्नलिखित में सत्य है -

(a) यह $(R,+,\cdot)$ का उपवलय नहीं है

(b) यह $(Z,+,\cdot)$ का उपवलय है

(c) $(Z,+,\cdot),(Q,+,\cdot)$ की गुणजावली है

(d) $(Z,+,\cdot),(Q,+,\cdot)$ की गुणजावली नही है ।

5. क्षेत्र $(Q,+,\cdot)$ के लिये निम्नलिखित में सत्य है -

(a) यह सरल वलय नहीं है

(b) यह सरल वलय है

(c) यह सरल वलय हो सकता है अथवा नहीं हो सकता है

(d) उपरोक्त में से कोई नहीं

11.2.2 मुख्य गुणजावली

माना A, वलय R का दिया गया अरिक्त उपसमुच्चय है । तब R की गुणजावली I,A को समाहित करने वाली लघुतम गुणजावली (Smallest ideal) होती है यदि

(a) $A\subset I$ एवं

(b) $A\subset S, S$ गुणजावली है $\Rightarrow I\subset S$

टिप्पणी :- A को समाहित करने वाली R की लघुत्तम गुणजावली को A से जनित गुणजावली कहते हैं तथा इसे [A] से संकेतित करते हैं ।

मुख्य गुणजावली : यदि कोई गुणजावली I, एकल अवयव के समुच्चय (Singleton set) माना $A=\{a\}$ से जनित होती है तो उसे मुख्य गुणजावली कहते हैं ।

अतएव किसी वलय R की गुणजावली, R की मुख्य गुणजावली कहलाती है यदि R के एक अवयव से जनित होती है ।

निष्कर्षत : हम कह सकते हैं कि a से जनित, R की मुख्य गुणजावली a को समाहित करने वाली लघुतम गुणजावली होती है या I, a को समाहित करने वाली R की सभी गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ होती है ।

गौरतलब है कि प्रत्येक वलय R की कम से कम एक मुख्य गुणजावली $[0]=\{0\}$ अवश्य होती हैं । यदि R इकाई सहित वलय है तब वलय R की कम से कम दो मुख्य गुणजावली $[0]$ एवं $[e]$ होती हैं

क्योंकि $re = r \forall e \in R$

अत: $[e]=R$

मुख्य गुणजावली वलय एवं प्रान्त

एक वलय R मुख्य गुणजावली वलय कहलाता है यदि इसकी प्रत्येक गुणजावली, मुख्य गुणजावली होती है । यदि ऐसा वलय, पूर्णांकीय प्रान्त भी है तो उसे मुख्य गुणजावली प्रान्त कहते हैं ।

उदाहरण 1 : $(2Z,+,\cdot),(Z,+,\cdot)$ की मुख्य गुणजावली है क्योंकि

$$2Z=\{0,\pm 2,\pm 4,\pm 6,.....\}=[2]$$

वस्तुत: वलय $(Z,+,\cdot)$ का प्रत्येक उपवलय मुख्य गुणजावली होता है । फलत: $(Z,+,\cdot)$ मुख्य गुणजावली वलय होता है जिसे आगामी प्रमेय - 4 के रूप में देखा जा सकता है ।

प्रमेय 1 : माना R क्रमविनिमेय इकाई सहित वलय है एवं $a \in R$ तब समुच्चय $I=\{ra|r \in R\},a$ से जनित मुख्य गुणजावली होती है अर्थात् $I=[a]=Ra$

प्रमाण : R क्रम विनिमेय वलय है । माना $e \in R, R$ का इकाई अवयव है ।

तब $a = ae \in I \forall a \in R$

पूर्व अनुच्छेद के प्रमेय 6 से स्पष्ट है कि I,R की गुणजावली भी है ।

माना $A, a \in R$ को समाहित करने वाली R की कोई अन्य गुणजावली है । तब

$$a \in A, ra \in A \forall r \in A$$

$$\Rightarrow I \subset R$$

अत: I, a को समाहित करने वाली R की लघुत्तम गुणजावली है

अतएव

$$I=[a]=Ra$$

प्रमेय 2 : वलय R की गुणजावलियों I_1, I_2 के लिये, $I_1+I_2, I_1 \cup I_2$ से जनित गुणजावली होती है अर्थात् $I_1+I_2=[I_1 \cup I_2]$

प्रमाण : पूर्व वर्णित प्रमेय से I_1+I_2, R की गुणजावली होती है जहाँ $I_1 \subset I_1+I_2$ एवं $I_2 \subset I_1+I_2$

फलत:

$$I_1 \cup I_2 \subset I_1+I_2$$

माना A,R की गुणजावली इस प्रकार है कि $I_1 \cup I_2 \subset A$

यदि $a \in I_1+I_2$ तब किन्हीं $x \in I_1, y \in I_2$ के लिये $a = x+y$

अब,

$$x \in I_1 \cup I_2 y \in I_1 \cup I_2 \Rightarrow x+yI_1 \cup I_2 \subset A$$

$$\Rightarrow x+y \in A$$

$$\Rightarrow \in A$$

$$\Rightarrow I_1 + I_2 \subset A \qquad [\because a \in I_1 + I_2]$$

अतएव लघुत्तम गुणजावली की परिभाषा से हम पाते हैं कि

$$I_1 + I_2 = [I_1 \cup I_2]$$

प्रमेय 3 : माना R, इकाई सहित क्रम विनिमेय वलय है । तब $x, y \in R$ के लिये समुच्चय

$$I = \{ax + by | a, b \in R\}$$

x एवं y को समाहित करने वाली लघुत्तम गुणजावली होती है ।

प्रमाण : 1. x, y **I में समाहित है :**

माना e, वलय R का इकाई अवयव है । तब

$$e \in R, 0 \in R \Rightarrow e.x + 0y \in I \qquad [\text{ I की परिभाषा से }]$$

$$\Rightarrow x \in I$$

इसी प्रकार

$$0 \in R, e \in R \Rightarrow 0.x + ey \in I$$

$$\Rightarrow y \in I$$

अतएव $x, y \in I$

2. I, R की गुणजावली है :

माना p, q I के स्वेच्छ अवयव हैं तो I की परिभाषानुसार

$$p = a_1x + b_1y \in I, q = a_2x + b_2y \in I, \text{ जहाँ } a_1a_2, b_1, b_2 \in R$$

अब,

$$p - q = (a_1x + b_1y) - (a_2x + b_2y)$$

$$= (a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y \in I \qquad [\because a_1 - a_2, b_1 - b_2 \in R]$$

अतएव प्रत्येक $p, q \in R$ के लिये

$$p - q \in R \qquad \text{..... (1)}$$

पुन: माना $r \in R$ तब $rp = pr$ [∵ R क्रमविनिमेय है]

अब,

$$rp = r(a_1x + b_1y)$$

$$= (ra_1)x + (rb_1)y \qquad [\text{ वलय R मे बंटनता }]$$

अब चूंकि $ra_1, rb_1 \in R$

अत:

$$(ra_1)x + (rb_1)y \in I$$

$$\Rightarrow rp \in I \forall r \in R, p \in I \qquad \text{.....(2)}$$

(1), (2) से स्पष्ट है कि I वलय R की गुणजावली है ।

3. I, x, y **को समाहित करने वाली लघुत्तम गुणजावली है :**

माना I_1, R की कोई अन्य गुणजावली है जिसमें x,y समाहित हैं । प्रमेय सिद्धि लिये दिखाना होगा कि

$$I \subset I_1$$

अब

$a \in R, x \in I_1 \Rightarrow ax \in I_1$ [$\because I$ गुणजावली है]

$b \in R, y \in I_1 \Rightarrow by \in I_1$

अतएव,

$ax \in I_1, by \in I_1 \Rightarrow ax + by \in I_1$

$$\Rightarrow I \subset I_1$$

फलत: I, y एवं y को समाहित करने वाली लघुत्तम गुणजावली है ।

प्रमेय 4 : पूर्णांकों का वलय $(Z, +, \cdot)$ मुख्य गुणजावली वलय होता है ।

प्रमाण : माना I, Z की गुणजावली है ।

सिद्ध करना है कि I, मुख्य गुणजावली है ।

स्थिति - $I : I = \{0\}$

$I = \{0\} \Rightarrow I = [0]$, अर्थात् I, 0 से जनित मुख्य गुणजावली है ।

स्थिति - $II : I \neq \{0\}$

जब $I \neq \{0\}$ तब I में कम से कम एक अशून्य अवयव, माना a होगा ।

अत:

$0 \neq a \in I \Rightarrow -a \in I$ [$\because (I, +)$ समूह है]

$\because a \neq 0 \Rightarrow a > 0$ अथवा $-a > 0$

माना b, I में न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक है ।

माना $n \in I$, तब विभाजन फलन विधि से पूर्णांक q, r इस प्रकार होंगे कि,

$$n = qb + r, \quad a \leq r < b$$

अब चूंकि I गुणजावली है अत:

$$b \in I, q \in Z$$

$$\Rightarrow \quad bq \in I$$

$$\Rightarrow \quad -bq \in I$$

पुनः

$n \in I, -bq \in I \quad \Rightarrow \quad n - bq \in I$

$\Rightarrow \quad r \in I$ [(1) से]

परन्तु $0 \leq r < b$ एवं b, I में न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक है अत:

$$r = 0$$

फलत:

$$n = qb$$

|

$$\Rightarrow \quad I = \{qb | q \in Z\}$$

पुन: चूंकि Z, इकाई सहित क्रमविनिमेय वलय है अत: अनुच्छेद 11.2.2 के प्रमेय-1 से I मुख्य गुणजावली है । अब चूंकि I, Z की स्वेच्छ गुणजावली है फलत: Z की प्रत्येक गुणजावली, मुख्य गुणजावली है, अत: Z मुख्य गुणजावली वलय है ।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. निम्नलिखित में से वलय $(Z,+,\cdot)$ के लिये सत्य है-
   (a) $(Z,+,\cdot)$ मुख्य गुणजावली वलय है परन्तु क्षेत्र नहीं है
   (b) $(Z,+,\cdot)$ मुख्य गुणजावली वलय नहीं है परन्तु क्षेत्र है
   (c) $(Z,+,\cdot)$ मुख्य गुणजावली वलय एवं क्षेत्र नहीं है
   (d) उपरोक्त में से कोई नही
2. $(Z,+,\cdot)$ के लिये असत्य है
   (a) यह मुख्य गुणजावली प्रान्त है
   (b) यह क्षेत्र नहीं है
   (c) यह वलय है
   (d) उपरोक्त में से कोई नहीं
3. परिभाषित कीजिये
   (a) वाम गुणजावली
   (b) सरल वलय
   (c) मुख्य गुणजावली वलय
   (d) मुख्य गुणजावली प्रान्त

11.3 विभाग वलय

आप पूर्व में विभाग समूह की अवधारणा से परिचित हो चुके हैं । आपको स्मरण है कि किसी समूह G के विशिष्ट उपसमूह H के सापेक्ष G के अवयवों के सहकुलकों Ha (जहाँ $a \in G$) का समुच्चय $\frac{G}{H} = \{Ha | a \in G\}$ सहकुलकों की गुणन संक्रिया Ha Hb = Hab के लिये समूह बनाता है जिसे विभाग समूह कहते हैं । उपरोक्त अवधारणा को वलय के लिये भी विस्तारित किया गया है ।

माना I, वलय ने R गुणजावली है । तब स्पष्टत: I, R का योगिक आबेली उपसमूह होगा । अतएव $a \in R$ के लिये I + a एवं a + I, I के R में क्रमश: दक्षिण एवं वाम सहकूलक होंगे। अब चूंकि $(R,+)$ आबेली समूह होता है अतएव I, R का विशिष्ट उपसमूह होगा

$I + a = a + I \;\; \forall \;\; a \in R$ अब हम समुच्चय

$$\frac{R}{I} = \{I + a | a \in R\} \qquad .....(1)$$

पर विचार करते हैं । ध्यान दीजिये कि $\frac{R}{I}$ के अवयव I के R में सहकुलक हैं ।

माना समुच्चय $\frac{R}{I}$ के लिये योग (+) एवं गुणन (·) निम्न प्रकार परिभाषित है -

$$(I+a)+(I+b)=I+(a+b)$$
$$(I+a)\cdot(I+b)=I+(a\cdot b)$$

$\frac{R}{I}$ उपरोक्त संक्रियाओं के लिये वलय होता है । इसे विभाग वलय कहते हैं ।

प्रमेय 1 : माना I, वलय R की गुणजावली है ।

तब समुच्चय

$$\frac{R}{I}=\{I+a \mid a\in R\}$$

संक्रियाओं

$$(I+a)+(I+b)=I+(a+b)$$
$$(I+a)\cdot(I+b)=I+(a\cdot b)$$

के लिये वलय है

प्रमाण : सर्व प्रथम हम दिखायेंगे कि उपरोक्त योग एवं गुणन सक्रियाये सुपरिभाषित हैं ।

माना $a_1 a_2, b_1, b_2 \in R$ इस प्रकार कि

$$I+a_1=I+a_2 \text{ एवं } I+b_1=I+b_2$$

अब

$$I+a_1=I+a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2\in I+a_1$$

$$I+b_1=I+b_2 \quad \Rightarrow \quad b_2\in I+b_1$$

अतएव $\exists \quad p,q\in I$ इस प्रकार कि

$$a_2=p+a_1, \quad b_2=q+b_1$$

तब

$$a_2+b_2=(p+a_1)+(q+b_1)$$
$$=(p+q)+(a_1+b_1)$$

या

$$(a_2+b_2)-(a_1+b_1)=p+q\in I \qquad [\because p,q\in I]$$

$$\Rightarrow \quad (a_2+b_2)-(a_1+b_1)\in I \qquad .....(1)$$

हम जानते हैं कि

$$I+a=I+b \Leftrightarrow a-b\in I$$

अत: (1) व (2) से

$$I+(a_2+b_2)=I+(a_1+b_1)$$

या $$(I+a_2)+(I+b_2)=(I+a_1)+(I+b_1)$$ [$\frac{R}{I}$ में योग की परिभाषा से]

अतएव हमने देखा कि

$$I+a_1=I+a_2, I+b_1=I+b_2$$

$$\Rightarrow \quad (I+a_2)+(I+b_2)=(I+a_1)+(I+b_1)$$

फलतः $\frac{R}{I}$ में योग संक्रिया सुपरिभाषित है

पुनः हम दिखायेंगे कि $\frac{R}{I}$ मे गुणन सुपरिभाषित है ।

अब,

$$a_2+b_2=(p+a_1)+(q+b_1)$$
$$=pq+pb_1+a_1q+a_1b_1$$

$$\Rightarrow \quad a_2+b_2-a_1+b_1=pq+pb_1+a_1q\in I$$

$$\Rightarrow \quad (I+a_2)+(I+b_2)=(I+a_1)+(I+b_1)$$

अतः गुणन भी $\frac{R}{I}$ में सुपरिभाषित है ।

पुनश्चः, दिये गये योग एवं गुणन $\frac{R}{I}$ में द्विआधारी संक्रियायें हैं ।

क्योंकि, प्रत्येक $I+a, I+b\in\frac{R}{I}$ के लिये -

$$(I+a)+(I+b)=I+(a+b)\in\frac{R}{I}$$

$$(I+a)+(I+b)=I+(a\cdot b)\in\frac{R}{I}$$

अतएव $\left(\frac{R}{I},+,\cdot\right)$ एक बीजीय संरचना है जिसे हम वलय सिद्ध करेंगे

चरण 1 : $\left(\frac{R}{I},+\right)$ आबेली समूह है

(i) **साहचर्यता :** माना $I+a, I+b, I+c\in\frac{R}{I}$ जहाँ $a,b,c\in R$

अब

$$\left[(I+a)+\{(I+b)+(I+c)\}\right]=\left[(I+a)+\{I+(b+c)\}\right]$$
$$=\left[I+(a+b+c)\right]$$

पुनः

$$\left[(I+a)+\{(I+b)+(I+c)\}\right]=\left[I+(a+b)+\{(I+c)\}\right]$$
$$=I+(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \quad (I+a)+\{(I+b)+(I+c)\}=\{(I+a)+(I+b)\}+(I+c)$$

$\Rightarrow \quad \frac{R}{I}$ योग के लिये सहचारी है।

(ii) **तत्समक का अस्तित्व :** हम पायेंगे कि $I+0\in\frac{R}{I}$, [जहाँ 0, R का "शून्य" (योज्य तत्समक) है] $\frac{R}{I}$ का योज्य तत्समक है क्योंकि प्रत्येक $I+a\in\frac{R}{I}$ के लिये,

$$(I+a)+(I+0)=I+(a+0)$$
$$=I+a$$

एवं

$$(I+0)+(I+a)=I+(0+a)$$
$$=I+a$$

अतएव, I + 0 अर्थात् $I,\frac{R}{I}$ का योज्य तत्समक है।

(iii) **प्रतिलोम का अस्तित्व :** प्रत्येक $I+a\in\frac{R}{I}$ के लिये $I+(-a)\in\frac{R}{I}$ प्रतिलोम है क्योंकि

$$(I+a)+(I+(-a))=I+(a-a)$$
$$=I+0$$

$$(I+(-a))+(I+a)=I+(-a+a)$$
$$=I+0$$

$\Rightarrow \quad I+(-a), I+a$ का योज्य प्रतिलोम है

अत: $\frac{R}{I}$ योग संक्रिया के $(I+a)+(I+b)=I+(a+b)$ लिये समूह है । यह आबेली समूह भी है क्योंकि

$$(I+a)+(I+b)=I+(a+b)$$
$$=I+(b+a) \quad [\because (R,+) \text{ आबेली है } \Rightarrow a+b=b+a \ \forall \ a,b\in R]$$

चरण 2: $\left(\frac{R}{I},\cdot\right)$ **सेमी समूह है :**

$I+a, I+b, I+c\in\frac{R}{I}$ के लिए

$$(I+a)\cdot[(I+b)\cdot(I+c)]=(I+a)\cdot[I+(b\cdot c)]$$

$$= I + (abc)$$

पुनश्च

$$\left[(I+a)\cdot(I+b)\right]\cdot(I+c) = \left[I+(ab)\right]\cdot(I+c)$$
$$= I + (abc)$$

अतएव

$$(I+a)\cdot\left[(I+b)\cdot(I+c)\right] = \left[(I+a)\cdot(I+b)\right]\cdot\left[I+c\right]$$

$\Rightarrow \left(\frac{R}{I},\cdot\right)$ सेमी समूह है।

चरण 3: बंटनशीलता :

$I+a, I+b, I+c \in \frac{R}{I}$ के लिए

$$\left[(I+a)+(I+b)\right]\cdot(I+c) = \left[I+(a+b)\right]\cdot(I+c)$$
$$= \left[I+(a+b)\cdot c\right]$$
$$= I + (a\cdot c + b\cdot c)$$
$$= (I+ac)+(I+bc)$$
$$= (I+a)+(I+c)+(I+b)+(I+c)$$

इसी प्रकार

$$(I+a)\left[(I+b)+(I+c)\right] = (I+a)(I+b)+(I+a)\cdot(I+c)$$

फलतः $\frac{R}{I}$ परिभाषित संक्रियाओं के लिए वलय है।

यह वलय $\frac{R}{I}$, विभाग वलय या खण्ड वलय कहलाता है। अतएव ,

विभाग वलय :

माना R कोई वलय है तथा I, R की गुंणजावली है।

समुच्चय

$$\frac{R}{I} = \left\{I + a \middle| a \in R\right\}$$

निम्न प्रकार परिभाषित योग एवं गुणन संक्रियाओं

$$\left.\begin{aligned}(I+a)+(I+b) &= I+(a+b)\\ (I+a)\cdot(I+b) &= I+(a\cdot b)\end{aligned}\right\} \quad \forall \quad I+a, I+b \in \frac{R}{I}$$

के लिये वलय होता है जिसे गुणजावली I के सापेक्ष वलय R का खण्ड वलय या विभाग वलय कहते हैं । बहुधा इसे रेसीड्यू क्लास मॉड्यूलो I वलय भी कहते हैं । वलय $\frac{R}{I}$ के अवयव I + a को $\bar{a}$ से संकेतित किया जाता है ।

चूंकि I + 0 = I अत: $\bar{0} = I$, जो कि $\frac{R}{I}$ का शून्य होता है ।

पुनः,

$$\begin{aligned}\overline{x+y} &= I + (x+y)\\ &= (I+x)+(I+y)\\ &= \bar{x}+\bar{y}\end{aligned}$$

एवं

$$\begin{aligned}\overline{xy} &= I + (xy)\\ &= (I+x)+(I+y)\\ &= \bar{x}\cdot\bar{y}\end{aligned}$$

उदाहरण 1 : माना $I = \{2n | n \in Z\}$ तब सिद्ध कीजिये कि $\frac{Z}{I}$ विभाग वलय है

हल : $I = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\}$, वलय $(Z, +, \cdot)$ की गुणजावली है। $\frac{Z}{I}$ के अवयव समशेष कक्षायें (residue classes) $I, I+1$ हैं जिन्हे, $\bar{0}, \bar{1}$ से संकेतित किया गया हैं । अब निम्न संक्रिया सरणियो से आप सरलता से $\frac{Z}{I}$ वलय सिद्ध कर सकते हैं '

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

प्रमेय 2 : यदि $\frac{R}{I}$ खण्ड वलय है तो

(i) R क्रम विनिमेय है $\Rightarrow \frac{R}{I}$ क्रम विनिमेय है

(ii) R में इकाई अवयव है $\Rightarrow \frac{R}{I}$ में इकाई अवयव है

प्रमाण : (i) R क्रमविनिमेय है तब प्रत्येक $a, b \in R$ के लिये

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad .....(1)$$

अब

$$\frac{R}{I} = \{I + a | a \in R\}$$

तब प्रत्येक $I+a, I+b \in \frac{R}{I}$ के लिये

$$(I+a)(I+b) = I + a \cdot b$$

$$= I + b \cdot a \qquad \text{[समीकरण (1) से]}$$

$$= (I+b)\cdot(I+a)$$

$$\Rightarrow \quad (I+a)\cdot(I+b) = (I+b)\cdot(I+a)$$

$\Rightarrow \quad \frac{R}{I}$ क्रमविनिमेय है ।

(ii) माना $e \in R$ ने इकाई अवयव (गुणन संक्रिया के लिये ततसमक अवयव) है । तब, $I+e \in \frac{R}{I}$ एवं हम पाते हैं कि

$$(I+e)(I+a) = I + ea$$

$$= I + ae$$

$$= (I+a)(I+e)$$

$$= I + a$$

$\Rightarrow \quad I+e, \frac{R}{I}$ का इकाई अवयव है ।

प्रमेय 3 : प्रत्येक खण्ड वलय $\frac{R}{I}$, वलय R का समाकारी प्रतिबिंब होता है ।

प्रमाण : माना I, वलय R की गुणजावली है ।

तब

$$\frac{R}{I} = \{I + a \mid a \in R\}$$

संक्रियाओ,

$$\left.\begin{aligned} (I+a)+(I+b) &= I+(a+b) \\ (I+a)(I+b) &= I + a \cdot b \end{aligned}\right\} \qquad \text{.....(1)}$$

के लिये (खण्ड) वलय है ।

अब प्रप्तेचित्रण

$$f : R \to \frac{R}{I} \qquad \text{.....(2)}$$

इस प्रकार कि

$$f(a) = I + a \quad \forall \quad a \in R$$

पर विचार करते हैं ।

सिद्ध करना है कि f समाकारिता है अर्थात् $\forall \ a,b \in R$ के लिये

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

एवं

$$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$$

एवं f आच्छादक है

अब,

$$f(a+b) = I + (a+b)$$
$$= (I+a) + (I+b)$$
$$= f(a) + f(b)$$

पुनः

$$f(a \cdot b) = I + (a \cdot b)$$
$$= (I+a) \cdot (I+b)$$
$$= f(a) \cdot f(b)$$

$\Rightarrow \quad f, R$ से $\frac{R}{I}$ में समाकारिता है ।

पुन: हैं की परिभाषा से स्पष्ट है कि $f(R) = \frac{R}{I}$

अंत: $\frac{R}{I}, R$ का समाकारी प्रतिबिंब है ।

वलय समाकारिता का मूलस्त प्रमेय

प्रमेय 4 : वलय R का प्रत्येक क्षमाकारी प्रतिबिंब, R के किसी खण्ड वलय के तुल्याकारी होता है।

प्रमाण : माना समाकारिता f के लिये R', वलय ने का समाकारी प्रतिबिंब है ।

माना K,f की अष्टि है तब K, वलय R की गुणजावली होती है ।

फलत: $\frac{R}{K}, K$ के संगत खण्ड वलय है ।

अब हमें सिद्ध करना है कि $R' \cong \frac{R}{K}$

प्रतिचित्रण $\phi : \frac{R}{K} R'$ जहाँ $\phi(K+a) = f(a) \ \forall \ a \in R$ पर विचार करते हैं ।

ध्यान दीजिये कि प्रत्येक $a \in R$ के लिये $f(a) \in R'$

$\frac{R}{K} \cong R'$ सिद्ध करने के लिये हम दिखायेंगे कि

(i) ϕ एकैकी है (ii) ϕ आच्छादक है (iii) ϕ समाकारिता है

(i) ϕ एकैकी है

माना $K+a, K+b \in \frac{R}{K}$, जहां $a, b \in R$ इस प्रकार है कि

$$\phi(K+a)=\phi(K+b)$$

$$\Rightarrow \quad f(a)=f(b)$$

$$\Rightarrow \quad f(a)-f(b)=f(b)-f(b)$$

$$\Rightarrow \quad f(a-b)=0' \qquad \text{[0', R' का शून्य है]}$$

$$\Rightarrow \quad a-b \in K \qquad \text{[अष्टि K की परिभाषा से]}$$

$$\Rightarrow \quad K+a=K+b$$

$\Rightarrow$ ϕ एकैकी है

(ii) ϕ आच्छादक है

ϕ आच्छादक है क्योंकि प्रत्येक $f(a) \in R'$ के लिये $K+a \in \frac{R}{K}$ विद्यमान है, जहाँ $\phi(K+a)\, f(a)$

(iii) ϕ समाकारिता है

$\forall K+a, K+b \in \frac{R}{K}$ के लिए

$$\phi\left[(K+a)+(K+b)\right]=\phi\left[K+(a+b)\right]$$

$$= f(a+b) \qquad [\phi \text{ की परिभाषा से }]$$

$$= f(a)+f(b) \qquad [\because f \text{ समाकारिता है}]$$

$$=\phi(K+a)+\phi(K+b)$$

अतएव,

$$\phi\left[(K+a)+(K+b)\right]=\phi(K+a)+\phi(K+b)$$

पुनः

$$\phi\left[(K+a)\cdot(K+b)\right]=\phi\left[K+(a\cdot b)\right]$$

$$= f(a\cdot b)$$

$$= f(a)\cdot f(b)$$

$$=\phi(K+a)\cdot\phi(K+b)$$

$$\phi\left[(K+a)\cdot(K+b)\right]=\phi(K+a)\cdot\phi(K+b)$$

अतएव ϕ समाकारिता है । अतएव ϕ तुल्याकारिता है

फलत: $\frac{R}{K}, R'$ के तुल्यकारी है

अर्थात् $\frac{R}{K} \cong R'$

11.4 अभाज्य गुणजावली

क्रमविनिमेय वलय R की गुणजावली I को अभाज्य गुणजावली कहते हैं यदि

$$xy \in I$$
$$\Rightarrow \quad x \in I \text{ या } \Rightarrow \quad y \in I$$

उदाहरणार्थ, वलय $(Z,+,\cdot)$ की गुणजावली $(3Z,+,\cdot)$ अभाज्य गुणजावली है क्योंकि

$3Z = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, ...\}$ के लिए

$xy \in 3Z \quad \Rightarrow \quad 3|xy$ अर्थात 3, xy को विभाजित है।

$\Rightarrow \quad 3|x$ या $3|y$ [$\because$ 3 अभाज्य पूर्णांक है]

$\Rightarrow \quad x \in 3Z$ या $y \in 3Z$

$\Rightarrow \quad (3Z,+,\cdot)$ अभाज्य गुणजावली है

वस्तुत: वलय $(Z,+,\cdot)$ की गुणजावली $(p,+,\cdot)$ जहाँ p अभाज्य संख्या है, $(Z,+,\cdot)$ की अभाज्य गुणजावली होती है । इसके विपरीत यदि p अभाज्य संख्या नहीं हो तो $(p,+,\cdot)$, $(Z,+,\cdot)$ की अभाज्य गुणजावली नहीं होगी ।

उदाहरणार्थ $(6Z,+,\cdot)$ पर विचार करें तो

$$[6] = \{0, \pm 6, \pm 12, ...\}$$
$$4 \cdot 3 = 12 \in [6]$$
$$4 \notin [6], 3 \in [6]$$

परन्तु

प्रमेय 1 : इकाई सहित क्रमविनिमेय वलय R की गुणजावली I अभाज्य गुणजावली होती है यदि और केवल यदि $\frac{R}{I}$ पूर्णांकीय प्रान्त हो ।

प्रमाण : प्रतिबंध आवश्यक है :

माना I, वलय R की अभाज्य गुणजावली है ।

चूंकि R इकाई सहित क्रमविनिमेय वलय है अत: प्रमेय के अनुसार $\frac{R}{I}$ भी इकाई सहित क्रमविनिमेय वलय होगा ।

सिद्ध करना है कि $\frac{R}{I}$ पूर्णांकीय प्रान्त है ।

चूंकि $\frac{R}{I}$ क्रमविनिमेय, इकाई सहित वलय है अत: इसे पूर्णांकीय प्रान्त सिद्ध करने के लिये हमें दिखाना है कि $\frac{R}{I}$ शून्य भाजक रहित है अर्थात् $I+a, I+b \in \frac{R}{I}$ के लिये हम दिखायेंगे कि

$$(I+a)\cdot(I+b)=I \qquad [\because I, \frac{R}{I} \text{ का शून्य है}]$$

है तो $I+a=I$ या $I+b=I$

अब,

$$(I+a)\cdot(I+b)=I$$

$$\Rightarrow \quad I+(a\cdot b)=I \qquad \left[\because (I+a)\cdot(I+b)=I+a\cdot b\right]$$

$$\Rightarrow \quad a\cdot b \in I$$

$$\Rightarrow \quad a \in I \text{ या } b \in I \quad [\because I \text{ अभाज्य गुणजावली है}]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R}{I} \text{ शून्य भाजक रहित है ।}$$

अत: प्रतिबन्ध आवश्यक है ।

प्रतिबन्ध पर्याप्त है :

माना $\frac{R}{I}$ पूर्णांकीय प्रान्त है । अब सिद्ध करना है कि । अभाज्य गुणजावली है । अर्थात् दिखाना है कि

$$ab \in I \Rightarrow a \in I \text{ या } b \in I$$

अब,

$$ab \in I \qquad \Rightarrow I+ab=I$$

$$\Rightarrow (I+a)(I+b)=I \qquad \left[\because I+ab=(I+a)(I+b)\right]$$

$$\Rightarrow I+a=I \text{ या } I+b=I$$

[$\because \frac{R}{I}$ पूर्णांकीय प्रान्त है अत: शून्य भाजक रहित है अत: $(I+a)(I+b)=I \Rightarrow I+a=I$ या $I+b=I$]

$$\Rightarrow \quad a \in I \text{ या } b \in I$$

अतएव हमने पाया है कि $ab \in I \Rightarrow a \in I$ या $b \in I$

$$\Rightarrow \quad I \text{ अभाज्य गुणजावली है}$$

11.5 उच्चिष्ठ गुणजावली

किसी वलय R की गुणजावली M उच्चिष्ठ गुणजावली कहलाती है यदि R में अन्य उचित गुणजावली। इस प्रकार विद्यमान है कि जिसमें M भी पूर्णत: समाहित हो अर्थात् वलय R की गुणजावली M उच्चिष्ठ गुणजावली होगी यदि

(i) $M \subset R$

(ii) I, R की गुणजावली इस प्रकार है कि

$M \subset I \subset R \Rightarrow I = R$ या $I = M$

उदाहरणार्थ, $(7Z,+,\cdot)$ वलय $(Z,+,\cdot)$ की उच्चिष्ठ गुणजावली है क्योंकि गुणजावली $(7Z,+,\cdot)$ को समाहित करने वाली गुणजावली Z स्वयं 7Z ही है । परन्तु $4Z = \{0, \pm 4, \pm 8, ...\}$ उच्चिष्ट गुणजावली नहीं है क्योंकि यह गुणजावली $[2]$ में सन्निहित है और $[2], Z$ में सन्निहित है ।

प्रमेय 1 : वलय $(Z,+,\cdot)$ को गुणजावली I उच्चिष्ठ गुणजावली होती है यदि केवल यदि I किसी अभाज्य पूर्णांक से जनित होता है अर्थात् वलय $(pZ,+,\cdot)$ उच्चिष्ठ गुणजावली है यदि केवल यदि p अभाज्य संख्या है ।

प्रमाण : पूर्व प्रतिपादित प्रमेय से हम जानते हैं कि वलय $(Z,+,\cdot)$ की प्रत्येक मुख्य गुणजावली होती है। अब माना $I, (Z,+,\cdot)$ की p से जनित गुणजावली है । चूंकि p एवं (-p) रूप से एक ही गुणजावली $(pZ,+,\cdot)$ को जनित करते हैं

अतएव माना p > 0

प्रतिबन्ध आवश्यक है :

माना I उच्चिष्ठ गुणजावली है ।

तब हम सिद्ध करेंगे कि p अभाज्य संख्या है ।

माना यदि संभव है तो p अभाज्य पूर्णाक नहीं बल्कि संयुक्त (composite) पूर्णांक है अतएव दो पूर्णांक m, n इस प्रकार हैं कि

$$p = mn; \quad m \neq 1; n \neq 1$$

माना A, m से जनित Z की गुणजावली है तो

$$I \subset A \subset Z$$

परन्तु I, Z परन्तु की उच्चिष्ठ गुणजावली है

$\Rightarrow \quad A = Z$ या $A = I$

स्थिति - $I : A = Z$

$A = Z \quad \Rightarrow \quad A, 1$ से जनित गुणजावली है क्योंकि $Z = [1]$

$\Rightarrow \quad m = 1$ जो कि विरोधाभास है क्योंकि $m \neq 1$

$\Rightarrow \quad A \neq Z$

स्थिति - II : A = I

A = I है तो पूर्णांक m तथा p समान गुणजावली को जनित करते हैं ।

$\Rightarrow \quad m = rp;$ किसी पूर्णांक के लिये $r \neq 1$ के लिये

$\Rightarrow \quad mn = rnp$

$\Rightarrow \quad p = rnp \quad [\because p = mn]$

$\Rightarrow \quad rn = 1$

जो कि विरोधाभास है क्योंकि $r \neq 1, n \neq 1$ अतः rn = 1 असंभव है । अतएव हमारी मान्यता कि p अभाज्य नहीं है, असंगत है।

$\Rightarrow$ p अभाज्य पूर्णांक है ।

$\Rightarrow$ प्रतिबन्ध आवश्यक है ।

प्रतिबन्ध पर्याप्त है :

माना I, पूर्णांकीय प्रान्त Z की गुणजावली है । माना I, धनात्मक पूर्णांक p से जनित है ।

$\because$ Z की प्रत्येक गुणजावली मुख्य गुणजावली होती है।

$\therefore I = [p] = \{rp | r \in Z\}$ मुख्य गुणजावली है

माना p अभाज्य पूर्णांक है । हम सिद्ध करेंगे कि I, Z की उच्चिष्ठ गुणजावली है ।

अब माना A, Z की गुणजावली इस प्रकार है कि $I \subset A$ तब A, Z की मुख्य गुणजावली है । हम सिद्ध करेंगे कि A = Z या A = I

अब, माना गुणजावली A, पूर्णांक q > 0 से जनित होती है।

तब

$$A = [q] = \{rq | r \subset I\}$$

$\because I \subset A$ एवं $p \in I \quad \Rightarrow \quad p \in A$

$\Rightarrow$ किसी $r \in I$ हेतु $p = rq$

परन्तु p अभाज्य है

अत: $p = rq \Rightarrow \quad q = p$ या $q = 1$

स्थिति - I : जब $q = p$ तब $A = I = [q] = [1]$

स्थिति - II : जब $q = 1$ तब $A = Z = [q] = [1]$

$\Rightarrow \quad A = I$ या $A = Z$

अतएव अभाज्य संख्या p > 0 से जनित Z की गुणजावली उच्चिष्ठ गुणजावली है ।

प्रमेय 2 : क्रमविनिमेय, इकाई सहित वलय R की प्रत्येक उच्चिष्ठ अभाज्य होती है ।

प्रमाण : माना I, क्रमविनिमेय, इकाई सहित वलय R की उच्चिष्ठ गुणजावली है।

फलत: $\frac{R}{I}$ क्षेत्र है (प्रमेय)

पुन: चूंकि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णांकीय प्रान्त होता है

$\Rightarrow \quad I$ वलय R की अभाज्य गुणजावली है (प्रमेय)

परन्तु उपरोक्त प्रमेय का विलोम आवश्यकत: सत्य नहीं होता है । यह कतई. नहीं है कि प्रत्येक अभाज्य गुणजावली का सदैव उच्चिष्ठ गुणजावली हो । जैसे वलय $[Z,+,\cdot]$ में $[0]$ से जनित गुणजावली विद्यमान है परन्तु यह उच्चिष्ठ नहीं है क्योंकि

$$[0] \subset [3] \subset Z$$

प्रमेय 3 : क्रमविनिमेय इकाई सहित वलय R की गुणजावली I अभाज्य होती है रूदि और केवल यदि $\frac{R}{I}$ एक पूर्णांकीय प्रान्त हो ।

प्रमाण : प्रतिबन्ध आवश्यक है :

माना I, इकाई सहित क्रमविनिमेय वलय R की अभाज्य गुणजावली है । फलत: $\frac{R}{I}$ भी क्रमविनिमेय इकाई सहित वलय होगा ।

सिद्ध करना है कि $\frac{R}{I}$ पूर्णांकीय प्रान्त है

चूंकि $\frac{R}{I}$ क्रमविनिमेय एवं इकाई सहित वलय है अतएव यह पूर्णांकीय प्रान्त होगा शून्य भाजक रहित है।

अतएव दिखायेंगे कि $\frac{R}{I}$ शून्य भाजक रहित है ।

अब,

$$\frac{R}{I} = \{I + a \mid a \in R\}$$

माना $I + x, I + y \in \frac{R}{I}$ स्वेच्छ अवयव इस प्रकार हैं कि

$(I + x)\cdot(I + y) = I$, जहाँ $I, \frac{R}{I}$ का शून्य है'

$\Rightarrow \quad I + x \cdot y = I$

$\Rightarrow \quad x \cdot y = I$

$\Rightarrow \quad x \in I$ या $y \in I$

$\Rightarrow \quad I + x = I$ या $I + y = I$

$\Rightarrow \quad \frac{R}{I}$ शून्य भाजक रहित है ।

अतएव प्रतिबन्ध आवश्यक है ।

प्रतिबन्ध पर्याप्त है :

माना कि $\frac{R}{I}$ पूर्णाकीय प्रान्त है ।

सिद्ध करना है कि I, वलय R की अभाज्य गुणजावली है ।

अब चूंकि $\frac{R}{I}$ पूर्णाकीय प्राप्त है अत: शून्य भाजक रहित है ।

माना $x, y \in R$ इस प्रकार हैं कि $x, y \in I$

हम दिखायेंगे कि $x \in I$ अथवा $y \in I$

$$\because xy \in I \quad \Rightarrow \quad I + xy = I$$

$$\Rightarrow \quad (I + x)(I + y) = I$$

$$\Rightarrow \quad I + x = I$$

[$\because \frac{R}{I}$ शून्य भाजक रहित है अतएव $I + x, I + y \in \frac{R}{I}$ के लिये $(I + x)(I + y) = I \Rightarrow I + x = I$ अथवा $I + y = I$]

अब

$$I + x = I \text{ अथवा } I + y = I$$

$$\Rightarrow \quad x \in I \text{ अथवा } y \in I$$

$\Rightarrow$ I अभाज्य गुणजावली है ।

प्रमेय 4 : इकाई सहित क्रमविनिमेय वलय R की गुणजावली उच्चिष्ठ गुणजावली होती है यदि और केवल यदि विभाग वलय $\frac{R}{I}$ क्षेत्र है ।

प्रमाण : चूंकि R इकाई सहित क्रमविनिमेय वलय है फलत: $\frac{R}{I}$ भी इकाई सहित क्रमविनिमेय वलय होगा ।

माना I, R की उच्चिष्ठ गुणजावली है ।

$\frac{R}{1}$ को क्षेत्र सिद्ध करने के लिये यह सिद्ध करना पर्याप्त होगा कि $\frac{R}{I}$ के प्रत्येक अशून्य अवयव का गुणनात्मक प्रतिलोम $\frac{R}{I}$ में विद्यमान है ।

माना e, R का इकाई अवयव (गुणन संक्रिया के लिये तत्समक अवयव) है । तब I एवं $I + e$, $\frac{R}{I}$ के क्रमश: शून्य एवं तत्समक अवयव होंगे ।

माना $x \in R$ इस प्रकार हैं कि $I + x, \frac{R}{I}$ का शून्य नहीं है

अर्थात्

$$I + x \neq I \quad \Rightarrow \quad x \notin I$$

अब यदि [x], $x \in R$ द्वारा जनित गुणजावली है तो $I + [x]$ भी ने की गुणजावली होती है ।

इस स्थिति में

$$x \notin I \;\Rightarrow\; I \subset I + [x] \subset R$$

एवं

$$I - [x] \not\subset I$$

चूंकि I,R की उच्चिष्ठ गुणजावली है अत: $I + [x] = R$

चूंकि $e \in R$ तत्समक है अतएव अवयव $i \in I, r \in R$ इस प्रकार विद्यमान होंगे कि

$$i + rx = e \qquad [\because [x] = \{rx | r \in R\}]$$

$$\Rightarrow\; e - rx = i \in I \qquad [\because i \in I]$$

अब चूंकि

$$I + a = 1 + b \;\Rightarrow\; a - b \in I$$

अतएव

$$e - rx \in I \;\Rightarrow\; I + eI + rx$$

$$\Rightarrow\; I + e = (I + r)(I + x)$$

$\Rightarrow$ $I + x$ का प्रतिलोम $I + r$, है ।

एवं चूंकि $I + r, \frac{R}{I}$ का अवयव है अतएव हमने पाया कि क्रमविनिमेय, इकाई सहित $\frac{R}{I}$ के प्रत्येक अशून्य अवयव का गुणनात्मक प्रतिलोम $\frac{R}{I}$ में है ।

फलत: $\frac{R}{I}$ क्षेत्र है

विलोमत: माना I एक ऐसी गुणजावली है जिसके लिये $\frac{R}{I}$ क्षेत्र है । हम सिद्ध करेंगे I उच्चिष्ठ गुणजावली है।

माना I, R की गुणजावली इस प्रकार है कि किसी अन्य गुणजावली I_1 के लिये,

$$I \subset I_1 \text{ एवं } I \neq I_1$$

तब स्पष्टत: प्रमेय की सिद्धि होगी यदि हम दिखायें कि $I_1 = R$

माना a, R का स्वेच्छ अवयव है तथा $a \notin I$

तब स्पष्टत:

$$I + x \neq I$$

इसका तात्पर्य है कि $I + x, \frac{R}{I}$ का शून्य अवयव नहीं है (स्मरण रखिये कि $I, \frac{R}{I}$ शून्य है)

पुन

$\because I \subset I, I_1 = I_1 \Rightarrow I_1$ मे अवयव b इस प्रकार विद्यमान है कि

$$b \notin 1$$

$$\Rightarrow \quad I + b \neq I$$

$$\Rightarrow \quad I + b, \frac{R}{I}$$ का अशून्य अवयव है |

$\because I + a, I + b$ क्षेत्र $\frac{R}{I}$ के अशून्य अवयव है | अतएव $\frac{R}{I}$ के क्षेत्र होने के कारण एक अशून्य अवयव $I + c \in \frac{R}{I}$ अवश्य विद्यमान होगा कि

$$(1+b)(1+c) = 1+4 \qquad [\because (I+b)(I+c) = I + bc]$$

$$\Rightarrow \quad 1 + bc = 1 + a$$

$$\Rightarrow \quad bc - a \in 1 \qquad [\because I \subset I_1]$$

$$\Rightarrow \quad BC - a \in 1$$

अब चूंकि $b \in I_1, c \in R$ एवं I_1,R की गुणजावली है

अत:

$$bc \in I_1$$

अतएव

$$bc \in I_1, bc - a \in I_1 \quad \Rightarrow \quad bc - (bc - a) \in I_1$$

$$\Rightarrow \quad a \in I_1$$

$$[\because a \in R]$$

$$\Rightarrow \quad R \subset I_1$$

परन्तु I_1, R की गुणजावली है अत: $I_1 \subset R$

अत:

$$R \subset I_1, I_1 \subset R \quad \Rightarrow \quad I_1 = R$$

फलत: I, R की उच्चिष्ठ गुणजावली है

स्वमूल्यांकन प्रश्न -3

1. वलय R= (Z,+,.) की गुणजावली I = (3Z,+,.) के सापेक्ष विभाग वलय $\frac{R}{I}$ ज्ञात कीजिये
2. वलय R= (Z,+,.) की गुणजावली I = (5Z,+,.) के सापेक्ष विभाग वलय $\frac{R}{I}$ ज्ञात कीजिये
3. वलय एवं विभाग वलय को समझाइये
4. अभाज्य गुणजावली एवं उच्चिष्ठ गुणजावली को समझाइये ।

11.6 साराश

इस इकाई में आपने गुणजावली एवं उसके प्रकार यथा मुख्य गुणजावली, गुणजावली, उच्चिष्ठ गुणजावली तथा तत्सम्बन्धी गुणधर्मो को प्रमेयों एवं उदाहरणों के माध्यम से समझा । इसके अतिरिक्त आपने गुणजावली से निर्मित बीजीय संरचना 'विभाग वलय' ' की अवधारणा को भी जाना|

आपने देखा कि गुणजावली, उपवलय का विस्तारित रूप है तथा विभाग, विभाग समूह में निहित अभिकल्पना का विस्तार है|

1.17 शब्दावली

वाम गुणजावली	Left ideal
दक्षिण गुणजावली	Right ideal
गुणजावली	Ideal
सरल वलय	Simple Ring
विषम गुणजावली	Improper ideal
मुख्य गुणजावली	Principal ideal
मुख्य गुणजावली वलय	Principal ideal ring
मुख्य गुणजावली प्रान्त	Principal ideal domain
अभाज्य गुणजावली	Prime ideal
उच्चिष्ठ गुणजावली	Maximal ideal
विभाग वलय या खण्ड वलय	Quotient ring

11.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न -1

1. (d) 2. (c) 3. (b) 4. (d) 5. (d)

स्वमूल्यांकन प्रश्न -2

1. (a) 2. (d)

स्वमूल्यांकन प्रश्न -3

1. $\frac{R}{I} = \{I+0, I+I, +2\}$

2. $\frac{R}{I} = \{I+0, I+I, +2, I+3, I+4\}$

11.9 अभ्यास प्रश्न

1. सिद्ध कीजिये कि पूर्णाकीय वलय (Z,+,.) वलय (Q,+,.) की गुणजावली नहीं है
2. सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $nZ = \{na | a \in Z\}$ पूर्णाकीय वलय (Z,+,.) की गुणजावली है ।

3. सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $A=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| \; a,b \in Z\right\}$ वलय $\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in Z\right\}$ गुणजावली है । मैट्रिक्स के लिये परिभाषित योग एवं गुणन संक्रियायें वलय B की संक्रियायें हैं

4. सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $A=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b, \in R\right\}$ वास्तविक संख्याओं की 2 x 2की मैट्रिक्स (आव्यूहों) के वलय $B=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d \in R\right\}$ की दक्षिण गुणजावली है परन्तु वाम गुणजावली नहीं है।

5. उदाहरण से सिद्ध कीजिये कि दो गुणजावली का संघ का गुणजावली होना आवश्यक नहीं है।
   उत्तर $I_1=(2Z,+;)$ एवं $I_2=(5Z,+;)$ वलय (Z,+,.) की गुणजावलियाँ है,
   परन्तु $I_1 \cup I_2=\{0,\pm 2,\pm 4,\pm 5,\pm 6,\pm 8,\pm 10...\}(Z,+;)$ की गुणजावली नही है

6. विभाग वलय $\frac{R}{I}$ की संरचना कीजिये जहाँ $R=(Z,+;)$ एवं $\{5a \mid a \in Z\}$
   उत्तर : $I+0, I+1, I+2, I+3, I+4$ अथवा $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$

7. वलय $R=\{a+ib \mid a,b \in Z\}$ का गुणजावली $I=(2Z,+;)$ के सापेक्ष विभाग वलय ज्ञात कीजिये
   उत्तर. $R=\{[2],[2]+1,[2]+i,[2]+1+i\}$

8. सिद्ध कीजिये कि वलय (Z,+,.) में गुणजावली (7Z,+,.) अभाज्य गुणजावली है

9. परीक्षण कीजिये कि क्या वलय (Z,+,.) में गुणजावली (6Z,+,.) अभाज्य गुणजावली है?
   उत्तर : अभाज्य गुणजावली नहीं है क्योंकि $6Z=\{0,\pm 6,\pm 12,...\}$ में $24=8.3 \in 6Z$, परन्तु $8 \notin 6Z, 3 \notin 6Z$

इकाई 12 :सदिश समष्टि,उपसमष्टि की परिभाषा, उदाहरण एवं इनके गुणधर्म (Definition of Vector space, Subspace and its Properties

इकाई की रूपरेखा ।

12.0 उद्देश्य

12.1 प्रस्तावना

12.2 सदिश समष्टि की परिभाषा एवं उदाहरण

12.2.1 सदिश समष्टि की परिभाषा ।,

12.2.2 सदिश समष्टि के उदाहरण ।

12.3 सदिश उपसमष्टि की परिभाषा एवं उदाहरण!

12.3.1 सदिश उपसमष्टि की परिभाषा

12.3.2 सदिश उपसमष्टि के उदाहरण

12.4 सारांश

12.5 शब्दावली

12.6 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

12.7 अभ्यास प्रश्न ।

12.0 उद्देश्य

इस इकाई में सदिश समष्टि, उपसमष्टि के विषय में चर्चा की गयी है । इस इकाई पढ़ लेने के बाद आप,

- . सदिश समष्टि, उपसमष्टि के विषय में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे ।
- . यह जानकारी प्राप्त कर सकेंगे कि प्रत्येक क्षेत्र स्वंय के ऊपर तथा अपने उपक्षेत्र के ऊपर एक सदिश समष्टि होता है, परन्तु किसी क्षेत्र का कोई उपक्षेत्र अपने क्षेत्र पर समष्टि हो यह
- आवश्यक नहीं है ।
- . यह जानकारी प्राप्त कर सकेंगे कि किसी समुच्चय को सदिश समष्टि होने लिए कम से कम
- एक अवयव की आवश्यकता पड़ती है और वह अवयव सदिश योग के लिए अवयव होता है ।
- . यह जानकारी प्राप्त कर सकेंगे कि सदिश समष्टि के दो उपसमष्टिओं का उस सदिश
- समष्टि की उपसमष्टि होता है परन्तु उनका संघ उस सदिश समष्टि की हो यह आवश्यक नहीं है।

12.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम सदिश समष्टि, उपसमष्टि को परिभाषित करते हुए इनसे सम्बन्धित कुछ अत्यन्त महत्वपूर्ण उदाहरणों को प्रस्तुत करेंगे । सदिश समष्टि और उपसमष्टि से सम्बन्धित कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्मो के विषय में जानकारी देंगे जिससे आप इस इकाई के विषय में अच्छी जानकारी प्राप्त कर सकें ।

12.2 सदिश समष्टि की परिभाषा एवं उदाहरण (Definition and examples of Vector spaces)

सदिश समष्टि को परिभाषित करने से पहले हम आन्तरिक (Internal) और वाह्य (External) द्विचर संक्रियाएँ परिभाषित करेंगे ।

यदि A एक अरिक्त समुच्चय है तो फलन $f : A \times A \to A,$ समुच्चय A में एक आन्तरिक द्विचर संक्रिया कहलाता है और यदि A और B दो अरिक्त समुच्चय हो तो फलन $g : B \times A \to A,$ समुच्चय A में एक बाह्य द्विचर संक्रिया कहलाता है ।

12.2.1 सदिश समष्टि की परिभाषा

माना V एक अरिक्त समुच्चय है तथा (f,+,.) एक क्षेत्र है । समुच्चय V क्षेत्र F पर सदिश समष्टि कहलाता है, यदि

(1) V में एक आन्तरिक द्विचर संक्रिया $\oplus$ अर्थात् एक फलन $\oplus \quad V \times V \to V$ जो निम्न प्रकार परिभाषित है

$$(v_1, v_2) \to v_1 \oplus v_2 \forall v_1, v_2 \in V$$

जिसके तहत (V, $\oplus$) एक क्रमविनिमेय (आबेली) समूह हो, तथा

(2) V में एक वाह्य द्विचर संक्रिया (अदिश गुणन) $\odot$ अर्थात् एक फलन $\odot F : F \times \to V$ जो निम्न प्रकार परिभाषित है।

$$(a, v) \to a \odot v \quad \forall a \in F \text{ और } v \in V$$

जो निम्न प्रतिक्यों को संतुष्ट करता है

$(i) \quad a \odot (v_1 v_2) = a \odot v_1 \oplus a v_2,$

$(ii) \quad (a+b) \odot V = a \odot v \oplus b \odot v,$

$(iii) \quad (a.b) \odot v = a \odot (b \odot v),$

$(iv) \quad 1 \odot v = v, \ \forall a, b \in F$ और $v, v_1, v_2 \in V.1$ क्षेत्र F में इकाई अवयव है ।

टिप्पणी :

(i) चूँकि V के अवयव सदिश के गुणधर्मो का पालन करते हैं, इसलिये V के अवयवों को सदिश और चूँकि F के अवयव अदिश के गुणधर्मो का पालन करते हैं, इसलिये F के अवयवों को अदिश कहते हैं ।

(ii) V में योग के लिये तत्समक अवयव को शून्य सदिश कहते है ।

(iii) यदि V क्षेत्र Rपर सदिश समष्टि है तो इम इसे सुविधा के लिए V(F) द्वारा निरूपित करेंगे।

(iv) यदि F=R ने (वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र), F = Q (परिमेय संख्याओं का क्षेत्र), F = C (सम्मिश्र संख्याओं का क्षेत्र) हो तो, V को क्रमश: वास्तविक, परिमेय तथा सम्मिश्र सदिश समष्टि कहते हैं ।

(v) सुविधा के लिए हम सदिश योग $\oplus$ को + तथा अदिश गुणन $\odot$ को . से प्रकट करेंगे । यह ध्यान में रहना चाहिए कि एक ही प्रकार के अवयव योग क्रिया के अन्तर्गत योज्य होते हैं अर्थात् V और F अवयवों को आपस में जोड़ा नहीं जा सकता है ।

12.2.2 सदिश समष्टि के उदाहरण

उदाहरण 1 : यदि (F,+,.) एक क्षेत्र है और 0, F में योग के तत्समक अवयव है जो एकल समुच्चय $\{0\}$ क्षेत्र F पर सदिश समष्टि होता है और इसे शून्य समष्टि (Null space) हैं ।

उदाहरण 2. प्रत्येक क्षेत्र स्वत: पर सदिश समष्टि होता है, क्योंकि यदि (F,+,.) क्षेत्र है तो स्पष्टत: (F,+,.) एक क्रमविनिमेय समूह है और प्रत्येक $a,b \in F$ और $u,v \in F$ के लिए निम्न प्रतिबंध सन्तुष्ट होते हैं.

$(i)\ a.(u+v) = a.u + a.v$

$(ii)\ (a+b).u = a.u + b.u$

$(iii)\ (a.b).u = a(b.u)$

$(iv)\ 1\ u = u$

उदाहरण 3. प्रत्येक क्षेत्र अपने उपक्षेत्र पर सदिश समष्टि होता है क्योंकि यदि K, क्षेत्र F का कोई उपक्षेत्र हो तो (F,+,.) एक क्रमविनिमेय समूह होगा और प्रत्येक $a,b \in K$ और $u,v \in F$ के

$(i)\ a.(u+v) = a.u + a.v$

$(ii)\ (a+b).u = a.u + b.u$

$(iii)\ (a.b).u = a(b.u)$

$(iv)\ 1\ .u = u$

परन्तु यह आवश्यक नही है कि किसी क्षेत्र का कोई उपक्षेत्र अपने क्षेत्र पर सदिश समषिट हो क्योंकि परिमेय संख्याओं का क्षेत्र R वास्तविक संख्याओ के क्षेत्र R का उपक्षेत्र है परन्तु Q क्षेत्र R पर सदिश समष्टि नही है

क्योंकि - $\frac{3}{2} \in Q, \sqrt{2} \in R$ लेकिन $\frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \notin Q$

उदाहरण 4 माना F कोई क्षेत्र है तथा $V = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in F\}$ एक समुच्चय है, तो सिद्ध कीजिये कि V सदिश योग तथा अदिश गुणन जो निम्न प्रकार परिभाषित हैं।

$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ तथा

$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, a_3) \forall (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in V$ और $\alpha \in F$ के सापेक्ष सदिश समष्टि है ।

हल : सर्वप्रथम हम यह सिद्ध करेंगे कि V सदिश योग और अदिश गुणन के लिए संवृत है । माना x = (a_1, a_2, a_3) तथा y = (b_1, b_2, b_3) समुच्चय V के कोई दो अवयव हैं तथा $\alpha \in F$

अब $x + y = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)$

$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3, b_3) \in V$ क्योंकि $a_1 + b_1 \in I\ \forall i = 1, 2, 3$

और

$$\alpha.u = \alpha.(a_1, a_2, a_3)$$

$$= (\alpha.a_1, \alpha.a_2, \alpha.a_3) \in V,$$ क्योंकि । $\alpha \in F, a_1 \in F \Rightarrow \alpha.a_i \in F \forall i = 1,2,3|$

अत: V सदिश योग और अदिश गुणन के लिये संवृत है । अब हम सिद्ध करेंगे कि V(F) एक सदिश समष्टि है।

(1) (V,+) एक क्रमविनिमेय समूह है ।

(i) साहचर्यता

माना $x = (a_1, a_2, a_3), y = (b_1, b_2, b_3)$ और $z = (c_1, c_2, c_3), v$ के कोई तीन अवयव हैं । अब

$$x + (y + z) = (a_1, a_2, a_3) + [(b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, c_3)]$$

$$= (a_1, a_2, a_3) + (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3)$$

$$= (a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), a_3 + (b_3 + c_3))$$

$$= ((a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, (a_3 + b_3) + c_3)$$

क्योंकि योग F में सहचारी है

$$= [(a_1 + b_1), (a_2 + b_2), (a_3 + b_3)] + (c_1, c_2, c_3)$$

$$= [(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)] + (c_1, c_2, c_3)$$

$$= (x + y) + z$$

अत: V में योग संक्रिया सहचारी है ।

(ii) **तत्समक अवयव का अस्तित्व** चूँकि F एक क्षेत्र है, इसलिए योग के लिए F में तत्समक अवयव 0 है । अब $0 = (0,0,0) \in v, v$ में तत्समक अवयव है क्योंकि प्रत्येक $x = (a_1, a_2, a_3) \in v$ के लिए

$$x + 0 = (a_1, a_2, a_3) + (0,0,0)$$

$$= (a_1 + 0, a_2 + 0, a_3 + 0)$$

$$= (a_1, a_2, a_3)$$

$$= x$$

इसी प्रकार 0+x = x

अर्थात् $x + 0 = 0 + x \quad \forall \quad x \in V|$

(iii) प्रतिलोम का अस्तित्व

माना $x = (a_1, a_2, a_3)$ समुच्चय V का कोई अवयव है । तब $a_1, a_2, a_3 \in F$

$\Rightarrow \quad -a_1, -a_2, -a_3 \in F,$ क्योंकि (F,+) एक आबेली समूह है ।

$\Rightarrow \quad -x = (-a_1, -a_2, -a_3) \in V|$ अब

$$x + (-x) = (a_1, a_2, a_3) + (-a_1, -a_2, -a_3)$$

$$(a_1, -a_1, -a_2 -, a_2, a_3 - a_3)$$

$= (0,0,0)$

$= 0$

इसी प्रकार

$(-x) + x = 0$

अतः $x + (-x) = (-x) + x = 0$

$\Rightarrow$ Vके प्रत्येक अवयव का योग के लिये प्रतिलोम V में है ।

(iv) क्रमविनिमेयता

अब क्योंकि F में योग क्रमविनिमेय है

$$x + y = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)$$
$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$
$$= (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3),$$
$$= (b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, a_3)$$
$$= y + x$$
$$\Rightarrow \quad x + y = y + x \quad \forall x, y \in V$$

$\Rightarrow$ V में योग क्रमविनिमेय है ।

अतः (V,+) एक क्रमविनिमेय समूह है ।

(2) $\forall x, y \in V$ और $\alpha, \beta \in F$ के लिए

$$\alpha \quad .x + y = \alpha.[(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)]$$
$$= \alpha.(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$
$$= (\alpha \cdot (a_1 + b_1), \alpha \cdot (a_2 + b_2), \alpha \cdot (a_3 + b_3))$$
$$= (\alpha \cdot a_1 + \alpha \cdot b_1, \alpha \cdot a_2 + \alpha \cdot b_2, \alpha \cdot a_3 + \alpha \cdot b_3)$$
$$= (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3) + (\alpha \cdot b_1, \alpha \cdot b_2, \alpha \cdot b_3)$$
$$= \alpha \cdot (a_1, a_2, a_3) + \alpha \cdot (b_1, b_2, b_3)$$
$$= \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$
$$\Rightarrow \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$$

(b) $(\alpha + \beta).x = (\alpha + \beta).(a_1, a_2, a_3)$

$$= ((\alpha + \beta).a_1, (\alpha + \beta).a_2, (\alpha + \beta).a_3)$$
$$= (\alpha.a_1 + \beta.a_1, \alpha.a_2 + \beta.a_2, \alpha.a_3 + \beta.a_3)$$
$$= (\alpha.a_1 +, \alpha.a_2, \alpha.a_3)(\beta.a_1, \beta.a_2, \beta.a_3)$$
$$= \alpha.(a_1, a_2, a_3) + \beta.(a_1, a_2, a_3)$$
$$= \alpha.x + \beta.x$$
$$\Rightarrow (\alpha + \beta) = \alpha.x + \beta.x$$

(c) $(\alpha.\beta).x = (\alpha.\beta).(a_1, a_2, a_3)$

$$= ((\alpha.\beta).a_1, (\alpha.\beta).a_2, (\alpha.\beta).a_3)$$

$$= (\alpha.(\beta.a_1)\alpha(\beta.a_2), \alpha.(\beta.a_3))$$

$$= \alpha.(\beta.a_1, \beta.a_2, \beta.a_3,)$$

$$= \alpha.(\beta.(a_1, a_2, a_3))$$

$$= \alpha.(\beta.x)$$

$$\Rightarrow (\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$$

(d) $1.x = 1.(a_1, a_2, a_3)$

$$= 1.(1.a_1, 1.a_2, 1.a_3)$$

$$= (a_1, a_2, a_3)$$

$$= x$$

$$\Rightarrow 1.x = x$$

अत: V(F) एक सदिश समष्टि है ।

उदाहरण 5 : सिद्ध कीजिये कि मैट्रिक्स समुच्चय

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$$

मैट्रिक्स योग एवं मैट्रिक्स अदिश गुणन के सापेक्ष वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर एक सदिश समष्टि है ।

हल: सर्वप्रथम हम सिद्ध करेंगे कि समुच्चय V मैट्रिक्स योग एवं R पर मैट्रिक्स अदिश गुणन के लिए संवृत है ।

माना $x = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ तथा $y = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ समुच्चय V के कोई दो अवयव है और $a \in R$

जहाँ $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$

अब

$$x + y = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix} \in V,$$

क्योंकि $a_1 + a_2 \in R$ तथा $b_1 + b_2 \in R$ और

$$\alpha.x = \alpha \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha.a_1 & 0 \\ 0 & \alpha.b_1 \end{pmatrix} \in V, \text{ क्योंकि } \alpha.a_1, \alpha.b_2 \in R|$$

अतः V मे मैट्रिक्स योग एवं R पर मैट्रिक्स अदिश गुणन के लिए संवृत है | अब हम सिद्ध करेंगे कि V(R) एक सदिश समिष्ट है।

(1) (V,+) एक क्रमविनिमेय समूह है ।

चूंकि मैट्रिक्स योग सहचारी एवं क्रमविनिमेय होता है। इसलिए यह समुच्चय V मे भी सहचारी एवं क्रमविनिमेय होगा। शून्य मैट्रिक्स $0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ समुच्चय V में योग के लिए तत्समक अवयव है| यदि $x=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ समुच्चय V का कोई अवयव है तो $-x=\begin{pmatrix}-a & 0\\ 0 & -b\end{pmatrix}$ समुच्चय V का अवयव होगा और

$$x+(-x)=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a & 0\\ 0 & -b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a-a & 0\\ 0 & b-b\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$= 0$$

इसी प्रकार,

$$(-x)+x=0$$

अतः $x+(-x)=0=(-x)+x \quad \forall x\in V$

$\Rightarrow V$ मे प्रत्येक अवयव का योज्य प्रतिलोम V मे विद्यमान है । अतः (V,+)ए क क्रमविनिमेय समूह है ।

(2) $\forall \alpha,\beta\in R$ और $x,y\in V$ के लिये

(i)
$$\alpha(x+y)=\alpha.\left[\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & b_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2 & 0\\ 0 & b_2\end{pmatrix}\right]$$

$$=\alpha.\begin{pmatrix}a_1+a_2 & 0\\ 0 & b_1+b_2\end{pmatrix}$$

$$=\alpha.\begin{pmatrix}\alpha.(a_1+a_2) & 0\\ 0 & \alpha.(b_1+b_2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha.a_1+\alpha.a_2 & 0\\ 0 & \alpha.b_1+\alpha.b_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha.a_1 & 0\\ 0 & \alpha.b_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha.a_2 & 0\\ 0 & \alpha.b_2\end{pmatrix}$$

$$=\alpha.\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & b_1\end{pmatrix}+\alpha.\begin{pmatrix}a_2 & 0\\ 0 & b_2\end{pmatrix}$$

$$=\alpha.x+\alpha.y$$

$$\Rightarrow \alpha.(x+y)=\alpha.x+\alpha.y$$

(ii) $$(\alpha+\beta).x=(\alpha+\beta).\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (\alpha+\beta).a_1 & 0 \\ 0 & (\alpha+\beta).b_1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha.a_1+\beta.a_1 & 0 \\ 0 & \alpha.b_1+\beta.b_1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha.a_1 & 0 \\ 0 & \alpha..b_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta.a_1 & 0 \\ 0 & \beta.b_1 \end{pmatrix}$$

$$=\alpha.x+\beta.x$$

$$\Rightarrow(\alpha+\beta).x=\alpha.x+\beta.x$$

(iii) $$(\alpha.\beta).x=(\alpha.\beta).\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (\alpha.\beta).a_1 & 0 \\ 0 & (\alpha.\beta).b_1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha.(\beta.a_1) & 0 \\ 0 & \alpha.(\beta.b_1) \end{pmatrix}$$

$$=\alpha\begin{pmatrix} \beta.a_1 & 0 \\ 0 & \beta.b_1 \end{pmatrix}$$

$$=\alpha.\left(\beta.\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$=\alpha.(\beta.x)$$

$$\Rightarrow(\alpha.\beta).x=\alpha.(\beta.x)$$

(iv) $$1.x=1.\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1.a_1 & 0 \\ 0 & 1.b_1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$$

$$=x$$

$$\Rightarrow 1.x=x$$

अत: V वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र V पर एक सदिश समष्टि है ।

उदाहरण 6 माना R वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र है तथा V उन सभी वास्तविक मान संतत् फलनों का समुच्चय है जो संवृत अन्तराल [0,1] पर परिभाषित हैं । सिद्ध कीजिये कि V सदिश योग तथा अदिश गुणन जो निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad \forall f,g\in V, \quad \forall x\in[0,1]$$

तथा $(\alpha.f)(x)=\alpha f(x)\forall f\in V,\alpha\in R$ और $\forall x\in[0,1]$

हल : हम जानते हैं कि दो वास्तविक मान संतत् फलनों का योग भी वास्तविक मान संतत् संतत् फलन होता है, इसलिये V में फलनों का योग द्विचर संक्रिया है अर्थात् V सदिश योग के लिए संवृत है । पुन यदि α कोई वास्तविक संख्या है और f कोई वास्तविक मान संतत् फलन है तो α f भी वास्तविक मान संतत् फलन होगा । अत: V अदिश गुणन के लिये भी संवृत है ।

फलन $\hat{0}:[0,1]\to R$ जो निम्न प्रकार परिभाषित है

$$\hat{0}(x)=0 \quad \forall x\in[0,1]$$

V में योग के लिए तत्समक अवयव है क्योंकि $\left(f+\hat{0}\right)(x)=f(x)+\hat{0}(x)=f(x)+0=f(x)$

इसी प्रकार $\left(\hat{0}+f\right)(x)=f(x)$

अत: $f+\hat{0}=f=\hat{0}+f \quad \forall f\in V$ |

यदि $f\in V$ है, तो एक फलन $-f:[0,1]\to R$ में निम्न प्रकार परिभाषित करें

$(-f)(-x)=-f(x) \ \forall x\in[0,1]$,

तब $-f\in V$

और
$$\begin{aligned}[f+(-f)](x)&=f(x)+(-f)(x)\\&=f(x)-f(x)\\&=0\\&=\hat{0}(x)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f+(-f)=\hat{0}$$

इसी प्रकार $(-f)+f=\hat{0}$ इसलिए फलन -f, f का योग के लिए V में प्रतिलोम है ।

हम जानते है कि फलनों का योग सहचारी एवं क्रमविनिमेय होता है, इसलिए समुच्चय V सदिश योग सहचारी एवं क्रमविनिमेय होगा । अत: (V,+) क्रमविनिमेय समूह है ।

अब $\forall\alpha,\beta\in R$ और $f,g\in V$ के लिए

(i) $[a(f+g)](x)=\alpha((f+g)(x))$

$$= \alpha\left[f(x) + g(x)\right]$$
$$= \alpha f(x) + \alpha g(x)$$
$$= (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)$$
$$= (\alpha f + \alpha g)(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

अत: $a(f+g) = \alpha f + \alpha g$

(ii) $\left[(\alpha+\beta) f\right](x) = (\alpha+\beta) f(x)$
$$= \alpha f(x) + \beta f(x)$$
$$= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x)$$
$$= (\alpha f + \beta f)(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

अत: $(\alpha+\beta) f = \alpha f + \beta f$

(iii) $\left[(\alpha+\beta) f\right](x) = (\alpha\beta) f(x)$
$$= \alpha\left(\beta\left(f(x)\right)\right)$$
$$= \alpha\left((\beta f)(x)\right)$$
$$= \left(\alpha(\beta f)\right)(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

अत: $(\alpha\beta) f = \alpha(\beta f)$

(iv) $(1f)(x) = 1f(x)$
$$= f(x) \qquad \forall x \in [0,1]$$

अत: $1f = f$

अत: V,R पर सदिश समष्टि है ।

प्रमेय 1 : यदि V क्षेत्र F पर एक सदिश समष्टि है तथा V का शून्य सदिश 0 है, तथा F का योज्य तत्समक अवयव शून्य 0 है, तब

(i) $a.0 = 0 \forall a \in F,$

(ii) $0.v = 0 \forall v \in V, 0 \in F,$

(iii) $(-a).v = a.(-v) = -(a.v) \forall a \in F, v \in V,$

(iv) $a.(u-v) = a.u - a.v \quad \forall a \in F, u, v \in F,$

(v) $a.v = 0 \Rightarrow a = 0$ या $v = 0$ जहाँ $a \in F, u, v \in V,$

(vi) $a.u = a.\vee \Rightarrow u = \vee$ यदि $a \neq 0, a \in F$ तथा $u, v \in V$,

(vii) $a.u = b.u \Rightarrow a = b$,यदि $a, b \in F$ तथा $o \neq u \in V$.

उपपत्ति :

(i) $a.0 = a.(0+0)$ क्योंकि 0 + 0 = 0

= a.0 + a.0

$\Rightarrow a.0+0=a.0+a.0$ क्योंकि V मे 0 है तत्समक अवयव

$\Rightarrow 0=a.0$ वाम निरसन नियम से

अतः $a.0=0 \quad \forall a \in F$

(ii) $0.v=(0+0).v$ क्योंकि F में 0 + 0 = 0

$\Rightarrow 0.v=0.v+0.v$

$\Rightarrow 0.v+0=0.v+0.v$

$\Rightarrow 0=0.v$ V मे योग के वाम निरसन नियम से

(iii) (ii) से

$0=0.v$

$=[0+(-a)].v$ क्योंकि a + (-a) = 0

$0=a.v+(-a).v$

$\Rightarrow (-a).v=-(-a.v)$ योग के प्रतिलोम नियम से

इसी प्रकार हम प्रदर्शित कर सकते है कि

$$a.(-v)=-(a.v)$$

अतः $(-a).v=a(-v)=-(a.v)$

(iv) $a.(u-v)=a.[u+(-v)]$

$=a.u+a.(-v)$

$=a.u-a.v,$ (iii) का प्रयोग करने पर

$\Rightarrow a.(u-v)=a.u-a.v$

(v) यहाँ हमें सिद्ध करना है कि $av=0 \Rightarrow a=0$ या $v=0$, जहाँ $a \in F, v \in V$ | सर्वप्रथम माना कि av = 0, जहाँ $a \neq 0.$ चूँकि F एक क्षेत्र है और $0 \neq a \in F$ तो $a^{-1} \in F$ का अस्तित्व होगा ताकि $aa^{-1}=1=a^{-1}a$

अब,

$$av=0 \Rightarrow a^{-1}(av)=a^{-1}0$$

$$\Rightarrow (a^{-1}a)v=0, \text{ (i) से}$$

$$\Rightarrow 1v=0$$

$$\Rightarrow v=0$$

अत: यदि av = 0 तथा $a \neq 0$ तो v = 0. पुन: माना av = 0 तथा $v \neq 0$ तब हमें सिद्ध करना है कि a = 0 यदि सम्भव हो तो माना कि $a \neq 0$, तब $a^{-1} \in F$ का अस्तित्व होगा ताकि $aa^{-1}=1=a^{-1}a$

अब

$$av = 0 \Rightarrow a^{-1}(av) = a^{-1}0$$
$$\Rightarrow (a^{-1}a)v = 0$$
$$\Rightarrow 1v = 0$$
$$\Rightarrow v = 0$$

जो कि विरोधाभास है क्योंकि हमने माना है कि $\vee \neq 0$ अत: $a = 0$

(vi)

$$au = av \Rightarrow au - av = 0$$
$$\Rightarrow a(u - v) = 0$$
$$\Rightarrow u - v = 0,$$ क्योंकि $a \neq 0$
$$\Rightarrow u = v$$

अत: $au = av \Rightarrow u = \vee$ यदि $0 \neq a \in F$

(vii)

$$au = bu \Rightarrow \quad au - bu = 0$$
$$\Rightarrow (a - b)u = 0$$
$$\Rightarrow a - b = 0,$$ क्योंकि $u \neq 0$

अत: $au = bu \Rightarrow \quad a = b$ यदि $u \neq 0$

स्वमूल्यांकन प्रश्न -1

1. प्रत्येक क्षेत्र अपने किसी उपक्षेत्र पर सदिश समष्टि होता है ।

   सत्य / असत्य ।

2. यदि F एक क्षेत्र है और V = $\{0\}$ तो V क्षेत्र F पर सदिश योग और अदिश गुणन के सापेक्ष सदिश समष्टि है । सत्य / असत्य ।

3. यदि V क्षेत्र F पर सदिश समष्टि है, तो (V,+) क्रमविनिमेय समूह नहीं होता है ।

   सत्य / असत्य ।

4. कारण सहित बताइये कि मैट्रिक्स समुच्चय

$$v = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$$

   मैट्रिक्स योग एवं मैट्रिक्स अदिश गुणन के सापेक्ष वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर एक सदिश समष्टि है कि नहीं ।

12.3 सदिश उपसमष्टि की परिभाषा एवं उदाहरण (Definition and examples of vector subspace)

12.3.1 सदिश उपसमष्टि की परिभाषा :

माना V क्षेत्र F पर कोई सदिश समष्टि है । V का कोई अरिक्त W,V का उपसमष्टि कहलाता है यदि W स्वयं क्षेत्र F पर V में परिभाषित सदिश योग और अदिश के सापेक्ष सदिश समष्टि हो ।

प्रत्येक सदिश समष्टि V जिसके पास एक से ज्यादा अवयव हों, के कम से कम उपसमष्टि होते है।

(i) W = {0} तथा (ii) W = V, जहाँ 0, V में सदिश योग के लिए तत्समक है । इन्हे निरर्थक (Trivial) या विषम (Improper) उपसमष्टि कहते हैं । इन दोनों उपसमष्टिओं के अतिरिक्त V के किसी दूसरे उपसमष्टि को उचित (Proper) उपसमष्टि कहते हैं ।

सदिश उपसमष्टि की परिभाषा रवे स्पष्ट है कि यदि W, सदिश समष्टि V(F) की कोई उपसमष्टि हो तो W, (V,+) का उपसमूह होगा जो कि अदिश गुणन के लिऐ संवृत होगा अर्थात $av \in W \ \forall a \in F$ और $V \in W$. चूँकि $W \subset V$ इसलिए अदिश गुणन के लिए अन्य प्रतिबन्ध W में स्वत: सिद्ध हो जायेंगे ।

प्रमेय 2 : यदि V क्षेत्र F पर सदिश समष्टि हो और W,V का अरिक्त उपसमुच्चय, तो W,V की उपसमष्टि होगी यदि और केवल यदि और

(i) $\forall u, v \in w \Rightarrow u - v \in W$, और

(ii) $\forall u \in F, u \in w \Rightarrow au \in W$.

उपपत्ति : सर्वप्रथम माना कि W, V की उपसमष्टि है और $u, v \in W$ तथा $a \in F.$ की परिभाषा से W स्वयं V में परिभाषित सदिश योग और अदिश गुणन के सापेक्ष सदिश समष्टि है । चूंकि (W,+) एक समूह है, इसलिए

$$u \in W, v \in W \Rightarrow u \in W, -v \in W$$
$$\Rightarrow u + (-v) \in W$$
$$\Rightarrow u - v \in W$$

पुन: चूँकि W में अदिश गुणन संवृत है, इसलिए

$$\alpha \in F, u \in W \Rightarrow \quad \alpha u \in W.$$

विलोमत: माना कि W, सदिश समष्टि V (F) का कोई अरिक्त उपसमुच्चय है जो निम्न दो प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है:

(i) $\forall\ u, v \in W \Rightarrow u - v \in W$, और

(ii) $\forall\ a \in F, u \in W \Rightarrow au \in W$.

हमें सिद्ध करना है कि W(F), V(F) की सदिश उपसमष्टि है ।

दिया गया प्रतिबन्ध (i) अर्थात् $\forall\ u,v \in W \Rightarrow\ u-vW,$ यह प्रदर्शित करता है कि छ सदिश योग के लिए क्रमविनिमेय समूह (V,+) का उपसमूह है । अत: (W,+) स्वंय एक क्रमविनिमेय समूह है ।

प्रतिबन्ध (ii) अर्थात् $\forall\, a \in F, u \in W \Rightarrow au \in W$ यह प्रदर्शित करता है कि W अदिश गुणन के लिए संवृत है । चूँकि $W \subset V$, इसलिए W के अवयव सदिश समष्टि के शेष सभी अभिगहीतों को संतुष्ट करेंगे ।

अत: W स्वंय क्षेत्र F पर सदिश समष्टि है । फलत: W(F), V(F) की उपसमष्टि है ।

प्रमेय 3 : यदि V क्षेत्र F पर सदिश समष्टि हो, तो इसके एक अरिक्त उपसमुच्चय W के V(F) की उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि

$\forall\, u,v \in W$ तथा $\forall\, a,b \in F \Rightarrow au+bv \in W$

उपपत्ति : प्रतिबन्ध की आवश्यकता : माना कि W सदिश समष्टि V(F) की उपसमष्टि है और u, v$\in W$ तथा $a,b \in F.$ उपसमष्टि की परिभाषा से W स्वंय V में परिभाषित सदिश योग और अदिश गुणन के सापेक्ष सदिश समष्टि है । अब

$$a \in F, u \in W \Rightarrow \quad au \in W$$

तथा $\quad b \in F, v \in W \Rightarrow \quad bv \in W$

चूँकि (W,+) एक समूह है, इसलिए $au \in W, bv \in W \Rightarrow \quad au+bv \in W$

अत: प्रतिबन्ध आवश्यक है ।

प्रतिबन्ध की पर्याप्तता : माना कि W, सदिश समष्टि V(F) का कोई अरिक्त उपसमुच्चय है जो निम्न प्रति बन्ध को संतुष्ट करता है:

$\forall\, a,b \in F$ और $u,v \in W \Rightarrow \quad au+bv \in W$

हमें सिद्ध करना है कि W(F), V(F) की सदिश उपसमष्टि है ।

चूँकि F एक क्षेत्र है, इसलिए $1 \in F$, जहाँ 1, F में गुणन के लिए तत्समक अवयव है $1 \in F \Rightarrow -1 \in F$ अब दिये गये प्रतिबन्ध से

$$a = 1 \in F, b = -1 \in F$$

तथा

$u \in W, v \in W \Rightarrow\ 1 \cdot u + (-1)v = u - v \in W. u \in W, v \in W \Rightarrow\ u - v \in W$

यह प्रदर्शित करता है कि W सदिश योग के लिए क्रमविनिमेय समूह (V,+) का उपसमूह है। अत: (W,+) स्वंय एक क्रमविनिमेय समूह है । पुन: चूँकि (F,+) एक समूह है, इसलिए $0 \in F$, जहाँ 0,F में योग के लिए तत्समक अवयव है ।

दिये गये प्रतिबन्ध $a \in F, b = 0 \in F$ और $u,v \in W \Rightarrow au + 0.v = au \in W$, यह करता है कि W अदिश गुणन के लिए सवृंत है । चूँकि $W \subset V$ इसलिए W के अवयव सदिश समष्टि के सभी अभिगृहीतों को संतुष्ट करेंगे ।

अत: W स्वंय क्षेत्र F पर सदिश समष्टि है । फलत: W(F), V(F) की उपसमष्टि है ।

प्रमेय 4 : किसी सदिश समष्टि के किन्हीं दो उपसमष्टिओ का सर्वनिष्ठ भी उस सदिश सामीष्टि की उपसमष्टि होती है ।

उपपत्ति : माना V, क्षेत्र F पर कोई सदिश समष्टि है और W_1, W_2 इसकी कोई दो, हैं । हमें सिद्ध करना है कि $W_1 \cap W_2$ भी सदिश समष्टि V(F) की उपसमष्टि होगी । चूंकि W_1 और W_2, V(F) की उपसमष्टि हैं, इसलिए

$0 \in W_1, 0 \in W_2 \Rightarrow \ 0 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \ W_1 \cap W_2 \neq \phi,$ जहां 0, V में योग के लिए तत्समक अवयव है।

माना $a, b \in F$ और $u, v \in W_1 \cap W_2$

अब

$$u, v \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow u, v \in W_1$$

और

$$u, v \in W_2$$

चूँकि $W_1, V(F)$ की उपसमष्टि है, इसलिए

$a, b \in F$

और

$$u, v \in W_1 \Rightarrow au + bv \in W_1 \qquad ....(1)$$

पुन:

चूँकि $W_2, V(F)$ की उपसमष्टि है, इसलिए

$a, b \in F$ और

$$u, v \in W_2 \Rightarrow au + bv \in W_2 \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) और (2) से $au + bv \in W_1 \cap W_2$

अत: $\forall \ a, b \in F$ और $u, v \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow au + bv \in W_1 \cap W_2$

फलत: $W_1 \cap W_2$ भी सदिश समष्टि V (F) की उपसमष्टि है ।

टिप्पणी :

(i) एक सदिश समष्टि की उपसमष्टियों के किसी कुल का सर्वनिष्ठ भी उस सदिश समष्टि उपसमष्टि होती है ।

(ii) किसी सदिश समष्टि के दो उपसमष्टिओं का संध उस सदिश समष्टि की उपसमष्टि हो यह आवश्यक नहीं है ।

उदाहरण के लिए हम जानते हैं कि यदि F कोई क्षेत्र हो, तो समुच्चय $V = \{(a_1, a_2, a_3,) \mid a_1, a_2, a_3 \in F\}$ सदिश योग और अदिश गुणन जो निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$(a_1, a_2, a_3,) + (b_1, b_2, b_3,) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) \ \ \forall \ \ \alpha \in F$$

और

$$(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \in V,$$

के सापेक्ष सदिश समष्टि होता है ।

यहाँ $W_1 = \{a, 0, 0 \mid a \in F\}$ तथा $W_2 = \{0, b, 0 \mid b \in F\}, V$ की दो उपसमष्टि हैं, परन्तु इनका संघ $W_1 \cup W_2 = \{x \mid x = (a, 0, 0) or (0, b, 0) \mid a, b \in F\}$ सदिश समष्टि V(F) की उपसमष्टि नहीं है, क्योंकि $u = (a, 0, 0), v = (0, b, 0), W_1 \cap W_2$ के दो अवयव लें और $\alpha, \beta \in F$ तो

$$\alpha u + \beta v = (\alpha a, 0, 0) + (0, \beta b, 0)$$
$$= (\alpha a, \beta b, 0) \notin W_1 \cup W_2$$

अर्थात् $W_1 \cup W_2$ सदिश योग के लिए संवृत नही है ।

प्रमेय 5 : किसी सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टिओं W_1 तथा W_2 का संघ, V की एक उपसमष्टि होता है यदि और केवल यदि $W_1 \cup W_2$ या $W_2 \subset W_1$

उपपत्ति : सर्वप्रथम माना कि W_1 तथा W_2 सदिश समष्टि V (F) की दो उपसमष्टियाँ हैं कि $W_1 \subset W_2$ या $W_2 \subset W_1$. यदि $W_1 \subset W_2$, तो $W_1 \cup W_2 = W_2$ और यदि $W_2 \subset W_1$ तो $W_1 \cup W_2 = W_1$.

चूँकि W_1 और W_2 दोनों ही V(F) की उपसमष्टियाँ हैं, इसलिए $W_1 \cup W_2$ भी सदिश समष्टि V(F) की उपसमष्टि है ।

विलोमत: माना कि $W_1 \cup W_2$ सदिश समष्टि V की एक उपसमष्टि है । हमे सिद्ध करना है कि $W_1 \subset W_2$ या $W_2 \subset W_1$. यदि सम्भव हो तो माना कि $W_1 \not\subset W_2$ तथा $W_2 \not\subset W_1$.

अब

$$W_1 \not\subset W_2 \Rightarrow \exists u \in W_1$$

परन्तु

$$u \in W_2 \qquad ...(1)$$

तथा

$$W_2 \not\subset W_1 \Rightarrow \exists v \in W_2$$

परन्तु

$$v \notin W_1 \qquad ...(2)$$
$$v \notin W_1 \Rightarrow u \in W_1 \cup W_2$$
$$v \notin W_1 \Rightarrow v \in W_1 \cup W_2$$

चूँकि $W_1 \cup W_2$ सदिश समष्टि V की एक उपसमष्टि है, इसलिए

$$u \in W_1 \cup W_2, v \in W_1 \cup W_2 \Rightarrow u + v \in W_1 \cup W_2$$
$$\Rightarrow u + v \in W_1 \;\; or \; u + v \in W_2$$

माना $u + v \in W_1$ चूँकि W_1 एक उपसमष्टि है, इसलिए

$$u \in W_1 \Rightarrow -u \in W_1$$

अब

$$-u \in W_1, u+v \in W_1 \Rightarrow \quad -u+(u+v) \in W_1$$

$$\Rightarrow (-u+v)+v \in W_1$$

$$\Rightarrow 0+v \in W_1$$

$\Rightarrow v \in W_2$, जो कि (2) का विरोधाभास है । साथ ही यदि $u+v \in W_2$ और W_2 सदिश समष्टि की उपसमष्टि है, इसलिए

$$u+v \in W_2, v \in W_2 \Rightarrow \quad (u+v)-v \in W_2$$

$$\Rightarrow u+(v+v) \in W_2$$

$$\Rightarrow u+0 \in W_2$$

$\Rightarrow u+ \in W_2$, जो कि (1) का विरोधाभास है ।

अत: जो मैंने माना है गलत है । फलत: $W_1 \subset W_2$ या $W_2 \subset W_1$.

12.3.2 सदिश उपसमष्टि के उदाहरण

उदाहरण 1 : प्रदर्शित कीजिये कि समुच्चय $W=\{(a,b,0) \mid a,b \in F\}$, सदिश समष्टि V(F) = $\{(a,b,c) \mid a,b,c \in F\}$ जिसमें सदिश योग और अदिश गुणन निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

और $\quad \alpha(a_1,a_2,a_3)=(\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha a_3) \quad \forall \quad \alpha \in F$

और $\quad (a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3) \in V$ की उपसमष्टि है ।

हल : चूँकि F क्षेत्र है, इसलिए

$$0 \in F \Rightarrow (0,0,0) \in W$$

$$\Rightarrow W \neq 0$$

माना $x=(a_1,a_2,0), y=(b_1,b_2,0)$

समुच्चय W के कोई दो अवयव हैं। तब $\forall \quad \alpha,\beta \in F$ के लिए

$$\alpha x=\beta y=\alpha(a_1,a_2,0)+\beta(b_1,b_2,0)$$

$$=(\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha 0)+(\beta b_1,\beta b_2,\beta 0)$$

$$=(\alpha a_1+\beta b_1,\alpha a_2+\beta b_2,0)$$

$=(c_1,c_2,0)$,, जहां $c_1,c_2 \in F$, क्योंकि F एक क्षेत्र है ।

$\Rightarrow \quad \alpha x+\beta y \in W$. अत: W सदिश समष्टि V(F) की एक उपसमष्टि है ।

उदाहरण 2 : प्रदर्शित कीजिऐ कि समुच्चय $W=\{(a,b,c) \mid a-3b+4c=0; a,b,c \in F\}$ सदिश समष्टि$V(F)=\{(a,b,c) \mid a,b,c \in F\}$ की एक उपसमष्टि है ।

हल : चूंकि F एक क्षेत्र है, इसलिए $o \in F$

$$\Rightarrow (0,0,0) \in W$$
$$\Rightarrow W \neq \phi$$

माना $x = (a_1, a_2, a_3), y = (b_1, b_2, b_3)$ समुच्चय W के कोई दो अवयव हैं । इसलिए

$$a_1 - 3a_2 + 4a_3 = 0$$

तथा $b_1 - 3b_2 + 4b_3 = 0$

$\forall\ \alpha, \beta \in F$ और $x, y \in W$

$$\alpha x = \beta y = \alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(b_1, b_2, b_3)$$
$$= (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) + (\beta b_1, \beta b_2, \beta b_3)$$
$$= (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \alpha a_3 + \beta b_3)$$
$$= (c_1, c_2, c_3)$$

जहां $c_1, c_2, c_3 \in F$, क्योंकि F एक क्षेत्र है । अब

$$c_1 - 3c_2 + 4c_3 = (\alpha a_1 + \beta b) - 3(\alpha a_2 + \beta b_2) + 4(\alpha a_3 + \beta b_3)$$
$$= \alpha(a_1 - 3a_2 + 4a_3) + \beta(b_1 - 3b_2 + 4b_3)$$
$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 \qquad \text{[(1) का प्रयोग करने पर]}$$
$$\Rightarrow \quad c_1 - 3c_2 + 4c_3 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \alpha x + \beta y \in W$$

$\Rightarrow W$ सदिश समष्टि V (F) की एक उपसमष्टि है ।

उदाहरण 3 : प्रदर्शित कीजिये कि समुच्चय $W = \left\{a + b\sqrt{3} \middle| a, b \in R\right\}$, जहाँ R वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र है, सदिश समष्टि R (R) की एक अपसमष्टि है ।

हल : चूँकि R एक क्षेत्र है, इसलिए $0 \in R$

$$\Rightarrow 0 + 0\sqrt{3} \in W$$
$$\Rightarrow W \neq 0$$

माना $x = a_1 + b_1\sqrt{3}, y = a_2 + b_2\sqrt{3}$ समुच्चय W के कोई दो अवयव हैं । इसलिए $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R.$ अब $\forall \alpha, \beta \in F; x, y \in W$ के लिए

$$\alpha x + \beta y = \alpha\left(a_1 + b_1\sqrt{3}\right) + \beta\left(a_2 + b_2\sqrt{3}\right)$$
$$= (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2)\sqrt{3}$$
$$= c_1 + c_2\sqrt{3},$$

जहाँ $c_1, c_2 \in R$,क्योंकि R एक क्षेत्र है । '

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in W$$

अत: W (R), सदिश समष्टि R (R) की एक उपसमष्टि है ।

उदाहरण 4 : माना R वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र है तथा $M_2(R)$ वास्तविक संख्याओं की 2×2 कोटि के सभी मैट्रिक्स का समुच्चय है । $M_2(R)$ मैट्रिक्स योग एवं मैट्रिक्स अदिश गुणन के सापेक्ष R पर एक सदिश समष्टि है।

प्रदर्शित कीजिये कि मैट्रिक्स समुच्चय

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a,b\in R\right\}$$

सदिश समष्टि M_2 (R) की एक उप समष्टि होगी ।

हल :

$$0\in R \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in W$$

$$\Rightarrow W\neq 0$$

माना $x=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}.y=\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ समुच्चय W के कोई दो अवयव है ।

अब $\forall \alpha,\beta\in R$ के लिए

$$\alpha x+\beta y=\alpha\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha a_1 & 0 \\ 0 & \alpha b_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta a_2 & 0 \\ 0 & \beta b_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha a_1+\beta a_2 & 0 \\ 0 & \alpha b_1+\beta b_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

जहाँ $\alpha_3,b_3\in R$, क्योंकि R एक क्षेत्र है

$$\Rightarrow \alpha x+\beta y=\begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}\in W$$

अत: W सदिश समष्टि M_2 (R) की एक उपसमष्टि है ।

स्वमूल्यांकन प्रश्न- 2

1. यदि V(F) एक सदिश समष्टि है जिसमें एक से ज्यादा अवयव हैं, तो V (F) की कम से कम कितनी उपसमष्टियाँ हो सकती हैं ।
2. यदि Q और R क्रमश: परिमेय और वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र हों, तो क्या Q, सदिश समष्टि R (R) की उपसमष्टि है?

3. यदि W किसी सदिश समष्टि V(F) का कोई उपसमुच्चय हो, तो क्या W,V (F) की उपसमष्टि है ?

12.4 सारांश

इस इकाई में आपने मुख्यत: सदिश समष्टि और सदिश उपसमष्टि के विषय में जानकारी प्राप्त की है । इनसे सम्बन्धित कुछ महत्वपूर्ण परिणामों की जानकारी प्राप्त करते हुए आप ने सीखा कि किसी सदिश समष्टि के उपसमष्टिओं का सर्वनिष्ठ सदैव उस सदिश समष्टि की उपसमष्टि होती है परन्तु इनका संघ उस सदिश समष्टि की उपसमष्टि होना आवश्यक नहीं है ।

12.5 शब्दावली

सदिश समष्टि	Vector space
सदिश उपसमष्टि	Vector subspace
शून्य सदिश	Null space
निरर्थक उपसमष्टि	Trivial subspace
उचित उपसमष्टि	Proper subspace

12.6 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. सत्य
2. सत्य
3. असत्य
4. सदिश समष्टि नहीं है क्योंकि समुच्चय V मैट्रिक्स योग और अदिश गुणन के लिए संवृत नही है ।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. दो
2. नहीं
3. नहीं

12.7 अभ्यास प्रश्न

1. माना R वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र है तथा M_2 (R) वास्तविक संख्याओं की 2×2 कोटि के सभी मैट्रिक्स का समुच्चय है । प्रदर्शित कीजिये कि M_2 (R) मैट्रिक्स योग एवं मैट्रिक्स अदिश R के सापेक्ष R पर एक सदिश समष्टि है ।
2. यदि F कोई क्षेत्र है तथा $V=\{(a_1,a_2,.....,a_n)|a_i\in F, i=1,2,....,n\}$ n टपिलों का एक समुच्चय है । V में योग तथा अदिश गुणन जो निम्न प्रकार से परिभाषित है
   $(a_1,a_2,.....,a_n)+(b_1,b_2,.....,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,.....,a_n+b_n)$
   तथा $\alpha(a_1,a_2,.....,a_n)=(\alpha a_1,\alpha a_2,.....,\alpha a_n)$ तो सिद्ध किजिये कि V क्षेत्र F पर सदिश समष्टि है ।

3. यदि F कोई क्षेत्र है तो प्रदर्शित कीजिये कि समुच्चय $W=\{(a,b,c)\mid a+b+c=0; a,b,c\in F\}$ सदिश समष्टि $V(F)=\{(a,b,c)|a,b,c\in F\}$ की एक उपसमष्टि है ।
4. माना क्षेत्र F पर V एक सदिश समष्टि है तथा नियत $v\in V$ के लिए माना $W_v=\{\alpha v|\alpha\in F\}$, तो सिद्ध करो कि W_v सदिश समष्टि V (F) भी एक उपसमष्टि है ।
5. प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय $W=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\mid a,b,c\in R\}$ ने सदिश R (R) की एक उपसमष्टि है ।

इकाई 13: सदिशों का एकघात संचय, एकघाती स्वतन्त्रता एवं आश्रितता (Linear Combination of Vectors, LinearIndependence and Dependence)

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य

13.1 प्रस्तावना

13.2 सदिशों का एकघात संचय

13.2.1 एकघाती विस्तृति

13.3 एकघाती स्वतन्त्रता एवं आश्रितता

13.4 सारांश

13.5 शब्दावली

13.6 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

13.7 अभ्यास प्रश्न

13.0 उद्देश्य

इस इकाई में सदिशों का एकघात संचय, एकघाती स्वतन्त्रता एवं आश्रितता के विषय में चर्चा की गयी है । इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप,

- सदिशों का एकघात संचय, एकघाती स्वतन्त्रता एवं आश्रितता के विषय में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे ।
- समझ सकेंगे कि सदिशों का एकघात संचय अद्वितीय नहीं होता है ।
- समझ सकेंगे कि किसी सदिश समष्टि के उपसमुच्चय की एकघात विस्तृति उस सदिश समष्टि की उपसमष्टि होती है
- समझ सकेंगे कि यदि किसी सदिश समष्टि के किसी उपसमुच्चय में शून्य सदिश विद्यमान हो तो वह उपसमुच्चय एकघाततः परतन्त्र होता है ।
- समझ सकेंगे कि किसी सदिश समष्टि V(F) में यदि $0 \neq v \in V(F)$, तो एकल समुच्चय {v} सदैव एकघाततः स्वतन्त्र होता है ।
- समझ सकेंगे कि किसी सदिश समष्टि में एकघाततः स्वतन्त्र समुच्चय का प्रत्येक उपसुच्चय एकघाततः स्वतन्त्र होता है ।

13.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम सदिशों का एकघात संचय, एकघाती स्वतन्त्रता एवं के विषय में चर्चा करेंगे । इनसे सम्बन्धित कुछ महत्वपूर्ण उदाहरण देते हुए इनको समझाने की कोशिश करेंगे । इनसे सम्बन्धित कुछ अत्यन्त महत्वपूर्ण परिणामों की भी जानकारी देंगे ।

13.2 सदिशों का एकघात संचय (Linear Combination of Vectors)

माना V, क्षेत्र F पर एक सदिश समष्टि है । एक सदिश $v \in V, V$ सदिशों $v_1, v_2, ..., v_n$ का एकघात संचय कहलाता है यदि आदिशों $a_1, a_2, ..., a_n$ का F में अस्तित्व हो, ताकि

$$v = a_1, v_2 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$$

सदिशों का एकघात संचय अद्वितीय नहीं होता है क्योंकि अदिशों $a_1, a_2, ..., a_n$ के विभिन्न मानों के संगत दिये गये सदिशों $v_1, v_2, ..., v_n$ के कई एकघात संचय प्राप्त किए जा सकते हैं।

उदाहरण 1 : माना ने वास्तविक संख्याओं का क्षेत्र है । सदिश समष्टि

$$V(R) = \{(a_1, a_2, a_3) | a_1, a_2, a_3 \in R\}$$

में सदिश v = (5, 9, 6) को दिये हुये सदिशों $v_1 = (2,1,4), v_2 = (1,-1,3), v_3 = (3,2,6)$ के एकघात संचय में व्यक्त कीजिये ।

हल : माना $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$ जहाँ

$$a_1, a_2, a_3 \in R \qquad ....(1)$$

$$\Rightarrow \quad (5,9,16) = a_1(2,1,4) + a_2(1,-1,3) + a_3(3,2,6)$$

$$= (2a_1, a_1, 4a_1) + (a_2, -a_2, 3a_2) + (3a_3, 2a_3, 6a_3)$$

$$= (2a_1 + a_2 + 3a_3, a_1 - a_2 + 2a_3, 4a_1 + 3a_2 + 6a_3)$$

$$\Rightarrow \quad 2a_1 + a_2 + 3a_3 = 5 \qquad .....(2)$$

$$a_1 - a_2 + 2a_3 = 9 \qquad .....(3)$$

$$4a_1 + 3a_2 + 6a_3 = 6 \qquad .....(4)$$

(2) को 2 से गुणा कर (4) में से घटाने पर

$$a_2 = -4$$

$a_2 = -4$, (2) और (3) में रखने पर

$$2a_1 + 3a_3 = 9$$

$$a_1 + 2a_3 = 5$$

(5) और (6) को सरल करने पर $a_1 = 3$ और $a_3 = 1$. a_1, a_2, a_3 के मान (1) मे रखने पर

$$v = 3v_1 - 4v_2 + v_3$$

उदाहरण 2 : क्या सदिश समष्टि

$$V(R) = \{a_1, a_2, a_3 \mid a_1, a_2, a_3 \in R\}$$

में सदिश $v = (2,-5,4)$ को सदिशों $v_1 = (1,-3,2)$ और $v_2 = (2,-1,1)$ के एकघात संचय के रूप में व्यक्त कर सकते हैं?

हल : माना $v = a_1 v_1 + a_2 v_2$ जहां

$$a_1, a_2 \in R \qquad .....(1)$$

$$\Rightarrow \quad (2,-5,4) = a_1(1,-3,2) + a_2(2,-1,1)$$

$$= (a_1, -3a_1, 2a_1) + (2a_2, -a_2, a_2)$$

$$= (a_1 + 2a_2, -3a_1 - a_2, 2a_1 + a_2)$$

$$\Rightarrow \quad a_1 + 2a_2 = 2 \qquad .....(2)$$

$$-3a_1 - a_2 = -5 \qquad .....(3)$$

$$2a_1 + a_2 = 4 \qquad .....(4)$$

2 को 2 से गुणा करके (4) में से घटाने पर

$$-3a_2 = 0$$

$$\Rightarrow a_2 = 0$$

$a_2 = 0$, समीकरण (2) में रखने पर $a_1 = 2.a_2 = 0,$ समीकरण (3) में रखने पर $a_1 = \frac{5}{3}$

चूँकि a_1 और a_2 के मान समीकरण (4) को संतुष्ट नहीं करते हैं, इसलिए दिये गये सदिश $v = (2,-5,4)$ को सदिशों $v_1 = (1,-3,2), v_2 = (2,-1,1)$ के एकघात संचय के रूप में व्यक्त नहीं कर सकते हैं ।

उदाहरण 3: माना $v = (1,\alpha,5)$ सदिश समष्टि $V(R) = \{(a_1,a_2,a_3) | a_1,a_2,a_3 \in R\}$ का कोई अवयव है । α के किस मान के लिए दिये गये सदिश v को सदिशों $v_1 = (1,-3,2), v_2 = (2,-1,1)$ के एकघात संचय के रूप में व्यक्त कर सकते हैं ।

हल: माना $v = a_1v_1 + a_2v_2$ जहाँ $a_1, a_2 \in R$ ....(1)

$$\Rightarrow \quad (1,\alpha,5) = a_1(1,-3,2) + a_2(2,-1,1)$$

$$= (a_1, -3a_1, 2a_1) + (2a_2, -a_2, a_2)$$

$$= (a_1 + 2a_2, -3a_1 - a_2, 2a_1 + a_2)$$

$$\Rightarrow a_1, 2a_2 = 1 \qquad .....(2)$$

$$-3a_1 - a_2 = \alpha \qquad .....(3)$$

$$2a_1 + a_2 = 5 \qquad .....(4)$$

समीकरण (2) में 2 से गुणा करके (4) में से घटाने पर

$$-3a_2 = 3$$

$$\Rightarrow a_2 = -1$$

$a_2 = -1,$ समीकरण (2) में रखने पर $a_1 = 3.$

$a_1 = 3$ और $a_2 = -1$, समीकरण (3) में रखने पर $\alpha = -8$. चूँकि a_1 और a_2 के मान समीकरण (4) को भी सन्तुष्ट करते हैं, इसलिए $\alpha = -8$ के लिये दिये गये सदिश $v \in V(R)$ को सदिशों v_1 और v_2 के एकघात संचय के रूप में व्यक्त कर सकते हैं ।

13.2.1 एकघाती विस्तृति (Linear span)

यदि S किसी सदिश समष्टि V (F) का कोई अरिक्त उपसमुच्चय हो, तो S के परिमित अवयवों के सम्पूर्ण एकघाती संचयों का समुच्चय S का एकघाती विस्तृति कहलाता है और इसे L(S) के द्वारा प्रकट करते हैं ।

अत:

$$L(S) = \left\{ v \mid v = \sum_{i-I}^{n} a_i v_i, a_i \in F, v_i \in S, n \geq 1 \right\}$$

रिक्त समुच्चय ϕ की विस्तृति को {0} से परिभाषित करते हैं अर्थात L (ϕ) = {0}.

1 : यदि $S = \{v(1,0)\}$ सदिश समष्टि $V(R) = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in R\}$ का उपसमुच्चय है, तो

$$L(S) = \{av \mid a \in R\}$$
$$= \{a(1,0) \mid a \in R\}$$
$$= \{(a,0) \mid a \in R\},$$ जो कि x- अक्ष के सम्पूर्ण बिन्दुओं का समुच्चय है ।

उदाहरण 2 : यदि $S = \{v_1 = (1,0,0), v_2 \mid a_1, a_2 \in R\}$ सदिश समष्टि $V(R) = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_1, a_2, a_3 \in R\}$ का उपसमुच्चय है, तो

$$L(S) = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 \mid a_1, a_2 \in R\}$$
$$= \{a_1(1,0,0) + a_2(0,0,1) \mid a_1, a_2 \in R\}$$
$$= \{(a_1, 0, 0) + (0, 0, a_2) \mid a_1, a_2 \in R\}$$
$$= \{(a_1, 0, a_2) \mid a_1, a_2 \in R\},$$ जो कि xz- पर सम्पूर्ण बिन्दुओं का समुच्चय है ।

उदाहरण 3 : माना S = {v = 1} सदिश समष्टि R(R) का एक उपसमुच्चय है,तो

$$L(S) = \{av \mid a \in R\}$$
$$= \{a \cdot 1 = a \mid a \in R\}$$
$$= R$$
$$\Rightarrow \quad L(S) = R(R)$$

प्रमेय 1 : किसी सदिश समष्टि V (F) के उपसुच्चय S की एकघात विस्तृति L(S),S को अन्तर्विष्ट करने वाला V (F) की न्यूनतम उपसमष्टि है ।

उपपत्ति : माना v समुच्चय S का कोई अवयव है । तब

$$v = 1.v$$
$$\Rightarrow v \in L(S) \forall v \in S$$
$$\Rightarrow L(S) \neq \phi \text{ तथा } S \subset L(S)$$

माना u, v समुच्चय L(S) के कोई दो स्व्यव है तब

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \quad a_i \in F, u_i \in S$$

और

$$v = \sum_{j=1}^{m} b_j v_j, \quad b_j \in F, v_j \in S$$

माना α, β क्षेत्र F के कोई दो अवयव है तो

$$\alpha \ u + \beta \ v = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \beta \sum_{j=1}^{m} b_j v$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i) u_i + \sum_{j=1}^{m} (\beta b_j) v_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n} c_i u_i + \sum_{j=1}^{m} d_j v_j \qquad \text{जहाँ } c_i d_j \in F, u_i, u_j \in S$$

$\Rightarrow \alpha u + \beta v$ समुच्चय S परिमित अवयवों का एकघात संचय है । इसलिए $\alpha u + \beta v \in L(S) \ \ \forall \ \alpha, \beta \in F$ और $u, v \in L(S)$

फलत: L (S) सदिश समष्टि V (F) की एक उपसमष्टि है ।

$S \subset L(S) \Rightarrow L(S)$ समुच्चय S को अन्तर्विष्ट करता है । हमें सिद्ध करना है कि S को अन्तर्विष्ट करने वाली यह सबसे छोटी उपसमष्टि है । माना W,V(F) की एक उपसमष्टि है जो ठइ को अन्तर्विष्ट करती है ।

$S \subset W \Rightarrow S$ का प्रत्येक अवयव W में है ।

चूँकि W, सदिश समष्टि V(F) की एक उपसमष्टि है इसलिए W सदिश योग और अदिश गुणन के लिए संवृत है । अत: समुच्चय S के अवयवों का अदिश गुणन और इनका योग W में है । फलत: $L(S) \subset W$.

अत: $L(S), S$ को अन्तर्विष्ट करने वाला V(F) की न्यूनतम उपसमष्टि है ।

प्रमेय 2 : यदि S और T सदिश समष्टि V(F) के उपसमुच्वय हों, तो

$(i) \quad S \subset L(T) \Rightarrow L(S) \subset L(T)$

$(ii) \quad S \subset T \Rightarrow L(S) \subset L(T)$

(iii) S, V की उपसमष्टि है यदि और केवल यदि $L(S) = S$,

$(iv) \quad L(L(S)) = L(S)$

उपपत्ति : (i) दिया हुआ है $S \subset L(T)$

हमें सिद्ध करना है

$$L(S) \subset L(T)$$

माना $u \in L(S).u \in L(S) \Rightarrow \exists\ u_1, u_2, ..., u_n \in S, a_1, a_2, ...a_n \in F$ ताकि $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$

चूंकि $S \subset L(T)$, इसलिए $u_1, u_2, ..., u_n \in S$

$$\Rightarrow\ u_1, u_2, ..., u_n \in L(T)$$

$$\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in L(T),$$ क्योंकि L(T), V कि उपसमष्टि है

$$\Rightarrow\ u \in L(T)$$

अतः

$$u \in L(S) \Rightarrow u \in L(T)$$

$$\Rightarrow L(S) \subset L(T)$$

(ii) दिया हुआ है $S \subset T \cdot$

हमें सिद्ध करना है कि

$$L(S) \subset L(T)$$

माना $u \in L(S)$,

$$u \in L(S)\ \ \exists\ u_1, u_2, ..., u_n \in S, a_1, a_2, ...a_n \in F \text{ ताकि } u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \cdot$$

चूंकि $S \subset T$, इसलिये $u_1, u_2, ..., u_n \in S \Rightarrow\ u_1, u_2, ..., u_n \in T$

$$\Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in L(T),$$

$$\Rightarrow\ u \in L(T)$$

अत:

$$u \in L(S) \Rightarrow\ u \in L(T)$$

$$\Rightarrow\ L(S) \subset L(T)$$

(iii) सर्वप्रथम माना कि S, V की उपसमिष्ट है

हमें सिद्ध करना है कि

$$L(S) = S$$

माना कि $u \in L(S)$, तो ताकि $\exists\ \ u_1, u_2, ..., u_n \in S; a_1, a_2, ..., a_n \in F$ ताकि $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \cdot$

चूंकि S,V (F) की उपसमष्टि है, इसलिये $u_1, u_2 ....., u_n \in S; a_1, a_2 ....., a_n \in F$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in S$$

$$\Rightarrow \quad u \in S$$

अतः

$$u \in L(S) \Rightarrow u \in S \qquad ....(1)$$

$$\Rightarrow L(S) \subset S$$

माना u, S का कोई अवयव है, $1 \in F$ के लिए

$$u = 1.u \in L(S)$$

$$\Rightarrow S \subset L(S) \qquad .... (2)$$

समीकरण (1) व (2) से

$$L(S) = S$$

विलोमतः माना कि $L(S) = S$. हमें सिद्ध करना है कि $S, V(F)$ की उपसमष्टि है ।

प्रमेय 1 से हम जानते है कि $L(S), V$ की उपसमष्टि है

इसलिए S भी V की उपसमष्टि होगी क्योंकि $L(S) = S$

(iv) चूंकि $L(S), V(F)$ की एक उपसमष्टि है,

इसलिए (iii) $L(L(S)) = L(S)$.

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. सदिश समष्टि $V(R) = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in R\}$ के सदिशों (2,3) को सदिशों $v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)$ के एकघात संचय के रूप में व्यक्त कर सकते हैं ।
2. सत्य/असत्य
3. सदिश $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,0,1), v_3 = (0,0,1)$ सदिश समिष्ट $V(R) = \{(a_1, a_2, a_3) | a_1, a_2, a_3 \in R\}$ को विस्तृति करते हैं ।
4. सत्य/असत्य
5. यदि $(C, +, \cdot)$ संख्याओं का क्षेत्र है, तो समुच्चय S = $\{1,i\}$ सदिश समिष्ट C(R) को विस्तृत नहीं करता है।
6. सत्य/असत्य
7. यदि V(F) समष्टि है तथा समुच्चय S = $\{0\}$ जहां 0, V मे सदिश योग के लिए तत्समक अवयव है, तो L (S) ज्ञात कीजिये ।
8. सत्य/असत्य

13.3 एकघाती स्वतन्त्रता एवं आश्रितता (Linear Independence and Dependence)

माना V क्षेत्र F पर कोई सदिश समष्टि है तथा $S=\{v_1,v_2,.....,v_n\}$ समष्टि V का एक परिमित उपसमुच्चय है। S को एकघाततः स्वतन्त्र कहते हैं यदि और केवल यदि $a_1,a_2,.....a_n \in F$ ताकि

$$a_1a_2+v_1v_2+.....+a_nv_n=0$$

$$\Rightarrow \quad a_1=a_2=.....=a_n=0$$

दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि समुच्चय S एकघाततः स्वतन्त्र कहलाता यदि S के सभी अवयवों का एकघाती संचत शून्य सदिश हो, तो सभी आादेश शून्य के बराबर होने चाहिए।

समुच्चय S एकघाततः आश्रित कहलाता है यदि अदिर्शो $a_1,a_2,.....a_n \in F$ का अस्तित्व हो जिसमें सभी शून्य न हों परन्तु आप $a_1v_1+a_2v_2+.....+a_nv_n=0$ हो ।

टिप्पणी :

(1) यदि $S=\{v_1,v_2,.....,v_n\}$ किसी सदिश समष्टि V(F) का एक है जिसमें शून्य सदिश विद्यमान है तो S एकघाततः आश्रित होगा क्योंकि यदि $v_1=0$ हो, तो

$$1.v_1+0.v_2+.....+0.v_n=1.0+0+.....+0=0$$

और v_1 का गुणांक शून्य नहीं है ।

(ii) यदि $0 \neq v \in V(F)$, तो एकल समुच्चय S = {v} एकघाततः स्वतन्त्र होता, क्योंकि सदिश समष्टि v में यदि $v \neq 0$ और av = 0 हो तो a = 0 होता है ।

उदाहरण 1 : सदिश समष्टि $V(R)=\{(a_1,a_2,a_3)|a_1,a_2,a_3 \in R\}$ में सदिश $v_1=(1,-1,0), v_2=(1,3,-1)$ तथा $v_3=(5,3,-2,)$ एकघाततः आश्रित हैं क्योंकि

$$3v_1+2v_2-v_3=(0,0,0)=0$$

उदाहरण 2 : सदिश समष्टि $V(R)\{(a_1,a_2,a_3,a_4)\,|\,a_1,a_2,a_3,a_4 \in R\}$ मे सदिश $v_1=(6,2,3,4), v_2=(0,5,-3,1)$ तथा $v_3=(0,0,7,-2)$ एकघाततः स्वतन्त्र हैं ।

हल : माना $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=0$ जहां $a_1,a_2,a_3 \in R$

$$\Rightarrow \quad a_1(6,2,3,4)+a_2(0,5,-3,1)+a_3(0,0,7,-2)=(0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \quad (6a_1,2a_1+5a_2,3a_1-3a_2+7a_3,4a_1+a_2-2a_3)=(0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \quad 6a_1=0 \qquad .....(1)$$

$$2a_1 + 5a_2 = 0 \qquad .....(2)$$

$$3a_1 - 3a_2 + 7a_3 = 0 \qquad .....(3)$$

$$4a_1 + a_2 - 2a_3 = 0 \qquad .....(4)$$

समीकरण (1) से $a_1 = 0$

$a_1 = 0$, (2) में रखने पर $a_2 = 0$

$a_1 = 0, a_2 = 0$ (3) में रखने पर $a_3 = 0$

$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$, (4) में रखने पर $a_4 = 0$

अत.

$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$

$\Rightarrow v_1 = v_2 = v_3 = 0$ एकघातत: स्वतन्त्र हैं ।

उदाहरण 3 : प्रदर्शित कीजिये कि सदिश समष्टि का उपसमुच्चय $S = \{(3,0),(0,4)\}$ एकघातत: स्वतन्त्र है ।

हल : माना और $a_1(3,0) + a_2(0,4) = (0,0)$

$\Rightarrow \quad (3a_1, 0) + (0, 4a_2) = (0,0)$

$\Rightarrow \quad (3a_1, 4a_2) = (0,0)$

$\Rightarrow \quad 3a_1 = 0$ और $4a_2 = 0$

$\Rightarrow \quad a_1 = 0$ और $a_2 = 0$

अत: समुच्चय $S = \{(3,0),(0,4)\}$ एकघातत: स्वतन्त्र है ।

प्रमेय 3 : किसी सदिश समष्टि में सदिशों के एकघातत: स्वतन्त्र समुच्चय का प्रत्येक अरिक्त अपसमुच्चय भी एकघातत: स्वतन्त्र होता है ।

उपपत्ति : माना कि $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ सदिश समष्टि V(F) के सदिशों का एकघातत: स्वतन्त्र समुच्चय है तथा $S_1 = \{v_1, v_2, ..., v_1\}$, जहाँ समुच्चय S का कोई अरिक्त उपसमुच्चय है ।

हमें सिद्ध करना है कि S_1 भी एकघातत: स्वतन्त्र है ।

माना इस प्रकार है कि $a_1, a_2, ...a_l \in F$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ...a_l v_l = 0$$

अब $\quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_l v_l + a_{l+1} v_{l+1} + ...a_n v_n = 0$

$\Rightarrow \quad a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, क्योंकि समुच्चय S एकघातत: स्वतन्त्र है ।

अत: $\quad a_1 = a_2 = ... = a_l = 0$

अत: समुच्चय S_1 एकघातत: स्वतन्त्र है । परन्तु S_1 समुच्चय S का कोई अरिक्त उपसमुच्चय है फलत: S का प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय एकघातत: स्वतन्त्र है ।

प्रमेय 4 : माना V(F) एक सदिश समष्टि है । यदि $v \in F$ सदिशों $v_1, v_2, ...v_n$ का एकघात संचय हो, तो समुच्चय $\{v, v_1, v_2, ...v_n\}$ एकघातत: परतन्त्र होता है ।

उपपत्ति : चूँकि सदिश $v \in F$ सदिशों $v_1, v_2, ...v_n$ का एकघात संचय है, इसलिये अदिशों $a_1, a_2, ..., a_n \in F$ का अस्तित्व होगा ताकि

$$v = a_1 v_2 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n$$

$\Rightarrow \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n + (-1) v = 0,$ जहाँ कम से कम $(-1) \neq 0$

$\Rightarrow$ समुच्चय । $\{v, v_1, v_2, ...v_n\}$ एकघातत: परतन्त्र है ।

प्रमेय 5 : सदिश समष्टि V(F) में यदि सदिश $v, v_1, v_1+, ...v_n$ आश्रित हो तथा सदिश $v, v_1, v_1, ...v_n$ एकघातत: स्वतन्त्र हो, तो सदिश v सदिशों $v, v_1, v_1, ...v_n$ का एकघात संचय होता है ।

उपपत्ति : चूँकि सदिश $v, v_1, v_1, ...v_n$ सदिश समष्टि V(F) में एकघातत: आश्रित हैं, इसलिए अदिशों $a, a_1, a_2.....a_n \in F$ का अस्तित्व होगा जहाँ सभी शून्य नहीं हैं परन्तु

$$av + a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0$$

$a \in F \Rightarrow a = 0$ या $a \neq 0 \cdot$

यदि a = 0, तो समीकरण (1) से

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_n v_n = 0$$

$\Rightarrow \quad a_1 = a_2 = ... = a_n = 0,$ क्योंकि सदिश $v_1, v_2, ...v_n$ स्वतन्त्र हैं ।

$\Rightarrow$ सदिश $v, v_1, v_1, ...v_n$ एकघातत: स्वतन्त्र हैं, जो विरोघाभास है ।

अत: $\quad a \neq 0 \cdot \quad 0 \neq a \in F \quad \Rightarrow \quad a^{-1} \in F$ ताकि $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$

समीकरण (1) से

$$av = -a_1 v_1 - a_2 v_2 - ..... - a_n v_n$$

$\Rightarrow \quad v = (-a^{-1} a_1) v_1 + (-a^{-1} a_2 v_2) + ... + (-a^{-1} a_n) v_n$

$\Rightarrow \quad = b_1 v_1 + v_2 v_2 + ... + b_n v_n$ जहाँ $b_1, b_2, ..., b_n \in F$

$\Rightarrow$ सदिश v सदिशों $v_1, v_2, ...v_n$ का एकघात संचय है ।

प्रमेय 6 : किसी सदिश समष्टि में यदि किसी परिमित समुच्चय का कोई उपसमुच्चय एकघातत: परतन्त्र हो, तो वह परिमित समुच्चय भी एकघातत: परतन्त्र होता है ।

उपपत्ति : माना सदिश समष्टि V(F) में $A = \{v_1, v_2, ...v_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ परिमित समुच्चय है और $B = \{v_1, v_2, ...v_m\}$, A का कोई उपसुव्यय है जो एकघातत: परतन्त्र है । हमे सिद्ध करना है कि समुच्चय A
एकघातत: परतन्त्र होगा ।

चूँकि समुच्चय B एकघातत: परतन्त्र है, इसलिए अदिशों $a_1, a_2, ..., a_m \in F$ का अस्तित्व होगा जिसमें सभी a_i शून्य नहीं हैं

परन्तु

$$a_1v_2 + a_2v_2 + ... + a_mv_m = 0$$

$\Rightarrow \quad a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_mv_m + 0v_{m+1} + ...0v_n = 0,$ जहाँ सभी a_i शून्य नहीं हैं

$\Rightarrow$ समुच्चय $A = \{v_1, v_2, ...v_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ एकघातत: परतन्त्र है ।

प्रमेय 7 : किसी सदिश समष्टि V(F) में अशून्य सदिशों का समुच्चय $S = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ एकघातत: आश्रित होगा यदि और केवल यदि जब कोई एक सदिश $v_m \in S$ अपने पूर्ववर्ती सदिशों का एकघात संचय हो, जहाँ $2 \le m \le n$.

उपपत्ति : सर्वप्रथम माना कि समुच्चय S एकघातत: आश्रित है । तो अदिशों $a_1, a_2, ..., a_n \in F$ का अस्तित्व होगा जहाँ सभी a_i शून्य नहीं हैं

परन्तु

$$a_1v_2 + a_2v_2 + ... + a_nv_n = 0 \qquad ....(1)$$

माना m,i का अधिकतम मान है जिसके लिए $a_m \ne 0$ तो (1) से

$$a_1v_2 + a_2v_2 + ... + a_mv_m + 0v_{m+1} + ... + 0v_n = 0$$

$\Rightarrow a_1v_2 + a_2v_2 + ... + a_mv_m = 0$ ...(2)

m > 1, क्योंकि यदि m = 1 तो (2) से

$a_1v_1 = 0$

$a_1v_1 = 0$ जहाँ $a_1 \ne 0$

$\Rightarrow v_1 = 0,$ जो कि विरोधाभास है क्योंकि समुच्चय D के सभी अवयव अशून्य हैं ।

अत: $2 \le m \le n$. चूंकि $0 \ne a_m \in F$

तो $a_m^{-1} \in F$ ताकि $a_m a_m^{-1} = 1 = a_m^{-1} a_m$

समीकरण (2) से

$$a_mv_m = -a_1v_1 - a_2v_2 - ..... - a_{m-1}v_{m-1}$$

$\Rightarrow \quad v_m = \left(-a_m^{-1}a_1\right)v_1 + \left(-a_m^{-1}a_2\right)v_2 + ...\left(-a_m^{-1}a_{m-1}v_{m-1}\right)$

$= b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_{m-1}v_{m-1}$ जहाँ $b_1, b_2, ..., b_{m-1} \in F$

v_m अपने पूर्ववर्ती सदिशों $v_1, v_2, ..., v_{m-1}$ का एकघात संचय है जहाँ $2 \le m \le n$.

विलोमत: माना कि एक सदिश $v_m \in S$ अपने पूर्ववर्ती सदिशों $v_1, v_2, ..., v_{m-1}$ का एकघात संचय है । तो अदिश $a_1, a_2 .....a_{m-1} \in F$ का अस्तित्व होगा ताकि

$$v_m = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_{m=1}v_{m-1}$$

$\Rightarrow a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_{m=1}v_{m-1} + (-1)v_m = 0$

$\Rightarrow \quad a_1v_1 + a_2v_2 + ... + (-1)v_m + 0v_{m+1} + ... + 0v_n = 0,$ जहाँ कम से कम

$\Rightarrow$ सदिशों $v_1, v_2, ..., v_n$ का एकघात संचय शून्य के बराबर है परन्तु सभी अदिश शून्य नहीं है । इसलिए समुच्चय S एकघातत आश्रित है ।

प्रमेय 8 : किसी सदिश समष्टि V(F) में अशून्य सदिशों का समुच्चय $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ एकघातत: आश्रित होता है यदि और केवल यदि S का कोई अवयव S के शेष अवयवों के एकघात संचय के रूप में व्यक्त किया जा सके ।

उपपत्ति. सर्वप्रथम माना कि समुच्चय S एकघातत: आश्रित है । तो अदिशों $a_1, a_2, ...a_n \in F$ का अस्तित्व होगा जहाँ सभी a_i, शून्य नहीं है

परन्तु

$$a_1v_2 + a_2v_2 + ... + a_mv_m + ... + a_nv_n = 0 \qquad .....(1)$$

माना $a_m \neq 0$ चूकि F एक क्षेत्र है और $0 \neq a_m \in F$ तो $a_m^{-1} \in F$ ताकि $a_m^{-1}a_m = 1.$

समीकरण (1) में योग के लिये क्रमविनिमेय नियम का पालन करने और दोनों तरफ $-a_m v_m$ जोड़ने पर

$$-a_mv_m = a_1v_1 + a_2v_2 + ...a_{m-1}v_{m-1} + a_{m+1}v_{m+1}..... + a_nv_n$$

$$\Rightarrow \quad v_m = (-a_m)^{-1}\left[a_1v_1 + a_2v_2 + ...a_{m-1}v_{m-1} + a_{m+1}v_{m+1} + ...a_nv_n\right]$$

$$= \left(-a_m^{-1}a_1\right)v_1 + \left(-a_m^{-1}a_2\right)v_2 + ...\left(-a_m^{-1}a_{m-1}\right)v_{m-1}$$

$$+\left(-a_m^{-1}a_{m+1}\right)v_{m+1} + ... + \left(-a_m^{-1}a_n\right)v_n$$

$$= b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_{m-1}v_{m-1} + b_{m+1}v_{m+1} + ...b_nv_n$$

जहां $b_i \in F, i = 1, 2, m-1, m+1, ..., n$

$\Rightarrow$ सदिश $v_m \in F$ समुच्चय S के शेष अवयवों के एकघात संचय के रूप व्यक्त किया जा सकता है ।

माना कि $v_m \in S$ को समुच्चय S के शेष अवयवों $v_1, v_2, ..., v_{m-1}, v_{m+1}, ..., v_n$ एकघात संचय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है । तो अदिशों $a_1, a_2, ...a_{m-1}, a_{m+1}, ..., a_n$ का अस्तित्व होगा ताकि

$$v_m = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_{m-1}v_{m-1} + a_{m+1}v_{m+1}, ..., a_nv_n$$

उपयुक्त समीकरण में योग के लिए क्रमविनिमेय नियम का पालन करने ओर दोनों तरफ $-v_m$ जोड़ने पर $0 = a_1v_1 + a_2v_2 + ... + (-1)v_m + a_{m+1}v_{m+1}..... + a_nv_n$ जहाँ $0 \neq 1 \in F$

$\Rightarrow$समुच्चय $S = \{v_1, v_2, ..., v_m, ..., v_n\}$ एकघातत: आश्रित है ।

प्रमेय 9 : किसी सदिश समष्टि V (F) में दो अस्म सदिश एकघातत: परतन्त्र है । यदि और केवल यदि इनमें से एक सदिश दूसरे सदिश के अदिश गुणन के बराबर है ।

उपपत्ति : माना u और v किसी सदिश समष्टि V (F) के दो अशून्य सदिश हैं । सर्वप्रथम माना कि u, v एकघातत: परतन्त्र है । इसलिये

$au + bv = 0,$ जहाँ a, b दोनों अशून्य अदिश हैं, क्योंकि यदि a = 0 और $b \neq 0,$ तो

$$au + bv = 0,$$
$$\Rightarrow \quad bv = 0$$

$\Rightarrow v = 0$ जो कि विरोधाभास है क्योंकि $v \neq 0$

इसीप्रकार यदि b = 0 और $a \neq 0$ तो यह प्रदर्शित किया जा सकता है कि u = 0 जो कि विरोधाभास है । अत: $au + bv = 0$ जहां $a \neq 0$ और $b \neq 0$

$$\Rightarrow a^{-1}(au + bv) = a^{-1}0$$
$$\Rightarrow (a^{-1}a)u(a^{-1}b)v = 0$$
$$\Rightarrow 1.u + (a^{-1}b)v = 0$$
$$\Rightarrow u = (-a^{-1}b)v$$

$\Rightarrow$सदिश u सदिश v का अदिश गुणन है ।

विलोमत: माना कि सदिश u सदिश v का अदिश गुणन है । तो एक अशून्य अदिश λ विद्यमान होगा ताकि u = λ v

$$\Rightarrow \quad 1 \cdot u + (-\lambda)v = 0, \text{ जहाँ } \lambda \neq 0$$

$\Rightarrow u, v$ एकघातत: परतन्त्र हैं ।

स्वमूल्याकन प्रश्न -2

1. माना S = $\{0\}$ जहाँ 0 सदिश समष्टि V(F) में सदिश योग के लिये तल्समक अवयव है । समुच्चय S एकघातत: स्वतन्त्र है ।

   सत्य / असत्य

2. सदिश समष्टि C (R) में समुच्चय S = $\{1,i\}$ एकघातत: स्वतन्त्र है ।

   सत्य / असत्य

3. सदिश समष्टि $V(R) = \{a_1, a_2, a_3, | a_1, a_2, a_3 \in R\}$ में समुच्चय $S\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ एकघातत परतन्त्र है।

   सत्य / असत्य

4. सदिश समष्टि $V(R) = \{a_1, a_2 | a_1, a_2 \in R\}$ में समुच्चय $S\{(0,0),(1,0),(0,2)\}$ एकघातत: परतन्त्र है ।

   सत्य / असत्य

उदाहरण 4 : सदिश समष्टि $V(R) = \{a_1, a_2, a_3, | a_1, a_2, a_3 \in R\}$ में समुच्चय $S = \{(2,3,5),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ एकघात: परतन्त्र है क्योंकि सदिश (2,3,5) शेष तीन सदिशों (1,0,0), (0,1,0)
और (0,0,1) का एकघात संचय है ।

उदाहरण 5 : प्रदर्शित कीजिये कि 2x 2 आकार के मैट्रिक्स की सदिश समष्टि ने $M_2(R)$ में समुच्चय

$$S=\left\{v_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, v_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, v_3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$$ एकघात स्वतंत्र है ।

हल : माना $a_1, a_2, a_3 \in R$ ताकि

$$a_1v_2 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}a_1 & a_1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_2 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_3 & a_3\\ a_3 & a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}a_1+a_2+a_3 & a_1+a_3\\ a_3 & a_2+a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} a_1+a_2+a_3 &= 0\\ a_1+a_3 &= 0\\ a_2+a_3 &= 0\\ a_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

अत: $a_1v_2 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$

$\Rightarrow$ समुच्चय S एकघातत स्वतन्त्र है ।

उदाहरण 6 : माना कि $S = \{u, v, w\}$ किसी सदिश समष्टि V(F) का एकघातत: स्वतंत्र समुच्च्य है। प्रदर्शित कीजिये कि समुच्चय

(i) $S_1 = \{u+v, v+w, w+u\}$ और

(ii) $S_2 = \{u+v, u-v, u-2v+w\}$

एकघातत: स्वतन्त्र हैं ।

हल :

(i) माना $a_1, a_2, a_3 \in F$ ताकि

$$a_1(u+u) + a_2(v+w) + a_3(w+u) = 0$$

$$\Rightarrow a_1u + a_1v + a_2v + a_2w + a_3w + a_3u = 0$$

$$\Rightarrow (a_1+a_3)u + (a_1+a_2)v + (a_2+a_3)w = 0 \qquad .....(1)$$

चूंकि सदिश u, v, w एकघाततः स्वतन्त्र हैं, इसलिए (1) से

$$a_1 + a_3 = 0 \qquad .....(2)$$

$$a_1 + a_2 = 0 \qquad .....(3)$$

$$a_2 + a_3 = 0 \qquad .....(4)$$

(2), (3) तथा (4) का योग करने पर

$$a_1 + a + a_3 = 0 \qquad .....(5)$$

(2), (3) (4) और (5) से

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

अतः $a_1(u+v) + a_2(v+w) + a_3(w+u) = 0$

$$\Rightarrow \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

समुच्चय S_1 एकघाततः स्वतन्त्र है ।

(ii) माना $a_1, a_2, a_3 \in F$ ताकि

$$a_1(u+v) + a_2(u-v) + a_3(u-2v+w) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (a_1 + a_2 + a_3)u + (a_1 - a_2 - a_3)v + a_3 w = 0 \qquad .....(1)$$

चूंकि सदिश u,v,w एकघाततः स्वतन्त्र हैं, इसलिये (1) से

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \qquad .....(2)$$

$$a_1 - a_2 - 2a_3 = 0 \qquad .....(3)$$

$$a_3 = 0 \qquad .....(4$$

(2), (3) और (4) को हल करने पर

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

अतः $a_1(u+v) + a_2(u-v) + a_3(u-2v+w) = 0$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$

$\Rightarrow$ समुच्चय S_2 एकघाततः स्वतन्त्र है ।

13.4 सारांश

इस इकाई में हमने सदिशों का एकघात संचय, एकघाती स्वतन्त्रता एवं आश्रितता के विषय में चर्चा की है । इनसे सम्बन्धित कुछ अत्यन्त महत्वपूर्ण जानकारियाँ प्राप्त हुयी ।

13.5 शब्दावली

एकघात संचय	Linear Combination
एकघाती स्वतन्त्रता	Linear Independence
एकघाती आश्रितता	Linear Dependence
एकघाती विस्तृति	Linear Span

13.6 स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. सत्य
2. सत्य
3. असत्य
4. L(S) = {0}

13.6 स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1 असत्य
2. सत्य
3. असत्य
4. सत्य

13.7 अभ्यास प्रश्न

1. सदिश समष्टि $V(R)=\{(a_1,a_2,a_3)|a_1,a_2,a_3\in R\}$ को सदिशों मे v= (1,-2,5) को सदिशो V_1 = (1,2,3), V_2 = (2,-1,1), V_3 = (1,1,1) के एकघात संचय में व्यक्त कीजिये । (उत्तर : $[v=3v_1+2v_2-6v_3]$

2. क्या सदिश समष्टि $V(R)=\{(a_1,a_2,a_3)|a_1,a_2,a_3\in R\}$ सदिशों v_1 =(1,-3,2) v_2 = (2,-4,-1) तथा v_3 = (1,-5,7) के एकघात संचय के रूप में व्यक्त कर सकते हैं ? (उत्तर : नहीं)

3. प्रदर्शित कीजिये कि समुच्चय $S=\{v_1=(1,2,3),v_2=(0,1,2),v_3=(0,0,1)\}$ सदिश समष्टि $V(R)=\{(a_1,a_2,a_3)|a_1,a_2,a_3\in R\}$ को विस्तृति करता है।

4. प्रदर्शित कीजिये कि सदिश समष्टि $V(R)=\{a_1,a_2,a_3,|\,a_1,a_2,a_3\in R\}$ मे निम्न लिखित एकघाततः स्वतंत्र है।

   $(i)S_1=\{v_1=(1,2,3),v_2=(0,1,2),v_3=(0,0,1)\}$

   $(ii)S_2=\{v_1=(1,1,0),v_2=(1,1,1),v_3=(2,1,3)\}$

5. सिद्धि कीजिए कि सदिश समिष्ट $V(R)=\{(a,b)\,|\,a,b\in R\}$ में सदिश (a_1,a_2) तथा (b_1,b_2) एकघाततः परतंत्र है यदि $a_1b_2-a_2b_1=0$

6. यदि $v_1,v_2,.....v_m$ एक सदिश समष्टि में m सदिश है जो की एकघाततः स्वतंत्र है और यदि अदिशों $a_1,a_2,.....a_m;b_1,b_2,.....b_m\in F$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि

$$a_1v_1+a_2v_2+.....+a_mv_m=b_1v_1+b_2v_2+.....+b_mv_m$$

   तो प्रदर्शित कीजिये कि $a_i=b_i\,;i=1,2,.....,m.$

इकाई 14 : सदिश समष्टि का आधार, विमा एवं इनके उदाहरण, परिमित विमीय सदिश समष्टियों के गुणधर्म, एकघाती विस्तृति एवं इससे जनित उपसमष्टि (Basis, Dimension of a vector space and their examples, Properties of finite dimensional vector spaces, Linear span and sub space generated by it)

इकाई की रूपरेखा

14.1 उद्देश्य
14.2 प्रस्तावना
14.3 सदिश समष्टि का आधार, विमा एवं इनके उदाहरण
14.3.1 सदिश समष्टि का आधार
14.3.2 सदिश समष्टि की विमा
14.3.3 सदिश समष्टि के आधार एवं विमा से सम्बन्धित उदाहरण
14.4 परिमित विमीय सदिश समष्टियों के गुणधर्म
14.5 एकघाती विस्मृति एवं इससे जनित उपसमष्टि
14.6 सारांश
14.7 शब्दावली
14.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर
14.9 अभ्यास प्रश्न

14.0 उद्देश्य

इस इकाई में सदिश समष्टि के आधार, विमा एवं सदिश समष्टि के किसी उपसमुच्चय के एकघाती विस्तृति के विषय में चर्चा की गयी है । इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- किसी सदिश समष्टि के आधार एवं विमा के विषय में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे ।
- यह जानकारी प्राप्त कर सकेंगे कि किसी सदिश समष्टि के एक से अधिक आधार हो सकते हैं ।
- यह जानकारी प्राप्त कर सकेंगे कि किसी सदिश समष्टि के आधार में शून्य सदिश नहीं होता है ।
- यह जानकारी प्राप्त कर सकेंगे कि प्रत्येक परिमित जनित सदिश समष्टि का एक आधार होता है ।
- यह जानकारी प्राप्त कर सकेंगे कि परिमित विमीय सदिश समष्टि के कोई भी दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है ।

- यह जानकारी प्राप्त कर सकेंगे कि परिमित विमीय सदिश समष्टि का प्रत्येक स्वतन्त्र उपसमुच्चय यदि सदिश समष्टि का आधार नहीं है तो उसे बढ़ाकर आधार बनाया जा सकता है ।

14.1 प्रस्तावना

इस इकाई मे हम सदिश समीष्टि के आधार विमा को परिभाषित करते हुए इनसे संबन्धित उदाहरणों को प्रस्तुत करेंगे । परिमित विमीय सदिश समष्टियों के अनेक गुण धर्मो के विषय मे चर्चा करेंगे । इकाई के अन्त में एकघाती विस्तृति एवं इससे जनित उपसमष्टि के विषय में चर्चा करेंगे ।

14.2 सदिश समष्टि का आधार. विमा एवं इनके उदाहरण (Basic, dimension of a vector space and their examples)

14.2.1 सदिश समष्टि का आधार (Basis of vector space)

माना V क्षेत्र F पर एक सदिश समष्टि है तथा S, V(F) का उपसमुच्चय है । तो समुच्चय Sसदिश समष्टि V(F) का आघार कहलाता है यदि S एकघातत: स्वतन्त्र हो तथा S, V(F) का जनक हो, अर्थात् V का प्रत्येक अवयव S के अवयवों के एकघात संचय के रूप में लिखा जा सके।

टिप्पणी :

(i) यदि V(F) एक सदिश समष्टि है, तो इसके किसी भी आघार में शून्य नहीं होता है क्योंकि यदि किसी समुच्चय में शून्य सदिश होता है तो वह एकघातत: स्वतन्त्र होता ।

(ii) किसी सदिश समष्टि के एक से अधिक आधार हो सकते हैं ।

(iii) यह माना गया है कि रिक्त समुच्चय ϕ एकघातत: स्वतन्त्र है और ϕ शून्य समष्टि V ={0} का आधार है ।

(iv) यदि किसी सदिश समष्टि V(F) के आधार में अवयवों की संख्या परिमित, तो उसे परिमित जनित सदिश समष्टि कहते हैं ।

14.2.2 सदिश समष्टि की विमा (Dimension of a vector space)

यदि V(F) एक परिमित जनित सदिश समष्टि है, तो उसके आधार में अवयवों की को की संख्या को V विमा कहते हैं । यदि V(F) के आधार में अवयवों की संख्या n हो, तो इसे हम विमा (V) = n निरूपित करते हैं और V(F) को परिमित विमीय सदिश समष्टि कहते हैं । यदि V(F) के आधार में की संख्या अपरिमित हो, तो हम V(F) को अपरिमित विमीय समष्टि कहते हैं । ।

टिप्पणी :

किसी सदिश समष्टि V(F) की विमा शून्य है यदि और केवल यदि V = $\{0\}$ अर्थात् V शून्य सदिश समष्टि है ।

14.2.3 सदिश समष्टि के आधार एवं विमा से सम्बन्धित उदाहरण

(Examples related to bases and dimensions of vector space)

उदाहरण 1 : यदि C और R क्रमशः सम्मिश्र एवं वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र हों, तो सदिश समष्टि V = C (R) का समुच्चय $S=\left\{1, i=\sqrt{1}\right\}$ एक आधार है क्योंकि किसी $x+iy \in C$, जहां $x, y \in R$ को हम $x+iy = x.1+y.i$ के रूप में लिख सकते हैं । फलतः समुच्चय S,V का जनक है । समुच्चय S एकघाततः स्वतन्त्र है क्योंकि $x\cdot 1+y\cdot i=0+0i \Rightarrow x=0$ और $y=0$ चूँकि S में अवयवों की संख्या 2 है, इसलिये विमा

C (R) = 2.

उदाहरण 2 : माना F एक क्षेत्र है, तो F (F) एक सदिश समष्टि है । समुच्चय S = {1} , जहाँ 1 क्षेत्र F में गुणन के लिये तत्समक अवयव है, F (F) का आधार है क्योंकि प्रत्येक $a \in F$ को हम a = a .1 के रूप में लिख सकते हैं, अर्थात समुच्चय S, F (F) का जनक है । समुच्चय पु एकघाततः स्वतन्त्र है क्योंकि $a.1=0 \Rightarrow a=0$ चूँकि S में अवयवों की संख्या एक है, इसलिये विमा F (F) = 1.

उदाहरण 3 : माना $V=\left\{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in R\right\}$ तो V वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर सदिश समष्टि है' । समुच्चय $S=\left\{1, \sqrt{2}\right\}$ सदिश समष्टि V (R) का आधार है क्योंकि किसी $x=a+b\sqrt{2} \in V$ को हम $a+b\sqrt{2}=a.1+b.\sqrt{2}$ के रूप में लिख सकते हैं, अर्थात् समुच्चय S, V (R) का जनक है । समुच्चय S एकघाततः स्वतन्त्र है क्योंकि $a\cdot 1+b\cdot\sqrt{2}=0+0\sqrt{2} \Rightarrow \quad a=0, b=0,$ चूँकि S में अवयवों की संख्या 2 है, इसलिए विमा

V (R) = 2.

उदाहरण 4 : प्रदर्शित कीजिये कि समुच्चय $S=\left\{v_1=(1,0,0), v_2=(1,1,0), v_3=(1,1,1)\right\}$ सदिश समष्टि $V(R)=\left\{(a,b,c) \mid a,b,c \in R\right\}$ का आधार है ।

हल. हमें सिद्ध करना है कि समुच्चय S सदिश समष्टि V(R) का आधार है । इसके लिये हम सिद्ध करेंगे कि उइंइ एकघाततः स्वतन्त्र है और S, V का जनक है । माना कि

$$a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=0, \text{ जहाँ } a_1, a_2, a_3 \in R$$

$$\Rightarrow \quad a_1(1,0,0)+a_2(1,1,0)+a_3(1,1,1)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \quad (a_1+a_2+a_3, a_2+a_3, a_3)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow a_1+a_2+a_3=0 \qquad .....(1)$$

$$a_2+a_3=0 \qquad .....(2)$$

$$a_3=0 \qquad .....(3)$$

समीकरण (1), (2) और (3) को सरल करने से

$$a_1=a_2=a_3=0$$

अतः $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=0 \Rightarrow a_1=a_2=a_3=0$

$\Rightarrow$ समुच्चय एकघातत: स्वतन्त्र है ।

माना $v=(x,y,z)\in V(R)$

पुन: माना $(x,y,z)=a_1(1,0,0)+a_2(1,1,0)+a_3(1,1,1)$

$$\Rightarrow \quad (x,y,z)=(a_1+a_2+a_3,a_2+a_3,a_3)$$

$$\Rightarrow \quad a_1+a_2+a_3=x \qquad .....(4)$$

$$a_2+a_3=y \qquad .....(5)$$

$$a_3=z \qquad .....(6)$$

समीकरण (5) और (6) से $a_3=z$ और $a_2=y-z$

a_2 और a_3 का मान समीकरण (4) में रखने पर

$$a_1+y-z+z=x$$

$$\Rightarrow \quad a_1=x-y$$

अत:

$$v=(x,y,z)=(x-y)v_1+(y-z)v_2+zv_3$$

$\Rightarrow$ v, सदिशों v_1, v_2 और v_3 के एकघात संचय के रूपमें लिखा जा सकता है ।

अत: S, V (R) का जनक है । फलत: समुच्चय S सदिश समष्टि V (R) का है ।

उदाहरण : 5 प्रदर्शित कीजिये कि यदि $\{x,y,z\}$ सदिश $V(R)=\{(a,b,c)\,|\,a,b,c\in R\}$ का आधार है तो समुच्चय

$S=\{x+y,y+z,z+x\}$ V(R) का आधार होगा ।

हल : हमें सिद्ध करना है कि समुच्चय S सदिश समष्टि V (R) का आधार है इसके लिये हम सिद्ध करेंगे कि s एकघातत स्वतन्त्र है और S, V (R) का जनक है । माना

$$a_1(x+y)+a_2(y+z)+a_3(z+x)=0$$

$$\Rightarrow (a_1+a_3)x+(a_1+a_2)y+(a_2+a_3)z=0$$

$\Rightarrow \quad a_1+a_3=0, a_1+a_2=0, a_2+a_3=0,$ क्योंकि समुच्चय $\{x,y,z\}$ एकघातत: स्वतन्त्र है ।

$$\Rightarrow a_1=a_2=a_3=0$$

$\Rightarrow$ समुच्चय Sएकघातत: स्वतन्त्र है ।

माना v = (a,b,c) सदिश समष्टि V (R) का कोई अवयव है ।

पुन: माना कि

$$(a,b,c)=a_1(x+y)+a_2(y+z)+a_3(z+x) \qquad .....(1)$$

जहाँ $a_1,a_2,a_3\in R$

चूँकि समुच्चय $\{x,y,z\}$ सदिश समष्टि V (R) का आधार है और $(a,b,c)\in V(R)$ तो अदिश $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ का अस्तित्व होगा ताकि

$$(a, b, c) = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) से

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = a_1(x+y) + a_2(y+z) + a_3(z+x)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = (a_1 + a_3)x + (a_1 + a_2)y + (a_2 + a_3)z$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = a_1 + a_3 \qquad \ldots\ldots(3)$$

$$\alpha_2 = a_1 + a_2 \qquad \ldots\ldots(4)$$

$$\alpha_3 = a_2 + a_3 \qquad \ldots\ldots(5)$$

समीकरण (3), (4) और (5) को जोड़ने पर

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$\Rightarrow \quad a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \qquad \ldots\ldots.(6)$$

समीकरण (3) और (6) से

$$a_2 = \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1) \in R$$

समीकरण (4) और (6) से

$$a_3 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_2) \in R$$

समीकरण (5) और (6) से

$$a_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \in R$$

a_1, a_2, a_3 के मान समीकरण (1) में रखने पर

$$(a,b,c) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)(x+y) + \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1)(y+z) + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)(z+x)$$

$\Rightarrow$ समुच्चय S, V(R) का जनक है । अत: समुच्चय S, V(R) का आधार है ।

उदाहरण : 6 प्रदर्शित कीजिये कि समुच्चय

$S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ जहाँ $v_1 = (1,0,0), v_2 = \{1,1,0\}, v_3 = \{1,1,1\}, v_4 = \{0,1,0\}$ है

सदिश समष्टि $V(R)\{(a,b,c) | a,b,c \in R\}$ को विस्तृति करता है परन्तु आधार समुच्चय नहीं है ।

हल : माना $v = (x, y, z)$ सदिश समष्टि का कोई अवयव है ।

पुन: माना कि

$$(x, y, z) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4$$

$$\Rightarrow \quad (x, y, z) = a_1(1,0,0) + a_2(1,1,0) + a_3(1,1,1) + a_4(0,1,0)$$

$$\Rightarrow \quad (x, y, z) = (a_1 + a_2 + a_3, a_2 + a_3 + a_4 + a_3) \qquad \ldots\ldots.(2)$$

$$\Rightarrow \quad a_1 + a_2 + a_3 = x \qquad \ldots\ldots..(3)$$

$a_3 = z$ .....(4)

$a_3 = z$ समीकरण (2) और (3) में रखने पर

$a_1 + a_2 = x - z$ .....(5)

$a_2 + a_4 = y - z$ .....(6)

माना $a_2 = \lambda,$ तो (5) $a_1 = x - z - \lambda$ और (6) से $a_4 = (y - z - \lambda)$

a_1, a_2, a_3, a_4 के मान समीकरण (1) में रखने पर

$$(x, y, z) = (x - z - \lambda)(1,0,0) + \lambda(1,1,0) + z(1,1,1) + (y - z - \lambda)(0,1,0)$$

$\Rightarrow$सदिश समष्टि V (R) का प्रत्येक अवयव समुच्चय S के अवयवों के संचय के रूप में लिखा जा सकता है । अत: समुच्चय S सदिश समष्टि V (R) का जनक है ।

चूँकि

$$v_2 = (1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(1,1,1)$$
$$= 1.v_1, 1.v_4 + 0.v_3$$

इसलिए समुच्चय $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ एकघातत स्वतन्त्र नहीं है। अत: समुच्चय S सदिश समष्टि V (R) का आधार नहीं है।

उदाहरण : 7 माना V वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर समस्त 2 x 2 मैट्रिक्स का सदिश समष्टि है । प्रदर्शित कीजिये कि समुच्चय $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, जहाँ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, तथा $v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ है,

सदिश समष्टि V (R) का आधार है । V की विमा ज्ञात कीजिये ।

हल : हमे सिद्ध करना है कि समुच्चय $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ सदिश समष्टि V (R) कार, आधार है । इसके लिये हम सिद्ध करेंगे कि S एकघातत: स्वतन्त्र है और S, V (R) का जनक है ।

$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0,$ जहां $a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$

$$\Rightarrow a_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

अतः $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0,$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

$\Rightarrow$ समुच्चय S एकघाततः स्वतन्त्र है ।

माना $v=\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}, V(R)$ का कोई अवयव है । तब

$$v=\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+u\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v = xv_1 + yv_2 + zv_3 + uv_4$$

$\Rightarrow$V (R) का प्रत्येक अवयव समुच्चय D के अवयवों के एकघात संचय के रूप में लिखे जा सकते है ।

अत: S, V (R) का जनक है । फलत: S, V (R) का आधार है । चूँकि समुच्चय S में अवयवों की संख्या 4 है, इसलिये विमा V (R) = 4.

स्वमूल्यांकन प्रश्न- 1

1. समुच्चय $S=\{(1,0),(0,1)\}$ सदिश समष्टि $V(R)=\{(a,b)\,|\,a,b\in R\}$ का आधार नही है।

   सत्य / असत्य

2. समुच्चय $S=\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ सदिश समष्टि $V(R)=\{(a,b,c)\,|\,a,b,c\in R\}$ का आधार है ।

   सत्य / असत्य

3. प्रत्येक सदिश समष्टि की विमा परिमित होती है ।

   सत्य / असत्य

4. यदि समुच्चय S किसी सदिश समष्टि का आधार है, तो S एकघातत: स्वतन्त्र होता है ।

   सत्य / असत्य

14.3 यदि परिमित विमीय सदिश समष्टिओं के गुणधर्म (Properties of finite dimensional vector spaces)

प्रमेय 1 : यदि समुच्चय $S=\{v_1,v_2,.....,v_n\}$ किसी सदिश समष्टि V (F) का आधार हो, तो सिद्ध कीजिये कि V के प्रत्येक सदिश को समुच्चय S के सदिशों के एकघात संचय के रूप में अद्वितीय प्रकार से लिखा जा सकता है ।

उपपत्ति : चूँकि समुच्चय S सदिश समष्टि V (F) का आधार है, इसलिये S एकघातत: स्वतन्त्र है और V का प्रत्येक अवयव समुच्चय S के अवयवों के एकघात संचय के रूप में लिखा जा सकता है । माना v सदिश समष्टि V (F) का कोई अवयव है, तब अदिशों $a_1,a_2.....a_n\in F$ का अस्तित्व होगा ताकि

$$v=a_1v_1+a_2v_2+.....+a_nv_n \qquad ...(1)$$

हमें सिद्ध करना है । v को S के सदिशों के एकघात संचय के रूप में अद्वितीय प्रकार से लिखा जा सकता है । यदि सम्भव हो तो माना कि अदिशों $b_1,b_2.....b_n\in F$ का अस्तित्व है ताकि

$$v=b_1v_1+b_2v_2+.....+b_nv_n \qquad .....(2)$$

समीकरण (1) और (2) से

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_nv_n = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b_nv_n$$
$$\Rightarrow (a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (a_n - b_n)v_n = 0$$
$$\Rightarrow a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, \ldots\ldots a_n - b_n = 0$$

क्योंकि समुच्चय S एकघातत: स्वतन्त्र है ।

$$\Rightarrow a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots\ldots a_n = b_n$$

अत: सदिश समष्टि V (F) का प्रत्येक सदिश को समुच्चय S के सदिशों के एकघात संचय के रूप में अद्वितीय प्रकार से लिखा जा सकता है ।

प्रमेय 2 : प्रत्येक परिमित जनित सदिश समष्टि का एक आधार होता है । ।

उपपत्ति : माना कि V (F) एक परिमित जनित सदिश समष्टि है तथा समुच्चय $S = \{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_n\}$, V (F) का जनक है । माना कि $0 \notin S$, जहाँ 0 शून्य सदिश है । यदि S एकघातत: स्वतन्त्र है, S स्वयं V का आधार है । यदि S एकघातत: परतन्त्र है, तब इकाई 13 के प्रमेय 7 के अनुसार एक सदिश $v_i \in S(i > 1)$ का अस्तित्व होगा ताकि v_i को उसके पूर्वगामी सदिशों के एकघात संचय के रूप में लिखा जा है ।

अत: $\exists a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_i \in F$

ताकि

$$v_i = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{i-1}v_{i-1} \qquad \ldots\ldots(1)$$

अब चूँकि S, V का जनक है, इसलिये प्रत्येक $v \in V$ को समुच्चय S के अवयवों के संचय के रूप में लिखा जा सकता है ।

अत: $\exists b_i \in F,\ i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots, n$

ताकि

$$v = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, b_iv_i + b_{i+1}v_{i+1} \ldots\ldots + b_nv_n$$

v_i का मान समीकरण (1) से रखने पर

$$v = v = b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, b_i(a_1v_1 + \ldots\ldots\ldots + a_{i-1}v_{i-1}) + b_{i+1}v_{i+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b_nv_n$$
$$= (b_1 + b_ia_1)v_1 + (b_2 + b_ia_2)v_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (b_{i-1} + b_ia_{i-1})v_{i-1} + b_{i+1}v_{i+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b_nv_n$$

$\Rightarrow v \in V$, सदिशों $v_1, v_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, v_{i-1}, v_{i+1} \ldots\ldots, v_n$ के एकघात संचय के में लिखा जा सकता है। दूसरे शब्दों में समुच्चय

$$S_1 = \{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v_n\}$$

जो S में से v_1 को निकाल देने से प्राप्त होता है, भी V को जनित करता है । यदि S_1 : स्वतन्त्र है, तब $S_1, V(F)$ का आधार है और प्रमेय सिद्ध हो जाती है । यदि S_1 एकघातत: परतन्त्र है, पुन: इकाई 13 के प्रमेय 7 के अनुसार एक सदिश $v_j \in S_1(j > i)$ का अस्तित्व होगा ताकि v_1, को उसके पूर्वगामी सदिशों के एकघात संचय के रूप में लिखा जा सकता है । उपर्युक्त विधि के द्वारा हमें एक नया समुच्चय $S_2 = S_1 - \{v_j\}$ प्राप्त होगा । जो सदिश समष्टि V को जनित करेगा । यदि S, एकघातत: स्वतन्त्र है, तो S_2, V आधार है । यदि S_2 एकघातत:

परतन्त्र है तो उपर्युक्त विधि की पुनरावृति परिमित वार करने पर एक S का उपसमुन्?य प्राप्त होता है जो एकधातत: स्वतन्त्र होता है और जो V को जनित करता है।

अधिक से अधिक यह हो सकता है कि हमारे पास S का वह उपसमुच्चय प्राप्त हो जिसमें केवल एक ही अवयव हो जो अशून्य सदिश हो क्योंकि $0 \notin S$ तथा V को जनित करता हो । हम जानते हैं कि एकल अस्म सदिश एकघातत: स्वतन्त्र होता है, इसलिए यह V (F) का आधार होगा।

प्रमेय 3 : यदि समुच्चय $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ सदिश समष्टि V (F) का आधार हो $v = a_1v_1 + a_2v_2 + ...a_jv_j + ... + a_nv_n$ एक अशून्य सदिश हो, जहाँ $a_j \neq 0,$ तो सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $S_1 = \{v_1, v_2, ..., v_{j-1}, v, v_{j+1}, ...v_n\}, V(F)$ का है ।

हल : सर्वप्रथम हम सिद्ध करेंगे कि S_1 एकधातत: स्वतन्त्र है ।

माना

$$b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_{j-1}v_{j-1} + b_jv + b_{j+1}v_{j+1} + ...b_nv_n = 0$$

उपर्युक्त में v का मान रखने पर

$$b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_{j-1}v_{j-1} + b_j(a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_jv_j + ... + a_nv_n) + b_{j+1}v_{j+1} + ...b_nv_n = 0$$

$\Rightarrow$

$$(b_1 + b_ja_1)v_1 + (b_2 + b_ja_2)v_2 + ...(b_{j-1} + b_ja_{j-1})v_{j-1} + b_ja_jv_j$$
$$+ (b_{j+1} + b_ja_{j+1})v_{j+1} + ... + (b_n + b_ja_n)v_n = 0$$

चूँकि समुच्चय S एकघातत: स्वतन्त्र है, इसलिए

$$b_1 + b_ja_1 = 0, b_2 + b_ja_2 = 0, ...b_{j-1} + b_ja_{j-1} = 0,$$
$$b_ja_j = 0, b_{j+1} + b_ja_{j+1} = 0, ..., b_n + b_ja_n = 0$$
$$\Rightarrow b_1 = b_2 = b_{j-1}b_j + b_{j+1} = ...b_n = 0,$$,क्योंकि $a_j \neq 0$

अत: समुच्चय S_1 एकघातत: स्वतन्त्र है ।

अब हम सिद्ध करेंगे कि S_1, V का जनक है । माना का u,V कोई अवयव है । चूँकि S, V का जनक है, इसलिए अदिशों $c_1, c_2 .....c_n \in F$ का अस्तित्व होगा ताकि

$$u = c_1v_1 + c_2v_2 + ... + c_jv_j + ... + c_nv_n \qquad .....(1)$$

यह दिया है कि

$$V = a_1v_1 + ... + a_jv_j + ... + a_nv_n$$

$$a = a_1v_1 + ... + a_jv_j + ... + a_nv_n \qquad .....(2)$$

एक अशून्य सदिश है जहाँ $a_j \neq 0$. चूँकि $0 \neq a_j \in F,$

इसलिये $a_j^{-1} \in F$ ताकि $a_ja_j^{-1} = 1$ समीकरण (2) से

$$v_j = a_j^{-1}v - a_j^{-1}a_jv_j - .....- a_j^{-1}a_{j-1}v_{j-1} - a_j^{-1}a_{j+1}v_{j+1} - .....a_j^{-1}a_nv_n \qquad .....(3)$$

समीकरण (3) का प्रयोग (1) में करने पर

$$u = c_1v_1 + ...c_j(a_j^{-1}v - a_j^{-1}a_jv_j - .....- a_j^{-1}a_{j-1}v_{j-1} - a_j^{-1}a_{j+1}v_{j+1} .....- a_j^{-1}a_nv_n)$$

$$+c_{j+1}v_{j+1}+.....+c_nv_n$$

$$=\left(c_1-c_ja_j^{-1}a_1\right)v_1+.....+\left(c_{j-1}-c_ja_j^{-1}a_{j-1}\right)v_{j-1}$$

$$+c_ja_j^{-1}v+\left(c_{j+1}-c_ja_j^{-1}a_{j+1}\right)v_{j+1}+.....+\left(c_n-c_ja_j^{-1}a_n\right)v_n$$

$\Rightarrow$ u, समुच्चय S_1 के अवयवों के एकघात संचय के रूप में लिखा जा सकता है । फलत: S_1,V का आधार है ।

प्रमेय 4 : माना V किसी क्षेत्र F पर सदिश समष्टि और समुच्चय $S=\{v_1,v_2,.....,v_n\}$ इसका आधार है । प्रदर्शित कीजिये कि V के किसी उपसमुच्चय में जो एकघातत: स्वतन्त्र हो n से ज्यादा अवयव नहीं हो सकते है।

उपपत्ति : माना $S_1=\{w_1,w_2,.....,w_m\}$ सदिश समष्टि V (F) का कोई उपसमुच्चय है जो एकघातत: स्वतन्त्र है । चूँकि w_1,V का अशून्य सदिश है और $S=\{v_1,v_2,.....,v_n\}$,V का जनक है, इसलिये अदिशों $a_1,a_2,.....,a_n\in F$ का अस्तित्व होगा जिसमें सभी शून्य नही हैं, ताकि

$w_1=a_1v_1+a_2v_2+.....a_nv_n$.

माना कि $a_1\neq 0$ प्रमेय 3 के अनुसार समुच्चय 3, $S_2=\{v_1,v_2.....v_{n-1}w_1\},V$ का आधार होगा । पुन: चूँकि w_2,V का अशून्य सदिश है और S_2,V का जनक है, इसलिये अदिशों $b_1,b_2,.....,b_n$ का अस्तित्व होगा जिसमें सभी शून्य नहीं हैं, ताकि

$$w_2=b_1v_1+b_2v_2+.....+b_{n-1}v_{n-1}+b_nw_1$$

यह बात ध्यान देने योग्य है कि $b_1,b_2,.....,b_{n-1}$ में से कम से कम कोई एक अशून्य होगा अन्यथा w_1 और w_2, एकघातत: परतन्त्र हो जायेंगे ।

माना कि $b_{n-1}\neq 0$. तब पुन: प्रमेय 3 के अनुसार समुच्चय $S_3=\{v_1,v_2.....,v_{n-2},w_2,w_1\},V$ का आधार होगा ।

चूंकि प्रत्येक चरण में V के आधार समुच्चय S से अवयव को निष्कासित करते हैं उसके स्थान पर एकघातत: स्वतन्त्र समुच्चय S_1 से अवयव को अन्तर्विष्ट करते हैं और वह समुच्चय V का होता है । यदि m > n, तो n चरणों के बाद हमें एक समुच्चय $S_4=\{w_1,w_2,.....,w_n\}$ प्राप्त होगा जो, समष्टि V (F) का जनक होगा । चूँकि S_4,V का जनक है और $w_{n+1}\in V$, इसलिये अदिशों $c_1,c_2,.....,c_n\in F$ अस्तित्व होगा, ताकि

$$w_{n+1}=c_1w+c_2w_2+.....+c_nw_n$$

$\Rightarrow$सदिश w_{n+1} अपने पूर्वगामी सदिशों $w_1,w_2.....,w_n\in S$ के एकघात संचय रूप में लिखा रजा सकता है । अत: समुच्चय S_1 एकघातत परतन्त्र है । यह विरोधाभास है क्योंकि S_1 एकघातत: स्वतन्त्र है । इसलिए $m\leq n$.

टिप्पणी : उपर्युक्त प्रमेय के आधार पर हम कह सकते हैं कि किसी n विमीय सदिश V (F) के कोई भी n + 1 या इससे अधिक सदिशों के उपसमुच्चय एकघातत: परतन्त्र होते हैं ।

प्रमेय 5 : परिमित विमीय सदिश समष्टि V (F) के कोई भी दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है ।

उपपत्ति : माना $S_1 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ तथा $S_2 = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ किसी सदिश V (F) के दो आधार हैं । चूँकि S_1 एकघाततः स्वतन्त्र है और S_2,V का आधार है, इसलिये प्रमेय 4 से

$$n \le m \qquad ...(1)$$

पुनः चूँकि S_2 एकघाततः स्वतन्त्र है और S_1,V आधार है, इसलिये प्रमेय 4 से

$$m \le n \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) और (2) से

$$m = n.$$

अतः परिमित विमीय सदिश समष्टि V (F) के कोई भी दो आधारों में अवयवों की संख्या होती है।

प्रमेय 6 : किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि V (F) का प्रत्येक एकघाततः स्वतन्त्र समुच्चय यदि V (F) का आधार नहीं है, तो उसको बढ़ाकर आधार बनाया जा सकता है ।

उपपत्ति : माना कि सदिश समष्टि V (F) की विमा n है तथा $S = \{v_1, v_2, ..., v_m\}, V$ एकघाततः स्वतन्त्र सदिशों का समुच्चय है । तब $m \le n.$ यदि $m = n$ तो प्रमेय 4 से समुच्चय S, V (F) का आधार होगा । यदि $m < n,$ तब $L(S) \subset V$.

माना $v_{m+1,} V - L(S)$ का अशून्य सदिश है । हम सिद्ध करेंगे कि समुच्चय

$S_1 = \{v_1, v_2 ....., v_m, v_{m+1}\}$ एकघाततः स्वतन्त्र है ।

माना कि $a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_m v_m + a_{m+1} v_{m+1} = 0,$ जहाँ $a_1 \in F$,i = 1, 2 ..., m +1

$a_{m+1} = 0$ होगा क्योंकि यदि $a_{m+1} \ne 0$, तो उपर्युक्त से

$v_{m+1} = a_{m+1}^{-1}(-a_1 v_1 - a_2 v_2 - ..... - a_m v_m) \in L(S)$, जो कि विरोधाभास है क्योंकि $v_{m+1} \in L(S)$.

अतः $a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_m v_m = 0$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$

क्योंकि समुच्चय S एकघाततः स्वतन्त्र है ।

अतः $a_1 v_1 + a_2 v_2 + ... + a_m v_m + a_{m+1} v_{m+1} = 0,$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_m = a_{m+1} = 0$

$\Rightarrow$समुच्चय S_1 एकघाततः स्वतन्त्र है । यदि S_1,V का जनक है, तो S_1,V का आधग़र है । यदि S_1,V का जनक नहीं है तो एक दूसरे अशून्य सदिश $v_{m+2} \in V - L(S_1)$ का चयन करके इस विधि को दोहराया ।

चूँकि किसी एकघाततः स्वतन्त्र समुच्चय के पास अधिक से अधिक n अवयव हो सकते हैं इसलिये (n-m) चरणों के बाद वह उपसमष्टि जो समुच्चय $\{v_1, v_{2,} ....., v_m, v_{m+1}, ..., v_n\}$ से जनित होगा वह V के बराबर होगा । अतः अदिशों $v_{m+1}, v_{m+2}, ..., v_n \in V$ अस्तित्व होगा ताकि $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ सदिश समष्टि $V(R)$ का आधार है ।

14.4 एकघाती विस्तृति एवं इससे जनित उपसमष्टि (Linear span and subspace generated by it)

इकाई 13 में यह परिभाषित किया गया है कि यदि S किसी सदिश समष्टि $V(F)$ का कोई अरिक्त उपसमुच्चय हो, तो S के परिमित अवयवों के सम्पूर्ण एकघाती संचयों का समुच्चय, S का एकघाती विस्तृति कहलाता है और इसे $L(S)$ के द्वारा प्रकट करते हैं । अत:

$$| \quad L(S)=\left\{(uv=\sum_{i=i}^{n} a_i, v_i, a_i \in F, n \geq 1\right\}$$

पिछले इकाई में यह सिद्ध किया जा चुका है कि $L(S)$, S को अन्तर्विष्ट करने वाला $V(F)$ का सबसे छोटा उपसमष्टि है ।

उदाहरण 1 : यदि $S=\{v_1, v_2\}$, जहाँ $v_1=(0,1,0), v_{2,}=(0,0,1)$

सदिश समष्टि $V(R)=\{(a_1, a_2, a_3 | a_1, a_2, a_3 \in R\}$ का उपसमुच्चय हो, तो

$$\begin{aligned} L(S) &= \{\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2 \mid \alpha_1 \alpha_2 \in R\} \\ &= \{\alpha_1(0,1,0)+\alpha_2(0,0,1)\} \\ &= \{(0, \alpha_1, \alpha_2) | \alpha_1, \alpha_2 \in R\} \end{aligned}$$

जो y z , समतल में सम्पूर्ण बिन्दुओं का समुच्चय है ।

उदाहरण 2 : माना कि V वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर समस्त 2×2 मैट्रिक्स का सदिश समष्टि है । यदि

$S=\{v_1, v_2, v_3\}$, जहाँ $v_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ है, तो $L(S)$ ज्ञात कीजिये ।

हल :

$$\begin{aligned} L(S) &= \{a_1 v_1+a_2 v_2+a_3 v_3 \; a_1, a_2, a_3 \in R\} \\ &= \left\{a_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad a_1, a_2, a_3 \in R\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a_2\\ a_2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & a_3\end{pmatrix} \quad a_1, a_2, a_3 \in R\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_2 & a_3\end{pmatrix} \quad a_1, a_2, a_3 \in R\right\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $L(S)$ समस्त 2×2 सममित मैट्रिक्स का समुच्चय है ।

स्वमूल्यांकन प्रश्न -2

1. समुच्चय $S=\{(1,0)\}$ को बढ़ाकर सदिश समष्टि $V(R)=\{(a,b)|a,b \in R\}$ का आधार प्राप्त किया जा सकता है ।

सत्य / असत्य

2. समुच्चय $S = \{(0,0,0),(1,0,0)\}$ को बढ़ाकर सदिश समष्टि $V(R) = \{(a,b,c) | a,b,c \in R\}$ का आधार प्राप्त किया जा सकता है ।

सत्य / असत्य

3. किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि के किसी भी दो आधारों में अवयवों की संख्या समान नहीं होती है ।

सत्य / असत्य

14.5 सारांश

इस इकाई में आपने मुख्यत: सदिश समष्टि के आधार एवं विमा के विषय में जानकारी प्राप्त की है । इनसे सम्बन्धित कुछ महत्वपूर्ण परिणामों की जानकारी प्राप्त करते हुए आपने जाना है कि किसी परिमित जनित सदिश समष्टि का सदैव एक आधार होता है ।

14.6 शब्दावली

आधार	Basis
विमा	Dimension
परिमित विमिय	Finite Dimensional
एकघाती विस्तृति	Linear span

14.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. असत्य
2. असत्य
3. असत्य
4. सत्य

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. सत्य
2. असत्य
3. असत्य

14.8 अभ्यास प्रश्न

1. सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $S = \{(1,0),(0,1)\}$ सदिश समष्टि $V(R) = \{(a,b) | a,b \in R\}$ का आधार है ।
2. सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ जहाँ $v_1 = (1,2,1), v_2 = (2,1,0), v_3 = (1,-1,2)$ सदिश समष्टि $V(R) = \{(a,b,c) | a,b,c \in R\}$ का आधार है ।

3. यदि समुच्चय $S=\{a,b,c\}$ सदिश समष्टि $V(R)=\{(a_1,a_2,a_3)\ a_1,a_2,a_3\in R\}$ का आधार है तो सिद्ध करो कि समुच्चय $S_1=\{a+b,b+c,c+a\}$ भी $V(R)$ का आधार होगा ।

4. माना $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$ तथा $v_1=(3,2,1),\ v_2=(2,1,0)$, $v_3=(1,0,0)$ सदिश समष्टि $V(R)=\{(a,b,c)|a,b,c\in R\}$ के अवयव हैं । सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $S_1=\{e_1,e_2,e_3\}$ तथा $S_1=\{v_1,v_2,v_3\}$ सदिश समष्टि $V(R)$ के आधार हैं ।

5. सिद्ध कीजिये कि वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर सम्मिश्र संख्याओं क्रमित युग्मों की सदिश समष्टि $V=\{(a_1+a_2i,a_3+a_4i)|a_1,a_2,a_3,a_4\in R\}$ का उपसमुच्चय $S=\{(1,0),(i,0),(0,1),(0,i),V$ का आधार है ।

इकाई 15 : दो उपसमष्टियों का योग, उपसमष्टियों का अनुलोम योग एवं पूरक उपसमष्टि, विभाग उपसमष्टि एवं इसकी विमा(Sum of two subspaces, Direct sum of subspaces and Complementary subspace, Quotient space and its dimension)

इकाई की रूपरेखा

15.0 उद्देश्य

15.1 प्रस्तावना

15.2 दो उपसमष्टियो का योग, उपसमष्टियों का अनुलोम योग एवं पूरक उपसमष्टि

15.3 विभाग उपसमष्टि एवं इसकी विमा

15.4 सारांश

15.5 शब्दावली

15.6 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

15.7 अभ्यास प्रश्न

15.0 उद्देश्य

इस इकाई मे दो उपसमष्टियों का योग, उपसमष्टियों का अनुलोम योग एवं पूरक उपसमष्टि, विभाग उपसमष्टि एवं इसके विमा के विषय में चर्चा की गयी है । इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- किसी सदिश समष्टि के दो उपसमष्टियों के रैखिक एवं अनुलोम योग के विषय में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे ।
- किसी सदिश समष्टि के पूरक उपसमष्टियों के विषय में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे ।
- किसी परिमित सदिश समष्टि के दो उपसमष्टियों के योग का विमा ज्ञात करने के लिए सूत्र की जानकारी प्राप्त कर सकेंगे ।
- विभाग समष्टि की जानकारी प्राप्त करते हुए उसके विमा ज्ञात करने के लिए सूत्र की जानकारी प्राप्त कर सकेंगे ।

15.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम सदिश समष्टि के दो उपसमष्टियों के रैखिक योग एवं अनुलोम योग को परिभाषित करते हुए इनसे सम्बन्धित कुछ उदाहरणों को प्रस्तुत करेंगे । किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि के दो उपसमष्टियों के योग का विमा ज्ञात करने के लिए सूत्र को प्रस्तुत करेंगे । इकाई के अन्त में विभाग समष्टि के विषय में चर्चा करेंगे ।

15.2 दो उपसमष्टियों का योग, उपसमष्टियों का अनुलोम योग एवं पूरक उपसमष्टि (Sum of two subspaces, Direct sum of subspaces and complementary subspaces)

माना V क्षेत्र F पर एक सदिश समष्टि है । यदि U और W सदिश समष्टि $V(F)$ की कोई दो उपसमष्टि हैं, तो

$$U+W=\{u+w \mid u\in U, w\in W\}$$

को U और W का योग कहते हैं और इसे रैखिक योग (Linear sum) कहते हैं । हम यह सिद्ध करेंगे कि किसी सदिश समष्टि के दो उपसमष्टियों का रैखिक योग उस सदिश समष्टि की एक उपसमष्टि होती है ।

सदिश समष्टि V अपने दो उपसमष्टियो U और W का अनुलोम योग है यदि सदिश समष्टि V के प्रत्येक अवयव को U और W के अवयवों के योगफल के रूप में अद्‌वितीय प्रकार से लिखा जा सके अर्थात् प्रत्येक $v\in V$ के लिए केवल एक और एक ही $u\in U$ और $w\in W$ का होना चाहिए ताकि $v=u+w$. यदि V,U और W का अनुलोम योग है, तो हम इसे $V=U\oplus W$ द्‌वारा व्यक्त हैं । इस स्थिति में U और W परस्पर पूरक उपसमष्टियाँ कहलाती हैं।

उदाहरण 1 : माना V , वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर समस्त 2×2 मैट्रिक्स का सदिश समष्टि है ।

पुन: माना $U=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix} \middle| a,b\in R\right\}$ और $W=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ c & 0\end{pmatrix} \middle| a,c\in R\right\}$.

स्पष्टत: U और W दोनों $V(R)$ की उपसमष्टि हैं ।

अब

$$U+W=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & 0\end{pmatrix} \middle| a,b,c\in R\right\}.$$

उदाहरण 2 : माना $V=\{(a,b,c) \mid a,b,c\in R\}$ सदिश समष्टि है । पुन: $V=\{(a,b,0) \mid a,b\in R\}$ और $W=\{(0,b,c) \mid b,c\in R\}$. स्पष्टत: U और W दोनों $V(R)$ की उपसमष्टि हैं और $V=U+W$, क्योंकि V के प्रत्येक अवयव को U और W के अवयवों के योग के रूप में लिखा जा सकता है । परन्तु यह अनुलोम योग नहीं है क्योंकि V के प्रत्येक अवयव को U और W के अवयवों के योग के रूप में अद्‌वितीय प्रकार से नहीं लिखा जा सकता है । उदाहरण के रूप में $(3,5,7)\in V$

और $(3,5,7)=(3,1,0)+(0,4,7)$ तथा $(3,5,7)=(3,-4,0)+(0,9,7)$.

उदाहरण 3 : माना $V=\{(a,b,c) \mid a,b,c\in R\}$ सदिश समष्टि है । पुन: $U=\{(a,b,0) \mid a,b\in R\}$ और $W=\{(0,0,c) \mid c\in R\}$. स्पष्टतः U और W दोनों $V(R)$

की उपसमष्टि हैं और $V = U + W$, क्योंकि V के प्रत्येक अवयव को U और W के अवयवों के योग के रूप में लिखा जा सकता है । यह अनुलोम योग नहीं है क्योंकि प्रत्येक $(a,b,c) \in V(R)$ के लिए अद्वितीय $(a,b,0) \in U$ और $(0,0,c) \in W$ विद्यमान हैं ताकि $(a,b,c) = (a,b,0) + (0,0,c)$.

अत: $V = U \oplus W$.

प्रमेय 1 : यदि U और W किसी सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हों, तो प्रदर्शित कीजिये कि $U + W = \{u + w | u \in U, w \in W\}, V(F)$ की $U \cup W$ को अन्तर्विष्ट करने वाली सबसे छोटी उपसमष्टि है ।

उपपत्ति : माना $x, y \in U + W$, तो $x = u_1 + w_1$ तथा $y = u_2 + w_2$, जहाँ $u_1, u_2 \in U$ तथा $w_1, w_2, \in W$.

अब किसी $a, b \in F$ के लिए

$$\begin{aligned} ax + by &= a(u_1 + w_1) + b(u_2 + w_2) \\ &= au_1 + aw_1 + bu_2 + bw_2 \\ &= (au_1 + bu_2) + (aw_1 + bw_2) \in U + W, \end{aligned}$$

क्योंकि U और $W, V(F)$ की उपसमष्टि हैं, इसलिए $au_1 + bu_2 \in U$ तथा $aw_1 + bw_2 \in W$.

अत: $\forall$ $a, b \in F$ तथा $x, y \in U + W \Rightarrow ax + by \in U + W$.

फलत: $U + W, V(F)$ की एक उपसमष्टि है ।

अब किसी $u \in U$ और $w \in W$ के लिए

$u = u + 0 \in U + W$, जहाँ $0, W$ में शून्य सदिश है ।

$\Rightarrow U \subset U + W$ तथा $w = 0 + w \in U + W$, जहाँ $0, U$ में शून्य सदिश है, जो यह प्रदर्शित करता है कि

$W \subset U + W$.

अत: $U \cup W \subset U + W$.

परिणामत: $U + W, U \cup W$ को अन्तर्विष्ट करने वाला $V(F)$ की एक उपसमष्टि है । हमें यह सिब करना है कि $U + W, U \cup W$ को अन्तर्विष्ट करने वाला $V(F)$की सबसे छोटी उपसमष्टि है । माना $S, V(F)$की एक उपसमष्टि है ताकि $U \cup W \subset S$.

माना $x, U + W$ का कोई अवयव है, तब $x = u + w,$ जहाँ $u \in U$, $w \in W$.

स्पष्टत: $u, w \in U \cup W$.

चूँकि $U \cup W \subset S$ और $u, w \in U \cup W,$ इसलिए $u, w \subset S$.

चूँकि $S, V(F)$की उपसमष्टि है इसलिए $x = u + w = 1.u = 1.w \in S$, जो यह प्रदर्शित करता है कि $U + W \subset S$.

अत: $U + W, V(F)$ की सबसे छोटी उपसमष्टि है जो $U \cup W$ को अन्तर्विष्ट करती है ।

प्रमेय 2 : एक सदिश समष्टि $V(F)$ अपनी दो उपसमष्टियों U और W का अनुलोम योगफल है यदि और केवल यदि

(i) $V = U + W$

(ii) $U \cap W = \{0\}$, जहाँ 0 शून्य सदिश है ।

उपपत्ति : सर्वप्रथम माना कि $V(F)$ अपनी दो उपसमष्टियों U और W का अनुलोम योगफल है, अर्थात् $V = U \oplus W$.तो प्रत्येक $v \in V$ को अद्वितीय प्रकार से $v = u + w$ के रूप में लिखा जा सकता है जहाँ $u \in U$ तथा $w \in W$ है । इससे प्रथम प्रतिबन्ध $V = U + W$ सन्तुष्ट होता है ।

माना कि $v \in U \cap W$, तब $v \in U$ तथा $v \in W$.

अब $v = v + 0$, जहाँ $v \in U$, $0 \in W$ और $v = 0 + v$, जहाँ $0 \in U, v \in W$.

चूँकि $v \in V$ को U और W के अवयवों के योगफल के रूप में अद्वितीय प्रकार से लिखा जा सकता है, इसलिए उपर्युक्त से $v = 0$.

अत: $U \cap W = \{0\}$

विलोमत: माना कि

(i) $V = U + W$

(ii) $U \cap W = \{0\}$.

हमें सिद्ध करना है कि $V = U \oplus W$. इसके लिए हम सिद्ध करेंगे कि प्रत्येक $v \in V$ को U और W के अवयवों के योगफल के रूप में अद्वितीय प्रकार से लिखा जा सकता है । माना v सदिश V का कोई अवयव है । चूँकि $V = U + W$, इसलिए $u \in U$ और $w \in W$ का अस्तित्व होगा ताकि $v = u + w$. यदि सम्भव हो तो माना कि $v = u_1 + w_1$, जहाँ $u_1 \in U$ और $w_1 \in W$.

तब

$$u + w = u_1 + w_1$$

$$\Rightarrow \quad u - u_1 = w_1 - w$$

परन्तु $u - u_1 \in U$ और $w_1 - w \in W$ क्योंकि U और $W, V(F)$ की उपसमष्टि है ।

$$\Rightarrow u - u_1 = w_1 - w \in U \cap W = \{0\}$$

$$\Rightarrow u - u_1 = 0 \text{ और } w_1 - w = 0$$

$$\Rightarrow u = u_1 \text{ और } w = w_1$$

अत: प्रत्येक $v \in V$ को U और W के अवयवों के योगफल के रूप में अद्वितीय प्रकार से लिखा जा सकता है ।

अत: $V = U \oplus W$.

उदाहरण 4 : माना $V = \{(a,b,c) | a,b,c \in R\}$ एक सदिश समष्टि है । पुन: माना $U = \{(a,a,a) | a \in R\}$ और $W = \{(0,b,c) | b,c \in R\}$. स्पष्टत: U और W दोनों $V(R)$ की उपसमष्टि हैं । प्रदर्शित कीजिये कि $V = U \oplus W$.

हल : हमें सिद्ध करना है कि $V = U \oplus W$. इसके लिए हम सिद्ध करेंगे कि $V = U + W$ तथा $U \cap W = \{0\}$.

माना $v = (a,b,c)$ सदिश समष्टि का कोई अवयव है । तब

$v = (a,b,c) = (a,a,a) + (0, b-a, c-a)$, जहाँ $(a,a,a) \in U$ तथा $(0, b-a, c-a) \in W$.

अत: $V = U + W$.

पुन: माना कि $v = (a,b,c) \in U \cap W$.

$\Rightarrow \quad (a,b,c) \in U$ तथा $(a,b,c) \in W$

$\Rightarrow \quad a = b = c$ तथा $a = 0$

$\Rightarrow \quad a = b = c = 0$

$\Rightarrow \quad v = (0,0,0) = 0$

$\Rightarrow \quad U \cap W = \{0\}$

अत: $V = U \oplus W$.

उदाहरण 5 : माना $V = \{(a,b,c) | a,b,c \in |R\}$ एक सदिश समष्टि है । पुन: माना $U = \{(a,b,a) | a,b \in R\}$ और $W = \{(0,0,c) | c \in R\}, V$ की दो उपसमष्टियाँ हैं । प्रदर्शित कीजिये कि $V = U \oplus W$.

हल : हमें सिद्ध करना है कि $V = U \oplus W$. इसके लिए हम सिद्ध करेंगे कि $V = U + W$ तथा $U \cap W = \{0\}$

माना $v = (a,b,c)$ सदिश समष्टि $V(R)$ का कोई अवयव है । तब

$v = (a,b,c) = (a,b,a) + (0,0,c-a)$ जहाँ $(a,b,a) \in U$ तथा $(0,0,c-a) \in W$.

अत: $V = U + W$.

पुन: माना कि $v = (a,b,c) \in U \cap W$.

तब $(a,b,c) \in U$ और $(a,b,c) \in W$.

$\Rightarrow \quad a = c$ और $a = b = 0$

$\Rightarrow \quad a = b = c = 0$

$\Rightarrow \quad 0 = (0,0,0) \in U \cap W$

$\Rightarrow \quad U \cap W = \{0\}$

अत: $V = U \oplus W$.

प्रमेय 3 : यदि W_1 एवं W_2 किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हों, तो विमा $(W_1 + W_2) =$ विमा $W_1 +$ विमा $W_2 -$ विमा $(W_1 \cap W_2)$.

उपपत्ति : चूँकि W_1 और W_2 परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की उपसमष्टियाँ हैं, इसलिए $W_1, W_2, W_1 \cap W_2$ तथा $W_1 + W_2, V$ की परिमित विमीय उपसमष्टियाँ हैं ।

माना $W_1 = m$, विमा $W_2 = n$ तथा विमा $W_1 \cap W_2 = r$.

पुन: माना समुच्चय $S=\{\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_r\}, W_1\cap W_2$ का आधार है । चूँकि S एकघातत: स्वतन्त्र है और $S\subset W_1$, इसलिये इकाई 14 के प्रमेय 6 से S को हम इस तरह विस्तृत करते हैं कि वह W_1 का आधार हो जाये ।

माना $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,.....,\beta_{m-r}\}, W_1$ का का आधार है । इसी प्रकार समुच्चय $S_2=\{\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_r,\gamma_1,\gamma_2,.....,\gamma_{n-r}\}, W_2$ का आधार प्राप्त किया जा सकता है । हम सिद्ध करेंगे कि समुच्चय

$S_3=\{\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,.....,\beta_{m-r},\gamma_1,\gamma_2,.....,\gamma_{n-r}\},(W_1+W_2)$ का आधार है । इसके लिए हम सिद्ध करेंगे कि S_3 एकघातत: स्वतन्त्र है और $S_3,(W_1+W_2)$ को जनित करता है ।

माना

$$a_1\alpha_1+.....a_r\alpha_r+b_1\beta_1+.....b_{m-r}\beta_{m-r}+c_1\gamma_1+.....c_{n-r}\gamma_{n-r}=0, \text{ जहाँ}$$

$$a_1,.....,a_r,b_1.....,b_{m-r},c_1.....,c_{n-r}\in F \qquad .....(1)$$

तब

$$c_1\gamma_1+.....+c_{n-r}\gamma_{n-r}=(-a_1)\alpha_1+.....+(-a_r)\alpha_r+(-b_1)\beta_1+.....+(-b_{m-r})\beta_{m-r} \qquad ....(2)$$

समीकरण (2) का दायाँ पक्ष W_1 के आधार के अवयवों का एकघात संचय है, इसलिए यह W_1 का अवयव होगा । इसी प्रकार (2) का बायाँ पक्ष W_2 के आधार के अवयवों का एकघात संचय है, इसलिए यह W_2 का अवयव होगा ।

अत:

$$c_1\gamma_1+.....+c_{n-r}\gamma_{n-r}=(-a_1)\alpha_1+.....+(-a_r)\alpha_r+(-b_1)\beta_1+.....+(-b_{m-r})\beta_{m-r}\in W_1\cap W_2$$

$$\Rightarrow c_1\gamma_1+.....+c_{n-r}\gamma_{n-r}\in W_1\cap W_2$$

चूँकि समुच्चय $S, W_1\cap W_2$ का आधार है, इसलिए अदिशों $d_1,d_2,.....d_r$ होगा ताकि

$$c_1\gamma_1+.....c_{n-r}\gamma_{n-r}=d_1\alpha_1+d_2\alpha_2+.....+d_r\alpha_r$$

$$\Rightarrow c_1\gamma_1+.....c_{n-r}\gamma_{n-r}+(-d_1)\alpha_1+(-d_2)\alpha_2+.....+(-d_r)\alpha_r=0$$

चूँकि समुच्चय S_2,एकघातत: स्वतन्त्र है, इसलिए उपर्युक्त से

$$c_1=.....=c_{n-r}=d_1=d_2=.....=d_r=0 \qquad .....(3)$$

(3) का (1) में प्रयोग करने पर

$$a_1\alpha_1+.....+a_r\alpha_r+b_1\beta_1+.....+b_{m-r}\beta_{m-r}=0$$

$\Rightarrow a_1=.....a_r=b_1=.....b_{m-r}=0$, क्योंकि समुच्चय S_1 एकघातत: स्वतन्त्र है ।

अत: $a_1\alpha_1+.....+a_r\alpha_r+b_1\beta_1+.....+b_{m-r}\beta_{m-r}+c_1\gamma_1+.....+c_{n-r}\gamma_{n-r}=0$

$$\Rightarrow a_1=.....a_r=b_1=.....=b_{m-r}=c_1=.....=c_{n-r}=0.$$

$\Rightarrow$समुच्चय S_3 एकघातत: स्वतन्त्र है ।

माना $w\in W_1+W_2$, तब $\exists u\in W_1$ तथा $v\in W_2$ ताकि $w=u+v$

चूंकि समुच्चय S_1, W_1 का आधार है और $u\in W$ इसलिए अदिशों $a_1,.....,a_r,b_1,.....,b_{m-r}$ का अस्तित्व होगा ताकि

$$u = a_1\alpha_1 + ... + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + ... + b_{m-r}\beta_{m-r}.$$

इसी प्रकार S_1, W_1 का आधार है और $u \in W_2$ इसलिए अदिशों $c_1, ..., c_r, d_1, ..., d_{n-r}$ का अस्तित्व होगा ताकि

$$v = c_1\alpha_1 + ... + c_r\alpha_r + d_1\beta_1 + ... + d_{n-r}\beta_{n-r}.$$

अब

$$w = u + v = (a_1 + c_1)\alpha_1 + ... + (a_r + c_r)\alpha_r + b_1\beta_1 + ... + b_{m-r}\beta_{m-r} + d_1\gamma_1 + ... + d_{n-r}\gamma_{n-r}.$$

यह प्रदर्शित करता है कि w समुच्चय S_3 के अवयवों के एकघात संचय के रूप में लिखा जा सकता है ।

अत S_3, $W_1 + W_2$ को जनित करता है ।

फलत: S_3, $W_1 + W_2$ का आधार है ।

विमा $(W_1 + W_2) = m + n - r$

= विमा W_1 + विमा W_2 - विमा $(W_1 \cap W_2)$

टिप्पणी :

(i) यदि $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, तो विमा $(W_1 + W_2) =$ विमा W_1 + विमा W_2

(ii) यदि $V = W_1 \oplus W_2$ अर्थात् V, W_1 और W_2 का अनुलोम योग है, तो

विमा V = विमा W_1 + विमा W_2

उदाहरण 6 : माना V (F) एक सदिश समष्टि है जिसकी विमा 6 है और U, W इसकी दो भिन्न-भिन्न उपसमष्टियाँ हैं जिनकी विमा 4 है । तो $U \cap W$ के विमा की सम्भावनायें ज्ञात कीजिये ।

हल : चूँकि U और W सदिश समष्टि V (F) की दो भिन्न-भिन्न उपसमष्टियाँ हैं ताकि विमा $W_1 = 4$ तथा विमा $W_2 = 4$,

इसलिए $U \subset U + W, W \subset U + W$ और विमा $(U + W) > 4$.

चूँकि विमा V = 6 इसलिए $(U + W)$ की विमा 6 से ज्यादा नहीं हो सकती हैं ।

अत: हमारे पास केवल दो सम्भावनायें हैं ।

(i) विमा $(U + W) = 5$ या (ii) विमा $(U + W) = 6$

यदि विमा $(U + W) = 5$, तो उपर्युक्त प्रमेय से

विमा $(U + W)$ = विमा U + विमा W- विमा $(U \cap W)$

$\Rightarrow 5 = 4 + 4 -$ विमा $(U \cap W)$

$\Rightarrow$ विमा $(U \cap W) = 3$.

यदि विमा $(U + W)$ = 6, तो

$6 = 4 + 4 -$ विमा $(U \cap W)$

$\Rightarrow$ विमा $(U \cap W) = 2$

अत: $(U \cap W)$ की विमा 2 या 3 हो सकती है ।

15.3 विभाग समष्टि एवं इसकी विमा (Quotient space and its dimension)

माना V, क्षेत्र F पर एक सदिश समष्टि है और W, V की एक उपसमष्टि है । चूँकि (V,+) एक क्रमविनिमेय समूह है और W, (V+) का उपसमूह है, इसलिए W, V का विशिष्ट उपसमूह होगा क्योंकि किसी क्रमविनिमेय समूह का प्रत्येक उपसमूह विशिष्ट होता है । इकाई 3 में आप वाम सहकुलक और दक्षिण सहकुलक के विषय में जानकारी प्राप्त कर चुके हैं । चूँकि (V,+) एक क्रमविनिमेय समूह है, इसलिए V में प्रत्येक $v \in V$ के लिए W के वाम और दक्षिण सहकुलक आपस में बराबर होते हैं, अर्थात् प्रत्येक $v \in V$ के लिए

$$W + v = \{w + v | w \in W\}$$
$$= v + W.$$

$0 \in W \Rightarrow 0 + W = W.$

अत: W स्वयं V में एक सहकुलक है ।

हम जानते हैं कि $W + v_1 = W + v_2$ यदि और केवल यदि $v_1 - v_2 \in W$.

यदि V में W के सभी सहकुलकों के समुच्चय को V/W से निरूपित करें, अर्थात $V/W = \{W + v | v \in V\}$, हम सिद्ध करेंगे कि योग + और अदिश गुणन . जो निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$$(W + v_1) + (W + v_2) = W + (v_1 + v_2)$$

तथा

$$a(W + v_1) = W + av_1 \quad \forall W + v_1, W + v_2 \in V_2$$

तथा $a \in F$ के सापेक्ष एक सदिश समष्टि होगा । V/W को हम विभाग समिष्ट कहते हैं ।

प्रमेय 4 : यदि W सदिश समष्टि V (F) की उपसमष्टि है, तो W के V में सभी सहकुलकों का समुच्चय $V/W = \{W + v | v \in V\}$, क्षेत्र F पर सदिश योग तथा अदिश गुणन संक्रिया के लिए जो निम्न प्रकार परिभाषित है

$$(W + v_1) + (W + v_2) = W + (v_1 + v_2)$$

तथा $\quad a(W + v_1) = W + av_1 \quad \forall W + v_1, W + v_2 \in V_2$

तथा $a \in F$ के सापेक्ष एक सदिश समष्टि है ।

उपपत्ति : सर्वप्रथम हम सिद्ध करेंगे कि V/W में परिभाषित दोनों संक्रियायें सुपरिभाषित हैं ।

माना $W + v_1 = W + v'_1$ तथा $W + v_2 = W + v'_2$, जहाँ $v_1, v_2, v'_1, v_2', \in V.$

अब

$$W + v_1 = W + v'_1 \Rightarrow v_1 - v'_1 \in W$$
$$W + v_2 = W + v'_2 \Rightarrow v_2 - v'_2 \in W.$$

चूँकि W,W की उपसमष्टि है, इसलिये

$$v_1 - v'_1 \in W, v_2 - v'_2 \in W \Rightarrow (v_1 - v'_1) + (v_2 - v'_2) \in W$$

$$\Rightarrow (v_1+v_2)-(v'_1-v'_2)\in W$$
$$\Rightarrow W+(v_1+v_2)=W+(v'_1+v'_2)$$
$$\Rightarrow (W+v_1)(W+v_2)=(W+v'_1)(W+v'_2)$$

अत: $W+v_1=W+v'_1$ तथा $W+v_2=W+v'_2$

$$\Rightarrow (W+v_1)+(W+v_2)=(W+v'_1)+(W+v'_2)$$

$\Rightarrow V/W$ में सदिश योग संक्रिया सुपरिभाषित है ।

पुन: चूँकि W,V की उपसमष्टि है, इसलिए

$$a\in F, v_1-v'_1\in W \Rightarrow a(v_1-v'_1)\in W$$
$$\Rightarrow av_1-av'_1\in W$$
$$\Rightarrow W+av_1=W+-av'_1$$
$$\Rightarrow a(W+v_1)-(W+v'_1)$$

$\Rightarrow V/W$ में अदिश गुणन संक्रिया सुपरिभाषित है ।

अब हम सिद्ध करेंगे कि V/W सदिश योग संक्रिया के लिए क्रमविनिमेय समूह ।

1. योग के लिए क्रमविनिमेयता माना $W+v_1$ तथा $W+v_2$,V/ W के कोई दो अवयव हैं, जहाँ $v_1, v_2, \in V$.

अब

$$(W+v_1)+(W+v_2)=W+(v_1+v_2)$$
$$=W+(v_2+v_1)$$
$$=(W+v_2)+(W+v_1)$$

$\Rightarrow (W+v_1)+(W+v_2)=(W+v_2)+(W+v_1)$

$\Rightarrow V/W$ में सदिश योग क्रमविनिमेय है ।

2. साहचार्यता माना $W+v_1, W+v_2, W+v_3\in V/W$ तब $v_1, v_2, v_3\in V$.

अब $$[(W+v_1)+(W+v_2)]+(W+v_3)=[W+(v_1+v_2)]+(W+v_3)$$
$$=W+[(v_1+v_2)+v_3]$$
$$=W+[v_1+(v_2+v_3)]$$
$$=(W+v_1)+[W+(v_2+v_3)]$$
$$=(W+v_1)+[(W+v_2)+(W+v_3)]$$

$\Rightarrow V/W$ में सदिश योग साहचर्यता नियम का पालन करता है ।

3. तत्समक अवयव का अस्तित्व यदि V का शून्य सदिश 0 है तो $W+0=W\in V/W$ का शून्य सदिश होगा क्योंकि किसी $W+v\in V/W$ के लिए

$$(W+v)+(W+0)=W+(v+0)=W+v$$
$$=W+(0+v)$$
$$=(W+0)+(W+v)$$

4. प्रतिलोम का अस्तित्व माना $W+v, V/W$ का कोई अवयव है, तो $v \in V$

$$v \in V \Rightarrow -v \in V$$
$$\Rightarrow W+(-v) \in V/W.$$

अब

$$\begin{aligned}(W+v)+(W+(-v)) &= W+(v-v)\\ &= W+0\\ &= W+(-v+v)\\ &= (W+(-v))+(W+v)\\ &= (W+(-v))+(W+v)\end{aligned}$$

$\Rightarrow W+(-v) = W-v, V/W$ में $(W+v)$ का प्रतिलोम अवयव है ।

फलत: V/W, सदिश योग संक्रिया के लिए क्रमविनिमेय समूह है ।

अब हम सदिश समष्टि के शेष अभिगृहीतों को सिद्ध करेंगे ।

माना $W+v_1, W+v_2 \in V/W$ तथा $a, b \in F$

अब

$$\begin{aligned}(i)\ a.[(w+v_1)+(w+v_2)] &= a.[W(v_1+v_2)]\\ &= W+a.(v_1+v_2)\\ &= W+(a.v_1+a.v_2)\\ &= (W+a.v_1)+(W+a.v_2)\\ &= a.(W+v_1)+a.(W+v_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(ii)}\ (a+b).(W+v_1) &= W+(a+b).v_1\\ &= W+(a.v_1+b.v_1)\\ &= (W+a.v_1)+(W+b.v_1)\\ &= a.(W+v_1)+b.(W+v_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(iii)}\ (ab).(W+v_1) &= W+(ab).v_1\\ &= W+a(b.v_1)\\ &= a.(W+b.v_1)\\ &= a.[b.(W+v_1)]\\ &= a.[b.(W+v_1)]\end{aligned}$$

$(iv)\ 1.(W+v_1) = W+1.v_1$

$= W+v_1$, जहाँ 1 क्षेत्र में गुणन संक्रिया के लिए तत्समक अवयव है ।

अत: V/W क्षेत्र F पर एक सदिश समष्टि है ।

प्रमेय 5 : यदि V(F) एक परिमित विमीय सदिश समष्टि है तथा W, V की एक उपसमष्टि है, तो विभाग समष्टि V/W भी परिमित विमा का होता है तथा विमा V/W = विमा V - विभा W

उपपत्ति : माना विमा V = n तथा विमा W = m

चूँकि W परिमित विमीय सदिश समष्टि की उपसमष्टि है, इसलिए $W \leq$ विमा अर्थात् $m \leq n$.

माना समुच्चय $S = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}, W$ का आधार है । चूँकि S एकघातत: स्वतन्त्र है और $S \subset V$, इसलिए इकाई 14 के प्रमेय 6 से S को हम इस तरह विस्तृत करते हैं कि वह समष्टि V का आधार हो जाये ।

माना $S_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-m}\}, V$ का आधार है ।

$\beta_1, \beta_2, ...\beta_{n-m} \in V \Rightarrow W + \beta_1, W + \beta_2 ....., W + \beta_{n-m} \in V / W$.

अब हम सिद्ध करेंगे कि समुच्चय

$S_2 = \{W + \beta_1, W + \beta_2 ....., W + \beta_{n-m}\}$, विभाग समष्टि V/W का आधार है ।

इसके लिए हम सिद्ध करेंगे कि S_2 एकघातत: स्वतन्त्र है और V/W का प्रत्येक सदिश समुच्चय S_2के अवयवों के एकघात संचय के रूप में लिखा जा सकता है, अर्थात् S_2, W, V का जनक है ।

माना $a_1, a_2, ..., a_{n-m} \in F$ ताकि

$$a_1(W + \beta_1) + a_2(W + \beta_2) + ... + a_{n-m}(W + \beta_{n-m}) = W$$

$$\Rightarrow (W + a_1\beta_1) + (W + a_2\beta_2) + ... + (W + a_{n-m}\beta_{n-m}) = W$$

$$\Rightarrow W + (a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + ... + a_{n-m}\beta_{n-m}) = W$$

$\Rightarrow a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + ... + a_{n-m}\beta_{n-m} \in W$, क्योंकि $W + v = W$ यदि और केवल यदि $v \in W$.

चूँकि S, W का आधार है, इसलिये अदिशों $b_1, b_2, ..., b_{n-m} \in F$ का अस्तित्व होगा ताकि

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + ... + a_{n-m}\beta_{n-m} = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + ... + b_m\alpha_m$$

$$\Rightarrow b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + ... + b_m\alpha_m + (-a_1)\beta_1 + (-a_2)\beta_2 + ... + ... + (-a_{n-m})\beta_{n-m} = 0$$

$\Rightarrow b_1 = b_2 = ...b_m = a_1 = a_2 = ... = a_{n-m} = 0$, क्योंकि समुच्चय S_1 एकघातत: स्वतन्त्र है ।

अत: $a_1(W + \beta_1) + a_2(W + \beta_2) + ... + a_{n-m}(W + \beta_{n-m}) = W$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = ... = a_{n-m} = 0$

$\Rightarrow$समुच्चय S_2 एकघातत: स्वतन्त्र है ।

अन्त में माना, $W + v \in V / W$, तब $v \in V$.

चूँकि समुच्चय S_1, V का आधार है, इसलिए अदिशों $a_1, a_2, ..., a_m, b_1, b_2, ..., b_{n-m}$ का अस्तित्व होगा ताकि

$$v = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_m\alpha_m + b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + ... + b_{n-m}\beta_{n-m}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{n-m} b_j\beta_j.$$

अब $W+v=W+\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\alpha_i+\sum_{j=1}^{n-m}b_i\beta_i\right)$

$$=\left(W+\sum_{i=1}^{m}a_i\alpha_i\right)+\left(W+\sum_{j=1}^{n-m}b_j\beta_j\right).$$

$=\left(W+\sum_{j=1}^{n-m}b_j\beta_j\right)$, क्योंकि $\sum_{i=1}^{m}a_i\alpha_i\in W$ इसलिए $W+\sum_{i=1}^{m}a_i\alpha_i=W$

$$=W+\left(b_1\beta_1+b_2\beta_2+.....+b_{n-m}\beta_{n-m}\right)$$

$$=\left(W+b_1\beta_1\right)+\left(W+b_2\beta_2\right)+.....+\left(W+b_{n-m}\beta_{n-m}\right)$$

$$=b_1\left(W+\beta_1\right)+b_2\left(W+\beta_1\right)+.....+b_{n-m}\left(W+\beta_{n-m}\right)$$

$\Rightarrow$W + v समुच्चय S_2 के अवयवों के एकघात संचय के एकघात में लिखा जा सकता है।

फलत: समुच्चय S_2,V/W प्राण का जनक है ।

उपर्युक्त वर्णन के आधार पर हम कह सकते हैं कि S_2, V/W का है । चूँकि S_2 में अवयवों की संख्या n - m है, इसलिए

विमा V/W = n - m

= विमा V - विमा W

उदाहरण 7 : माना $V=\{(a,b,c)\,|\,a,b,c\in R\}$ एक सदिश समष्टि है $W=\{(0,0,c)\,|\,c\in R\}, V(R)$ की एक उपसमष्टि है । विभाग समष्टि V/W की विमा ज्ञात कीजिये ।

हल : चूँकि विमा V(R) = 3 और विमा W = 1, क्योंकि W का आधार {(0,0, 1)} है, इसलिए सूत्र

विमा V/W = विमा V - विमा W से

विमा V/W = 3 - 1 = 2.

स्वमूल्यांकन प्रश्न

1. माना $V=\{(a,b)\,|\,a,b\in R\}$ एक सदिश समष्टि है । पुन: माना $W_1=\{(a,0)|a\in R\}$ और $W_2=\{(0,b)\,|\,b\in R\}, V(R)$ की दो उपसमष्टियाँ हैं । W_1+W_2 ज्ञात कीजिये ।
2. उपर्युक्त प्रश्न 1 में V अपने दोनों उपसमष्टियो का अनुलोम योग ।

   सत्य / असत्य
3. उपर्युक्त प्रश्न 1 में W_1+W_2 की विमा 1 है ।

   सत्य /असत्य
4. उपर्युक्त प्रश्न 1 में V/की विमा 2 है ।

   सत्य /असत्य

15.4 सारांश

इस इकाई में आपने मुख्यत: सदिश समष्टि के दो उपसमष्टियों के योग के विषय मे जानकारी प्राप्त की है । इनसे सम्बन्धित कुछ महत्वपूर्ण परिणामों की जानकारी प्राप्त करते हुए आपनें जाना किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि के दो उपसमष्टियों के योग की विमा भी परिमित होती है । इकाई के अन्त में आपने विभाग समष्टि के विषय में जानकारी प्राप्त की है ।

15.5 शब्दावली

रैखिक योग	Linear sum
अनुलोम योग	Direct sum
पूरक उपसमिष्ट	Complementary subspace
विभाग समूह	Quotient space
विमा	Dimension

15.6 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1. $W_1 + W_2 = V$
2. सत्य
3. असत्य
4. असत्य

15.7 अभ्यास प्रश्न

1. माना कि $U(F)$ एवं $W(F)$ सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हैं, तो निम्न प्रतिबन्ध परस्पर हैं:

   (i) $U \cap W = \{0\}$

   (ii) प्रत्येक सदिश $x \in U \cap W$ को अद्वितीय रूप u + w में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ $u \in U, w \in W$.

2. यदि समस्त वास्तविक मान वाले संतत् फलनों की सदिश समष्टि V (R) की दो उपसमष्टियाँ

   $V_e = \{ f \in V \mid f(-x) = f(x) \quad \forall x \in R \}$

   और

   $V_0 = \{ f \in V \mid f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in R \}$ हैं, तो सिद्ध कीजिये कि $V = V_e \oplus V_0$.

3. ; fn I fn' kI ef 'V $V(F)$ अपने दो उपसमष्टियो का W_1 एवं W_2 का अनुलोम योग है, तो सिद्ध कीजिये कि विमा V = विमा W_1 +विमा W_2

4. यदि $V=\{(a,b,c)\,|\,a,b,c\in R\}$ एक सदिश समष्टि है और $W=\{(a,b,0)\,|\,a,b\in R\}, V(R)$ की एक उपसमष्टि है तो V/W की विमा ज्ञात कीजिये।

(उत्तर विमा V/W = 1)

संदर्भ पुस्तकें (Reference Books)

1. अमूर्त बीजगणित (Abstract Algebra),
   प्रो. जे.एल. बंसल, एस.एल. भार्गव, डॉ. एस. एम. अग्रवाल,
   जयपुर पब्लिशिंग हाउस, जयपुर
2. Modern Algebra
   Surjeet Singh,Qazi Zameeruddin
   Vikash Publishing House,Pvt,Ltd. New Delhi
3. University Algebra,
   N.S Gopalakrishnan,
   Wiley Eastern Ltd., New Age International Ltd.,New Delhi
4. Abstract Algebra
   Prof. Dipak Chatterjee
   Prentice-Hall of India,New Delhi

ISBN - 13/978-81-8496-132-4