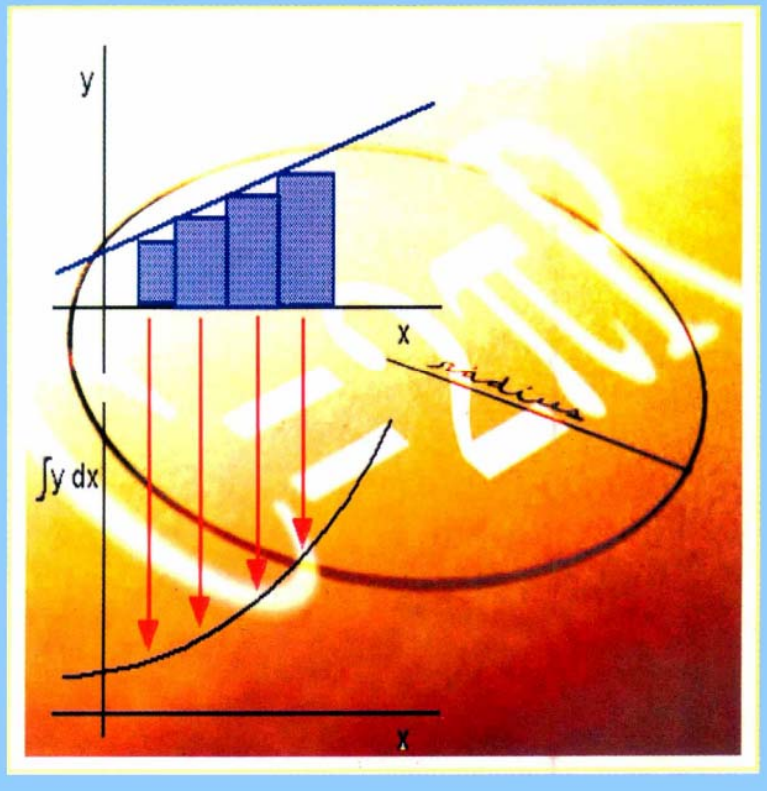
MT - 02

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा



कलन एवं अवकल समीकरण

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

कलन एवं अवकल समीकरण

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

अध्यक्ष

प्रो.(डॉ.) नरेश दाधीच
कुलपति
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय
कोटा (राजस्थान)

सयोजक / समन्वयक एवं सदस्य

विषय समन्वयक
प्रो. डी.एस. चौहान
गणित विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

सदस्य सचिव/समन्वयक
डॉ. अशोक शर्मा
सह आचार्य, राजनीति विज्ञान
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

सदस्य

1. **प्रो. जी. सी. शर्मा**
   गणित विभाग,
   इन्स्टीयूट ऑफ बेसिक साईंस डॉ. बी.आर.अंम्बेडकर विश्वविद्यालय, आगरा-282002
2. **प्रो.एस.सी. राजवंशी**
   गणित विभाग,
   इन्स्टीयूट ऑफ इंजीनियरिंग एण्ड टेक्नोलॉजी भड्डल, पंजाब-140108
3. **प्रो. मैथिलीशरण**
   गणित विभाग,
   सेंटर फार एट्मोसफियरिक साइंसेज,
   आई. आई. टी. नई दिल्ली-110016
4. **डॉ. ऐ.के. माथुर**
   एसोसियेट प्रोफेसर (गणित) (से.नि.)
   13/2 मालवीय नगर, जयपुर 302017
5. **डॉ. के. एन. सिंह**
   एसोसियेट प्रोफेसर, गणित विभाग,
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर-302004
6. **डॉ.के.एस. शेखावत**
   व्याख्याता, गणित विभाग
   राजकीय स्नाकोत्तर महाविद्यालय, सीकर (राज.)
7. **डॉ. के. के. मिश्रा**
   व्याख्याता, गणित विभाग
   एम.एस.जे.कॉलेज, भरतपुर (राजस्थान)

संपादन तथा पाठ लेखन

सम्पादक
प्रो. डी. एस. चौहान
गणित विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

लेखक

1. **प्रो. एस. पी. गोयल**
   गणित विभाग
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
2. **डॉ. ऐ. के. माथुर**
   एसोसियेट प्रोफेसर (गणित) (से.नि.)
   13/2 मालवीय नगर,
3. **डॉ. के. एन. सिंह**
   एसोसियेट प्रोफेसर, गणित विभाग,
   राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर-302004
4. **डॉ. प्रमिला कुमारी**
   व्याख्याता, गणित विभाग
   एस.एस. जैन सुबोध पी.जी. कॉलेज जयपुर
5. **डॉ.के.एस. शेखावत**
   व्याख्याता, गणित विभाग
   राजकीय स्नाकोत्तर महा, सीकर (राज.)
6. **डॉ. सुभाष यादव**
   व्याख्याता, गणित विभाग
   राजकीय स्नाकोत्तर महाविद्यालय कोटपूतली (राज.)
7. **डॉ. के. के. मिश्रा**
   व्याख्याता, गणित विभाग
   एम. एस.जे. कॉलेज भरतपुर (राज.)

अकादमिक एवं प्रशासनिक व्यवस्था

प्रो.(डॉ.) नरेश दाधीच	**प्रो. (डॉ.) एम.के.घड़ोलिया**	**योगेन्द्र गोयल**
कुलपति	निदेशक	प्रभारी
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय कोटा (राज.)	**संकाय विभाग**	**पाठ्यक्रम सामग्री उत्पादन एवं वितरण विभाग**

पाठ्यक्रम उत्पादन

योगेन्द्र गोयल
सहायक उत्पादन अधिकारी
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय कोटा (राज.)

पुनः उत्पादनः जुलाई,2010 **ISBN-13/978-81-8496-223-9**

इस सामग्री के किसी भी अंश को व.म.खु.वि. कोटा की लिखित अनुमति के बिना किसी भी रूप में अथवा मिमियोग्राफी (चक्रा मुद्रण) द्वारा या अन्यत्र पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं हैं। व.म.खु.वि., कोटा के लिए सचिव, व.म.खु.वि., कोटा (राज.) द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

कलन एवं अवकल समीकरण

इकाई सं.	इकाई	पृष्ठ सं.
1.	श्रेणी (Series)	7–38
2.	व्यापकीकृत माध्यमान प्रमेय एवं घात श्रेणी (Generalised mean value theorem and power series)	39–60
3.	वक्र के चाप का अवकलज व पदिक समीकरण (Deviarive of length of a curve and the pedal equation)	61–80
4.	वक्रता (Curvature	81–101
5.	आंशिक अवकलन (Partial Differentiation)	102–123
6.	उच्चिष्ट व निम्निष्ट (Maxima and Minima	124–140
7.	अनन्तस्पर्शियाँ (Asymptotes)	141–158
8.	वक्र अनुरेखण (Curve Tracing)	159–177
9.	अन्वालोप (Envelop)	178–195
10.	समतल वक्रो का क्षेत्रफल (क्षेत्रकलन) [Area of Plane Curves (Quadrature)]	196–221
11.	समतल वक्रों की लम्बाई (चापकलन) [Length of Plane curves(Rectification)]	222–235
12.	परिक्रमण ठोसों के आयतन एवं पृष्ठ (Volumes and Surfaces of Solids of Revolution)	236–259
13.	द्वि-समाकल (Double Integral)	260–283
14.	त्रि-समाकल एवं डिरीचलेट समाकल (Triple-Integral and Dirichlet's Integral	284–295
15.	गामा तथा बीटा फलन (Beta and Gama Function)	296–309
16.	अवकल समीकरण (Differential Equation)	310–337

प्रस्तावना

प्रस्तुत पुस्तक **"कलन एवं अवकल समीकरण"** वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा द्वारा प्रस्तावित पाठ्यक्रमानुसार बी. एससी भाग प्रथम के गणित विषय-द्वितीय प्रश्न-पत्र के अध्ययन हेतु सृजित की गई हैं। पुस्तक की भाषा शैली को सरल, रोचक एवं सुग्रह्य बनाने का अथक प्रयास किया गया है। गणित जैसे विषय की प्रवृति को ध्यान में रखते हुए पुस्तक में अंग्रेजी शब्दो का समुचित प्रयोग किया गया हैं तथा पुस्तक को लिखते समय यह आवश्यक समझा गया हैं कि हिन्दी भाषा के साथ-साथ आवश्यक शब्दावली अंग्रेजी में भी हो। पुस्तक कि विभिन्न इकाईयो को विद्वान लेखकों द्वारा लिखा गया गया हैं। लेखको ने पुस्तक को तथ्यपरक बनाने के लिए मानक ग्रन्थो कि सहायता प्राप्त की हैं, इनके रचियाताओं के लिए कृतज्ञतापन इस पंक्तियों के माध्यम से प्रस्तुत हैं। यह पुस्तक विद्यार्थियों के लिए प्रतियोगी परीक्षाओं हेतु भी सही मार्गदर्शन प्रदान करने में सहायक होगी।

इकाई 1: श्रेणी (Series)

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य

1.1 प्रस्तावना

1.2 श्रेणी

परिभाषा, श्रेणी के प्रकार

1.3 श्रेणी के आंशिक योगफलों का अनुक्रम

1.4 श्रेणी का अभिसरण तथा अपसरण

1.5 अनन्त श्रेणियों के कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्म

1.6 श्रेणी के अभिसरण के लिए आवश्यक शर्त

1.7 गुणोत्तर श्रेणी का अभिसरण

1.8 तुलना परीक्षण

1.9 हाइपर-हारमोनिक श्रेणी का अभिसरण

1.10 धनात्मक पदों वाली श्रेणियों के अभिसरण व अपसरण के लिए कुछ महत्वपूर्ण परीक्षण

1.10.1 कोशी का nवाँ मूल परीक्षण

1.10.2 दलैम्बर का अनुपात परीक्षण

1.10.3 लघुगणकीय अनुपात परीक्षण

1.10.4 राबी परीक्षण

1.10.5 डी' मार्गन एवं बरट्राण्ड्स परीक्षण

1.10.6 कोशी संघनन परीक्षण

1.10.7 गॉस परीक्षण

1.11 एकान्तर श्रेणी

1.12 एकान्तर श्रेणी के लिए लेबनीज का परीक्षण

1.13 निरपेक्ष अभिसरण

1.14 सारांश

1.15 शब्दावली

1.16 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1.17 अभ्यास प्रश्न

1.0 उद्देश्य

इस इकाई में श्रेणी के विषय में चर्चा की गयी है। इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप,

- समझ सकेंगे कि श्रेणी मुख्यत : कितने प्रकार की होती है।
- अभिसारी श्रेणी, अपसारी श्रेणी एवं दोलायमान श्रेणी के बारे में जानकारी प्राप्त कर इनमें अन्तर समझ सकेंगे।

- निरपेक्ष अभिसारी श्रेणी एवं सापेक्ष अभिसारी श्रेणी में अन्तर समझ सकेंगे।
- यदि कोई श्रेणी अभिसारी है तो उसके लिए आवश्यक प्रतिबन्ध क्या होता है, इसकी भी जानकारी कर सकेंगे।
- समझ सकेंगे कि किसी अनन्त श्रेणी में सीमित पद जोड़ने से या घटाने से या इसके प्रत्येक पद को किसी अशून्य अचर संख्या से गुणा करने पर श्रेणी का अभिसरण तथा अपसरण प्रभावित नहीं होता है।

1.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम अनन्त श्रेणी के विषय में चर्चा करेंगे क्योंकि किसी परिमित श्रेणी का एक निश्चित योग होता है। श्रेणी के अभिसरण, अपसरण एवं दोलायमान की जानकारी देते हुए धन पदों वाली श्रेणी के लिए कुछ महत्वपूर्ण परीक्षणों की चर्चा करेंगे जिनके द्वारा यह मालूम किया जा सके कि अमुख श्रेणी अभिसारी, अपसारी एवं दोलायमान में से क्या है। इस इकाई के अन्त में हम एकान्तर श्रेणी के बारे में अध्ययन करेंगे तथा यह बतलायेंगे कि निरपेक्ष अभिसारी श्रेणी एवं सापेक्ष अभिसारी श्रेणी किसे कहते हैं तथा इनका परीक्षण कैसे करेंगे।

1.2 श्रेणी (Series)

चूँकि श्रेणी को परिभाषित करने के लिए अनुक्रम (Sequence) के जानकारी की आवश्यकता होती है, इसलिए हम सबसे पहले अनुक्रम को परिभाषित करेंगे और यह बतलायेंगे कि कोई अनुक्रम अभिसारी, अपसारी तथा दोलायमान कब होता है।

अनुक्रम एक फलन होता है जिसका 'प्रान्त (Domain) प्राकृत संख्याओं का समुच्चय N होता है और उसका सहप्रान्त (Conomain) कोई समुच्चय A होता है। जब समुच्चय A वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R का उपसमुच्चय होता है अर्थात् $A \subseteq R$, तब उस अनुक्रम को वास्तविक अनुक्रम (Real sequence) कहते हैं। यदि x एक अनुक्रम है तो ओर $x : N \to A$। चुँकि अनुक्रम का प्रान्त प्राकृत संख्याओं का समुच्चय N होता है, इसलिए $n \varepsilon N$ का प्रतिबिम्ब (Image) x (nn) ε A (n) को हम अनुक्रम का n वाँ पद कहते हैं तथा इसे x_n या x (n) से निर्दिष्ट करते हैं। अनुक्रम x को हम

$x = <x_1, x_2, ..., x_n, ... >$ या

$< x(1), x(2), ..., x(n), ... >$ या

$< x_n >$ या $< x(n) >$ से निरुपित करते हैं। यदि $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ जहाँ ℓ एक परिमित (finite) एवं अद्वितीय (unique) संख्या हो तो अनुक्रम $< x(n) >$ को अभिसारी कहते हैं। यदि ℓ अद्वितीय नहीं है तो अनुक्रम $< x(n) >$ को दोलायमान कहते हैं और यदि $\ell = +\infty$ या $-\infty$ हो $< x(n) >$ को अपसारी (divergent) कहते हैं।

अनुक्रम $< x(n) >$ जहाँ $x_n = 1/n \forall n \varepsilon N$ को अभिसृत होता है क्योंकि $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = 0.$ अनुक्रम $< x(n) >$ जहाँ $x_n = (-1)^n \ \forall n \varepsilon N$, अर्थात्

$$X_n = \begin{cases} -1, \text{यदि n विषम हैं} \\ 1, \text{यदि n सम है} \end{cases}$$

दोलायमान हैं क्योंकि $\lim_{n\to\infty} x_n = -1$ यदि n विषम है और $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ यदि n सम है।

यहाँ $< x(n) >$ को परिमित दोलनी कहते हैं। अनुक्रम $< x(n) >$ जहाँ $< x(n) > x_n = (-1)^n n \forall n \varepsilon N$, अर्थात्

$$X_n = \begin{cases} -n, \text{यदि n विषम हैं} \\ n, \text{यदि n सम है} \end{cases}$$

अपरिमित दोलायमान है क्योंकि $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ यदि n सम है और $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ यदि n विषम है।

अनुक्रम $< x(n) >$ जहाँ $x_n = n^2 \ \forall n \varepsilon N$, एक अपसारी अनुक्रम है क्योंकि $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

यदि $< u_n >$ एक वास्तविक अनुक्रम हो तो व्यंजक $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ...u_n + ...$ को श्रेणी कहते हैं। यदि अनुक्रम $< u_n >$ के सभी पद एक निश्चित पद (माना m वाँ पद) के प्रश्चात शून्य हों, अर्थात् $u_{n=0} \forall n > m$, तब व्यंजक $u_1 + u_2 + ... + u_m$ को परिमित श्रेणी कहते हैं। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि यदिं किसी श्रेणी में पदों की संख्या परिमित हो तो वह प्रति श्रेणी कहलाती है। यदि किसी श्रेणी में पदों की संख्या अनन्त (infinte) हो तो वह अनन्त श्रेणी कहलाती है, अर्थात् अनन्त श्रेणी में प्रत्येक पद के पश्चात् एक पद आता है। इस इकाई में हम केवल अनन्त श्रेणियों काही अध्ययन करेंगे क्योंकि प्रत्येक परिमित श्रेणी का एक निश्चित योग होता है, अर्थात् प्रत्येक परिमित श्रेणी अभिसारी होती है। अत: यहाँ श्रेणी से हमारा तात्पर्य अनन्त श्रेणी से ही होगा।

1.3 श्रेणी के आंशिक योगफलों का अनुक्रम (Sequence of partial-sums of series)

माना कि $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ अनन्त श्रेणी है। पुन: माना

$$s_1 = u_1$$
$$s_2 = u_1 + u_2$$
$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
.....
.....
$$s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$$
.....
.....

तो s_n कोहम श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ के प्रथम n पदों का आंशिक योगफल कहते हैं। अनुक्रम $< s_n >$ को श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ के आशिक योगफलों का अनुक्रम कहते हैं। चूँकि $s_n = s_{n-1} + u_n$, अत:

$u_n = s_n - s_{n-1}$, यदि $s_0 = 0$ तो $s_1 = u_1$ एवं $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_3 - s_2) + \ldots\ldots$ लिखा जा सकता है।

1.4 श्रेणी का अभिसरण तथा अपसरण (Convergence and divergence of series)

माना $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ एक अनन्त श्रेणी है तथा $< s_n >$ श्रेणी के आंशिक योगफलों का अनुक्रम है। श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ अभिसारी कहलाती है यदि अनुक्रम $< s_n >$ अभिसारी है, अर्थात् $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ जहाँ s एक परिमित अद्‌वितीय वास्तविक संख्या है। s को श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ का योगफल कहते हैं अर्थात् $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} u_r = \lim_{n\to\infty} s_n = +s.$ श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ अपसारी कहलाती है यदि अनुक्रम $< s_n >$ अपसारी है, अर्थात् $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ या $-\infty$. श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ दोलायमान कहलाती है यदि अनुक्रम $< s_n >$ दोलायमान है, अर्थात् $\lim_{n\to\infty} s_n$ एक अद्‌वितीय संख्या नहीं है। श्रेणी $\lim_{n\to\infty} u_n$ परिमित रूप से दोलायमान होगी यदि अनुक्रम $< s_n >$ की निम्न सीमा ℓ_1 तथा उपरी सीमा ℓ_2 हो, जहाँ ℓ_1, ℓ_2 परिमित वास्तविक संख्या हैं। $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ अनन्त रूप से दोलायमान होगी यदि अनुक्रम $< s_n >$ की निम्न सीमा $-\infty$ तथा उपरी सीमा $+\infty$ हो।

उदाहरण 1 :

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots\ldots$ अभिसारी है, क्योंकि

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{1\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ = 2 जो एक अद्‌वितीय परिमित संख्या है।

अत: अनुक्रम $< s_n >$ अभिसारी है।

उदाहरण 2 :

श्रेणी $\sum u_n = 1+2+3+\ldots\ldots\ldots$ अपसारी है, क्योंकि

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$

$\Rightarrow$ अनुक्रम $< s_n >$ अपसारी है।

उदाहरण 3 :

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1+1-1+1-1+1-1+\ldots\ldots\ldots$ दोलायमान है,

क्योंकि

$$Sn \begin{cases} -1, \text{ यदि n विषम हैं} \\ 0, \text{ यदि n सम है} \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n$ = -1 या 0

$\Rightarrow$ अनुक्रम $< s_n >$ दोलायमान है।

टिप्पणी : किसी श्रेणी के अभिसरण तथा अपसरण की जांच करने के लिए उस श्रेणी के n पदों का योग s_n ज्ञात करना पड़ता है, परन्तु प्रत्येक श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात करना सम्भव नहीं होता है। अत: आगे हम कुछ ऐसे परीक्षणों का अध्ययन करेंगे जिनकी सहायता से बिना s_n का मान ज्ञात किये ही श्रेणी के अभिसरण तथा अपसरण की जाँच कर सकते हैं।

1.5 अनन्त श्रेणियों के कुछ महत्वपूर्ण गुणधर्म (Some important properties of infinite series)

(i) किसी श्रेणी में सीमित पद जोड़ने से या घटाने से या इसके प्रत्येक पद को किसी अशून्य अचर संख्या से गुणा करने पर श्रेणी का अभिसरण तथा अपसरण प्रभावित नहीं होता है।

(ii) किसी भी धन पदों की श्रेणी के पदों को किसी भी प्रकार समूहित करके नये पद बनाने पर श्रेणी का अभिसरण या अपसरण प्रभावित नहीं होता है।

(iii) यदि दो श्रेणियाँ $\sum u_n$ तथा $\sum v_n$ अभिसारी श्रेणियाँ हैं, तो $\sum (u_n + v_n)$ और $\sum (u_n - v_n)$ भी अभिसारी श्रेणियाँ होंगी।

(iv) धनात्मक पदों की कोई श्रेणी $\sum u_n$ सदा अभिसारी होती है यदि उसके n पदों का योग s_n, n के समस्त मानों के लिए एक निश्चित संख्या से सदा कम हो।

(v) यदि धनात्मक पदों वाली किसी श्रेणी का प्रत्येक पद एक निश्चित संख्या, चाहे जितनी छोटी हो, से अधिक हो, तो श्रेणी सदा अपसारी होती है।

1.6 श्रेणी के अभिसरण के लिए आवश्यक शर्त (Necessary condition for the convergence of a series)

यहाँ हम सिद्ध करेंगे कि यदि कोई श्रेणी $\sum u_n$ अभिसारी है, तब $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ है। माना श्रेणी $\sum u_n$ अभिसारी है तथा $< s_n >$ श्रेणी $\sum u_n$ के आंशिक योगफलों का अनुक्रम है, तब $s_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots + u_n$ चूँकि श्रेणी $\sum u_n$ अभिसारी है

$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n$ = s (एक परिमित राशि)

$\lim_{n\to\infty} s_{n-1}$ = s.

अब $u_n = s_n - s_{n-1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1})$

$= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$

= s - s

= 0

$\lim_{n\to\infty} u_n$ = 0

टिप्पणी : (i) उपर्युक्त कथन का विलोम सदैव सत्य नहीं होता है, अर्थात् यदि $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ हो तो श्रेणा $\sum u_n$ अभिसारी नहीं भी हो सकती है।

उदाहरणार्थ : श्रेणी $\sum u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots\ldots$ पर विचार करते है। यहाँ $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ परन्तु $\sum u_n$ अभिसारी नहीं है क्योंकि

$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots + u_n$

$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots \frac{1}{\sqrt{n}}$

$> \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$

$\Rightarrow s_n > \sqrt{n} \forall n \geq 2$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \infty \Rightarrow$ अनुक्रम $< s_n >$ अपसारी है। अत: श्रेणी $\sum u_n$ अपसारी है

यद्यपि $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. यहाँ इसका नकारात्मक रूप किन्हीं स्थितियों में एक परीक्षण के रूप मैं प्रयोग किया जाता है अर्थात्

(ii) $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \sum u_n$ अभिसारी नहीं है।

1.7 गुणोत्तर श्रेणी का अभिसरण (Convergence of the geometric series)

हम यह सिद्ध करेंगे कि गुणोत्तर श्रेणी $\sum u_n = 1 + r + r^2 + ...r^{n-1} + ...$

(i) अभिसारी है यदि $-1 < r < 1,$ अर्थात् $|r| <|,$

(ii) अपसारी है यदि $r \geq 1,$ तथा

(iii) दोत्ननी है यदि $r \leq -1,$

माना $< s_n >$ श्रेणी $1 + r + r^2 + ... + r^{n-1} + ...$ के आंशिक योगफल का अनुक्रमण है। तब

$$s_n = 1 + r + r^2 + ... + r^{n-1}$$

$$= \frac{1 - r^n}{1 - r} \text{ यदि } r \neq 1$$

$= n$ यदि r = 1.

जब $|r| <|$ अर्थात् $-1 < r < 1,$ तब $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$. अतः $\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1 - r} =$ एक परिमित राशि

$\Rightarrow$ अनुक्रम $< s_n >$ आभिसारी है।

$\Rightarrow$ श्रेणी $\sum u_n$ अभिसारी है।

जब $r = 1,$ तब $s_n = n$

$\Rightarrow$ $\lim_{n \to \infty} s_n = \infty$

$\Rightarrow$ अनुक्रम $< s_n >$ अपसारी है।

$\Rightarrow$ श्रेणी $\sum u_n$ अपसारी है।

जब $r > 1,$ तब $\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{r^n - 1}{r - 1} = \infty$

$\Rightarrow$ अनुक्रम $< s_n >$ अपसारी है

$\Rightarrow$ श्रेणी $\sum u_n$ अपसारी है।

अतः श्रेणी $\sum u_n$ अपसारी है यदि $r \geq 1.$

यदि r = -1, तब

$$s_n = 1 - 1 + 1 - 1 + ...1 - 1$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ यदि n विषम हैं} \\ 0, \text{ यदि n सम है} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\lim_{n \to \infty} s_n =$ शून्य और 1 होगा, जब n सम या विषम हो। अतः $\sum u_n$ परिमित दोलनी श्रेणी है।

जब $r < -1.$ माना $r = -k,$ = तब k $> 1.$

$\therefore \quad s_n = \dfrac{1-r^n}{1-r} = \dfrac{1-(-k)^n}{1-(-k)} = \dfrac{1-k^n}{1+k}$ (जब n सम है)

$\dfrac{1+k^n}{1+k}$ (जब n विषम है)

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$ या $+\infty$ यदि n सम या विषम है।

अत: दी हुई श्रेणी अनन्त दोलनी है। अत: श्रेणी $\sum u_n$ दोलनी है यदि $r \le -1$.

1.8 तुलना परीक्षण (comparison test)

(a) यदि $\sum u_n$ तथा $\sum v_n$ दो घनात्मक पदों की श्रेणियाँ हैं, तब

(i) यदि $\sum v_n$ अभिसारी है तथा $u_n \le v_n \forall n \varepsilon N$ तो $\sum u_n$ भी अभिसारी होगी।

(ii) यदि $\sum v_n$ अपसारी है तथा $u_n \ge v_n \forall n \varepsilon N$ तो $\sum u_n$ भी अपसारी होगी।

(b) यदि $\sum u_n$ तथा Σv_n दो धनात्मक पदों की श्रेणियाँ हैं तथा यदि $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \ell \ne 0$, जहाँ ℓ एक परिमित संख्या है, तो दोनों श्रेणियाँ या तो अभिसारी होंगी या अपसारी।

टिप्पणी : तुलना परीक्षण के भाग (b) द्वारा किसी श्रेणी $\sum u_n$ का अभिसरण या अपसरण ज्ञात करने के लिए एक अन्य श्रेणी Σv_n की आवश्यकता पड़ती हे। Σv_n को सहायक श्रेणी (Auxiliary series) कहते हैं। यह श्रेणी इस प्रकार चुनी जाती है ताकि $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ अशून्य एवं परिति राशि हो। साधारणतया v_n (सहायक श्रेणी का n वाँ पद) प्राप्त करने के लिए u_n में n के उच्चतम घात का प्रतिधारण करते हैं।

1.9 हाइपर-हारमोनिक श्रेणी का अभिसरण (Convergence of the hyper-harmonic series)

श्रेणी $\Sigma \dfrac{1}{n^p} = \dfrac{1}{1^p} + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \ldots\ldots\ldots + \dfrac{1}{n^p} + \ldots\ldots\ldots$

(i) अभिसारी होगी, यदि $p > 1$

(ii) अपसारी होगी, यदि $p \le 1$

स्थिति 1 : जब $p > 1$

चूंकि घनात्मक पदों की श्रेणी के पदों को किसी भी प्रकार समूहित (grouping) करके नये पद बनाने से उसका अभिसरण प्रभावित नहीं होता, इसलिए दी हुई श्रेणी को निम्न प्रकार से समूहित करने पर

$$\Sigma \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{15^p}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

अब $\frac{1}{1^p} = \frac{1}{1^p}$

$\because \; 3 > 2$

$\therefore \; 3^p > 2^p$

$\Rightarrow \; \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p}$

$\Rightarrow \; \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{2}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$ .....(2)

इसी प्रकार

$\Rightarrow \; \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p}$

$= \; \frac{4}{4^p} = \frac{2^2}{2^{2p}} = \frac{1}{2^{2p-2}}$ .....(2)

$\Rightarrow \; \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < \frac{1}{2^{2p-2}}$ .....(3)

$\frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + ... + \frac{1}{15^p} < \underbrace{\frac{1}{8^p} + \frac{1}{8^p} + ... + \frac{1}{8^p}}$

8 बार

$\frac{1}{8^p} = \frac{2^3}{2^{2p}} = \frac{1}{2^{3p-3}}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{8^p} + \frac{1}{9^p} + ... + \frac{1}{15^p} < \frac{1}{2^{3p-3}}$ .....(4)

.....

.....

.....

उपयुक्त से $\Sigma \frac{1}{n^p} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^{p-2}} + \frac{1}{2^{p-3}} + ...$

चूंकि दायें पक्ष में श्रेणी एक गुणोत्तर श्रेणी है, जिसका सार्वअनुपात $\frac{1}{2^{p-1}} < 1 \left(\therefore \; p > 1\right)$ है, इसलिए, अभिसारी है। अत: तुलना परिक्षण से दी हुई श्रेणी p > 1

स्थिति II : जब P = 1

इस स्थिति में दी हुई श्रेणी

$$\Sigma\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+.....$$
$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+.....$$

अब $1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2},\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

.....

.....

.....

उपर्युक्त से

$$\sum\frac{1}{n}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+.....$$

परन्तु दायें पक्ष की श्रेणी अपसारी है क्योंकि यह एक गुणोत्तर श्रेणी है जिसका सार्वअनुपात 1 है। अत: $\sum\frac{1}{n^p}$ अपसारी है जब p = 1.

स्थिति III : जब p < 1

$$P < 1 \Rightarrow \quad \frac{1}{n^p}>\frac{1}{n}\forall n\varepsilon N$$
$$\Rightarrow \quad \sum\frac{1}{n^p}>\sum\frac{1}{n}$$

परन्तु स्थिति II से $\sum\frac{1}{n}$ अपसारी है, इसलिए तुलना परीक्षण से $\sum\frac{1}{n^p}$ भी अपसारी होगी यदि p < 1.

अत: श्रेणी $\sum\frac{1}{n^p}$ अभिसारी होगी। यदि p < 1 और अपसारी होगी यदि p $\leq$ 1.

उदाहरण 1 :

प्रदर्शित कीजिए कि श्रेणी $\sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{2}{6}}+\sqrt{\frac{3}{8}}+.....+\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}+.....$ अभिसारी नहीं है।

हल : माना दी हुई श्रेणी $\sum u_n$ है। यहाँ श्रेणी $\sum u_n$ का प्रत्येक पद घनात्मक है। अब

$$u_n = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}=\sqrt{\frac{n}{2n\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

$\Rightarrow \sum u_n$ अभिसारी नहीं है। [भाग 1.6 की टिप्पणी (ii) से]

अत: दी हुई श्रेणी अभिसारी नहीं है।

उदाहरण 2 :

निम्न श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^6}+\ldots\ldots$$

हल : माना दी हुई श्रेणी $\sum u_n$ यहाँ श्रेणी $\sum u_n$ का प्रत्येक पद घनात्मक है। अब

$$\sum u_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^6}+\ldots\ldots$$

$$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\ldots\ldots\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\ldots\ldots\right)$$

$= \sum v_n + \sum w_n$, जहाँ $\sum v_n$ और $\sum w_n$

दो गुणोत्तर श्रेणी हैं, जिनके सार्वअनुपात क्रमश: $\frac{1}{4}<1$ तथा $\frac{1}{9}<1$ हैं। हम जानते हैं कि यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का सार्वअनुपात r हो और $|r|<1$ हो तो वह गुणोत्तर श्रेणी अभिसारी होती है। अत: $\sum v_n$ और $\sum w_n$ दो अभिसारी श्रेणी हैं। फलत $\sum u_n = \sum v_n + \sum w_n$ भी अभिसारी श्रेणी होगी। अत: दी हुई श्रेणी अभिसारी है।

उदाहरण 3 :

सिद्ध कीजिए कि श्रेणी

$$\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\ldots\ldots$$ अभिसारी है।

हल : माना दी हुई श्रेणी $\sum u_n$ है। अत: $\sum u_n = \frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\ldots\ldots$

यहाँ $\lfloor 2 = 2, \lfloor 3 = 3\times 2 > 2^2 \Rightarrow \frac{1}{2^2} > \frac{1}{\lfloor 3}$,

$\lfloor 4 = 4\times 3\times 2 > 2^3 \Rightarrow \frac{1}{2^3} > \frac{1}{\lfloor 4}$

.....

.....

.....

अत: $\sum u_n \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots$

यहाँ दायें पक्ष की श्रेणी एक गुणोत्तर श्रेणी है, जिसका सार्वअनुपात $\frac{1}{2}<1$ है, इसलिए अभिसारी है। अत: तुलना परीक्षण से दी हुई श्रेणी $\sum u_n$ भी अभिसारी होगी।

उदाहरण 4 :

निम्न श्रेणियों के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

(i) $\frac{2}{1^p}+\frac{3}{2^p}+\frac{4}{3^p}+.....$

(ii) $\frac{1}{1.2.3}+\frac{3}{2.3.4}+\frac{5}{3.4.5}+.....$

(iii) $\sqrt{\left(n^3+1\right)}-\sqrt{n^3}$

(iv) $\sqrt{\left(n^2+1\right)}-n$

हल : (i) माना दी हुई श्रेणी $\sum u_n$ है, तो

$$u_n = \frac{n+1}{n^p}=\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^p}=\frac{1+\frac{1}{n}}{n^{p-1}}$$

$$\Rightarrow \quad u_n = \frac{1+\frac{1}{n}}{n^{p-1}}$$

अब माना कि सहायक श्रेणी $\sum v_n$ है जहाँ $v_n = \frac{1}{n^{p-1}}$

अब $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\cancel{n^{p-1}}}\times\cancel{n^{p-1}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0 \text{ एक परिमित संख्या है।}$$

अत: तुलना परीक्षण से $\sum u_n$ तथा $\sum v_n$ दोनों या तो अभिसारी होगी या दोनों अपसारी होंगी। परन्तु $\sum v_n = \sum\frac{1}{n^{p-1}}$ अभिसारी होगी यदि p - 1 > 1 या p > 2 तथा अपसारी होगी यदि p $\leq$ 2. अत: दी हुई श्रेणी $\sum u_n$ अभिसारी होगी यदि p > 2 तथा अपसारी होगी यदि p $\leq$ 2.

(ii) माना दी हुई श्रेणी $\sum u_n$ है, तब

$$u_n = \frac{2n-1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{2n\left(1+\frac{1}{2}\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

$$\text{un} = \frac{2\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

माना सहायक श्रेणी $\sum v_n$ है जहाँ vn = $\frac{1}{n^2}$ अब

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

= 2, जो कि अशून्य कथा परि मित संख्या है।

अत: तुलना परीक्षण से $\sum u_n$ तथा $\sum v_n$ दोनों या तो अभिसारी होंगी या दोनों अपसारी होंगी।

परन्तु $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^2}$ अभिसारी हे क्योंकि p = 2 > 1, इसलिए $\sum u_n$ भी अभिसारी होगी।

अत: दी हुई श्रेणी अभिसारी है।

(iii) मान दी हुई श्रेणी $\sum u_n$ है। इसलिए

$$u_n = \sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}$$

$$= n^{3/2}\left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right]$$

अब $\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{1/2}$ का विस्तार करने पर $\left(\frac{1}{n^3} < 1\right)$

$$= n^{3/2}\left[1+\frac{1}{2n^3}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\lfloor 2}\frac{1}{n^6}+\ldots\ldots\ldots-1\right]$$

$$= n^{3/2}\left[\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{8n^6}+\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{2n^{3/2}}-\frac{1}{8n^{9/2}}+\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{n^{3/2}}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{8n^3}+\ldots\ldots\ldots\right]$$

अब माना कि सहायक श्रेणी $\sum v_n$ है। जहाँ

$$v_n = \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8n^3}+\ldots\ldots\ldots\right)$$

= $\frac{1}{2}$ जो कि अशून्य तथा परिमित संख्या है। अत: तुलना परीक्षण से $\sum u_n$ तथा $\sum v_n$ दोनों या तो अभिसारी या अपसारी होंगी। परन्तु $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ अभिसारी है क्योंकि P= 3/2 > 1 है, इसलिए दी हुई श्रेणी अभिसारी हैं।

(iv) माना दी हुई श्रेणी $\sum u_n$ है, इसलिए

$$u_n = \sqrt{(n^2+1)} - n = \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)} + n}$$

$$= \frac{1}{n\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}+1\right]}$$

माना सहायक श्रेणी $\sum v_n$ जहां $v_n = \frac{1}{n}$

अब $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}+1\right]}$

= $\frac{1}{2}$ जो कि एक अशून्य परिमित संख्या है। अत: तुलना परीक्षण से दोनों श्रेणी या तो अभिसारी या दोनों अपसारी होंगी। परन्तु $\sum v_n$ अपसारी है क्योंकि p = 1 है, इसलिए $\sum u_n$ भी अपसारी होगी। अत : दी हुई श्रेणी अपसारी है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. प्रदर्शित कीजिए कि श्रेणी $1+\frac{2}{5}+\frac{6}{9}+.....+\frac{2^n-2}{2^n+1}+.....$ अभिसारी है।
2. निम्न श्रेणियों का अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए :
   (i) $1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+.....+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+.....$
   (ii) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.6}+.....$
3. प्रदर्शित कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$ अभिसारी नहीं है।
4. निम्न श्रेणियों का अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए :
   (i) $a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+.....$
   (ii) $\sqrt{(n^2+1)}-\sqrt{(n^2+1)}$
   (iii) $\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{2}}{7}+\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{\sqrt{4}}{11}+.....$

(iv) $\sum\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right)$

1.10 घनात्मक पदों वाली श्रेणियों के अभिसरण व अपसरण के लिए कुछ महत्वपूर्ण परीक्षण (Some important tests for convergence and divergence for a series of positive terms)

1.10.1 कोशी का n वाँ मूलपरीक्षण (Cauchy's nth root test)

यदि $\sum u_n$ एक धनात्मक पदों वाली कोई श्रेणी इस प्रकार है कि $\lim_{n\to\infty}(u_n)^{1/n} = \ell$, तब

(i) यदि $l<1, \sum u_n$ अभिसारी होगी।

(ii) यदि $l>1, \sum u_n$ अपसारी होगी।

(iii) यदि $l=1, \sum u_n$ अभिसारी अथवा अपसारी हो सकती है अर्थात यह परीक्षण असफल होता है।

उदाहरण 1 :

यदि x घनात्मक हो, तो श्रेणी $\left(\frac{2}{3}\right)x+\left(\frac{3}{4}\right)^2x^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3x^3+\left(\frac{5}{6}\right)^4x^4+\ldots\ldots$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

हल : माना दी हुई श्रेणी $\sum u_n$ है, तो $u_n=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n x^n$

$$\Rightarrow \ (u_n)^{1/n}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)x=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)x}{\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

$$\Rightarrow \ \lim_{n\to\infty}(u_n)^{1/n}=x$$

अत: कोशी के n वाँ मूल परीक्षण से दी हुई श्रेणी x < 1 के लिए अभिसारी तथा x > 1के लिए अपसारी हे। यदि x = 1 तो

$$u_n=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} = u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}=\frac{e}{e^2}=\frac{1}{e}\neq 0$$

अत: दी हुई श्रेणी x = 1 के लिए अपसारी है। फलत: दी हुई श्रेणी अभिसारी है यदि x < 1 तथा अपसारी है यदि $x \geq 1$.

उदाहरण 2 :

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}-\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^{-n}$ के अभिसरण की जांच कीजिए।

हल : यदि दी हुई श्रेणी $\sum u_n$ है, तो

$$u_n=\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}-\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^{-n}$$

$$\Rightarrow (u_n)^{1/n}=\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}-\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(u_n)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}-\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^{-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{e-1}<1$$

अत: दी हुई श्रेणी अभिसारी है।

1.10.2 द लैम्बर का अनुपात परीक्षण (D' Alembert's ratio test)

यदि घनात्मक पदों की श्रेणी $\sum u_n$ इस प्रकार है कि

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\ell,$$

तब

(i) यदि $l>1, \sum u_n$ अभिसारी होगी।

(ii) यदि $l<1, \sum u_n$ अपसारी होगी।

(iii) यदि $l=1, \sum u_n$ अभिसारी अथवा अपसारी हो सकती है अर्थात् यह परीक्षण असफल होता है।

(iv) यदि $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\infty,$ तो $\sum u_n$ अभिसारी होगी।

1.10.3 लघुगणकीय अनुपात परीक्षण (Logarithmic ratio test)

घनात्मक पदों की कोई श्रेणी $\sum u_n$ अभिसारी अथवा अपसारी होगी यदि

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)>1 \text{ अथवा } < 1$$

टिप्पणी : यह परीक्षण तब उपयोगी होता है जबकि $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ के मान में e आ रहा हो।

उदाहरण 1 :

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\lfloor n}$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

हल : यदि दी हुई श्रेणी $\sum u_n$ है, तो

$$u_n=\frac{n^n}{\lfloor n}, u_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{\lfloor(n+1)}$$

अब $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^n}{\lfloor n}\times\frac{\lfloor n+1}{(n+1)^{n+1}}$

$$=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{\cancel{(n+1)}}\frac{\cancel{(n+1)}\lfloor n}{\cancel{\lfloor n}}$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}<1$$

अत: द लैम्बर के अनुपात परीक्षण से दी हुई श्रेणी अपसारी है।

उदाहरण 2 :

श्रेणी $x+\frac{2^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{3^3x^3}{\lfloor 3}+\frac{4^4x^4}{\lfloor 4}+\ldots\ldots\ldots$ के अभीसरण का परीक्षण कीजिए।

हल : यदि दी हुई श्रेणी $\sum u_n$ है, तो

$$u_n=\frac{n^nx^n}{\lfloor n}, u_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}}{\lfloor n+1}$$

अब $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^nx^n}{\lfloor n}\times\frac{\lfloor n+1}{(n+1)^{n+1}x^{n+1}}$

$$=\frac{n^n}{\lfloor n}\times\frac{(n+1)\lfloor n}{n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(n+1)}\frac{1}{x}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{ex}$$

अत : द लैम्बर के अनुपात परीक्षण से $\sum u_n$ अभिसारी होंगी यदि $\frac{1}{ex} > 1$ अर्थात् $x < \frac{1}{e}$ तथा अपसारी होगी यदि $x > \frac{1}{e}$ जब $x = \frac{1}{e}$, तो

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\Rightarrow \quad \log\frac{u_n}{u_{n+1}} = \log e - n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^2} - .....\right)$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + ...$$

$$\Rightarrow \quad n\log\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3n} + ...$$

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

$\therefore$ लघुगणकीय परीक्षण से $\sum u_n$ अपसारी है। अत : दी हुई श्रेणी अभिसारी होगी यदि $x < \frac{1}{e}$ और अपसारी होगी यदि $x \geq \frac{1}{e}$

उदाहरण 3 :

श्रेणी $\frac{2x}{1^2} + \frac{3^2x^2}{2^3} + \frac{4^3x^3}{3^4} + \frac{5^4x^4}{4^5} + ...$ के अभीसरण की जाँच कीजिए।

हल : माना दी हुई श्रेणी $\sum u_n$ है, तब

$$u_n = \frac{(n+1)^n x^n}{n^{n+1}} \text{ तथा } u_{n+1} = \frac{(n+2)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}$$

अब $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1} x} \frac{1}{x}$

$$= \frac{n^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)^n (n+1)^2}{n^{n+1}(n+2)(n+2)^n} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{exe}{e^2}\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

अत: तुलना परीक्षण से यदि $\frac{1}{x} > 1$ अर्थात् $x < 1$ तो $\sum u_n$ अभिसारी तथा जब $x > 1$ तो श्रेणी $\sum u_n$ अपसारी होगी।

जब x = 1, तब

$$u_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

माना कि $\sum v_n$ सहायक श्रेणी है तथा $v_n = \frac{1}{n}$

अब $\frac{u_n}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = e \neq 0$ तथा परिमित संख्या है।

अत: तुलना परीक्षण से $\sum u_n$ तथा $\sum v_n$ दोनों या तो अभिसारी या दोनों अपसारीहोंगी। परन्तु $\sum v_n = \sum \frac{1}{n}$ अपसारी है क्योंकि p = 1 है। इसलिए x = 1 के लिए $\sum u_n$ भी अपसारी होगी। अत: दी हुई श्रेणी अभिसारी होगी यदि x < 1 तथा अपसारी होगी यदि x $\geq$ 1 है।

1.10.4 राबी परीक्षण (Raabe's test)

यदि धनात्मक पदों की श्रेणी $\sum u_n$ इस प्रकार है कि $\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right] = \ell,$

तब

(i) यदि $l > 1, \sum u_n$ अभिसारी होगी।

(ii) यदि $l < 1, \sum u_n$ अपसारी होगी।

(iii) यदि $l = 1, \sum u_n$ अभिसारी अथवा अपसारी हो सकती है अर्थात् परीक्षण असफल है।

1.10.5 डी' मार्गन एवं बरट्राण्ड्स परीक्षण (De' Morgan and Bertrands test)

यदि घनात्मक पदो की श्रेणी $\sum u_n$ इस प्रकार है कि $\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\log n=\ell$,

तब

(i) यदि $l>1, \sum u_n$ अभिसारी होगी।

(ii) यदि $l<1, \sum u_n$ अपसारी होगी।

टिप्पणी : इस परीक्षण का प्रयोग सामान्यत: तब ही किया जाता है जबकि राबी परीक्षण असफल रहता है अर्थात् $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=1$

उदाहरण 1 :

श्रेणी $x+\frac{1}{2}\frac{x^2}{3}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{x^3}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^4}{7}+\ldots\ldots\ldots$ के अभिसरण की जाँच कीजिए।

हल : यदि दी हुई श्रेणी के प्रथम पद को छोड़कर श्रेणी को $\sum u_n$ से निरुपित करें तो,

$$u_n=\frac{1.3.5.\ldots\ldots\ldots(2n-1)}{2.4.6.\ldots\ldots\ldots 2n}\frac{x^{n+1}}{(2n+1)}$$

तथा $$u_{n+1}=\frac{1.3.5.\ldots\ldots(2n-1)(2n+1)}{2.4.6.\ldots\ldots\ldots\ldots 2n(2n+2)}.\frac{x^{n+2}}{(2n+3)}$$

अब $$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right)}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2}.\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1}{x}$$

अत: $\frac{1}{x}>1$ अर्थात् $x<1$, तो $\sum u_n$ अभिसारी है तथा जब $x>1$, तो $\sum u_n$ अपसारी है।

जब x = 1, तब

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}=\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+4n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}}-1=\frac{6n+5}{4n^2+4n+1}$$

$$\Rightarrow n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\frac{n(6n+5)}{4n^2+4n+1}$$

$$= \frac{6+\frac{5}{n}}{4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1$$

अत: राबी परीक्षण से $\sum u_n$ अभिसारी है। फलत: दी हुई श्रेणी अभिसारी होगी यदि $x \le 1$ तथा अपसारी होगी यदि x > 1.

उदाहरण 2 :

प्रदर्शित कीजिए कि श्रेणी $x^2 = (\log 2)^q + x^3 (\log 3)^q + x^4 (\log 4)^q + \ldots\ldots$ अभिसारी है यदि x < 1 तथा अपसारी है यदि $x \ge 1$.

हल : यदि दि हुई श्रेणी $\sum u_n$ है, तो

$$u_n = x^{n+1}\left[\log(n+1)\right]^q \text{ तथा}$$

$$u_{n+1} = x^{n+2}\left[\log(n+2)\right]^q$$

अब

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left[\frac{\log(n+1)}{\log(n+2)}\right]^q \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \left[\frac{\log n + \log\left(1+\frac{1}{2}\right)}{\log n + \log\left(1+\frac{2}{n}\right)}\right]^q \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \left[\frac{\log n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \ldots\ldots}{\log n + \frac{2}{n} - \frac{1}{2}\frac{4}{n^2} + \ldots\ldots}\right]^q \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \left[\frac{1+\frac{1}{n\log n} - \ldots\ldots\ldots}{1+\frac{2}{n\log n} - \ldots\ldots\ldots}\right]^q \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n\log n}\right)^q \left(1+\frac{2}{n\log n}\right)^{-q} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \left(1+\frac{q}{n\log n} + \ldots\ldots\ldots\right)\left(1-\frac{2q}{n\log n} + \ldots\ldots\ldots\right)\frac{1}{x}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1 - \frac{q}{n\log n} + \ldots\ldots\ldots\right)\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{q}{n\log n} + \ldots\ldots\ldots\right)\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x}$$

अत: अनुपात परीक्षण से $\sum u_n$ अभिसारी है यदि x < 1 तथा अपसारी है यदि x > 1 जब x = 1 तो

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 - \frac{q}{n\log n} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = -\frac{q}{n\log n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} -\frac{q}{n\log n} = 0 < 1$$

अत: जब x = 1 तो सबी परीक्षण से $\sum u_n$ अपसारी है। फलत: दी हुई श्रेणी अभिसारी है यदि x < 1 तथा अपसारी है यदि $\times \geq 1.$

उदाहरण 3 :

सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} + \ldots\ldots\ldots$ अपसारी है।

हल : यदि दी हुई श्रेणी $\sum u_n$ है, तो

$$u_n = \frac{1^2.3^2.5^2\ldots\ldots\ldots(2n-1)^2}{2^2.4^2.6^2\ldots\ldots\ldots(2n)^2}$$

तथा $$u_{n+1} = \frac{1^2.3^2.5^2\ldots\ldots\ldots(2n-1)^2(2n+1)^2}{2^2.4^2.6^2\ldots\ldots\ldots(2n)^2(2n+2)^2}$$

अब $$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2} = \frac{\left(1+\frac{2}{2n}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$$

अत : अनुपात परीक्षण असफल है।

पुनः $$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{4n^2+8n+4}{4n^2+4n+1}$$

$$\Rightarrow n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{4n+3}{4n^2+4n+1}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{4n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=1$$

अत : राबी परीक्षण भी असफल रहता है।

अब

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1=\frac{4n^2+3n}{4n^2+4n+1}-1$$

$$=-\frac{(n+1)}{4n^2+4n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\log n$$

$$=\lim_{n\to\infty}-\frac{(n+1)}{4n^2+4n+1}\log n$$

$$=\lim_{n\to\infty}-\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(4+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\frac{\log n}{n}$$

$$= 0 < 1 \quad \left\{\because \lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0\right.$$

अत : डी मार्गन एवं बरटाण्ड्स परीक्षण से दी हुई श्रेणी अपसारी है।

1.10.6 कोशी संघनन परी क्षण (Cauchy's condensation test)

यदि फलन f (n), n के समस्त घनात्मक व पूर्णांक मानों के लिए घनात्मक हो और n का मान बढ़ाने पर फलन निरन्तर घटता जाये तथा a > 1 कोई धन पूर्णांक हो, तब श्रेणियाँ $\sum$f (n) और $\sum a^n f\left(a^n\right)$ या तो दोनों अभिसारी होंगी, या दोनों अपसारी होंगी।

टिप्पणी : इस परीक्षण में n वाँ पद u_n के बजाय f (n) से दर्शाया जाता है।

1.10.7 गास परीक्षण (Gauss test)

यदि धनात्मक पदों की श्रेर्णा $\sum u_n$ इस प्रकार है कि

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\alpha+\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma_n}{n^p}$$

जहाँ $\alpha > 0$, $p > 1$ और अनुक्रम $< \gamma_n >$ परिबद्ध है, तो,

(a) यदि $\alpha \neq 1$, तब

(i) जब $\alpha > 1, \sum u_n$ अभिसारी होगी।

(ii) जब $\alpha < 1, \sum u_n$ अपसारी होगी।

(b) यदि $\alpha = 1$, तब

(i) जब $\beta > 1, \sum u_n$ अभिसारी होगी।

(ii) जब $\beta \leq 1, \sum u_n$ अपसारी होगी।

उदाहरण 1 :

सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ अभिसारी है, यदि $p > 1$ तथा अपसारी है, यदि $p \leq 1$.

हल : माना दी हुई श्रेणी को $\sum f(n)$ द्वारा निरुपित किया जाता है, तब n वाँ पद

$$f(n) = \frac{1}{n(\log n)^p}$$

$$\Rightarrow a^n f(a^n) = a^n \frac{1}{a^n (\log a^n)^p}$$

$$= \frac{1}{n^p (\log a)^p}$$

चूँकि $(\log a)^p$ अचर है, इसलिए $\sum a^n f(a^n)$ तथा $\sum \frac{1}{n^p}$ दोनों श्रेणियाँ या तो अभिसारी होंगी या अपसारी होंगी। हम जानते हैं कि श्रेणी $\sum \frac{1}{n^p}$ अभिसारी है यदि $p > 1$ तथा अपसारी है यदि $p \leq 1$. अत: कोशी संघनन परीक्षण से दी हुई श्रेणी अभिसारी होगी यदि $p > 1$ तथा अपसारी होगी यदि $p \leq 1$.

उदाहरण 2 :

श्रेणी $\frac{(\log 2)^2}{2^2} + \frac{(\log 3)^2}{3^2} + \frac{(\log 4)^2}{4^2} + \ldots\ldots\ldots \frac{(\log n)^2}{n^2} + \ldots\ldots\ldots$ के अभिसरण की जाँच कीजिए।

हल : दी हुई श्रेणी का प्रथम पद $0 = \frac{(\log 1)^2}{1}$ लेने पर माना कि इसे f (n) द्वारा प्रदर्शित किया जाय, तब

$$f(n) = \frac{(\log n)^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow a^n f\left(a^n\right)=\frac{a^n\left(\log a^n\right)^2}{\left(a^n\right)^2}=\frac{\left(nloga\right)^2}{a^n}$$

$$\Rightarrow a^n f\left(a^n\right)=\frac{n^2}{a^n}\left(\log a\right)^2$$

अब श्रेणी $\sum a^n f\left(a^n\right)$ के परीक्षण के लिये

माना कि $\sum a^n f\left(a^n\right)=\sum v_n=\sum\frac{n^2}{a^n}\left(\log a\right)^2$,

तब $v_n=\left(\log a\right)^2\frac{n^2}{a^n}$ तथा $v_{n+1}=\left(\log a\right)^2\frac{\left(n+1\right)^2}{a^n+1}$

अब $\frac{v_n}{v_{n+1}}=\frac{n^2}{a^n}\frac{a^{n+1}}{\left(n+1\right)^2}=\frac{an^2}{\left(n+1\right)^2}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{v_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=a>1$$

$\therefore \sum v_n=\sum a^n f\left(a^n\right)$ अभिसारी है।

अत: कोशी संघनन परीक्षण से दी हुई श्रेणी अभिसारी है।

उदाहरण 3 :

श्रेणी $1+\frac{ab}{1.c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)}x^2$

$+\frac{a(a+1)(a+2)(b)(b+1)(b+2)}{1.2.3.c\left(c+1\right).(c+2)}x^3$..... के अभिसरण की जाँच कीजिये,

जहाँ x,a,b,c सभी घनात्मक हैं।

हल : प्रथम पद को छोड़ने पर

$$u_n=\frac{a\left(a+1\right)....(a+n-1)b(b+1)....(b+n-1)}{c(c+1)(c+2)....(c+n-1)}.\frac{x^n}{\underline{\lfloor n}}$$

तथा $u_{n+1}=\frac{a(a+1).....(a+n-1)(a+n)b(b+1).....(b+n-1)(b+n)}{c(c+1)(c+2)....(c+n-1)(c+n)}.\frac{x^{n+1}}{\underline{\lfloor n}+1}$

अब $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{(n+1)(c+n)}{(a+n)(b+n)}.\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{c}{n}\right)}{\left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right)}.\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

अत : अनुपात परीक्षण से श्रेणी Σu_n अभिसारी है यदि $\frac{1}{x}>1$ अर्थात् $x<1$ तथा अपसारी है

यदि $x>1.$

जब $x=1,$ तो

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{c}{n}\right)}{\left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right)}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{c}{n}\right)\left(1+\frac{a}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{b}{n}\right)^{-1}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{c}{n}\right)\left(1-\frac{a}{n}+\frac{a^2}{n^2}.....\right)\left(1-\frac{b}{n}+\frac{b^2}{n^2}.....\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}+\frac{c}{n}+\frac{c}{n^2}\right)\left(1-\frac{a}{n}+\frac{a^2}{n^2}.....\right)\left(1-\frac{b}{n}+\frac{b^2}{n^2}.....\right)$$

$$=1+\left(1+c-a-b\right)\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)$$ की उच्च घातों के पद। अब गास परीक्षण से Σu_n अभिसारी यदि $1+c-a-b>a+b$ या $c>a+b$ तथा अपसारी है यदि $c\le a+b$.

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. श्रेणी $\Sigma\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$. के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।
2. $1+\frac{2p}{\lfloor 2}+\frac{3^p}{\lfloor 3}+\frac{4^p}{\lfloor 4}+.....$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।
3. श्रेणी $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+$ ..... के अभिसरण का परीक्षण कीजिये।

1.11 एकान्तर श्रेणी (Alternating series)

वह श्रेणी जिसका रूप $u_1-u_2+u_3-u_4+$ ..... $+(-1)^{n-1}u_n+.....$ हो, जहाँ $u_n>0\forall n\varepsilon N,$ उसे एकान्तर श्रेणी कहते हैं और इसे $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं। अत: एकान्तर श्रेणी के पद एकान्तरत: धन तथा ऋण चिन्ह के होते हैं।

उदाहरणार्थ, $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....$ एक एकान्तर श्रेणी है।

1.12 एकान्तर श्रेणी के लिए लेबनीज का परीक्षण (Leibnitz's test for alternating series)

एकान्तर श्रेणी $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n-1} u_n + ...(u_n > o, \forall n \varepsilon N)$ अभिसारी होगी यदि

(i) प्रत्येक पद संख्यात्मक मान में पूर्वगामी पद से छोटा है अर्थात् $u_n > u_{n+1} \forall_n$ तथा

(ii) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

टिप्पणी : यदि एकान्तर श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} u_n$ में प्रत्येक पद संख्यात्मक मान में पूर्वगामी पद से छोटा हो परन्तु $\lim_{nx\to\infty} u_n \neq 0,$ तो इस स्थिति में श्रेणी दोलायमान होगी। अत : लेबनीज परीक्षण में अभिसरण के लिए $\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$ होना आवश्यक है।

1.13 निरपेक्ष अभिसरण (Absolute convergence)

एकान्तर श्रेणी Σu_n **निरपेक्ष अभिसारी** कहलाती हे यदि $\Sigma|u_n|$ अभिसारी है। यदि Σu_n अभिसारी हो तथा $\Sigma|u_n|$ अपसारी हो, तो $\sum u_n$ सापेक्ष अथवा सहप्रतिबन्ध अभिसारी (Semi Convergent or Conditional convergent) श्रेणी कहलाती है। अर्थात् $\sum u_n$ सहप्रतिबन्ध अभिसारी $\Rightarrow \sum|u_n|$ अपसारी एवं $\sum u_n$ अभिसारी है।

टिप्पणी : एक निरपेक्ष अभिसारी श्रेणी सदैव अभिसारी होती है। इस कथन का विलोम सत्य होना आवश्यक नहीं है अर्थात यदि कोई एकान्तर श्रेणी $\sum u_n$ अभिसारी है तो यह आवश्यक नहीं है कि $\sum|u_n|$ अभिसारी हो। उदाहरणार्थ यदि हम श्रेणी $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ को लें तो यह लेबनीज परीक्षण से अभिसारी है परन्तु $\sum|u_n| = \Sigma\frac{1}{n}$ एक अपसारी श्रेणी है क्योंकि यहाँ $p = 1$ है।

उदाहरण 1 :

श्रेणी $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log n}$ के अभिसरण की जाँच कीजिए।

हल : स्पष्टत: श्रेणी $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log n}$ एक एकान्तर श्रेणी है। यदि दी हुई श्रेणी को $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1} u_n$ से प्रदर्शित किया जाये, तो

$$u_n = \frac{1}{\log(n+1)}, u_{n+1} = \frac{1}{\log(n+2)}$$

$\because \log(n+2) > \log(n+1) \forall n \varepsilon N$

$\therefore \frac{1}{\log(n+2)} < \frac{1}{\log(n+1)} \forall n \varepsilon N$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n \forall n \varepsilon N$

अत: प्रत्येक पद का संख्यात्मक मान इसके पहले पद के संख्यात्मक मान से छोटा है तथा

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0$$

फलत: लेबनीज प्रमेय से दी हुई श्रेणी अभिसारी है।

उदाहरण 2 :

श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ के अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण की जाँच कीजिए।

हल : स्थिति I. जब $p > 0$ हो : स्पष्टत: दी हुई श्रेणी एक एकान्तर श्रेणी है। यदि दी हुई श्रेणी को $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} u_n$ से प्रदर्शित किया जाये तो

$$u_n = \frac{1}{n^p}, u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^p}$$

$\because (n+1)^p > n^p \forall n \varepsilon N$

$\because \frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{n^p} \forall n \varepsilon N$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n \forall n \varepsilon N$

तथा $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \qquad (\because p > 0)$

अत: लेबनीज परीक्षण से दी हुई श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ एक अभिसारी श्रेणी है।

पुनः $\Sigma|u_n| = \Sigma\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right| = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots\ldots$ अभिसारी होगी यदि $p > 1$ हो तथा अपसारी होगी यदि $0 < p \le 1$ हो।

अत: दी हुई श्रेणी $p > 1$ के लिए निरपेक्ष अभिसारी होगी तथा $0 < p \le 1$ के लिए सहप्रतिब अभिसारी होगी।

स्थिति II **.** जब $p = 0$ हो :

इस स्थिति में दी हुई श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = 1-1+1-1+1-1+$ ..... जो सीमित दोलायमान है।

स्थिति III . जब $p < 0$:

माना $p = -m$ जहाँ $m > 0$, तो $\sum_{n-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n^m$

$= 1 - 2^m + 3^m - 4^m + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1} n^m + \ldots\ldots\ldots\ldots$

यहाँ

$$u_n = \begin{cases} -n^m \text{ , जब n सम हैं} \\ n^m \text{ , जब n विषय हैं।} \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$ या ∞

अत: श्रेणी $-\infty$ तथा ∞ दो लायमान है।

उदाहरण 3 :

श्रेणी $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 +$ ..... के अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

हल : यदि दी हुई श्रेणी को $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} u_n$ से प्रदर्शित किया जाये, तो $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} nx^{n-1}$ सर्वप्रथम हम श्रेणी $\Sigma|u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} n|x^{n-1}|$ के अभिसरण की जाँच करेंगे।

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n|x^{n-1}|}{(n+1)|x^n|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)|x|} = \frac{1}{|x|}$$

अत: दलैम्बर के अनुपात परीक्षण से $\Sigma|u_n|$ अभिसारी होगी यदि $\frac{1}{|x|} > 1$ या $|x| < 1$ तथा अपसारी होगी यदि $|x| > 1$

अत: दी हुई श्रेणी $|x| < 1$ के लिए निरपेक्ष अभिसारी होगी। परन्तु हम जानते हैं कि प्रत्येक निरपेक्ष अभिसारी श्रेणी अभिसारी होती है, इसलिए दी हुई श्रेणी $|x| < 1$ अर्थात् $-1 < x < 1$ के लिए अभिसारी होगी।

जब $x = 1$, तो दी हुई श्रेणी का रूप $1 - 2 + 3 - 4 +$..... बन जाता है जो ∞ तथा ∞ में दोलायमान है।

$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ $u_n = \infty$ या $-\infty$

जब $x = -1$ तो श्रेणी का रूप $1 + 2 + 3 + 4 +$..... बन जाता है जो कि अपसारी है।

जब $x - 1$ तो श्रेणी $-\infty$ तथा ∞ में दोलायमान है। जब $x < -1$ तो श्रेणी अपसारी है।

अत: दी हुई श्रेणी $-1 < x < 1$ के लिए निरपेक्ष अभिसारी है, $x \le -1$ के लिए अपसारी है तथा $x \ge 1$ के लिए अनन्त दोलनी है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 3

1. सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} +$ ..... सह प्रतिबन्ध अभिसारी है।
2. निम्न श्रेणियों के अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए :

   (i) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} +$.....

(ii) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+.....$

(iii) $1-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{4}}+$

3. श्रेणी $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\frac{7}{6}+.....$के अभिसरण का परीक्षण कीजिये।

1.14 सारांश

इस इकाई में हमने अनन्त श्रेणियों के अभिसरण तथा अपसरण के विषय में चर्चा की है। विभिन्न परीक्षण जाने व उन्हें प्रयोग कर श्रेणी की प्रकृति ज्ञात करना जाना।

1.15 शब्दावली

अभिसारी श्रेणी	Convergent series
अपसारी श्रेणी	Divergent series
दोलायमान श्रेणी	Oscillating series
एकान्तर श्रेणी है	Alternating series
निरपेक्ष अभिसारी	Absolutely convergent
सापेक्ष अभिसारी	conditional convergent

1.16 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

2. (i) अभिसारी (ii) अभिसारी

4. (i) अभिसारी यदि।a।<। और।b।<। (ii) अपसारी

(iii) अपसारी (iv) अभिसारी

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. अभिसारी 2. अभिसारी 3. अपसारी

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 3

1. (i) निरपेक्ष अभिसारी (ii) सापेक्ष अभिसारी (iii) निरपेक्ष अभिसारी

3. अभिसारी नहीं है।

1.17 अभ्यास प्रश्न

1. निम्न श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए :

(i) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^2}{4^4}+\frac{4^2}{5^5}+$

(ii) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-2}+.....$

जहाँ x एक घनात्मक भिन्न है।

(iii) $\frac{1}{n}-\log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

[उत्तर : (i) अपसारी (ii) अभिसारी (iii) अभिसारी]

2. निम्न श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए :

(i) $\frac{1.2}{3.4.5}+\frac{2.3}{4.5.6}+\frac{3.4}{5.6.7}+.....$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(b-\log n)^n}{2^n n^n}\right\}$

[उत्तर : (i) अपसारी (ii) अभिसारी]

3. सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\frac{2}{1^2}x+\frac{3^2}{2^3}x^2+\frac{4}{3^4}^3 x^3+$ ..... अभिसारी है यदि $x<1$ तथा अपसारी है $x\geq 1.$

4. प्रदर्शित कीजिए कि श्रेणी $\frac{(a+x)}{\lfloor 1}+\frac{(a+2x)^2}{\lfloor 2}+\frac{(a+3x)^3}{\lfloor 3}+.....$ अभिसारी हैयदि $x>\frac{1}{e}$ तथा अपसारी है यदि $x\geq\frac{1}{e}$

5. निम्न श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए :

(i) $1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+.....(x>0)$

(ii) $1+\frac{x}{2}+\frac{\lfloor 2}{3^2}x^2+\frac{\lfloor 3}{4^3}x^3+.....(x>0)$

[उत्तर : (i) $x \leq 1$ अभिसारी, $x > 1$ अपसारी
(ii) $x > e$ अभिसारी, $x \leq e$ अपसारी]

6. निम्न श्रेणियों के अभिसरण की जाँच कीजिए :

(i) $\frac{2}{3.4}+\frac{2.4}{3.5.6}+\frac{2.4.6}{3.5.7.8}+.....$

(ii) $1+\frac{3}{7}x+\frac{3.6}{7.10}x^2+\frac{3.6.9}{7.10.13}x^3+.....$

[उत्तर : (i) अभिसारी ,(ii) $x\leq 1$ अभिसारी, $x>1$ अपसारी]

7. निम्न श्रेणियों के अभिसरण तथा अपसरण की जाँच कीजिए :

(i) $\frac{1}{2.3}+\frac{1.3}{2.4.5}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}+.....$

(ii) $1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+.....$

[उत्तर : (i) अभिसारी, (ii) $x < 1$ अभिसारी, $x \geq 1$ अपसारी]

8. सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $1+\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\right)^p\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\right)^p+\ldots\ldots\ldots$ अभिसारी है यदि $p > 2$ तथा अपसारी है यदि $p \leq 2$.

9. श्रेणी $\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^2.4^2}{3^2.5^2}+\frac{2^2.4^2.6^2}{3^2.5^2.7^2}+\ldots\ldots\ldots$ के अभिसरण की जाँच कीजिए।

[उत्तर : अपसारी]

10. $\frac{1}{\log 2}+\frac{1}{\log 3}+\frac{1}{\log 4}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\log n}+\ldots\ldots\ldots$ के अभिसरण की जाँच कीजिए।

[उत्तर : अपसारी]

11. श्रेणी $\frac{a}{b}+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}+\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}+\ldots\ldots\ldots$ के अभिसरण की जाँच कीजिए।

[उत्तर : अभिसारी यदि $b > a + 1$ तथा अपसारी यदि $b \leq a + 1$]

12. सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $1-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{4\sqrt{4}}+\ldots\ldots\ldots$ निरपेक्ष अभिसारी है।

13. सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणियाँ निरपेक्ष अभिसारी हैं :

(i) $\frac{1}{1.2}-\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}-\frac{1}{7.8}+\ldots\ldots\ldots$

(ii) $x-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}-\frac{x^7}{\lfloor 7}+\ldots\ldots\ldots$

14. सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणियाँ सापेक्ष अभिसारी हैं :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{a}\right)^2}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

15. श्रेणी $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}-\frac{1}{a+3x}+\ldots\ldots\ldots$ के अभिसर तथा निरपेक्ष अभिसरण के लिए जाँच कीजिए।

[उत्तर : सहप्रतिबन्ध अभिसारी]

16. श्रेणी $\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}(1+2)+\frac{1}{4^3}(1+2+3)-\frac{1}{5^3}(1+2+3+4)+\ldots\ldots\ldots$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

[उत्तर : अभिसारी]

इकाई 2 : व्यापकीकृत माध्यमान प्रमेय एवं घात श्रेणी (Generalised mean value theorem and power series)

इकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य

2.1 प्रस्तावना

2.2 टेलर प्रमेय

2.2.1 लाग्रांज रूप का शेष वाला टेलर प्रमेय

2.2.2 कोशीरूप का शेष वाला टेलर प्रमेय

2.2.3 श्लोमिश एवं रोशे का शेष वाला टेलर प्रमेय

2.3 मेकलारिन प्रमेय

2.4 टेलर श्रेणी और मेकलारिन श्रेणी

2.5 घात श्रेणी

2.6 कुछ आधारभूत फलनों का घात श्रेणी प्रसार

2.7 सारांश

2.8 शब्दावली

2.9 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

2.10 अभ्यास प्रश्न

2.0 उद्देश्य

इस इकाई के प्रारम्भ में टेलर प्रमेय और मेकलारिन प्रमेय के विभिन्न रूपों की चर्चा की गयी है। इकाई के अन्त में घात श्रेणी को परिभाषित किया गया है और कुछ आधारभूत फलनों का घात श्रेणी प्रसार किया गया है। इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप,

- टेलर प्रमेय और मेकलारिन प्रमेय के विषय में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे।
- यह जानकारी कर सकेंगे कि टेलर प्रमेय और मेकलारिन प्रमेय के द्वारा किसी फलन का प्रसान करने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध क्या होने चाहिए।
- टेलर श्रेणी और मेकलारिन श्रेणी के विषय में भी जानकारी प्राप्त कर सकेंगे और यह समझ सकेंगे कि किसी फलन का इन श्रेणियों के रूप में प्रसार करने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध क्या होने चाहिए।
- घात श्रेणी के विषय में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे और यह समझ सकेंगे कि किसी फलन का घात श्रेणी प्रसार कैसे किया जाता है।

2.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम मुख्य रूप से टेलर प्रमेय और मेकलारिन प्रमेय के विभिन्न रूपों पर चर्चा करेंगे। हम यह भी चर्चा करेंगे कि किसी फलन का टेलर श्रेणी या मेकलारिन श्रेणी के द्वारा प्रसार करने के

लिए आवश्यक प्रतिबन्ध क्या होने चाहिए। इस इकाई के अन्त में हम घात श्रेणी के विषय में चर्चा करेंगे तथा कुछ आधारभूत फलनों का घात श्रेणी प्रसार प्राप्त करेंगे।

2.2 टेलर प्रमेय (Taylor's theorem)

यदि किसी फलन f का टेलर प्रमेय के द्वारा प्रसार किया जाय, तो n पदों के बाद शेषफल के आधार पर टेलर प्रमेय के मुख्यत: तीन रूप होते हैं। इस इकाई में हम तीनों रूपों पर चर्चा करेंगे। परन्तु इस चर्चा में हमें निम्न प्रमेयों की आवश्यकता होगी जिनके विषय में आप पिछली कक्षाओं में अध्ययन कर चुके होंगे।

रौल का प्रमेय (Rolle's theorem)

यदि संवृत अन्तराल [a, b] में वास्तविक मान फलन f इस प्रकार परिभाषित है कि फलन f

(i) संवृत अन्तराल [a, b] में सतत् है, और

(ii) विवृत अन्तराल (a, b) में अवकलनीय है, तथा

(iii) f (a) = f (b) है,

तो विवृत अन्तराल (a, b) में कम से कम एक बिन्दु c ऐसा विद्यमान होगा, जिसके लिये

$$f'(c) = 0.$$

लाग्रांज का माध्यमान प्रमेय (Lagrange's mean value theorem)

यदि सवृत अन्तराल [a, b] में वास्तविक मान फलन f इस प्रकार परिभाषित है कि फलन f

(i) संवृत अन्तराल [a, b] में संतत् है, और

(ii) विवृत अन्तराल (a, b) में अवकलनीय है,

तो विवृत अन्तराल (a, b) में कम से कम एक बिन्दु c विद्यमान होगा, जिसके लिये

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

लाग्रांज के माध्यमान प्रमेय का दूसरा रूप (Another from of Lagrange's mean value theorem)

यदि संवृत अन्तराल [a, a + h] (h > 0) में वास्तविक मान फलन f इस प्रकार परिभाषित है कि फलन f

(i) संवृत अन्तराल [a, a +h] पर संतत् है, तथा

(ii) विवृत अन्तराल (a, a +h) पर अवकलनीय है,

तो कम से कम एक संख्या θ जहाँ $0 < \theta < 1$ विद्यमान होगी कि

$$f(a + h) - f(a) = h f'(a + \theta h)$$

2.2.1 लाग्रांज रूप का शेष वाला टेलर प्रमेय (Taylor's theorem with Lagrange's from of remainder)

यदि वास्तविक मान फलन f, संवृत अन्तराल [a, a + h] (h > 0) पर इस प्रकार परिभाषित है कि f के

(i) (n - 1) कोटि तक के सभी अवकलज संवृत अन्तराल [a, a +h] में सतत् हैं,

(ii) n कोटि का अवकलज अर्थात् f^n विवृत अन्तराल (a, a + h) पर विद्यमान है, तो कम से कम एक संख्या θ जहाँ 0 < θ < 1 का अस्तित्व होता है कि

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{\lfloor 2} f''(a) + \ldots\ldots\ldots +$$

$$\frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{\lfloor n} f^n(a+\theta h)$$

उपपत्ति : हम एक फलन ϕ (x) अन्तराल [a, a + h] पर फलन f (x) और उसके अवकलजों f' (x), f" (x),..... f^{n-1}(x) की सहायता से निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$\phi(x) = f(x) + (a+h-x) f'(x) + \frac{(a+h-x)^2}{\lfloor 2} f''(x)$$

$$+\ldots\ldots\ldots + \frac{(a+h-x)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(x) + \frac{(a+h-x)^n}{\lfloor n} A \quad \ldots\ldots(1)$$

जहाँ A एक अचर संख्या इस प्रकार है कि

$$\phi(a) = \phi(a+h) \quad \ldots\ldots(2)$$

(1) और (2) से

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{\lfloor 2} f''(a) + \ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{\lfloor n} A \quad \ldots\ldots(3)$$

अब $\phi(x)$

(i) अन्तराल [a, a + h] पर संतत् है, क्योंकि यह अन्तराल [a, a + h] पर संतत् फलनों f (x), (a + h - x) f' (x), $(a + h - x)^2$ f" (x),....., $(a + h - x)^{n-1}$ f^{n-1} (x), $(a + h - x)^n$ का एकघात संचय (linear combination) है,

(ii) अन्तराल (a, a + h) पर अवकलनीय है, क्योंकि यह अन्तराल (a, a + h) पर अवकलनीय फलनों f (x), (a + h - x) f' (x), $(a + h - x)^2$ f" (x), ..., $(a + h - x)^{n-1}$ f^{n-1} (x), $(a + h - x)^n$ का एकघात संचय है,

(iii) (2) से ϕ (a) = ϕ (a + h)

अत : फलन ϕ अन्तराल [a, a + h] पर रोल प्रमेय के तीनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है, इसलिए रोल प्रमेय के अनुसार कम से कम एक संख्या θ जहाँ 0 < θ < 1 विद्यमान होगी कि

$$\phi'(a+\theta h) = 0 \qquad \ldots\ldots (4)$$

अब (1) का अवकलन करने पर,

$$\phi'(x) = f'(x) - f'(x) + (a+h-x) f''(x) - (a+h-x) f''(x) + \frac{(a+h-\times)^2}{\underline{|2}} f'''(x) - f'''(x) + \ldots\ldots\ldots - \frac{(a+h-x)^{n-2}}{\underline{|n-2}} f^{n-1}(x) + \frac{(a+h-x)^{n-1}}{\underline{|n-1}} f^n(x) - \frac{(a+h-x)^{n-1}}{\underline{|n-1}} A$$

$$= \frac{(a+h-x)^{n-1}}{\underline{|n-1}} f^n(x) - \frac{(a+h-x)^{n-1}}{\underline{|n-1}} A$$

$$\Rightarrow \phi'(x) = \frac{(a+h-x)^{n-1}}{\underline{|n-1}} \left[f^n(x) - A \right]$$

$$\Rightarrow \phi'(a+\theta h) = \frac{(h-\theta h)^{n-1}}{\underline{|n-1}} \left[f^n(a+\theta h) - A \right] \quad \ldots\ldots (5)$$

(4) और (5) से

$$\frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{\underline{|n-1}} \left[f^n(a+\theta h) - A \right] = 0$$

$\Rightarrow \quad A = f^n(a+\theta h)$, क्योंकि $1-\theta \neq 0.$

A के इस मान को (3) में रखने पर

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{\underline{|2}} f''(a) + \ldots\ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}} f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{\underline{|n}} f^n(a+\theta h) \quad \ldots\ldots (6)$$

माना $R_n = \frac{h^n}{\underline{|n}} f^n(a+\theta h)$, तब (6) से

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + = \frac{h^2}{\underline{|2}} f''(a) + \ldots\ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{\underline{|n-1}} f^{n-1}(a) + R_n$$ जहाँ R_n को 'n पदों के पश्चात शेष पद' कहते हैं और यह लाग्रांज रूप का शेष पद है।

विशिष्ट स्थितियाँ (Particular cases)

(i) टेलर प्रमेय में n = 1 लेने पर लाग्रांज के माध्यमान प्रमेय की प्राप्ति होती है।

(ii) प्रमेय में h = (b - a) तथा c = a + θ (b - a) प्रतिस्थापित करने पर प्रमेय का निम्न रूप प्राप्त होता है :

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{\lfloor 2} f''(a) + \ldots\ldots\ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{\lfloor n-1}$$

$$f^{n-1}(a) + \frac{(b-a)^n}{\lfloor n} f^n(c)$$

जहाँ $c \in (a, b)$

(iii) प्रमेय में h = (x - a) तथा c = a + θ (x - a) प्रतिस्थापित करने पर प्रमेय का निम्न रूप प्राप्त होता है :

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{\lfloor 2} f''(a) + \ldots\ldots\ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{\lfloor n-1}$$

$$f^{n-1}(a) + \frac{(x-a)^n}{\lfloor n} f^n(c)$$

जहाँ $c \in (a, x)$

इसकी सहायता से दिये गये फलन का (x - a) की घातों में प्रसार कर सकते हैं।

2.2.2 कोशी रूप का शेष वाला टेलर प्रमेय

(Taylor's theorem with Cauchy's form of remainder)

यदि वास्तविक मान फलन f, संवृत अन्तराल [a, a + h] (h > 0) पर इस प्रकार परिभाषित है कि

(i) (n - 1) कोटि तक के सभी अवकलज संवृत अन्तराल [a, a + h] में संतत् हैं,

(ii) n कोटि का अवकलज अर्थात् f^n विवृत अन्तराल (a, a + h) पर विद्यमान है, तो कम से कम एक संख्या θ जहाँ 0 < θ < 1 का अस्तित्व होता है कि

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + = \frac{h^2}{\lfloor 2} f''(a) + \ldots\ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1}$$

$$f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{\lfloor n-1}(1-\theta)^{n-1} f^n(a+\theta h)$$

उपपत्ति : हम एक फलन ϕ (x) अन्तराल [a, a + h] पर फलन f (x) और उसके अवकलजों f ' (x), f " (x),....., f^{n-1} (x) की सहायता से निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$\phi(x) = f(x) + (a+h-x) f'(x) + \frac{(a+h-x)^2}{\lfloor 2} f''(x) + \ldots\ldots\ldots +$$

$$\frac{(a+h-x)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(x)+(a+h-x)A \quad \text{.....(1)}$$

जहाँ A एक अचर संख्या इस प्रकार है कि

ϕ (a) = ϕ (a + h) .....(2)

(1) और (2) से

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+=\frac{h^2}{\lfloor 2} f''(a)+.....+\frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1}$$

$$f^{n-1}(a)+hA \quad \text{.....(3)}$$

अब ϕ (x)

(i) अन्तराल [a, a + h] पर संतत् है, क्योंकि यह अन्तराल [a, a + h] पर संतत् फलनों f (x), (a + h -x) f ' (x), $(a + h - x)^2$ f " (x), ..., $(a + h -x)^{n-1}$ f^{n-1} (x) (a + h - x) का एकघात संचय है,

(ii) अन्तराल (a, a + h) पर अवकलनीय है, क्योंकि यह अन्तराल (a, a + h) पर अवकलनीय फलनों f (x), (a + h - x) f ' (x), $(a + h - x)^2$ f " (x), ..., $(a + h - x)^{n-1}$ f^{n-1} (x), (a + h - x) का एकघात संचय है,

(iii) 2 से ϕ (a) = ϕ (a + h)

अत : फलन ϕ अन्तराल [a, a + h] पर रोल प्रमेय के तीनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है, इसलिए रोल प्रमेय के अनुसार कम से कम एक संख्या θ जहाँ 0 < θ < 1 विद्यमान होगी कि

$\emptyset'(a + \theta h) = 0$ .....(4)

अब (1) का अवकलन करने पर

$$\phi'(x)=f'(x)-f'(x)+(a+h-x)f''(x)-(a+h-x)$$
$$f''(x)+\frac{(a+h-x)^2}{\lfloor 2} f'''(x)-\frac{(a+h-x)^2}{\lfloor 2} f'''(x)$$
$$+.....-\frac{(a+h-x)^{n-2}}{\lfloor n-2} f^{n-1}f^n(x)+\frac{(a+h-x)^{n-1}}{\lfloor n-1}$$
$$f^n(x)-A$$

$$\Rightarrow \phi'(x)=\frac{(a+h-x)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^n(x)-A$$

$$\Rightarrow \phi'(a+\theta h)=\frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^n(a+\theta h)-A \quad \text{.....(5)}$$

(4) और (5) से

$$A=\frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^n(a+\theta h)$$

A के इस मान को (3) में रखने पर

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + = \frac{h^2}{\lfloor 2} f''(a) + \ldots\ldots\ldots +$$

$$\frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(a) + \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^n (a+\theta h) \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

माना $R_n = \frac{h^n}{\lfloor n-1} (1-\theta)^{n-1} f^n (a+\theta h)$, तब (6) से

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + = \frac{h^2}{\lfloor 2} f''(a) + \ldots\ldots\ldots +$$

$$\frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(a) + R_n, \text{जहाँ } R_n \text{ को 'n पदों के पश्चात शेष पद' कहते हैं और यह}$$

कोशी रूप का शेष पद कहलाता है।

2.2.3 श्लोमिश एवं रोशे का शेष वाला टेलर प्रमेय (Taylor's theorem with Schlomitch and Roche's form of remainder)

यदि वास्तविक मान फलन f, संवृत अन्तराल [a, a + h] (h > 0) पर इस प्रकार परिभाषित है कि f के

(i) (n - 1) कोटि तक के सभी अवकलज अर्थात् f^{n-1} अन्तराल [a, a + h] में संतत् हैं,

(ii) n कोटि का अवकलज अर्थात् f^n विवृत अन्तराल (a, a + h) पर विद्यमान है, तथा

(iii) $p \varepsilon N$, तो कम से कम एक संख्या θ जहाँ 0 < θ < 1 का अस्तित्व होता है कि

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + = \frac{h^2}{\lfloor 2} f''(a) + \ldots\ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1}$$

$$f^{n-1}(a) + \frac{h^n (1-\theta)^{n-p}}{p \lfloor n-1} f^n (a+\theta h)$$

उपपत्ति : हम एक फलन ϕ (x) अन्तराल [a, a + h] पर फलन f (x) और उसके अवकलजों f '(x), f " (x), ……., f^{n-1} (x) की सहायता से निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$\phi(x) = f(x) + (a+h-x) f'(x) + \frac{(a+h-x)^2}{\lfloor 2} f''(x) + \ldots\ldots\ldots +$$

$$\frac{(a+h-x)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(x) + (a+h-x)^p A \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

जहाँ A एक अचर संख्या इस प्रकार है कि

ϕ (a) = ϕ (a + h) ……(2)

(1) और (2) से

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+=\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(a)+.....+\frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1}$$

$$f^{n-1}(a)+h^pA$$

अब ϕ (x)

(i) अन्तराल [a, a + h] पर सतत् है, क्योंकि यह अन्तराल [a, a + h] पर संतत् फलनों f (x), (a + h - x) f ' (x), $(a + h - x)^2$ f " (x), ..., $(a + h - x)^{n-1}$ f^{n-1} (x), $(a + h -x)^p$ का एकघात संचय है,

(ii) अन्तराल (a, a + h) पर आवकलनीय है, क्योंकि यह अन्तराल (a, a +h) पर अवकलनीय फलनों f (x), (a + h - x) f ' (x), $(a + h - x)^2$ f " (x), ..., $(a + h - x)^{n-1}$ f^{n-1} (x), $(a + h -x)^p$ का एकघात संचय है,

(iii) (2) से ϕ (a) = ϕ (a + h)

अत: फलन ϕ अन्तराल [a, a + h] पर रोल प्रमेय के तीनों प्रतिकबन्धों को संतुष्ट करता है, इसलिए रोल प्रमेय के अनुसार कम से कम एक संख्या θ जहाँ 0 < θ < 1 विद्यमान होगी कि

ϕ '(a + θ h) = 0.....(4)

अब (1) का अवकलन करने पर

$$\phi'(x)=f'(x)-f'(x)+(a+h-x)f''(x)-(a+h-x)$$

$$f''(x)-\frac{(a+h-x)^2}{\lfloor 2}f'''(x)-\frac{(a+h-x)^2}{\lfloor 2}f'''(x)$$

$$+.....-\frac{(a+h-x)^{n-2}}{\lfloor n-2}f^{n-1}(x)+\frac{(a+h-x)^{n-1}}{\lfloor n-1}$$

$$f^n(x)-p(a+h-x)^{p-1}A$$

$$\Rightarrow\phi'(x)=\frac{(a+h-x)^{n-1}}{\lfloor n-1}f^n(x)-p(a+h-x)^{p-1}A$$

$$\Rightarrow\phi'(a+\theta h)=\frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{\lfloor n-1}f^n(a+\theta h)-Aph^{p-1}(1+\theta)^{p-1}$$

.....(5)

(4) और (5) से

$$\frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{\lfloor n-1}f^n(a+\theta h)-Aph^{p-1}(1-\theta)^{p-1}=0$$

$$\Rightarrow A=\frac{h^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{\lfloor n-1}f^n(a+\theta h)$$

A के इस मान को (3) में रखने पर

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+=\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(a)+.....+$$

$$\frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(a)+\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{p\lfloor n-1} f^n(a+\theta h) \quad \text{.....(6)}$$

माना $R_n=\frac{h^n(1-\theta)^{n-p}}{\lfloor n-1} f^n(a+\theta h)$, तब (6) से

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+=\frac{h^2}{\lfloor 2} f''(a)+\text{.....}+$$

$$\frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(a)+R_n$$ जहाँ R_n को 'n पदों के पश्चात शेष पद' कहते हैं और यह श्लोमिश एवं रोशे रूप वाला शेष पद कहलाता है।

विशिष्ट स्थितियाँ (Particular cases)

(i) उपर्युक्त प्रमेय में p = n लेने पर $R_n=\frac{h^n}{\lfloor n} f^n(a+\theta h)$ होगा। अत : इस स्थिति में इस प्रमेय से हमें लाग्रांज रूप का शेष वाला टेलर प्रमेय की प्राप्ति होगी।

(ii) यदि p = 1 लें तो $R_n=\frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^n(a+\theta h)$ होगा।

इस शेष पद को कोशी रूप वाला शेष पद कहते हैं। अत : इस स्थिति में इस प्रमेय से हमें कोशी रूप का शेष वाला टेलर प्रमेय की प्राप्ति होगी।

2.3 मेक्लारिन प्रमेय (Maclaurin's theorem) :

यदि वास्तविक मान फलन f, संवृत अन्तरल [0, x] पर इस प्रकार परिभाषित है कि f के

(i) (n - 1) कोटि तक के अवकलज अन्तराल [0, x] में संतत् हैं,

(ii) n कोटि का अवकलज अर्थात् गो विवृत अन्तराल (0, x) पर विद्यमान है, तथा

(iii) $p \varepsilon N$,

तो कम से कम एक संख्या θ जहाँ 0 < θ < 1 का अस्तित्व होता है कि

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{\lfloor 2} f''(0)+\text{.....}+\frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(0)+R_n$$

जहाँ $R_n=\frac{x^n(1-\theta)^{n-p}}{p\lfloor n-1} f^n(\theta x)$, श्लोमिश एवं रोशे का शेष पद वाला मेक्लारिन प्रमेय कहलाता है।

उपपत्ति : हम एक फलन ϕ (t) अन्तराल [0, x] पर फलन f (t) और उसके अवकलजों f ' (t), f " (t), ..., f^{n-1} (t) की सहायता से निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$\phi(t)=f(t)+(x-t)f'(t)+\frac{(x-t)^2}{\lfloor 2} f''(t)+\text{.....}+$$

$$\frac{(x-t)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(t)+(x-t)^{p} A \quad \text{.....(1)}$$

जहाँ A एक अचर संख्या इस प्रकार है कि

ϕ (0) = ϕ (x) .....(2)

(1) और (2) से

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{\lfloor 2} f''(0)+\text{.....}+\frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1}$$

$$f^{n-1}(0)+x^{p}A \quad \text{.....(3)}$$

अब ϕ (t)

(i) अन्तराल [0, x] पर संतत् है, क्योंकि यह अन्तराल [0, x] पर सतत् फलनों f (t), (x - t) f ' (t), $(x - t)^2$ f " (t), ..., $(x - t)^{n-1}$ f^{n-1} (t), $(x -t)^p$ एकघात संचय है,

(ii) अन्तराल (0, x) पर अवकलनीय है, क्योंकि यह अन्तराल (0, x) पर अवकलनीय फलनों f (t), (x - t) f ' (t), $(x - t)^2$ f " (t), ..., $(x - t)^{n-1}$ f^{n-1} (t), $(x -t)^p$ का एकघात संचय है,

(iii) (2) से ϕ (0) = ϕ (x).

अत: फलन ϕ अन्तराल [0, x] पर रोल प्रमेय के तीनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है, इसलिए रोल प्रमेय के अनुसार कम से कम एक संख्या θ जहाँ 0 < θ < 1 विद्यमान होगी कि

ϕ' (θ x) = 0 .....(4)

अब (1) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\phi'(t)=f'(t)-f'(t)+(x-t)f''(t)-(x-t)f''(t)+$$

$$\frac{(x-t)^2}{\lfloor 2} f'''(t)-\frac{(x-t)^2}{\lfloor 2} f'''(x)+\text{.....}$$

$$-\frac{(x-t)^{n-2}}{\lfloor n-2} f^{n-1}(t)+\frac{(x-t)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n}(t)-p(x-t)^{p-1}A$$

$$\Rightarrow \phi'(t)=\frac{(x-t)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n}(t)-p(x-t)^{p-1}A$$

$$\Rightarrow \phi'(\theta x)=\frac{x^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n}(\theta x)-Apx^{p-1}(1-\theta)^{p-1} \quad \text{.....(5)}$$

(4) और (5) से

$$\frac{x^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n}(\theta x)-Apx^{p-1}(1-\theta)^{p-1}=0$$

$$\Rightarrow A=\frac{x^{n-p}(1-\theta)^{n-p}}{p\lfloor n-1} f^{n}(\theta x)$$

A के इस मान को (3) में रखने पर

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{\lfloor 2} f''(0) + \ldots\ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1}$$

$$f^{n-1}(0) + \frac{x^n (1-\theta)^{n-p}}{p \lfloor n-1} f^n(\theta x) \qquad \ldots\ldots\ldots(6)$$

माना $R_n = \frac{x^n (1-\theta)^{n-p}}{p \lfloor n-1} f^n(\theta x)$ तब (6) से

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{\lfloor 2} f''(0) + \ldots\ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(0) + R_n,$$

जहाँ R_n को n पदों के पश्चात शेष पद कहते हैं और यह श्लोमिश एवं रोशे रूप वाला शेष पद कहलाता है।

विशिष्ट स्थितियाँ (Particular cases)

(i) उपर्युक्त प्रमेय में p = n लेने पर $R_n = \frac{x^n}{\lfloor n} f^n(\theta x)$ होगा।

अत: इस स्थिति में इस प्रमेय से हमें लाग्रांज रूप का शेष वाला मेकलारिन प्रमेय की प्राप्ति होगी।

(ii) यदि p = 1 लें तो $R_n = \frac{x^n (1-\theta)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^n(\theta x)$ होगा।

इस शेष पद को कोशी रूप वाला शेष पद कहते हैं। अत: इस स्थिति में इस प्रमेय से हमें कोशी रूप का शेष वाला मेकलारिन प्रमेय की प्राप्ति होगी।

उदाहरण 1 :

निम्न फलनों के प्रसार में n पदों के पश्चात् लाग्रांज तथा कोशी शेष पद प्राप्त कीजिए :

(i) log (1 + x)

(ii) $(1 + x)^{-1}$

हल : (i) माना कि

$$f(x) = \log(1+x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow f'''(x) = \frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3}$$

$$= \frac{(-1)^2 \lfloor 2}{(1+x)^3}$$

$$\Rightarrow f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}\lfloor n-1}{(1+x)^n}$$

f (x) के लिए मेकलारिन प्रसार का प्रयोग करने पर

लाग्रांज शेष $= \frac{x^n}{\lfloor n} f^n(\theta x)$

$$= \frac{x^n}{\lfloor n}\frac{(-1)^{n-1}\lfloor n-1}{(1+\theta x)^n}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$$

कोशी शेष $= \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{\lfloor n-1} f^n(\theta x)$

$$= \frac{x^n(1+\theta)^{n-1}}{\lfloor n-1}\frac{(-1)^{n-1}\lfloor n-1}{(1+\theta x)^n}$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{x^n}{(1+\theta x)}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

(ii) माना कि

$$f(x) = (1+x)^{-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = -1(1+x)^{-2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

$$= (-1)^2\lfloor 2(1+x)^{-3}$$

.....

.....

.....

$$\Rightarrow f^n(x) = \frac{(-1)^n\lfloor n}{(1+x)^{n+1}}$$

f (x) प्रसार का प्रयोग करने पर

लाग्रांज शेष $= \frac{x^n}{\lfloor n} f^n(\theta x)$

$$= \frac{x^n}{\lfloor n}\frac{(-1)^n\lfloor n}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$= (-1)^n\frac{1}{(1+\theta x)}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n$$

कोशी शेष $= \frac{x^n}{\lfloor n-1}(1-\theta)^{n-1} f^n(\theta x)$

$= \frac{x^n}{\lfloor n-1}(1-\theta)^{n-1} \frac{(-1)^n \lfloor n}{(1+\theta x)^{n+1}}$

$= nx^n(-1)^n \frac{1}{(1+\theta n)^2}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$

उदाहरण 2 :

सिद्ध कीजिए कि टेलर प्रमेय के द्वारा फलन f को अन्तराल [a, a + h] में विस्तार करने पर n पदों के बाद लाग्रांज रूप के शेष पद में प्रयुक्त θ की सीमा $\frac{1}{n+1}$ की ओर अग्रसर होती है जैसे-जैसे $h \to 0$, जबकि f^{n+1} (x), a पर संतत् है तथा $f^{n+1},(a) \neq o$.

हल : n तथा (n+1) पदों के बाद लाग्रांज रूप के शेषपद के टेलर प्रमेय से

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{\lfloor 2} f''(a) + \ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-a}(a)$$

$$+ \frac{h^2}{\lfloor n} f^n(a+\theta h), \text{ तथा } o < \theta < 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{\lfloor 2} f''(a) + \ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(a)$$

$$+ \frac{h^n}{\lfloor n} f^n(a) + \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1} f^{n+1}(a+\theta_1 h),$$

$0 < \theta_1 < 1$ $\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर

$$\frac{h^n}{\lfloor n}[f^n(a+\theta h) - f^n(a)] - \frac{h^{n+1}}{\lfloor n+1} f^{n+1}(a+\theta_1 h) = 0$$

$$\Rightarrow \quad [f^n(a+\theta h) - f^n(a)] = \frac{h}{n+1} f^{n+1}(a+\theta_1 h) \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

चूकि f^{n+1} विद्यमान है, इसलिए फलन f^n संवृत अन्तराल $[a, a+\theta h]$ में लाग्रांज माध्यमान प्रमेय के सभी प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है। अत: लाग्रांज प्रमेय के अनुसार कम से कम एक संख्या θ_2 जहाँ $0 < \theta_2 < 1$ विद्यमान होगी कि

$$f^n(a+\theta h) - f^n(a) = \theta h f^{n+1}(a+\theta\theta_2 h) \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

(3) और (4) से

$$\theta h f^{n+1}(a+\theta\theta_2 h) = \frac{h}{n+1} f^{n+1}(a+\theta_1 h)$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{n+1}\frac{f^{n+1}(a+\theta_1 h)}{f^{n+1}(a+\theta\theta_2 h)}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0}\theta = \frac{1}{n+1}\lim_{h\to 0}\frac{f^{n+1}(a+\theta_1 h)}{f^{n+1}(a+\theta\theta_{2h})}$$

$$= \frac{1}{n+1}\ \frac{f^{n+1}(a)}{f^{n+1}(a)} = \frac{1}{n+1} \quad \text{क्योंकि} \quad f^{n+1}(a) \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0}\theta = \frac{1}{n+1}$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न

1. निम्न फलनों के प्रसार में लाग्रांज शेष पद ज्ञात कीजिए :
   (i) a^x
   (ii) e^{kx}
2. निम्न फलनों के प्रसार में कोशी शेष पद ज्ञात कीजिए :
   (i) sin x
   (ii) a^2
3. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log x$ का मैक्लारिन प्रसार नहीं किया जा सकता।

2.4 टेलर श्रेणी और मेकलारिन श्रेणी (Taylor's series and Maclaurin's series)

यदि एक वास्तविक मान फलन f संवृत अन्तराल $[a, a+h]$ में परिभाषित है तथा f^n प्रत्येक $n\varepsilon N$ के लिए अन्तराल $[a, a+h]$ पर विद्यमान है तो टेलर प्रमेय के अनुसार

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{\lfloor 2} f''(a) + \ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1} f^{n-1}(a)$$

$$+ \frac{h^n}{\lfloor n} f^n(a+\theta h),$$

$$0 < \theta < 1 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

यदि (1) के दायीं ओर के प्रथम n पदों के योग को s_n द्वारा तथा अन्तिम पद को R_n द्वारा प्रदर्शित करें तो

$$f(a+h) = s_n + R_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a+h) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} R_n \quad \ldots\ldots(2)$$

यदि $R_n \to 0$, जबकि $n \to \infty$, तो (2) से

$$\lim_{x\to\infty} f(a+h) = \lim_{x\to\infty} S_n$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} S_n = f(a+h)$$

$\Rightarrow$ अनुक्रम $< S_n >$ अभिसारी है और यह $f(a+h)$ को अभिसृत होता है।

$\Rightarrow$ श्रेणी $f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(a)+.....+\frac{h^{n-1}}{\lfloor n-1}+....f(a+h)$ को अभिसृत होती है।

अत: यदि एक वास्तविक मान फलन संवृत अन्तराल $[a,a+h]$ पर परिभाषित है तथा f^n प्रत्येक $n\varepsilon N$ के लिए अन्तराल $[a,a+h]$ पर विद्यमान है और n पदों के बाद टेलर का शेष पद $R_n \to 0$, जबकि $n \to \infty$, तो

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(a)+....+\frac{h^n}{\lfloor n}f^n(a)+..... \quad .....(3)$$

(3) में दायीं पक्ष (R.H.S.) की अनन्त श्रेणी टेलर श्रेणी कहलाती है।

यदि हम (3) में a = 0 तथा h के स्थान पर x प्रतिस्थापित करें तो

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{\lfloor 2}f''(0)+.....\frac{x^n}{\lfloor n}f^n(0)+..... \quad .....(4)$$

(4) में दायीं पक्ष की अनन्त श्रेणी को हम मेक्लारिन श्रेणी कहते हैं।

2.5 घात श्रेणी (Power series)

यदि x संतत् वास्तविक चर हो तो श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x-a)^n$ जहां A_n तथा a अचर है, बिन्दु $x=a$ पर घात श्रेणी कहलाती है। उदाहरण के रूप में टेलर श्रेणी इस प्रकार की एक घात श्रेणी है। यदि उपर्युक्त घात श्रेणी मैं $a=0$ लें तो $\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$ जहाँ A_n अचर है, मानक घात श्रेणी (Standard power series) कहलाती है। उदाहरण के रूप में मेकलारिन श्रेणी इस प्रकार की एक घात श्रेणी है।

2.6 कुछ आधारभूत फलनों का घात श्रेणी प्रसार (Power series expansion of some basic functions)

इस भाग में हम मेक्लारिन श्रेणी की सहायता से कुछ आधारभूत फलनों का घात श्रेणी प्रसार प्राप्त करेंगे। यहाँ हम यह मान कर चलेंगे कि इन फलनों का प्रसार किया जा सकता है।

(i) Sin x का प्रसार

माना कि f (x) = sin x

$$\therefore f^n(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\forall n\varepsilon N,_{x\varepsilon}R \qquad ..... (1)$$

अत: प्रत्येक $n\in N$ के लिए अन्तराल $[0,x](x\varepsilon R)$ में $f(x)$ का वाँ अवकलज विद्यमान है

(1) से, $f^n(0)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $f^n(0) = \begin{cases} 0, \text{यदि n सम है} \\ (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}, \text{यदि n विषम है।} \end{cases}$

अब मेक्लारिन प्रमेय में लाग्रांज शेष पद

$$R_n = \frac{x^n}{\lfloor n} f^n(\theta x), 0 < \theta < 1$$

$$= \frac{x^n}{\lfloor n} \sin\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad |R_n| = \left|\frac{x^n}{\lfloor n} \sin\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{x^n}{\lfloor n}\right| \left|\sin\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)\right|$$

$$\Rightarrow |R_n| \le \frac{|x^n|}{\lfloor n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \{\because |\sin x| \le 1$$

माना $\Sigma u_{n=} \Sigma \frac{|x|^n}{\lfloor n}$, अब $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n+1}{|x|}$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \infty > 1 \forall x \varepsilon R .$$

अत: अनुपात परीक्षण से Σu_n अभिसारी श्रेणी है। फलत: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

(2) से $|R_n| \le u_n \forall n \varepsilon N,$, इसलिए तुलना परीक्षण में $\Sigma |R_n|$ भी अभिसारी होगी और $\lim_{n\to\infty} |R_n| = 0.$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |R_n| = 0,$ क्योंकि प्रत्येक निरपेक्ष अभिसारी श्रेणी अभिसारी होती है। अत: sin x, मेक्लारिन श्रेणी के दोनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है। अत: $\forall x \varepsilon R,$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} - \frac{x^7}{\lfloor 7} + \ldots\ldots$$

(ii) cosx का प्रसार

माना कि $f(x) = \cos x$

$$\therefore f^n(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \forall n \varepsilon N, x \varepsilon R \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

अत: प्रत्येक $n \varepsilon N$ के लिए अन्तराल $[0, x] (x \varepsilon R)$ में $f(x)$ का, n वाँ अवकलज विद्यमान है।

(1) से, $= f^n(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \quad f^n(0) = \begin{cases} 0, \text{यदि n सम है} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, \text{यदि n विषम है।} \end{cases}$$

अब मेक्लारिन प्रमेय में लाग्रांज शेष पद

$$R_n = \frac{x^n}{\lfloor n} f^n(\theta x), 0 < \theta < 1$$

$$= \frac{x^n}{\lfloor n} \cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow |R_n| = \left|\frac{x^n}{\lfloor n} \cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)\right|$$

$$= \left|\frac{x^n}{\lfloor n}\right| \left|\cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)\right|$$

$$\Rightarrow |R_n| \le \frac{|x^n|}{\lfloor n} \quad \text{.....(2)} \quad \{\because |\cos x| \le 1$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |R_n| = 0$, क्योंकि $\sum \frac{|x|^n}{\lfloor n}$ एक अभिसारी श्रेणी है।

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0$, क्योंकि प्रत्येक निरपेक्ष अभिसारी श्रेणी अभिसारी होती है।

अत: sin x, मेक्लारिन श्रेणी के दोनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है। अत: $\forall x \varepsilon R$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^4}{\lfloor 4} - \frac{x^6}{\lfloor 6} + \text{.....}$$

(iii) e^x **का प्रसार**

माना कि f (x) = e^x

$\therefore f^n(x) = e^x \forall n \varepsilon N, x \varepsilon R$ ..... (1)

अत: प्रत्येक n $\in$ N के लिए अन्तराल [0, x] ($x \varepsilon R$) में f (x) का, nवाँ अवकलज विद्यमान है।

(1) से $f^n(0) = e^0 = 1$

अब मेकलारिन प्रमेय में लाग्रांज शेष पद

$$R_n = \frac{x^n}{\lfloor n} f^n(\theta x), 0 < \theta < 1$$

$$= \frac{x^n}{\lfloor n} e^{\theta x}$$

अब

$$\Rightarrow \left|\frac{R_n}{R_{n+1}}\right| = \left|\frac{x^n e^{\theta x} \lfloor n+1}{\lfloor n x^{n+1} e^{\theta x}}\right|$$

$$= \left| \frac{n+1}{x} \right|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{R_n}{R_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|x|} = \infty > 1 \forall x \varepsilon R$$

$\Rightarrow \sum |R_n|$ एक अभिसारी श्रेणी है, और $\lim_{n\to\infty} |R_n| = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0$, क्योंकि प्रत्येक निरपेक्ष अभिसारी श्रेणी अभिसारी होती है। अत: फलन e^x , मेक्लारिन श्रेणी के दोनों प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता है।

अत: $\forall x \varepsilon R$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \ldots\ldots\ldots$$

(iv) log x का प्रसार

माना कि f (x) = log (1 + x) $\forall x > -1.$

$$\therefore f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1} \lfloor n-1}{(1-x)^n} \forall x > -1, n \varepsilon N.$$

$$\Rightarrow f^n(0) = (-1)^{n-1} \lfloor n-1$$

$$= \begin{cases} -\lfloor n-1 \text{ , यदि n सम हैं} \\ \lfloor n-1 \text{, यदि n विषम हैं} \end{cases}$$

अब मेकलारिन प्रमेय में n पदों के बाद लाग्रांज शेष पद

$$R_n = \frac{x^n}{\lfloor n} f^n(\theta x), 0 < \theta < 1$$

$$= \frac{x^n}{\lfloor n} \frac{(-1)^{n-1} \lfloor n-1}{(1+\theta x)^n}$$

$$\Rightarrow R_n = \frac{1}{n}(-1)^{n-1} \left(\frac{x}{1+\theta x} \right)^n, 0 < \theta < 1$$

स्थिति 1 : जब $0 \le x \le 1$ तब $0 \le x < 1 + \theta x$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+\theta x} < 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{1+\theta x} \right)^n < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{1+\theta x} \right)^n = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

स्थिति 2 : जब $-1 < x < 0.$

इस अवस्था में यह आवश्यक नहीं है कि $\frac{x}{1+\theta x}$,1 से कम हो, इसलिए n पदों के पश्चात् लाग्रांज रूप शेष लेने से किसी निष्कर्ष पर नहीं पहुँच सकते। अत: n पदों के पश्चात् कोशी रूप शेष लेने पर

$$R_n = \frac{x^n}{\underline{|n-1}}(1-\theta)^{n-1} f^n(\theta x), 0<\theta<1$$

$$= \frac{x^n}{\underline{|n-1}}(1-\theta)^{n-1} \frac{(-1)^{n-1}\underline{|n-1}}{(1+\theta x)^n}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{x^n}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

अब चूंकि $0<\theta<1, -1<x<0 \Rightarrow$

$$-1 < -\theta < \theta x$$

$$\Rightarrow 0 < 1-\theta < 1+\theta x$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$$

अतः $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1} = 0$ ....(i)

पुन: $-1<x<0 \Rightarrow |x|<1$, इसलिए $|x|^n \to 0$

जब $n \to \infty$ .....(ii)

(i) और (ii) से $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, जब $-1<x<0.$

अत: स्थिति (1) और स्थिति (2) से $-1<x\le 1$ के लिए फलन $\log(1+x)$ मेकलारिन प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता है। फलत: इस प्रमेय से

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{\underline{|2}} + \frac{x^3}{\underline{|3}} - \frac{x^4}{\underline{|4}} + ..., -1<x\le 1.$$

(v) $(1+x)^m$ का प्रसार, m ε R :

माना कि $f(x) = (1+x)^m \; m\varepsilon R$ के लिए $(1+x)^m$ के लिए सभी कोटि के अवकलजों का अस्तित्व होगा जबकि $1+x>0$ अर्थात $x>-1.$

अब

$$f^n(x) = m(m-1)(m-2).....(m-n+1)x^{m-n} \qquad .....(1)$$

स्थिति 1 : जब m ε N तथा n > m, तो (1) से गो f^n (x) = 0 और इस प्रकार n > m के लिए R_n = 0 होगा। अत: $(1+x)^m$ के प्रसार में परिमित पद होंगे तथा यह प्रसार $(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}x^2+....+x^m$ होगा।

स्थिति 2 : जब m $\notin$ N. इस स्थिति में कोई भी अवकलज शून्य नहीं होता है। यदि R_n मेकलारिन प्रमेय प्रसार में कोशीरूप का शेष पद है, तो

$$R_n = \frac{x^n}{\underline{|n-1}}(1-\theta)^{n-1} f^n(\theta x), 0<\theta<1$$

$$= \frac{x^n}{\underline{|n-1}}(1-\theta)^{n-1} m(m-1).....(m-n+1)(1+\theta x)^{m-n}$$

$$= \frac{m(m-1).....(m-n+1)}{\underline{|n-1}} x^n (1+\theta x)^{m-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

अब $\left|\frac{R_n}{R_{n+1}}\right| = \left|\frac{n}{m-n}.\frac{1+\theta x}{x(1-\theta)}\right|$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{R_n}{R_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{m-n}.\frac{1+\theta x}{x(1-\theta)}\right|$$

$$= \left|\frac{1+\theta x}{x(1-\theta)}\right|$$

चूंकि 0 < θ < 1 और -1 < x < 1 के लिए

$$-1 < -\theta < \theta x$$

$$\Rightarrow 0 < 1-\theta < 1+\theta x$$

$$\Rightarrow \frac{1+\theta x}{1-\theta} > 1$$

अत: यदि $|x|<1$ या $-1<x<1$ तो

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{R_n}{R_{n+1}}\right| = \frac{1}{|x|}\left|\frac{1+\theta x}{1-\theta}\right| > 1$$

$\Rightarrow \sum|R_n|$ अभिसारी श्रेणी है और $\lim_{n\to\infty}|R_n| = 0.$ चूंकि प्रत्येक निरपेक्ष अभिसारी श्रेणी अभिसारी होती है, इसलिए $\sum R_n$ भी अभिसारी श्रेणी होगी और $\lim_{n\to\infty} R_n = 0,$ जब $-1<x<1$ अत: फलन $f(x) = (1+x)^m, -1<x<1$ के लिए मेक्लारिन श्रेणी के दोनों प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है। फलत:

$$(1+x)^m = 1+mx+\frac{m(m-1)}{\underline{|2}}x^2+.....\text{जब}-1<x<1.$$

टिप्पणी : यह बात ध्यान देने योग्य है कि किसी फलन f (x) का मेक्लारिन श्रेणी से प्रसार नहीं किया जा सकता यदि निम्न में से कोई एक सत्य हो

(i) f (0) $f'(0), f''(0),$..... में से कोई अनन्त है।

(ii) f (x) का कोई अवकलज x = 0 पर असंतत् है।

(iii) $\lim_{n\to\infty} R_n \neq 0.$

2.7 सारांश

इस इकाई में टेलर प्रमेय और मेक्लारिन प्रमेय पर चर्चा की गयी है और कुछ आधारभूत फलनों का घात श्रेणी प्रसार किया गया है।

2.8 शब्दावली

श्रेणी	Series
घात श्रेणी	Power series
शेष	Remainder
प्रसार	Expansion

2.9 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1. (i) $\frac{(x\log)^n}{\lfloor n} a^{\theta x}$ (ii) $\frac{x^n}{\lfloor n} k^n e^{k\theta x}, 0<\theta<1$

2. (i) $\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{\lfloor n-1} \sin\left(\frac{n\pi}{2}+\theta x\right)$ (ii) $\frac{(x\log)^n(1-\theta)^{n-1}}{\lfloor n-1} a^{\theta x}$

2.10 अभ्यास प्रश्न

1. सिद्ध कीजिए कि $f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{\lfloor 2} f''(a+\theta h)$ जहाँ $\theta\xi(0,1)$ और यह भी सिद्ध कीजिए कि $\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{3}.$ आवश्यक प्रतिबन्धों का भी उल्लेख कीजिए।

2. यदि $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2} f''(x+\theta h)$ यहाँ $\theta\varepsilon(0,1)$ तो फलन $f(x)=x^3+x$ के लिए θ का मान ज्ञात कीजिए।

[उत्तर: $\theta=\frac{1}{3}$**]**

3. सिद्ध कीजिए कि निम्न कि फलनों का मेक्लारिन प्रसार नहीं किया जा सकता है :

   (i) $e^{1/x}$ (ii) $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

4. प्रसार की वैधता मानते हुए सिद्ध कीजिए किजिए कि

   (i) $\tan^{-1}x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-.....$

   (ii) $\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+.....$

5. यदि फलन f के प्रथम तीन कोटि के अवकलज विद्यमान हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)\left[f'(a) + f'(b) \right] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(c), a < c < b.$$

इकाई 3 : वक्र के चाप का अवकलज व पदिक समीकरण (Derivative of length of a curve and the pedal equation)

इकाई की रूपरेखा

3.0 उद्देश्य

3.1 प्रस्तावना

3.2 स्वयं सिद्ध

3.3 चाप व उसकी जीवा का अनुपात

3.4 चाप की लम्बाई का अवकलन

- 3.4.1 कार्तीय सूत्र
- 3.4.2 ध्रुवीय सूत्र
- 3.4.3 समीकरण के प्राचल रूप के लिये सूत्र

3.5 पदिक समीकरण

- 3.5.1 ध्रुवान्तर रेखा तथा स्पर्श रेखा के मध्य कोण
- 3.5.2 वक्र की लम्बाई के अवकलन व ϕ में संबंध
- 3.5.3 स्पर्श रेखा पर ध्रुव से लम्ब की लम्बाई
- 3.5.4 कार्तीय रूप के समीकरण से पदिक समीकरण
- 3.5.5 ध्रुवी रूप के समीकरण से पदिक समीकरण

3.6 सारांश

3.7 शब्दावली

3.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

3.9 अभ्यास प्रश्न

3.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन से आप जानेगें कि किसी वक्र के लिये एक निश्चित बिन्दु से उसकी लम्बाई का अवकलन क्या होगा। इस अवकलन के जानने के बाद ही आप समाकलन के प्रयोग से इस लम्बाई को ज्ञात कर सकेंगे। इस लम्बाई का अवकलन हम कार्तिय सूत्र के रूप में तथा ध्रुवीय सूत्र के रूप में ज्ञात करेंगे। इस इकाई में किसी वक्र का पदिक समीकरण किस प्रकार ज्ञात किया जाता है यह अध्ययन करेंगे।

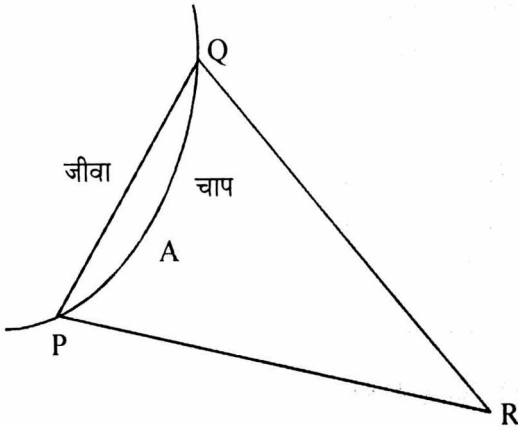
3.1 प्रस्तावना

किसी वक्र की पीरमिती ज्ञात करने के लिए हमें ऐसे सूत्र की तलाश होती है जो किसी निश्चित बिन्दु से वक्र के सहारे दूसरे बिन्दु तक की दूरी ज्ञात कर सके। अवकलन के द्वारा हम इस दूरी के अवकलन को प्राप्त कर सकते हैं जबकि वक्र का समीकरण कार्त्तीय अथवों ध्रुवीय समीकरण में दिया गया हो।

इस प्रकार यदि वक्र के किसी बिन्दु से मापी गई वक्र के किसी चाप की लम्बाई s हो तो कार्त्तीय सूत्र में s को x का फलन यथा s = f (x) व ध्रुवीय में s को r का फलन यथा s = f (r) माना जा सकता है जिससे क्रमश: s के अवकलन $\frac{ds}{d\times}$ व $\frac{ds}{dr}$ होंगे।

3.2 स्वयंसिद्ध (Axiom)

यदि किसी वक्र पर कोई दो बिन्दु P तथा Q इस प्रकार हो कि चाप PA पूर्ण रूप से जीवा PQ के सापेक्ष अवतल हो तो (चित्र 3.1)

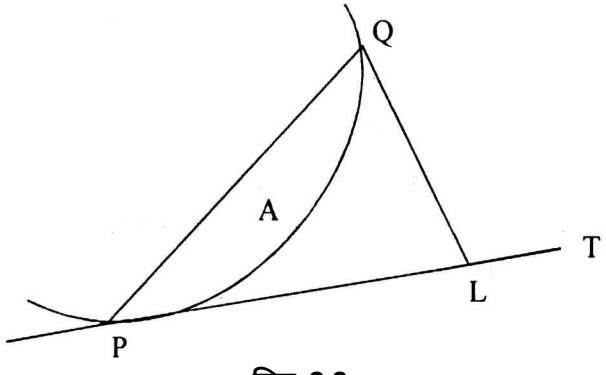


चित्र 3.1

जीवा PQ < चाप PAQ < PR +QR जबकि रेखाएँ PR व QR इस प्रकार हैं कि चाप PAQ पूर्णरूप से इन रेखाओं में समाहित हो।

3.3 चाप व इसकी जीवा का अनुपात

दिये गये चित्र 3.2 में माना P व Q अत्यधिक समीपवर्ती बिन्दु हैं जो कि भाग 3.2 के अनुसार ही इस प्रकार स्थित है कि



चित्र 3.2

जीवा PQ < चाप PAQ < PL + LQ ..... (1)

जबकि LQ बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PT पर लम्ब है। अत: (1) से PQ का भाग देने पर

$$1<\frac{\text{चाप PAQ}}{\text{जीवा } PQ} < \frac{PL}{PQ} + \frac{LQ}{PQ}$$

चित्र 3.2 में यदि $\angle PQL = \theta$, तब चाप ?4०

$$1 < \frac{\text{चाप PAQ}}{\text{जीवा } PQ} < \cos\theta + \sin\theta$$

यदि सीमा के रूप में Q बिन्दु P की ओर अग्रसर हो $(Q \to P)$ जीवा $PQ \to$ स्पर्श रेखा PL व $\alpha \to 0$

अत: $1 \le \underset{Q \to P}{Lim} \frac{\text{चाप PAQ}}{\text{जीवा } PQ} \le 1$

अथवा $\underset{Q \to P}{\lim} \frac{\text{चाप PAQ}}{\text{जीवा } PQ} 1$

3.4 चाप की लम्बाई का अवकलन

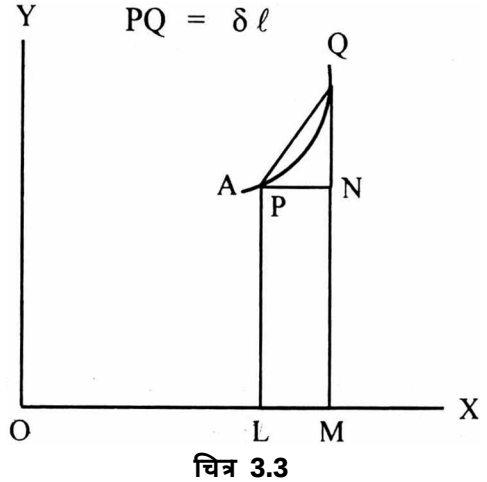
3.4.1 कार्त्तीय सूत्र (Cartesian formula)

माना वक्र APQ का कार्त्तीय समीकरण y = f (x) है जिस पर P (x, y) तथा $Q(x+\delta x, \delta y)$ दो निकट के बिन्दु हैं। वक्र पर A ऐसा बिन्दु है जहाँ से वक्र की लम्बाई नापी जाती है। माना चाप AP = s व चाप $AQ = s + \delta s$ जिस कारण चाप $PQ = \delta s$ इसके अतिरिक्त माना जीवा $QP = \delta l$

हम P से x-अक्ष पर PL, Q से x - अक्ष पर QM तथा P से QM पर PN लम्ब डालते हैं। जिससे त्रिभुज PNQ में,

$\angle QNP = 90^{\circ}$,

$$QN = QM - NM = QM - PL$$
$$= (y + \delta y) - y = \delta y$$
$$PN = LM = OM - OL = (x + \delta x) - x$$
$$= \delta x$$
$$PQ = \delta \ell$$



चित्र 3.3

अत: $PQ^2 = PN^2 + QN^2$

$$(\delta 1)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2$$

दोनों ओर $(\delta x)^2$ का भाग देने पर

$$\left(\frac{\delta 1}{\delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2$$

अथवा $$\frac{\delta 1}{\delta x} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2} \quad \text{.....(1)}$$

पुन: $$\frac{\delta s}{\delta x} = \frac{\delta s}{\delta \ell} \cdot \frac{\delta \ell}{\delta x}$$

$$= \pm\frac{\delta s}{\delta \ell}\sqrt{1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2}$$

अब माना Q बिन्दु P की ओर अग्रसर होता है तो PN घटता जायेगा अर्थात् यदि $Q \to P, PN \to 0$ या $\delta x \to 0$

अब दोनों ओर सीमा लेने पर

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta s}{\delta x} = \pm \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta s}{\delta \ell} \lim_{\delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2}$$

पिछले खंड 3.3 से हम जानते हैं कि

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta s}{\delta x} = 1$$

अत: $$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \text{.....(2)}$$

(अवकलज की परिभाषा से)

+ अथवा - चिन्ह क्रमश: s के x की दिशा में बढ़ने अथवा घटने पर लिया जाता है।

टिप्पणी : यदि वक्र का समीकरण x = f(y) के रूप में हो तो समीकरण (2) x व y को एक दूसरे से परिवर्तित करके लिखा जा सकता है। अत: इस स्थिति में

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad \text{.....(3)}$$

3.4.2 ध्रुवीय सूत्र (Polar formula)

माना वक्र का समीकरण r = f(θ) है। इस वक्र पर चित्र 3.4 के अनुसार P (r, θ) व Q $(r + \delta r, \theta + \delta\theta)$ दो निकटवर्ती बिन्दु हैं। वक्र पर A ऐसा बिन्दु है जहाँ से वक्र की लम्बाई नापी जाती है। माना चाप AP = s व चाप $AQ = s + \delta s$ जिस कारण चाप $PQ = \delta s$ । इसके अतिरिक्त

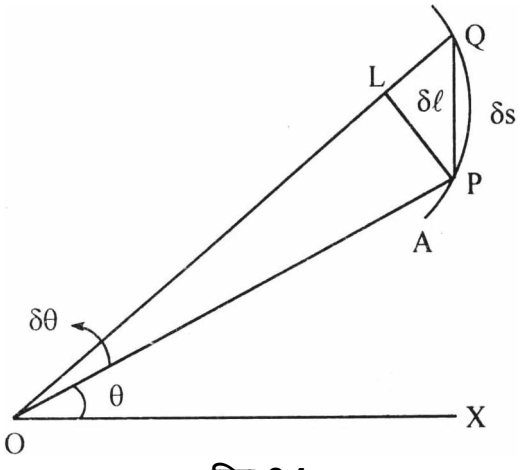
माना जीवा PQ = $\delta\ell$ वक्र में रचना के रूप में हम OP व OQ को जोड़ते हैं व P बिन्दु से एक लंब PL रेखा OQ पर डालते हैं। अब त्रिभुज OPQ में

OP = r, OQ = r + δr

$$\angle POQ = \angle XOQ - \angle XOP$$
$$= (\theta + \delta\theta) - \theta = \delta\theta$$

इसके अतिरिक्त δr व $\delta\theta$ अति सूक्ष्म राशियाँ है जिस कारण हम $(\delta r)^2$ व $(\delta\theta)^2$ तक के मान को ही गणना में रखेंगे। इसी प्रकार त्रिभुज OPL में

PL = OP sin $\delta\theta$ = r sin$\delta\theta$, OL = r cos$\delta\theta$.



चित्र 3.4

अतः समकोण त्रिभुज PLQ में

(जीवा PQ)^2 $= PL^2 + LQ^2 = PL^2 + (OQ - OL)^2$

$$= (r\sin\delta\theta)^2 + (r + \delta r - r\cos\delta\theta)^2$$

आप जानते हैं कि $\delta\theta$ का मान बहुत कम होने पर $\sin\delta\theta = \delta\theta$ व $\cos\delta\theta = 1$ होता है , अतः उपरोक्त समीकरण से

$$(\delta\ell)^2 = (r\delta\theta)^2 + (r + \delta r - r)^2 = r^2(\delta\theta)^2 + (\delta r)^2 \quad \text{.....(1)}$$

अब $\dfrac{\delta s}{\delta\theta} = \dfrac{\delta s}{\delta\ell}\cdot\dfrac{\delta\ell}{\delta\theta}$

$= \frac{\text{चाप PQ}}{\text{जीवा PQ}}\cdot\frac{\text{चाप PQ}}{\delta\theta}$

यदि $Q \to P$ तो $\delta\theta \to 0$

अतः, इस सीमा के लिये

$$\lim_{\substack{Q\to P\\ \delta\theta\to 0}}\frac{\delta s}{\delta\theta} = \lim_{\substack{Q\to P\\ \delta\theta\to 0}}\frac{\text{चाप PQ}}{\text{जीवाPQ}}\ \lim_{\substack{Q\to P\\ \delta\theta\to 0}}\frac{\text{जीवा PQ}}{\delta\theta}$$

परन्तु भाग 3.3 से, $\lim_{Q\to P}\frac{\text{चाप PQ}}{\text{जीवाPQ}} = 1$

अतः $\lim_{\theta \to P} \frac{\delta s}{\delta \theta} = \lim_{\delta\theta \to 0} \frac{\delta \ell}{\delta \theta}$

$$= \lim_{\delta\theta \to 0} \frac{1}{\delta\theta} \left(r^2 \delta\theta^2 + \delta r^2 \right)^{1/2}$$

$$= \lim_{\delta\theta \to 0} \frac{1}{\delta\theta} \left(r^2 + \frac{\delta r^2}{\delta\theta^2} \right)^{1/2}$$

अथवा $$\frac{ds}{d\theta} = \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2}$$

टिप्पणी :यदि वक्र का समीकरण θ = F (r) हो तो

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dr} \cdot \frac{dr}{d\theta}$$

अथवा $$\frac{ds}{dr} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dr} \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \left[r^2 \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dr} \cdot \frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \left[\left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न

1. किसी वक्र के दो बिन्दुओं P व Q के निकटस्थ स्थिति के लिये चाप व जीवा PQ के अनुपात के लिये सूत्र होगा.....
2. वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा का x अक्ष से घनात्मक दिशा में झुगाव ψ हो तो $\frac{ds}{dx} = ...$

3.4.3 समीकरण के प्राचल रूप के लिये सूत्र (Formula for parametric form of equation)

यदि किसी वक्र का समीकरण प्राचल रूप में प्राचल t के लिये

$x = f_1(t), y = f_2(t)$ हो तो

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

भाग (3.4.1) के समीकरण (2) से

$$\frac{ds}{dt} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= \left[\left(\frac{dx}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{1/2}$$

उदाहरण - 1 : वक्र $3ay^2 = x(x-a)^2$ के लिये $\frac{ds}{dx}$ ज्ञात करो।

हल : $3ay^2 = x(x-a)^2$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$6ay\frac{dy}{dx} = (x-a)^2 + 2x(x-a)$$

$$= (x-a)(3x-a)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-a)(3x-a)}{6ay}$$

आपको ज्ञात है कि $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

अथवा $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\frac{(x-a)^2(3x-a)^2}{36a^2y^2}}$

वक्र के समीकरण से y^2 का मान रखने पर

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\frac{(x-a)^2(3x-a)^2}{12a.(x-a)^2x}}$$

$$= \sqrt{1+\frac{(3x-a)^2}{12ax}} \quad = \sqrt{\frac{12ax+(3x-a)^2}{12ax}}$$

$$= \sqrt{\frac{(3x+a)^2}{12ax}} \quad = \frac{(3x+a)}{2\sqrt{ax}}$$

उदाहरण - 2 : वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के लिये $\frac{ds}{dx}$ ज्ञात करो।

हल : $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के दोनो पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx} = 0$$

अथवा $\frac{dy}{dx} = \frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$

अत: $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}}$

$$= \sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}} = \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}$$

उदाहरण - 3 : वक्र $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ के लिये $\frac{ds}{d\theta}$ ज्ञात कीजिये।

हल : $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ के दोनो पक्षों को θ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2r\frac{dr}{d\theta} = --2a^2 \sin 2\theta$$

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a^2 \sin 2\theta}{r}$$

आपको ज्ञात है $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$

$$= \sqrt{r^2 + \frac{a^4 \sin^2 2\theta}{r^2}} = \sqrt{a^2 \cos 2\theta + \frac{a^4 \sin^2 2\theta}{a^2 \cos 2\theta}}$$

$$= a\sqrt{\frac{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta}{\cos 2\theta}}$$

$$= a\sqrt{\sec 2\theta}$$

उदाहरण - 4 : वक्र $\frac{2a}{r} = 1 + \cos\theta$ के लिये $\frac{ds}{d\theta}$ ज्ञात कीजिये।

हल : वक्र के समीकरण को पूर्ण रूप से θ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$-\frac{2a}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\sin\theta$$

अथवा $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2 \sin\theta}{2a}$

$$\therefore \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^4 \sin^2\theta}{4a^2}}$$

$$= \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2 r^2 \sin^2\theta} = r\sqrt{1 + \left(\frac{r}{2a}\right)^2 \sin^2\theta}$$

$$= r\sqrt{1 + \frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}}$$ (वक्र से $\frac{r}{2a} = \frac{1}{1+\cos\theta}$ रखने पर)

$$= r\sqrt{1 + \frac{(1-\cos^2\theta)}{(1+\cos\theta)^2}} = r\sqrt{1 + \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$= r\sqrt{\frac{2}{2\cos^2\theta/2}} = \frac{r}{\cos\theta/2}$$

$$= \frac{2a}{(1+\cos\theta)\cos\theta/2} = \frac{2a}{2\cos^2\theta/2.\cos\theta/2}$$

$$= a\sec^3\theta/2$$

उदाहरण - 5 : यदि

x sin t + y cos t = f ' (t)

x cos t - y sin t = f " (t)

तो सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{ds}{dt} = f'(t) + f'''(t)$$

हल : वक्र के समीकरणों को हल करके हम वक्र का समीकरण प्राचल रूप में निम्न रूप में ज्ञात कर सकते हैं।

x = f ' (t) sin t + f " (t) cos t

y = f ' (t) cos t - f '' (t) sin t

उपरोक्त से

$$\frac{dx}{dt} = f''(t)\sin t + f'(t)\cos t + f'''(t)\cos t - f''(t)\sin t$$

$$= \left(f'(t) + f'''(t)\right)\cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = f''(t)\cos t - f'(t)\sin t - f'''(t)\sin t - f''(t)\cos t$$

$$= -\left(f'(t) + f'''(t)\right)\sin t$$

अत : सूत्र

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad \text{से}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(f'(t) + f'''(t)\right)^2\cos^2 t + \left(f'(t) + f'''(t)\right)^2\sin^2 t}$$

$$= f'(t) + f'''(t)$$

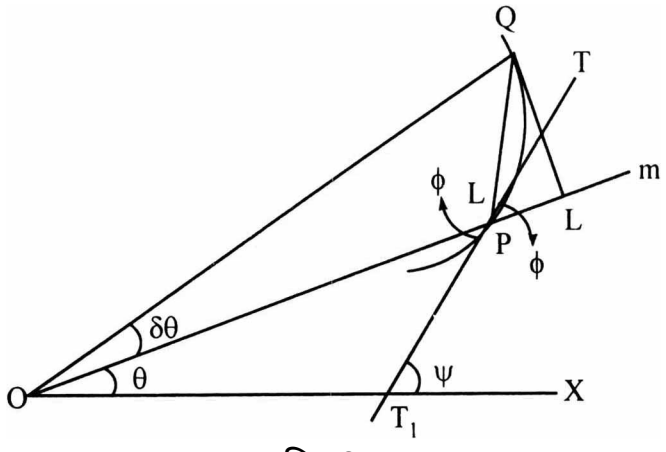
3.5 पदिक समीकरण (Pedal equation)

किसी दिये हुए वक्र के लिये r तथा ध्रुव अथवा मूल बिन्दुओं से स्पर्श रेखा पर लम्ब p के मध्य समीकरण वक्र का पदिक समीकरण कहलाता है।

3.5.1 ध्रुवान्तर रेखा तथा स्पर्श रेखा के मध्य कोण

(Angle between radius vector and tangent)

माना वक्र का ध्रुवीय समीकरण r = f (θ) है तथा P व Q क्रमश : निकटस्थ बिन्दु है जिनके निर्देशांक क्रमश : (r, θ) व $(r + \delta r, \delta + \delta\theta)$ है।



चित्र 3.5

रचना करने पर हम

OP,OQ व PQ को सरल रेखा से जोड़ते हैं जबकि O ध्रुव व OX प्रारम्भिक रेखा है। अब P बिन्दु पर TPT_1 एक स्पर्श रेखा खीचते है तथा Q से बढ़ी हुई OP पर एक लम्ब QL डालते हैं। अब चित्र 3.5 में

$$\angle XOP = \theta, \angle POQ = \angle XOQ - \angle XOP$$
$$= (\theta + \delta\theta) - \theta = \delta\theta$$
$$\angle QLP = 90^{\circ}, OP = r, OQ = (r + dr)$$

अब माना ध्रुवान्तर रेखा OP तथा P परस्पर्शरेखा TPT_1 के मध्यकोण ϕ है।

अब यदि $Q \to P$ तो कोण $QPL \to$ कोण TPL, अर्थात्

$$\angle TPL = \phi = \lim_{Q \to P} \angle QPL$$

परन्तु $Q \to P$ तब $\delta\theta \to O$

अत: $\phi = \lim_{\delta\theta \to O} \angle QPL$

व $\tan\phi = \lim_{\delta\theta \to O} \tan \angle QPL$

$$= \lim_{\delta\theta \to O} \frac{QL}{PL} \qquad \text{(त्रिभुज PQL में)}$$

$$= \lim_{\delta\theta \to O} \frac{OQ\sin\delta\theta}{OL - OP} \qquad \text{(त्रिभुज OQL में)}$$

$$= \lim_{\delta\theta \to O} \frac{(r + \delta r)\sin\delta\theta}{(r + \delta r)\cos\delta\theta - r}$$

$$= \lim_{\delta\theta \to O} \frac{(r + \delta r)\sin\delta\theta}{\delta r\cos\delta\theta - r(1 - \cos\delta\theta)}$$

$$= \lim_{\delta\theta \to O} \frac{(r + \delta r)\sin\delta\theta}{\delta r\cos\delta\theta - 2\sin^2\frac{\delta\theta}{2}.r}$$

$$\tan\phi = \lim_{\delta\theta\to O} \frac{(r+\delta r)\frac{\sin\delta\theta}{\delta\theta}}{\frac{\delta r}{\delta\theta}\cos\delta\theta - r.\frac{\sin\delta\theta/2}{\delta\theta/2}.\sin\frac{\delta\theta}{2}}$$

(दायीं ओर ऊपर व नीचे $\delta\theta$ का भाग देने पर)

$$= \frac{(r+o).1}{\frac{dr}{d\theta}.1 - r.1.0}$$

(चूंकि $\delta\theta \to o$ के कारण $\delta r \to o, = \lim_{\frac{\delta\theta}{2}\to 2} \frac{\sin\frac{\delta\theta}{2}}{\frac{\delta\theta}{2}} = 1$ व $\cos\delta\theta = 1$)

$$= \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = r\frac{d\theta}{dr}$$

अत: $\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$

3.5.2 वक्र की लम्बाई के अवकलज व ϕ में सम्बन्ध

$$\cos\phi = \frac{1}{\sec\phi} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}} = \frac{1}{\left(\frac{d\theta}{dr}\right)\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{dr}{d\theta}}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}} = \frac{\frac{dr}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}}$$ (भाग 3.4.2 से)

$$= \frac{dr}{d\theta}.\frac{d\theta}{ds} = \frac{dr}{ds}$$

इसी प्रकार

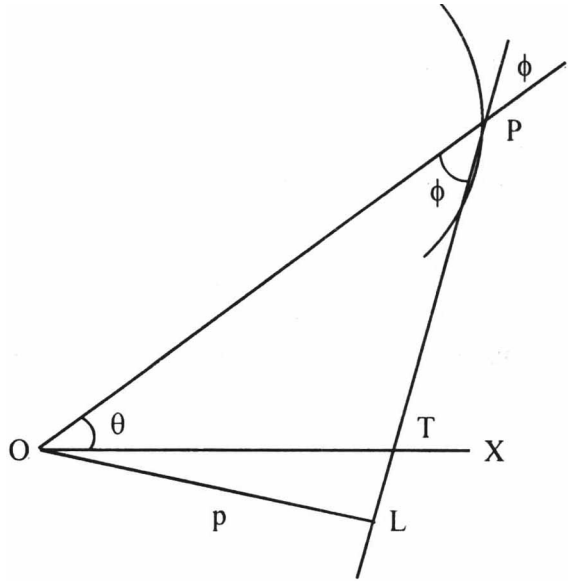
$$\sin\phi = \tan\phi\cos\phi$$

$$= r\frac{d\theta}{dr}.\frac{dr}{ds}$$

$$= r\frac{d\theta}{ds}$$

3.5.3 स्पर्श रेखा पर ध्रुव से लम्ब की लम्बाई (Length of the perpendicular from pole on the tangent)

वक्र r = f (θ) के किसी बिन्दु P (r, θ) पर स्पर्श रेखा PT खींची गई है। OL ध्रुव O से स्पर्श रेखा पर लम्ब है जिसकी लम्बाई माना p है।



चित्र 3.6

त्रिभुज OPL में

$$\angle OPL = \phi, OP = r$$

इसके अतिरिक्त $\angle TOP = \theta$

यहाँ $p = r\sin\phi$ .....(1)

अथवा $p^2 = r^2\sin^2\phi = \dfrac{r^2}{\cos ec^2\phi}$

$= \dfrac{r^2}{1+\cot^2\phi}$; अथवा $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{\cot^2\phi}{r^2}$

परन्तु $\tan\phi = r\dfrac{d\theta}{dr}$ (भाग 3.5.1 से)

जिससे $\cot\phi = \dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{d\theta}$

अतः $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2$

$= \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{1}{r^4}\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2$ .....(2)

यदि $r = \dfrac{1}{u}$ प्रतिस्थापित किया जाये तो प्र

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}$$

∴ समीकरण (1) से

$$\frac{1}{p^2} = u^2 + u^4 . \frac{1}{u^4}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 \qquad \text{.....(3)}$$

3.5.4 कार्त्तीय रूप के समीकरण से पदिक समीकरण (Pedal equation from cartesian form of equation)

माना किसी वक्र का कार्त्तीय समीकरण है

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{..... (1)}$$

आप यह भी जानते हैं कि किसी बिन्दु P (x, y) के लिये ध्रुव (अथवा मूल बिन्दु) से दूरी

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{..... (2)}$$

इसके अतिरिक्त P (x, y) बिन्दु पर स्पर्श रेखा का समीकरण होता है

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

अथवा $\frac{dy}{dx}X - Y - \times\frac{dy}{dx} + y = 0$ .....(3)

यदि इस स्पर्श रेखा पर ध्रुव (अथवा मूल बिन्दु) से लम्बवत दूरी p हो तो

$$p = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

अब चूंकि किसी वक्र का पदिक समीकरण r व p का सम्बन्ध है हम कार्त्तीय समीकरण के लिए पदिक समीकरण ज्ञात करने के लिये समीकरण (1), (2) व (4) से x व y को विलोपित करते हैं। इस प्रकार हमें पदिक समीकरण प्राप्त हो जायेगा।

3.5.5 ध्रुवी रूप के समीकरण से पदिक समीकरण (Pedal equation from polar form of equation)

(i) प्रथम विधि

माना वक्र का समीकरण ध्रुवीय रूप में

$$r = f(\theta) \qquad \text{..... (1)}$$

हैं।

हम भाग 3.5.3 के समीकरण (2) से यह भी जानते हैं कि

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \qquad \text{.....(2)}$$

अब यदि समीकरण (1) व (2) से θ को विलोपित कर दिया जाये तो हमें एक संबंध p व r में प्राप्त होगा जो कि दिये हुए वक्र का पदिक समीकरण है।

(ii) द्वितीय अथवा वैकल्पिक विधि

हम भाग (3.5.3) के समीकरण (1) से जानते हैं कि

$$p = r \sin \phi \qquad \text{..... (1)}$$

तथा भाग (3.5.1) के समीकरण (1) से हम जानते हैं कि

$$\tan \phi = r \frac{d\theta}{dr} \qquad \text{.....(2)}$$

इसके अतिरिक्त वक्र का समीकरण

$$r = f(\theta) \qquad \text{..... (3)}$$

हमें ज्ञात है।

अब समीकरण (1), (2) व (3) से θ तथा ϕ को विलोपित करने पर हमें r व p में संबंध ज्ञात होता है जो कि वक्र (3) का पदिक समीकरण है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न

(1) किसी वक्र के कार्तीय समीकरण से पदिक समीकरण में परिवर्तित होता है?

(2) ध्रुवान्तर रेखा व स्पर्श रेखा के मध्य कोण.....सूत्र के द्वारा दिया जाता है।

उदाहरण - 1 :

वृत $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ का पदिक समीकरण कीजिये।

हल : यहाँ $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax = 0$ .....(1)

किसी बिन्दु (x, y) पर इस वक्र की स्पर्श रेखा होगी (निर्देशांक ज्यामिति से)

$$Xx + Yy - a(X + x) = 0$$

अथवा $(x - a)X + Yy - ax = 0$ .....(2)

अत : (2) पर (0,0) से डाले गये लम्ब की लम्बाई

$$p = \frac{-ax}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = \frac{-ax}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2ax + a^2}}$$

$$= \frac{-ax}{a}$$ चूंकि $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ है।

$$= + x \qquad \text{.....(3)}$$

(चूंकि लम्बाई घनात्मक होती है)

इसके अतिरिक्त हमें ज्ञात है कि

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{.....(4)}$$

समीकरण (1), (3) व (4) से हमें x व y को विलोपित करना है।

समीकरण (1) व (4) से

$$r^2 = 2ax \qquad \text{.....(5)}$$

समीकरण (3) से

$x = p$

अत: (5) में x का मान रखने पर

$r^2 = 2ap$

जो कि दिये हुए वृत्त का पदिक समीकरण है।

उदाहरण - 2 : परवलय $y^2 = 4a\ (x + a)$ का पदिक समीकरण ज्ञात करो।

हल : यहाँ दिया हुआ वक्र एक परवलय

$$y^2 = 4a\ (x + a) \qquad \text{..... (1)}$$

है।

(1) का अवकलन करने पर

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

अथवा $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2a}{y}$

अत : (1) के किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा का समीकरण होगा

$$Y - y = \frac{2a}{y}(X - x)$$

अथवा $2aX - yY - 2ax + y^2 = 0$

अब मूल बिन्दु (0,0) से इस स्पर्श रेखा पर लम्ब की लम्बाई

$$p = \frac{y^2 - 2ax}{\sqrt{4a^2 + y^2}}$$

समीकरण (1) से

$$p = \frac{4a(x+a) - 2ax}{\sqrt{4a^2 + 4a(x+a)}}$$

$$= \frac{2ax + 4a^2}{\sqrt{4a(x+2a)}} = \frac{2a(x+2a)}{\sqrt{4a(x+2a)}}$$

$$= \sqrt{a(x+2a)}$$

अथवा $p^2 = a(x+2a)$ .....(2)

इसके अतिरिक्त

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{.....(3)}$$

अत : समीकरण (1), (2) व (3) से x व y को विलोपित करने के लिये

$$r^2 = x^2 + 4a(x+a) = (x+2a)^2$$

$$r = (x+2a)$$

अथवा $r = \dfrac{p^2}{a}$

अथवा $p^2 = ar$

जो कि दिये हुए परवलय का पदिक समीकरण है।

उदाहरण - 3 : वक्र $r = a(1+\cos\theta)$ का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिये।

हल : दिये हुए वक्र का समीकरण है।

$$r = a(1+\cos\theta) \qquad \text{.....(1)}$$

अत: $\dfrac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$

हमें ज्ञात है कि

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}.a^2\sin^2\theta$$

$$= \frac{1}{r^2} + \frac{a^2}{r^4}\left(1-\cos^2\theta\right) \qquad \text{.....(2)}$$

परन्तु (1) से $\cos\theta = \dfrac{r}{a} - 1$

समीकरण (2) से

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{a^2}{r^4} - \frac{a^2}{r^4}.\left(\frac{r}{a}-1\right)^2$$

$$= \frac{1}{r^2} + \frac{a^2}{r^4} - \frac{a^2}{r^4}\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2r}{a} + 1\right)$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{2a}{r^3}$$

अथवा $2ap^2 = r^3$, जो कि दिये हुए वक्र का पदिक समीकरण है।

उदाहरण - 4 : दीर्घवृत्त $\dfrac{\ell}{r} = 1+e\cos\theta\,(e<1)$ का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिये।

हल : दिया हुआ दीर्घवृत्त है

$$\frac{\ell}{r} = 1+e\cos\theta \qquad \text{.....(1)}$$

दोनों ओर का लघुगुणक लेने पर

$$\log l - \log r = \log(1+e\cos\theta)$$

इस समीकरण का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$-\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{1+e\cos\theta}(-e\sin\theta)$$

अथवा $\dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$ .....(2)

हम जानते हैं कि

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]$$

समीकरण (2) से

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{r^2}\left[1+\frac{\left(e\sin\theta\right)^2}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}\right]$$

अथवा $$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{1+e^2\cos^2\theta+2e\cos\theta+e^2\sin^2\theta}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[\frac{1+e^2+2e\cos\theta}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}\right] \quad .....(3)$$

समीकरण (1) से $e\cos\theta=\frac{\ell}{r}-1$

अत: $e\cos\theta$ का मान (3) में रखने पर

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{r^2}\left[\frac{1+e^2+2\left(\frac{\ell}{r}-1\right)}{\left(1+\frac{\ell}{r}-1\right)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[\frac{e^2+2\frac{\ell}{r}-1}{\frac{\ell^2}{r^2}}\right]=\frac{e^2+\frac{2\ell}{r}-1}{\ell^2}$$

या $$\frac{1}{p^2}=\frac{e^2+\frac{2\ell}{r}-1}{\ell^2}$$

जो कि वक्र का पदिक समीकरण है।

उदाहरण-5: सिद्ध कीजिये कि वक्र $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ का पदिक समीकरण $r^2=a^2-3p^2$ होगा।

हल : दिये हुए समीकरण के लिये

$$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t$$

अत : वक्र के बिन्दु $\left(a\cos^3 t, a\sin^3 t\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण होगा।

$$y - a\sin^3 t = -\tan t\left(x - a\cos^3 t\right)$$

$$x\tan t + y - a\sin^3 t - a\sin t\cos^2 t = 0$$

अथवा $\quad x\tan t + y - a\sin t = 0$

इस स्पर्श रेखा पर मूल बिन्दु (0,0) से लम्ब की लम्बाई

$$p = \frac{-a\sin t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \frac{-a\sin t}{\sec t} = -a\sin t\cos t \qquad \text{.....(1)}$$

इसके अतिरिक्त हमें ज्ञात है कि

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{.....(2)}$$

अथवा

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2\cos^6 t + a^2\sin^6 t \\ &= a^2\left(\cos^6 t + \sin^6 t\right) \\ &= a^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) - 3a^2\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) \\ &= a^2 - 3a^2\sin^2 t\cos^2 t \\ &= a^2\left(1 - 3\sin^2 t\cos^2 t\right) \end{aligned}$$

समीकरण (1) से

$$r^2 = a^2 - 3p^2$$

अत: दिये हुए वक्र का पदिक समीकरण $r^2 = a^2 - 3p^2$ है जो कि अभीष्ट हल है।

उदाहरण - 6 : वक्र $\frac{2a}{r} = 1 - \cos\theta$ के किसी बिन्दु (r, θ) पर ध्रुवान्तर रेखा व स्पर्श रेखा के मध्य कोण ज्ञात कीजिये।

हल : यहाँ हम ϕ ज्ञात करना चाहते हैं जो कि निम्न समीकरण से दिया जाता है

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} \qquad \text{.....(1)}$$

समीकरण $\frac{2a}{r} = 1 - \cos\theta$ का लघुगुणक लेने पर

$$\log 2a - \log r = \log\left(1 - \cos\theta\right)$$

इस समीकरण का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$-\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\sin\theta/2\cos\theta/2}{2\sin^2\theta/2} = \cot\theta/2$$

अथवा $\quad r\frac{d\theta}{dr} = -\tan\theta/2 = \tan\left(\pi - \theta/2\right) \qquad \text{.....(2)}$

अब (1) व (2) से

$$\tan\phi = \tan\left(\pi - \theta/2\right)$$

अथवा $\phi = \pi - \theta/2$

3.6 सारांश

इस इकाई में आपने जाना कि किस प्रकार कार्तीय समीकरण, ध्रुवीय समीकरण के लिये वक्र के निश्चित बिन्दु से वक्र के किसी अन्य बिन्दु तक की लम्बाई का अवकलन ज्ञात किया जा सकता है। इस इकाई में आपने इससे संबंधित सूत्र को ज्ञात करना देखा। साथ ही आपने इन कार्तीय समीकरण वाले तथा ध्रुवीय समीकरण वाले वक्रों का पदिक समीकरण ज्ञात करना सीखा जो कि p तथा r का एक संबंध है जबकि p मूल बिन्दु अथवा ध्रुव से वक्र के किसी बिन्दु (x, y) अथवा (r, θ) पर स्पर्श रेखा पर लम्ब की लम्बाई है। आपने ध्रुवान्तर रेखा व स्पर्श रेखा के मध्य कोण ϕ को भी जानने का सूत्र ज्ञात किया।

3.7 शब्दावली

ध्रुवान्तर रेखा	Radius vector
वक्र की लम्बाई	Length of the curve
पदिक समीकरण	Pedal equation
चाप	Arc
जीवा	Chord

3.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1. $\lim\limits_{Q\to P} \dfrac{\text{जीवा PQ}}{\text{चाप PQ}} = 1$
2. $\sec\psi$
3. वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब की लम्बाई
4. $\tan\phi = r\dfrac{d\theta}{dr}$

3.9 अभ्यास प्रश्न

1. निम्न वक्रों के पदिक समीकरण ज्ञात कीजिये

   (i) $x^2 - y^2 = a^2$ $\qquad \left(pr = a^2\right)$

   (ii) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad \left(\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{r^2}{a^2b^2}\right)$

2. निम्न वक्रों का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिये

   (i) $r\theta = a$ $\qquad \left[p^2\left(a^2 + r^2\right) = a^2r^2\right]$

   (ii) $r^2\cos 2\theta = a^2$ $\qquad \left(pr = a^2\right)$

(iii) $r = a\sec n\theta$ $\left(r^{n+1} = pa^n\right)$

3. निम्न वक्रों के किसी बिन्दु (r, θ) पर ध्रुवान्तर रेखा व इस बिन्दु पर स्पर्श रेखा के मध्य कोण ज्ञात कीजिये

(i) $a\theta = \sqrt{r^2 - a^2} - a\cos^{-1}\left(a/r\right)$ $\left[\phi = \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)\right]$

(ii) $r = a\left(1-\cos\theta\right)$ $\left(\phi = \pi/2\right)$

4. सिद्ध कीजिये कि हृदयाम (Cardioid) $r = a\left(1-\cos\theta\right)$ के लिये

$$\phi = \frac{1}{2}\theta$$

इकाई 4 : वक्रता (Curvature)

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य

4.1 प्रस्तावना

4.2 परिभाषाएं

- 4.2.1 व्रकता केन्द्र
- 4.2.2 वक्रता त्रिज्या
- 4.2.3 वक्रता
- 4.2.4 वक्रता वृत्त
- 4.2.5 व्रकता जीवा
- 4.2.6 नैज समीकरण

4.3 वक्रता त्रिज्या के सूत्र

- 4.3.1 नैज समीकरण के लिये सूत्र
- 4.3.2 कार्त्तीय समीकरण के लिये सूत्र
- 4.3.3 प्राचलिक रूप के समीकरण के लिये सूत्र
- 4.3.4 पदिक समीकरण के लिये सूत्र
- 4.3.5 घ्रुवीय समीकरण के लिये सूत्र
- 4.3.6 विभिन्न निकायों के लिये वक्रता त्रिज्या के सूत्र

4.4 उपप्रमेय

- 4.4.1 वृत्त की वक्रता
- 4.4.2 स्पर्शीय ध्रुवी समीकरण के लिए वक्रता त्रिज्या
- 4.4.3 ध्रुवीय समीकरण के लिये एक और रूप

4.5 वक्रता वृत्त व वक्रता केन्द्र

- 4.5.1 वक्रता केन्द्र के निर्देशांक
- 4.5.2 वक्रता वृत्त

4.6 सारांश

4.7 शब्दावली

4.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

4.9 अभ्यास प्रश्न

4.0 उद्देश्य

इस इकाई में आप वक्र की वक्रता के बारे में जानेंगे जो कि वक्र के किसी बिन्दु पर उसके मोड़ का माप है। इस को जानने के लिए हम वक्रता त्रिज्या, वक्रता वृत्त, वक्रता जीवा को परिभाषित कर किसी

वक्र के कार्त्तीय, ध्रुवीय, नैज, पाद व प्राचलिक समीकरणों के लिये उन्हें ज्ञात करने की विधि का अध्ययन करेंगे।

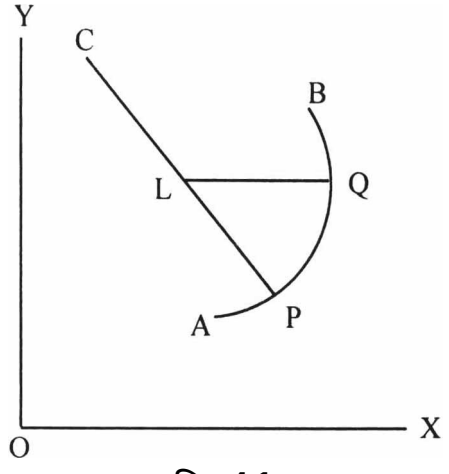
4.1 प्रस्तावना

आप सामान्य रूप से किन्हीं घुमावदार वक्रों में देखते होंगे कि किसी ऐसे वक्र का दूसरे ऐसे वक्र से मोड़ अधिक होता हैं व यहीं वक्रता के आधार की शुरूआत हैं। चूंकि इस मोड़ का कोई संख्यात्मक माप नहीं हैं हम मोड़ों की तुलना करने के लिये गणितीय रूप से वक्रता को परिभाषित करेंगे व यह जानेंगे कि यदि वक्रता समीकरण किसी भी प्रकार के रूप यथा कार्तीय, घ्रुवीय, पाद, नैज अथवा प्राचलिक समीकरण के रूप में हो तो वक्र में किसी बिन्दु पर वक्रता कैसे ज्ञात की जा सकती है।

4.2 परिभाषाऐं

परिभाषाऐं जानने के लिये हम एक वक्र का चाप लेते हैं जिसके किसी बिन्दु पर हम वक्रता आदि को परिभाषित करेंगे।

माना AB वक्र के चाप का अंश है जिसमें कि कोई मोड़ अथवा घुमाव है। अब इस अंश पर हम दो करीबी बिन्दु P व Q का ध्यान करते हैं। P व Q पर हम अभिलंब (Normal) खीचते हैं। स्पष्टत: चूंकि घुमाव के कारण अभिलंब एक दूसरे के समानान्तर नहीं हो सकते अत : माना ये अभिलंब किसी एक बिन्दु L पर काटते हैं। चित्रानुसार यदि Q बिन्दु P की ओर प्रवृत्त हो तो दोनों अभिलंबों का कटाव बिन्दु L P पर के अभिलंब के एक अन्य स्थिर बिन्दु C की ओर अग्रसर अथवा प्रवृत्त होगा। इस उपर्युक्त प्रक्रिया में Q बिन्दु P के दायी ओर अथवा बायीं ओर हो सकता है।



चित्र 4.1

4.2.1 वक्रता केन्द्र (Centre of curvature) :

किसी वक्र के दो निकटस्थ बिन्दुओं पर खीचें गये अभिलम्बों के कटान बिन्दु की सीमावर्ती स्थिति जो कि एक बिन्दु Q के दूसरे बिन्दु P की तरफ अग्रसर होने पर प्राप्त होती है उस वक्र के दूसरे बिन्दु P पर वक्र का वक्रता केन्द्र परिभाषित किया जाता हैं। चित्र 4.1 में C उस वक्र का वक्रता केन्द्र है।

4.2.2 वक्रता त्रिज्या (Radius of curvature) :

जिस बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात करनी है वहाँ से खीचें गये अभिलंब पर Q के P की ओर अग्रसर होने पर Q व P पर के अभिलंबों के कटाव बिन्दु की सीमावर्ती स्थिति की दूरी को वक्रता त्रिज्या कहते हैं।

चित्र 4.1 में CP दूरी वक्रता त्रिज्या को निरुपित करती है सामान्य रूप से वक्रता त्रिज्या ग्रीकवर्णमाला के शब्द ρ से दिखलाई जाती है।

4.2.3 वक्रता (Curvature) :

वक्रता त्रिज्या के व्युत्कम (reciprocal) को वक्र की वक्रता कहते हैं चित्रानुसार यदि CP वक्रता त्रिज्या का नाम है तो $\frac{1}{CP}$ उस बिन्दु P पर वक्रता कहलाती है।

4.2.4 वक्रता वृत्त (Circle of curvature) :

एक ऐसा वृत्त जिसका केन्द्र वक्रता केन्द्र हो व त्रिज्या वक्रता केन्द्र से वक्र के दिये बिन्दु से दूरी हो। चित्र 4.1 में कोई ऐसा वृत्त हो जिसका केन्द्र C व त्रिज्या CP हो वह वक्रता वृत्त कहलायेगा।

4.2.5 वक्रता जीवा (Chord of curvature) :

उपरोक्त वक्रता वृत्त में दिये गये बिन्दु से गुजरने वाली जीवा वक्रता जीवा कहलाती है।

4.2.6 नैज समीकरण (Intrinsic equation) :

वक्र के किसी चाप को हम किसी एक स्थिर बिन्दु से इस प्रकार नापें कि वक्र के एक अन्य बिन्दु तक की उसकी वक्र के सहारे दूरी s हो व इस बिन्दु पर स्पर्श रेखा का x- अक्ष से घड़ी के विपरीत दिशा (anti clockwise) का मध्य कोण ψ हो तो s व ψ के मध्य संबंध को उस वक्र का नैज समीकरण कहा जाता है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. वक्रता वृत्त की किसी जीवा को वक्रता जीवा कहते हैं। सत्य / असत्य
2. वक्रता त्रिज्या को सामान्यत: ..... से निरुपित करते हैं।
   (खाली स्थान की पूर्ति कीजिये)
3. नैज समीकरण में ψ क्या हैं ?

4.3 वक्रता त्रिज्या के सूत्र

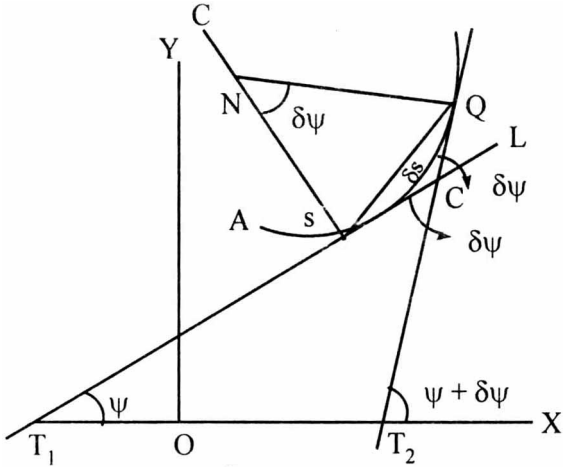
हम अब निर्देशांकों की विभिन्न प्रणालियों के लिए वक्रता त्रिज्या ज्ञात करने के सूत्र ज्ञात करेंगे।

4.3.1 नैज समीकरण के लिये सूत्र

चित्र 4.2 में माना A बिन्दु से वक्र की दूरीयें नापी जाती है। P व Q वक्र पर दो नजदीकी बिन्दु है जिन पर डाली गई स्पर्श रेखाएं PT_1 व PT_2 इस प्रकार हैं कि वे x- अक्ष के घनात्मक दिशा में क्रमश: ψ व $\psi + \delta\psi$ कोण बनाते है। इसके अतिरिक्त दूरी AP = s व AQ = s + δs जिस कारण

वक्र के भाग PQ की लंबाई δs होगी। बिन्दु P व Q पर अभिलंब PN व QN इस प्रकार खीचे गये हैं कि उनका कटाव बिन्दु N हो जो कि Q के P की ओर अग्रसर होने की दशा में एक स्थिर बिन्दु C की ओर अग्रसर होगा जो कि परिभाषा के अनुसार वक्रता केन्द्र होगा। PQ को सरल रेखा से मिलाने पर हमें जीवा PQ प्राप्त होगी।

चित्र 4.2 में PN व QN अभिलंब हैं अत: वे कोण FG = कोण NQG = 90°



चित्र 4.2

इसके अतिरिक्त स्पष्टत: $\angle PNQ = \delta\psi$ व कोण $T_1GT_1 =$ कोण $QGL = \delta\psi$

बिन्दु Q के P की ओर अग्रसर होने की स्थिति में बिन्दु N बिन्दु C की ओर अग्रसर होगा जिससे PC = ρ हो जायेगा। पुन: $\delta s \to 0$ हो तो $\delta\psi \to 0$ होगा।

अब त्रिभुज PNQ में ज्या सूत्र (sine formula) से

$$\frac{PN}{\sin NQP} = \frac{\text{जीवा PQ}}{\sin \delta\psi}$$

अथवा $$\frac{\text{PN}}{\text{जीवा PQ}} = \frac{\sin NQP}{\sin \delta\psi} \qquad \text{.....(1)}$$

हम देख चुके हैं कि यदि $Q \to P$ तब

$$\delta s \to 0, \delta\psi \to O \text{ व } PN \to PC = \rho$$

(1) से

$$\text{PN} = \frac{(\text{जीवा PQ}) \sin \text{NQP}}{\sin\ \delta\psi}$$

Q के P की ओर अग्रसर दोने की दशा में $(Q \to P)$

$$\lim_{\delta s \to 0} PN = \lim_{\substack{\delta s \to 0 \\ \delta\psi \to 0}} \frac{(\text{जीवा PQ}) \sin \text{NQP}}{\sin\ \delta\psi}$$

अथवा $$PC = \rho = \lim_{\substack{\delta\psi \to 0 \\ \delta S \to 0}} \frac{\text{जीवा PQ}}{\delta s} . \frac{\delta s}{\delta\psi} . \frac{\delta s}{\sin \delta\psi} \sin \text{ NOP}$$

अथवा $\rho = \underset{\delta s \to 0}{L\text{im}} \frac{\text{जीवा PQ}}{\delta s} \cdot \lim_{\delta\psi \to 0} \frac{\delta s}{\delta \psi} \lim_{\delta\psi \to \infty} \frac{\delta\psi}{\sin \delta\psi} \lim_{\delta\psi \to \infty} \sin NOP$

$$= 1.\frac{ds}{d\psi}.1.\sin\frac{\pi}{2}$$ ....(2)

चूंकि $\underset{\delta s \to 0}{L\text{im}} \frac{\text{जीवा PQ}}{\delta s} = 1, \quad \lim_{\delta\psi \to 0} \frac{\delta s}{\delta \psi} = \frac{ds}{d\psi}, \lim_{\delta\psi \to 0} \frac{\delta\psi}{\sin \delta\psi} = 1$

तथा $\underset{\delta\psi \to 0}{L\text{im}} \angle NQP \to \frac{\pi}{2}$ चूंकि इस दशा में

$$\angle NQP = \angle NQT_2 - \angle PQT_2 = \frac{\pi}{2} - \angle PQT_2$$

व जब $Q \to P,$ तब $\angle PQT_2 \to 0$

अत: $\underset{\delta\psi \to 0}{L\text{im}} \angle NPQ = \frac{\pi}{2}$

अत: (2) से

$$\rho = \frac{ds}{d\psi}$$

जो कि वक्र के नैज समीकरण के लिये वक्रता त्रिज्या हैं। इसके अतिरिक्त, बिन्दु P पर वक्र की वक्रता $\frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{ds}$ होगी।

4.3.2 कार्त्तीय समीकरण के लिये सूत्र

माना वक्र का कार्त्तीय समीकरण y = f (x) हैं।

अत: $\tan\psi = \frac{dy}{dx}$ ... ... (1)

(1) को s के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\sec^2\psi \frac{d\psi}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).\frac{dx}{ds}$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dx}{ds}$$

अथवा $\left(1+\tan^2\psi\right)\frac{d\psi}{ds} = \frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dx}{ds}$

अथवा $\frac{ds}{d\psi} = \frac{\left(1+\tan^2\psi\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}.\frac{ds}{dx}$

किन्तु इकाई - 3 से हमें ज्ञात है कि

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

अत: समीकरण (1) से

$$\frac{ds}{d\psi} = \rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{1/2}$$

अथवा $$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \qquad \text{.....(2)}$$

जो कि वांछित सूत्र है।

4.3.3 प्राचलिक रूप के समीकरण के लिये सूत्र

माना वक्र का प्राचलिक समीकरण $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ है।

अत: $\frac{dx}{dt} = x' = f_1'(t)$ तथा $\frac{dy}{dt} = y' = f_2'(t)$

अब $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'}{x'}$$

तथा $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{x'}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right).\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{x'y''-x''y'}{x^2}.\frac{1}{x'}$$

$$= \frac{x'y''-x''y'}{x'^3}$$

ρ का मान ज्ञात करने के लिये समीकरण (2) से

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{x'y''-x''y'}{x'^3}} = \frac{\left[(x')^2+(y')^2\right]^{3/2}}{x'^3} \times \frac{x'^3}{(x'y''-x''y')}$$

$$= \frac{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}{(x'y''-x''y')}$$

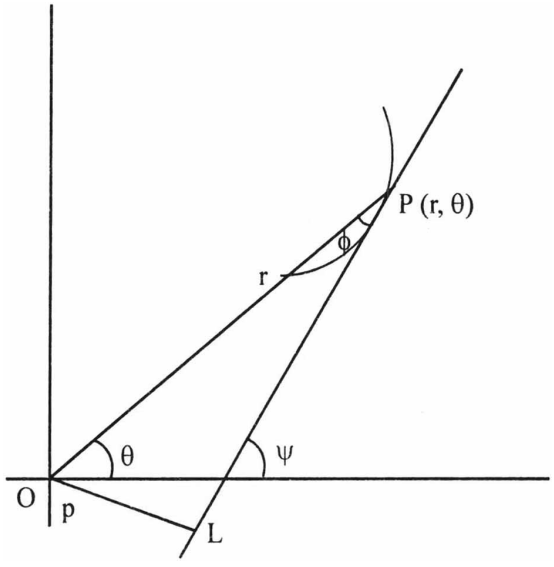
जो कि वांछित सूत्र हैं।

4.3.4 पदिक समीकरणों के लिये सूत्र :

इकाई- 3 में दी गई पदिक समीकरण की परिभाषा के अनुसार माना एक वक्र का पदिक समीकरण $p = f(r)$ है।

अब चित्र 4.3 के अनुसार

$$\psi = \theta + \phi \tag{1}$$



चित्र 4.3

(1) को s के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{ds}$$

$$= \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{dr} \cdot \frac{dr}{ds} \tag{2}$$

इकाई-3 से हमें ज्ञात हैं कि

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}$$

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{d\theta}{dr}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}}$$

$$= \frac{dr/d\theta}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}} = \frac{\frac{dr}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}} = \frac{dr}{ds}$$

तथा $= \sin\phi = \tan\phi\cos\phi = r\frac{d\theta}{dr}.\frac{dr}{ds} = r\frac{d\theta}{ds}$

अतः (2) से

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\sin\phi + \cos\phi\frac{d\phi}{dr}$$

$$= \frac{1}{r}\left[\sin\phi + r\cos\phi\frac{d\phi}{dr}\right] = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\sin\phi)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{dp}{dr} \quad \text{(चित्र 4.3 से } p = r\sin\phi\text{)}$$

अथवा $\rho = r\frac{dr}{dp}$

जो कि पदिक समीकरण के किसी बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या का सूत्र है।

4.3.5 ध्रुवीय समीकरणों के लिये सूत्र :

माना वक्र का ध्रुवी समीकरण

r = f (θ)

...(1)

है। इस वक्र का कोई बिन्दु (r, θ) है व हमें इस बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या का सूत्र ज्ञात करना है। इकाई- 3 से हमें ज्ञात है कि

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \qquad \text{.....(2)}$$

जबकि p ध्रुव से (r, θ) पर स्पर्श रेखा पर लंब की लंबाई है। समीकरण (2) का r के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$-\frac{2}{p^3}\frac{dp}{dr} = -\frac{2}{r^3} - \frac{4}{r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^4}.2\left(\frac{dr}{d\theta}\right).\frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)$$

$$= -\frac{2}{r^3} - \frac{4}{r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{2}{r^4}.\left(\frac{dr}{d\theta}\right).\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dr}$$

$$= -\frac{2}{r^3} - \frac{4}{r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{2}{r^4}\frac{d^2r}{d\theta^2}$$

अथवा $\frac{dp}{dr} = \frac{p^3}{r^3} + \frac{2p^3}{r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{p^3}{r^4}\frac{d^2r}{d\theta^2}$

$$= \frac{p^3}{r^5}\left[r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right]$$

अत:
$$\rho = r\frac{dr}{dp} = r\frac{r^5}{p^3\left[r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right]}$$

$$= \frac{r^6}{\left[r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right]}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}$$

(समीकरण (2) से)

अथवा
$$\rho = \frac{r^6}{\left[r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right]}\frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^6}$$

$$= \frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{\left[r^2+2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right]}$$

यही वक्र (1) का वक्रता त्रिज्या का सूत्र है।

4.3.6 विभिन्न निर्देशांक निकायों के लिए वक्रता त्रिज्या के सूत्र

निर्देशांक निकाय	वक्र का समीकरण	ρ (वक्र की वक्रता त्रिज्या)
कार्तीय	(i) y = f (x) (ii) x = f(y)	(i) $= \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ (ii) उपरोक्त में x y को आपस में परिवर्तित करें।
नैज	s = f (ψ)	$= \frac{ds}{d\psi}$

प्राचलिक	$x = f_1(t), y = f_2(t)$	$= \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{3/2}}{\left[\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}\right]}$

निर्देशांक निकाय	**वक्र का समीकरण**	ρ **(वक्र की वक्रता त्रिज्या)**
पदिक	p = f (r)	$= r\frac{dr}{dp}$
ध्रुवीय	r = f (θ)	$= \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{\left[r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right]}$

4.4 उप-प्रमेय

यहाँ हम कुछ महत्वपूर्ण सूत्र ज्ञात करेंगे जो कि वक्रता त्रिज्या से संबंधित हैं।

4.4.1 वृत्त की वक्रता

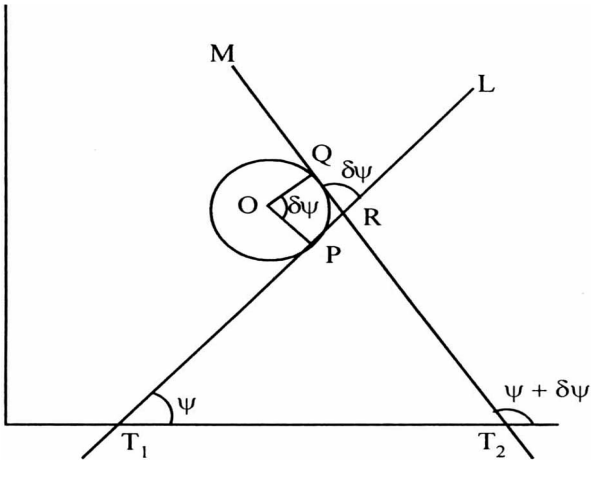
r त्रिज्या वाले वृत्त पर माना P व Q दो बिन्दु है जबकि चाप PQ की लंबाई δs है। इसके अतिरिक्त माना P बिन्दु पर स्पर्श रेखा LPT_1 है व Q पर स्पर्श रेखा MQT_2 है जो x- अक्ष पर घनात्मक दिशा में क्रमश: ψ व $\psi + \delta\psi$ कोण से झुकी हुई है।

स्पष्टतया $\angle T_1RT_2 = \delta\psi = \angle MRL = \delta\psi = POQ$

हम जानते हैं कि

चाप $PQ = \delta s = r\delta\psi$

या $\frac{\delta\psi}{\delta s} = \frac{1}{r}$



चित्र : 4.4

वक्र के बिन्दु P पर वक्रता

$$= \frac{1}{\rho} = \underset{\substack{Q \to P \\ \delta s \to 0}}{Lin} \frac{\delta \psi}{\delta s} = \underset{\delta s \to 0}{Lin} \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

चूंकि किसी वृत्त के लिये r अचर है अर्थात् $\frac{1}{r}$ भी अचर है हम कह सकते हैं कि किसी वृत्त की वक्रता अचर है।

4.4.2 स्पर्शीय ध्रुवीय समीकरण के लिये वक्रता त्रिज्या

आप जानते हैं कि

$$\frac{dr}{ds} = \cos\phi, \rho = \frac{ds}{d\psi} = r\frac{dr}{dp} \text{ व } p = r\sin\varphi$$

अत :
$$\frac{dp}{d\psi} = \frac{dp}{dr}.\frac{dr}{ds}.\frac{ds}{d\psi}$$

$$= \frac{dp}{dr}.\cos\phi.\rho$$

$$= \frac{dp}{dr}.\cos\phi.r\frac{dr}{dp} = r\cos\phi$$

अब
$$\left(r\cos\phi\right)^2 + \left(r\sin\phi\right)^2 = \left(\frac{dp}{d\psi}\right)^2 + p^2$$

अथवा
$$r^2 = p^2 + \left(\frac{dp}{d\psi}\right)^2$$

इस समीकरण को p के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2r\frac{dr}{dp} = 2p + 2\left(\frac{dp}{d\psi}\right).\frac{d}{d\psi}\left(\frac{dp}{d\psi}\right).\frac{d\psi}{dp}$$

$$= 2p + 2\frac{d^2p}{d\psi^2}$$

अथवा
$$\rho = p + \frac{d^2p}{d\psi^2}$$

4.4.3 ध्रुवीय समीकरण के लिए एक और रूप

भाग 4.3.5 में हमने ρ का एक रूप ज्ञात किया था। अब यदि हम $u = \frac{1}{r}$ ले लें तो

$$r = \frac{1}{u} \text{ या } \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}$$

तथा $$\frac{d^2r}{d\theta^2}=\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right)=\frac{2}{u^3}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2-\frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

इन मानों को 4.3.5 के सूत्र में रखने पर

$$\rho=\frac{\left[\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^4}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{\left[\frac{1}{u^2}+2\frac{1}{u^4}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2-\frac{2}{u^4}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{u^3}\frac{d^2u}{d\theta^2}\right]}$$

$$=\frac{\left[u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{u^3\left(u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)}$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. 'a ' त्रिज्या वाले वृत्त की वक्रता..... होगी।

2. y = f (x) वक्र के लिये यदि वक्रता त्रिज्या = $\rho=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^n}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ हो तो n का मान क्या होगा?

उदाहरण 1. वक्र कॉर्डियाइड $s=4a\sin\frac{1}{3}\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)$ के किसी बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या ρ तथा वक्र के शीर्ष से बिन्दु के बीच चाप की लंबाई s हो तो सिद्ध करो कि

$$s^2+9\rho^2=16a^2$$

हल - हमें ज्ञात है कि $\rho=\frac{ds}{d\psi}$ (नैज समीकरण के लिये)

अत: वक्र $s=4a\sin\frac{1}{3}\left(\psi-\pi/2\right)$ (1)

के लिये

$$\frac{ds}{d\psi}=\rho=4a\cos\frac{1}{3}\left(\psi-\pi/2\right)\frac{1}{3}$$

अथवा $3\rho=4a\cos\frac{1}{3}\left(\psi-\pi/2\right)$ (2)

समीकरण (1) के वर्ग में (2) का वर्ग जोड़ने पर

$$s^2+9\rho^2=16a^2\left[\sin^2\frac{1}{3}\left(\psi-\pi/2\right)+\cos^2\frac{1}{3}\left(\psi-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=16a^2$$

यही सिद्ध करना था

उदाहरण 2 : सिद्ध कीजिये कि वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के बिन्दु $\left(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta\right)$ पर वक्रता त्रिज्या $\frac{3a}{2}\sin 2\theta$ होगी

हल : वक्र का प्राचल समीकरण होगा

$$x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$$

अतः $$x' = \frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta$$

$$y' = \frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$$

एवं $$x'' = \frac{d^2x}{d\theta^2} = -3a\left(\cos^3\theta - 2\cos\theta\sin^2\theta\right)$$

$$= 3a\left(2\cos\theta\sin^2\theta - \cos^3\theta\right)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{d\theta^2} = 3a\left(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta\right)$$

आपको ज्ञात है कि

$$\rho = \frac{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}{\left(x'y'' - x''y'\right)}$$

अत: दिये गये वक्र के लिये

$$\rho = \frac{\left(9a^2\cos^4\theta\sin^2\theta + 9a^2\sin^4\theta\cos^2\theta\right)^{3/2}}{\left[-9a^2\cos^2\theta\sin\theta\left(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta\right) - 9a^2\sin^2\theta\cos\theta\left(2\cos\theta\sin^2\theta - \cos^3\theta\right)\right]}$$

$$= \frac{\left(9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\right)^{3/2}}{-9a^2\left[2\sin^2\theta\cos^4\theta - \cos^2\theta\sin^4\theta + 2\sin^4\cos^2\theta - \sin^2\theta - \cos^4\theta\right]}$$

$$= -\frac{\left(9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta\right)^{3/2}}{9a^2\left[\sin^2\theta\cos^4\theta + \sin^4\theta\cos^2\theta\right]} = -\frac{27a^3\sin^3\theta\cos^3\theta}{9a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= -3a\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{2}a\sin 2\theta$$

चूंकि वक्रता त्रिज्या एक लंबाई है अत: हम घनात्मकमान ही लेंगे। अत: दिये गये वक्र की वक्रता त्रिज्या $\frac{3}{2}a\sin^2\theta$ है।

उदाहरण 3 : सिद्ध करो कि वक्र $x^2y = a\left(x^2 + y^2\right)$ के बिन्दु (-2a, 2a) पर वक्रता त्रिज्या 2a है।

हल : इस उदाहरण में अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{2ax - 2xy}{x^2 - 2ay}$ प्राप्त होता है। परन्तु हम देखते हैं कि बिन्दु (-2a, 2a) पर $\frac{dy}{dx}$ के लिये $x^2 - 2ay$ का मान शून्य होता है जिस कारण $\frac{dy}{dx}$ अपरिभाषित है। अत: हम इस उदाहरण के लिये $\frac{dx}{dy}$ का मान ज्ञात करेगें।

अत: $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - 2ay}{2ax - 2xy}$ बिन्दु (-2a, 2a) पर $\frac{dx}{dy} = 0$ .....(1)

अब $\frac{d^2x}{dy^2}$ के लिये

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{\left(2x\frac{dx}{dy} - 2a\right)(2ax - 2xy) - \left(x^2 - 2ay\right)\left(2a\frac{dx}{dy} - 2y\frac{dx}{dy} - 2x\right)}{(2ax - 2xy)^2}$$

अत: $\frac{d^2x}{dy^2}$ का मान (-2a, 2a) पर ज्ञात करने के लिये x = -2a, y = 2a, $\frac{dx}{dy}$ = 0 रखने पर

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{(0 - 2a)\left(-4a^2 + 8a^2\right) - \left(4a^2 - 4a^2\right)(0 - 0 + 4a)}{\left(-4a^2 + 8a^2\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{2a} \quad .....(2)$$

अत: दिये गये वक्र के लिये (1) व (2) से

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2x}{dy^2}}$$

$$= \frac{(1+0)^{3/2}}{-\frac{1}{2a}} = -2a$$

वक्रता त्रिज्या के लिये

$$\rho = 2a$$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 4 : सिद्ध करो कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के लिये $\rho = \frac{a^2b^2}{p^3}$ जहाँ p किसी बिन्दु (x, y) पर वक्रता त्रिज्या है व p बिन्दु (x, y) पर खीचीं गई स्पर्श रेखा पर केन्द्र से डाले गये लंब की लंबाई है।

हल : यहाँ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{.....(1)}$$

अतः $$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

अथवा $$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y} \qquad \text{.....(2)}$$

पुन: $$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y+\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x^2}{y}}{y^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{b^2x^2+a^2y^2}{a^2y^3}$$

$$=-\frac{b^2}{a^4}\cdot\frac{a^2y^2}{y^3}=\frac{b^4}{a^2y^3} \quad \text{(समीकरण (1) से)}$$

अतः $$\rho=\frac{\left[1+\left(-\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}\right)^2\right]^{3/2}}{-\dfrac{b^4}{a^2y^3}}=\frac{\dfrac{\left(b^4x^2+a^4y^2\right)^{3/2}}{a^6y^3}}{-\dfrac{b^4}{a^2y^3}}$$

$$=-\frac{\left(b^4x^2+a^4y^2\right)^{3/2}}{a^4b^4} \qquad \text{.....(3)}$$

पुन : (1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=1$$

व इस स्पर्श रेखा पर (0, 0) से लंब की लंबाई

$$p=\frac{-1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}}}=\frac{a^2b^2}{\sqrt{b^4x^2+a^4y^2}} \qquad \text{.....(4)}$$

$$p^3=\frac{a^6b^6}{\left(b^4x^2+a^4y^2\right)^{3/2}}=\frac{a^2b^2}{\dfrac{\left(b^4x^2+a^4y^2\right)^{3/2}}{a^4b^4}}$$

$$=\frac{a^2b^2}{\rho} \quad \text{(समीकरण (3) से)}$$

अथवा $$\rho=\frac{a^2b^2}{p^3}$$

उदाहरण 5 : सिद्ध करो कि समान कोर्णिक सर्पिल (equiangular spiral) $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ के किसी बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या $\rho = r \cos ec\alpha$ है तथा यह त्रिज्या ध्रुव पर समकोण बनाती है।

हल: दिया हुआ वक्र है $r = ae^{\theta \cot \alpha}$

अत : $$\frac{dr}{d\theta} = ae^{\theta \cot \alpha} \cot \alpha = r \cot \alpha \quad \text{.....(1)}$$

पुन : $$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \cot \alpha . \frac{dr}{d\theta} = r \cot^2 \alpha \quad \text{.....(2)}$$

चूंकि ध्रुवीय समीकरण के लिये

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

अत: (1) व (2) से

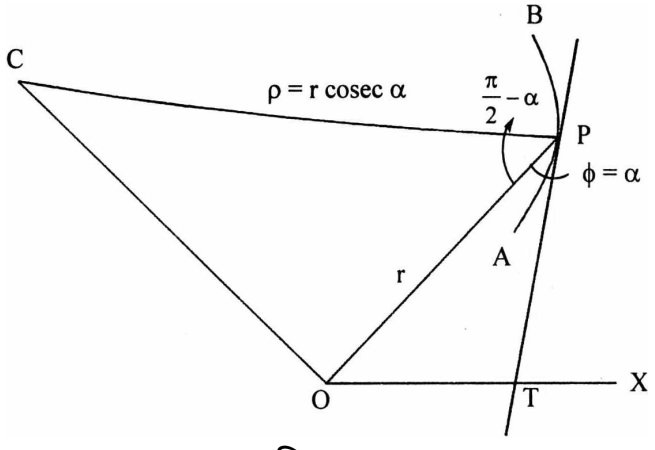
$$\rho = \frac{\left(r^2 + r^2 \cot^2 \alpha \right)^{3/2}}{r^2 + 2r^2 \cot^2 \alpha - r^2 \cot^2 \alpha}$$

$$= \frac{r^3 \cos ec^3 \alpha}{r^2 \cos ec^2 \alpha} = r \cos ec\alpha$$

प्रश्न के दूसरे भाग के लिये चित्र 4.5 से C वक्रता केन्द्र है ρ के लिये व O मूल बिन्दु है। स्पष्टत:

CP = $\rho \quad r \cos ec\alpha$

OP = r



चित्र 4.5

CP रेखा P पर अभिलंब है अर्थात्

$\angle CPT = 90^\circ$ जबकि PT रेखा P बिन्दु पर स्पर्श रेखा है। समान कोर्णिक सर्पिल की परिभाषा से $\phi = \alpha$

अथवा $\angle OPT = \phi = \alpha$

अथवा $\angle CPO = \angle CPT - \angle OPT$

$$= \frac{\pi}{2} - \alpha$$

अब यदिकोण $COP = \beta$ हो तो त्रिभुज OPC में ज्या सूत्र से

$$\frac{PC}{\sin COP} = \frac{OP}{\sin OCP} \qquad \text{.....(3)}$$

परन्तु $\angle OCP = \pi - COP - CPO$

$$= \pi - \beta\left(\pi/2 - \alpha\right) = \frac{\pi}{2} + \alpha - B$$

अत: समीकरण (3) से

$$\sin\beta = \frac{PC}{OP}\sin\left(\pi/2 + \alpha - \beta\right)$$

अथवा $\sin\beta = \frac{r\cos ec\alpha}{r}\cos\left(\alpha - \beta\right)$

अथवा $\sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

अथवा $\cos\alpha\cos\beta = 0$

परन्तु $\cos\alpha \neq 0$ अतः $\cos\beta = 0 \rightarrow \beta = \pi/2$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 6 : $r^3 = 2ap^2$ समीकरण वाले वक्र का उसके किसी बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ वक्र का समीकरण पदिक समीकरण है जिसके लिये

$$\rho = r\frac{dr}{dp}$$

यहाँ $r^3 = 2ap^2$

अत: $3r^2\frac{dr}{dp} = 4ap$

अथवा $r\frac{dr}{dp} = \frac{4}{3}\frac{ap}{r} = \frac{4}{3}\frac{a}{r}.\sqrt{\frac{r^3}{2a}}$ (वक्र के समीकरण से)

$$= \frac{4a}{3r}.r\sqrt{\frac{r}{2a}} = \frac{4a}{3}\sqrt{\frac{r}{2a}}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2ar} \quad \text{उत्तर}$$

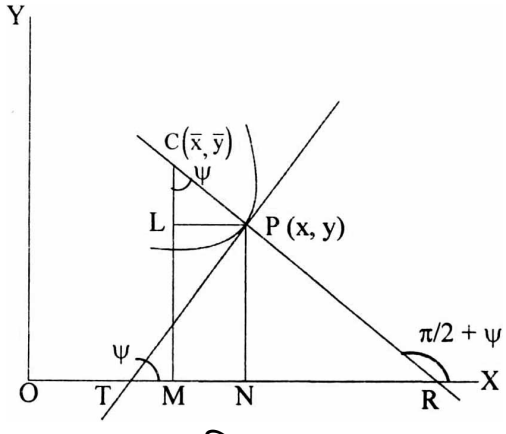
4.5 वक्रता वृत्त व वक्रता केन्द्र

4.5.1 वक्रता केन्द्र के निर्देशांक

यहाँ हम वक्र y = f (x) के रूप में दिये गये समीकरण के लिये वक्र पर स्थित किसी बिन्दु (x, y) पर वक्रता त्रिज्या के लिये वक्रता केन्द्र ज्ञात करेंगे जोकि वक्रता वृत्त का भी केन्द्र है।

P (x, y) पर PC वक्रता त्रिज्या है व C वक्रता केन्द्र है जिसके निर्देशांक माना $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ हैं।

P बिन्दु पर स्पर्श रेखा PT है जो x- अक्ष से घनात्मक दिशा में ψ कोण बनाती है। चूँकि PC, P बिन्दु पर अभिलंब है PC, x-अक्ष से $\frac{\pi}{2}+\psi$ कोण बनायेगा।



चित्र 4.6

रचना के रूप में C से लंब x-अक्ष पर CM व + से PN डाला तथा P से CM पर लंब p1 डाला। इस रचना से $\angle LCP = \psi$

अब चित्र 4.6 के अनुसार

$$\bar{x} = OM = ON - MN$$
$$= ON - LP = \times - CP\sin\psi$$
$$= x - \rho\sin\psi \qquad \text{.....(1)}$$

व $\bar{y} = CM = CL + LM$

$$= CL + PN = y + CP\cos\psi \qquad \text{.....(2)}$$

हमें ज्ञात है कि

$$\rho = \frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''}, \tan\psi = y'$$

$$\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/y'^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

अत:

$$\bar{x} = x - \frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''} \times \frac{y'}{\left(1+y'^2\right)^{1/2}}$$

$$= x - \frac{\left(1+y'^2\right)y'}{y''} \qquad \text{.....(3)}$$

तथा

$$\bar{y} = y + \frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''} \times \frac{1}{\left(1+y'^2\right)^{1/2}}$$

$$= y + \frac{\left(1+y'^2\right)}{y''} \qquad \text{.....(4)}$$

जबकि $y' = \frac{dy}{dx}$ व $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$

अत: वक्रता केन्द्र कें निर्देशांक (3) व (4) से दिये जाते हैं।

4.5.2 वक्रता वृत्त

हमें गत भाग से वक्रता केन्द्र के निर्देशांक $\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$ ज्ञात हैं व वक्रता त्रिज्या ρ है अत: वक्रता वृत्त का समीकरण $\left(x-\bar{x}\right)^2 + \left(y-\bar{y}\right)^2 = \rho^2$ होगा।

उदाहरण 1 : वक्र $y = x^3 + 2x^2 + x + 1$ के बिन्दु (0,1) के लिये वक्रता त्रिज्या, वक्रता केन्द्र तथा वक्रता वृत्त का समीकरण ज्ञात करो।

हल : वक्र $y = x^3 + 2x^2 + x + 1$ के बिन्दु (0,1) के लिये

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,1)} = \left(3x^2 + 4x + 1\right)_{(0,1)} = 1$$

व $$\left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)_{(0,1)} = \left(6x+4\right)_{(0,1)} = 4$$

अत :

वक्रता त्रिज्या

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,1)}^2\right]^{3/2}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(0,1)}} = \frac{\left(1+1\right)^{3/2}}{2^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

वक्रता केन्द्र

$$\bar{x} = 0 - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,1)} \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(0,1)}^2\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(0,1)}}$$

$$= 0 - 1\frac{(1+1)}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = 1 + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{(0,1)}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(0,1)}} = 1 + \frac{1+1}{4} = \frac{3}{2}$$

अत : वक्रता केन्द्र $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ होगा।

वक्रता वृत्त ऐसा, वृत्त जिसका केन्द्र $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ व त्रिज्या $\frac{1}{\sqrt{2}}$ हो, होगा

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

अथवा $x^2 + y^2 + x - 3y + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{1}{2}$

अथवा $x^2 + y^2 + x - 3y + 2 = 0$

4.6 सारांश

इस इकाई में अपने मुख्यत: किसी वक्र की उसके किसी बिन्दु पर वक्रता के बारे में जाना। विभिन्न पीरभाषाऐ इस भाग को सहज करने के उद्देश्य से समझी। इसके अतिरिक्त आपने जाना कि वक्र के विभिन्न रूपों के समीकरणों के लिये उसके किसी बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात करने के क्या सूत्र हैं। इनके अतिरिक्त कार्त्तीय रूप के समीकरण के लिये दिये गये वक्र के किसी बिन्दु पर वक्रता वृत्त का समीकरण वक्रता केन्द्र के निर्देशांकों को भी प्राप्त करने की विधि समझी। इस इकाई में कई उदाहरण भी आपने देखें।

4.7 शब्दावली

वक्रता	Curvature
वक्रता त्रिज्या	Radius of curvature
वक्रता केन्द्र	Centre of curvature
वक्रता वृत्त	Circle of curvature

4.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. असत्य,
2. ρ
3. ψ वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा व x-अक्ष के मध्य घड़ी चलाने की विपरीत दिशा (anti clock wise) में नापा गया कोण है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न. - 2

1. $\frac{1}{a}$ 2. $n=\frac{3}{2}$

4.9 अभ्यास प्रश्न

1. यदि CP,CD किसी दीर्घवृत्त के संयुग्मी अर्धव्यास हों तो सिद्ध करो कि बिन्दु P पर वक्रता त्रिज्या $\frac{(CD)^3}{ab}$ होगी जबकि a व b दीर्घ वृत्त के अर्ध अक्ष हैं।

   (संकेत : $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का कोई बिन्दु हो तो केन्द्र C के लिए CP व CD संयुग्मी अर्धव्यास होने की दशा में D के निर्देशांक $\left[a\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right), b\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right]=(-\sin\theta, b\cos\theta)$ होगें)

2. वक्र $y=c\log\sec\left(\frac{x}{c}\right)$ के बिन्दु (x,y) पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात करो।

   $\left(c\sec\frac{x}{c}\right)$

3. सिद्ध करो कि परवलय $y^2 = 4ax$ के किसी बिन्दु P पर वक्रता त्रिज्या वक्र तथा नियता के मध्य अभिलंब की लंबाई की दुगुनी होती है।

4. पदिक समीकरण $p^2=\frac{r^4}{r^2+a^2}$ वाले वक्र के किसी बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात करो।

   $\left(\rho=\frac{\left(r^2+a^2\right)^{3/2}}{\left(r^2+2a^2\right)}\right)$

5. वक्र $\theta=a^{-1}\left(r^2-a^2\right)^{1/2}-\cos^{-1}(a/r)$ के बिन्दु (r,θ) पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिये।

   $\left(\sqrt{r^2+a^2}\right)$

6. सिद्ध कीजिये कि वक्र $x+y=ax^2+by^2+cx^3$ के लिये मूल बिन्दु पर वक्रता वृत्त $(a+b)\left(x^2+y\right)=2(x+y)$ है।

7. यदि दीर्घवृत्त के एक लघुअक्ष के छोर पर वक्रता केन्द्र इसके दूसरी छोर पर हो तो सिद्ध करो कि दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता $\frac{1}{\sqrt{2}}$ होगी।

8. वक्र $x=a(\theta+\sin\theta), y=a(1-\cos\theta)$ के बिन्दु जिसके लिये $\theta=\pi/3$ हैं वक्रता त्रिज्या ज्ञात करें।

   $\left(2\sqrt{3}a\right)$

इकाई 5 : आंशिक अवकलन (Partial Differentiation)

इकाई की रूपरेखा

5.0 उद्देश्य

5.1 प्रस्तावना

5.2 आंशिक अवकल गुणांक

5.3 उच्चक्रम के आंशिक अवकलज

5.3.1 आंशिक अवकलजों का क्रम विनिमय

5.4 समघात फलन

5.4.1 परिभाषा

5.4.2 वैकल्पिक परिभाषा

5.5 समघात फलनों पर आयलर का प्रमेय

5.5.1 उपप्रमेय

5.6 संयुक्त फलनों के अवकलन का श्रृंखला नियम

5.6.1 संयुक्त फलन

5.6.2 संपूर्ण अवकल गुणांक

5.7 अस्पष्ट फलनों का अवकलन

5.7.1 परिभाषा

5.7.2 अवकलन

5.8 सारांश

5.9 शब्दावली

5.10 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

5.11 अभ्यासप्रश्न

5.0 उद्देश्य

इस इकाई से आप जानेंगे कि कोई फलन एक से अधिक स्वतंत्र चर राशियों पर निर्भर कर सकता है। और आप यह भी जानेगे कि किसी एक अथवा अनेक चर राशियों के एक साथ अथवा अलग-अलग परिवर्तन से वह फलन किस प्रकार परिवर्तित होता है। इस इकाई में हम ऐसे फलनों के परिवर्तन की दर अवकलन के द्वारा ज्ञात करेंगे। हम ऐसे फलन को किसी भी चर राशि के सापेक्ष अवकलन करेंगे तो हम आंशिक अवकलन प्राप्त करेंगे। इस इकाई में आंशिक अवकलन से संबंधित आयलर का प्रमेय ज्ञात करेंगे जों कि चर राशियों के समघात फलन के लिये विशेष सूत्र देता है। श्रृंखला नियम की जानकारी के अतिरिक्त हम अस्पष्ट फलनों का अवकलन भी जानेंगे।

5.1 प्रस्तावना

अभी तक आपने अपने अध्ययन में फलनों के बारे में पढ़ा है जो कि किसी एक चर राशि पर आश्रित होते है यथा $y = f(x)$ में y ऐसा फलन है जो कि एक स्वतंत्र चर राशि x पर आश्रित है अथवा

हम कह सकते हैं कि y एक ऐसी आश्रित चर राशि (dependent variable) है जो कि एक स्वतंत्र चर राशि (independent variable) x पर आश्रित है। परन्तु इसके अतिरिक्त हम देखें तो उदाहरणत: एक कमरे के फर्श का क्षेत्रफल A उस कमरे की लंबाई l व चौड़ाई b के गुणनफल के बराबर है अर्थात् A = l x b

इस उदाहरण में लंबाई व चौड़ाई स्वतंत्र रूप से परिवर्तित की जा सकती है। वे अलग - अलग अथवा एक साथ परिवर्तित की जा सकती है जिस कारण क्षेत्रफल A निश्चित रूप से परिवर्तित होगा (सिवाय उस स्थिति के जबकि l व b इस प्रकार चुने जायें कि उनका गुणनफल A हो) अत: हम कह सकते है कि A एक आश्रित फलन है जो कि l व b स्वतंत्र चरों पर आश्रित है। इस स्थिति में A = f (l, b) अर्थात् A, l व b दो चर राशियों का फलन है। इसी प्रकार यदि उस कमरे की ऊँचाई h हो तो कमरे का आयतन $v = l \times b \times h$ होगा। यहाँ आयतन l, b व h का आश्रित फलन होगा। अर्थात् v, l, b व h तीन चर राशियों का फलन है अर्थात् v = g (l, b, h)

व्यापक रूप में कोई एक आश्रित फलन कई स्वतंत्र चर राशियों पर आश्रित हो सकता है यथा

$$y = f\left(x_1, x_2, ...x_n\right)$$

जबकि $x_1, x_2, ...x_n$ स्वतंत्र चर राशियाँ हैं।

उपरोक्त सभी स्थितियों में किसी भी स्वतंत्र चर राशि के परिवर्तन होने पर आश्रित फलन के परिवर्तन की दर आश्रित फलन का केवल इसी चर राशि के सापेक्ष अवकलन होगा। चूँकि यहाँ स्वतंत्र चर राशि समस्त स्वतंत्र चर राशियों का अंश मात्र है, हम इस प्रकार के अवकलन को आंशिक अवकलन कहते है। इस इकाई में हम इस प्रकार के अवकलन को आंशिक अवकलन कहते हैं। इस इकाई में हम आंशिक अवकलन को $\frac{d}{dx}$ से निरुपित न कर अलग प्रकार से निरुपित करेंगे। हम द्वितीय अवकलन आदि भी प्राप्त करेंगे।

5.2 आंशिक अवकल गुणांक

माना z दो स्वतंत्र चरों x व y का फलन है जिससे हम z = f [(x, y) से निरुपित कर सकते हैं। अब जैसा हमने प्रस्तावना में देखा, हम x में बहुत छोटा परिवर्तन δx करते हैं व y को अपरिवर्तित रहने देते हैं, इस परिवर्तन से z में भी माना छोटा परिवर्तन δz होता है। इस प्रकार इस नई स्थिति में

$$z + \delta z = f\left(x + \delta x, y\right)$$

अत : $\delta z = f\left(x + \delta x, y\right) - f\left(x, y\right)$

अथवा $$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{f\left(x + \delta x, y\right) - f\left(x, y\right)}{\delta x} \qquad .....(1)$$

अब δx के शून्य की ओर अग्रसर होने की स्थिति में उपरोक्त (1) की सीमा लेने पर

$$\underset{\delta x \to 0}{Lim} \frac{\delta z}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{Lim} \frac{f\left(x + \delta x, y\right) - f\left(x, y\right)}{\delta x} \qquad .....(2)$$

z का x के सापेक्ष अवकलन है जबकि y को अचर रखा गया है। (2) में प्राप्त अवकलन को हम $\frac{\partial z}{\partial x}$ अथवा $f_x = (x, y)$ से निरुपित करते हैं अर्थात्

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \underset{\delta x \to 0}{Lim} \frac{\delta z}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{Lim} \frac{f(x+\delta x, y) - f(x, y)}{\delta x} \quad \text{.....(3)}$$

इसी प्रकार जब x को अचर रख y के सापेक्ष अवकलन किया जाता है तो

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \underset{\delta y \to 0}{Lim} \frac{\delta z}{\delta y} = \underset{\delta y \to 0}{Lim} \frac{f(x, y+\delta y) - f(x, y)}{\delta y} = f_y(x, y)$$

व इसमें x अचर माना जाता है।

टिप्पणी :

1. व्यापक रूप में हम यदि n स्वतंत्र चर राशियों का फलन लें व उसे किसी एक चर राशि के सापेक्ष अवकलित किया जाना हो तो इस चर राशि के अतिरिक्त प्रत्येक चर राशि को अचर माना जाता है।
2. उपरोक्त (3) व (4) में आपने देखा कि आंशिक अवकल गुणांक में हम $\frac{dz}{dx}$ व $\frac{dz}{dy}$ के स्थान पर क्रमश: $\frac{\partial z}{\partial x}$ व $\frac{\partial z}{\partial y}$ का प्रयोग करते हैं व इन्हें डेल्टा z बाई डेल्टा x अथवा डेल्टा z बाई डेल्टा y पढ़ते हैं।

उदाहरण 1 : निम्न फलनों के समस्त प्रथम आंशिक अवकलज ज्ञात करो

(i) u = x sin y + y sin x

(ii) $u = e^{axyz}$

हल :

(i) यहाँ u, x व y का फलन है अत: हमें दो प्रथम आंशिक अवकलज प्राप्त होंगे। x के सापेक्ष अवकलन करने पर y को अचर माना जायेगा व y के सापेक्ष अवकलन करने पर x को अचर माना जायेगा।

अत: $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin y + y \cos x = u_x$

व $\frac{\partial u}{\partial y} = x \cos y + \sin x = u_y$

(ii) यहाँ

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = e^{axyz}(ayz) = ayze^{axyz} = auyz$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = e^{axyz}(azx) = azxe^{axyz} = auzx$$

$$u_z = \frac{\partial u}{\partial z} = e^{axyz}(axy) = axye^{axyz} = auxy$$

उदाहरण 2 : यदि z (x + y) = $x^2 + y^2$ तो सिद्ध करो कि

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=4\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

हल : यहाँ $z=\frac{x^2+y^2}{x+y}$

अतः $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x(x+y)-\left(x^2+y^2\right)}{(x+y)^2}=\frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2}$

इसी प्रकार $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^2+2xy-x^2}{(x+y)^2}$

अतः $\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2}-\frac{y^2+2xy-x^2}{(x+y)^2}\right)^2$

$$=\left(\frac{2\left(x^2-y^2\right)}{(x+y)^2}\right)^2=\left(\frac{2(x-y)}{(x+y)}\right)^2$$

$$=\frac{4(x-y)^2}{(x+y)^2} \qquad \text{.....(1)}$$

तथा $4\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=4\left(1-\frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2}-\frac{y^2+2xy-x^2}{(x+y)^2}\right)$

$$=4\left(\frac{x^2+2xy+y^2-x^2-2xy+y^2-y^2-2xy+x^2}{(x+y)^2}\right)$$

$$=4\left(\frac{x^2-2xy+y^2}{(x+y)^2}\right)=\frac{4(x-y)^2}{(x+y)^2} \qquad \text{.....(2)}$$

चूंकि (1) व (2) समान है अत: अभीष्ट हल हम प्राप्त कर सके।

5.3 उच्चक्रम के आंशिक अवकलज

पिछले भाग मे हमने दो अथवा अधिक स्वतंत्र चर राशियों के फलन का प्रथम आंशिक अवकलज $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$ आदि ज्ञात किये। ये प्रथम आंशिक अवकलज जोकि स्वतंत्र चर राशियों के फलन के रूप में हो सकते है फिर से इन चर राशियों के सापेक्ष अवकलित किये जा सकते हैं। जैसे $u=x^2y^3z^2$ हो तो u कि प्रथम अवकलज $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ व $\frac{\partial u}{\partial z}$ ज्ञात किये जा सकते हैं जो कि $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy^3z^2,\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y^2z^2,\frac{\partial u}{\partial z}=2x^2y^3z$ होंगे अब हम देखते हैं कि ये तीनों अवकलज भी

x, y, z के फलन हैं अत: इन्हें फिर से अवकलित किया जा सकता है इन चर राशियों के सापेक्ष। अर्थात्

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ आदि।}$$

ये दिये हुए फलन u के द्वितीय आंशिक फलन हैं व निम्न प्रकार से क्रमश: निरुपित किये जा सकते हैं

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = u_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = u_{zx}; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = u_{zy}; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = u_{xz}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = u_{yz}; \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u_{zz}$$

सामान्यत: यदि सीमा विद्यमान हो तो उदाहरण: द्वितीय अवकलन निम्न प्रकार से परिभाषित होता है

$$u_{xx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{u_x(x+\delta x, y, z) - u_x(x, y, z)}{\delta x}$$

व

$$u_{xy} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{u_y(x+\delta x, y, z) - u_y(x, y, z)}{\delta x}$$

5.3.1 आंशिक अवकलजों का क्रमविनिमेय

यह एक महत्वपूर्ण गुणधर्म है जिसमें यदि u = f (x, y) के प्रथम आंशिक अवकलज सतत हों तो

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

अथवा $u_{xy} = u_{yx}$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. यदि f (x, y, z) $= e^{xyz}$ हो तो $\frac{\partial f}{\partial y}$ का मान होगा.....।

2. $u = e^{x+y+z}$ के लिये $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} =$ ..... होगा।

3. यदि f (x, y, z) $= \sin\left(x^2 y\right) + \cos\left(xyz\right)$ हो तो $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ का मान ज्ञात कीजिये।

उदाहरण 1 : यदि $u = \log\left(y \sin x + x \sin y\right)$ हो तो सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

हल : यहाँ $u = \log\left(y\sin x + x\sin y\right)$

अतः $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\left(y\cos x + \sin y\right)}{\left(y\sin x + x\sin y\right)} \quad \text{.....(1)}$$

व $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\left(\sin x + x\cos y\right)}{\left(y\sin x + x\sin y\right)} \quad \text{.....(2)}$$

अब $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sin x + x\cos y}{y\sin x + x\sin y}\right] \text{ (समीकरण (2) से)}$$

$$= \frac{\left(\sin y - y\cos y\right)\left(x\cos x - \sin x\right)}{\left(y\sin x + x\sin y\right)^2}$$

व $$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y\cos x + \sin y}{y\sin x + x\sin y}\right] \text{ (समीकरण (1) से)}$$

$$= \frac{\left(\sin y - y\cos y\right)\left(x\cos x - \sin x\right)}{\left(y\sin x + x\sin y\right)^2}$$

$\therefore$ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

उदाहरण 2 : यदि $u = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{n}{2}}$ तो प्रदर्शित करो कि

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = n\left(n+1\right)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

हल : यहाँ $u = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{n}{2}}$

अत: $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{n}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{n}{2}-1} 2x = nx\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

अब $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

अथवा $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[nx\left(x^2 + y^2 + 2^2\right)^{\frac{n}{2}-1}\right]$$

$$= n.\frac{\partial}{\partial x}\left[x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-1} \right]$$

$$= n\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-1} + x.\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-2}.2x \right]$$

$$= n\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-1} + (n-2)x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-2} \right]$$

$$= n\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-2}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)+(n-2)x^2\right]$$

चूंकि u राशियों x, y, व z में सम मित है अत:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-2}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)+(n-2)y^2\right]$$

व $$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = n\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-2}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)+(n-2)z^2\right]$$

अत: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= n\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-2}\left[3\left(x^2+y^2+z^2\right)+(n-2)\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]$$

$$= n\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-2}(n+1)\left(x^2+y^2+z^2\right)$$

$$= n(n+1)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

यही वांछित हल है।

उदाहरण 3 : यदि $u = \log\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$ तो सिद्ध कीजिये कि

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = -\frac{9}{(x+y+z)^2}$$

हल : यहाँ $u = \log\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x^2-3yz}{\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)}$$

चूंकि u, x, y व z में सममित है अत:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2-3xz}{\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)}$$

तथा $$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3z^2-3xy}{\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)}$$

अतः $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3x^2-3yz+3y^2-3xz+3z^2-3xy}{\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)}$

$=\frac{3\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)}{\left(x+y+z\right)\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz\right)}$

$=\frac{3}{\left(x+y+z\right)}$

अब $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)u$

$=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$

अथवा $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{3}{x+y+z}\right)$

$=3\left[-\frac{1}{(x+y+z)^2}-\frac{1}{(x+y+z)^2}-\frac{1}{(x+y+z)^2}\right]$

$=-\frac{9}{(x+y+z)^2}$

उदाहरण 4 : यदि $x^x y^y z^z = c$ तो प्रदर्शित कीजिये कि x = y = z होने की दशा में

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\left(x\log ex\right)^{-1}$$

हल : यहाँ z, x व y का फलन है।

अत : सम्बन्ध $x^x y^y z^z = c$ का लघुगुणक लेने पर

x log x + y log y + z log z = log c

अथवा z log z = log c - x log x - y log y

अब दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन लेने पर

$$\left(\log z+z.\frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}=-\left(x.\frac{1}{x}+\log x\right)$$

अथवा $\frac{\partial z}{\partial x}=-\left(\frac{1+\log x}{1+\log z}\right)$

अब $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1+\log x}{1+\log z}\right)$

$=\frac{(1+\log x)}{(1+\log z)^2}\cdot\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}$

$$= -\frac{1}{z}\frac{(1+\log x)}{(1+\log z)^2}\frac{(1+\log y)}{(1+\log z)}\left(\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1+\log y}{1+\log z}\right)$$

$$= -\frac{1}{z}\frac{(1+\log x)(1+\log y)}{(1+\log z)^3}$$

अब यदि x = y = z हो तो

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x}\frac{(1+\log x)^2}{(1+\log x)^3}$$

$$= -\frac{1}{x}\frac{1}{(1+\log x)} = -\frac{1}{x}.\frac{1}{\log ex} \qquad (\because \log e = 1)$$

$$= -(x \log ex)^{-1}$$

उदाहरण 5 : यदि $\theta = t^n e^{-r^2/4t}$ हो तो n का वह मान ज्ञात कीजिये जिसके लिये

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r}\right) = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

हल : $\theta = t^n e^{-r^2/4t}$ जबकि θ दो स्वतंत्र चरों t व r का फलन है

अत: $$\frac{\partial \theta}{\partial t} = nt^{n-1}e^{-r^2/4t} + t^n e^{-r^2/4t}\frac{r^2}{4t^2}$$

$$= nt^{n-1}e^{-r^2/4t} + \frac{r^2}{4}t^{n-2}e^{-r^2/4t} \qquad \text{.....(1)}$$

तथा $$\frac{\partial \theta}{\partial t} = t^n e^{-r^2/4t}\left(-\frac{2r}{4t}\right) = -\frac{1}{2}t^{n-1}e^{-r^2/4t}$$

$$r^2\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{1}{2}t^{n-1}r^3 e^{-r^2/4t}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \theta}{\partial r}\right) = -\frac{1}{2}t^{n-1}\left[3r^2 e^{-r^2/4t} + r^3 e^{-r^2/4t}.\left(-\frac{2r}{4t}\right)\right]$$

$$= -\frac{3}{2}t^{n-1}r^2 e^{-r^2/4t} + \frac{1}{4}t^{n-2}r^4 e^{-r^2/4t}$$

$$\therefore \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \theta}{\partial r}\right) = -\frac{3}{2}t^{n-1}e^{-r^2/4t} + \frac{1}{4}t^{n-2}r^2 e^{-r^2/4t} \qquad \text{.....(2)}$$

अत: (1) व (2) को बराबर रखने पर

$$nt^{n-1}e^{-r^2/4t} + \frac{r^2}{4}t^{n-2}e^{-r^2/4t}$$

$$= -\frac{3}{2}t^{n-1}e^{-r^2/4t} + \frac{r^2}{4}t^{n-2}e^{\frac{-r^2}{4t}}$$

अथवा $$n = -\frac{3}{2}$$

5.4 समघात फलन (Homogeneous functions)

5.4.1 परिभाषा

दो अथवा दो से अधिक स्वतंत्र चरों का फलन f यदि ऐसा व्यंजक हो जिसके प्रत्येक पद में स्वतंत्र चरों की घातों का योग सदैव समान हो तो वह व्यंजक समघात फलन कहलाता है।

उदाहरणत: हम कह सकते हैं कि $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz = f(x, y, z)$ एक ऐसा व्यंजक है जिसके प्रत्येक पद में x,y व z की घातों का योग 3 है अत: $f(x, y, z)$ यहाँ एक समघात फलन है।

यदि व्यंजक के हर पद में स्वतंत्र चरों की घातों का समान योग n (माना) हो तो वह व्यंजक n घात का समघात फलन कहलाता है। उपरोक्त उदाहरण में दिया गया व्यंजक 3 घात का समघात फलन है।

यदि दो चर राशियों का एक फलन हम निम्न रूप में ले

$$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + ... + a_n y^n \quad ..... (1)$$

तो यह व्यंजक दो चर राशियों का n घात का व्यापक समघात फलन होगा।

5.4.2 वैकल्पिक परिभाषा

भाग (5.4.1) के समीकरण (1) का हम निम्न रूप में प्रदर्शित कर सकते हैं

$$f(x, y) = x^n \left[a_0 + a_1 \left(\frac{y}{x}\right) + a^2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 + ...a_n \left(\frac{y}{x}\right)^n \right]$$

$$= x^n F\left(y/x\right)$$

क्योंकि कोष्टक के अन्दर की प्रत्येक संख्या में $\left(\frac{y}{x}\right)$ की कोई घात प्राप्य है। y व x स्वतंत्र रूप से इस कोष्टक में नहीं हैं। यह स्थिति केवल समघात व्यंजकों में ही प्राप्त हो सकती है। अत : दूसरे रूप में यदि कोई व्यंजक समीकरण (2) के रूप में लिखा जा सकता हो तो वह फलन समघाती फलन होगा जिसकी घात बाहरी x की घात से जानी जाती है।

इसी प्रकार समीकरण (1) को हम निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं :

$$f(x, y) = y^n \left[a_0 \left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1 \left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + a^2 \left(\frac{x}{y}\right)^{n-2} + ... + a_n \right]$$

$$= y^n \phi\left(\frac{x}{y}\right) \quad .....(3)$$

यह भी समघाती फलन होगा।

इस परिभाषा से हम कई चर राशियों वाले व्यंजक, जो कि समघाती फलन हो, को भी परिभाषित कर सकते हैं।

$$f\left(x_1, x_2, ...x_r, ...x_m\right) = x_r^n F\left(\frac{x_1}{x_r}, \frac{x_2}{x_r}, ...\frac{x_m}{x_r}\right)$$

यह m चर राशियों वाला x घात का व्यापक समघाती फलन है। (5.4.1) भाग में दिये हुए उदाहरण को देखें तो

$$f\left(x, y, z\right) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$$

$$= \quad x^3\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 + \left(\frac{z}{x}\right)^3 + 3\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{z}{x}\right)\right] = x^3\phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

अत: यह एक 3 घात का समघाती फलन है।

5.5 समघात फलनों पर आयलर का प्रमेय (Euler ′ s theorem on homogeneous functions)

यदि f (x, y) दो चर राशियों x व y की n घात का समघाती फलन हो तो

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$$

प्रमाण: यहाँ f (x, y) n घात का समघाती फलन है

अत: $f\left(x, y\right) = x^n F\left(\frac{y}{x}\right)$

इस समीकरण को x व y के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial f}{\partial x} = nx^{n-1}F\left(\frac{y}{x}\right) + x^n F'\left(\frac{y}{x}\right).\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= nx^{n-1}F\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-2}yF'\left(\frac{y}{x}\right)$$

व $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^n F'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} = x^{n-1}F'\left(\frac{y}{x}\right)$

जबकि F ′ का अर्थ है F का अवकलज।

अत: $\quad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nx^n F\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-1}yF'\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1}yF'\left(\frac{y}{x}\right)$

$$= nx^n F\left(\frac{y}{x}\right) = nf$$

यही दो चर राशियों वाले समघात फलन के लिये आयलर प्रमेय है। व्यापक रूप में, यदि $f\left(x_1, x_2, ...x_m\right)$ चरों का $x_1, x_2, ...x_m$ n घाती समघात फलन हो तो आयलर प्रमेय का रूप होगा

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + ... + x_m\frac{\partial f}{\partial x_m} = nf$$

5.5.1 उप-प्रमेय (Corollary)

यदि f (x, y) दो चर राशियों x व y की n घात का समघाती फलन हो तो

(i) $$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(n-1)\frac{\partial f}{\partial x}$$

(ii) $$x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(n-1)\frac{\partial f}{\partial y}$$

(iii) $$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=n(n-1)f$$

प्रमाण : आयलर प्रमेय से दिये हुए फलन f के लिये

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf \qquad \text{.....(1)}$$

(i) समीकरण (1) के दोनों पक्षों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=n\frac{\partial f}{\partial x}$$

अथवा $$x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(n-1)\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{.....(2)}$$

(ii) समीकरण (1) के दोनो पक्षों को y के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial f}{\partial y}=n\frac{\partial f}{\partial y}$$

अथवा $$x\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(n-1)\frac{\partial f}{\partial y}$$

अथवा $$x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(n-1)\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{.....(3)}$$

(iii) समीकरण (2) को x से व (3) को y से गुणा कर उनका योग करने पर

$$\left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)+\left(xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=(n-1)\left[x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

अथवा $$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(n-1).nf$$

(समीकरण (1) से)

उदाहरण 1 : फलन $f(x,y)=\dfrac{x^{1/4}+y^{1/4}}{x^{1/5}+y^{1/5}}$ लिये आयलर के प्रमेय का सत्यापन कीजिये।

हल : सर्वप्रथम हम देखेंगे कि क्या यह फलन एक समघात फलन है व यदि है तो इसकी घात क्या है?

यहाँ $$f(x,y)=\frac{x^{1/4}+y^{1/4}}{x^{1/5}+y^{1/5}}=\frac{x^{1/4}\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^{1/4}\right)}{x^{1/5}\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^{1/5}\right)}=x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}\frac{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right]}{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{5}}\right]}$$

$$=x^{\frac{1}{20}}F\left(\frac{y}{x}\right)$$

अत: दिया हुआ फलन एक समघात फलन है व उसकी घात $\frac{1}{20}$ है। इस फलन के लिये आयलर फलन होग

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{20}f \qquad \text{.....(1)}$$

हमें इस नतीजे को सत्यापित करना है। सत्यापित करने के लिये

$$x\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\frac{1}{4}x^{-3/4}\left(x^{1/5}+y^{1/5}\right)-\frac{1}{5}\times^{-4/5}\left(x^{1/4}+y^{1/4}\right)}{\left(x^{1/5}+y^{1/5}\right)^2}$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\frac{1}{4}x^{1/4}\left(x^{1/5}+y^{1/5}\right)-\frac{1}{5}x^{1/5}\left(x^{1/4}+y^{1/4}\right)}{\left(x^{1/5}+y^{1/5}\right)^2} \qquad \text{.....(2)}$$

चूंकि f (x, y) एक सममित फलन है x व y में अत:

$$y\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\frac{1}{4}y^{1/4}\left(x^{1/5}+y^{1/5}\right)-\frac{1}{5}y^{1/5}\left(x^{1/4}+y^{1/4}\right)}{\left(x^{1/5}+y^{1/5}\right)^2} \qquad \text{.....(3)}$$

समीकरण (2) व (3) को जोड़ने पर

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\frac{1}{4}\left(x^{1/4}+y^{1/4}\right)\left(x^{1/5}+y^{1/5}\right)-\frac{1}{5}\left(x^{1/4}+y^{1/4}\right)\left(x^{1/5}+y^{1/5}\right)}{\left(x^{1/5}+y^{1/5}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{20}\frac{\left(x^{1/4}+y^{1/4}\right)}{\left(x^{1/5}+y^{1/5}\right)}=\frac{1}{20}f$$

जो कि समीकरण (1) को सत्यापित करता है।

उदाहरण 2 : यदि $u = \sin^{-1}\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$ तो सिद्ध करो कि

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

हल : यहाँ $\sin u = \frac{x^2+y^2}{x+y} = z$ (माना)

अब $$z = \frac{x^2+y^2}{x+y} = \frac{x^2\left(1+\left(y/x\right)^2\right)}{x\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)\right)} = xF\left(y/x\right)$$

अत : z एक 1 घात का समघाती फलन है। इसके लिये आयलर के प्रमेय से

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

अथवा $$x\frac{\partial}{\partial x}(\sin u) + y\frac{\partial}{\partial y}(\sin u) = \sin u$$

अथवा $$x\cos u\frac{\partial u}{\partial x} + y\cos u\frac{\partial u}{\partial y} = \sin u$$

अत : $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$ यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 3 : यदि $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$ तो सिद्ध करो कि

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin 2u\left(1-4\sin^2 u\right)$$

हल : यहाँ $\tan u = x^2\frac{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^3\right)}{\left(1+\left(y/x\right)\right)} = x^2F\left(y/x\right) = z$

अत: आयलर प्रमेय से

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

अथवा $$x\frac{\partial}{\partial x}(\tan u) + y\frac{\partial}{\partial y}(\tan u) = 2\tan u$$

अथवा $$x\sec^2 u\frac{\partial u}{\partial x} + y\sec^2 u\frac{\partial u}{\partial y} = 2\tan u$$

अथवा $$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2\tan u\cos^2 u = \sin 2u \qquad \text{.....(1)}$$

समीकरण (1) को क्रमश : x व y के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\cos 2u\frac{\partial u}{\partial x} \qquad .....(2)$$

व $$x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\cos 2u\frac{\partial u}{\partial y} \qquad .....(3)$$

अब (2) को x से व (3) को y से गुणाकर जोड़ने पर

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(2\cos 2u-1\right)\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$=\sin 2u\left(1-4\sin^2 u\right)$ (समीकरण (1) व त्रिकोणमिति से) यही सिद्ध करना था।

5.6 संयुक्त फलनों के अवकलन का श्रृंखला नियम

5.6.1 संयुक्त फलन (Composite function)

यदि कोई आश्रित फलन दो या दो से अधिक ऐसी चर राशियों का फलन हो जो स्वयं किसी एक अन्य चर राशि के फलन हों तो वहां आश्रित फलन संयुक्त फलन कहलाता है। उदाहरणत: यदि u =f(x, y) दो चर राशियों x व y का फलन है तथा x व y दोनों किसी एक चर राशि t के इस प्रकार फलन हैं कि $\times=\phi(t)$ व $y=\psi(t)$, इस स्थिति में u एकल स्वतंत्र चर t का संयुक्त फलन कहलाता है।

इसके अतिरिक्त यदि यह आश्रित फलन दो अथवा दो से अधिक ऐसी चर राशियों का फलन हो जो स्वयं किन्हीं अन्य दो अथवा दो से अधिक चर राशियों के फलन हों तों भी यह आश्रित फलन संयुक्त फलन कहलाता है। उदाहरणत: यदि u = f (x, y) व $x=\theta_1(t_1,t_2)$ व $\theta_2(t_1,t_2)$, इस स्थिति में u स्वतंत्र चरों t_1 व t_2 का संयुक्त फलन है।

5.6.2 संपूर्ण अवकल गुणांक (Total differential coefficient)

यदि u = f (x, y) व $x=\theta(t)$ व $y=\psi(t)$ हो तो अन्तत: u मात्र एक चर राशि t का फलन होगा व हम u का t के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कर सकते हैं। यह अवकलन $\frac{du}{dt}$ से निरूपित किया जाता है व u का t के सापेक्ष संपूर्ण अवकल गुणांक कहा जाता है जो u के x व y के सापेक्ष आंशिक अवकलनों से भिन्न दिखाने के लिये प्रयुक्त होता है।

हम अब इस दो चर राशियों के फलन x व y के लिये अवकलन का सूत्र स्थापित करेंगे।

यहाँ u = f (x, y) व, $x=\theta(t)$ $y=\psi(t)$, अब हम t में बहुत छोटा परिवर्तन δt करते है जिससे t परिवर्तित होकर $t+\delta t$ हो जाये व इस परिवर्तन से x हो जायेगा $x+\delta x, y$ होगा $y+\delta y$ व परिणाम स्वरूप u होगा $u+\delta u$

अत: $u+\delta u=f\left(x+\delta x, y+\delta y\right)$

अथवा $\delta u=f\left(\times x+\delta x, y+\delta y\right)-f\left(x,y\right)$

अथवा, परिभाषा के अनुसार

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta u}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x,y)}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \left[\frac{f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x, y+\delta y)}{\delta t} + \frac{f(x, y+\delta y) - f(x,y)}{\delta t} \right]$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \left[\frac{f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x, y+\delta y)}{\delta \times} \cdot \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{f(x, y+\delta y) - f(x,y)}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta t} \right]$$

चूंकि δt के शून्य की ओर अग्रसर होने पर δx व δy भी शून्य की ओर अग्रसर होंगे।

अत: $$\frac{du}{dt} = \left[\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x, y+\delta y)}{\delta x} \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x}{\delta t} \right.$$

$$\left. + \lim_{\delta y \to 0} \frac{f(x, y+\delta y) - f(x,y)}{\delta y} \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta y}{\delta t} \right] \qquad \text{.....(1)}$$

अब चूंकि $\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x, y+\delta y)}{\delta x}$ में $(y+\delta y)$ अचर है व परिवर्तन सिर्फ x में होता है अत: यह व्यंजक $\frac{\partial f}{\partial x}$ के रूप में स्वीकार्य होगा व $\lim_{\delta y \to 0} \frac{f(x, y+\delta y) - f(x,y)}{\delta y}$ परिभाषा के अनुसार $\frac{\partial f}{\partial y}$ होगा। इस प्रकार (1) से

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad \text{.....(2)}$$

यही अवकलज का श्रृंखला नियम (Chain rule) है। इसके व्यापक रूप के लिये यदि $u = f(x_1, x_2, ...x_n)$ हो व

$x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t) ....x_n = \phi_n(t)$ सब t के फलन हों तो जिस कारण u मात्र t का एकल फलन हो तो उस स्थिति में

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

उपरोक्त से निगमन

भाग 5.6.2 में दिये गये फलन u में यदि चर राशियाँ x व y मात्र एक स्वतंत्र चर राशि t के फलन न होकर दो स्वतंत्र चर राशियों t_1 व t_2 के फलन हों उस स्थिति में निम्न निगमन होगा।

यदि $u = f(x,y)\, x = \phi(t_1, t_2)$ व $y = \psi(t_1, t_2)$

इस स्थिति में u, x व y के समस्त अवकलज आंशिक होगे व परिणाम निम्न होंगे

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_1}$$

तथा $$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t_2}$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. आयलर प्रमेय के सत्य होने के लिये फलन का..... होना आवश्यक है।

2. फलन $z = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ एक..... फलन है जिसका घात... है।

3. $u = 3x^2yz + 5xy^2z + 4z^4$ के लिये आयलर का प्रमेय होगा।

उदाहरण 1 : यदि $u = F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$ हो तो श्रृंखला नियम से

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}$$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल : माना $\frac{x}{y} = t_1, \frac{y}{z} = t_2, \frac{z}{x} = t_3$, -अत: $u = F(t_1, t_2, t_3)$ जबकि t_1, t_2, t_3 तीनों x, y व z के फलन हैं।

श्रृंखला नियम से

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t_1}.\frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t_2}.\frac{\partial t_2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t_3}.\frac{\partial t_3}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t_1}.\frac{1}{y} + \frac{\partial u}{\partial t_2}.0 + \frac{\partial u}{\partial t_3}.\left(-\frac{z}{x^2}\right)$$

अथवा $$x\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial t_1} - \frac{z}{x}\frac{\partial u}{\partial t_3}$$

इसी प्रकार $$y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{z}\frac{\partial u}{\partial t_2} - \frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial t_1}$$

व $$z\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{x}\frac{\partial u}{\partial t_3} - \frac{y}{z}\frac{\partial u}{\partial t_2}$$

उपरोक्त तीनों का योग करने पर

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

उदाहरण 2 : कात्तीय समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ का ध्रुवीय रूपान्तरण कीजिये।

हल : यहाँ समीकरण (x, y) में दिया हुआ है जिसे हम (r, θ) में परिवर्तित करना चाहते हैं। हमें ज्ञात है कि $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ दोनों में एक संबंध है।

इस संबंध से

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{व} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{.....(1)}$$

चूंकि r व θ दोनों x व y के फलन हैं अत: श्रृंखला नियम से

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad \text{.....(2)}$$

तथा $$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \theta}.\frac{\partial \theta}{\partial y}$$ .....(3)

अब समीकरण (1) से

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{r\sin\theta}{r}=\sin\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{r\sin\theta}{r^2}=-\frac{\sin\theta}{r}$$

व $$\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{r\cos\theta}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r}$$

अत: (2) व (3) से क्रमश :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)u$$ .....(4)

व $$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$=\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)u$$ .....(5)

(4) व (5) से $\frac{\partial}{\partial x}$ व $\frac{\partial}{\partial y}$ को u पर आपरेटर की तरह लेने पर

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)-\frac{\sin\theta}{r}\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$=\cos\theta\left[\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial \theta}\right]$$

$$-\frac{\sin\theta}{r}\left[\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial \theta\partial r}-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right]$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 y}{\partial r\partial \theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta^2}$$ .....(6)

इसी प्रकार

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

$$=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

$$=\sin\theta\left[\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\right]$$

$$+\frac{\cos\theta}{r}\left[\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right]$$

$$=\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}$$

$$+\frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \qquad \text{.....(7)}$$

अब (6) व (7) का योग करने पर

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

अत: समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ का परिवर्तित रूप होगा

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

उदाहरण 3 : सिद्ध करो कि यदि $x=\xi\cos\alpha-\eta\sin\alpha$ व $y=\xi\sin\alpha+\eta\cos\alpha$ हों तो

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}$ जबकि α एक अचर राशि है।

हल : दिये हुए सम्बन्ध से x व y दोनों ξ व η के फलन हैं, अत:

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial\xi}$$

व $$\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial\eta}$$

यहाँ $$\frac{\partial x}{\partial\xi}=\cos\alpha,\frac{\partial x}{\partial\eta}=-\sin\alpha;\frac{\partial y}{\partial\xi}=\sin\alpha,\frac{\partial y}{\partial\eta}=\cos\alpha$$

अतः $$\frac{\partial u}{\partial\xi}=\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)u$$

व $$\frac{\partial u}{\partial\eta}=-\sin\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial y}=\left(-\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\alpha\frac{\partial}{\partial y}\right)u$$

अतः पिछले उदाहरण की तरह

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \left(\cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\cos\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \quad \cos^2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin\alpha\cos\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin^2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

.....(1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \left(-\sin\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos\alpha \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\sin\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \cos\alpha \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= \sin^2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin\alpha\cos\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} + \cos^2\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{.....(2)}$$

अत : (1) व (2) का योग करने पर

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

यही सिद्ध करना था।

5.7 अस्पष्ट फलनों का अवकलन

5.7.1 परिभाषा :

ऐसा समीकरण $f(x, y) = 0$ जिसमें हम x अथवा y को स्पष्ट रूप क्रमश :y अथवा x के फलन के रूप में हल न कर सकें अस्पष्ट फलन कहलाता है।

5.7.2 अवकलन :

उपरोक्त परिभाषा से स्पष्टतया y चर राशि मात्र x का फलन हो सकता है। अत :y का x के सापेक्ष अवकलन संपूर्ण अवकलन होगा। यहाँ हम f(x,y) को x का संयुक्त फलन मान सकते हैं। अब यदि समीकरण f (x,y) = c का अवकलन ज्ञात करना हो तो संयुक्त फलन के रूप में f का x के सापेक्ष संपूर्ण अवकलन गुणांक होगा

$$\frac{df}{dx} = \quad \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dx}$$

यहीं यह आवश्यक है कि $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$

दिये हुए समीकरण f(x,y)=c से

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dc}{dx} = 0$$

अतः $\quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dx} = 0$

अथवा $\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0\right)$

इस प्रकार हम अस्पष्ट फलन का अवकलन ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 1 : समीकरण $x^3 + y^3 - 3$ axy=0 से $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें।

हल : यहाँ f(x,y)= $x^3 + y^3 - 3$ axy=0

अतः $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3ay$ व $\frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 - 3ax \quad (\neq 0)$

अतः $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$

उदाहरण 2 : यदि $x^y + y^x = c$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिये।

हल : यहाँ $f(x, y) = x^y + y^y = c$

अत : $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} + y^y \log_e y$ व $\frac{\partial f}{\partial x} = x^y \log_e x + xy^{x-1} (\neq 0)$

अत : $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{yx^{y-1} + y^x \log y}{x^y \log_e^x + \times y^{x-1}}$

5.8 सारांश

इस इकाई में आपने किसी दो अथवा अधिक चर राशियों के फलन का आंशिक अवकलन निकालना जाना। किसी एक चर राशि के सापेक्ष अवकलन करने पर बाकी चर राशियों को अचर माना जाता है। आपने देखा कि किसी दो घात के अवकलन में विभिन्न चर राशियों के क्रम से अंतर नहीं किया जाता कि पहले किस राशि के सापेक्ष अवकलन किया गया है अर्थात् $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ आदि।

आपने आयलर का प्रमेय जाना व उस पर आधारित समस्याओं का हल निकाला जाना। श्रंखला नियम व उसके संपूर्ण अवकलन ज्ञात करना भी जाना। अस्पष्ट फलन क्या है व उसका अवकलन किस प्रकार ज्ञात किया जाता है जाना।

5.9 शब्दावली

आंशिक	Partial
आयलर का प्रमेय	Euler's theorem
समघाती फलन	Homogeneous fuction
संयुक्त फलन	Composite function
अस्पष्ट फलन	Implicit function
श्रंखला नियम	Chain rule

5.10 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. xze^{xyz} 2. e^{x+y+z}

3. $2x\cos(x^2y) - 2x^3y\sin(x^2y) - z\sin(xyz) - xyz^2\cos(xyz)$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. समघात 2. समाघात , शून्य

3. $x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 4u$

5.11 अभ्यास प्रश्न

1. सिद्ध कीजिये कि $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

   (i) $u = x\sin y + y\sin x$ (ii) $u = x^y$

2. यदि $f = \theta(y + ax) + \Psi(y - ax)$ तो सिद्ध कीजिये कि $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

3. यदि $x(x, y) = \log(x^2 + y^2) + \tan^{-1} y / x$ तो सिद्ध कीजिये कि

   $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

4. यदि x= e^{xyz} तो सिद्ध कीजिये कि

   $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz}$

5. यदि u= log $\left(\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right)$ तो सिद्ध करो कि

   $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 1$

6. यदि x = f (r) जहाँ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ तो सिद्ध करो कि

   $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$

7. यदि $f(x, y) = 0$ व $\theta(x, z) = 0$ तो सिद्ध कीजिये कि

   $\frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z}$

8. z दो चरों x व y का फलन है तथा

   $x = e^u + e^{-v}, x = e^{-u} - e^v$, हो तो सिद्ध कीजिये कि

   $\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$

इकाई 6 : उच्चिष्ट व निम्निष्ट (Maxima and Minima)

इकाई की रूपरेखा

6.0 उद्देश्य

6.1 प्रस्तावना

6.2 पीरभाषाऐं

6.2.1 उच्चिष्टमान

6.2.2 निमिष्टमान

6.2.3 दो चरों वाले फलनों के उच्चिष्ट व निम्निष्ट

6.2.4 चरम मान

6.2.5 वृद्धिमान फलन

6.2.6 ह्रासमान फलन

6.3 चरम मान के लिए आवश्यक प्रतिबंध

6.4 एक चर राशि के फलन के उच्चिष्टमान तथा निम्निष्ट मान के लिये पर्याप्त प्रतिबंध

6.5 एक चर राशि वाले फलन का उच्चिष्ट व निम्निष्ट ज्ञात करने की क्रिया विधि

6.6 उच्चिष्ट व निम्निष्ट के गुणघर्म

6.7 दो चरों वाले फलनों के उच्चिष्ट व निम्निष्ट मानों की कसौटी

6.7.1 आवश्यक प्रतिबंध

6.7.1 पर्याप्त प्रतिबंध

6.8 अनुप्रयोग

6.9 सारांश

6.10 शब्दावली

6.11 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

6.12 अभ्यास प्रश्न

6.0 उद्देश्य

इस इकाई में आप किसी सतत् फलन का एक समीपवर्ती क्षेत्र में उच्चतम व न्यूनतम मान ज्ञात करने की विधि सीखेंगे। यह फलन एक अथवा दो चर राशियों का हो सकता है। उच्चतम मान किसी छोटे से निकटवर्ती क्षेत्र में उच्चिष्ट मान व छोटे निकटवर्ती क्षेत्र में न्यूनतम मान निम्निष्ट मान कहलायेगा। यह दोनों मान किसी फलन का स्थानीय गुणधर्म होता है।

6.1 प्रस्तावना

किसी फलन के रेखा चित्र में हम कई उतार चढ़ाव देखते हैं। अर्थात् वक्र के बिन्दु पथ में बिन्दु चढ़ाई की ओर जाते हुए उस बिन्दु स्थिति तक पहुँचता है जो कि अपने आसपास की अन्य बिन्दु स्थितियों में उच्चतम है। यही उच्चतम स्थिति किसी वक्र के उच्चिष्ट मान को दर्शाती है। इसी प्रकार उतार के समय जब बिन्दु ऐसी स्थिति पर पहुँचता है जहाँ वह आसपास की अन्य बिन्दु स्थितियों के सापेक्ष

निम्नतम हो तो इस स्थिति में फलन का मान निम्निष्ट होता है। इस इकाई में आप इन विशेष स्थितियों को कलन की विधि से प्राप्त करना जानेगे। आप देखेंगे कि उच्चिष्ट व निम्निष्ट किसी फलन का स्थानीय गुण धर्म है अर्थात् एक फलन के एक से अधिक उच्चिष्ट व निम्निष्ट हो सकते हैं।
फलन के इस घर्म के अतिरिक्त भी आप देखेगें कि किस प्रकार कई आम जीवन की समस्याओं को गणितीय रूप देकर उन समस्याओं का हल प्राप्त कर सकते हैं।

6.2 परिभाषाऐं

6.2.1 उच्चिष्टमान :

किसी फलन y = f (x) का उसके किसी बिन्दु x = a पर मान f(a) उच्चिष्ट मान कहलाता है यदि इस बिन्दु के निकटवर्ती क्षेत्र में x के प्रत्येक मान के लिये f(x) का मान f(a) से कम हो।
गणितीय रूप में, एक अत्यधिक छोटी घनात्मक संख्या δ ज्ञात की जा सके कि अन्तराल $a-\delta<\times<a+\delta(\times\neq a)$ में प्रत्येक x के लिये f (a) > f (x) हो। इस स्थिति में f (a) f(x) का उच्चिष्ट मान है।

6.2.2 नम्निष्ट मान :

किसी फलन y = f (x) का उसके किसी बिन्दु x=a पर मान f (a) निम्निष्ट मान कहलाता है यदि बिन्दु के निकटवर्ती क्षेत्र में x के प्रत्येक मान के लिये f (x) मान f (a) से अधिक हो। गणितीय रूप में, एक अत्यधिक छोटी घनात्मक संख्या δ ज्ञात की जा सके कि अन्तराल $a-\delta<\times<a+\delta(x\neq a)$ में प्रत्येक x के लिये f (a) < f (x) हो। इस स्थिति में f (a) , f (x) का निमनिष्ट मान है।

6.2.3 दो चरों वाले फलनों के उच्चिष्ट एवं निम्निष्ट :

यदि z= f(x,y) दो स्वतंत्र चरों x व y का ऐसा फलन है जो x = a , y = b के निकटवर्ती सभी मानों के लिए सतत् व पीरमित है तो f (a,b) z का उच्चिष्ट मान है जबकि h व k के घन अथवा ऋण मानों, जो कि अत्यधिक छोटे है, के लिये

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)<0$$

इसी प्रकार z का निम्ननिष्ट मान f (a , b) होता है यदि x= a,y=b के निकटवर्ती सभी मानों के लिए z सतत् व परिमित हो व h व k इस प्रकार हों कि उनकी घन अथवा ऋण मानों, जो कि अत्यधिक छोटे हैं, के लिये

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)>0$$

6.2.4 चरम मान :

फलन के उच्चिष्ट अथवा निम्निष्ट मान फलन के चरम मान (extreme value) कहलाते हैं।

6.2.5 वृद्धिमान फलन :

यदि किसी अन्तराल (α, β) में फलन f (x) का मान x के बढ़ने के साथ -साथ बड़े तो वह फलन (α, β) में वृद्धिमान फलन कहलाता है।

6.2.6 ह्रासमान फलन :

यदि किसी अन्तराल (α, β) में फलन f (x) का मान x के बढ़ने के साथ -साथ घटे तो वह फलन (α, β), में ह्रासमान फलन कहलाता है।

6.3 चरममान के लिये आवश्यक प्रतिबंध

यह प्रतिबंध हम एक प्रमेय द्वारा सिद्ध करेंगे।

6.3.1 प्रमेय :

यदि f(x) एक अवकलनीय फलन है तो f(x) का चरम मान f(a) होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध f'(a)=0 है।

उपपत्ति : माना f (a) , f (x) का ऐसा चरम मान है जो कि उच्चिष्ट है। अत : पीरभाषानुसार अल्पसंख्या h > 0 अथवा h > 0 के लिए एक ऐसी छोटी घनात्मक संख्या δ है जिसके लिये

f (a+h)< f (a), $(a+h) \in (a-\delta, a+\delta)$

(i) यदि h<0 तो

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0 \qquad \text{.....(i)}$$

अब यदि h शून्य की ओर प्रवृत्त हो तो

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \le 0 \qquad \text{..... (2)}$$

अथवा $f'(a) \le 0$

(ii) यदि h<0 तो

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0 \qquad \text{.....(3)}$$

अब $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \ge 0$

अथवा $f'(a) \ge 0$ .....(4)

चूँकि दे रखा है कि f(x) अवकलनीय है अत : परिभाषा के अनुसार

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

अत : (2) व (4) से $f'(a) = 0$

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि यदि f(a) ,f(x) का निम्निष्ट मान है तो भी f ' (a) =0 हो सकता है।

अत : x = a पर फलन f(x) के उच्चिष्ट अथवा निम्निष्ट होने के लिये आवश्यक प्रतिबन्ध (necessary condition) f ' (a) =0 हे।

टिप्पणी : f ' (a) = 0 उच्चिष्ट अथवा निम्निष्ट होने के लिये f ' (a) = 0 पर्याप्त प्रतिबंध नहीं है। उदाहरणार्थ यदि f (x) =x^3 हो तो x = 0 पर f ' (0) =0 है, परन्तु

$$x > 0, f(x) > 0 \rightarrow f(x) > f(0) \text{ तथा } x < 0, f(x) < 0 \rightarrow f(x) < f(0)$$

अर्थात् f (0) न तो उच्चिष्ट न ही निम्निष्ट।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. किसी फलन का उच्चिष्ट मान सदैव उस फलन के उच्चतम मान के बराबर होता है। (सत्य / असत्य)
2. किसी फलन f(x) के किसी बिन्दु x=a पर निमिष्ट होने के लिये क्या आवश्यक प्रतिबंध होता है?

6.4 एक चर राशि के फलन के उच्चिष्ट तथा निम्निष्ट मान के लिये पर्याप्त प्रतिबंध

प्रकथन (Statement)

यदि फलन f(x) का किसी बिन्दु x = a के निकटवर्ती क्षेत्र में टेलर के प्रमेय से प्रसार संभव हो व f ' (a) हो तो

(i) x=a पर f(x) का मान उच्चिष्ट होगा यदि f''(0)<0

(ii) x = a पर f(x) का मान निम्निष्ट होगा यदि f'' (0) > 0 अब यदि f '' (a) =0 तो व्यापक रूप में

$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = ...f^{n-1}(a) = 0$ तथा $f^n(a) \neq 0$ तब उच्चिष्ट अथवा निमष्टि के लिये n सम होना चाहिये व उस स्थिति में $f(x)$ उच्चिष्ट होगा यदि $f^n(a) < 0$ व निम्ननिष्ट होगा यदि $f^n(a) > 0$

6.5 एक चर राशि वाले फलन का उच्चिष्ट व निम्निष्ट ज्ञात करने की क्रिया विधि

(i) फलन को $f(x)$ मानिये व $f'(x)$ ज्ञात कीजिये।

(ii) $f'(x) = 0$ रखकर इस समीकरण के हल ज्ञात कीजिये; माना ये a_1, a_2..... है अर्थात् यहाँ चरम बिन्दु हो सकते हैं।

(iii) $f''(x)$ निकाल कर उसमें $x = a_1, a_2$.....प्रतिस्थापित करें।

(iv) x के जिन मानों के लिये $f''(x) < 0$ होगा वहाँ उच्चिष्ट होगा व जिन मानों के लिये हैं $f''(x) > 0$ होगा वहाँ निम्निष्ट होगा।

(v) यदि कुछ मानों के लिये $f''(x) = 0$ हो तो आगे के अवकलज ज्ञात करेंगे और जब तक इन मानों के लिये $f^n(x) \neq 0$ हो हम अवकलज करते जायेंगे।

(vi) अब यदि n विषय हो तो $f(x)$ का कोई चरम मान नहीं होगा।

(vii) यदि n समसंख्या हो तो जिन मानों के लिये $f^n(x) < 0, f(x)$ उच्चिष्ट होगा व जिन मानों के लिये $f^n(x) > 0, f(x)$ निम्निष्ट होगा।

6.6 उच्चिष्ट व निम्निष्ट के गुणधर्म

(i) उच्चिष्ट व निम्निष्ट किसी फलन का स्थानीय गुणधर्म है।

(ii) उच्चिष्ट व निम्निष्ट एकान्तर क्रम में आते हैं।

(iii) $f(x)$ के दो समान मानों के बीच कम से कम एक उच्चिष्ट अथवा निम्निष्ट अवश्य होगा जबकि $f(x)$ एक अचर फलन न हो।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ का उच्चिष्ट तथा निमिष्ट मान ज्ञात कीजिये।
2. फलन $f(x) = 7$ का कोई उच्चिष्ट अथवा निम्निष्ट नहीं होगा। (सत्य 7 असत्य)
3. किसी फलन में क्या दो निमिष्ट लगातार आ सकते हैं?

उदाहरण 1 : निम्न फलनों का उच्चिष्ट तथा निम्निष्ट (यदि हों तो) ज्ञात कीजिये

(i) $\sin x + \cos 2x$ (ii) $x + \sin 2x$

हल : (i) $f(x) = \sin x + \cos 2x \ \therefore f'(x) = \cos x - 2\sin 2x$

रखिये $f'(x) = 0 = \cos x - 4\sin x \cos x$

अथवा $\cos x(1 - 4\sin x) = 0$

अथवा $\cos x = 0$ अथीत् $x = \pi/2, 3\pi/2$

व $\sin x = 1/4$ अर्थात् $x = \sin^{-1} 1/4$

अब $f''(x) = -\sin x - 4\cos 2x$

स्पष्टत : $x = \pi/2,$ पर $3\pi/2$ अत : $f''(x) > 0$ व $3\pi/2$ पर $f(x)$ निम्निष्ट है

व $x = \sin^{-1} 1/4$ पर $f''(x) < 0$ अत : $x = \sin^{-1} 1/4$ पर $f(x)$ उच्चिष्ट है

(ii) $f(x) = x + \sin 2x \ \therefore f'(x) = 1 + 2\cos 2x$

अब $f'(x) = 0 = 1 + 2\cos 2x$

$\therefore \cos 2x = -1/2, 2x = \dfrac{2\pi}{3}$ व $\dfrac{4\pi}{3}$

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$$

अब $f''(x) = -4\sin 2x$

अत : $x = \pi/3,$ पर $f''(x) < 0$ अत : $x = \pi/3,$ पर उच्चिष्ट है

व $x = 2\pi/3$ पर $f''(x) > 0$ अत : $x = 2\pi/3$ पर निम्निष्ट है

उदाहरण 2 : θ के किस मान के लिये $\sin^p \theta \cos^q \theta$ अधिकतम प्राप्त करता है।

हल : यहाँ $y = f(\theta) = \sin^p \theta \cos^q \theta$

दोनों ओर का लघुगुणक लेने पर

$$\log y = p\log\sin\theta + q\log\cos\theta = z \text{ (माना)}$$

अब यदि y अधिकतम अथवा न्यूनतम होगा log y भी वैसा ही होगा

अत : $\frac{dz}{d\theta} = p\cot\theta - q\tan\theta$

अब उच्चिष्ट अथवा निम्निष्ट के लिये

$$\frac{dz}{d\theta} = p\cot\theta - q\tan\theta = 0$$

अथवा $\tan^2\theta = \frac{p}{q}$

अथवा $\theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{p}{q}}$

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} = -p\cos ec^2\theta - q\sec^2\theta$$

$$= -p\left(1+\cot^2\theta\right) - q\left(1+\tan^2\theta\right)$$

$$= -p - p.\frac{q}{p} - q - q.\frac{q}{p} = -2\left(p+q\right)$$

अतः $\frac{d^2z}{d\theta^2} = -2\left(p+q\right) < 0$ (जबकि $\left(p+q\right) > 0$)

अतः $\theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{p}{q}}$ पर फलन का मान अधिकतम होगा।

उदाहरण 3 : दर्शाइये कि $f\left(x\right) = \left(3-x\right)e^{2x} - 4xe^x - x$ के लिए x=0 पर न तो उच्चिष्ट है न निम्निष्ट।

हल : यहाँ $f\left(x\right) = \left(3-x\right)e^{2x} - 4xe^x - x$

$$f'\left(x\right) = -e^{2x} + 2\left(3-x\right)e^{2x} - 4e^x - 4xe^x - 1$$

$$= \left(5-2x\right)e^{2x} - 4\left(1+x\right)e^x - 1$$

$$f''\left(x\right) = -2e^{2x} + 2\left(5-2x\right)e^{2x} - 4e^x - 4\left(1+x\right)e^x$$

$$= \left(8-4x\right)e^{2x} - \left(8+4x\right)e^x$$

अत : $f''\left(0\right) = 0$

पुनः $f'''\left(x\right) = -4e^{2x} + 2\left(8-4x\right)e^{2x} - 4e^x - \left(8+4x\right)e^x$

$$= \left(12-8x\right)e^{2x} - \left(12+4x\right)e^x$$

अतः $f'''\left(x\right) = 0$

पुनः $f^{iv}\left(x\right) = -8e^{2x} + 2\left(12-8x\right)e^{2x} - 4e^x - \left(12+4x\right)e^x$

$$= \left(16-16x\right)e^{2x} - \left(16+4x\right)e^x$$

अतः $f^{iv}\left(0\right) = 0$

पुनः $f^{v}(x) = -16e^{2x} + 2(16-16x)e^{2x} - 4e^{x} - (16+4x)e^{x}$

$= (16-32x)e^{2x} - (20+4x)e^{x}$

अत : $f^{v}(0) = -4 \neq 0$ अर्थात् 5वाँ अवकलज $\times = 0$ पर शून्य नहीं है।

अत : 5 के विषम संख्या होने के कारण $\times = 0$ पर न तो उचिष्ट है न निम्निष्ट।

उदाहरण 4 : सिद्ध कीजिये कि $\left(\frac{1}{x}\right)^{x}$ का उचिष्ट मान $e^{1/e}$ है।

हल: $y = f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{x}$; $\therefore \log y = -x\log x$

$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\left[x\frac{1}{x} + \log x\right] = -(1+\log x)$

$= -\log(ex)$

अर्थात् $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\log(ex)$ अथवा

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$ रखने पर $-y\log(ex) = 0 \rightarrow ex = \rightarrow x = 1/e$

अत : फलन का चरम बिन्दु x= 1/e पर है।

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\log(ex)\frac{dy}{dx} - y.\frac{e}{ex}$

अब $\frac{dy}{dx} = -y\log(ex)$

$= -\log(ex)\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}$

अत : $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=1/e} = -\left(-\frac{y}{x}\right)_{x=1/e} < 0$ (चूँकि $x > 0, y = f(x) > 0$

अत : $x = \frac{1}{e}$ पर $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{x}$ उच्चिष्ट है व इसका उच्चिष्ट मान $e^{1/e}$ होगा।

6.7 दो चरों वाले फलनों के उच्चिष्ट व निम्निष्ट मानों की कसौटी

6.7.1 आवश्यक प्रतिबन्ध

किसी फलन $f(x,y)$ के $x = a, y = b$ पर $f(a,b)$ के चरम मान होने का आवश्यक फलन है।

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x=a,y=b)} = 0, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x=a,y=b)}$$

6.7.2 पर्याप्त प्रतिबन्ध

फलन $f(x,y)$ के $x = a, y = b$ पर चरम मान होने की स्थिति में यदि यह माना जाये कि

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{(x=a,y=b)} = r \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{(x=a,y=b)} = s \text{ व } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(x=a,y=b)} = t$$

तो यदि

(i) $rt - s^2 > 0$ तथा $r < 0$ हो तो $f(a,b), f(x,y)$ का एक उच्चिष्ट मान है।

(ii) $rt - s^2 > 0$ तथा $r > 0$ हो तो $f(a,b), f(x,y)$ का एक निमिष्ट मान है।

(iii) $rt - s^2 < 0$ हो तो $f(a,b), f(x,y)$ का चरम मान नहीं है।

(iv) $rt - s^2 = 0$ हो तो यह स्थिति संदिग्न हागी व आगे ओर जांच की आवश्यकता है।

उदाहरण 1 : यदि $f(x,y) = 2(x-y)^2 - x^4 - y^4$ हो तो संदिग्ध स्थितियाँ छोड़कर इसका उचिष्ट वा अथवा निम्निष्ट मान ज्ञात कीजिये।

हल : यहाँ $\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x-y) - 4x^3 = 0$ .....(1)

व $\frac{\partial f}{\partial x} = -4(x-y) - 4y^3 = 0$ .....(2)

इन समीकरणों (1) व (2) के हल $(x=0, y=0)\left(x=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}\right)$ तथा $\left(x=-\sqrt{2}, y=\sqrt{2}\right)$ होंग

अब $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 - 12x^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 - 12y^2$

अतः (i) $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ के लिए

$r = -20, \quad s = -4, \quad t = -20$

$\therefore \quad rt - s^2 = 400 - 16 = 384 > 0$ व $r = -20 < 0$

अतः $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ पर उच्चिष्ट होगा

(ii) $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ के लिये

$r = -20, \quad s = -4, \quad t = -20$

$\therefore \quad rt - s^2 = 400 - 16 = 384 > 0$ व $r = -20 < 0$

अतः $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ भी उच्चिष्ट होगा।

इसके अतिरिक्त $(0,0)$ पर $rt - s^2 = 0$ अत : यह एक संदिग्ध स्थिति है। (i) व (ii) से $f(x)$ का उच्चिष्ट मान $f\left(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}\right) = 8$ होगा।

उदाहरण 2 : फलन $f(x,y) = \sin x . \sin y . \sin(x+y)$ के उच्चिष्ट व निम्निष्ट की विवेचना कीजिये जबकि $0 < x, y < \pi$

हल : यहाँ $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin y\left[\cos x \sin(x+y) + \sin x \cos(x+y)\right]$

$= \sin y \sin(2x+y)$

तथा इसी प्रकार, $\frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \sin(x+2y)$

चरम बिन्दु के लिये $\sin y \sin(2x+y) = 0$ .....(1)

व $\sin x \sin(x+2y) = 0$ .....(2)

(1) व (2) से $\sin x \neq 0, \sin y \neq 0$ क्योंकि $0 < x, y < \pi$

अतः $2x+y=\pi$ व $x+2y=\pi$ $(x, y > 0)$

हल करने पर $x = \pi/3,$ $y = \pi/3$ एक चरम बिन्दु है।

अब $r = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)} = \left[2\sin y \cos(2x+y)\right]_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)} = -\sqrt{3}$

$S = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)} = \left[\cos y \sin(2x+y) + \sin y \cos(2x+y)\right]_{\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)}$

$= \left[\sin 2(x+y)\right]_{(\pi/3,\pi/3)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$t = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{(\pi/3,\pi/3)} = \left[2\sin x \cos(x+2y)\right]_{(\pi/3,\pi/3)} = -\sqrt{3}$

अतः $rt - s^2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} > 0$ व $r = -\sqrt{3} < 0$

अतः $(\pi/3, \pi/3)$ पर f (x,y) का उच्चिष्ट है व इसका मान $\sin \pi/3 . \sin \pi/3 . \sin \pi/3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ होगा।

उदाहरण 3 : प्रदर्शित कीजिये कि फलन $u(x,y) = \times y + a^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ का निम्निष्ट मान $3a^2$

हल : यहाँ $u(x,y) = xy + a^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

$\therefore$ $\frac{\partial u}{\partial x} = y - \frac{a^3}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 y = a^3$

तथा $\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{a^3}{y^2} = 0 \rightarrow xy^2 = a^3$

उपरोक्त को हल करने पर $x = y = a$

अब $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2a^3}{x^3},$ $r = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(a,a)} = 2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 \qquad s = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{(a,a)} = 1$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2a^3}{y^3,} \qquad t = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{(a,a)} = 2$$

अत: $rt - s^2 = 4 - 1 = 3 > 0$ पर $r = 2 > 0$

अतः (a,a) पर फलन u निम्निष्ट है व इसका मान $a^2 + a^3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right) = a^2 + 2a^2 = 3a^2$ होगा।

6.8 अनुप्रयोग

उच्चिष्ट व निम्निष्ट की कई समस्याएं ज्यामिति, ठोस ज्यामिति आदि में फलन के उपयोग से हल की जाती हैं। इनमें क्षेत्रफल, परिमाप, पृष्ठ व धारिता आदि की समस्याएं अत्यधिक उपयोगी है।

6.8.1 कुछ महत्त्वपूर्ण सूत्र

(i) r त्रिज्या वाले गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^2$ व पृष्ठ $= 4\pi r^2$

(ii) लम्बवृत्तीय बेलन ,जिसकी ऊँचाई h व आधार की त्रिज्या r है के लिये, आयतन $= \pi r^2 h,$ वक्र पृष्ठ $= 2\pi rh,$ कुल पृष्ठ $= 2\pi rh + 2\pi r^2$

(iii) लम्बवृत्तीय शंकु, जिसके आधार की त्रिज्या r व ऊँचाई h तथा तिर्यक ऊँचाई l है, का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h,$ वक्र पृष्ठ $= \pi rl$ संपूर्ण पृष्ठ $= \pi rl + \pi r^2$ व $l^2 = r^2 + h^2$

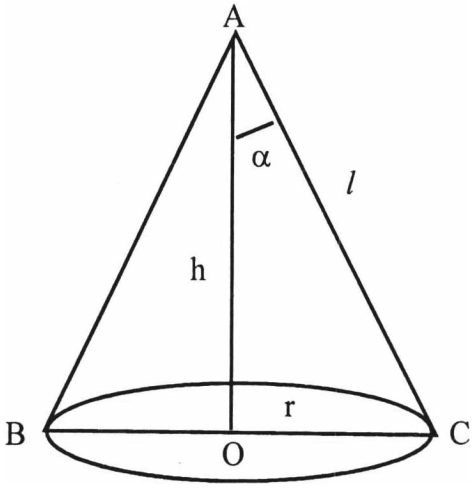
उदाहरण 1 : सिद्ध कीजिये कि दी हुई तिर्यक ऊँचाई और अधिकतम आयतन वाले शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण $\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$ होता है।

हल : माना दिये हुये शंकु की तिर्यक ऊँचाई l व अर्द्धशीर्षकोण α है।

माना इस शंकु की ऊँचाई h व आधार की त्रिज्या r है।

अत शंकु का आयतन

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



चित्र 6.1

परन्तु चित्रानुसार, $r = l\sin\alpha$ व $h = l\cos\alpha$

अत: $v = \frac{1}{3}\pi\left(l\sin\alpha\right)^2\left(l\cos\alpha\right)$

$= \frac{1}{3}\pi\ell^3\sin^2\alpha\cos\alpha$ .....(1)

चूँकि l दिया हुआ है अत: α चर राशि है जिसके सापेक्ष v में पीरवर्तन होगा। अब उच्चिष्ट v के लिये

$$\frac{dv}{d\alpha} = \frac{1}{3}\pi l^2\left[2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha\right] = 0$$

अथवा $2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 0 \rightarrow \sin\alpha\left[2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right] = 0$

$\rightarrow \sin\alpha = 0$ अथवा $2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$

परन्तु $\alpha \neq 0$; अत: $\tan^2\alpha = 2 \rightarrow \tan\alpha = \pm\sqrt{2}$

$\tan\alpha = -\sqrt{2}$ भी संभव नहीं है। क्योंकि $\alpha < 90$ इसलिये उच्चिष्ट v के लिये $\tan\alpha = \sqrt{2}$

अर्थात् $\alpha = \tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$ उच्चिष्ट स्थापित करने के लिये ०

$$\frac{d^2v}{d\alpha^2} = \frac{1}{3}\pi\ell^2\left[2\cos^3\alpha - 7\sin^2\alpha\cos\alpha\right]$$

जो कि $\alpha = \tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$ के लिए ऋणात्मक है। अत: $\alpha = \tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$ अधिकतम आयतन वाले शंकु का अर्द्धशीर्षकोण है।

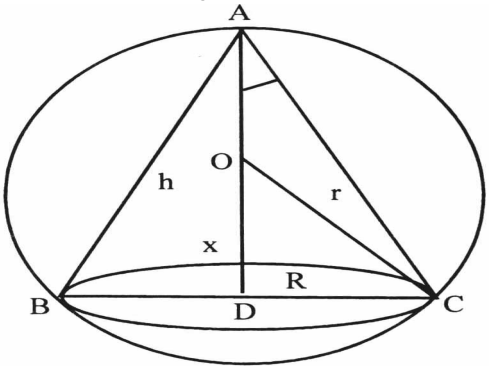
उदाहरण 2 : r त्रिज्या वाले एक गोले में बनाये गये अधिकतम आयतन के शंकु की ऊँचाई ज्ञात करो। उसका आयतन क्या होगा?

हल : माना अधिकतम आयतन वाले शंकु का दिये गये चित्र 6. 2 के अनुसार h ऊँचाई व आधार की त्रिज्या R है। अर्थात्

AD = h व DC = R

यदि गोले का केन्द्र O है तो माना OD =x है। OC = r दिया हुआ है।

स्पष्टत: h = x + r व $R^2 + x^2 = r^2$ (त्रिभुज ODC में)



चित्र 6.2

यदि आयतन V है तो

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$
$$= \frac{1}{3}\pi\left(r^2 - x^2\right)\left(x + r\right)$$
$$= \frac{1}{3}\pi\left(r + x\right)^2\left(r - x\right)$$

यहाँ चूँकि r दिया हुआ है अतः V के परिवर्तन के लिये x में परिवर्तन होगा।

अब V के उच्चिष्ट अथवा निम्निष्ट होने के लिये

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{3}\pi\left[2\left(r+x\right)\left(r-x\right) - \left(r+x\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{3}\pi\left[2r^2 - 2x^2 - r^2 - x^2 - 2rx\right]$$
$$= \frac{1}{3}\pi\left[r^2 - 3x^2 - 2rx\right] = 0$$

अथवा $\frac{dV}{dx} = \frac{1}{3}\pi\left(r+x\right)\left(r-3x\right) = 0$

अर्थात् $x = -r$ अथवा $x = \frac{1}{3}r$ पर उच्चिष्ट अथवा निम्निष्ट होगा। $x = -r$ चूँकि संभव नहीं है, हम $x = \frac{1}{3}r$ पर परीक्षण करेंगे।

अब $\frac{d^2V}{dx^2}$
$$= \frac{1}{3}\pi\left[\left(r-3x\right) - 3\left(r+x\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\pi\left[-2r - 6x\right]$$
$$= \frac{1}{3}\pi\left[-2r - 2r\right] = -\frac{4}{3}\pi r < 0$$

अत : $x = \frac{1}{3}r$ के लिये V उच्चिष्ट होगा व तब शंकु की ऊँचाई $h = x + r = r + \frac{r}{3} = \frac{4r}{3}$ होगी।

आगे, अधिकतम आयतन

V (अधिकतम) $= \frac{1}{3}\pi\left(r + \frac{r}{3}\right)^2\left(r - \frac{r}{3}\right)$
$$= \frac{1}{3}\pi.\frac{16r^2}{9}.\frac{2r}{3} = \frac{32}{81}\pi r^3$$

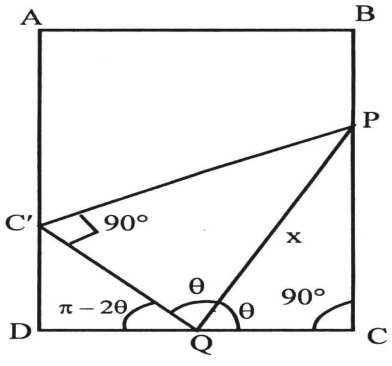
(टिप्पणी : यदि हमे इस आयतन व गोले के आयतन का अनुपात ज्ञात करना हो तो

$$\frac{\text{v अधिकतम}}{\text{गोले का आयतन}} = \frac{\frac{32}{81}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{32}{81}\times\frac{3}{4} = \frac{8}{27}$$

उदाहरण 3 : एक लम्बे आयताकार कागज की चौड़ाई 1 मीटर है। इसके एक कोने को इतना मोड़ा गया कि वह कागज के कोर तक पहुँच जाये। अब इस प्रकार बनने वाले सिलवट की न्यूनतम लम्बाई क्या होगी।

हल : (प्रश्न को समझने के लिये चित्र देखें)

माना ABCD कागज है जिसमें AB = 1 मीटर है। अब कागज को इस प्रकार मोड़ा गया कि C कोना AD रेखा के C' बिन्दु पर पहुँच गया व इससे PQ सिलवट बन गई। माना इस सिलवट की लम्बाई x है।



चित्र 6. 3

माना कोण PQC = PQC ' = θ

अत: $QC = \times\cos\theta = QC'$

(चूँकि $\Delta PQC \simeq PQC'$)

व $C'QD = \pi - 2\theta$

अतः $DQ = C'Q\cos(\pi - 2\theta)$

$= -\times\cos\theta\cos 2\theta$

अत: $DQ + QC = 1$ से (दिया हुआ है।

$\times\cos\theta - \times\cos\theta\cos 2\theta = 1$

अथवा $\times\cos\theta(1-\cos 2\theta) = 1 \rightarrow \times = \dfrac{1}{2\sin^2\theta\cos\theta}$ .....(1)

समीकरण (1) से × यदि उच्चिष्ट हो तो $2\sin^2\theta\cos\theta$ निम्निष्ट होगा व × यदि निम्निष्ट हो तो $2\sin^2\theta\cos\theta$ उच्चिष्ट होगा।

अर्थात् हमें $2\sin^2\theta\cos\theta$ (= y माना) का उचिष्ट अथवा निम्निष्ट देखना है।

अब y = $2\sin^2\theta\cos\theta$

अत: $\dfrac{dy}{d\theta} = 4\sin\theta\cos^2\theta - 2\sin^3\theta = 0$

अथवा $2\sin\theta(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0 \rightarrow \sin\theta = 0$ अथवा $\tan\theta = \pm\sqrt{2}$

चूँकि निम्निष्ट अथवा उचिष्ट $\theta = 0$ व $\theta = -\sqrt{2}$ पर संभव नहीं है।

Y उचिष्ट अथवा निम्निष्ट $\tan\theta = \sqrt{2}$ के लिये होगा।

अब $\frac{d^2y}{d\theta^2} = 4\cos^3\theta - 14\sin^2\theta\cos\theta$

यदि $\tan\theta = \sqrt{2}$ तब $\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$ व $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

अत: $\frac{d^2y}{d\theta^2} = 4.\frac{1}{3\sqrt{3}} - 14.\frac{2}{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{8}{\sqrt{3}} < 0$

अत: $\tan\theta = \sqrt{2}$ के लिए y अधिकतम होगा अर्थात् x निम्नतम होगा।

इस प्रकार $\tan\theta = \sqrt{2}$ के लिये सिलवट की लम्बाई न्यूनतम होगी।

अब x न्यूनतम $= \left(\frac{1}{2\sin^2\theta\cos\theta}\right)_{\tan\theta=\sqrt{2}} = \frac{1}{2.\frac{2}{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

उदाहरण 4 : एक त्रिभुज के अन्दर एक ऐसा बिन्दु ज्ञात करो कि इसकी तीनों शीर्ष बिन्दुओं से कोणीय दूरियों के वर्गों का योगफल निम्निष्ट हो।

हल : माना दिये हुए त्रिभुज के तीनों शीर्षो के निर्देशांक

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ व $C(x_3, y_3)$

माना अभीष्ट बिन्दु p के निर्देशांक (x,y) हैं।

प्रश्नानुसार हमें ऐसा P ज्ञात करना है कि $PA^2 + PB^2 + PC^2$ निम्निष्ट हो।

माना Z = $PA^2 + PB^2 + PC^2$

= $\left[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2\right] + \left[(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2\right] + \left[(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2\right]$

अब z के उचिष्ट अथवा निम्निष्ट होने के लिये

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 = \frac{\partial z}{\partial y}$$

अर्थात् $2\left[(x-x_1) + (x-x_2) + (x-x_3)\right] = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$

व $2\left[(y-y_1) + (y-y_2) + (y-y_3)\right] = 0 \rightarrow y = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$

अर्थात् निम्निष्ट है अथवा उच्चिष्ट के लिये $P\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

अब $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_p = 6 = r, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_p = 0 = s$ व $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_p = 6 = t,$

अत : $r > 0$ व $rt - s^2 = 36 > 0$

इस प्रकार P बिन्दु से शीर्ष बिन्दुओं की दूरियों के वर्गों का योग न्यूनतम होगा।

P बिन्दु के इष्ट निर्देशांक हे $P\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

अर्थात् P बिन्दु त्रिभुज ABC का केन्द्रक है।

उदाहरण 5 : $x^2+y^2+z^2$ का निम्नतम मान ज्ञात कीजिये, जबकि $x+y+z=3a$

हल : यहाँ माना $u=x^2+y^2+z^2$

परन्तु $z=3a-x-y$

अत : $u=x^2+y^2+(3a-x-y)^2$

उचिष्ट अथवा निम्निष्ट के लिये

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x}=2x+2(3a-x-y)(-1)=4x+2y-6a=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2y+2(3a-x-y)(-1)=2x+4y-6a=0$$

अत: दोनों समीकरणों को हल करने पर $x=a=y$

$\therefore$ $x=a=y=z$ अत: बिन्दु (a,a,a) पर उच्चिष्ट अथवा निम्निष्ट होगा

अब $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(a,a,a)}=r=4;\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)_{(a,a,a)}=s=2;\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(a,a,a)}=t=4$

$\therefore$ $r>0$ and $rt-s^2=16-4=12>0$

$\therefore$ (a,a,a) पर निम्निष्ट होगा व इस बिन्दु पर $x^2+y^2+z^2$ का न्यूनतम मान $=3a^2$

उदाहरण 6 : यदि $ax^2+2hxy+by^2=1$ हो तो x^2+y^2 का अधिकतम व न्यूनतम मान ज्ञात करो।

हल : (कई प्रश्नों के कार्त्तीय समीकरण को ध्रुवीय में परिवर्तित करने से प्रश्न हल करने योग्य हो जाता है।)

दिये हुए समीकरण को ध्रुवीय में परिवर्तित करने के लिये हम

$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ निरूपित करते हैं।

अत: $a(r\cos\theta)^2+2h(r\cos\theta)(r\sin\theta)+b(r\sin\theta)^2=1$

अथवा $r^2\left[a\cos^2\theta+h\sin 2\theta+b\sin^2\theta\right]=1$ .....(1)

इस प्रतिबंध से हमें $r^2=(x^2+y^2)$ का अधिकतम व न्यूनतम मान ज्ञात करना है।

अब समीकरण (1) से

$$\frac{1}{r^2}=a\cos^2\theta+h\sin 2\theta+b\sin^2\theta=R \qquad .....(2)$$

हम R का अधिकतम व न्यूनतम मान ज्ञात करेंगे जो कि r^2 का क्रमश: न्यूनतम व अधिकतम मान होगा।

अब R के उच्चिष्ट व निम्निष्ट के लिये

$$\frac{dr}{d\theta} = -2a\cos\theta\sin\theta+2h\cos 2\theta+2b\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2h\cos 2\theta - (a-b)\sin 2\theta = 0$$

अतः $\tan 2\theta = \dfrac{2h}{a-b} \rightarrow \sin 2\theta = \dfrac{2h}{\sqrt{4h^2+(a-b)^2}}, \cos 2\theta = \dfrac{(a-b)}{\sqrt{4h^2+(a-b)^2}}$ .....(3)

समीकरण (2) को दोबारा लिखने पर

$$\frac{1}{r^2} = R = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b)\cos 2\theta + h\sin 2\theta$$

अब (3) से इसमें मान रखने पर

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}\frac{(a-b)^2}{\sqrt{4h^2+(a-b)^2}} + \frac{2h^2}{\sqrt{4h^2+(a-b)^2}}$$

$$= \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$$

सरल करने पर

$$\left(a-\frac{1}{r^2}\right)\left(b-\frac{1}{r^2}\right) = h^2$$

जो कि हल करने पर द्रि के अधिकतम व न्यूनतम मान देगा।

6.9 सारांश

इस इकाई में आपने एक व दो चर राशियों वाले फलनों के निम्निष्ट अथवा उच्चिष्ट बिन्दु ज्ञात करने की विधि जानी। हमने देखा कि किसी एक चर वाले फलन का चरम बिन्दु उसके अवकलज को शून्य के बराबर रखने से प्राप्त होता है व उच्चिष्ट अथवा निम्निष्ट उसके दूसरे अवकलज के शून्य से कम अथवा अधिक होने पर निश्चित होताहै। दो चर राशियों वाले फलन में भी दोनों चरों के सापेक्ष आशिक अवकलनों को शून्य रखने पर आने वाले समीकरणों को हल करने पर चरम बिन्दु ज्ञात होता है। उच्चिष्ट व निम्निष्ट भी दूसरे अवकलनों की सहायता से प्राप्त होता है। हमने उच्चिष्ट अथवा निम्निष्ट के कुछ उपयोग किसी आकार के आयतन आदि के न्यूनतम या अधिकतम मान जानने के लिये किये। यह उच्चिष्ट अथवा निम्निष्ट फलन का स्थानीय गुणधर्म है।

6.10 शब्दावली

उच्चिष्ट	Maxima
निम्निष्ट	Minima
चरम बिन्दु	Stationary Point
स्थानीय गुणधर्म	Local Property

6.11 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. असत्य, क्योंकि उच्चिष्ट मान स्थानीय गुणधर्म होने के कारण कई हो सकते हैं जबकि उच्चतम मान केवल एक

2. $f'(a)=0$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. उच्चिष्ट $x=3$ पर $f(3)=54$ व निम्निष्ट $x=5$ पर $f(5)=50$

2. सत्य 2. नहीं

6.12 अभ्यास प्रश्न

1. $\frac{\log}{x}(0<x<\infty)$ का उच्चिष्ट मान ज्ञात करो। **[उत्तर:** 1/e]

2. फलन x^2+y^2 का उच्चिष्ट व निम्निष्ट मान ज्ञात करो जबकि $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

[उत्तर. मात्र निमिष्ट मान $=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$]

3. यदि $xy=c^2$ हो तो ax + by का उच्चिष्ट व निम्निष्ट मान ज्ञात करो।

[उत्तर : उच्चिष्ट $-2c\sqrt{ab}$ व निम्निष्ट $2c\sqrt{ab}$]

4. सिद्ध कीजिये कि $u=x^2y^3(1-x-y)$ बिन्दु $x=1/2, y=3/8$ पर उच्चिष्ट है।

5. उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिये जहाँ $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ का मान उच्चतम तथा न्यूनतम है।

[उत्तर : (a,a) पर उच्चतम जब a < 0 न्यूनतम जब a > (0 , 0) पर चरम मान नहीं है।]

6. एक नियत आयतन वाले खुले टैंक कापैंदा वर्गाकार है। यदि अन्त:पृष्ठ न्यूनतम हो तो टैंक की गहराई तथा लम्बाई का अनुपात ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : गहराई : लम्बाई =1:2]

7. सिद्ध कीजिये कि किसी वृत्त में अधिकतम आयत जो खींचा जा सकता है वह वर्ग होगा।

8. सिद्ध कीजिये कि किसी वृत्त में बड़े से बड़ा त्रिभुज, समबाहु त्रिभुज होता है।

9. धातु की एक आयताकार चादर के कोनों से चार समान वर्ग काट लिये गये हैं। भुजाओं को ऊपर की और मोड़कर एक खुला आयताकार संदूक बनाया गया है। सिद्ध करो कि सप्त का आयतन महत्तम होगा जबकि सदूंक की गइराई $\frac{1}{6}\left[(a+b)-\left(a^2-ab+b^2\right)^{1/2}\right]$ है जबकि a व b मूल आयतन की भुजाएं हैं।

10. एक ऊपर से खुले आयताकार संदूक की दी हुई क्षमता होती है। ऐसे संदूक की माप ज्ञात कीजिये जिसके बनाने में कम से कम सामग्री की आवश्यकता हो।

[उत्तर : लम्बाई = चौड़ाई = 2 ऊँचाई]

इकाई 7: अनन्तस्पर्शियाँ (Asymptotes)

इकाई की रूपरेखा

7.0 उद्देश्य

7.1 प्रस्तावना

7.2 पीरभाषाऐं

7.3 वक्र की अनन्तस्पर्शी ज्ञात करने की विधियाँ

7.3.1 वक्रy = f(x) की अनन्तस्पर्शियों ज्ञात करना

7.3.2 व्यापक बीजीय वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ

7.3.3 अक्षों के समान्तर अनन्तस्पर्शियों

7.3.4 वक्रy = $= mx + c + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + ...$ के अनन्तस्पर्शी

7.3.5 बीजीय वक्रों की अनन्तस्पर्शियों

7.3.6 निरीक्षण द्वारा अनन्तस्पर्शी ज्ञात करना

7.4 किसी वक्र और उसकी अनन्तस्पर्शियों का प्रतिच्छेदन

7.5 अनन्त स्पर्शी के सापेक्ष वक्र की स्थिति

7.6 ध्रुवीय वक्रों की अनन्तस्पर्शियाँ

7.6.1 सरलरेखीय अनन्तस्पर्शी

7.6.2 वृत्तीय अनन्तस्पर्शी

7.7 सारांश

7.8 शब्दावली

7.9 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

7.10 अभ्यास प्रश्न

7.0 उद्देश्य

इस इकाई के पढ़ लेने के बाद आप

- यह समझ सकेंगे कि अनन्तस्पर्शी किसे कहते हैं तथा किसी दिये हुये वक्र की कार्त्तीयनिर्देशांकों में अनन्तस्पर्शियों किस प्रकार ज्ञात करते हैं।
- यह समझ सकेंगे कि अनन्तस्पर्शी व संबंधित वक्र का प्रतिच्छेदन किस प्रकार ज्ञात करेंगे।
- यह समझ सकेंगे कि किसी दिए हुवे वक्र की ध्रुवीय अनन्तस्पर्शी किस प्रकार ज्ञात करेंगे।

7.1 प्रस्तावना

यहाँ हम उन वक्रों का अध्ययन करेंगे जिनकी एक या अधिक शाखऐं हैं एवं वे अनन्त तक जाते है। वृत्त व दीर्घवृत्त अपने विस्तार में सीमित होते हैं परन्तु कुछ वक्र जैसे परवलय व अतिपरवलय अनन्त तक जाते हैं। यदि वैसे ही एक अन्य वक्र का अस्तित्व हो जो पहिले वाले वक्र की ओर अग्रसर होता है व अन्त में उससे मिलता है तो यह दूसरा वक्र पहले वक्र का अनन्तस्पर्शी कहलाता है। अनन्तस्पर्शी

अधिकांशत : सरल रेखा के रूप में होते हैं। कुछ वक्रों के लिये वृत्तीय अनन्तस्पर्शी भी ज्ञात किये जाते हैं।

7.2 परिभाषाएँ

7.2.1 अनन्तस्पर्शी (Asymptotes)

यदि एक सरल रेखा जो मूल बिन्दु से परिमित दूरी पर स्थित हो तथा जिसकी ओर वक्र की एक स्पशरिखा प्रवृत्त हो जबकि सम्पर्क बिन्दु की दूरी मूल बिन्दु से अनन्त की ओर अग्रसर होती हो, उस सरलरेखा को वक्र का अनन्तस्पर्शी कहते हैं।

7.2.2 तिर्यक अनन्तस्पर्शी (Oblique Asymptotes)

वह अनन्तस्पर्शी जो कि अक्षों के सामान्तर नहीं है, तिर्यक अनन्तस्पर्शी कहलाती है।

7.3 वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात करने की विधि

7.3.1 वक्र y = f(x) की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात करना

माना वक्र का समीकरण y = f (x) है। बिन्दु (x ,y) पर स्पर्श रेखा का समीकरण होगा

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

या $$Y = \frac{dy}{dx}X + \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{.....(1)}$$

यदि यह मानलें कि अनन्तस्पर्शियाँ जो y -अक्ष के समान्तर है उनको छोड़ दिया गया हो अर्थात् जब $x \to \infty$ तो $\frac{dy}{dx}$ अनन्त की ओर प्रवृत्त नहीं होता है तो (1) की अनन्तस्पर्शी होने के लिए जब $x \to \infty$ तब $\frac{dy}{dx}$ तथा $y - x\frac{dy}{dx}$ दोनों की सीमाएँ परिमित होनी चाहिए अर्थात् मानलें कि $\lim_{x\to\infty}\frac{dy}{dx} = m$ तथा $\lim_{x\to\infty}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = c$ जबकि m व c परिमित संख्याएँ हैं। यदि ये सीमायें विद्यमान हो तो अनन्तस्पर्शी का समीकरण

$y = mx + c$ होगा ..... (2)

पुनः $$\lim_{x\to\infty}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = c$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x} - \times\frac{dy}{dx}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{c}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{dy}{dx}$$

$$= m$$

अत: अनन्तस्पर्शी का ढाल

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x}$$

7.3.2 व्यापक बीजीय वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ

माना वक्र का x व y में व्यापक समीकरण निम्न है

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} x + a^2 y^{n-2} x^2 + ... + a_{n-1} y x^{n-1} + a_n x^n +$$
$$b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} x + ... + b_{n-1} y x^{n-2} + b_n x^{n-1} +$$
$$c_2 y^{n-2} + c_3 y^{n-1} x + ... + ... = 0 \quad .....(1)$$

या $$x^n \phi_n \left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} \phi_{n-1} \left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2} \phi_{n-2} \left(\frac{y}{x}\right) + ... = 0 \quad .....(2)$$

यहाँ $\phi_r \left(\frac{y}{x}\right), \frac{y}{x}$ में r कोटि का समघात व्यंजक है।

समीकरण (2) में x^n से भाग देनें पर

$$\phi_n \left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} \phi_{n-1} \left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \phi_{n-2} \left(\frac{y}{x}\right) + ... = 0 \quad .....(3)$$

y-अक्ष के समान्तर अनतस्पर्शी को छोडने पर अर्थात् जहाँ $m = \infty$ हो (3) की $x \to \infty$ सीमा लेनें पर

$$\phi_n (m) = 0$$

जहाँ $$m = \lim_{x \to \infty} (y/x)$$

समीकरण (4) m में n घात का समीकरण है अत: इससे m के n मान प्राप्त हो सकते हैं जो कि वास्तविक, काल्पनिक संपात्ती हो सकते हैं।

(3) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\left[\phi'_n (y/x) + \frac{1}{x} \phi'_{n-1} (y/x) + ...\right] \left[\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}\right]$$
$$-\frac{1}{x^2} \phi_{n-1} (y/x) - \frac{2}{x^3} \phi_{n-1} (y/x) ..... = 0$$

दोनों पक्षों को x^2 से गुणा कर सीमा $x \to \infty$ लेनें पर।

$$\{\phi'_n (m) + 0\}(-c) - \phi_{n-1} (m) = 0$$

$$\left[\therefore \lim_{x \to \infty} y/x = m \text{ तथा } \therefore \lim_{x \to \infty} \left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = c\right]$$

या $$c\phi'_n (m) + \phi_{n-1} (m) = 0$$

या $c = -\frac{\phi_{n-1}(m)}{\phi_n(m)}$ .....(5)

यहाँ से m के मानों के संगत C का मान प्राप्त होता है (4) से क्र तथा (5) से संगत C के प्राप्त मानों के लिए अनन्त स्पर्शी के समीकरण $y = m \times + c$ होंगे।

लधुविधि : उच्चतम घात (n) के पदों में $x = 1$ तथा $y = m$ रखनें पर $\phi_n(m)$ प्राप्त हो जाता है। यदि $\phi_n(m) = 0$ को हल करनें पर माना m के $m_1, m_2, ...m_n$ हैं। इसी प्रकार (n-1) घातीय पदों से ϕ_{n-1} ज्ञात करो। अब c के संगत भिन्न-भिन्न मान, माना $c_1, c_2, c_3, ...c_n$, के भिन्न-भिन्न मान $m_1, m_2, m_3, ...m_n$ को सूत्र

$$c = \frac{\phi_{n-1}(m)}{\phi'_n(m)}$$

में प्रतिस्थापित करके प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार अनन्तस्पर्शियों के समीकरण होगें।

$$y = m_1 \times + c_1, \quad y = m_2 \times + c_2, \quad y = m_3 \times + c_3, ..., \quad y = m_n \times + c_n$$

m तथा c के मान ज्ञात करनें की वैकल्पिक विधि :

समीकरण (2) में $y = mx + c$ रखने पर

$$x^n \phi_n\left(m + \frac{c}{x}\right) + x^{n-1}\phi_{n-1}\left(m + \frac{c}{x}\right) + x^{n-2}\phi_{n-2}\left(m + \frac{c}{x}\right) + ... = 0$$

टेलर प्रमेय से प्रसार करनें पर

$$x^n\left[\phi_n(m) + \frac{c}{x}\phi'_n(m) + \left(\frac{c}{x}\right)^2 \frac{1}{\underline{|2}}\phi_n''(m) + ...\right]$$

$$+x^{n-1}\left[\phi_{n-1}(m) + \frac{c}{x}\phi'_{n-1}(m) + \left(\frac{c}{x}\right)^2 \frac{1}{\underline{|2}}\phi''_{n-1}(m) + ...\right]$$

$$+x^{n-2}\left[\phi_{n-2}(m) + \frac{c}{x}\phi'_{n-2}(m) + ...\right] + ... = 0 \qquad .....(6)$$

x^n तथा x^{n-1} के गुणांकों को शून्य के बराबर रखने पर

$$\phi_n(m) = 0$$

तथा $c\phi'_n(m) + \phi_{n-1}(m) = 0$

जो समीकरण (4) तथा (5) ही है।

स्थिति I : जब $\phi_n(m) = 0$ से प्राप्त किसी m के मान के लिए

$$\phi'_n(m) = 0 \text{ तथा } \phi_{n-1}(m) \neq 0$$

इस स्थिति में समीकरण (5) से

$$c.o + \phi_{n-1}(m) = 0$$

जिससे $\lim_{\times\to\infty} c = \infty$ या $-\infty$ जो पीरमित नहीं है अर्थात् m के ऐसे मान के संगत कोई अनन्तस्पर्शी विद्यमान नहीं है।

स्थिति II : जब $\phi_n\ (m)$ से प्राप्त किसी m के मान के लिए $\phi'_n(m) = 0$ तथा $\phi_{n-1}(m) = 0$ इस स्थिति में समीकरण $(5)0.c + 0 = 0$ का रूप सर्वसमिका (Identity) प्राप्त होता है जिससे c का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता।

अत: c का मान ज्ञात करने हेतु समीकरण (3) को दो बार अवकलन तथा x की उचित घात से गुणा कर सीमा $\times \to \infty$ लेने पर

$$\frac{1}{2}c^2\phi''_n(m) + c\phi'_{n-1}(m) + \phi_{n-2}(m) = 0 \qquad \text{.....(7)}$$

जिससे m के एक मान के लिए c के दो मान प्राप्त हो सकते हैं यदि $\phi''_n(m) \neq 0$

फलत: दो अनन्तस्पर्शी $y = mx + c_1$ तथा $y = mx + c_2$ प्राप्त होगी। यहाँ चूँकि m के मान समान हैं, ये अनन्त स्पर्शी समान्तर होंगे।

7.3.3 अक्षों के समान्तर अनन्तस्पर्शियों

x-अक्ष के समान्तर अनन्तस्पर्शी वक्र के समीकरण में x की उच्चतम घात के गुणांक के वास्तविक एकघाती गुणनखण्ड को, यदि वह अचर राशि नहीं है तो, शून्य के बराबर रखनें से प्राप्त होती है यदि x की उच्चतम घात का गुणांक अचर हो या वास्तविक एकघाती नहीं हों तो x-अक्ष के समान्तर अनन्तस्पर्शी नहीं होगी।

y-अक्ष के समान्तर अनन्तस्पर्शी भी वक्र के समीकरण में y की उच्चतम घात के गुणांक के वास्तविक एकघाती गुणनखण्डों को, यदि वह अचर राशि नहीं है तो, शून्य के बराबर रख देनें से प्राप्त होगी परन्तु यदिy की उच्चतम घात का गुणांक अचर हो या वास्तविक एकघाती नहीं है तो y-अक्ष के समान्तर कोई वास्तविक अनन्तस्पर्शी नहीं होगी।

7.3.4 वक्र. $y = mx + c + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \ldots\ldots$ के अनन्तस्पर्शी

माना वक्र का समीकरण निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$y = mx + c + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \ldots\ldots \qquad \text{.....(1)}$$

जहाँ श्रेणी x के बड़े मानों के लिए $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \ldots..$

एक अभिसारी श्रेणी है वA,B,C आदि अचर राशियाँ हैं।

(1) का अवकलन करन पर

$$\frac{dy}{dx} = m - \frac{A}{x^2} - \frac{2B}{x^3} - \ldots\ldots\ldots$$

बिन्दु (x,y) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$Y - y = \left(m - \frac{A}{x^2} - \frac{2B}{x^3} - ..... \right)(X - x)$$

या $$Y = \left(m - \frac{A}{x^2} - \frac{2B}{x^3} - ..... \right)x + c + \frac{2A}{x} + \frac{3B}{x^2} + ... \quad .....(2)$$

$x \to \infty$ सीमा द्वारा स्पर्श रेखा

$Y = mX + c$ में प्रवृत्त होती है। अत: वक्र $y = mx + c + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} .....$

$y = mx + c$ अभीष्ट अनन्त स्पर्श रेखा है।

7.3.5 बीजीय वक्रों की अनन्तस्पर्शियों ज्ञात करनें की वैकल्पिक विधियाँ

(1) **सीमा विधि :** माना वक्र की समीकरण की कोटि n हैं।

स्थिति I : माना (y - ax) वक्र के समीकरण की n कोटि के पदों का एक अनावृत्त गुणनखण्ड है तो वक्र के समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$(y - ax)F_n + p_{n-1} = 0 \quad .....(1)$$

जहाँ F_{n-1} में केवल $n-1$ कोटि के पद हैं तथा p_{n-1} में $(n-1)$ या इससे कम कोटि के पद हैं। चूँकि $\phi_n(m) = 0$ का एक मूल a है अत: $y = ax + c$ एक अनन्तस्पर्शी होगी जहाँ $c = \lim_{x \to \infty}(y - ax)$ तथा बिन्दु (x,y) वक्र पर है

परन्तु (x,y), (1) पर होगें यदि

$$y - ax = -\frac{p_{n-1}}{F_{n-1}}$$

$$\therefore \quad c = \lim_{x \to \infty}(y - ax) = -\lim_{x \to \infty}\left(\frac{p_{n-1}}{F_{n-1}} \right) \quad .....(2)$$

(2) की सीमा को सरलता से ज्ञात कर सकते हैं यदि

$\lim_{x \to \infty} y/x = a$ को काम में ले तो

अनन्तस्पर्शी जो y - ax के संगत है का समीकरण

$$(y - ax) + \lim_{\substack{x \to \infty \\ y/x \to a}} \left(\frac{p_{n-1}}{F_{n-1}} \right) = 0 \quad .....(3)$$

इसी प्रकार दूसरे अनावृत्त रैखिक खण्ड के संगत अनन्तस्पर्शी ज्ञात कर सकते हैं।

स्थिति II : माना वक्र के समीकरण में n कोटि के पदों का $(y - ax)$ एक गुणनखण्ड हैं तथा $y - ax, (n-1)$ कोटि के पदों का गुणनखण्ड नहीं है तो हम दिये गये वक्र को निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$(y-ax)^2 F_{n-2} + P_{n-1} = 0$$ .....(4)

जहाँ F_{n-2} में $n-2$ के पद हैं तथा p_{n-1} में $(n-1)$ या इससे कम कोटि के पद हैं।

स्थिति । की तरह क्रिया करने पर

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y/x\to a}} (y-ax)^2 = \lim_{\substack{x\to\infty \\ y/x\to a}} -\frac{p_{n-1}}{F_{n-1}} = \infty \text{ या } -\infty$$

इस स्थिति में वक्र की कोई अनन्तस्पर्शी नहीं होगी।

स्थिति III : माना वक्र का समीकरण निम्न प्रकार है :

$$(y-ax)^2 F_{n-2} + (y-ax)G_{n-2} + P_{n-2} = 0$$ ..... (5)

जहाँ $F_{n-2,}G_{n-2}$ में केवल n - 2 कोटि के पद हैं तथा P_{n-2} में n - 2 या इससे कम कोटि के पद है।

$$(y-ax)^2 + (y-ax)\frac{G_{n-2}}{F_{n-2}} + \frac{p_{n-2}}{F_{n-2}} = 0$$ .....(6)

अब $x\to\infty, \frac{y}{x}\to a$ सीमा लेने पर

$$(y-ax)^2 + A(y-ax) + B = 0$$ ..... (7)

जो कि $(y-a\times)$ में द्विघात समीकरण है। इसको हल करने पर दो अनन्तस्पर्शी $y-ax=c_1$, तथा $y-ax=c_2$ प्राप्त होगी। इसी तरह $y-ax$ की 3 या 3 से अधिक घात के खण्ड विद्यमान है तो अनन्त स्पर्शी ज्ञात कर सकते है।

स्थिति IV : यदि वक्र के समीकरण का रूप $(ax+by+c)F_{n-1} + P_{n-1} = 0$ हो जहाँ F_{n-1} तथा P_{n-1} में $n-1$ कोटि से अधिक के पद नहीं हो तथा F_{n-1} में कम से कम एक पद $(n-1)$ कोटि का हो तो खण्ड$(ax+by+c)$ के संगत अनन्तस्पर्शी

$$ax+by+c+\lim_{\substack{x\to\infty \\ y/x\to -a/b}} \left(\frac{p_{n-1}}{F_{n-1}}\right) = 0$$

इसी प्रकार का परिवर्तन हम अन्य स्थितियों में कर सकते हैं।

7.3.6 निरीक्षण द्वारा अनन्तस्पर्शी ज्ञात करना :

यदि वक्र के समीकरण को निम्न रूप में व्यक्त करें $F_n + F_{n-2} = 0$ जहाँ व्यंजक F_n में n घात तथा इससे कम घात के पद हैं जो n एक घाती गुणनखण्डों के रूप में लिखा जा सकता है तथा । F_{n-2} में $n-2$ घात तथा इससे कम घात के पद हैं तो F_n के प्रत्येक एकघाती गुणनखण्ड को शुन्य के बराबर रखनें पर प्राप्त n सरल रेखाऐं जिनमें कोई भी रेखा समान्तर व संपाती नहीं हो उस वक्र की समस्त अनन्तस्पर्शियों प्राप्त होगी।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. n घात के बीजीय वक्र के अनन्त स्पर्शियों की संख्या..... से अधिक नहीं हो सकती है।
2. x-अक्ष के समान्तर अनन्तस्पर्शी वक्र के समीकरण में..... के वास्तविक एकघाती गुणनखण्ड को शून्य के बराबर रखनें से प्राप्त होते हैं।
3. y-अक्ष के समान्तर अनन्तस्पर्शी वक्र के समीकरण में..... के वास्तविक एकघाती गुणनखण्ड को शून्य के बराबर रखनें पर प्राप्त होती है।

उदाहरण 1. निम्न वक्र के अनन्तस्पर्शी ज्ञात कीजिए

$$4x^3 - x^2y - 4xy^2 + y^3 + 3x^2 + 2xy - y^2 - 7 = 0$$

हल : यहाँ x तथा y की उच्चतम घात के गुणांक अचर है अत: अक्षों के सामान्तर कोई अनन्तस्पर्शियों नहीं है। दिये गये वक्र के समीकरण के पदों की घात के अनुसार रखने पर

$$\left(4x^3 - x^2y - 4xy^2 + y^3\right) + \left(3x^2 + 2xy - y^2\right) - 7 = 0 \qquad \text{..... (1)}$$

$\times = 1$ तथा $y = m$ तृतीय घात के पदों में रखने पर

$$\phi_3(m) = 4 - m - 4m^2 + m^3$$

$$\Rightarrow \quad \phi_3'(m) = -1 - 8m + 3m^2$$

अब $\phi_3(m) = 0$ रखने पर

$$4 - m - 4m^2 + m^3 = 0 \Rightarrow \left(1 - m^2\right)(4 - m) = 0$$

$$\Rightarrow m = 1, -1, 4$$

(1) में द्वितीय घात के पदों में $x = 1$ तथा $y = m$ रखने पर

$$\phi_2(m) = 3 + 2m - m^2$$

अत: c $= -\dfrac{\phi_2(m)}{\phi_3'(m)} = \dfrac{3 + 2m - m^2}{1 + 8m - 3m^2}$

$\therefore$ जब $m = 1$ तो $c = \dfrac{2}{3}$

जब $m = -1$ तो $c = 0$

जब $m = 4$ तो $c = 1/3$

अत: अभीष्ट अनन्तस्पर्शियाँ होंगी :

$$y = x + \frac{2}{3}, \quad y = -x, \qquad y = 4x + \frac{1}{3}$$

उदाहरण 2 : निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियों ज्ञात कीजिए

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$$

हल : दिए हुए वक्र के समीकरण में $y = m \times + c$ रखने पर

$$x^3 + 2x^2(mx + c) - x(mx + c)^2 - 2(mx + c)^3 + x(mx + c)$$

$$-(mx + c)^2 - 1 = 0$$

या $x^3\left(1 + 2m - m^2 - 2m^3\right) + x^2\left(2c - 2mc - 6m^2c + m - m^2\right)$ .....=0

X^3के गुणांकों को शून्य के बराबर रखने पर

$$1+2m-m^2-2m^3=0$$

या $\quad (1-m^2)(1+2m)=0$

$\therefore \quad m=1,-1,-\frac{1}{2}$

X^2 के गुणांकों को शून्य के बराबर रखने पर

$$2c-2mc-6m^2c+m-m^2=0$$

या $\quad 2c(1-m-3m^2)=m^2-m$

अतः $\quad c=\frac{m^2-m}{2(1-m-3m^2)}$

अतः जब m= 1 तब $c=\frac{1-1}{2(1-1-3)}=0$

जब m = -1 तब $c=\frac{1+1}{2(1+1-3)}=-1$

जब $m=-\frac{1}{2}$ तब $c=\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{2\left(1+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{2}$

mतथा c के मान $y=m\times+c$ में रखने पर हमें निम्न अनन्तस्पर्शियों प्राप्त होगी $y=\times+0$, $y=-\times-1$ तथा $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

या $\quad y=x; \quad y+x+1=0 \quad$ तथा $\quad x+2y=1$

उदाहरण 3 : वक्र की अनन्तस्पर्शियों ज्ञात कीजिए

$$y^2(x-b)=x^3+a^3$$

हल : y की उच्चतम घात 2 के गुणांक को शून्य रखने पर

$x-b=0x\Rightarrow b$ जो कि y-अक्ष के समान्तर अनन्तस्पर्शी है।

X की उच्चतम घात 3 का गुणांक अचर है इसलिए x-अक्ष समान्तर अनन्तस्पर्शी नहीं होगी।

पुनः $y=mx+c$ वक्र के समीकरण में रखने पर

$$(mx+c)^2(x-b)=x^3+a^3$$

$$\Rightarrow x(mx+c)^2-b(mx+c)^2-x^3-a^3=0$$

$$\Rightarrow x\left[m^2x^2+c^2+2mxc\right]-b\left[m^2x^2+c^2+2mxc\right)-x^3-a^3=0$$

$$\Rightarrow \quad m^2x^3+xc^2+2mx^2c-bm^2x^2-bc^2-2mxcb-x^3-a^3=0$$

X^3 के गुणांक को शून्य रखनें पर

$$m^2-1=0 \quad \Rightarrow \quad m=\pm1$$

X^2 के गुणांक को शून्य रखनें पर

$$2mc - bm^2 = 0 \;\Rightarrow\; c = \frac{bm^2}{2m}$$
$$= \frac{bm}{2}$$

जब $m = \pm 1$ तो $c = \pm\frac{b}{2}$

अत: $y = \times + \frac{1}{2}b, y = -\times - \frac{1}{2}$ अनन्तस्पर्शियाँ है। वक्र का समीकरण 3 घात का है अत: इसकी अधिकतम 3 अनन्तस्पर्शियों हो सकती है। अत: अभीष्ट अन्नतस्पर्शियाँ

$$x = b; \qquad y = x + \frac{1}{2}b; \qquad y = -x - \frac{1}{2}b$$

उदाहरण 4 : निम्न वक्र के अनन्तस्पर्शी ज्ञात करो :

$$(x-2y)^2(x-y) - 4y(x-2y) - (8x+7y) = 0$$

हल : दिया गया वक्र निम्न प्रकार (7. 3. 5 स्थिति III) हैं :

$$(x-2y)^2(x-y) - 4y(x-2y) - (8x+7y) = 0$$
$$F_{n-2} \qquad G_{n-2} \qquad P_{n-2}$$

खण्ड $(x-y)$ के संगत अनन्तस्पर्शी के लिए

$$x - y = \lim_{\substack{x\to\infty \\ y/x \to 1}} \frac{4y(x-2y) + 8x + 7y}{(x-2y)^2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty \\ y/x \to 1}} \frac{4\frac{y}{x}\{1-2(y/x)\} + \frac{1}{\times}(8+7y/x)}{\{1-2(y/x)\}^2}$$

$$= \frac{4.1\{1-2(1)\}+0}{\{1-2(1)\}^2} = -4$$

$\therefore \quad x - y + 4 = 0$

इसी प्रकार खण्ड (x - 2y) के संगत अनन्तस्पर्शी के लिए

$$(x-2y)^2 - (x-2y) \lim_{\substack{x\to\infty \\ y/x \to 1/2}} \frac{4y}{x-y} - \lim_{\substack{x\to\infty \\ y/x \to 1/2}} \frac{8x+7y}{x-y} = 0$$

या $$(x-2y)^2 - (x-2y) \lim_{\substack{x\to\infty \\ y/x \to 1/2}} \frac{4y/x}{1-y/x} \lim_{\substack{x\to\infty \\ y/x \to 1/2}} \frac{8+7(y/x)}{1-(y/x)} = 0$$

या $$(x-2y)^2 - 4(x-2y) - 23 = 0$$

$\therefore \quad (x-2y) = \frac{1}{2}\{4 \pm \sqrt{16+4+23}\} = 2 \pm 3\sqrt{3}$

अत: अभीष्ट अनन्तस्पर्शी है :

$$x-y+4=0, \qquad x-2y=2\pm 3\sqrt{3}$$

उदाहरण 5 : वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए :

$$(y-2x)^2(3x+4y)+3(y-2x)(3x+4y)-5=0$$

हल : वक्र के समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है

$$(y-2x)(y-2x+3)(3x+4y)-5=0$$

जो कि $F_3+F_0=0$ के रूप का है अत: निरीक्षण से स्पष्ट है कि वक्र की अनन्तस्पर्शियों $F_3=0$ से प्राप्त होगी

अर्थात् $(y-2x)(y-2x+3)(3x+4y)=0$

$\Rightarrow$ $y-2x=0,\ \ y-2x+3=0,\ \ 3x+4y=0$

उदाहरण 6 : निम्न वक्र की सभी अनन्तस्पर्शियों ज्ञात कीजिए :

$$x^4-5x^2y^2+4y^4+x^2-y^2+x+y=0$$

हल : दिये हुए वक्र के समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$\left(x^4-5x^2y^2+4y^4\right)+\left(x^2-y^2+x+y+1\right)=0$$

या $$(x-y)(x+y)(x-2y)(x+2y)+\left(x^2-y^2+x+y+1\right)=0$$

जो कि $F_4+F_2=0$ के रूप का है अत: निरीक्षण से वक्र की निम्न अनन्तस्पर्शियों होगी :

$$x-y=0, \qquad x+y=0, \qquad x-2y=0, \qquad x+2y=0$$

अर्थात $y=\pm x, \qquad y=\pm\frac{1}{2}x$

उदाहरण 7 : वक्र $x^3-5x^2y+8xy^2-4y^3+x^2-3xy+2y^2-1=0$ के सभी अनन्तस्पर्शी ज्ञात कीजिये।

हल : यहाँ वक्र तीन घाती समीकरण का है। यहाँ तीन घाती पदों में$\times=1$ व $y=m$ रखेंगे।

अत: $\phi_3(m)=1-5m+8m^2-4m^3$

अत: $(1-m)(1-2m)^2=0$

$$m=1,\ \ m=\frac{1}{2},\frac{1}{2}$$

अत: हमें तीन अनन्त स्पर्शी ज्ञात करने हैं जिनमें दो समान्तर होंगे।

पहले $m=1$ के लिये $x=1$ व $y=m$ रखने पर

$\phi_2(m)$ = $1-3m+2m^2$ व $\phi_1(m)=0$

अतः $c=-\frac{\phi_2(m)}{\phi'_3(m)}=0$

अत: एक अनन्तस्पर्शी होगी y=x

अब $m=\frac{1}{2}$ व $\frac{1}{2}$ के लिये c हेतु समीकरण होगा

$$\frac{1}{2}c^2\phi_3^{''}(m)+c\phi_2^{'}(m)+\phi_1(m)=0 \qquad \text{.....(1)}$$

दिये हुए वक्र के लिये $\phi_3^{''}(m)=16-24m,=8(2-3m)$

$$\phi_2^{'}(m)=-3+4m$$

इसलिये (1) में यह मान रखने पर

$$\frac{1}{2}c^2 8(2-3m)+c(-3+4m)=0$$

अथवा $4(2-3m)c^2+c(-3+4m)=0$

$$c=0, c=\frac{3-4m}{4(2-3m)}$$

अत: $m=\frac{1}{2}$ के लिये

$c=0$ व $c=\frac{1}{2}$

अत: ये दो समान्तर अनन्तस्पर्शी होंगे

$$y=\frac{1}{2}x \qquad \text{व} \qquad y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

इसलिये दिये हुए वक्र की तीन अनन्तस्पर्शियाँ

$y=x, y=\frac{1}{2}x$ व $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ होंगी

7.4 किसी वक्र और उसकी अनन्तस्पर्शियों का प्रतिच्छेदन

एक सरल रेखा प्रघात के वक्र को n बिन्दुओं पर काटती है। एक अनन्तस्पर्शी भी एक स्पर्श रेखा है जो वक्र को अनन्त पर स्पर्श करती है जहाँ दो प्रतिच्छेद बिन्दु संपाती होकर स्पर्श बिन्दु बन जाते हैं। इनका तात्पर्य यह हुआ कि n घात के वक्र को अनन्तस्पर्शी (n - 2) अन्य बिन्दुओं में काटती है। हमें यह भी ज्ञात है कि n वी घात के वक्र की अधिकतम n अनन्तस्पर्शियों हो सकती है अत : अधिकतम प्रतिच्छेदन बिन्दुओं की संख्या n(n - 2) हो सकती है।n घात के वक्र का समीकरण जिसकी अनन्तस्पर्शियों $F_n=0$ तो इसका समीकरण $F_n+F_{n-2}=0$

परन्तु निर्देशांक ज्यामिति से दो वक्रों s = 0 व s' = 0 के समीकरण हों तो $s+\lambda s'=0$ उस वक्र का समीकरण है जो कि s = 0 तथा s ' = 0 के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरता है जहाँ λ एक स्वेच्छ अचर है। अब वक्र $F_n+F_{n-1}+\lambda F_n=0$; $F_n+F_{n-2}=0$ तथा के $F_n=0$ प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरता है $\lambda=-1$ लेनें पर

$$F_{n-2}=0$$

अत: $F_{n-2}=0$ एक वक्र को निरुपित करता है जो वक्र तथा अनन्तस्पर्शी के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से होकर जाता है।

उदाहरण 8 : सिद्ध करोकि त्रिपद वक्र

$$x^3-2y^3+xy(2x-y)+y(x-y)+1=0$$

के अनन्तस्पर्शी वक्र को तीन बार काटते हैं तथा रेखा $x+y+1=0$ पर स्थित है।

हल : दिये गये वक्र का समीकरण है

$$x^3-2y^3+xy(2x-y)+y(x-y)+1=0$$

या $$\left(x^3-2y^3+2x^2y-xy^2\right)+\left(xy-y^2\right)+1=0 \qquad \text{.....(1)}$$

x की उच्चतम घात 3 के गुणांक में x = 1 तथा y=m रखने पर

$$\phi_3(m)=1-2m^3+2m-m^2$$

पुन: (1) के द्वितीय घात के पदों में x = 1 तथा? y = m रखने पर

$$\phi_2(m)=m-m^2$$

अब $$\phi_3(m)=0 \quad \Rightarrow \quad 1-2m^3+2m-m^2=0$$

$$\Rightarrow \quad (1+2m)(1-m)(1+m)=0$$

$$\Rightarrow \quad m=-\frac{1}{2},1,-1$$

पुनः $$c=-\frac{\phi_2(m)}{\phi_3(m)}=-\left(\frac{m-m^2}{-6m^2+2-2m}\right)$$

जब $m=-\frac{1}{2}$ तो $c=\frac{1}{2}$

$m=1$ तब $c=0$

$m=-1$ तब $c=-1$

अत: अनन्तस्पर्शियों के समीकरण होंगे

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, \qquad y=x, \qquad y=-x-1$$

या $$x+2y-1=0, \qquad x-y=0, \qquad x+y+1=0$$

अत: अनन्तस्पर्शियों का संयुक्त समीकरण होगा

$$(x+2y-1)(x-y)(x+y+1)=0$$

या $$x^3-2y^3+2x^2y-xy^2+xy-y^2-x+y=0 \qquad \text{.....(2)}$$

(1) में से (2) को घटाने पर $x-y+1=0$ .....(3)

जो कि एक सरलरेखा है जिस पर (1) तथा (2) के प्रतिच्छेद बिन्दु स्थित है तथा (3) (1) को $n(n-2)=3(3-2)=3$ बिन्दुओं पर काटेगी।

उदाहरण 9 : सिद्ध करोकि वक्र

$$xy\left(x^2-y^2\right)+x^2+y^2=a^2$$

तथा इसकी अनन्तस्पर्शी के 8 प्रतिच्छेद बिन्दु एक वृत्त पर स्थित है जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर है।

हल : दिये हुए वक्र का समीकरण है

$$xy\left(x^2-y^2\right)+x^2+y^2=a^2$$

या $$xy(x+y)(x-y)+x^2+y^2-a^2=0 \qquad \text{.....(1)}$$

जो कि $F_4 + F_2 = 0$ के रूप का है अत: निरीक्षण मात्र से इसकी अनन्तस्पर्शीयाँ निम्न होंगी

$F_4 = 0$ अर्थात $xy(x-y)(x+y) = 0$

या $x = 0,\ \ y = 0,\ \ x - y = 0,\ \ x + y = 0$

अत: अनन्तस्पर्शियों का संयुक्त समीकरण होगा

$xy(x^2 - y^2) = 0$ ..... (2)

(1) से (2) को घटाने पर

$\times^2 + y^2 - a^2 = 0$ जिस पर (1) तथा (2) के प्रतिच्छेद बिन्दु स्थित है जो एक वृत्त का समीकरण है जिसका केन्द्र (0, 0) है। साथ ही (2), (1) को n (n - 2) = 4 (4 - 2) = 8 बिन्दुओं पर काटेगी।

7.5 अनन्तस्पर्शी के सापेक्ष वक्र की स्थिति

यदि वक्र का रूप $y = mx + c + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + ...$ है तो $y = mx + c$ यदि उसकी अनन्तस्पर्शी है तो वक्र तथा उसकी अनन्तस्पर्शी की स्थितियों निम्नानुसार प्रकट होती है।

माना एक ही भुज x_1 से सम्बन्धित वक्र तथा अनन्तस्पर्शी की कोटियाँ क्रमश: y_1 तथा y_2 है तो

$$y_1 = mx_1 + c + \frac{A}{x_1} + \frac{B}{x_1^2} + \frac{C}{x_1^3} + ...$$

तथा $y_2 = mx_1 + c$

अत: $y_1 - y_2 = \frac{A}{x_1} + \frac{B}{x_1^2} + \frac{C}{x_1^3} + ... = \frac{1}{x_1}\left(A\frac{B}{x_1} + \frac{C}{x_1^2} + ...\right)$ ..... (1)

स्थिति I : जब $A \neq 0$

तो x_1 को पर्याप्त बडा लेने से $\left(\frac{B}{x_1} + \frac{C}{x_1^2} + ...\right)$ का मान संख्यात्मक रूप से छोटा कर सकते हैं यदि

$$\left(\frac{B}{x_1} + \frac{C}{x_1^2} + ...\right) < A$$

तो $\left(A + \frac{B}{x_1} + \frac{C}{x_1^2} + ...\right)$ का चिन्ह वही होगा जो A का हैं अतः x_1 तथा A का एक ही चिन्ह है तो $y_1 > y_2$ अर्थात् वक्र अनन्तस्पर्शी के ऊपर है तथा यदि x_1 और A के चिन्ह विपरीत हैं तो वक्र अनन्तस्पर्शी के बीचे होगा।

$r = a$

स्थितिII : जब A = 0 , $B \neq 0$

तों $y_1 - y_2 = \frac{1}{x_1^2}\left(B + \frac{C}{x_1} + \frac{D}{x_1^2} + ...\right)$

यहाँ भी x_1 के पर्याप्त बड़े मान के लिए $y_1 - y_2$ का एवं B का चिन्ह एक ही होगा तथा यदि B घनात्मक है तो $y_1 > y_2$ अर्थात् वक्र अनन्तस्पर्शी के ऊपर होगा। यदि B ऋणात्मक है तो वक्र अनन्तस्पर्शी के नीचे होगा।

स्थिति III : A=0, B=0, $C \neq 0$

इस स्थिति में वक्र की स्थिति स्थिति I के अनुसार ही होगी।

7.6 ध्रुवीय वक्रों की अनन्तस्पर्शियाँ

7.6.1 सरल रेखीय अनन्तस्पर्शी (Rectilinear Asymptotes)

यदि वक्र के समीकरण का रूप $\frac{1}{r} = f(\theta)$ हो तथा $f(\theta) = 0$ का एक मूल α हो तो वक्र का एक अनन्तस्पर्शी $r\sin(\theta - \alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)}$ होता है।

प्रमाण : दिये हुए वक्र का समीकरण

$$\frac{1}{r} = f(\theta) \text{ हैं।}$$

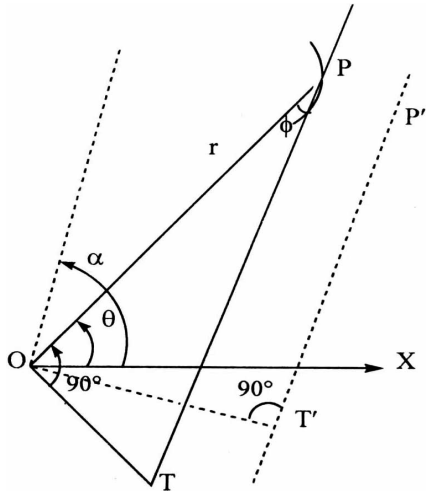
माना $p(r, \theta)$ वक्र पर कोई एक बिन्दु है। OP ध्रुवान्तर रेखा के लम्बवत OT रेखा खींची जो P पर स्पर्श रेखा को T पर मिलाती है।

अत: ध्रुवीय अध: स्पर्शी

$$= OT = r^2 \frac{d\theta}{dr}$$

माना कि $\alpha, f(\theta) = 0$ का एक मूल है

अर्थात् $f(\alpha) = 0$



चित्र 7.1

अत : जब $\theta \to \alpha, f(\theta) \to 0$ तथा $r \to \infty$

(वक्र के समीकरणानुसार $f(\theta) \to 0 \Rightarrow r \to \infty$

अत : PT अनन्तस्पर्शी की तरफ प्रवृत होगा

$$OT \to \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right)_{\theta=\alpha}$$

साथ ही OP तथा समान्तर होने की स्थिति में हो जायेगी तथा OTP प्रावृत्त $\frac{\pi}{2}$ (चित्र में बिन्दु वाली रेखा से दिखाया गया है।) चित्र 7.1 में P' T' अनन्तस्पर्शी है जिसकी मूल बिन्दु से दूरी OT है। अत : अनन्तस्पर्शी P'T' पर लम्ब OT' प्रारम्भिक रेखा से $\alpha - \frac{\pi}{2}$ कोण बनता है।

यदि सरल रेखा के मूल बिन्दु पर डाले गये लम्ब की लम्बाई P है व यह लम्ब प्रारम्भिक रेखा से β कोण बनायें तो ध्रुवीय समीकरण $r(\theta - \beta) = p$

अत : अनन्तस्पर्शी का समीकरण होगा :

$$r\cos\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right)_{\theta=\alpha} \quad \text{....(1) } [\because \text{ यहाँ } \beta = \alpha - \frac{\pi}{2}]$$

$\because \quad \frac{1}{r} = f(\theta) \Rightarrow -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = f'(\theta)$

$$\Rightarrow r^2 \frac{d\theta}{dr} = -\frac{1}{f'(\theta)}$$

$$\Rightarrow \left(r^2 \frac{d\theta}{dr} \right)_{\theta=\alpha} = -\frac{1}{f'(\alpha)} \quad \text{....(2)}$$

(2) से मान (1) में रखने पर

$$-r\sin(\theta - \alpha) = -\frac{1}{f'(\alpha)}$$

$$\Rightarrow r\sin(\theta - \alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)}$$

7.6.2 वृत्तीय अनन्तस्पर्शी (Circular asymptotes)

यदि वक्र का समीकरण $r = f(\theta)$ तथा $\lim_{\theta \to \infty} f(\theta) = a$ तो वृत्त $r = a$ दिये हुए वक्र $r = f(\theta)$ का वृत्तीय अनन्तस्पर्शी कहलाता है।

उदाहरण 10 : निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए :

$$r\theta = a$$

हल : दिये गये वक्र का समीकरण है

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{a}$$

यहाँ $f(\theta) = \frac{\theta}{a}$ अतः $f(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \alpha = 0$

पुनः $f'(\theta) = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad f'(\alpha) = f'(0) = \frac{1}{a}$

अत: अभीष्ट अनन्तस्पर्शी का समीकरण होगा

$$r\sin(\theta-0)=\frac{1}{f'(0)} \quad \Rightarrow \quad r\sin\theta = a$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

4. त्रिपद वक्र की अनन्तस्पर्शी वक्र को..... बार काटती है।
5. n घात के वक्र की अनन्तस्पर्शी वक्र को..... बिन्दुओं पर काटेगी।
6. यदि वक्र का समीकरण $r = f(\theta)$ हो तो वृत्त $r = a$ उस दिये गये वक्र का ..... कहलाता है यदि a = ...

7.7 सारांश

इस अध्याय में हमने यह अध्ययन किया कि किसी भी दिये गये वक्र की अनन्तस्पर्शी किस प्रकार ज्ञात करते है। अनन्तस्पर्शी व वक्र का प्रतिच्छेदन किस तरह ज्ञात किया जाता है। अनन्तस्पर्शी के सापेक्ष वक्र की स्थिति क्या होती है जो कि वक्र अनुरेखण में बहुत ही उपयोगी होती है। तथा वक्र की ध्रुवीय अनन्तस्पर्शी कैसे ज्ञात की जाती है। साथ ही यह भी जाना कि अनन्त स्पर्शी मात्र सरल रेखीय ही नहीं वरन वृत्तीय भी होते हैं।

7.8 शब्दावली

अनन्तस्पर्शी	Asymptotes
तिर्यक अनन्तस्पर्शी	Oblique asymptotes
सरल रेखीय अनन्तस्पर्शी	Rectilinear asymptotes
वृत्तीय अनन्तस्पर्शी	Circular asymptotes

7.9 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. N 2. x की उच्चतम घात का गुणांक
3. y की उच्चतम घात का गुणांक

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

4. 3 5. $n(n-2)$
6. वृत्तीय अनन्तस्पर्शी, $\lim_{\theta\to\infty} f(\theta)$

7.10 अभ्यास प्रश्न

1. निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए

$$x^3 + yx^2 - y^3 - 3x - y - 1 = 0$$

[उत्तर : y = x तथा $y = -x \pm 1$]

2. निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए

$$x^3 + y^2 - 3axy = 0$$

[उत्तर : $y + x + a = 0$]

3. निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए

$y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 - 1 = 0$

[उत्तर : $y + x = 0, y = x, y = x + 1$**]**

4. निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए

$(x + y)^2 (x^2 + 2y + 2) = x + 9y - 2$

[उत्तर : $x + 2y + 2 = 0$ तथा $x + y = \pm 2\sqrt{2}$**]**

5. निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए

$(2x - 3y + 1)^2 (x + y) = 8x - 2y + 9$

[उत्तर : $2x - 3y + 1, 2x - 3y + 3 = 0, x + y = 0$**]**

6. सिद्ध कीजिए कि वक्र

$2y^3 - 2x^2y - 4xy^2 + 4x^3 - 14xy + 6y^2 + 4x^2 + 6y + 1 = 0$ तथा इसकी अनन्तस्पर्शियों के प्रतिच्छेदन बिन्दु सरलरेखा $8x + 2y + 1 = 0$ पर स्थित है।

7. वह त्रिघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके अनन्तस्पर्शी वह है जो वक्र

$x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + x + y + 1 = 0$ के हैं तथा जो मूल बिन्दु पर y-अक्ष को स्पर्श करे तथा (3, 2) से गुजरे

[उत्तर : $x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 - \times = 0$**]**

8. सिद्ध करो कि वक्र $xy(x^2 - y^2) + 25y^2 + 9x^2 - 144 = 0$ के चारों अनन्तस्पर्शी वक्र को फिर आठ बिन्दुओं पर काटते हैं जो (4/5) उत्केन्द्रता वाले दीर्घवृत्त पर स्थित है।

9. निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए :

$r \cos\theta = a \sin\theta$

[उत्तर : $r \cos\theta = \pm a$**]**

10. निम्न वक्र कीं वृत्तीय अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए _

$r(e^\theta - 1) = a(e^\theta + 1)$

[उत्तर : $r = a$**]**

इकाई 8 : वक्र अनुरेखण (Curve Tracing)

इकाई की रूपरेखा

8.0 उद्देश्य

8.1 प्रस्तावना

8.2 परिभाषाएँ

8.3 अवतलता, उत्तलता तथा नति पीरवर्तन बिन्दु

8.4 द्विक बिन्दु विद्यमान होने का प्रतिबन्ध

8.5 कार्तीय वक्र अनुरेखण

8.6 ध्रुवीय वक्र अनुरेखण

8.7 प्राचलिक वक्र अनुरेखण

8.8 सारांश

8.9 शब्दावली

8.10 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

8.11 अभ्यास प्रश्न

8.0 उद्देश्य

इस इकाई के पढ़ लेने के बाद आप

- यह समझ सकेंगे कि किसी दिए हुए वक्र का अनुरेखण किस प्रकार करते हैं।
- यह समझ सकेंगे कि कार्त्तीय वक्र का अनुरेखण किस प्रकार होगा।
- यह समझ सकेंगे कि ध्रुवीय वक्र का अनुरेखण किस प्रकार होगा।
- यह समझ सकेंगे कि प्राचलिक वक्र का अनुरेखण किस प्रकार होगा।

8.1 प्रस्तावना

वक्र अनुरेखन के लिए पारम्परिक विधि में हम कई बिन्दुओं को ज्ञात करके वक्र खींचते हैं। यहाँ पर पारम्परिक विधि को छोड़कर पूर्व में अध्ययन किये गये अध्यायों जैसे अनन्तस्पर्शी, वक्रता, स्पर्श रेखा व बहुल बिन्दु के ज्ञान से वक्र का अनुरेखण करेंगे। यहाँ हम वक्र की स्थूल आकृति ज्ञात कर लेते हैं। वक्र अनुरेखन द्वारा अवकलन एवं समाकलन गणित के कई महत्वपूर्ण बिन्दु आसानी से समझे जा सकते हैं। समाकलन गणित की इकाईयों में जहाँ आप क्षेत्रकलन, चापकलन आदि के बारे में अध्ययन करेंगे, अपको इस इकाई का महत्व ज्ञात होगा।

8.2 परिभाषाएँ

बहुल बिन्दु (Multiple point) :

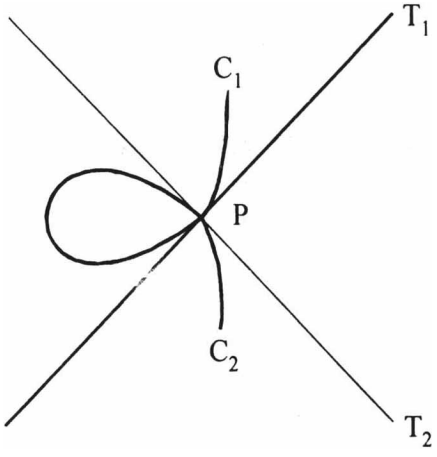
यदि वक्र पर ऐसा बिन्दु हो जिससे वक्र की एक से अधिक शाखाएँ गुजरती है तो उस बिन्दु को बहुल बिन्दु कहते हैं।

द्विक बिन्दु (double point):

यदि वक्र पर ऐसा बिन्दु हो जिससे वक्र की केवल दो शाखाएँ ही गुजरती है तो उस बिन्दु को द्विक बिन्दु कहते हैं।

नोड (Node) :

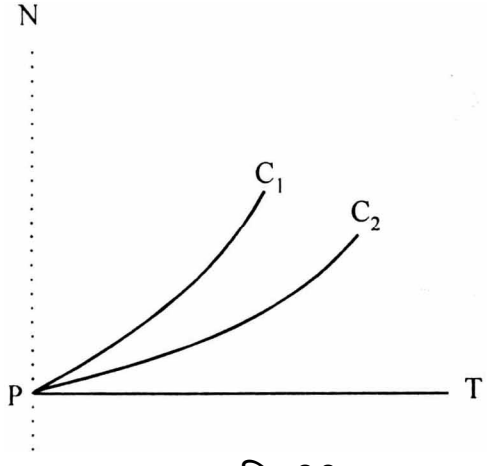
यदि वक्र पर बिन्दु P द्विक बिन्दु हो तथा P पर वक्र की दोनों शाखाएँ वास्तविक हो तथा बिन्दु P पर संपाती स्पर्श रेखाएँ नहीं हो तो बिन्दु P को दिये गये वक्र का नोड कहते हैं जो कि चित्र 8. 1 में दर्शाया गया है।



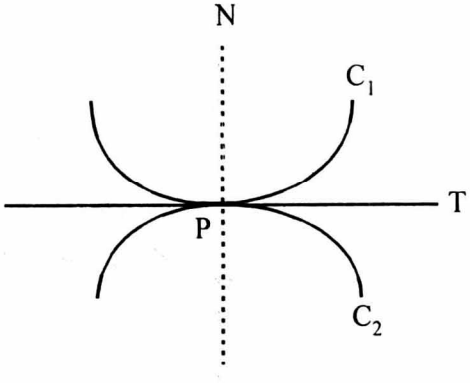
चित्र 8.1 : नोड (Node)

उभयाग्र (Cusp) :

यदि वक्र पर बिन्दु P द्विक बिन्दु हो तथा P पर वक्र की दोनों शाखाएँ वास्तविक हों तथा बिन्दु P पर संपाती स्पर्श रेखाएँ हो तो बिन्दु P को वक्र का उभयाग्र कहते हैं जो कि चित्र 8.2 व चित्र 8.3 में बतलाया गया है।



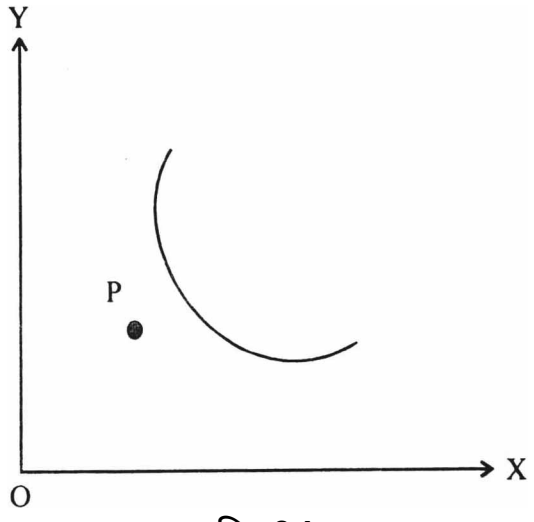
चित्र 8.2



चित्र 8.3

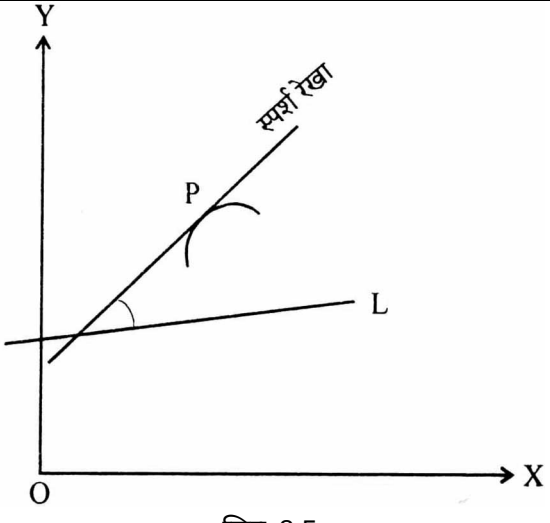
वियुक्त बिन्दु (conjugate point)

यदि वक्र पर कोई बिन्दु इस प्रकार है कि जिसके निकट वक्र का कोई वास्तविक बिन्दु स्थित नहीं हो तो ऐसे बिन्दु को वियुक्त बिन्दु कहते हैं। जो कि चित्र 8. 4 में दर्शाया गया है।

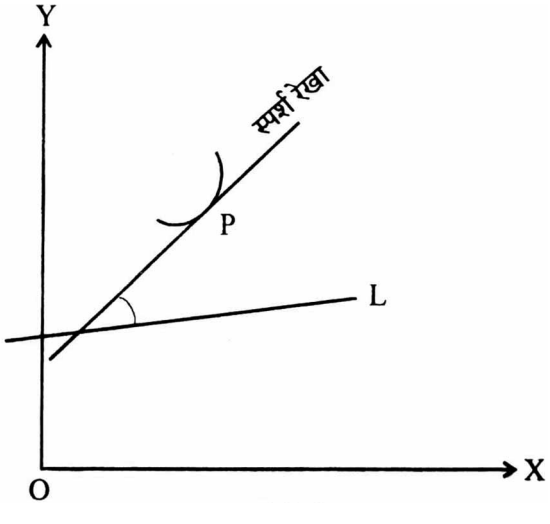


चित्र 8.4

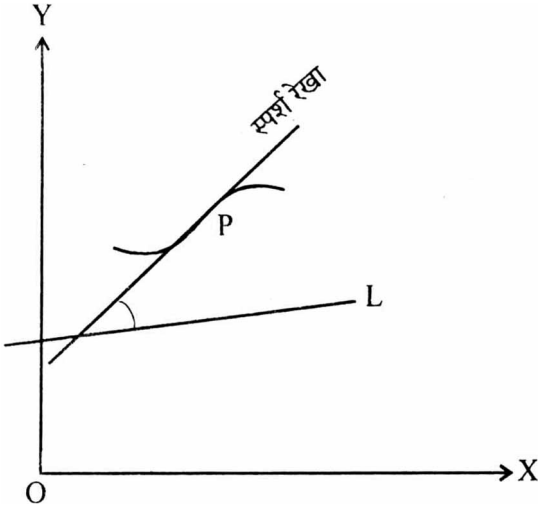
8.3 अवतलता, उत्तलता तथा नति परिवर्तन बिन्दु



चित्र 8.5



चित्र 8.6



चित्र 8.7

अवतलता (concave) : चित्र 8.5 में P किसी वक्र पर एक बिन्दु है तथा L एक स्थिर सरल रेखा है जो बिन्दु P से नहीं गुजरती है। बिन्दु P पर खींचे गए स्पर्श रेखा तथा स्थिर रेखा L के बीच बने न्यूनकोण में बिन्दु P के दोनों और फैला हुआ चाप पूर्णरूप से भीतर हो तो बिन्दु P पर वक्र को रेखा L के सापेक्ष अवतल कहते हैं तथा x-अक्ष के सापेक्ष वक्र y = f(x) के किसी बिन्दु P (x, y) पर अवतल होनें के लिए अभीष्ट प्रतिबन्ध $y\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ होगा।

y-अक्ष के सापेक्ष अवतल होनें का प्रतिबन्ध $x\frac{d^2x}{dy^2} < 0$ होगा।

उत्तलता (Convex) :

चित्र 8.6 में बिन्दु P पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा स्थिर रेखा L के बीच बने न्यूनकोण से बिन्दु P के दोनों ओर फैला हुआ पर्याप्त छोटा चाप पूरी तरह से बाहर है तो बिन्दु P पर वक्र कों रेखा L के सापेक्ष उत्तल कहते है।

x-अक्ष के सापेक्ष वक्र y = f(x) के किसी बिन्दुP (x,y) पर उत्तल होने का अभीष्ट प्रतिबन्ध $y\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ होगा तथा y-अक्ष के सापेक्ष उत्तल होने का प्रतिबन्ध $x\frac{d^2x}{dy^2} > 0$ होगा।

नति परिवर्तन बिन्दु (Point of inflexion) :

चित्र 8.7 में बिन्दु P पर सरल रेखा L के सापेक्ष एक ओर अवतल तथा दूसरी ओर उत्तल है तो बिन्दु P को नति पीरवर्तन बिन्दु कहते है।

बिन्दु P नति -परिवर्तन बिन्दु होगा यदि

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ परन्तु } \frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$$

उदाहरण 1 : सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक बिन्दु जहाँ वक्र y =b sin (x / a) x -अक्ष को मिलता है, वक्र का नति परिवर्तन बिन्दु है।

हल : वक्र x-अक्ष को वहाँ मिलता है जहाँ y = 0 है

अत : $\sin\left(\frac{x}{a}\right)=0\Rightarrow\frac{x}{a}=n\pi$ या $x=an\pi\ (n=0,1,2.....)$

पुन : $\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\cos\frac{x}{a}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-b}{a^2}\sin\frac{x}{a}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-b}{a^3}\cos\frac{x}{a}$$

परन्तु नति परिवर्तन बिन्दु के लिए

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0\Rightarrow\frac{-b}{a^2}\sin\frac{x}{a}=0$$

$$\Rightarrow\sin\frac{x}{a}=0\Rightarrow x=an\pi$$

अब x = anπ के लिए

$$\frac{d^3y}{dx^3}\neq 0$$

अत: वक्र पर नति - परिवर्तन बिन्दु $x=an\pi, y=0$ है जो कि वही बिन्दु है जिस पर वक्र x-अक्ष को मिलता है।

8.4 द्विक बिन्दु विद्यमान होने का प्रतिबन्ध

माना वक्र का समीकरण

$$f(x,y)=0 \qquad \text{.....(1)}$$

है एवं $P(x,y)$ इस वक्र पर एक बिन्दु है तो बिन्दु P पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

या $$\frac{df}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{..... (2)}$$

यदि P(x,y) वक्र का द्विक बिन्दु है तो पीरभाषानुसार द्विक बिन्दु पर दो स्पर्श रेखाएँ होनी चाहिए। अर्थात् $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ के P (x, y) पर दो मान प्राप्त होने चाहिए। परन्तु (2) $\frac{dy}{dx}$ में प्रथमघात का समीकरण है एवं $\frac{dy}{dx}$ के एक से अधिक मानों द्वारा तब ही संतुष्ट हो सकता है जब $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ एवं $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ हो किसी वक्र $f(x,y)=0$ पर $P(x,y)$ के द्विक बिन्दु होने का आवश्यक प्रतिबन्ध निम्न है:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ तथा f =0

समीकरण (1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx}\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 0$$

या $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \times \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{.... (3)}$$

$$\left[\because \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ एवं } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right]$$

समीकरण (3) $\frac{dy}{dx}$ में एक द्विघात समीकरण है एवं इससे $\frac{dy}{dx}$ के दो मान प्राप्त होगें अत: वक्र के बिन्दु P दो स्पर्श रेखाएँ होंगी। ये स्पर्श रेखाएँ समीकरण (3) के मूलों की प्रकृति के अनुसार पृथक् -पृथक् वास्तविक, सम्पाती अथवा काल्पनिक होंगी।

अत: बिन्दु P

(i) एक नोड (दोनों स्पर्श रेखाएँ वास्तविक व पृथक् -पृथक्) है

यदि $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

(ii) एक उभयाग्र होगा (दोनों स्पर्श रेखाएँ सम्पाती हों)

यदि $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

(iii) एक वियुक्त बिन्दु होगा यदि (स्पर्श रेखाएँ काल्पनिक होगी) :

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$,

उदाहरण 1 : निम्न वक्र के द्विक बिन्दुओं की स्थिति -तथा प्रकृति ज्ञात कीजिए।

$$x^3 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$$

हल : यहाँ $f(x, y) = x^3 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$

अत : $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 14x + 15$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 4$

परन्तु द्विक बिन्दु के लिए $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ तथा f = 0 होता है

$$\because \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 14x + 15 = 0 \Rightarrow x = 3, 5/3$$

तथा $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow -2y + 4 = 0 \Rightarrow y = 2$

अत : $\frac{\partial f}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial f}{\partial y}$ से दो बिन्दु (3,2); $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$ प्राप्त होते हैं परन्तु इनमें केवल (3,2) वक्र पर है क्योंकि यह वक्र के समीकरण को संतुष्ट करता है। अत : वक्र का बिन्दु (3,2) केवल द्विक बिन्दु है।

पुन : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 14, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$ तथा $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

∵ बिन्दु (3,2) पर $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$ तथा $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = -8 \text{ तथा } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

अत: बिन्दु (3,2) पर $\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$

अत : द्विक बिन्दु (3,2) एक नोड है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न

1. x -अक्ष के सापेक्ष वक्र y = f (x) के किसी बिन्दु P (x, y) पर अवतल होनें के लिए अभिष्ट प्रतिबन्ध क्या होगा?
2. y-अक्ष के सापेक्ष वक्र y = f(x) के किसी बिन्दु P (x,y) पर उत्तल होनें के लिए अभिष्ट प्रतिबन्ध क्या होंगा?
3. वक्र पर ऐसा बिन्दु जिससे वक्र की एक से अधिक शाखाएँ गुजरती है उस बिन्दु को..... कहते हैं।
4. वक्र पर कोई बिन्दु ऐसा हो कि जिसके निकट वक्र का कोई वास्तविक बिन्दु स्थित नहीं हो उसे.....कहते हैं द्विक बिन्दु नोड होने का प्रतिबन्ध क्या है?

8.5 कार्तीय वक्र के अनुरेखण की विधि

वक्र के अनुरेखण में हम निम्न विधि को बिन्दुवार उपयोग में लाते हैं।

1. **सममिति (symmetry) :** सर्वप्रथम वक्र किसी रेखा के सापेक्ष सममित है उसे ज्ञात करते हैं।
   (a) X -अक्ष के परित सममिति; यदि वक्र के समीकरण में y की सभी घाते सम हों तो वक्र x-अक्ष परित सममित होगा। उदाहरणार्थ परवलय $y^2 = 4ax$ x-अक्ष के परित सममित होता है।
   (b) y-अक्ष के परित सममिति : यदि वक्र के समीकरण में x की सभी घातें समघातें है तो वह y-अक्ष के परित सममित होगा। उदाहरणार्थ परवलय $x^2 = 4ay$ y-अक्ष के पारित सममित है।
   (c) y =x के परित सममिति : यदि x व y के परस्पर बदलने से वक्र के समीकरण में कोई परिवर्तन नहीं होता है तो वक्र y=x रेखा के परित सममित होता है। उदाहरणार्थ वक्र $x^3 + y^3 = 3axy$ रेखा y=x के परित सममित होगा।

(d) y = -x के परित सममिति : यदि x के स्थान पर (-y) तथा y के स्थान पर (-x) वक्र के समीकरण मे रखनें पर कोई परिवर्तन नहीं होता है तो वक्र y = -x के पारित सममित होता है।

(e) सम्मुख चतुर्थाशों में सममिति : यदि वक्र के समीकरण में x तथा y के चिन्ह बदलनें पर समीकरण अपरिवर्तित रहे तो वक्र सम्मुख चतुर्थाशों में सममित होगा। उदाहरणार्थ वक्र xy = c^2 सम्मुख चतुर्थाशों में सममित है।

2. **मूल बिन्दु की स्थिति** : यदि वक्र के समीकरण में कोई अचर पद नहीं है तो मूल बिन्दु वक्र पर स्थित है। मूल बिन्दु पर स्पर्श रेखा का समीकरण न्यूनतम घातों वाले पदों को शून्य के बराबर रखनें पर प्राप्त होगा। स्पर्श रेखाओं से मूल बिन्दु की प्रकृति ज्ञात होती है कि यह नोड या उभयाग्र या वियुक्त बिन्दु होगा। उदाहरणार्थ $x^3 + y^3 = 3axy$ =0 वक्र मूल बिन्दु से गुजरता है व यहाँ स्पर्श रेखाऐं $xy = 0 \rightarrow x = 0$ व y =0 हैं।
3. **अनन्तस्पर्शियाँ :** किसी वक्र की अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात करने की विधि हम इकाई 7 में पढ़ चुके है। इकाई 7 में वर्णित विधियों द्वारा अनन्त स्पर्शी ज्ञात कर लेते हैं। वक्र अनन्तस्पर्शियों के किस ओर है यह भी पूर्व बताई गई विधि से ज्ञात कर लेते हैं।
4. **अक्षों पर प्रतिच्छेद बिन्दु :** वक्र के समीकरण में y = 0 रखने पर x के वास्तविक मान व y = 0 से वह बिन्दु प्राप्त हो जायेगें जहाँ वक्र x-अक्ष को काटेगा।

   इसी प्रकार x =0 रखनें पर y के वास्तविक मान यदि प्राप्त होते हैं तो x = 0 तथा y के उन वास्तविक मानों से वह बिन्दु प्राप्त होंगे जहाँ वक्र y-अक्ष को काटेगा।
5. **क्षेत्र (Region) :** उन क्षेत्रों को ज्ञात करते हैं जहाँ वक्र का कोई भाग स्थित नहीं है अथवा वक्र किस क्षेत्र में स्थित है। यदि x के किसी मान के लिए जो a से अधिक है y का यदि काल्पनिक मान प्राप्त होता है तो वक्र का कोई भी भाग x = a के बाहर स्थित नहीं होगा। यदि y के किसी मान जो b से अधिक है के लिए x का यदि काल्पनिक मान प्राप्त होता है तो वक्र का कोई भाग y=b के बाहर स्थित नहीं होगा। यह क्षेत्र जानने के लिये भिन्न वक्रों में भिन्न स्थिति होगी।
6. **वर्धमान अथवा ह्रासमान :** वक्र के समीकरण को x अथवा y के लिए हल करनें पर हमें यह ज्ञात हो सकता है कि x के बदलनें पर y किस प्रकार परिवर्तित होता है। इससे यह पता लगाते हैं कि यह वर्धमान है अथवा ह्वासमान है। इससे वक्र अनुरेखण में सहायता रहती है।

टिप्पणी :

1. आवश्यक नहीं है कि प्रत्येक वक्र के लिए इन समस्त बिन्दुओं का उपयोग हो।
2. ग्राफ पेपर का उपयोग नहीं करना है।
3. वक्र का चित्र मात्र एक निर्देश है कि वक्र का आकार कैसा होगा। वक्र का चित्रण उन्मूक्त हाथ (Free hand) से करें।
4. प्रश्न में चित्रण करने के लिये लाये गये बिन्दुओं का उल्लेख रचना के समान करें।

उदाहरण 1. निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए :

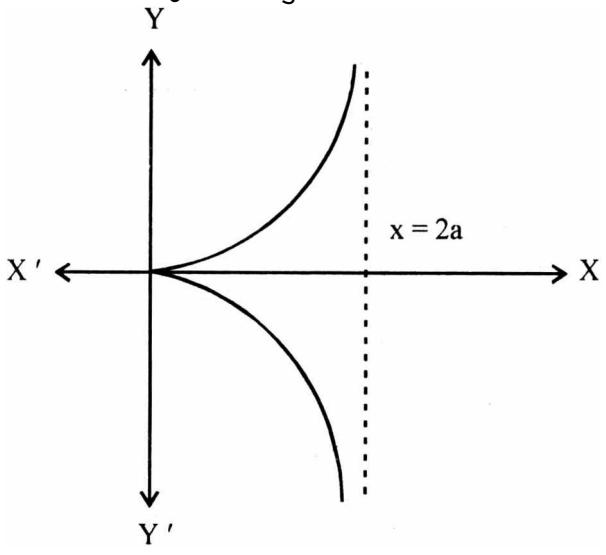
$$y^2(2a - x) = x^3$$ (सिसायड)

हल : वक्र का समीकरण है

$$y^2(2a - x) = x^3 \quad \text{.....(1)}$$

1. **सममिति :** समीकरण में y की घातें सम हैं अत: यह वक्र x -अक्ष के पारित सममित है।
2. **मूल बिन्दु की स्थिति :** वक्र के समीकरण में अचर पद नहीं है अत: यह वक्र मूल बिन्दु से गुजरता है। न्यूनतम कोटि के पदों को शून्य रखनें पर स्पर्शी $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0, y = 0$ दो सम्पाती रेखाएँ है। अत: बिन्दु की प्रकृति उभयाग्र होगी।
3. **अनन्त स्पर्शी :** यहाँ $x = 2a, y$ -अक्ष के समान्तर अनन्तस्पर्शीहै।
4. **बिन्दु :** वक्र अक्षों को मूल बिन्दु के अलावा कहीं नहीं काट रहा है।
5. **क्षेत्र :** (1) से $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ में यदि x ऋणात्मक लें तो y काल्पनिक हो जाता है तथा यदि x > 2a लें तो भी y काल्पनिक हो जाता है। अत: वक्र y अक्ष तथा अनन्तस्पर्शी x =2a के मध्य स्थित होगा।
6. **वर्धमान तथा ह्वासमान :** x का मान 0 से 2a तक बढ़ता है तो y का मान 0 से α तक बढ़ता है अत: फलन वर्धमान है।

   अत: सभी तथ्यों से वक्र की आकृति निमानुसार होगी।



चित्र 8.8 : सिसायड

उदाहरण 2 : डिकार्टेस के फोलियम

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

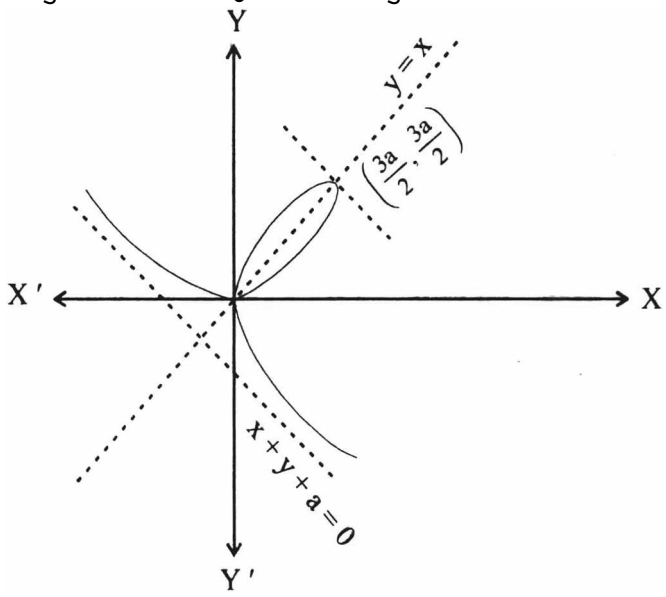
का अनुरेखण कीजिये।

हल : वक्र का समीकरण है।

$$x^3 + y^3 = 3axy \qquad \text{.....(1)}$$

1. **सममिति :** यदि वक्र के समीकरण में x तथा y को परस्पर बदल दें तो समीकरण अपरिवर्तित रहता है अत: वक्र रेखा y = x के पारित सममित है।
2. **मूल बिन्दु :** वक्र के समीकरण में कोई अचर पद नहीं है अत: वक्र मूल बिन्दु से गुजरता है। वक्र के समीकरण की न्यूनतम कोटि के पदों को शून्य रखने पर मूल बिन्दु स्पर्शी $xy = 0 \Rightarrow x = 0, y = 0$ अर्थात् मूल बिन्दु की प्रकृति नोड है।
3. **अनन्त स्पर्शी :** दिये गये वक्र की अनन्त स्पर्शी केवल $x + y + a = 0$ हैं।

4. **बिन्दु :** y = x तथा वक्र के समीकरण को हल करने पर बिन्दु (0,0) तथा $\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)$ प्राप्त होते हैं। यहाँ $\frac{dy}{dx}=-1$ अत: स्पर्शी x -अक्ष कें साथ 135^0 का कोण बनायेगी।
5. **क्षेत्र :** वक्र के समीकरण (1) से स्पष्ट है कि x तथा y दोनों एक साथ ऋणात्मक नहीं हो सकते अत: तृतीय पाद में वक्र का कोई भी भाग स्थित नहीं होगा।
   सभी तथ्यों के अनुसार वक्र की आकृति निम्न अनुसार होगी।



चित्र 8.9

उदाहरण 3 : निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$$ay^2=x\left(x-a\right)^2$$

हल : वक्र का समीकरण है :

$$ay^2=x\left(x-a\right)^2 \qquad \text{.....(1)}$$

1. सममिति :y की घातें सम है अत: x-अक्ष के परित सममित होगा।
2. मूल बिन्दु : वक्र के समीकरण में कोई अचर पद नहीं हैं अत: वक्र मूल बिन्दु से होकर गुजरता है तथा मूल बिन्दु पर स्पर्शी x=0 है तथा वक्र x-अक्ष को (a,0) पर मिलेगा अत: वक्र बिन्दु का (a,0) पर स्थानान्तरण करने पर
   $ay^2=x^2\left(x+a\right)$
   अत: नये मूल बिन्दु पर स्पर्शी $y=\pm x$ होगी।
   ∴ बिन्दु (a,0) पर नोड है।
3. **अनन्तस्पर्शीयाँ :** वक्र की कोई अनन्तस्पर्शी नहीं है।
4. **बिन्दु :** (1) से $\frac{dy}{dx}=\frac{3x-a}{2\sqrt{ax}}$

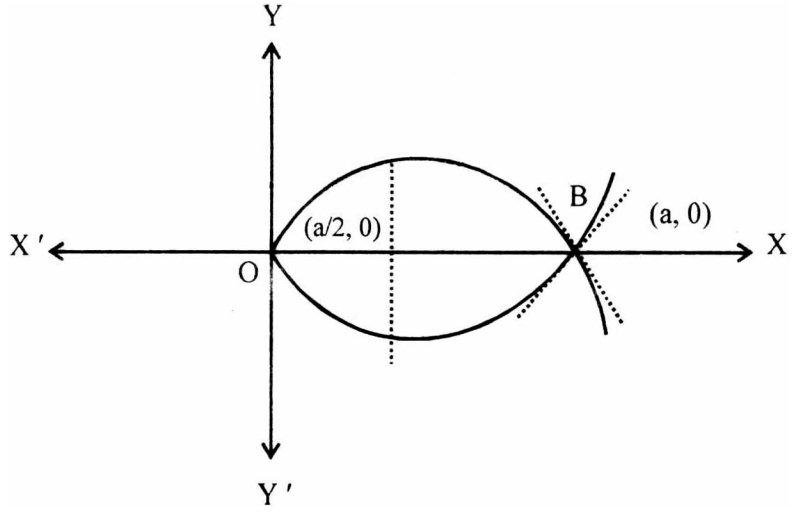
$\because \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = a/3$ अत: x - अक्ष के समान्तर स्पर्शी x =a/3 पर है।

5. **क्षेत्र :** x <0 के लिए $(x-a)^2$ घनात्मक तथा $y^2 < 0$ काल्पनिक अर्थात् वक्र का कोई भी भाग x=0 या y अक्ष के बांयी तरफ नहीं है।

6. **वर्धमान तथा ह्रासमान :** (1) से $y = (x-a)\sqrt{\frac{x}{a}}$

   x का मान 0 से $\frac{a}{3}$ तक बढ़ेगा तो y को मान 0 से $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ तक बढ़ेगा। जब x का मान $\frac{a}{3}$ से a तक बढ़ेगा तो y का मान $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ से 0 होगा। जब x का मान a से 0 तक बड़े तो y का मान 0 से ∞ तक बढेगा।

   अत: वक्र की आकृति निम्नानुसार होगी।



चित्र 8.10

8.6 ध्रुवीय वक्र अनुरेखण

माना वक्र का समीकरण r = f (θ) है।

1. सममिति :

(a) यदि r = f (θ) में θ के स्थान पर - θ रखेंगे पर वक्र का समीकरण वही रहता है तो वक्र प्रारम्भिक रेखा के सापेक्ष सममित होगा।

(b) यदि r = f (θ) में θ के स्थान पर (π - θ) रखनें पर वक्र का समीकरण परिवर्तित नहीं हो तो वक्र θ = π / 2 के सापेक्ष सममित होगा।

(c) यदि वक्र के समीकरण में r के स्थान पर-r रखनें पर वक्र का समीकरण अपरिवर्तित रहता है तो वक्र ध्रुव के सापेक्ष सममित होगा तथा ध्रुव केन्द्र होगा।

2. **ध्रुव (Pole) :** यदि θ के किसी मान के लिए वक्र के समीकरण में r का मान शून्य हों तो वक्र ध्रुव से होकर गुजरेगा।

3. **अनन्तस्पर्शी :** इकाई 7 में बताई गई विधियों से अनन्त स्पर्शी ज्ञात करते हैं।

4. **बिन्दु :** θ के मानक मानों के लिए r का मान वक्र के समीकरण से ज्ञात करके सारणी तैयार करते हैं।
5. **क्षेत्र :** वक्र के समीकरण को r के लिए हल करते हैं तथा जब θ का मान बढ़ता है तो r का मान घटता है या बढ़ता है यह ज्ञात करते है। r का अधिकतम तथा न्यूनतम मान ज्ञात करते हैं।

उदाहरण : 1 निम्न वक्र का अनुरेखण किजिए :

r = a (1+ cos θ) (cardioid) (कारडिऑइड)

हल :

1. **सममिति :** वक्र के समीकरण में θ के स्थान पर - θ रखने पर समीकरण अपरिवर्तित रहता है अत: वक्र प्रारम्भिक रेखा के सापेक्ष सममित है।
2. **ध्रुव (Pole) : (a)** जब $\theta = \pi$ तो r = 0 अत: वक्र ध्रुव से होकर गुजरेगा।
   (b) ध्रुव पर स्पर्शी का समीकरण $\theta=\pi$ है।
3. **ϕ का मान** : $\tan\phi = r\dfrac{d\theta}{dr}$

$$= a(1+\cos\theta)\times\frac{1}{-a\sin\theta}$$

$$= -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}$$

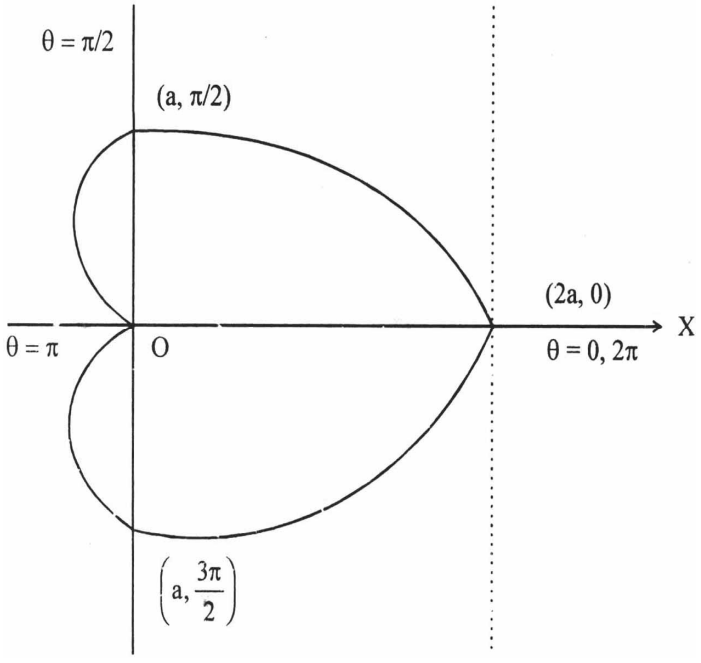
जब $\phi = \pi/2$ तो θ =0 तथा r =2a

अत: (2a,0) पर स्पर्शी प्रारम्भिक रेखा θ=0 के लम्बवत् है।

4. **अनन्तस्पर्शी :** वक्र का कोई अनन्तस्पर्शी नहीं है
5. r व θ के मान के लिए निम्न तालिका बनाते हैं।

θ =	0	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r =	$2a$	$\frac{3a}{2}$	a	$a/2$	0	a	$2a$

जब θ का मान 0 से π तक बढ़ता है तो r का मान 2a से 0 तक घटता है। वक्र प्रारम्भिक रेखा के पारित सममित है अत: पहले θ = 0 से π के मध्य वक्र खींचते है। इसके बाद सममिति से पूर्ण वक्र अनुरेखण करते हैं।



चित्र 8.11

उदाहरण 2 : निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिये:

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (बरनील का द्विपाशी)

हल :

1. **सममिति :** θ के स्थान पर - θ तथा r के स्थान पर - r रखने पर वक्र के समीकरण में कोइ पीरवर्तन नहीं हैं अत: वक्र प्रारम्भिक रेखा तथा ध्रुव के सापेक्ष सममित है।
2. **ध्रुव :** जब $\theta = \pi / 4$ तब r =0 तथा $\theta = \frac{3\pi}{4}$ तब r =0 अत: वक्र ध्रुव होकर गुजरता है तथा ध्रुव पर स्पर्शी रेखा $\theta = \pi / 4$ तथा $\theta = \frac{3\pi}{4}$ है।
3. **अनन्तस्पर्शी :** वक्र की कोई अनन्तस्पर्शी नहीं है।
4. $r^2 = a^2 \cos^2 \theta$ का लघुगणक लेकर अवकलन करनें पर

$$\frac{2}{r}\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{\cos 2\theta}(-\sin 2\theta).2$$

$$\Rightarrow \cot\phi = \cot\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right)\left[\because \tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}\right]$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} + 2\theta$$

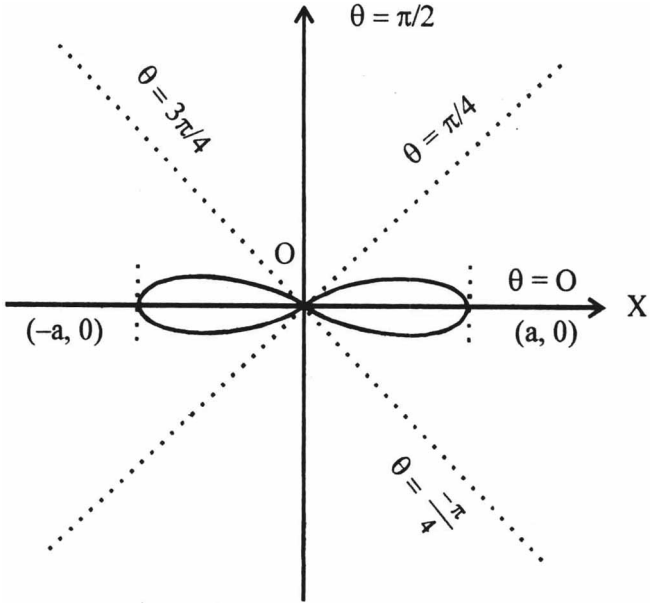
जब θ = 0 तो ϕ = π / 2 अर्थात (a,0) पर स्पर्श रेखा ध्रुवान्तर रेखा के लम्बवत हैं।

r व θ के मान के लिए निम्न सारणी बनाते हैं।

$\theta =$	0	$\pi / 6$	$\pi / 4$	$\pi / 3$	$\pi / 2$	$\frac{2\pi}{3}$	π

$r =$	a	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	0	काल्पनिक	काल्पनिक	काल्पनिक	$-a$

उपरोक्त सभी बिन्दुओं को ध्यान में रखने पर वक्र की आकृति निम्नानुसार प्राप्त होगी।



चित्र 8.12

8.7 प्राचलिक वक्र अनुरेखण

माना वक्र के प्राचलिक समीकरण x = f (t) तथा y= ϕ (t) है तो इन समीकरणों से t का विलोपन करनें पर वक्र कार्तीय समीकरण के रूप में परिवर्तित हो जायेगा तथा पहले इकाई (8.5) में बताये अनुसार अनुरेखण करेंगे परन्तु यदि t विलोपन सम्भव नहीं हो तो निम्न विधि अपनाते हैं।

1. **सममिति :**
   (a) यदि f (t) समफलन अर्थात् f (-t) = f (t) तथा ϕ (t) विषम फलन अर्थात् ϕ (-t) = - ϕ (t) हो तो वक्र x-अक्ष के सापेक्ष सममित होता है।
   (b) यदि f(t) विषय फलन तथा ϕ (t) सम फलन हो तो वक्र y-अक्ष के सापेक्ष सममित होता है।
   (c) यदि f (-t) = - f (t) तथा ϕ (-t) = - ϕ (t) तो वक्र सम्मुख पाद सममित होता है।
2. **मूल बिन्दु :** यदि x = 0 रखने पर t का वास्तविक मान प्राप्त हो तथा इस t के मान के लिए y =0 हो तो वक्र (0,0) से गुजरेगा।
3. **अनन्तस्पर्शी :** अनन्तस्पशी ज्ञात करने की सामान्य विधियों से अनन्तस्पर्शी ज्ञात कर लेते
4. **बिन्दु :** अक्षों पर कटान बिन्दु ज्ञात करने हेतु x = 0 तथा y = 0 अलग-अलग रखें तथा t के वास्तविक मान प्राप्त हों तो वक्र y-अक्ष तथा x-अक्ष को काटेगी।
5. **क्षेत्र :** वह क्षेत्र ज्ञात करते हैं जिसमें वक्र स्थित है।
6. **उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ट :** $\frac{dy}{dx} = 0$ या ∞ से वह बिन्दु ज्ञात करते हैं जिन पर स्पर्शी अक्षों के समान्तर है।

उदाहरण 1: निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$ (चक्रज) (cycloid)

हल :

1. **सममिति :** x =a $(\theta + \sin\theta)$ में θ के स्थान पर - θ रखें तो x = -a$(\theta + \sin\theta)$ प्राप्त होगा। परन्तु y=a $(1 - \cos\theta)$ में θ के स्थान पर -θ रखनें पर यह अपरिवर्तित रहता है अत: वक्र y अक्ष।
2. **मूल बिन्दु :** 0 तब θ = 0 जब θ = 0 , y = 0अत: वक्र (0,0) से होकर गुजरता है
3. **अनन्तस्पर्शी :** वक्र की कोई अन्नतस्पर्शी नहीं हैं।
4. **अक्षों से प्रतिच्छेदन :** जब $y = 0, \theta = 0 \Rightarrow x = 0$ अत: वक्र x -अक्ष को (0, 0) पर तथा y-अक्ष को (0, 0) पर काटता है।
5. **बिन्दु तथा क्षेत्र :**

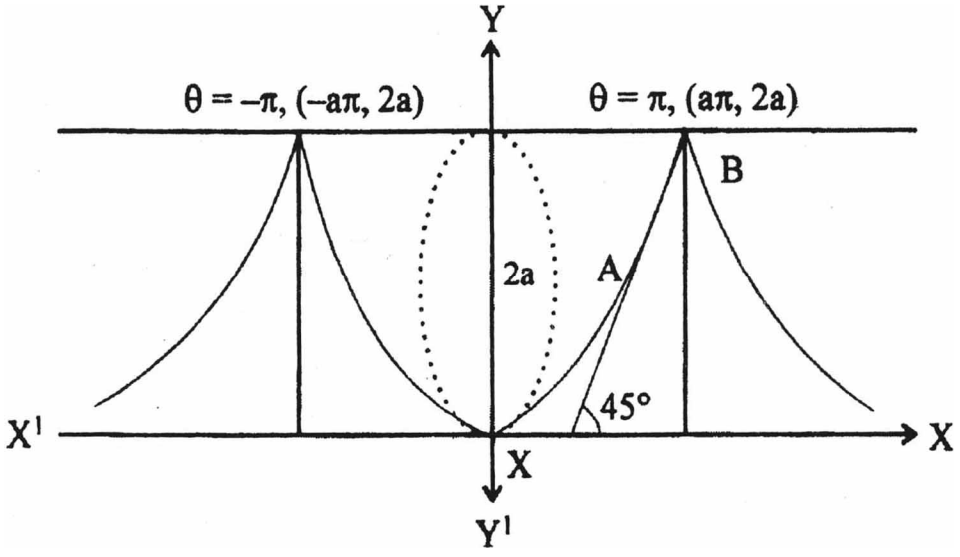
$$\frac{dx}{d\theta} - a(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} - a\sin\theta$$

अत: $\frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \tan\frac{\theta}{2}$

$\theta =$	0	$\pi/2$	π	2π	$-\pi/2$	$-\pi$
$x =$	0	$a\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$	$a\pi$	$2a\pi$	$-a\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$	$-a\pi$
$y =$	0	a	$2a$	0	a	$2a$
$\frac{dy}{dx} =$	0	1	∞	0	-1	$-\infty$

बिन्दु (0,0) पर वक्र की प्रवणता शुन्य है अत: x-अक्ष मूल बिन्दु पर स्पर्श रेखा होगी। पुन: $A\left\{a\left(\frac{\pi}{2}+1\right), a\right\}$ पर यही प्रवणता 1 है अर्थात् स्पर्श रेखा x-अक्ष के साथ 45^0 का कोण बनायेगी। इसी प्रकार $B(a\pi, 2a)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ∞ है अत: स्पर्श रेखा x-अक्ष पर लम्बवत् होगी। इन तथ्यों से वक्र-आकृति निम्नानुसार होगी।



चित्र 8.13 : चक्रज (Cycloid)

8.8 सारांश

इस अध्याय में हमने यह अध्ययन किया कि कार्तीय वक्र, ध्रुवीय वक्र व प्राचलिक वक्रों का अनुरेखण किस प्रकार करते हैं। वक्र अनुरेखण की. सहायता से समाकलन गणित में द्विसमाकलन, त्रिसमाकलन, क्षेत्रकलन, चापकलन तथा परिक्रमण ठोसों के आयतन तथा पृष्ठ सरलतापूर्वक ज्ञात किये जा सकते हैं।

8.9 शब्दावली

अवतलता	Concavity
उत्तलता	Convexity
नति परिवर्तन बिन्दु	Point of inflexion
नोड	Node
उभयाग्र	Cush
वियुक्त बिन्दु	Conjugate point
कार्तीय वक्र	Cartesian curve
घ्रवीय वक्र	Polar curve
प्राचलिक वक्र	Parametric curve

8.10 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1. $y\frac{d^2y}{dx^2} < 0$
2. $x\frac{d^2x}{dy^2} > 0$
3. बहुल बिन्दु

4. वियुक्त बिन्दु

5. $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$

8.11 अध्यास प्रश्न

1. वक्र $y\left(a^2+x^2\right)=x^3$ के नति-पीरवर्तन बिन्दु ज्ञात करो।

[उत्तर : $(0,0)\left(\sqrt{3}a, 3\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)\left(-\sqrt{3}a, -3\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$]

2. सिद्ध करो कि वक्र $y^2 = bx\tan\left(\frac{x}{a}\right)$ मूल बिन्दु पर a तथा b के एक चिन्ह होनें या विपरीत चिन्ह होनें के अनुसार क्रमश: नोड या वियुक्त बिन्दु होगा।

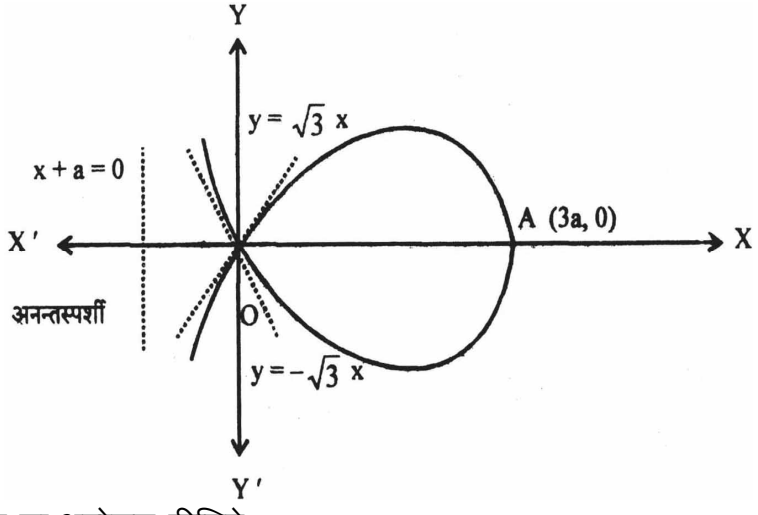
3. वक्र $(x-2)^2 = y(y-1)^2$ पर द्विक बिन्दुओं की विद्यमानता एवं उनकी प्रकृति का निर्धारण करो।

[उत्तर : बिन्दु (2,1)पर नोड]

4. निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिये

   $y^2(a+x) = x^2(3a-x)$ (स्ट्रोफायड)

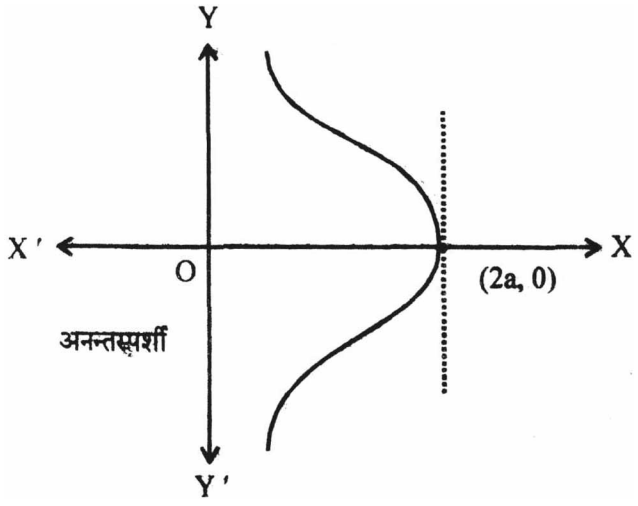
   उत्तर:



5. निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिये

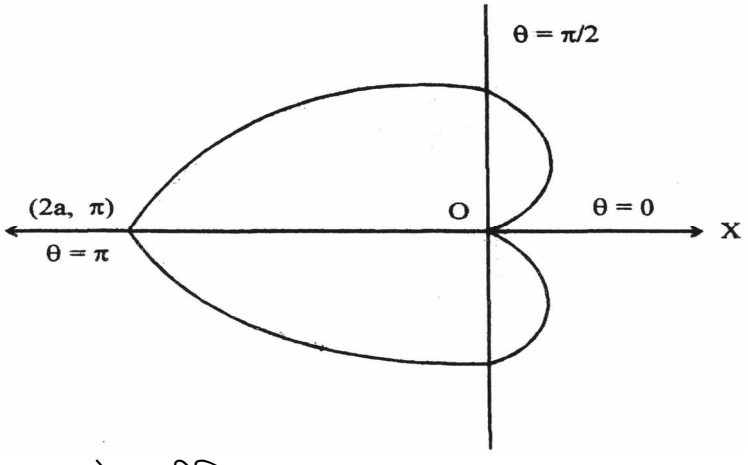
   $xy^2 = 4a^2(2a-x)$ (Witch of Agensi) (विच ऑफ एग्नेसी)

   उत्तर



6. वक्र $r = a(1-\cos\theta)$ का अनुरेखण कीजिए।

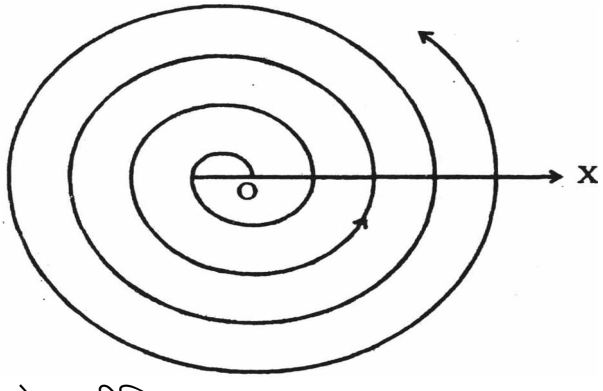
उत्तर



7. निम्म वक्र का अनुरेखण कीजिए :

$r = ae^{m\theta}$

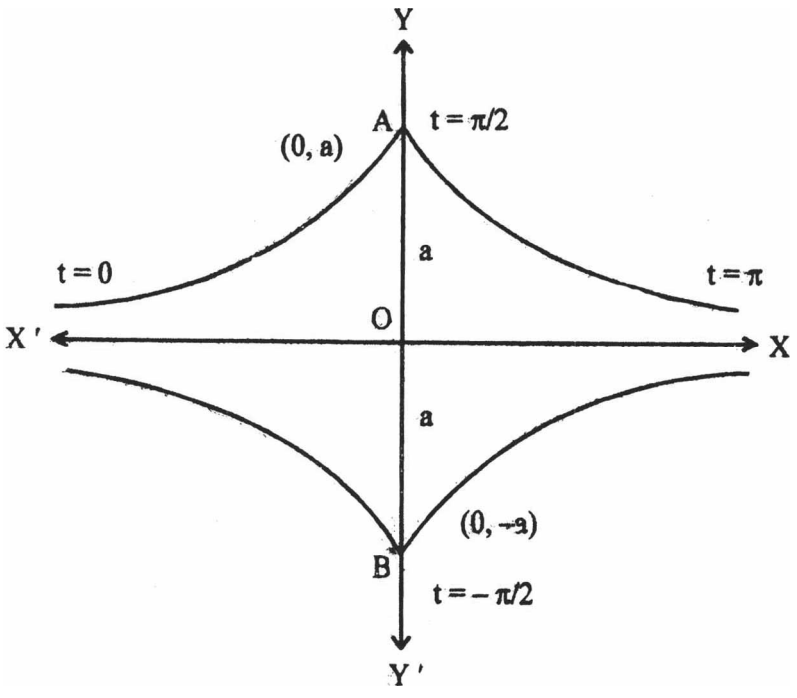
उत्तर:



8. निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए

$$x = a\cos t + \frac{1}{2}a\log\left(\tan^2\frac{t}{2}\right), y = a\sin t$$ (ट्रेक्टरी)

उत्तर



इकाई 9 : अन्वालोप (Envelop)

इकाई की रूपरेखा

9.0 उद्देश्य

9.1 प्रस्तावना

9.2 परिभाषाएँ

9.2.1 वक्र कुल

9.2.2 प्राचल

9.2.3 अन्वालोप

9.3 अन्वालोप ज्ञात करने की विधि

9.3.1 क्रिया विधि

9.3.2 विशेष स्थिति

9.4 प्रमेय

9.5 दो प्राचलों वाले समीकरण व उनके अन्वालोप

9.6 सारांश

9.7 शब्दावली

9.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

9.9 अभ्यास प्रश्न

9.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के उपरान्त आप ऐसे वक्रों को जानेंगे जो कि किसी विशिष्ट कुल के प्रत्येक सदस्य को स्पर्श करेगा तथा इस वक्र के प्रत्येक बिन्दु को उस विशिष्ट कुल को कोई न कोई सदस्य स्पर्श करेगा।

9.1 प्रस्तावना

निर्देशांक ज्यामिति से आप जानते हैं कि रेखा $y = mx + a\sqrt{1+m^2}$ के लिए भिन्न - भिन्न मानों के लिए वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ को स्पर्श करती है। इस प्रकार m के विभिन्न मानों के लिए हमें सरल रेखाओं का समूह प्राप्त होता है जो विशेष रूप से उपरोक्त वृत्त की स्पर्श रेखाओं का समूह है। इसी प्रकार $y = mx - 2am - am^3, m$ के विभिन्न मानों के लिए परवलय $y^2 = 4ax$ के अभिलंबों का समूह है। इसी प्रकार $x^2 + y^2 - 2mx = 0$ ऐसे वृत्तों का समूह है, जो m, के विभिन्न मानों के लिए केन्द्र से गुजरते हैं व जिनका केन्द्र x -अक्ष पर स्थित है।

9.2 परिभाषाएँ एवं उदाहरण

9.2.1 वक्र कुल (Family of curves)

एक समीकरण में किसी एक चर राशि को विभिन्न मान देने पर विभिन्न वक्रों का समूह वक्रकुल कहलाता है, जिसमें हरेक वक्र एक -सी प्रकृति का हो। वक्र कुल के सदस्यों को से निरूपित किया जाता है।

9.2.2 प्राचल (Parameter)

वह चर राशि जिसे भिन्न -भिन्न मान देने पर हमें वक्र कुल के समस्त सदस्य ज्ञात हो सकें प्राचल कहलाती है। वक्र कुल के समीकरण $f(x, y, a) = 0$ में a प्राचल कहलाता है।

9.2.3 अन्वालोप (Envelop)

(a) वह वक्र जो प्राचल वाले वक्र कुल के प्रत्येक सदस्य को स्पर्श करता है तथा उस वक्र के प्रत्येक बिन्दु पर कुल का कोई ना कोई सदस्य स्पर्श करे तो वह वक्र अन्वालोप कहलाता

(b) वक्रों के एक समतल कुल का अन्वालोप, कुल के किन्हीं दो वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दु के सीमान्त स्थिति का बिन्दुपथ होता है, जिनमें से एक वक्र दूसरे वक्र के साथ, जिसे स्थिर मान लिया जाता है, संपाती होने को प्रवृत्त होता है।

उदाहरण :

प्रस्तावना 9.1 में दिये गये समीकरणों $y = mx + a\sqrt{1+m^2}$ में mके भिन्न -भिन्न मानों के लिए हमें $x^2 + y^2 = a^2$ की स्पर्श रेखाएँ प्राप्त होती हैं अत:m वह चर राशि है जो कि प्राचल कहलाता है तथा $f(x, y, m) = y - mx - a\sqrt{1+m^2} = 0$ वक्र कुल को निरूपित करता है।

9.3 अन्वालोप ज्ञात करने की विधि

वक्रों का कोई नियत कुल $f(x, y, a) = 0$ है ..... (1)

जिसका प्राचल a है।

माना इसके किन्हीं दो सदस्यों $f(x, y, a) = 0$

तथा $f(x, y, a + \delta a) = 0$ ..... (2)

का प्रतिच्छेद बिन्दु P_1, है तो P_1, के निर्देशांक

$$f(x, y, a + \delta a) - f(x, y, a) = 0$$

को सन्तुष्ट करेंगे या

$$\frac{f(x, y, a + \delta a) - f(x, y, a)}{\delta a} = 0, \delta a \neq 0 \quad \text{..... (3)}$$

को सन्तुष्ट करेगा।

अब जब $\delta a \to 0$ तो बिन्दू $P_1 \to P$ तथा P के निर्देशांक

$$\frac{\partial f(x,y,\alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{.....(4)}$$

को सन्तुष्ट करेंगे।P के निर्देशांक समीकरण (1) को भी सन्तुष्ट करने चाहिए क्योंकि यह बिन्दु उस पर स्थित है।

(1) तथा (3) से प्राचल a का विलोप करने पर ऐसा समीकरण प्राप्त होगा जो a के प्रत्येक मान के लिए P निर्देशांकों से सन्तुष्ट होता है। अर्थात् P का बिन्दुपथ है।

9.3.1 क्रिया विधि

1. वक्र कुल $f(x, y, a) = 0$ का प्राचल के सापेक्ष आंशिक अवकलन करें ।
2. दिये गये समीकरण तथा आंशिक अवकलन $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ में प्राचल का विलोप करने पर अन्वालोप का समीकरण प्राप्त होता है।

उदाहरण 1. सरल रेखाओं के कुल $y = mx + am^p$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जबकि m प्राचल है।

हल : दिया हुआ वक्र कुल है

$$y = mx + am^p \qquad \text{..... (1)}$$

(1) का प्राचल m के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$o = x + apm^{p-1}$$

या $$am^p = -\frac{mx}{p} \qquad \text{.....(2)}$$

(2) में से मान (1) में रखने पर

$$y = mx - \frac{mx}{p} \text{ या } py = mx(p-1) \qquad \text{..... (3)}$$

$$p^P y^P = \left(m^P x^P\right)(p-1)^P$$

$$p^P y^P = \left(-\frac{mx}{ap}\right) x^P (p-1)^P \text{ ,(2) से रखने पर}$$

$$ap^{P+1} y^P = -\left(\frac{py}{p-1}\right) x^P (p-1)^P \text{ (3) से}$$

$$ap^P y^{P-1} = -x^P (p-1)^{p-1}$$

$$ap^P y^{P-1} + x^P (p-1)^{p-1} = 0$$

उदाहरण 2. सरल रेखाओं के कुल $x\cos\alpha + y\sin\alpha = a$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिये, जबकि α प्राचल है।

हल :दिया हुआ वक्र कुल है

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = a \qquad \text{..... (1)}$$

(1) का प्राचल α के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$-x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0 \qquad \text{..... (2)}$$

समीकरण (1) तथा (2) में से α का विलोपन करने के लिये उनका वर्ग करके योग करने पर

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad \text{..... (3)}$$

समीकरण (3) दिये हुये सरल रेखा कुल का अभिष्ट अन्वालोप है।

उदाहरण 3. उन वृत्तों का अन्वालोप ज्ञात कीजिये, जो दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ की ध्रुवान्तर - रेखाओं को व्यास मानकर खींचे गये हैं।

हल : दीर्घवृत्त

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{.....(1)}$$

पर P कोई बिन्दु है, जिसके निर्देशांक $(\alpha\cos\theta, b\sin\theta)$ दीर्घवृत्त का केन्द्र O है। उस वृत्त का समीकरण जिसका OP व्यास है

$$(x-o)(x-\alpha\cos\theta)+(y-o)(y-b\sin\theta)=0$$

या $\quad x^2-y^2-ax\cos\theta-by\sin\theta=0$

या $\quad ax\cos\theta+by\sin\theta=x^2+y^2 \qquad \text{..... (2)}$

(2) का प्राचल θ के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$-ax\sin\theta+by\cos\theta=0 \qquad \text{..... (3)}$$

प्राचल को विलोपित करने के लिये (2) तथा (3) का वर्ग करके योग करने पर

$$a^2x^2+b^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2$$

जो कि अन्वालोप का अभिष्ट समीकरण है।

उदाहरण 4 : सरल रेखा $x\cos^3\theta+y\sin^3\theta=C$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिये, जबकि θ प्राचल है

हल : सरल रेखा

$$x\cos^3\theta+y\sin^3\theta=C \qquad \text{..... (1)}$$

(1) का प्राचल θ के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$-3x\cos^2\theta\sin\theta+3y\sin^2\theta\cos\theta=0$$

या $\quad \tan\theta=x/y$

$$\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ व } \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\sin\theta$ व $\cos\theta$ के मान समीकरण (1) में रखने पर

$$x\left[\frac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\right]+y\left[\frac{x^3}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\right]=C$$

$$xy^3+yx^3=C\left(x^2+y^2\right)^{3/2}$$

या $\quad xy\left(x^2+y^2\right)=C\left(x^2+y^2\right)^{3/2}$

या $\quad xy=C\left(x^2+y^2\right)^{1/2}$

या $\quad x^2y^2=C^2\left(x^2+y^2\right)$

उदाहरण 5 : दीर्घ वृत्त $x=a\sin(\theta-a), y=b\cos\theta$ जहाँ α प्राचल है, अन्वालोप ज्ञात कीजिये।

हल : दीर्घवृत्त $x=a\sin(\theta-a)$ .....(1)

$$y = b\cos\theta \qquad \text{.....(2)}$$

(1) का प्राचल α के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$0 = -a\cos(\theta - \alpha) \qquad \text{.....(3)}$$

(1) व (3) को वर्ग करके जोड़ने पर

$$x^2 = a^2$$

अथवा $x = \pm a$

उदाहरण 6 : दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के किसी बिन्दु से अक्षों पर लम्ब खींचे गये हैं और लम्ब पाद मिला दिये गये हैं। सिद्ध कीजिये कि इस प्रकार प्राप्त रेखा, वक्र को $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ सदैव स्पर्श करती है।

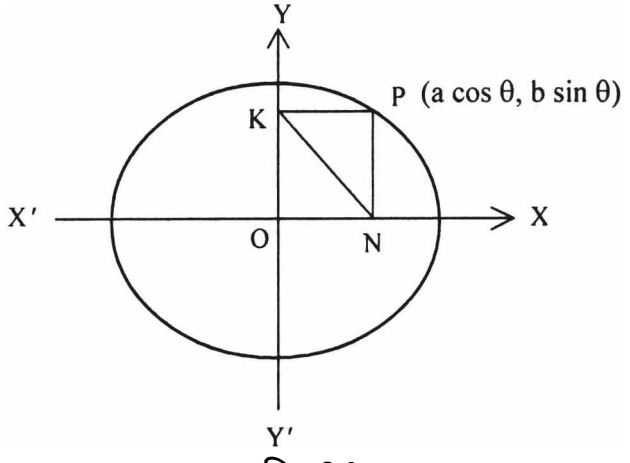
हल : माना $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ दीर्घ वृत्त

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{.,.. (1)}$$

पर कोई बिन्दु है।P से अक्षों पर क्रमश: PN व PK लम्ब डाले, तो N के निर्देशांक (a cos θ , 0) व K के निर्देशांक (0 , b sin θ)। रेखा NK का अन्वालोप ज्ञात करना है। रेखा NK का समीकरण होगा

$$\frac{x}{a\cos\theta} + \frac{y}{b\sin\theta} = 1 \qquad \text{..... (2)}$$

प्राचल θ के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर



चित्र 9.1

$$\frac{x}{a\cos^2\theta}(\sin\theta) - \frac{y}{a\sin^2\theta}(\cos\theta) = 0$$

या $$\frac{\sin^3\theta}{y/b} = \frac{\cos^3\theta}{x/a}$$

या $$\frac{\sin\theta}{(y/b)^{1/3}}=\frac{\cos\theta}{(y/a)^{1/3}}=\frac{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}{\sqrt{(y/b)^{2/3}+(y/a)^{2/3}}}=\frac{1}{(x/a)^{2/3}+(y/b)^{2/3}}$$

Sin θ व cos θ का मान (2) में रखने पर

$$(x/a)^{2/3}\left\{(x/a)^{2/3}+(y/b)^{2/3}\right\}^{1/2}+(y/b)^{2/3}\left\{(x/a)^{2/3}+(y/b)^{2/3}\right\}^{1/2}=1$$

$$\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}=1$$

या $$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

9.3.2 विशेष स्थिति

जब कुल का समीकरण प्राचल में द्विघाती हो

माना $f(x,y,\alpha)\equiv A\alpha^2+B\alpha+C=0$ .... (1)

α में द्विघाती है जो वक्र के कुल को प्रदर्शित करता है, जहाँ A,B तथा C,x,y के फलन हैं।

(1) को α के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$2A\alpha+B=0,\alpha=-\frac{B}{2A}$$ .....(2)

(1) व (2) में α को विलोप करने पर

$$A\left(\frac{-B}{2A}\right)^2+B\left(\frac{-B}{2A}\right)+C=0$$

$B^2-4AC=0$ जो कि अभीष्ट अन्वालोप है

उदाहरण 1 : सरल रेखाओं के कुल $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिये, जबकि m प्राचल है।

हल : दिया हुआ वक्र कुल है

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

या $$(y-mx)^2=a^2m^2+b^2$$

या $$m^2(x^2-a^2)-2xym+(y^2-b^2)=0$$

यह m में द्विघाती समीकरण है

अत : इसका अन्वालोप $B^2=4AC$ हैं

$$4x^2y^2=4(x^2-a^2)(y^2-b^2)$$

या $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

उदाहरण 2 : वक्र कुल $(x-a)^2+(y-a)^2=2a$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिये, जबकि a प्राचल है

हल : दिया हुआ वक्र कुल है

$$(x-a)^2+(y-a)^2=2a$$

या $\quad 2a^2-2(x+y+1)a+(x^2+y^2)=0$

यह α में द्विघाती समीकरण है

अत : इसका अन्वालोप $B^2=4AC$ है

$$4(x+y+1)^2=4.2(x^2+y^2)$$

या $\quad x^2+y^2-2xy-2x-2y-1=0$

उदाहरण 3 : उन वृत्तों का अन्वालोप ज्ञात कीजिये जिनके व्यास परवलय $y^2=4ax$ की द्विगुण कोटियाँ हैं।

हल : $P(at^2,2at)$ व $Q(at^2,-2at)$ परवलय $y^2=4ax$ की द्विगुण कोटियाँ हैं। वृत्त का समीकरण, जिसका PQ व्यास है

$$(x-at^2)(x-at^2)+(y-2at)(y+2at)=0$$

या $\quad a^2t^4-2a(x+2a)t^2+(x^2+y^2)=0$

यह t^2 में द्विघाती समीकरण है।

अत: इसका अन्वालोप $B^2 = 4\ AC$ है

$$4a^2(x+2a)^2=4a^2(x^2+y^2)$$

या $\quad y^2=4a(x+a)$

उदाहरण 4 : वक्र कुल $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{K^2-a^2}=1$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिये, a प्राचल है

हल : वक्र कुल से

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{K^2-a^2}=1$$

या $\quad x^2(K^2+a^2)+y^2a^2=a^2(K^2+a^2)$

या $\quad a^4-(x^2-y^2+K^2)a^2+K^2x^2=0$

यह a^2 में द्विघाती समीकरण है

अत: इसका अन्वालोप $B^2 = 4AC$ है

$$(x^2-y^2+K^2)^2=4K^2x^2$$

या $\quad x^2-y^2+K^2=\pm 2Kx$

या $\quad \left[(x-K)^2-y^2\right]\left[(x+K)^2-y^2\right]=0$

या $\quad (x-K+y)(x-K-y)(x+K+y)(x+K-y)=0$

या $\quad x+y=\pm K,\ x-y=\pm K$

यह चार सरल रेखायें प्रदर्शित करता है, जिनसे वर्ग बनता है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न

1. $y = mx + \frac{a}{m}$ समीकरण में m एक प्राचल है क्योंकि यह समीकरण एक वक्र कुल को प्रदर्शित करता है, जो कि
2. अन्वालोप सदैव एक सरल रेखा होती है। (सत्य / असत्य)

9.4 प्रमेय

अन्वालोप वक्र कुल के प्रत्येक सदस्य को स्पर्श करता है

वक्र कुल का समीकरण $f(x, y, \alpha) = 0$ ....(1)

वक्र कुल का अन्वालोप (1) तथा

$$\frac{\partial f(x, y\alpha)}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{.....(2)}$$

में से α का विलोपन करने पर प्राप्त होता है।

अन्वालोप का प्राचलिक समीकरण (Parametric equations) माना

$$x = \phi(\alpha) \text{ तथा } y = \psi(\alpha) \quad \text{.....(3)}$$

(3), α के प्रत्येक मान के लिये (1) को सन्तुष्ट करता है अत : α के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial f}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\phi'(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}\psi(\alpha) = 0 \quad [\because \frac{\partial f}{d\alpha} = 0(2) \text{ से}]$$

$$\frac{\psi'(\alpha)}{\phi'(\alpha)} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} \quad \text{.....(4)}$$

(4) कर बाया पक्ष अन्वालोप (3) के किसी साधारण बिन्दु (x,y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता है तथा दाहिना पक्ष अन्वालोप (3) के उसी बिन्दु (x,y,) पर खींची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता है।

(4) से स्पष्ट ये प्रवणतायें समान हैं। अत : अन्वालोप और वक्र के उभयनिष्ठ बिन्दु पर स्पर्श रेखाओं की प्रवणतायें बराबर हैं। उभयनिष्ठ बिन्दु पर वक्र कुल तथा अन्वालोप आपस में स्पर्श करते हैं।

उदाहरण 1. उन रेखाओं का अन्वालोप ज्ञात कीजिये जो कार्डिऑइड $r = a(1 + \cos\theta)$ की ध्रुवान्तर रेखाओं के सिरों से उन पर समकोण बनाती हुई खींची जाये।

हल : माना कार्डिआइड पर ले $P(r_1, \theta_1)$ कोई भी एक बिन्दु है।

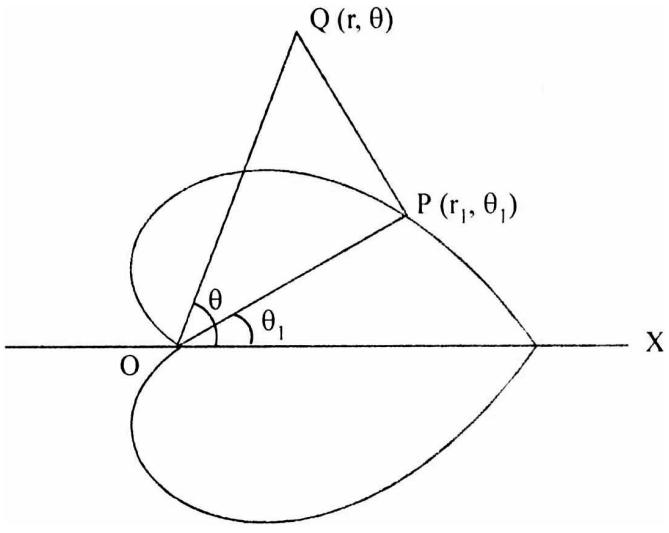
ध्रुवान्तर रेखा से समकोण बनाती हुई रेखा पर किसी बिन्दुQ के ध्रुवीय समीकरण (r,θ) हो तो, दिये हुए चित्र से

$$r\cos(\theta - \theta_1) = r_1$$

या $$r\cos(\theta - \theta_1) = a(1 + \cos\theta_1) \quad \text{.....(1)}$$

(1) का प्राचल θ_1 के सापेक्ष लघुगुणकयि अवकलन करने पर

$$\tan\left(\theta-\theta_1\right)=-\frac{\sin\theta_1}{1+\cos\theta_1}=-\tan\frac{\theta_1}{2}$$



चित्र 9. 2

या $\theta-\theta_1=\pi-\frac{\theta_1}{2}$

या $\theta_1=2\theta-2\pi$

(1) में θ_1 का मान रखने पर

$$r\cos\left(2\pi-\theta\right)=a\left[1+\cos\left(2\theta-2\pi\right)\right]$$

$$r\cos\theta=a\left(1+\cos2\theta\right)=2a\cos^2\theta$$

$$r=2a\cos\theta$$

उदाहरण 2. उन वृत्तों का अन्वालोप ज्ञात कीजिये जो वक्र $r^n=a^n\cos n\theta$ की ध्रुवान्तर रेखाओं को व्यास मानकर खींचे गये हैं।

हल : दिये हुए वक्र $r^n=a^n\cos n\theta$ पर कोई बिन्दु $\mathrm{P}\left(\mathrm{r}_1,\theta_1\right)$ है $r_1^n=a^n\cos n\theta_1$ .....(1)

OP को व्यास मानकर वृत्त खींचा तथा इस पर कोई बिन्दु Q (r ,θ) है

$\triangle OPQ$ में $\angle OPQ=\pi/2$

$\therefore OQ=OP\cos\left(\theta-\theta_1\right)$

या $\mathrm{r}=r_1\cos\left(\theta-\theta_1\right)$ .....(2)

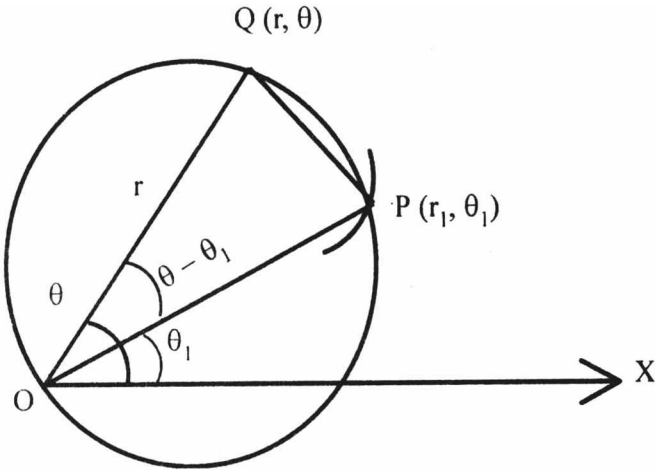
यह उस वृत्त का समीकरण है, जिसका व्यास OP है।

r_1 का मान (1) से (2) में रखने पर

$$r=a\left(\cos n\theta_1\right)^{\frac{1}{n1}}\cos\left(\theta-\theta_1\right)$$ .....(3)

(3) का प्राचल θ_1 के सापेक्ष लघुगणकीय अवकलन करने पर

$$O=-\left(\frac{1}{n}\right)n\tan n\theta_1+\tan\left(\theta-\theta_1\right)$$



चित्र 9.3

या $\theta - \theta_1 = m\pi + n\theta_1$

$$\theta_1 = \frac{\theta - m\pi}{n+1}$$

θ_1 का मान (3) में रखने पर

$$r = a\left[\cos\left\{\frac{n(\theta - m\pi)}{n+1}\right\}\right]^{\frac{1}{n}} + \cos\left[\theta - \frac{\theta - m\pi}{n+1}\right]$$

जो कि अभिष्ट अन्वालोप का समीकरण है।

उदाहरण 3 : सिद्ध कीजिये कि वक्र कुल $A\alpha^3 + 3B\alpha^2 + 3C\alpha + D = 0$ जहाँ α प्राचल है एवं A,B,C तथा D चर x,y के फलन हैं, का अन्वालोप निम्न है

$$(BC - AD)^2 = 4(BD - C^2)(AC - B^2)$$

हल : दिये गये वक्र कुल का समीकरण

$$A\alpha^2 + 3B\alpha^2 + 3C\alpha + D = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

α के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$3A\alpha^2 + 6B\alpha + 3C = 0$$

या $A\alpha^2 + 2B\alpha + C = 0$ .....(2)

(1) एवं (2) में मध्य α विलुप्त करने के लिए (2) को α से गुणा करके (1) से घटाने पर

$$B\alpha^2 + 2c\alpha + C = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

(2) एवं (3) के वज्रगुणनफल (Cross multiplication) से

$$\frac{\alpha^2}{BD - C^2} = \frac{2\alpha}{BC - AD} = \frac{1}{AC - B^2} = K \quad \text{(माना)}$$

$$a^2 = K(BD - C^2), a = \frac{(BC - AD)K}{2}$$

$$\frac{1}{K} = AC - B^2$$

$$\frac{a^2}{K}\frac{1}{K}=\frac{a^2}{K^2}$$

या $$\left(BD-C^2\right)\left(AC-B^2\right)=\left(\frac{BC-AD}{2}\right)^2$$

या $$\left(BC-AD\right)^2 = 4\left(BD-C^2\right)\left(AC-B^2\right)$$

9.5 दो प्राचलों वाले समीकरण व उनके अन्वालोप

अन्वालोप ज्ञात करना जब दो प्राचल एक सम्बन्ध द्वारा सम्बन्धित हो माना दो प्राचल a,b में एक वक्र कुल

$$\phi\left(x,y,\alpha,b\right)=0 \qquad \text{..... (1)}$$

है, जिसके दोनों प्राचल a व b एक ज्ञात सम्बन्ध

$$\psi\left(\alpha,b\right)=0 \qquad \text{..... (2)}$$

द्वारा सम्बन्धित है। यदि (1) व (2) में से एक प्राचल को विलुप्त किया जाये तो प्राप्त सम्बंध में एक ही प्राचल रह जायेगा एवं उस कुल का अन्वालोप पूर्व विधियों से आप ज्ञात कर सकते हैं। कभी -कभी विलोपन कठिन होता है, इस स्थिति में हम प्राचल a व b को अन्य प्राचल t का फलन मान कर (1) तथा (2) का t के सापेक्ष अवकलन कर $\frac{da}{dt}$ तथा $\frac{db}{dt}$ के अनुपात को समान रख a तथा b को x व y के पदों में ज्ञात करते हैं। यह विधि आगे उदाहरणों से और अधिक स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण 1. सरल रेखाओं $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिये, जहाँ प्राचल a तथा b में निम्न सम्बन्ध है

$$\left(i\right)a^n+b^n=\mathrm{c}^n\left(ii\right)a^mb^n=\mathrm{c}^{m+n}, c \text{ अचर है}$$

हल : (i) सरल रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad \text{..... (1)}$$

तथा दिया सम्बंध

$$a^n+b^n=\mathrm{c}^n \qquad \text{... (2)}$$

यहाँ (2) में b को a का फलन मान लेते हैं, अब (1) तथा (2) का a के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\frac{db}{da}=0 \qquad \text{.....(3)}$$

$$a^{n-1}+b^{n-1}\frac{db}{da}=0 \qquad \text{.....(4)}$$

(3) व (4) से $\frac{db}{da}$ का विलोप करने पर

$$\frac{x}{a^{n+1}}=\frac{y}{b^{n+1}} \qquad \text{.....(5)}$$

(1), (2) तथा (5) से a तथा b का विलोप करने के लिये (5) से

$$\frac{\frac{x}{a}}{a^n} = \frac{\frac{y}{b}}{b^n} = \frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{a^n+b^n} = \frac{1}{c^n}$$

या $a^{n+1} = Xc^n$ या $a = \left(xc^n\right)^{\frac{1}{n}+1}$

$$b^{n+1} = yc^n \text{ या } b = \left(yc^n\right)^{\frac{1}{n}+1} \quad \text{.....(6)}$$

(2) में इसका प्रतिस्थापन करने पर

$$\left(xc^n\right)^{\frac{n}{n+1}} + \left(yc^n\right)^{\frac{n}{n+1}} = c^n$$

या $x^{\frac{n}{n+1}} + y^{\frac{n}{n+1}} = c^{\frac{n}{n+1}}$

(ii) a तथा b को अन्य प्राचल t का फलन मानकर

$$a^m b^n = c^{m+n} \quad \text{.....(7)}$$

(7) का t के सापेक्ष लघुगणकीय अवकलन करने पर

$$\frac{m}{a}\frac{da}{dt} + \frac{n}{b}\frac{db}{dt} = 0 \quad \text{.....(8)}$$

(1) से $-\frac{x}{a^2}\frac{da}{dt} - \frac{y}{b}\frac{db}{dt} = 0$ .....(9)

अनुपात $\frac{da/dt}{db/dt}$ का मान समान करने पर

$$\frac{\frac{y}{b^2}}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\frac{n}{b}}{\frac{m}{a}}$$

या $\frac{x}{am} = \frac{y}{bn}$

या $\frac{\frac{X}{a}}{m} = \frac{\frac{b}{n}}{} = \frac{\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}}{m+n} = \frac{1}{m+n}$

या $a = \frac{m+n}{m}x, b\frac{m+n}{n}y$

यह मान (8) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\left(\frac{m+n}{m}x\right)^m \left(\frac{m+n}{n}y\right) = c^{m+n}$$

या $\left(m+n\right)^{m+n} x^m y^n = c^{m+n} m^m n^n$

उदाहरण 2. दीर्घ वृत्तों $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिये, जिनके अक्ष a तथा b में निम्न सम्बद्ध है

(i) a+b=c (ii) ab = c^2 (iii)a^2 +b^2 = c^2

c अचर है।

हल : (i) दीर्घवृत्त का समीकरण

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{.....(1)}$$

दिया संबंध $a+b=c$ .....(2)

(2) से $b=c-a$, (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(c-a)^2}=1 \qquad \text{.....(3)}$$

(3) का a के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$-\frac{2x^2}{a^3}+\frac{2y^2}{(c-a)^3}=0$$

$$\frac{x^2}{a^3}+\frac{y^2}{(c-a)^3}$$

या $$\frac{x^{2/3}}{a}=\frac{y^{2/3}}{c-a}=\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{c}$$

(3) तथा (4) से अ को विलोपित करने पर

$$\frac{x^2\left(x^{2/3}+y^{2/3}\right)^2}{c^2x^{4/3}}+\frac{y^2\left(x^{2/3}+y^{2/3}\right)^2}{c^2y^{4/3}}=1$$

या $$\left(x^{2/3}+y^{2/3}\right)^3=c^2$$

या $$x^{2/3}+y^{2/3}=c^{2/3}$$

(ii) यहाँ दिया सम्बन्ध

$$ab=c^2 \qquad \text{..... (5)}$$

(5) से $b=c^2/a$ ..... (6)

(1) तथा (6) से

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2y^2}{c^4}=1 \qquad \text{..... (7)}$$

(7) का a के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{-2x^2}{a^3}+\frac{2ay^2}{c^4}=0\Rightarrow a^2=\frac{c^2x}{y} \qquad \text{..... (8)}$$

(7) व (8) से (a) का विलोप करने पर

2xy = c^2

(iii) दिया सम्बन्ध $b^2=c^2-a^2$ ..... (9)

(1) तथा (9) से

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2-a^2}=1 \qquad \text{..... (10)}$$

(10) को पुनर्व्यवस्थित करने पर

$$a^4-\left(x^2-y^2+c^2\right)a^2+c^2x^2=0$$

जो a^2 में द्विघाती है अत : इसका अन्वालोप ($B^2=4AC$)

$$\left(x^2-y^2+c^2\right)^2=4c^2x^2$$

या $\quad x^2-y^2+c^2=\pm 2cx$

या $\quad \left(x\pm c\right)^2=y^2$

या $\quad x\pm c=\pm y$

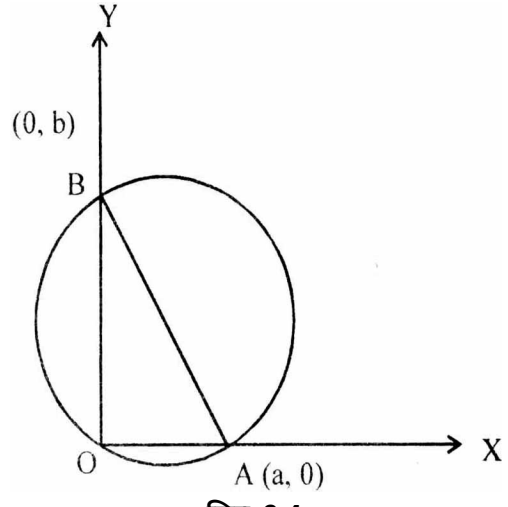
जो वर्ग की चार भुजायें $x+y=\pm c, x-y=\pm c$ है

उदाहरण 3 : उस वृत्त का अन्वालोप ज्ञात कीजिये जिसका व्यास अचर लम्बाई की एक रेखा है जो सदैव दो स्थिर एवं एक - दुसरे पर लम्ब रेखाओं के बीच फिसलती है।

हल : दिया हुआ है

$$a^2+b^2=c^2 \quad \text{(अचर)} \qquad \text{.... (1)}$$

वृत्त का समीकरण जिसका व्यास AB है



चित्र 9.4

$$\left(x-o\right)\left(x-a\right)+\left(y-o\right)\left(y-b\right)=o$$

$$x^2+y^2-ax-by=o \qquad \text{.....(2)}$$

a तथा b को अन्य प्राचल t का फलन मानकर (1) व (2) से

$$a\frac{da}{dt}+b\frac{db}{dt}=0 \qquad \text{.....(3)}$$

$$x\frac{da}{dt}+y\frac{db}{dt}=0 \qquad \text{.....(4)}$$

अनुपात $\frac{da/dt}{db/dt}$ का मान समान करने पर

$$\frac{-b}{a}=\frac{-y}{x}$$

या $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$$

या $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{ax+by}{a^2+b^2}=\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2}=\frac{x^2+y^2}{c^2}$$

$$a=\frac{c^2x}{x^2+y^2},\ b=\frac{c^2y}{x^2+y^2}$$

a व b का मान (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{c^4x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{c^4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+c^2$$

या $$x^2+y^2=c^2$$

उदाहरण 4 : वक्र कुल $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिये, जबकि

(i) $a^n+b^n=c^n$ (ii) $ab=c^2$

हल : (i) दिया हुआ वक्र कुल

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1 \qquad .....(1)$$

जबकि $a^n+b^n=c^n$ .....(2)

a तथा b को अन्य प्राचल t का फलन मानकर (1) व (2) को t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{x^{1/2}da}{a^{3/2}dt}+\frac{y^{1/2}db}{b^{3/2}dt}=0 \qquad .....(3)$$

एवं $$a^{n-1}\frac{da}{dt}+b^{n-1}\frac{db}{dt}=0 \qquad .....(4)$$

अनुपात $\frac{da/dt}{db/dt}$ का मान समान करने पर

$$\frac{y^{1/2}a^{3/2}}{x^{1/2}b^{3/2}}=\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}$$

या $$\frac{x^{1/2}b^{3/2}}{a^{n-1}}=\frac{y^{1/2}a^{3/2}}{b^{n-1}}$$

या $$\frac{x^{1/2}}{a^{n+1/2}}=\frac{y^{1/2}}{b^{n+1/2}}$$

या $$\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{1/2}}{a^n}=\frac{\left(\frac{y}{b}\right)^{1/2}}{b^n}=\frac{(\frac{x}{a})^{1/2}+(\frac{y}{b})^{1/2}}{a^n+b^n}=1/c^n$$

या $\frac{x^{1/2}}{a^{n+1/2}} = \frac{1}{c^n}$ तथा $\frac{y^{1/2}}{b^{n+1/2}} = \frac{1}{c^n}$

या $a = c^{\frac{2n}{2n+1}} x^{\frac{1}{2n+1}}$ तथा $b = c^{\frac{2n}{2n+1}} y^{\frac{1}{2n+1}}$

(2) में a तथा b का मान रखने पर

$$x^{\frac{n}{2n+1}} + y^{\frac{n}{2n+1}} = c^{\frac{n}{2n+1}}$$

(ii) दिया सम्बन्ध $ab = c^2$ .....(5)

(1) व (5) को t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{x^{1/2}}{a^{3/2}}\frac{da}{dt} + \frac{y^{1/2}}{b^{3/2}}\frac{db}{dt} = 0 \quad \text{.....(6)}$$

$$b\frac{da}{dt} + a\frac{db}{dt} = 0 \quad \text{.....(7)}$$

अनुपात $\frac{da/dt}{db/dt}$ का मान समान करने पर

$$\frac{\frac{x^{1/2}}{a^{3/2}}}{b} = \frac{\frac{y^{1/2}}{b^{3/2}}}{a}$$

$$\frac{x^{1/2}}{a^{1/2}} = \frac{y^{1/2}}{b^{1/2}}$$

या $$\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{1/2}}{1} = \frac{\left(\frac{y}{b}\right)^{1/2}}{1} = \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{1/2} + \left(\frac{y}{b}\right)^{1/2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^{1/2}}{a^{1/2}} = \frac{y^{1/2}}{b^{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$a = 4x, b = 4y$, a तथा b का मान (5) में प्रतिस्थापित करने पर

$16\ xy = C^2$

9.6 सारांश

इस इकाई में हमने एक वक्र कुल $f(x, y, \alpha) = 0$ का अन्वालोप, उसके समीकरण तथा $f(x, y, \alpha) = 0$ के प्राचल के सापेक्ष अवकलन से प्राचल को विलोपित कर प्राप्त किया।

आपने इस इकाई में यह भी जाना कि कोई अन्वालोप वक्र कुल के प्रत्येक सदस्य को स्पर्श करता है। उपरोक्त के अतिरिक्त आपने दो प्राचलों वाले वक्र कुल का अन्वालोप भी ज्ञात करने की विधी सीखी जबकि वे प्राचल किसी दिये हुए सम्बंध से जुड़े हुए हों।

9.7 शब्दावली

अन्वालोप	Envelop
प्राचल	Parameter
वक्र कुल	Family of curves

9.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1. परवलय $y^2 = 4ax$ की स्पर्श रेखा है
2. असत्य

9.9 अभ्यास प्रश्न

1. दीर्घवृत्तों $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिये, जबकि

   (i) $a^m b^n = c^n$ (ii) $\left(a^n + b^n\right) = c^n$

   [(i) $\frac{\left(m+n\right)^{m+n}}{m^m n^n} x^{2m} y^{2n} = c^{2m+2n}$ (ii) $x^{\frac{2n}{n+2}} + y^{\frac{2n}{n+2}} = c^{\frac{2n}{n+2}}$]

2. प्रक्षेप पथों $y = x\tan\theta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{u^2 \cos^2\theta}$ के परिवार, जहाँ 0 प्राचल है अन्वालोप ज्ञात करो।

   $\left[x^2 = -\frac{2u^2}{g}\left(y - \frac{u^2}{2g} \right) \right]$

3. एक वृत्त का केन्द्र सदैव परवलय $y^2 = 49x$ पर रहता है तथा यह परवलय के शीर्ष से गुजरता है। सिद्ध करो कि इस वृत्त के कुल का अन्वालोप $x^3 + y^2\left(x + 2a\right) = 0$ होगा

4. सिद्ध कीजिये कि रेखा कुल $x\cos m\alpha + y\sin m\alpha = a\left(\cos n\alpha\right)^{m/n}$ के अन्वालोप का ध्रुवीय समीकरण

   $r^{\frac{n}{m-n}} = a^{\frac{n}{m-n}} \cos\left(\frac{n\theta}{m-n} \right)$ है।

5. उन रेखाओं का अन्वालोप ज्ञात कीजिये जो वक्र $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ की ध्रुवान्तर रेखाओं के सिरे पर समकोण बनाती हुई खींची गई है।

   $\left(r\sin = \alpha ae^{\left(\alpha - \pi/2\right)\cot\alpha} e^{\theta\cot\alpha} \right)$

6. सरल रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जबकि

   (i) $a^2 + b^2 = c^2$ (ii) $ab = c^2$

   जबकि c अचर है।

   [(i) $x^{2/3} + y^{2/3} = c^{2/3}$ (ii) $4xy = c^2$]

7. α को प्राचल लेते हुए सरल रेखाओं $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \ell\sin\alpha\cos\alpha$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिये

   संकेत : सर्वप्रथम दोनों ओर $\sin\alpha$ $\cos\alpha$ का भाग देकर उदाहरण, जैसे हल करना $\left(x^{2/3} + y^{2/3} = \ell^{2/3}\right)$

8. वक्र $\frac{a^2}{x}\cos\theta - \frac{b^2}{y}\sin\theta = c$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, θ प्राचल है तथा c अचर है।
$\left(\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} = c^2\right)$

9. सिद्ध करो कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1$ पर किसी बिन्दु से दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के सापेक्ष ध्रुवियों का अन्वालोप $\frac{x^2h^2}{a^4} + \frac{y^2k^2}{b^4} = 1$ है।

10. निम्न वक्रों की ध्रुवान्तर रेखाओं को व्यास मानकर खींचे गये वृत्तों के अन्वालोप ज्ञात कीजिये। θ प्राचल है

(i) $r = 2a\cos\theta$ $\qquad\qquad$ $r = a(1+\cos\theta)$

(ii) $\frac{\ell}{r} = 1 + e\cos\theta$ $\qquad\qquad$ $r^2(e^2-1) - 2ler\cos\theta + \ell^2 = 0$

संकेत : (ii) $r = r_1\cos(\theta - \theta_1)$

$$r = \frac{\ell}{\ell + e\cos\theta_1}\cos(\theta - \theta_1)$$

$$r(\ell + e\cos\theta_1) = \ell[\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1]$$

$$\cos\theta_1(er - \ell\cos\theta) - \sin\theta_1\ell\sin\theta = -r \qquad .....(1)$$

(1) का θ_1 के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$-\sin\theta_1(er - \ell\cos\theta) - \cos\theta_1\ell\sin\theta = \theta \qquad .....(2)$$

समीकरण (1) व (2) को वर्ग करके जोड़ने पर।

11. वक्र $(x-\alpha)^2 + y^2 = 4\alpha$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिये, α प्राचल है
$(y^2 = 4x + 4)$

इकाई 10: समतल वक्रौं का क्षेत्रफल (क्षेत्रकलन) [Area of Plane Curves (Quadrature)]

इकाई की रूपरेखा

10.0 उद्देश्य

10.1 प्रस्तावना

10.2 क्षेत्रकलन

10.3 कार्तीय समीकरणों द्वारा दिये गये वक्रों का क्षेत्रफल

10.4 दो कार्तीय वक्रों का उभयनिष्ठ क्षेत्रफल

10.5 ध्रुवीय समीकरणों द्वारा दिये गये वक्रों का क्षेत्रफल

10.6 सारांश

10.7 शब्दावली

10.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

10.9 अभ्यास प्रश्न

10.0 उद्देश्य

इस इकाई में समतल वक्रों का क्षेत्रफल निकालने की विधि की चर्चा की गई है।

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप क्षेत्रफल ज्ञात कर सकेंगे यदि,

वक्र कार्तीय समीकरणों में दिया गया हैं,

वक्र का प्राचलिक समीकरण में दिया गया है,

या वक्र का ध्रुवीय समीकरण में दिया गया है।

10.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम समतल वक्रों का क्षेत्रफल किस तरह से ज्ञात किया जा सकता है इसकी चर्चा विस्तार से करेंगे।

यदि वक्र का समीकरण कार्तीय समीकरण द्वारा दिया गया है, उस स्थिति में वक्र का क्षेत्रफल निकालने का सूत्र भी ज्ञात करेगें साथ ही यदि वक्र का समीकरण प्राचलिक समीकरण में हो तब क्षेत्रफल किस तरह निकाला जाता है इसकी भी चर्चा करेंगे।

दो कार्तीय वक्रों से घिरा उभयनिष्ठ क्षेत्रफल कैसे ज्ञात किया जाता है इसकी भी चर्चा करेगे। ध्रुवीय समीकरणों द्वारा दिये गये वक्रों का क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र भी ज्ञात करेगे। वक्र द्वारा घिरे हुऐ क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने से पहले हम मोटे तौर से वक्र का अनुरेखण (Traching) करेगे जिसका पूर्ण अध्ययन आपने इकाई 8 में किया है।

10.2 क्षेत्रकलन (Quadrature)

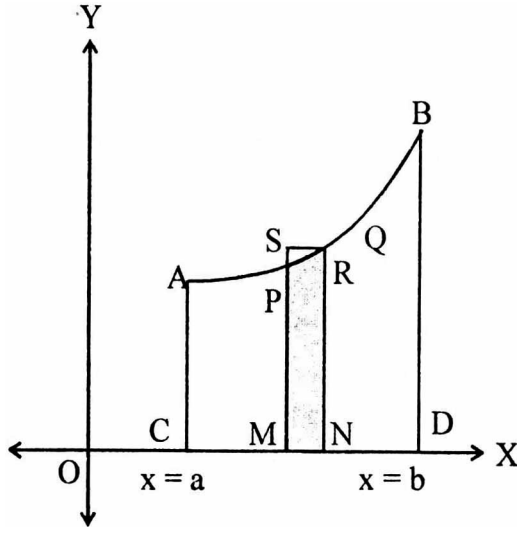
समतल वक्रों से परिबद्ध समतल क्षेत्र के क्षेत्रफल ज्ञात करने की प्रक्रिया को क्षेत्रकलन कहते हैं।

10.3 कार्तीय समीकरणों द्वारा दिये गये वक्रो का क्षेत्रफल

कार्तीय वक्र $y = f(x), x$ – अक्ष तथा कोटि $x = a; x = b$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल $\int_a^b f(x)dx$ अथवा $\int_a^b ydx$ होता है।

माना वक्र $y = f(x)$ पर दो बिन्दु A तथा B है जिसके x -निर्देशांक क्रमश : a तथा b है व कोटि AC तथा BD हे, यहाँ हमें क्षेत्रफल ABCD ज्ञात करना है।

वक्र पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ तथा समीपवर्ती अन्य बिन्दु $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ लो। P व Q की कोटि PM तथा QN हैं। P से QN पर लम्ब PR तथा Q से MP को बढ़ाकर लम्ब QS डाला गया है अत : $MN = \delta x, QR + \delta y$



चित्र 10.1

माना क्षेत्र $CMPA = s$ तथा $CNQA = s + \delta s$ है अत: क्षेत्र $MNQP = (s + \delta s) - s = \delta s$ तब आयत $MNRP <$ क्षेत्र $MNQP <$ आयत $MNQS$ (क्षेत्रफल के अनुसार)

या $\quad y\delta x < \delta s < (y + \delta y)\delta x$

या $\quad y < \dfrac{\delta s}{\delta x} < y + \delta y$

जब Q,P के बहुत समीप हो तो $\delta x \to 0$ व $\delta y \to 0$ इस स्थिति में सीमा लेने पर

$$\lim_{\delta y \to 0} y \le \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta s}{\delta x} \le \lim_{\delta y \to 0} y + \delta y$$

अथवा $y \le \dfrac{ds}{dx} \le y$

अत: $\dfrac{ds}{dx} = y = f(x)$

अब (1) से, $x = a$ व $x = b$ के लिये, समाकलन लेने पर

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{ds}{dx}dx = \int_a^b ds = [s]_a^b$$

अत: क्षेत्रफल ABCD = $\int_a^b f(x)dx$

टिप्पणी :

1. यदि वक्र का समीकरण $x = f(y)$ तो उपरोक्त विधि को काम में लेकर y-अक्ष और y = c तथा y = d भुजों द्वारा घिरा हुआ क्षेत्रफल
   $\int_c^d f(y)dy$ अथवा $\int_c^d xdy$ होता है।
2. कभी - कभी वक्र के कार्तीय समीकरण (Cartesian equation) को प्राचलिक समीकरण (Parametric equation) में बदलकर क्षेत्रफल आसानी से निकाला जा सकता है। इसके लिये निम्न सूत्र काम में लेते है
   $\int_{t=\alpha}^{t=\beta} y\frac{dx}{dt}dt$ अथवा $\int_{t=\alpha}^{t=\beta} x\frac{dy}{dt}dt$
   जब कि प्राचल समीकरण $x = f_1(t)$ व $y = f_2(t)$ हो।
3. यदि दिया हुआ वक्र किसी एक अक्ष के सापेक्ष सममित हो तो वक्र का क्षेत्रफल अक्ष के एक ओर का क्षेत्रफल ज्ञात करके उसको दोगुना कर देते हैं।
4. यदि दिया हुआ वक्र दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित हो तो किसी एक पाद में वक्र का क्षेत्रफल निकाल कर उसको चौगुना कर देते है।

10.4 दो कार्तीय वक्रों का उभयनिष्ठ क्षेत्रफल

माना कार्तीय समीकरणों $y = f_1(x)$ और $y = f_2(x)$

द्वारा निरुपित वक्र परस्पर बिन्दु A तथा B पर एक दूसरे को काटते है जिनके भुज क्रमश: x = a तथा x = b है तो उनका उभयनिष्ठ क्षेत्र

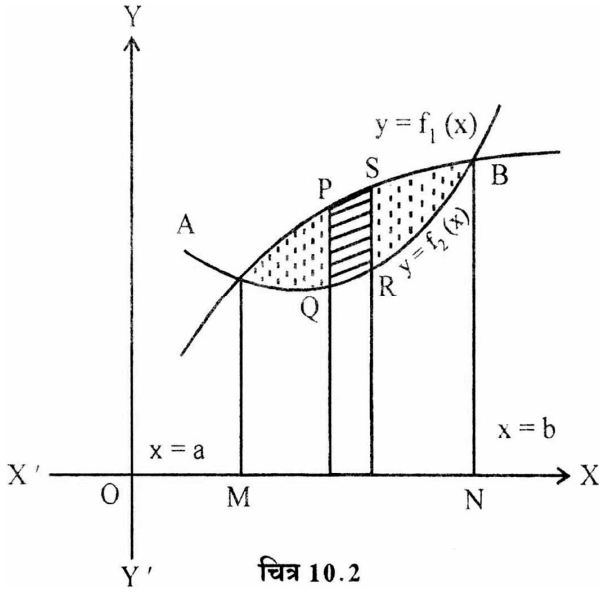
AQRBSPA = क्षेत्र AMNBSPA - क्षेत्र AMNBRQA

अर्थात् वांछित क्षेत्रफल $y = f_1(x)$ $y = f_2(x)$ के x - अक्ष तथा कोटि x -a तथा x = b के बीच क्षेत्रफलों के अन्तर के समान है। अत:

$= \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx$

$= \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$

अथवा दो पक्षों का उभयनिष्ठ क्षेत्रफल $\int_a^b (y_1 - y_2)dx$



चित्र 10.2

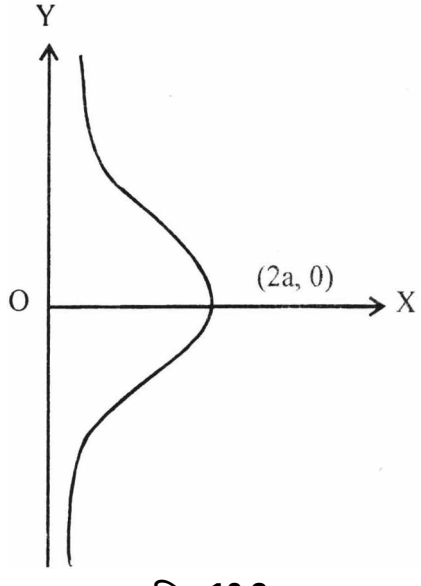
टिप्पणी : किसी वक्र द्वारा घिरे हुये क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिये पहले वक्र का अनुरेखण कर लेना चाहिये जिससे सीमाएँ तथा उसकी अक्षों के सापेक्ष सममित का पता चल जायेगा।

उदाहरण - 1 : निम्न वक्र तथा उसके अनन्त स्पर्शी के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

$$xy^2 = 4a^2(2a - x)$$

हल : वक्र में y की घात सम है अत : वक्र x - अक्ष के परित सममित है।

स्पष्टत : x = 0 अर्थात y-अक्ष अननन्त स्पर्शी है। चूँकि y की उच्चतम क्षेणी का गुणांक x है अत : शुन्य के समान रखने पर हमें y-अक्ष के समामान्तर अनन्त स्पर्शी (asymptote) प्राप्त होता है। x की सीमाएँ x = 0 तथा x = 2a



चित्र 10.3

अभीष्ट क्षेत्रफल $= 2\int_0^{2a} y dx = 2\int_0^{2a} 2a\sqrt{\frac{2a-x}{x}}dx$

$x = 2a\sin^2\theta$ प्रतिस्थापित करने पर

क्षेत्रफल = $4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{2a\left(1-\sin^2\theta\right)}{2a\sin^2\theta}}4a\sin\theta\cos\theta d\theta$

$$= 16a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta = 16a^2\frac{\sqrt{\frac{2+1}{2}}\sqrt{\frac{0+1}{2}}}{2\sqrt{\frac{(2+0+2)}{2}}}$$ (गामा सूत्र से)

$$= 16a^2\frac{\sqrt{3/2}\sqrt{1/2}}{2\sqrt{2}}$$

$$= 16a^2\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2.1} = 4\pi a^2$$

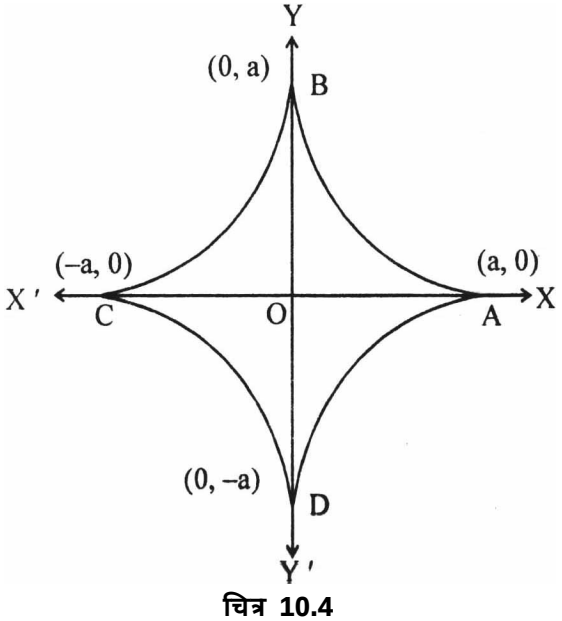
उदाहरण 2 : वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (एस्ट्रायड) का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

हल :

(i) वक्र x-अक्ष और y-अक्ष के सापेक्ष सममित है

(ii) वक्र मूल बिन्दु से होकर नहीं गुजरता है।

(iii) वक्र x-अक्ष तथा y-अक्ष को क्रमश: बिन्दुओ $(\pm a, 0)$ तथा $(0, \pm a)$ पर मिलता है।



चित्र 10.4

(iv) वक्र के समीकरण को x तथा y के लिये हल करने पर (घनात्मक चिन्ह लेने पर) $x = \left(a^{2/3} - y^{2/3}\right)^{3/2}$ तथा $y = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}$ यहाँ यदि $y > a$ अथवा $y < -a$ तो x

काल्पनिक है, इसी प्रकार $x > a$ अथवा $x < -a$ तो y काल्पनिक है, अत: इन मानो के लिये वक्र का कोई भी वास्तविक भाग विद्यमान नहीं।

अत: अभीष्ट क्षेत्रफल

= 4(क्षेत्रकलन OAB)

$= 4\int_0^a y dx$

$= 4\int_0^a \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2} dx$

$x = a\cos^3\theta$, रखने पर $dx = -3a\cos^2\theta\sin\theta d\theta$ तथा $x = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ और जब $x = a, \theta = 0$

अभीष्ट क्षेत्रफल $= 4\int_0^{\pi/2} \left(a^{2/3} - a^{2/3}\cos^2\theta\right)^{3/2} 3a\cos^2\theta\sin\theta d\theta$

$= 12a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin^4\theta d\theta$

$= 12a^2 \frac{\boxed{\frac{3}{2}}\boxed{\frac{5}{2}}}{2\boxed{4}}$

$= 12a^2 \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.3.2.1} = \frac{3}{8}\pi a^2$

उदाहरण-3: वक्र $y^2(a-x) = x^3$ एवं इसकी अनन्तस्पर्शी के द्वारा घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

हल :

(i) वक्र x -अक्ष के सापेक्ष सममित है

(ii) वक्र मूल बिन्दु से होकर गुजरता है तथा मूल बिन्दु स्पर्श रेखाओं का समीकरण $y^2 = 0$ है। अत: मूल बिन्दु कस्प (Cusp) है।

(iii) वक्र x-अक्ष तथा y-अक्ष को मूल बिन्दु (0,0) के अलावा और कही नहीं मिलता है।

(iv) वक्र की अनन्त स्पर्शी x = a है चूंकि y^2 का गुणांक (a -x) है।

(v) $y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ अत: वक्र रेखा x = a के दाहिनी ओर स्थित नहीं है साथ ही y-अक्ष के बाई और भी स्थित नहीं है अर्थात $0 \le x < a$

अभीष्ट क्षेत्रफल $= 2\int_0^a y dx$

(चूंकि वक्र x - अक्ष के सापेक्ष सममित है।)

$= 2\int_0^a x\sqrt{\frac{x}{a-x}} dx$

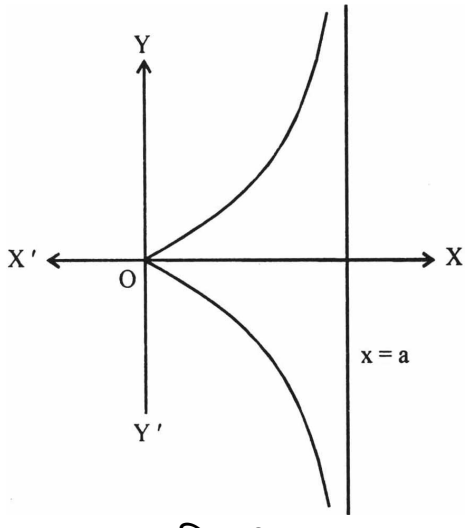
$x = a\sin^2\theta$, तब $dx = 2a\sin\theta\cos\theta d\theta$ तथा जब $x = 0, \theta = 0,$ और जब $x = a, \theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= 2\int_0^{\pi/2} a\sin^2\theta\sqrt{\frac{a\sin^2\theta}{a-a\sin^2\theta}}.2a\sin\theta\cos\theta d\theta$

$= 4a^2\int_0^{\pi/2} a\sin^4\theta d\theta$

$= 4a^2\frac{\boxed{5/2}\boxed{1/2}}{2\boxed{3}}$

$= 4a^2\frac{\frac{3}{2},\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{2.2.1} = \frac{3}{4}\pi a^2$



चित्र 10.5

उदाहरण 4 : दिये वक्र के (a) लूप कात था (b) वक्र और अनन्त स्पर्शी के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

$$x\left(x^2+y^2\right) = a\left(x^2-y^2\right)$$

हल :

(i) वक्र x -अक्ष के सापेक्ष समीमत है

(ii) वक्र मूल मित्र से होकर गुजरता है तथा मूल बिन्दु पर स्पर्श रेखाओं का समीकरण $y = \pm x$ हैं अतः मूल बिन्दु पर नोड।

(iii) वक्र x -अक्ष को मूल बिन्दु के अतिरिक्त x = a पर काटता।

(iv) $y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$

यदि x > a या x < - a हो तो y काल्पनिक है।

(v) x = - a व वक्र की अनन्त स्पर्शी है।

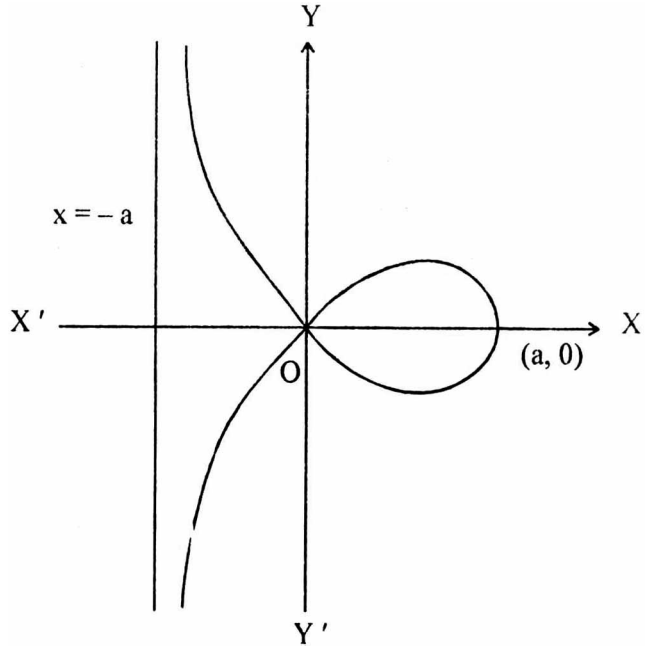
(a) अभिष्ट लूप का क्षेत्रफल

= $2\int_0^a ydx$

$= 2\int_0^a x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$

$x = a\sin\theta, dx = a\cos\theta d\theta$

जब $x = 0, \theta = 0$ जब $x = a, \theta = \pi/2$



चित्र 10.6

अभीष्ट लूप का क्षेत्रफल

$= 2\int_0^{\pi/2} a\sin\theta\sqrt{\frac{a-a\sin\theta}{a+a\sin\theta}}.a\cos\theta d\theta$

$= 2a^2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}.d\theta$

$= 2a^2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta-\sin^2\theta)d\theta$

$= 2a^2\left[\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta - \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\right]$

$= 2a^2\left[1-\frac{1}{2}.\pi/2\right] = 2a^2\left(1-\pi/4\right)$

(b) वक्र एवं अनन्त स्पर्शी द्वारा घिरे हुये भाग के क्षेत्रफल के लिये x की सीमाएं -a से 0 तक है चाप OPQ पर स्थित किसी बिन्दु के लिये x त्राणात्मक है अत:

$$y = -x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

लेने पर वक्र एवं अनन्त स्पर्शी से घिरे हुये भाग का क्षेत्रफल

$$= -2\int_{-a}^{0} x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx = 2\int_{0}^{-a} x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$$

मान लो $x = -a\sin\theta$ तब $dx = -a\cos\theta d\theta$

जब $x = 0, \theta = 0$ और जब $x = -a, \theta = {}^{\pi}/_{2}$

अभिष्ट क्षेत्रफल

$$= -2\int_{0}^{\pi/2}(-a\sin\theta)\sqrt{\frac{a+a\sin\theta}{a-a\sin\theta}}(-a\cos\theta)d\theta$$

$$= 2a^2\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta)}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta$$

$$= 2a^2\int_{0}^{\pi/2}(\sin\theta+\sin^2\theta)d\theta$$

$$= 2a^2\left[1+\frac{1}{2}{}^{\pi}\!/_{2}\right] = 2a^2\left[1+{}^{\pi}\!/_{4}\right]$$

उदाहरण 5 : सिद्ध कीजिये की वक्र $ay^2 = x^2(a-x)$ के द्वारा निर्मित लूप का क्षेत्रफल $8a^2/15$ हैं।

हल:

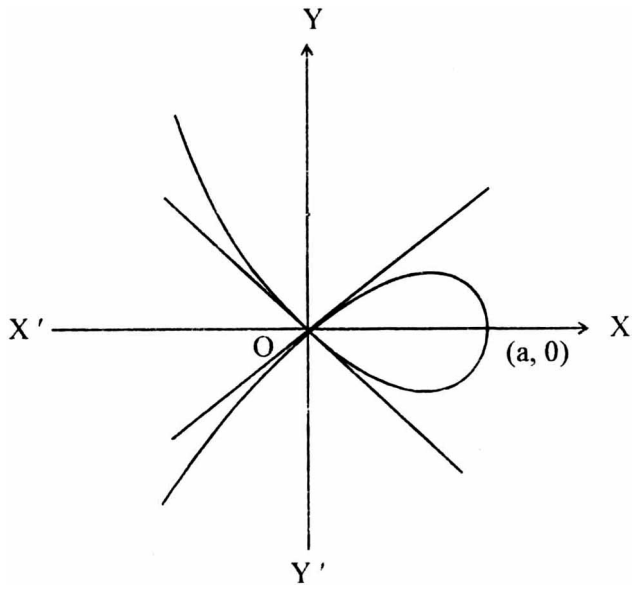
(i) वक्र x-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

(ii) वक्र मूल बिन्दु से होकर गुजरता है तथा मूल बिन्दु पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण $y = \pm x$ है अतः मूल बिन्दु पर नोड है।

(iii) वक्र x-अक्ष को मूल बिन्दु के अतिरिक्त x =a पर काटता है।

(iv) $y = x\sqrt{\frac{a-x}{a}}$

X > a हो तो y काल्पनिक है।



चित्र 10.7

लूप का अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= 2\int_0^a y dx$$

$$= 2\int_0^a \frac{x\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}} dx$$

मान लो $x = a\sin^2\theta dx = 2a\sin\theta\cos\theta d\theta$

जब $x = 0, \theta = 0$ जब $x = a, \theta = \pi/2$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}}\int_0^{\pi/2} a\sin^2\theta\sqrt{a - a\sin^2\theta}.2a\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi/2} a\sin^3\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$= 4a^2\frac{\lfloor 2\lfloor 3/2}{2\lfloor 7/2} = \frac{4a^2 1.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{8a^2}{15}$$

उदाहरण 6 : वक्र $a^2y^2 = x^3(2a - x)$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

हल :

(i) वक्र x-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

(ii) वक्र मूल बिन्दु से होकर गुजरता है तथा मूल बिन्दु पर स्पर्श रेखाओं का समीकरण $y^2 = 0$ अत: मूल

(iii) बिन्दु पर कस्प (cusp) है।

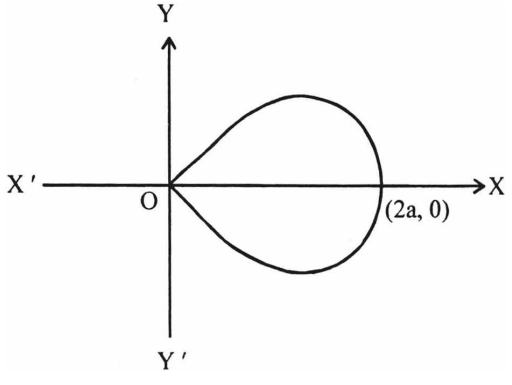
(iv) वक्र x-अक्ष को मूल बिन्दु के अतिरिक्त $x = 2a$ पर भी काटता है, मूल बिन्दु को (2a , 0) पर स्थान्तरित करने पर वक्र का समीकरण $a^2y^2 = (x + 2a)^3(2a - x - 2a)$ हो। जाता है। नये मूल बिन्दु पर स्पर्श रेखा का समीकरण x = 0 अर्थात् नया y-अक्ष है जो कि x = 2a है।

(v) $y = \frac{x}{a}\sqrt{x(2a - x)}$ यदि x < 0 या x > 2a हो तो y काल्पनिक है

अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \int_0^{2a} y dx$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^{2a} x\sqrt{x(2a - x)}dx$$



चित्र 10.8

मान लो $x = 2a\sin^2\theta dx = 4a\sin\theta\cos\theta d\theta$

जब $x = 0, \theta = 0$ और $x = 2a, \theta = \pi/2$

$$= \frac{2}{a}\int_0^{\pi/2} 2a\sin^2\theta\sqrt{2a\sin^2\theta\left(2a - 2a\sin^2\theta\right)}4a\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$= 32a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^2\theta d\theta$$

$$= 32a^2\frac{\lfloor 5/2\rfloor\lfloor 3/2}{2\lfloor 4} = 32a^2\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.3.2.1} = \pi a^2$$

उदाहरण 7 : वक्र $x^2y^2 = a^2\left(y^2 - x^2\right)$ तथा उनकी अनन्त स्पर्शियों से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

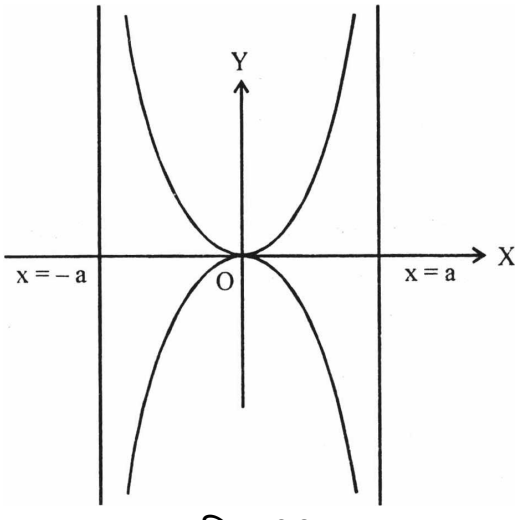
हल :

(i) वक्र दोनों अक्षो के सापेक्ष सममित है।

(ii) वक्र मूल बिन्दु से गुजरता है तथा मूल बिन्दु पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण $y = \pm x$ है।

(iii) $y = \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}, x > a$ पर y काल्पनिक है।

(iv) y- अक्ष के समान्तर में $x = \pm a$ अनन्त स्पर्शिया है।



चित्र 10.9

अभिष्ट क्षेत्रफल $4\int_0^a ydx$

$$= 4\int_0^a \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx$$

माना $x = a\sin\theta, dx = a\cos\theta d\theta$

जब $x = 0, \theta = 0, x = a, \theta = \pi/2$

$$= 4\int_0^{\pi/2} \frac{a, a\sin\theta}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}}.a\cos\theta d\theta$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta = 4a^2$$

उदाहरण 8 : वक्र $x = a\cos t + \frac{1}{2} a \log \tan^2 (t/2)$,

$y = a \sin t$

की चारों अनन्त शाखाओं का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

हल :

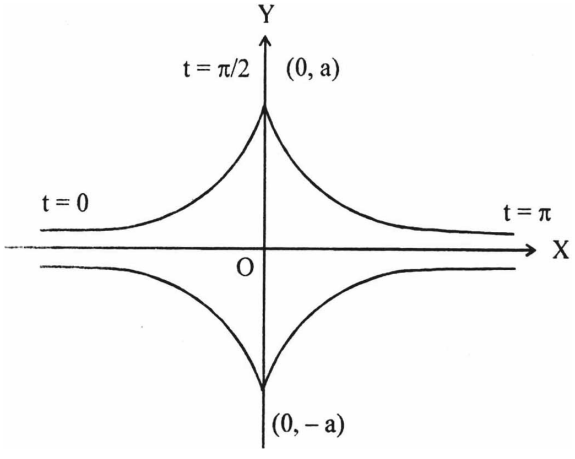
(i) समीकरण से केवल x,t का सम (even) फलन है अर्थात् वक्र x-अक्ष के पारित सममित हैं।

(ii) t =0 पर y = 0, $x \neq 0$ अत: वक्र मूल बिन्दु से नहीं गुजरता है।

(iii) यदि t = 0 तब $x = \infty$ और y = 0 अत: x-अक्ष वक्र की अनन्त स्पर्शी है।

(iv) $\because |\sin t| \leq | \Rightarrow -a \leq y \leq a$

अत: वक्र $y = -a$ से $y = a$ के बीच स्थित है।



चित्र 10.10

अभिष्ट क्षेत्रफल $= 4\int_0^{\pi/2} y \frac{dx}{dt} dt$

अब $x = a\cos t + \frac{1}{2} a \log \tan^2 \left(\frac{t}{2}\right)$

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t + \frac{a}{2} \frac{2\tan t/2 . \sec^2(\frac{t}{2})}{\tan^2(\frac{t}{2})} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= -a\sin t + \frac{a}{2\sin(t/2)\cos(t/2)} = -a\sin t + \frac{a}{\sin t} = \frac{a\cos^2}{\sin t}$$

समीकरण (1) में रखने पर

अभिष्ट क्षेत्रफल

$$= 4\int_0^{\pi/2} a\sin t \frac{a\cos^2 t}{\sin t} . dt$$

$$= 4^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 4a^2 \frac{1}{2} \pi/2 = \pi a^2$$

उदाहरण 9 : वक्र $x = a\sin 2t, y = a\sin t$ के लूप का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

हल : वक्र के समीकरण को कार्तीय समीकरण मे बदने पर

$$x^2 = a^2 \sin^2 2t = 4a^2 \sin^2 t \cos^2 t$$

$$= 4a^2 \left(\sin^2 t\right)\left(1 - \sin^2 t\right)$$

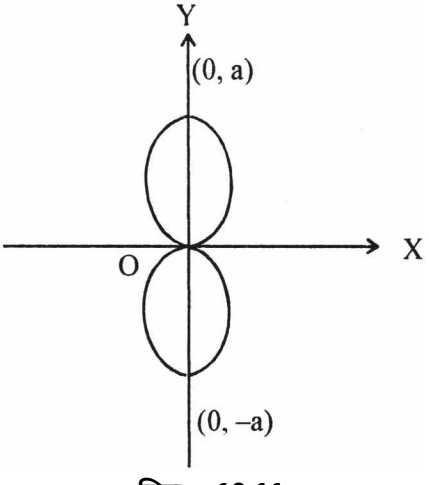
$$= 4a^2 \left(\frac{y^2}{a^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$$

या $\quad a^2 x^2 = 4y^2 \left(a^2 - y^2\right)$

(i) वक्र दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित है।

(ii) वक्र द्य बिन्दु से गुजरता है। मूल बिन्दु पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण $x = \pm 2y$ अत: मूल बिन्दु पर नोड है।

(iii) y - अक्ष को $y = \pm a$ पर पुनः काटता है साथ ही $y > a$ काल्पनिक होता है।



चित्र : 10.11

अभिष्ट क्षेत्रफल

$$= 2\int_{y=0}^{a} x\,dy = 2\int_{t=0}^{t=\pi/2} x\frac{dy}{dt}dt$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} a\sin 2t.a\cos t\,dt$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \sin t\cos^2 t\,dt$$

$$= 4a^2 \frac{\boxed{1}\boxed{3/2}}{2\boxed{5/2}} = 4a^2 \frac{1.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{4}{3}a^2$$

उदाहरण 10. वक्र (चक्रज) तथा इसके आधार के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

$$x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$$

हल : वक्र रेखा $x = a\pi$ के पारित सममित है

सीमाएं $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$x = a\pi \Rightarrow \theta = \pi$

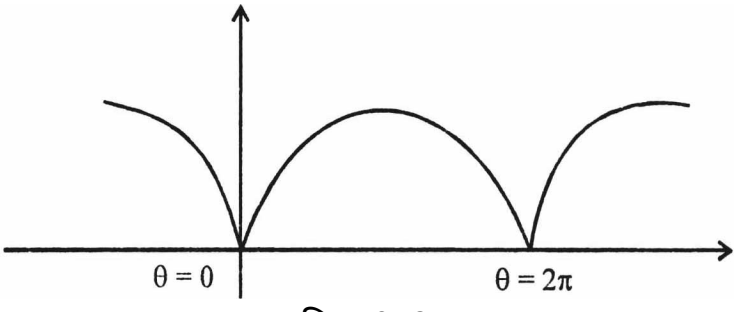
$x = a(\theta - \sin\theta)$ तो $\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)d\theta$

साथ

$\theta = 0, x = 0, y = 0$

$\theta = \pi, x = a\pi, y = 2a$

$\theta = 2\pi, x = 2a\pi, y = 0$



चित्र 10.12

अभिष्ट क्षेत्रफल

$$= 2\int_{0=0}^{2\pi} ydx = 2\int_{\theta=0}^{2\pi} y\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi} a(1-\cos\theta)a(1-\cos\theta)d\theta$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1 - cos\theta)^2 d\theta$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2 dx = 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{\theta}{2}d\theta$$

माना $\frac{1}{2}\theta = \phi$

$$= 8a^2\int_0^{\pi}\sin^4\phi d\phi = 16a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4\phi d\phi = 3\pi a^2$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न

1. वक्र $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल होता है
2. वक्र $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल होता है

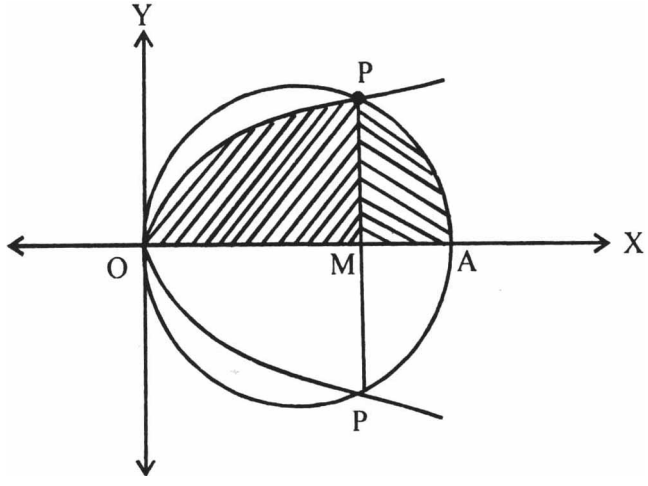
उदाहरण 11 : निम्म वक्रों का उभयनिष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

$y^2 = ax$ और $x^2 + y^2 = 4ax$

हल : वक्र $y^2 = ax$ परवलय है जिसका नाभिलम्ब a है तथा $x^2 + y^2 = 4ax$ वृत्त है जिसका केंद्र $(2a, 0)$ तथा त्रिज्या 2a है।

परवलय व वृत का परिच्छेद बिन्दु ज्ञात करने के लिये

$$x^2 + ax = 4ax$$
$$x^2 - 3ax = 0$$
$$x(x - 3a) = 0, x = 0, x = 3a$$



चित्र 10.13

अत :P बिन्दु का x निर्देशाक 3a व A का x निर्देशाक 4a है

अभिष्ट क्षेत्रफल = 2 [क्षेत्र OMAPO]

= 2 [क्षेत्र OMPO] + 2 [क्षेत्र MAPM]

$$= 2\left[\int_0^{3a} y\,dx\right] + 2\left[\int_{3a}^{4a} y\,dx\right]$$
$$= 2(I_1 + I_2) \quad \text{.....(1)}$$

अब I_1
$$= \int_0^{3a} y\,dx = \int_0^{3a} \sqrt{ax}\,dx = \sqrt{a}\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}\right)_0^{3a}$$
$$= 2\sqrt{3a}^2 \quad \text{.....(2)}$$

I_2
$$= \int_{3a}^{4a} \sqrt{4ax - x^2}\,dx = \int_{3a}^{4a} \sqrt{(2a)^2 - (x-2a)^2}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2.}(x-2a)\sqrt{4a^2 - (x-2a)^2} + \frac{4a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-2a}{2a}\right)\right]_{3a}^{4a}$$
$$= \frac{1}{2}\left[0 + 4a^2\sin^{-1}(1) - a\sqrt{3a^2} - 4a^2\sin^{-1}\left(1/2\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[4a^2\,\pi/2 - \sqrt{3}a^2 - 4a^2\,\pi/6\right]$$

$$= 2a^2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right] = 2a^2\left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$$

(2) तथा (3) से अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= 2\left[2\sqrt{3}a^2 + 2a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]$$

$$= 4a^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{3}\left(4\pi + 9/\sqrt{3}\right)$$

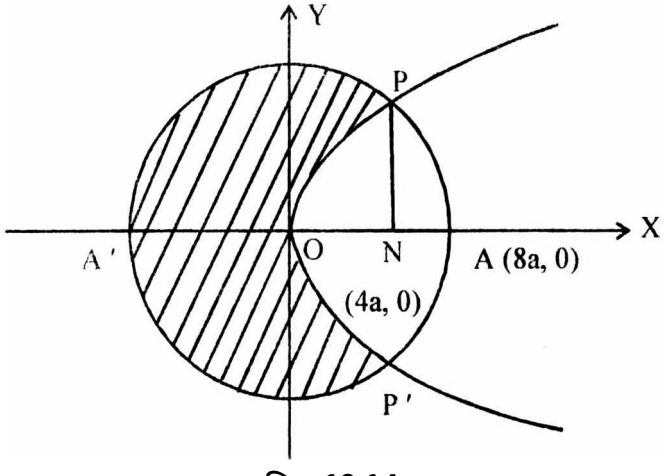
उदाहरण 12 : सिद्ध कीजिये कि दो भागो में बड़े भाग का क्षेत्रफल जिनमें वृत्त $x^2 + y^2 = 64a^2$ परवलय $y^2 = 12ax$ के द्वारा विभाजित किया जाता है वह है $\left(\frac{16a^2}{3}\right)\left(8\pi - \sqrt{3}\right)$

हल : वक्र $y^2 = 12ax$ परवलय है जिसकी नाभिलम्ब 12 है, वक्र $x^2 + y^2 = 64a^2$ वृत है जिसका केन्द्र (0, 0) व त्रिज्या 8a है।

परवलय व वृत्त का परिच्छेद बिन्दु $x^2 + 12ax - 64a^2 = 0 \Rightarrow x = 4a$

x का दूसरा हल $x = -16$ वक्र $y^2 = 12ax$ पर स्थित नहीं है।

अत : प्रतिच्छेद बिन्दु P का x निर्देशांक 4a है



चित्र 10.14

अभिष्ट का क्षेत्रफल - वृत का क्षेत्रफल - क्षेत्र

= π (8a)^2 - 2 (क्षेत्र OAP)

= 64πa^2 - 2 (क्षेत्र OPN + क्षेत्र PAN)

$$= 64\pi a^2 - 2\left[\int_0^{4a}\sqrt{12ax}\,dx + \int_{4a}^{8a}\sqrt{64a^2 - x^2}\,dx\right]$$

$$= 64\pi a^2 - 2\left[2\sqrt{3a}\int_0^{4a}\sqrt{x}\,dx\right]$$

$$-2\left[\frac{x}{2}\sqrt{64a^2-x^2}+\frac{64a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{8a}\right]_{4a}^{8a}$$

$$= 64\pi a^2 - 4\sqrt{3a}.\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)_0^{4a}$$

$$-2\left(32a^2\sin^{-1}(1)-\frac{1}{2}4a\sqrt{48a^2}-32a^2\sin^{-1}1/2\right)$$

$$= 64\pi a^2-\frac{64}{\sqrt{3}}a^2-32\pi a^2+16\sqrt{3}a^2+\frac{32}{3}\pi a^2$$

$$= \frac{16}{3}a^2\left(8\pi-\sqrt{3}\right)$$

उदाहरण 13 : सिद्ध कीजिये कि परवलय $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4by$ के मध्य का क्षेत्रफल $\frac{16}{3}ab$ है।

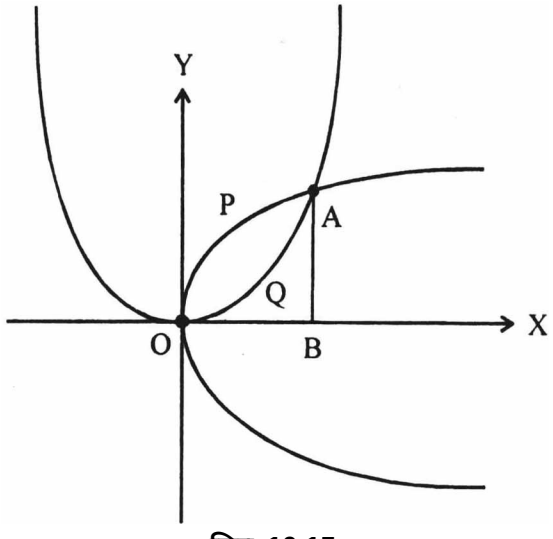
हल : दोनों परवलय के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के लिये $y^2 = 4ax \Rightarrow y^4 = 16a^2x^2 = 16a^2, 4by$

$$y\left(y^3-64a^2b\right)=0$$

$$y = 0, 4a^{2/3}b^{1/3}$$

अत: $x = 0, 4a^{1/3}b^{2/3}$

प्रतिच्छेद बिन्दु (0,0) व $\left(4a^{1/3}b^{2/3}4a^{2/3}b^{1/3}\right)$



चित्र 10.15

अभिष्ट क्षेत्रफल

= क्षेत्र OPAB - क्षेत्र OQAB

$$= \int_0^{4a^{1/3}b^{2/3}}\sqrt{4ax}dx-\int_0^{4a^{1/3}b^{2/3}}\left(\frac{x^2}{4b}\right)dx$$

$$= 2\sqrt{a}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)_0^{4a^{1/3}b^{2/3}} - \frac{1}{4b}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{4a^{1/3}b^{2/3}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{a}\left(4a^{1/3}b^{2/3}\right)^{3/2} - \frac{1}{12b}\left(4a^{1/3}b^{2/3}\right)^3$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{a}.8.a^{1/2}b - \frac{1}{12b}64ab^2$$

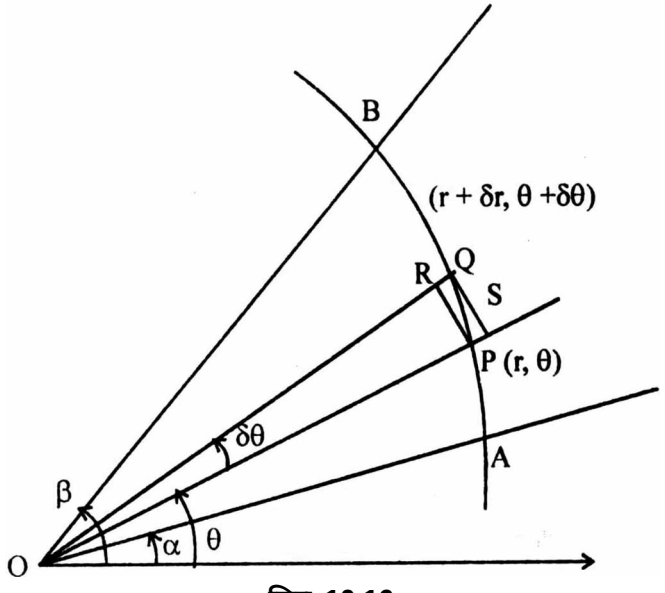
$$= \frac{64ab}{3}$$

10.5 ध्रुवीय समीकरणों द्वारा दिये गये वक्रों का क्षेत्रफल

वक्र $r = f(\theta)$ और ध्रुवांतर रेखाओं $\theta = \alpha$ एवं $\theta = \beta$ द्वारा घिरे हुये सेक्टर (त्रिज्य खण्ड) का क्षेत्रफल है

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

मान लो AB वक्र $r = f(\theta)$ है साथ ही OA व OB क्रमश: ध्रुवांतर रेखायें $\theta = \alpha$ व $\theta = \beta$ है। यहाँ क्षेत्रफल OAB ज्ञात करना है वक्र पर कोई बिन्दु P (r ,θ) ले, दुसरा बिन्दु Q है जो P के बहुत समीप है तथा जिसके निर्देशांक $(r + \delta r, \theta + \delta\theta)$ है।



चित्र 10.16

ध्रुव O को केन्द्र मान कर OP तथा OQ को त्रिज्यायें लेकर क्रमश: वृतीय चाप PR तथा QS खीचें जो OQ तथा OP बढ़ी हुई को क्रमश: R तथा S पर मिलते है।

$\therefore PR = r\delta\theta$ व $QS = (r + \delta r)\delta\theta$

वृतीय सेक्टर OPR को क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}r.r\delta\theta = \frac{1}{2}r^2\delta\theta$

वृतीय सेक्टर OSQ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(r+\delta\theta)(r+\delta r)\delta\theta$

$= \frac{1}{2}(r+\delta r)^2\,\delta\theta$

मनलो Δ तथा $\Delta+\delta\Delta$ क्रमश: क्षेत्रफलों OAP तथा OAQ को प्रदर्शित करते है तो

ΔA = क्षेत्रफल OAQ - क्षेत्रफल OAP

= क्षेत्रफल OPQ

परंतु क्षेत्रफल OPQ परिणाम में क्षेत्रफल OPR तथा OSQ के बीच स्थित है अर्थात

क्षेत्रफल OPR < क्षेत्रफल OPQ < क्षेत्रफल OSQ

$\therefore \quad \frac{1}{2}r^2\delta\theta < \delta\Delta < \frac{1}{2}(r+\delta r)^2\,\delta\theta$

या $\quad \frac{1}{2}r^2 < \frac{\delta\Delta}{\delta\theta} < \frac{1}{2}(r+\delta r)^2$ .....(1)

सीमा में $Q \to P$ तब $\delta\theta \to 0$ एवं $\delta\theta \to 0$ अत: (1) में सीमा लेने पर

$$\lim_{\delta\theta\to 0}\frac{1}{2}r^2 < \lim_{\delta\theta\to 0}\frac{\delta\Delta}{\delta\theta} < \lim_{\delta\theta\to 0}\frac{1}{2}(r+\delta r)^2$$

$$\therefore \frac{1}{2}r^2 < \frac{d\Delta}{d\theta} < \frac{1}{2}(r+\delta r)^2 \quad \begin{cases}\delta\theta\to 0\\ \delta r\to 0\end{cases} \text{ तब}$$

अत: $\quad \frac{d\Delta}{d\theta} = \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}\left[f(\theta)\right]^2$ .....(2)

दोनों पक्षों का θ के सापेक्ष $\theta=\alpha$ तथा $\theta=\beta$ सीमाओं के बीच समाकलन करने पर

$$\int_\alpha^\beta d\Delta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

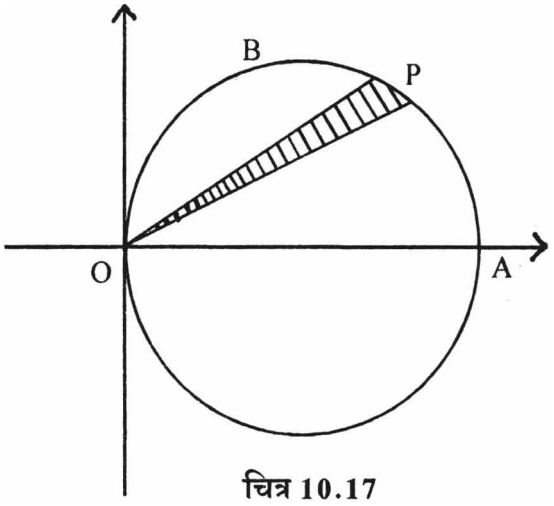
$$\Rightarrow \quad \left[\Delta\right]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

सेक्टर AOB का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\theta$

कभी कभी वक्रों के कार्तीय समीकरण को घ्रुवीय समीकरण में पीरवर्तित कर के अभीष्ट क्षेत्रफल सरलता से ज्ञात कर सकते है।

उदाहरण : 1 वृत $r = 2a\cos\theta$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

हल : दिये गये वृत केन्द्र (a,0) व त्रिज्या a है।



चित्र 10.17

अभीष्ट वृत का क्षेत्रफल

= 2 × (क्षेत्रफलOABO)

$$= 2 \times \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} r^2 d\theta = \int_{0}^{\pi/2} 4a^2 \cos^2\theta d\theta$$

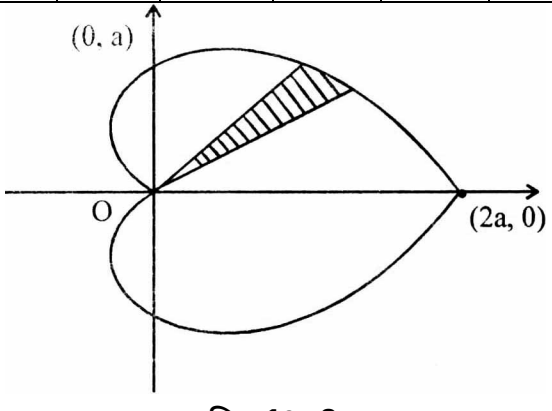
$$= 4a^2 \frac{1}{2} \pi/2 = \pi a^2$$

उदाहरण 2 : कारडिऑइड $r = a(1+\cos\theta)$ से घिरा हुआ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

हल : **(i)** वक्र प्रारम्भिक रेखा के सापेक्ष सममित है।

(ii) वक्र के उपर वाले अर्द्धभाग के लिये r और θ के निम्न सारणी में दिये गये है।

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	2a	$\frac{3a}{2}$	a	$\frac{a}{2}$	0



चित्र 10.18

अभिष्ट क्षेत्रफल $= 2\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2 d\theta$

$$= a^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi} \cos^4 \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 8a^2 \int_0^{\pi} \cos^4 \phi d\phi \quad \text{जहाँ} \quad \frac{\theta}{2} = \phi$$

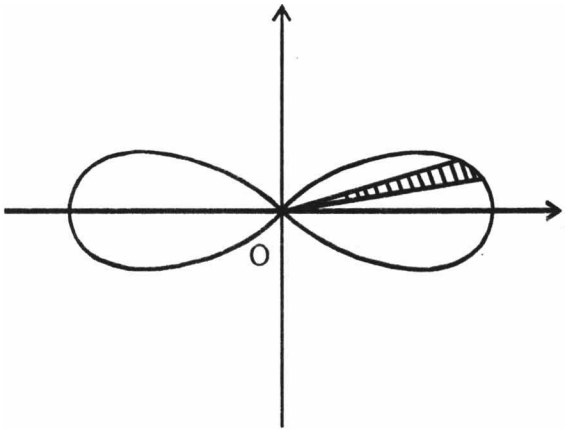
$$= 8a^2 . \frac{3}{4} . \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi a^2$$

उदाहरण 3 : वक्र $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

हल : **(i)** वक्र प्रारम्भिक रेखा के सापेक्ष सममित है

(ii) जब $\theta = 0 . r = a$, $\theta = \pi/4 \; r = a$

जब $\pi/4 < \theta \leq \pi/2, r^2$ ऋणात्मक होता है अत: r काल्पनिक होता है



चित्र 10.19

अभिष्ट क्षेत्रफल $= 4 . \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2 d\theta \frac{\theta}{2}$

$$= 2 \int_0^{\pi/4} a^2 cos2\theta d\theta$$

$$= 2a^2 \int_0^{\pi/2} a^2 cos\phi \frac{1}{2} d\phi \quad \text{जहाँ} \quad 2\theta = \phi$$

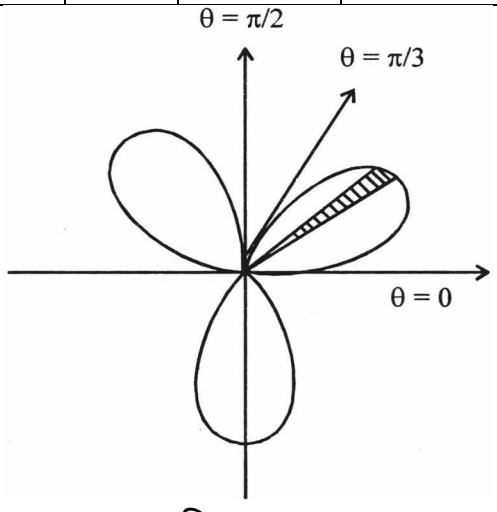
$$= a^2 \left(\sin\phi\right)_0^{\pi/2} = a^2$$

उदाहरण 4 : वक्र $r = a \sin 3\theta$ के एक लूप का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

हल : **(i)** वक्र के समीकरण में θ की जगह $\pi - \theta$ रखने पर वक्र का समीकरण नहीं बदलता है अत: वक्र रेखा $\theta = \pi / 2$ के सापेक्ष सममित है।

(ii) r व θ के मान निम्न सारणी में दिये गये है

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
r	0	a	0	-a	0	a	0



चित्र 10.20

वक्र के एक लूप का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} r^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} a^2 \sin^2 3\theta d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi} \sin^2\phi \frac{1}{3} d\phi \quad \text{जहाँ} \quad 3\theta = \phi$$

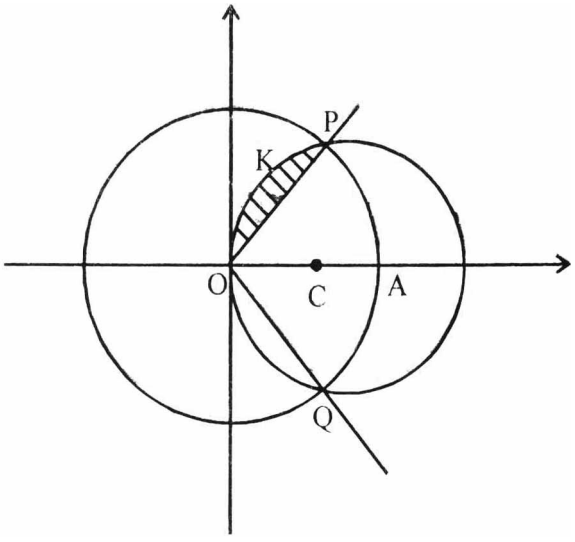
$$= \frac{a^2}{2}.2\int_0^{\pi/2} \sin^2\phi d\phi \quad \left[f(\pi-\theta) = f(\theta) \right]$$

$$= \frac{a^2}{3}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{12}$$

उदाहरण 5 : निम्न वृतों का उभयनिष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

$r = a\sqrt{2}$ तथा $r = 2a\cos\theta$

हल :



चित्र 10.21

दोनों वृत एक दूसरे को P तथा Q बिन्दुओं पर काटते है अत : उभयनिष्ठ क्षेत्रफल OQAPKO है जो OCAPKO का दुगना है

प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक

$$a\sqrt{2} = 2a\cos\theta$$

$$\cos\theta = 1/\sqrt{2}, \theta = \pi/4$$

P बिन्दु के लिये $\theta = \pi/4$

क्षेत्रफल OQAPKO

= 2 (क्षेत्रफल OCAPKO)

= 2 [OCAPO + OPKO]

क्षेत्रफल OPKO = $\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} r^2 d\theta$

$= \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} 4a^2\cos^2\theta d\theta$

$= a^2\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)d\theta$

$= a^2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = a^2\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right]$

क्षेत्रफल OCAPO= $\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} r^2 d\theta$

$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4} 2a^2 d\theta = a^2\pi/4$

अभिष्ट क्षेत्रफल = 2 [OCAPKO]

$$= 2\left[a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + a^2 \pi/4 \right]$$

उदाहरण 6 : निम्न वक्र के लूप का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

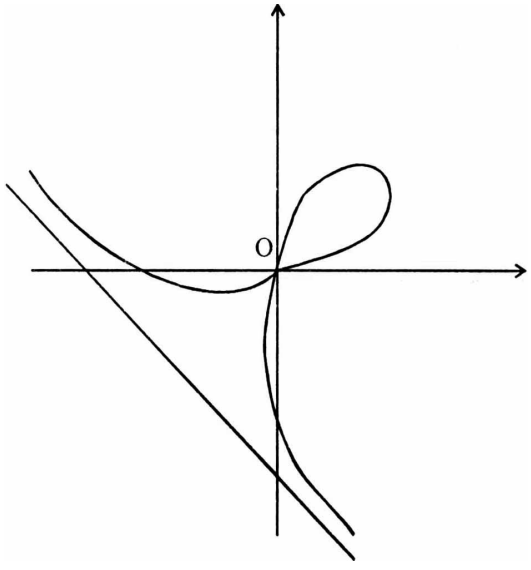
$$x^3 + y^3 = 3axy$$

हल : दिये समीकरण को ध्रुवीय समीकरण में बदलने पर

$$r^3\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) = 3ar^2 \cos\theta \sin\theta$$

या $$r = \frac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$$

$\theta = O$ एवं $\theta = \pi / 2$ दोनों के लिये r है जब $0 < \theta < \pi / 2$ तो r घनात्मक है अत: वक्र का लूप $\theta = O$ और $\theta = \pi / 2$ के बीच स्थित है।



चित्र 10.22

लूप का अभिष्ट क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{9a^2 cos^2\theta sin^2\theta}{(cos^3\theta + sin^3\theta)^2} d\theta$$

अंश और हर को $\cos^6\theta$ का भाग देने पर

$$= \frac{9}{2}a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{tan^2\theta sec^2\theta}{(1+tan^3\theta)^2}$$

यदि $1 + \tan^3\theta = t$ रखें तो $3\tan^2\theta\sec^2\theta d\theta = dt$

जब $\theta = 0, t = 1$ और $\theta = \pi / 2, t = \infty$

लूप का अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= \frac{9a^2}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2}, \frac{dt}{3} = \frac{3a^2}{2}\left[\frac{-1}{t}\right]_1^{\infty}$$

$$= \frac{3a^2}{2}$$

10.6 साराश

इस इकाई को पढने के पश्चात् आप समतल वक्रो का क्षेत्रफल किस तरह ज्ञात किया जाता है भलीभाँती समझ जायेगे।

आपको इसका भी ज्ञान हो गया कि दो दिये गये वक्रो जो एक दूसरे को काटते है, का उभयनिष्ट क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करते है। इस इकाई में आपको विभिन्न वक्रों का अभिरेखण (curve tracing) का महत्व भी भली भांति समझ में आ गया होगा।

10.7 शब्दावली

क्षेत्रकलन	Qradrature
कार्तीय समीकरण	Cartesian equation
प्राचलिक समीकरण	Parametric equation
सममित	Symmetry
उभयनिष्ठ	Common
अनुरेखण	Tracing
अनन्त स्पर्शी	Asymptote

10.8 स्वमूल्याकंन प्रश्नों के उत्तर

(1) πa^2

(2) πab

10.9 अभ्यास प्रश्न

1. निम्न वक्र के एक लूप का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

   $y^2 = x^2\left(4 - x^2\right)$

   [उत्तर : $\frac{16}{3}$**]**

2. निम्म वक्र तथा उनकी अनन्त स्पर्शि से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

   $y^2\left(a + x\right) = \left(a - x\right)^3$

   [उत्तर $3\pi a^2$**]**

3. निम्न वक्र के लूप का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

   $x = a\left(1 - t^2\right), y = at\left(1 - t^2\right)$ जहाँ $-1 \le t \le 1$

   (संकेत t का विलोपन करने पर कार्तीय समीकरण $ay^2 = x^2\left(a - x\right)$)

   [उत्तर: $\frac{8}{15}a^2$ **]**

4. सिद्ध कीजिये कि परवलय $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4ay$ के मध्य का क्षेत्रफल $\frac{16}{3}a^2$ है।

5. वक्र $r = a\cos 2\theta$ का सम्पूर्ण क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये

[उत्तरः $\frac{1}{2}\pi a^2$]

इकाई 11: समतल वक्रों की लम्बाई (चापकलन)
[Length of plane curves (Rectification)]

इकाई की रूपरेखा

11.0 उद्देश्य

11.1 प्रस्तावना

11.2 समतल वक्रों की लम्बाई (चापकलन)

11.2.1 परिभाषा

11.2.2 कार्तीय समीकरणों के लिए चापकलन

11.2.3 ध्रुवीय समीकरणों के लिए चापकलन

11.2.4 प्राचलिक समीकरणों के लिए चापकलन

11.3 वक्र का नैज समीकरण

11.3.1 कार्तीय समीकरण का नैज रूप

11.3.2 ध्रुवीय समीकरण का नैज रूप

11.3.3 प्राचलिक समीकरण का नैज रूप

11.4 सारांश

11.5 शब्दावली

11.6 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

11.7 अभ्यास प्रश्न

11.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के उपरान्त आप, समतल वक्र एवं इन वक्रों की लम्बाई ज्ञात करने की विधियां जान सकेंगे।

यदि किसी वक्र के समस्त बिन्दु एक ही समतल में स्थित हों, तो वह समतल वक्र कहलाता है। वक्र के किसी एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु पर वक्र के अनुदिश गमन करने से प्राप्त लम्बाई को उन दोनों बिन्दुओं के मध्य चाप की लम्बाई (length of arc) कहते है तथा इस चाप की लम्बाई को ज्ञात करने की विधि को चापकलन कहा जाता हैं। प्रस्तुत इकाई में हम कार्तीय (cartesian), ध्रुवीय (polar) एवं प्राचलिक (parametric) समीकरण रूप वाले वक्रों की लम्बाई तथा नैज समीकरण (intrinsic equation) ज्ञात करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन करेंगे।

11.1 प्रस्तावना

किसी समतल वक्र पर स्थित यदि किसी स्थिर बिन्दु A से चर बिन्दु P तक चाप की लम्बाई s हो, तो अवकलन गणित में सिद्ध किए गए s के अवकल गुणांक को व्यक्त करने वाले किसी भी सूत्र का समाकलन करने पर s को ज्ञात करने वाला सूत्र प्राप्त होता हैं। यहाँ हम उन समतल वक्रों के चाप की लम्बाई ज्ञात करने के विभिन्न सूत्र देंगे जिनके समीकरण कार्तीय घ्रुवीय एवं प्राचलिक रूप में दिए

हुए हों। पुन: यदि बिन्दु P पर खीचीं गई स्पर्श रेखा द्वारा किसी स्थिर रेखा के साथ बनाया गया कोण ψ हो, तो s तथा ψ के सम्बन्धं को उस वक्र का नैज समीकरण कहते हैं। हम विभिन्न रूपों वाली वक्र की समीकरणों को नैज समीकरण रूप में परिवर्तित करने की विधि की विस्तृत विवेचना करेंगे। वक्र का नैज समीकरण इसकी आकृति बताता है न की स्थिति को। अत: वक्र की स्थिति बदलने पर वक्र पर स्थित किसी बिन्दु के नैज निर्देशांक नहीं बदलते। विद्यार्थियों को सलाह दी जाती है कि इकाई 11 एवं 12 के प्रश्नो को हल करने से पूर्व अवकलन गणित की बहुल बिन्दु एवं वक्र अनुरेखण वाली इकाई का अध्ययन अवश्य कर लें।

11.2 समतल वक्रों की लम्बाई (चापकलन)

11.2.1 परिभाषा

किसी वक्र पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच चाप की लम्बाई ज्ञात करने की विधि को चापकलन कहते हैं।

11.2.2 कार्तीय समीकरणों के लिए चापकलन

(i) यदि वक्र y=f(x) के किसी बिन्दु A (जहाँ x=a हो) से वक्र पर स्थित किसी अन्य बिन्दु P(x,y) तक की लम्बाई s हो, तो अवकलन गणित से हम जानते हैं कि

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}$$

उपरोक्त को a से x की सीमाओं (limits) के मध्य x के सापेक्ष समाकलन करने पर

$$\int_a^x \frac{ds}{dx}dx = \int_a^x \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}dx$$

या $$s = \int_a^x \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}dx$$

(ii) यदि वक्र पर स्थित दो बिन्दुओं A तथा B के भुज (abscissae) क्रमश: a तथा b हों, तो

चाप AB की लम्बाई $= s = \int_a^b \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}dx$

(iii) यदि वक्र का समीकरण x = f(y) हो, तथा दो बिन्दुओं A तथा B की कोटियाँ (ordinates) क्रमश: c तथा d हों, तो

चाप AB की लम्बाई $= s = \int_a^d \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}}dy$

11.2.3 ध्रुवीय समीकरणों के लिए चापकलन

(i) यदि वक्र का समीकरण r = f (θ) रूप का हो, तो हम जानते हैं कि

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}}$$

अत: इस वक्र पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं A तथा B के सदिश कोण (Vectorial angle) क्रमश: α तथा β हों, तो

चाप AB की लम्बाई $= s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}} d\theta$

(ii) वक्र $\theta = f(r)$ पर स्थित दो बिन्दुओं A तथा B के ध्रुवान्तर (radii vectors) क्रमश: r_1 तथा r_2 हों,

चाप AB की लम्बाई $= s = \int_{r_1}^{r^2} \sqrt{\left\{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2\right\}} dr$

11.2.4 प्राचलिक समीकरणों के लिए चापकलन

यदि वक्र की प्राचलिक समीकरण $x = f(t)$ तथा $y = g(t)$, जहाँ t प्राचल है, तो हम जानते है कि

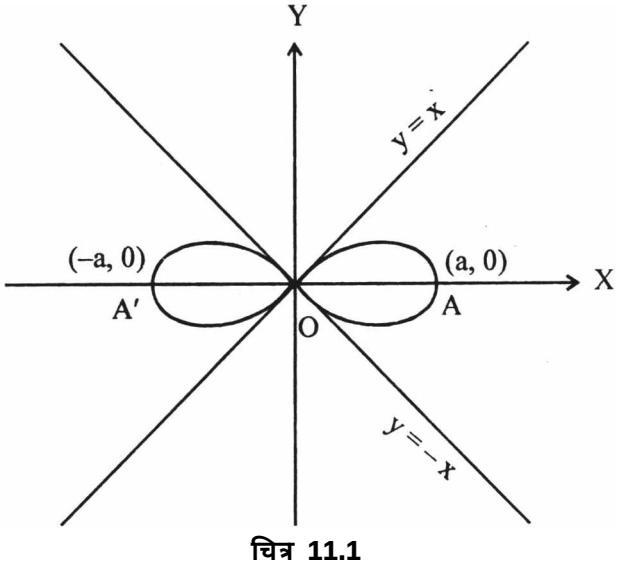
$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}$$

अब यदि इस वक्र पर स्थित दो बिन्दुओं A तथा B के लिए t के मान क्रमश: t_2 तथा t_2 हों, तो

चाप AB की लम्बाई $= s = \int_{t_1}^{t_2} = \sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}} dt$

उदाहरण 1 : प्रदर्शित करिए कि वक्र $x^2\left(a^2 - x^2\right) = 8a^2y^2$ की लम्बाई $\pi a\sqrt{2}$ है।

हल : दिए हुए वक्र की निम्न आकृति होगी॥



चित्र 11.1

स्पष्ट है कि वक्र x-तथा y-अक्षों के सापेक्ष सममित (symmetrical) हैं तथा यह दो बराबर लूपों से बना हैं।

अत: वक्र की सम्पूर्ण लम्बाई $= 4\int_0^a \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}^2}\, dx$ ..... (1)

वक्र का समीकरण $x^2\left(a^2-x^2\right)=8a^2y^2$

अवकलन करने पर

$$16a^2y\frac{dy}{dx}=2x\left(a^2-x^2\right)+x^2\left(-2x\right)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{2x\left(a^2-2x^2\right)}{16a^2\dfrac{x\left(a^2-x^2\right)}{2\sqrt{2}a}}+\frac{a^2-2x^2}{2\sqrt{2}a\left(a^2-x^2\right)}$$

$$\therefore \quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{8a^2\left(a^2-x^2\right)+\left(a^2-2x^2\right)^2}{8a^2\left(a^2-x^2\right)}$$

$$=\frac{9a^4-12a^2x^2+4x^4}{8a^2\left(a^2-x^2\right)}=\left[\frac{3a^2-2x^2}{2\sqrt{2}a\left(a^2-x^2\right)}\right]^2 \quad \text{.....(2)}$$

अत: समीकरण (1) एवं (2) से

$$s=4\int_0^a \frac{2\left(a^2-x^2\right)+a^2}{2\sqrt{2}a\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

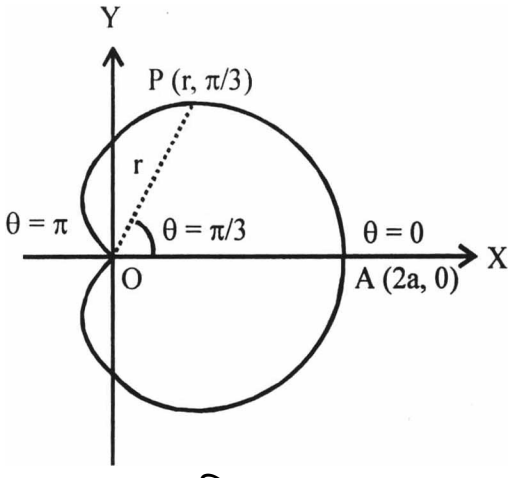
$$=\frac{\sqrt{2}}{a}\left[2\int_0^a \sqrt{\left(a^2-x^2\right)}dx+\int_0^a \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a}\left[2\left\{\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right\}_0^a+a^2\left\{\sin^{-1}\frac{+x}{a}\right\}_0^a\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{a}\left[2\left\{0+\frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2}\right\}+a^2.\frac{\pi}{2}\right]=\pi a\sqrt{2}$$

उदाहरण 2 : कार्डिऑयड $r=1\left(1+\cos\theta\right)$ का परिमाप (perimeter) ज्ञात कीजिए एवं प्रदर्शित कीजिए कि इसका ऊपरी अर्धचाप रेखा $\theta=\pi/3$ से समद्विभाजित होता है।

हल : माना कि वक्र के ऊपरी चाप APO पर स्थित P (r, θ) कोई बिन्दु इस प्रकार है कि $\angle AOP = \frac{\pi}{3}$ । अत: $\theta=\frac{\pi}{3}$ स्पष्ट है कि बिन्दु A के लिए $\theta=0$ तथा बिन्दु O पर $\theta=\pi$ होगा।



चित्र 11.2

दिया हुआ वक्र है $r = a(1+\cos\theta)$ ....(1)

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta \quad \text{.....(2)}$$

चूंकि वक्र प्रारम्भिक रेखा OA के सापेक्ष सममित है अत: वक्र का परिमाप (या लम्बाई)

= 2 × ऊपरी अर्ध चाप APO की लम्बाई

$$= 2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\,d\theta$$ **(समीकरण (1) एवं (2) से)**

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 8a\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)_0^{\pi} = 8a$$

स्पष्ट है ऊपरी अर्धचाप APO की लम्बाई = 4a ..... (3)

पुन: चाप AP की लम्बाई

$$= \int_0^{\pi/3}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

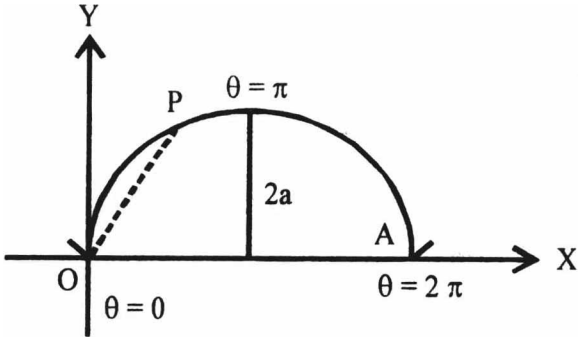
$$= 2a\int_0^{\pi/3}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 2a$$

.....(4)

फलत: (3) एवं (4) से हम देखते है कि वक्र का ऊपरी अर्ध चाप रेखा $0 = \frac{\pi}{3}$ से समद्विभाजित होता है।

उदाहरण 3 : चक्रज (cycloid) $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1-\cos\theta), (0 \le \theta \le 2\pi)$ की सम्पूर्ण लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए चक्रज की आकृति निम्न है :



चित्र 11.3

यहाँ $x = a(\theta - \sin\theta$ एवं $y = a(1-\cos\theta)$

अत $\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta)$ एवं $\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$

$$\therefore \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta$$

$$= 2a^2(1-\cos\theta) = 4a^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

अतः चक्रज की सम्पूर्ण लम्बाई

$$= \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$= -4a\left[\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. चापकलन की परिभाषा दीजिए।
2. वक्र $x = f(y)$ पर स्थित दो बिन्दुओं A तथा B की कोटियाँ क्रमशः y_1 तथा y_1 हो, तो चाप AB की लम्बाई लिखिए।
3. माना कि वक्र का समीकरण $x = f(t)$ तथा $y = \phi(t)$ है, इस वक्र पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं A एवं B के लिए t के मान क्रमशः t_1 एवं t_2 हो, तो चाप AB की लम्बाई बताइये।
4. वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ की सम्पूर्ण लम्बाई बताईये।

निम्न प्रश्नों में रिक्त स्थान की पूर्ति करें :

5. वक्र $y = \log\sec x$ के $x = 0$ से $x = \frac{\pi}{3}$ तक चाप की लम्बाई..... है।
6. कैटिनरी $y = c\cosh\frac{x}{c}$ के शीर्ष $(0, c)$ से किसी अन्य बिन्दु तक के चाप की लम्बाई .....है।

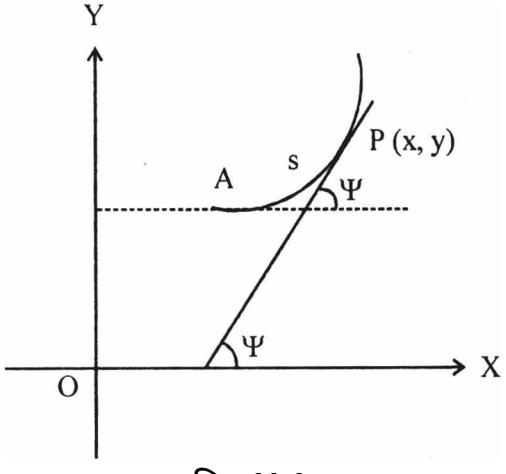
11.3 वक्र का नैज समीकरण

माना कि किसी वक्र पर स्थित किसी स्थिर बिन्दु A से चर बिन्दु P तक चाप की लम्बाई s है तथा P पर खींची गई स्पर्श रेखा (tangent) किसी निश्चित रेखा के साथ ψ कोण बनाती है, तो s एवं ψ के सम्बन्ध को नैज समीकरण कहते हैं।

11.3.1 कार्तीय समीकरण का नैज रूप

माना कि वक्र का कार्तीय समीकरण $y = f(x)$ है तथा इस पर स्थिर बिन्दु A इस प्रकार से है कि इस बिन्दु पर स्पर्श रेखा X - अक्ष के समान्तर है। बिन्दु $P(x, y)$ वक्र पर कोई चर बिन्दु है जिसकी बिन्दु A से चापीय दूरी s है। माना कि P पर खींची गई स्पर्श रेखा X - अक्ष के साथ ψ कोण बनाती है। स्पष्ट है कि

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} \qquad \text{.....(1)}$$



चित्र 11.4

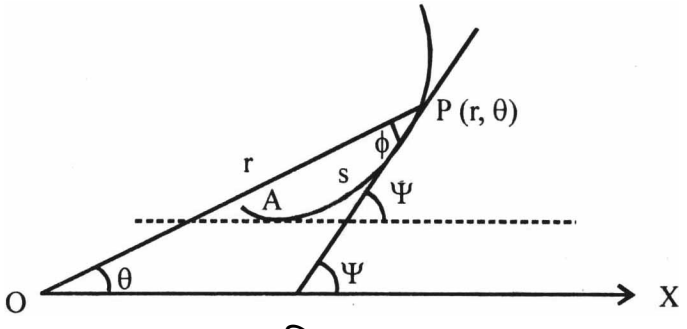
अब यदि वक्र पर स्थित बिन्दु A तथा P के भुज क्रमश : a तथा X हों, तो

$$s = \int_a^x \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} dx \qquad \text{.....(2)}$$

समीकरण (1) एवं (2) से X का मान विलोपन करने पर वक्र का अभीष्ट नैज समीकरण प्राप्त होता है।

11.3.2 ध्रुवीय समीकरण का नैज रूप

माना कि $r = f(\theta)$ वक्र का ध्रुवीय समीकरण हैं एवं A इस पर एक स्थिर बिन्दु है जहाँ से चापीय दूरी s नापी जाती है। बिन्दु A पर स्पर्श रेखा प्रारम्भिक रेखा (intitial line) के समान्तर (parallel) है।



चित्र 11.5

माना कि वक्र पर एक चर बिन्दु $P(r,\theta)$ है तथा चाप AP की लम्बाई s है। पुन: बिन्दु P पर स्पर्श रेखा प्रारम्भिक रेखा (O,X) के साथ ψ कोण बनाती है। हमें ज्ञात है कि बिन्दु P पर ध्रुवान्तर तथा स्पर्श रेखा के मध्य कोण ϕ है। चित्र 11. 5 से स्पष्ट है कि

$$\psi = \theta + \phi \qquad \text{.....(1)}$$

हम जानते है कि $$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dt} \qquad \text{.....(2)}$$

तथा $$s = \int_{\alpha}^{\theta} \sqrt{\left\{ r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \right\}} d\theta \qquad \text{..... (3)}$$

जहाँ बिन्दु A का सदिश कोण α है।

अब समीकरण (1), (2) एवं (3) से θ तथा ϕ का विलोपन करने पर वक्र का अभीष्ट नैज समीकरण प्राप्त होता है।

11.3.3 प्राचलिक समीकरण का नैज रूप

माना कि वक्र का प्राचलिक समीकरण $X = f(t), y = g(t)$ है, तो

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \qquad \text{.....(1)}$$

तथा $$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]} dt \qquad \text{.....(3)}$$

समीकरण (1) एवं (2) से t का विलोपन करने पर वक्र का नैज समीकरण प्राप्त होता है।

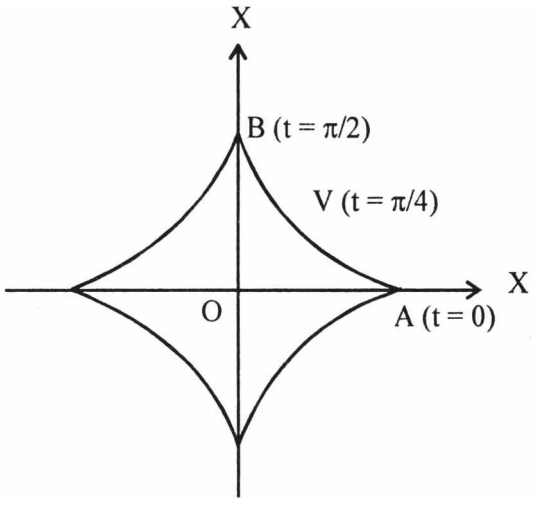
उदाहरण 1 : एस्ट्रॉइड $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का नैज समीकरण ज्ञात कीजिए जबकि

(i) s, x-अक्ष पर कस्प (cusp) से नापा गया हो

(ii) s, शीर्ष से नापा गया हो।

हल : हम देख सकते हैं कि एस्ट्रॉइड $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ का प्राचलिक समीकरण $x = a\cos^3 t$ एवं $y = a\sin^3 t$ है जिसका चित्र 11. 6 में दर्शाया गया है।

चित्र से स्पष्ट है कि X-अक्ष पर कस्प A के लिए t = 0 तथा शीर्ष V पर $t = \frac{\pi}{4}$ होगा।



चित्र 11.6

अब $\tan\psi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\tan t \Rightarrow \psi = -t$ .....(1)

(i) यदि s कस्प A (जहाँ t = 0) से नापा जाए, तो

$$s = \int_0^t \sqrt{\left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2 + (-3a\cos^2 t\sin t)^2}\,dt$$

$$= 3a\int_0^t \sin t\cos t\,dt = \frac{3a}{2}\sin^2 t = \frac{3a}{2}\sin^2\psi \quad \text{(समीकरण (1) से)}$$

$$\therefore s = \frac{3a}{2}\sin^2\psi$$

(ii) यदि s, शीर्ष V (जहाँ $t = \frac{\pi}{4}$ है), से नापा जाए तो

$$s = \int_{\pi/4}^{t} 3a\sin t\cos t\,dt$$

$$= -\frac{3a}{2}(\cos^2 t)_{\pi/4}{}^{t}$$

$$= -\frac{3a}{2}\cos 2t = -\frac{3a}{4}\cos 2\psi \qquad \text{.....(2)}$$

जो कि वक्र का नैज समीकरण है।

पुन: हम देखते है कि

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{3a}{2}\sin 2\psi \qquad \text{.....(3)}$$

अत : $\rho^2 + 4s^2 = \frac{9}{4}a^2$ (जहाँ ρ वक्रता त्रिज्या को निरुपित करता है।)

उदाहरण 2 : समान कोणिक सर्पिल (equiangular spiral) $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ के लिए नैज समीकरण प्राप्त कीजिए, जहाँ s, बिन्दु $(a, 0)$ से नापा गया है।

हल : $r = ae^{\theta\cot\alpha} \Rightarrow \log r = \log a + \theta\cot\alpha$

$\therefore \quad = \quad \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \cot\alpha$ या $\cot\phi = \cot\alpha$

अतः $\phi = \alpha$

पुनः हम जानते है की $\theta + \phi = \psi \Rightarrow \theta = \psi - \alpha$ .....(1)

अब $$s = \int_a^r \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\, dr$$

$$= \int_a^r \sec\alpha\, dr = (r-a)\sec\alpha$$

$$= a(e^{\theta\cot\alpha} - 1)\sec\alpha$$

$\therefore s = a(e^{(\psi-\alpha)\cot\alpha} - 1)\sec\alpha$ (समीकरण (1) से)

जो कि वक्र की अभीष्ट नैज समीकरण है।

उदाहरण 3 : उस वक्र का समीकरण प्राप्त कीजिए जिसका नैज समीकरण $s = c\tan\psi$ जबकि $\psi = 0$ पर $x = 0$ तथा $y = c$ दिया हुआ है।

हल : चूंकि $s = c\tan\psi$

$$\therefore \frac{ds}{dx} = c\sec^2\psi\frac{d\psi}{dx}$$

$$\Rightarrow \sec\psi = c\sec^2\psi\frac{d\psi}{dx}$$

$$\Rightarrow dx = c\sec\psi\, d\psi$$

समाकलन करने पर

$$x + A = c\log(\sec\psi + \tan\psi)$$

परन्तु $\psi = 0$ पर $x = 0$ अतः $A = 0$

अतः $x = c\log(\sec\psi + \tan\psi)$

$$\sec\psi + \tan\psi = e^{x/c} \quad .....(1)$$

पुनः $$e^{-x/c} = \frac{1}{\sec\psi + \tan\psi}\sec 0\psi - \tan\psi \quad .....(2)$$

समीकरण (1) एवं (2) से

$$\tan\psi = \frac{e^{-x/c} - e^{-x/c}}{2} = \sinh\frac{x}{c}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \sinh\frac{x}{c}$$

पुन: समाकलन करने पर

$$y + B = c\cosh\frac{x}{c}$$

चूंकि $\psi = 0$ पर $x = 0$ एवं $y = x$

अत: $c + B = c \Rightarrow B = 0$

फलतः वक्र का अभीष्ट समीकरण $y = c\cosh\frac{x}{c}$ होगा।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. वक्र की नैज समीकरण की परिभाषा दीजिए।
2. कैटिनरी $y = c\cosh\frac{x}{c}$ का नैज समीकरण लिखिए।
3. वृत्त का नैज समीकरण लिखिए।

11.4 सारांश

प्रस्तुत इकाई में समतल वक्र पर किन्हीं दो बिन्दुओं के मध्य चाप की लम्बाई ज्ञात करने के विभिन्न सूत्रों का अध्ययन किया गया है। समतल वक्र के समीकरण का कार्तीय, ध्रुवीय या प्राचलिक रूप हो सकता है। साथ में इस प्रकार के वक्रों का नैज समीकरण प्राप्त करने की विभिन्न विधियों की विस्तृत विवेचना भी की गई है। विभिन्न सूत्रों को समझाने के लिए हल सहित उदाहरणों की सहायता ली गई

11.5 शब्दावली

चापकलन	Rectification
नैज समीकरण	Intrinsic equation
ध्रुवान्तर	Radius vector
सममित	Symmetrical
परिभाषा	Perimeter

11.6 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

2. $\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$ 3. $\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

4. $2\pi r$ 5. $\log_e(2+\sqrt{3})$

6. $c\sinh\left(\frac{x}{c}\right)$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

2. $s = c\tan\psi$ 3. $s = a\psi$

11.7 अभ्यास प्रश्न

1. सिद्ध कीजिए कि परवलय (parabola) $x^2 = 4ay$ के शीर्ष (vertex) से नाभिलम्ब (latus rectun) के एक सिरे तक चाप की लम्बाई $a\left[\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$ है।
2. सिद्ध कीजिए कि परवलय $y^2 = 4ax$ के उस चाप की लम्बाई जो रेखा $3y = 8x$ एवं परवलय के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के मध्य स्थित है $a\left[\log 2+\frac{15}{16}\right]$ होगी।

3. परवलय $y^2 = 4ax$ के, उस चाप की लम्बाई जो उसके नाभिलम्ब काटने से प्राप्त होती है, ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $2a\left\{\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}$]

4. अर्धघन (semi - culcical) परवलय $ay^2 = x^3$ के शीर्ष से बिन्दु (a,a) तक की चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $\frac{a}{27}\left\{13^{3/2}-8\right\}$]

5. वक्र $y = \log\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$ की $x=1$ से $x=2$ तक चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $\log\left(e+\frac{1}{e}\right)$]

6. वक्र $9ay^2 = x(x-3a)^2$ के लूप का परिमाप ज्ञात कीजिए। [उत्तर : $4\sqrt{3}a$]
7. निम्नलिखित वक्रों की सम्पूर्ण लम्बाई ज्ञात कीजिए

(i) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$ या $x = a\cos^3 t, y = b\sin^3 t$

(ii) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

[उत्तर : (i) $4(a^2+b^2+ab)(a+b)$ (ii) $6a$]

8. उपरोक्त प्रश्न 7 (ii) के लिए प्रदर्शित कीजिए कि प्रथम चतुर्थांश में बिन्दु $\theta = \pi/6$ चाप की लम्बाई को 1 :4 में विभाजित करता है।
9. यदि कैटिनरी $y = c\cosh\frac{x}{c}$ के शीर्ष $(0,c)$ से किसी बिन्दु (x,y) तक चाप की लम्बाई s हो तो सिद्ध कीजिए कि (i) $s = c\sinh\frac{x}{c}$ (ii) $s^2 = y^2 - c^2$
10. वक्र $r = a(1-\cos\theta)$ का परिमाप ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि इस वक्र का ऊपरी अर्ध चाप रेखा $\theta = \frac{2\pi}{3}$ द्वारा विभाजित होता है।

[उत्तर : $8a$]

11. सिद्ध कीजिए कि रेखा $4r\cos\theta = 3a$ कार्डिऑयड $r = a(1+\cos\theta)$ को दो भागों में इस प्रकार विभाजित करती है कि रेखा के प्रत्येक ओर के चापों की लम्बाइयाँ बराबर है।
12. वक्र $r = a\cos\theta$ का परिमाप ज्ञात कीजिए। **[उत्तर :** πa]
13. समान कोणिक स्पाइरल (equiangular spiral) $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ के लिए उन दो बिन्दुओं के बीच चाप की लम्बाई ज्ञात करिए जिनके ध्रुवान्तर r_1 तथा r_2 है।

[उत्तर : $(r_1 - r_2)\sec\alpha$]

14. सिद्ध कीजिए कि साइक्लाइँड (equiangular spiral) $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1-\cos\theta)$ के शीर्ष से लेकर इस पर किसी बिन्दु तक की चाप की लम्बाई $\sqrt{8ay}$ है। यह भी सिद्ध कीजिए कि वक्र के एक महराब (arch) की सम्पूर्ण लम्बाई $8a$ होगी।

15. निम्न वक्रों की लम्बाई ज्ञात कीजिए :

(i) $x = e^{\theta}\left(\sin\frac{\theta}{2} + 2\cos\frac{\theta}{2}\right), y = e^{\theta}\left(\cos\frac{\theta}{2} 2\sin\frac{\theta}{2}\right),$

(ii) $\theta = 0$ से $\theta = \pi$ तक

$x = a(\cos\theta + \sin\theta), y = a(\sin\theta + \cos\theta)\theta = 0$ से किसी अन्य बिन्दु तक

[उत्तर : (i) $\frac{5(e^{\pi}-1)}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}a\theta^2$]

16. प्रदर्शित कीजिए कि वक्र $x\sin\theta + y\cos\theta = f'\cos\theta = f'(\theta); x\cos\theta + y\sin\theta = f''(\theta);$

के एक चाप की लम्बाई सम्बन् $s = f(\theta) + f''f(\theta) + k$ (जहाँ k एक अचर है) द्वारा दी जाती है।

17. सिद्ध कीजिए के अर्धघन परवलय $3ay^2 = 2x^3$ का नैज समीकरण $9s = 4a(\sec^3\psi - 1)$ है।

18. सिद्ध कीजिए कि परवलय $y^2 = 4ax$ का नैज समीकरण $s = a\cot\psi\cos ec\psi + a\log(\cot\psi + \cos ec\psi)$ है, जहाँ $\psi, x-$अक्ष एवं वक्र के उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा के बीच का कोण है जिसकी शीर्ष से दूरी s है।

19. निम्नलिखित वक्रों की नैज समीकरण प्राप्त कीजिए :

(i) $r = -a(1-\cos\theta)$

(ii) $r = a\theta$ (जहाँ s को ध्रुव से नापा जाता है)

(iii) $r = ae^{m\theta}$ (जहाँ s बिन्दु (a , 0) को स्थिर बिन्दु मानकर नापा जाता है)

[उत्तर, : (i) $s = 8a\sin^2(\psi/6);$

(ii) $s = \frac{a}{2}\left\{\beta\sqrt{1+\beta^2} + \sinh^{-1}\beta\right\}$ जहां $\psi = \beta + \tan^{-1}\beta$;

(iii) $s = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}\left[e^{m(\psi-\beta)} - 1\right]$ जहां $\beta = \cot^{-1}m$]

20. कार्डीआयड $r = a(1+\cos\theta)$ का नैज समीकरण ज्ञात कीजिए। अत : अथवा अन्यथा सिद्ध कीजिए कि $s^2 + 9\rho^2 = 16a^2$ जहाँ ρ किसी बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या है एवं s ध्रुव से किसी बिन्दु तक वक्र के चाप की लम्बाई है।

[उत्तर : $s = 4a\sin\left(\frac{\psi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$]

21. परवलय $= \frac{2a}{r} = 1+\cos\theta$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $\frac{ds}{d\psi} = 2a\cos ec^3\psi$

22. निम्न साइक्लाइडों के लिए नैज समीकरण प्राप्त कीजिए :

(i) $x = a(+\sin\theta), y = a(1-\cos\theta)$

(ii) $x = a(+\sin\theta), y = a(1-\cos\theta)$

[उत्तर : (i) $s = 4a\sin\psi$; (ii) $s = 4a(1-\sin\psi)$]

23. उपरोक्त प्रश्न में प्रथम वक्र के लिए यह भी सिद्ध कीजिए कि $\rho^2 + s^2 = 16a^2$, जहाँ चाप शीर्ष से नापा गया है।

24. मूल बिन्दु से वक्र $3ay^2 = x(x-a)^2$ के किसी बिन्दु $P(x, y)$ तक नापे गए चाप की लम्बाई s हो, तो सिद्ध कीजिए कि $3s^2 = 4x^2 + 3y^2$। वक्र के लूप की लम्बाई भी ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $4a/\sqrt{3}$]

इकाई 12: परिक्रमण ठोसों के आयतन एवं पृष्ठ (Volumes and Surfaces of Solids of Revolution)

इकाई की रूपरेखा

12.0 उद्देश्य

12.1 प्रस्तावना

12.2 परिक्रमण ठोस का आयतन

12.2.1 प्रमेय 1

12.2.2 उपप्रमेय 1

12.2.3 उपप्रमेय 2

12.2.4 उपप्रमेय 3

12.2.5 उपप्रमेय 4

12.3 परिक्रमण ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

12.3.1 प्रमेय 2

12.3.2 उपप्रमेय 1

12.3.3 उपप्रमेय 2

12.3.4 उपप्रमेय 3

12.3.4 उपप्रमेय 4

12.4 पेपस के प्रमेय

12.4.1 प्रमेय 3

12.4.2 प्रमेय 4

12.5 ध्रुवीय वक्र के लिए आयतन

12.5.1 प्रमेय 5

12.5.2 उपप्रमेय 1

12.5.3 उपप्रमेय 2

12.6 साराश

1.2.7 शब्दावली

12.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

12.9 अभ्यास प्रश्न

12.0 उद्देश्य

जब एक समतल क्षेत्र को उसके तल में स्थित किसी स्थिर रेखा के सापेक्ष परिक्रमण कराया जाता है तो यह एक ठोस (solid) का जनन करता है। इसी प्रकार किसी वक्र को इसके तल में स्थित किसी स्थिर रेखा के परित : घुमाने पर वक्र की परिधि ठोस के पृष्ठ (surface of solid) का जनन करता

है। प्रस्तुत इकाई को पढ़ने के बाद आप इस प्रकार से प्राप्त ठोसों के आयतन तथा पृष्ठीय क्षेत्रफल पर आधारित गणितीय सिद्धान्त, इनसे सम्बन्धित विभिन्न सूत्र एवं पेपस के प्रमेय को समझ सकेंगे।

12.1 प्रस्तावना

यदि किसी समतल क्षेत्र के उसके तल में स्थित किसी रेखा के सापेक्ष परिक्रमण कराया जाता है, तो यह एक ठोस आकृति का निर्माण करता है। उदाहरण के लिए जब एक आयताकार क्षेत्र अपनी एक भुजा के परित: परीक्रमण करता है तो वह एक ठोस बेलन को बनाता है। इसी प्रकार यदि किसी वक्र (या चाप) को उस के तल में स्थित किसी स्थिर रेखा के सापेक्ष परिक्रमण कराया जाता है, तो वह एक ठोस आकृति के पृष्ठ (surface of a solid) का निर्माण करता है जैसे जब अर्द्धवृत्त की परिधि को इसके सीमक व्यास (bounding diameter) के सापेक्ष परिक्रमा कराने पर एक गोले के पृष्ठ (surface of a sphere) का जनन करता है। इस प्रकार से प्राप्त ठोस आकृतियों के आयतन एवं पृष्ठ क्रमश: परिक्रमण ठोसों के आयतन एवं पृष्ठ कहलाते है। इस इकाई में हम परिक्रमण ठोसों के आयतन तथा पृष्ठीय क्षेत्रफल को प्राप्त करने हेतु विभिन्न गणितीय सिद्धान्तों एवं सूत्रों को प्रतिपादित करके इन पर आधारित प्रश्नों को हल करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन करेंगे।

12.2 परिक्रमण ठोस का आयतन (Volume of solid of Revolution)

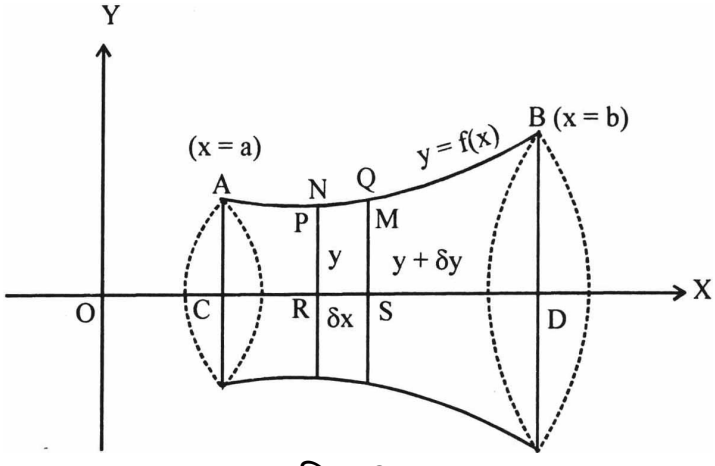
12.2.1 प्रमेय 1

यदि कार्तीय वक्र $y = f(x), x-$ अक्ष एवं कोटियों $x = a$ तथा $x = b$ के मध्य घिरा क्षेत्रफल, x-अक्ष के परित: परिक्रमण करता है, तो

$$\text{परिक्रमण ठोस का आयतन } = \int_a^b \pi y^2 dx$$

होता है, जहाँ $f(x)$, अन्तराल (a,b) में एक सीमित (bounded), एक-मानीय (singlevalued) तथा सतत् (continuous) फलन है तथा घूर्णन-अक्ष अर्थात् x-अक्ष को अन्तराल (a,b) में नहीं काटता है।

उपपत्ति : माना कि वक्र $y = f(x)$ पर दो बिन्दु A और B हैं, जिनके भुज क्रमश: $x = a$ तथा $x = b$ हैं। वक्र पर कोई चर बिन्दु $P(x, y)$ तथा इसके समीपवर्ती अन्य बिन्दु $Q(x, \delta x, y + \delta y)$ है। चित्रानुसार AC तथा BD क्रमश: A तथा B की कोटियाँ है तथा PR एवं QS बिन्दुओं P तथा Q की कोटियाँ है। PM तथा QN क्रमश: QS तथा PR पर लम्ब है।



चित्र 12.1

-अब माना कि क्षेत्रफलों APRC तथा AQSC द्वारा x-अक्ष के सापेक्ष परिक्रमण ठोसों के आयतन क्रमश: V तथा V+δV है। स्पष्ट रूप से क्षेत्रफल PQRS द्वारा x-अक्ष के सापेक्ष परिक्रमण ठोस का आयतन δV होगा तथा $PR = y, QS = y + \delta y$ एवं $RS = \delta x$.

अब आयत PMSR द्वारा परिक्रमण ठोस का आयतन $= \pi y^2 \delta x$ तथा आयत QNRS द्वारा परिक्रमण ठोस का आयतन $= \pi (y + \delta y)^2 \delta x$

स्पष्ट है कि क्षेत्रफल PQRS द्वारा परिक्रमण ठोस का आयतन आयतों PMSR तथा QNRS द्वारा परिक्रमण-ठोसों के आयतनों के मध्य स्थित होगा, अर्थात्

$$\pi y^2 \delta x < \delta V < \pi \left(y + \delta y\right)^2 \delta x$$

या $$\pi y^2 < \frac{\delta V}{\delta x} < \pi \left(y + \delta y\right)^2$$

अब यदि $\delta x \to 0$ तो $\delta y \to 0$ अत: उपरोक्त की सीमा लेने पर

$$\pi y^2 < \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta V}{\delta x} < \pi y^2$$

या $$\frac{dV}{dx} = \pi y^2 \qquad \text{.....(1)}$$

अब (1) का $x = a$ तथा $x = b$ सीमाओं के बीच x-अक्ष के सापेक्ष समाकलन करने पर

$$\int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \frac{dV}{dx} dx = \int_a^b dV$$

$$= \left[V\right]_a^b$$

$$= [x = b \text{ पर V का मान }] - [x = a \text{ पर V का मान }]$$

= क्षेत्रफल ABDC को x-अक्ष के सापेक्ष घुमाने पर प्राप्त ठोस आकृति का आयतन।

यही सिद्ध करना था।

12.2.2 उपप्रमेय I

वक्र $x = f(y), y -$-अक्ष एवं भुजों $y = c$ तथा $y = d$ के मध्य घिरे क्षेत्रफल द्वारा y-अक्ष के सापेक्ष परिक्रमण से जनित ठोस का आयतन $= \int_c^d \pi x^2 dy$

12.2.3 उपप्रमेय 2

यदि वक्र का समीकरण प्राचलिक रूप में हों, अर्थात् $x = f(t)$ तथा $y = g(t)$ हो, तो वक्र x-अक्ष एवं कोटियों $x = a$ तथा $x = b$ के मध्य घिरे क्षेत्रफल द्वारा x-अक्ष के सापेक्ष परिक्रमण ठोस का आयतन = $\int_{t_1}^{t_2} \pi y^2 \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \pi \left[g(t)\right]^2 f'(t) dt$

जहाँ $x = a$ पर $t = t_1$ तथा $x = b$ पर $t = t_2$

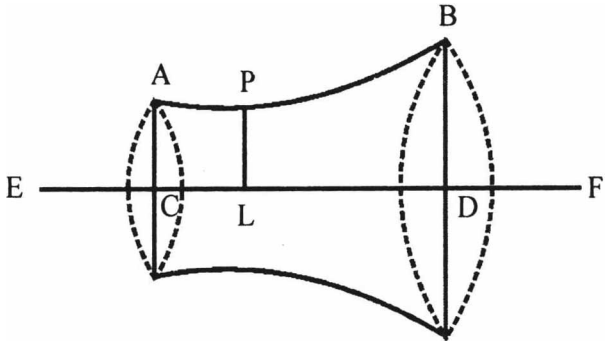
12.2.4 उपप्रमेय 3

यदि वक्र $y = f(x), x -$ अक्ष के स्थान पर इसके समान्तर किसी रेखा $y = y_1$ के सापेक्ष परिक्रमा करता है, तो परिक्रमण ठोस का आयतन $= \int_a^b \pi \left(y - y_1\right)^2 dx$

क्योंकि यहाँ वक्र के किसी बिन्दु की घूर्णन -अक्ष से लाम्बिक दूरी $y - y_1$ होगी।

12.2.5 उपप्रमेय 4

यदि वक्र AB निर्देशी - अक्षों (co-ordinate) के अतिरिक्त किसी अन्य रेखा EF (मान लो)के सापेक्ष परिक्रमा करता है, तो परिक्रमण ठोस का आयतन $= \int_{EC}^{ED} \pi \left(PL\right)^2 d\left(EL\right)$



चित्र 12.2

जहाँ E एक स्थिर बिन्दु है तथा PL वक्र पर किसी बिन्दु P से घूर्णन - अक्ष पर लम्ब है।

टिप्पणी **(i)**यदि वक्र घूर्णन - अक्ष के सापेक्ष सममित है, तो घूर्णन - अक्ष के एक ओर के क्षेत्रफल द्वारा परिक्रमण ठोस का आयतन तथा दूसरी ओर के क्षेत्रफल द्वारा परिक्रमण ठोस के आयतन के बराबर होता है। अत : पूर्ण क्षेत्रफल द्वारा परिक्रमण ठोस का आयतन = घूर्णन - अक्ष के एक ओर के क्षेत्रफल द्वारा परिक्रमण ठोस का आयतन

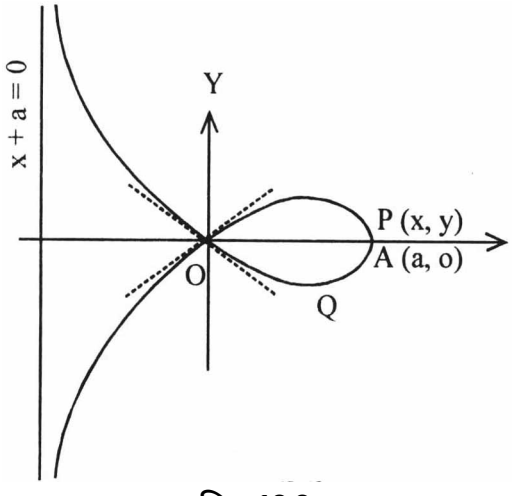
(ii)यदि वक्र किसी एक रेखा के सापेक्ष सममित है तथा यह इस रेखा पर लम्बवत् किसी अन्य रेखा के सापेक्ष परिक्रमा करता है तो परिक्रमण ठोस का आयतन = 2 (पहली रेखा के एक तरफ के क्षेत्रफल द्वारा परिक्रमण ठोस का आयतन)

(iii)परिक्रमण ठोसों के आयतन ज्ञात करने के पूर्व इसका कच्चा चित्र बनाने से प्रश्न को हल करने में सुविधा होती है।

उदाहरण 1 : वक्र $y^2(a+x)=x^2(a-x)$ के लूप द्वारा x - अक्ष के सापेक्ष परिक्रमण करने से बने ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ वक्र है $y=x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ .....(1)

जिसका चित्र 12.3 है :



चित्र 12.3

स्पष्ट है कि वक्र घूर्णन अक्ष अर्थात् x-अक्ष के सापेक्ष सममित है। अत: वक्र के लूप APOQA द्वारा परिक्रमण ठोस का आयतन = क्षेत्रफल APOA द्वारा परिक्रमण ठोस का आयतन क्षेत्रफल APOA, चाप APO, x -अक्ष एवं कोटियों x = 0 तथा x = a से परिबद्ध है।

अत: अभीष्ट आयतन $=\int_0^a \pi y^2 dx$

$$=\pi\int_0^a \frac{x^2(a-x)}{a+x}dx$$

$$=\pi\int_0^a \left\{-x^2+2ax-2a^2+\frac{2a^2}{a+x}\right\}dx$$

$$=\pi\left\{\frac{-x^3}{3}+2a\frac{x^2}{2}-2a^2x+2a^3\log(x+a)\right\}_0^a$$

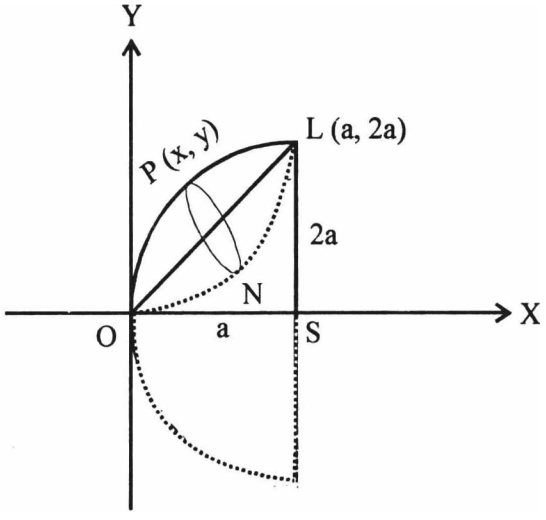
$$=\pi\left\{\frac{-a^3}{3}+a^3-2a^3+2a^3\log 2a-2a^3\log a\right\}$$

$$= \pi \left\{ -\frac{4a^3}{3} + 2a^3 \log 2 \right\}$$

$$= 2\pi a^3 \left(\log 2 - \frac{2}{3} \right)$$

उदाहरण 2 : परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष एवं नाभिलम्ब के एक सिरे को मिलाने से बनी जीवा द्वारा कटे क्षेत्रफल को जीवा के सापेक्ष चार समकोण से घुमाया जाता है। इस प्रकार बने ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि परवलय $y^2 = 4ax$ का शीर्ष $0(0,0)$ तथा नाभिलम्ब का एक सिरा $L(a,2a)$ है। माना कि $P(x,y)$ चाप OL पर कोई एक बिन्दु है तथा PM जीव OL पर लम्ब है। यहाँ हमें क्षेत्रफल OPLNO द्वारा OL के सापेक्ष परिक्रमण ठोस का आयतन ज्ञात करना है।



चित्र 12.4

पुन: जीवा OL का समीकरण होगा

$$y - 0 = \frac{2a - 0}{a - 0}(x - 0)$$

या $y = 2x$ .....(1)

अब PM = बिन्दु P से रेखा OL (3) पर डाले गए लम्ब की लम्बाई $= \frac{y - 2x}{\sqrt{5}}$

$$= \frac{2\sqrt{ax} - 2x}{\sqrt{5}} \left(\because y^2 = 4ax \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{a} - \sqrt{x} \right)}{\sqrt{5}} \quad \text{.....(2)}$$

पुन: समकोण त्रिभुज OPM से

$$OM^2 = OP^2 - PM^2$$

$$= x^2 + y^2 - \frac{4x}{5}\left(\sqrt{a} - \sqrt{x} \right)^2$$

$$= \frac{x^2 + 16ax + 8x\sqrt{ax}}{5} = \left(\frac{x + 4\sqrt{ax}}{\sqrt{5}} \right)^2$$

$$\therefore OM = \frac{x + 4\sqrt{ax}}{\sqrt{5}} \quad \text{.....(3)}$$

समीकरण (2) एवं (3) से

अभीष्ट आयतन $= \int_{x=0}^{x=a} \pi (PM^2) d(OM)$

$$= \pi \int_0^a \left[\frac{2\sqrt{ax} - 2x}{\sqrt{5}} \right]^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{x + 4\sqrt{ax}}{\sqrt{5}} \right) dx$$

$$= \frac{4\pi}{5\sqrt{5}} \int_0^a \left(ax - 2x\sqrt{ax} + x^2 \right) \left(1 + 2\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \frac{4\pi}{5\sqrt{5}} \int_0^a \left(x^2 - 3ax + 2a^{3/2}\sqrt{x} \right) dx$$

$$= \frac{4\pi}{5\sqrt{5}} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3ax^2}{2} + \frac{4}{3} a^{3/2} x^{3/2} \right)_0^a$$

$$= \frac{2\pi a^3}{15\sqrt{5}}$$

उदाहरण 3 : ट्रेक्टरी (Tractrix) $x = a\left(\cos t + \frac{1}{2} \log \tan^2 \frac{t}{2} \right), y = a \sin t$ द्वारा अपने अनन्त स्पर्शी के परित : परिक्रमण से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : स्पष्ट है कि वक्र दोनों अक्षों के सापेक्ष सममित एवं इसकी अनन्त स्पर्शी x -अक्ष है। पुन : t की

सीमा 0 से $\frac{\pi}{2}$ तक है।

अब $\frac{dx}{dt} = -a \sin t + a \cos ect = a \cos^2 t \cos ect$

तथा $\frac{dy}{dt} = a \cos t$

अभीष्ट आयतन $= 2 \int_{t=0}^{t=\pi/2} \pi y^2 dx$

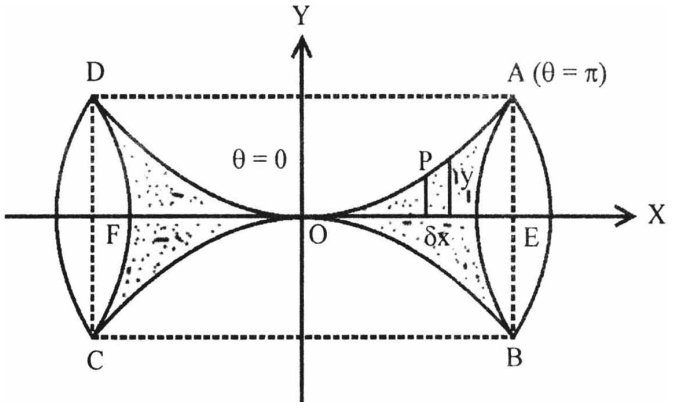
$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} y^2 \frac{dx}{dt} dt$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos^2 t dt$$

$$= -2\pi a^3 \left(\frac{\cos^3 t}{3} \right)_0^{\pi/2} = \frac{2}{3} \pi a^3$$

उदाहरण 4 : साइक्लॉइड (Cycloid) $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$ को शीर्ष पर स्पर्श रेखा के सापेक्ष घुमाने से बनी रील का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल :



चित्र 12.5

यहाँ वक्र का शीर्ष मूलबिन्दु O है और x-अक्ष , शीर्ष पर स्पर्श रेखा है। पुन: O से A तक θ का मान 0 से π तक बदलता है।

ब अभीष्ट आयतन = 2 × क्षेत्रफल OEAO द्वारा x-अक्ष के परिक्रमण से जनित ठोस का आयतन

$$= 2\int_{\theta=0}^{\pi} \pi y^2 \frac{dx}{d\theta}.d\theta$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi} (1-\cos\theta)^2 (1+\cos\theta)\, d\theta$$

$$= 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^4\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$\left(\frac{\theta}{2} = t \text{ रखने पर }, d\theta = 2dt\right)$$

$$= 32\pi a^3 \int_O^{\pi/2} \sin^4 t\cos^2 t dt$$

$$= 32\pi a^3 \frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}}{2.3.2.1} = \pi^2 a^3$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न -1

निम्न प्रश्नों (1 - 3) में रिक्त स्थानों की पूर्ति करें -

1. त्रिज्या r के गोले का आयतन..... होता है।
2. वक्र $y = f(x), x-$ अक्ष के समान्तर किसी रेखा $y = c$ के सापेक्ष परिक्रमा करता है।जनित ठोस का आयतन..... होगा।
3. y-अक्ष के समान्तर अन्य किसी रेखा के परित : परिक्रमण से जनित ठोस का आयतन ..... होगा।
4. यदि वक्र $x = f(y), y-$ अक्ष एवं भुजों $y = c, y = d$ के मध्य घिरे क्षेत्रफल द्वारा y - अक्ष के सापेक्ष परिक्रमण ठोस का आयतन बताइये।

5. दीर्घाक्ष - गोलाभ (Prolate speroid) या दीर्घवृत्त (ellipse) को दीर्घ - अक्ष (major axis) के सापेक्ष घुमाने से बने ठोस का आयतन समाकल रूप में लिखिए।
6. दीर्घवृत्त को लघु - अक्ष (minor axis) सापेक्ष घुमाने से बने ठोस या लध्वक्ष - गोलाभ (Oblate spheroid) का आयतन समाकल रूप में लिखिए।

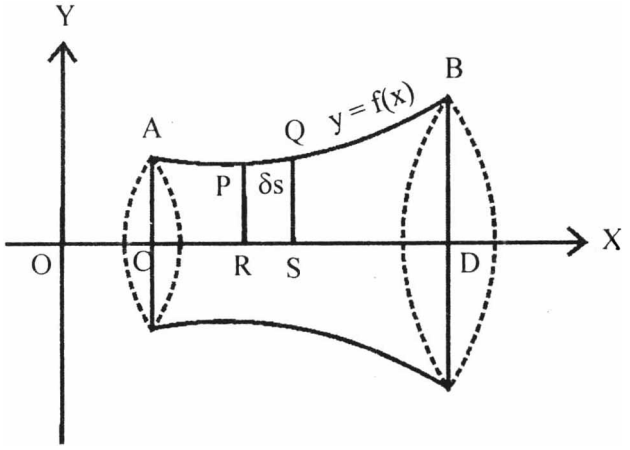
12.3 परिक्रमण ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

(Surface Area of Solid of Revolution)

12.3.1 प्रमेय 2

वक्र $y = f(x)x -$ अक्ष एवं कोटियों $x = a, x = b$ के मध्य चाप द्वारा x- अक्ष के परित : परिक्रमण से जनित ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \int_a^b 2\pi y ds$ होता हैं, जहाँ s बिन्दु $x = a$ से वक्र के किसी स्वैच्छित बिन्दु (x, y) तक वक्र की लम्बाई है, और $f(x)$ अन्तराल (a,b) में एक सीमित, एकमानीय तथा सतत् फलन है तथा घूर्णन अक्ष अर्थात् x - अक्ष को अन्तराल (a,b) में नहीं काटता है।

उपपत्ति : माना कि वक्र AB का समीकरण $y = f(x)$ है और बिन्दुओं $x = a$ तथा $x = b$ के संगत कोटियाँ क्रमश : AC तथा BD है। वक्र पर कोई चर बिन्दु $P(x, y)$ तथा इसके समीपवर्ती बिन्दु $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ है तथा इनके संगत कोटियाँ क्रमश : PR तथा QS है। माना कि चाप PQ की लम्बाई δs है। पुन : मान लो कि चापों AP तथा AQ द्वारा x- अक्ष के सापेक्ष परिक्रमण से जनित ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल कमश : S एवं $S + \delta s$ है तब स्पष्ट रूप से चाप PQ द्वारा जनित ठोस पृष्ठ δs होगा।



चित्र 12.6

अब अभीष्ट पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित स्वयंसिद्धि (axiom) का प्रयोग करते है:

" क्षेत्रफल PQSR को x- अक्ष के परित : परिक्रमण से जनित ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल उन दो बेलनों के पृष्ठों के मध्य स्थित होता है जिनकी मोटाई δs और उनकी त्रिज्याएँ $PR(=y)$ तथा $QS(=y+\delta y)$ है। "

उपरोक्त स्वयंसिद्धि की सहायता से

$$2\pi y\delta s < \delta s < 2\pi y(y+\delta y)\delta s$$

या $$2\pi y < \frac{\delta S}{\delta s} < 2\pi y(y+\delta y) \qquad .....(1)$$

जब $\delta s \to 0$ तो $\delta y \to 0$ अतः (1) की सीमा लेने पर

$$\frac{dS}{ds} = 2\pi y \qquad .....(2)$$

अब $x=a$ तथा $x=b$ सीमाओं के मध्य समाकलन करने पर

$$\int_{x=a}^{x=b} 2\pi y ds = \int_{x=a}^{b} \frac{dS}{ds} ds = \int_{x=a}^{b} dS = [S]_{x=a}^{x=b}$$

$=[S$ का मान जब $x=b]$ - $[S$ का $x=a$ पर मान)

= चाप AB को x- अक्ष के सापेक्ष परिक्रमण से जनित ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

अत : अभीष्ट पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \int_{x=a}^{b} 2\pi y ds$

इस सूत्र में ds का मान निम्न सूत्र की सहायता से ज्ञात कर सकते है :

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

12.3.2 उपप्रमेय 1

यदि वक्र का समीकरण $x=f(x)$ तथा चाप के सिरे $y=c$ तथा $y=d$ हों, तो चाप को y- अक्ष के परित : परिक्रमण से जनित ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$S = \int_{y=c}^{d} 2\pi x ds = \int_{y=c}^{d} 2\pi x \left(\frac{ds}{dy}\right) dy$$

जहाँ $$\frac{ds}{dy} = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

12.3.3 उपप्रमेय 2

यदि वक्र का समीकरण ध्रुवीय रूप $r=f(\theta)$ हो, तो वक्र के $\theta=\alpha$ एवं $\theta=\beta$ के मध्य चाप द्वारा प्रारम्भिक रेखा के : परिक्रमण से जनित ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$S = \int_{\theta=\alpha}^{\beta} 2\pi(r\sin\theta)\left(\frac{ds}{d\theta}\right) d\theta$$

$$= \int_{\theta=\alpha}^{\beta} 2\pi r \sin\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$ होता है।

12.3.4 उपप्रमेय 3

यदि वक्र का समीकरण प्राचलिक रूप $x = f(t), x = g(t)$ हो, तो प्राचल $t = t_1$ से $t = t_2$ तक चाप द्वारा x- अक्ष के परित : पीरक्रमण से जनित ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$S = \int_{t=t_1}^{t_2} 2\pi y \left(\frac{ds}{dt}\right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} 2\pi g(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$ होता है।

12.3.5 उपप्रमेय 4

यदि वक्र AB रेखा EF के सापेक्ष परिक्रमा करता है (देखें चित्र 12. 2) तो परिक्रमण ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \int_{EC}^{ED} 2\pi (PL)\, d(EL)$$

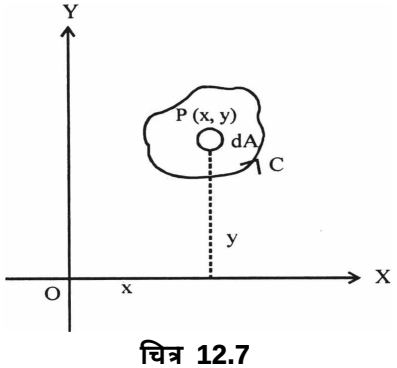
$$= \int_{EC}^{ED} 2\pi (PL)\, ds$$

12.4 पेपस के प्रमेय (Theorems of Pappus)

12.4.1 प्रमेय 3

यदि कोई समतल बन्द वक्र (closed curve) अपने समतल में स्थित किसी स्थिर रेखा के परित : जिसे वक्र नहीं काटता, परिक्रमण करे, तो इस प्रकार जनित वलय (Ring) का आयतन, वक्र के क्षेत्रफल एवं केन्द्रक द्वारा तय किए गए पथ की लम्बाई के गुणनफल के बराबर होता है।

उपपत्ति : माना कि C कोई समतल बन्द वक्र है जिसका क्षेत्रफल A है तथा OX घूर्णन - अक्ष है। पुन : मान लो वक्र के बिन्दु $P(x, y)$ पर क्षेत्रफल dA का एक अल्पांश (element) स्थित है। अब यदि वक्र, अक्ष OX के सापेक्ष कोण α घूमता है,तो अल्पांश dA द्वारा जनित आयतन $\alpha y dA$ होगा।



चित्र 12.7

अत: सम्पर्ण वक्र का जनित आयतन

$$= \int \alpha y dA$$

$$= \frac{\alpha \int y ds}{\int ds} \times \int dA$$

$$= \alpha \bar{y} \times A$$

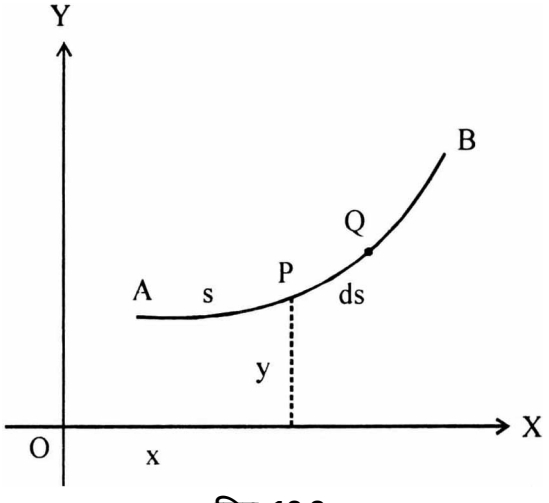
(जहाँ $\bar{y}, OX$ से वक्र C के केन्द्रक की दूरी है।)

फलत: अभीष्ट आयतन

= (केन्द्रक द्वारा चले गए पथ की लम्बाई) × (वक्र का क्षेत्रफल)

12.4.2 प्रमेय 4

यदि किसी वक्र का चाप अपने समतल मे स्थित किसी स्थिर रेखा के : जिसे चाप नहीं काटता परीक्रमण करे तो इस प्रकार जनित पृष्ठ, चाप की लम्बाई एवं उसके केन्द्रक द्वारा तय किए गए पथ की लम्बाई के गुणन फल के बराबर होता है।



चित्र 12.8

उपपत्ति : माना AB किसी दिए हुए वक्र का कोई चाप है तथा s इसकी लम्बाई है। OX घूर्णन परिक्रमण ठोसों के - अक्ष है। माना वक्र के बिन्दु $P(x, y)$ पर लम्बाई ds का एक अल्पांश स्थित है। आयतन एवं पृष्ठ अब यदि वक्र अक्ष OX के परित पारित : कोण द्वता है तो अल्पांश ds द्वारा जनित पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \alpha y ds$

अत : सम्पूर्ण वक्र AB द्वारा जनित पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \int \alpha y ds$$

$$= \frac{\alpha \int y ds}{\int ds} \times \int ds$$

$= \alpha \bar{y} s,$ जहाँ $\bar{y}$, चाप AB के केन्द्रक की OX से दूरी है

= (केन्द्रक द्वारा तय की गई पथ की लम्बाई) × (चाप की लम्बाई)

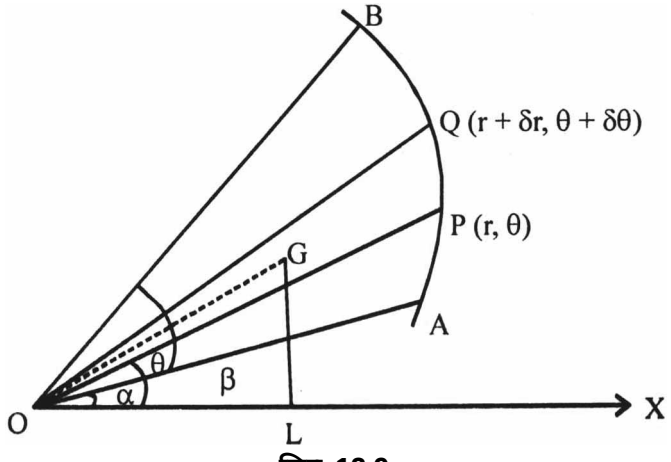
12.5 ध्रुवीय वक्र के लिए आयतन (Volume for Polar Curves)

12.5.1 प्रमेय 5

वक्र $r = f(\theta)$ एवं रेखाओं $\theta = \alpha$ एवं $\theta = \beta$ द्वारा घिरे क्षेत्रफल के प्रारम्भिक रेखा के परित : परिक्रमण से जनित ठोस का आयतन $= \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\theta d\theta$ होता है।

उपपत्ति : माना वक्र $r = f(\theta)$ एवं ध्रुवान्तर रेखाओं $\theta = \alpha$ एव $\theta = \beta$ द्वारा घिरा क्षेत्रफल OAB हैं।

माना $P(r, \theta)$ वक्र पर कोई बिन्दु है तथा $Q(r + \delta r, \theta + \delta\theta)$ समीपवर्ती बिन्दु है। तब $\angle POQ = \delta\theta$ तथा चाप $PQ = r\delta\theta$



चित्र 12.9

चूंकि PQ बहुत छोटा है अत : त्रिज्य खण्डीय क्षेत्रफल (sectorial area) POQ को त्रिभुज माना जा सकता है।

अत : क्षेत्रफल $POQ = \frac{1}{2}(OP \times OQ)\sin POQ$

$= \frac{1}{2} r(r + \delta r)\sin\delta\theta$

$= \frac{1}{2} r^2 \delta\theta$ [$\because \delta r$ तथा $\delta\theta$ बहुत छोटे है]

यदि त्रिभुज OPQ का केन्द्रकG हो, तो $OG = \frac{2}{3} r$

अत: G से प्रारम्भिक रेखा OX पर डाले गए लम्ब की लम्बाई $GL = OG\sin\theta = \frac{2}{3} r\sin\theta$

अत: पेपस - प्रमेय 3 से क्षेत्रफल POQ को प्रारम्भिक रेखा अर्थात् $\theta = 0$ के परित: परिक्रमण से जनित ठोस का आयतन

$= (POQ$ का क्षेत्रफल) × (इसके केन्द्रक द्वारा तय की गई दूरी)

$$= \left(\frac{1}{2} r^2 \delta\theta\right) \times \left(2\pi \times \frac{2}{3} r \sin\theta\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta \delta\theta$$

∴ अभीष्ट आयतन $= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2}{3}\pi r^3 \sin\theta d\theta$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\theta d\theta$$

12.5.2 उपप्रमेय 1

यदि क्षेत्रफल रेखा $\theta = \pi / 2$ के परित: परिक्रमण करें तो इस प्रकार जनित ठोस का आयतन

$$= \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \cos\theta d\theta$$

12.5.3 उपप्रमेय 2

यदि क्षेप्रफल रेखा $\theta = \gamma$ के परित: परीक्रमण करें तो जनित ठोस का आयतन

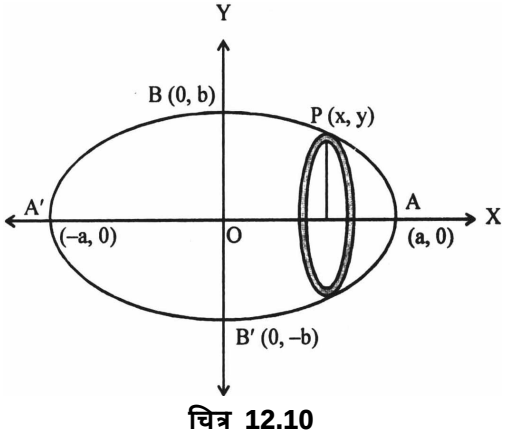
$$= \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin(\theta - \gamma) d\theta$$

उदाहरण 1 : दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को दीर्घ -अक्ष के सापेक्ष घुमाने से जनित दीर्घाक्ष-गोलाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दीर्घवृत्त का समीकरण है :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ या } y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{.....(1)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \quad \text{....(2)}$$



चित्र 12.10

चूंकि दीर्घवृत्त घूर्णन-अक्ष अर्थात् x- अक्ष के सापेक्ष सममित है अत: दीर्घवृत्त $ABA'B'A$ द्वारा परिक्रमण ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल = चाप ABA' द्वारा परिक्रमण ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल पुन: दीर्घवृत्त y-अक्ष (जो घूर्णन-अक्ष के लम्बवत् है) के सापेक्ष भी सममित है, अत: चाप ABA' द्वारा परिक्रमण ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\times$ चाप AB द्वारा परिक्रमण ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल अत: अभीष्ट पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\int_0^a 2\pi y ds$$

$$= 4\pi\int_0^a y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{4\pi}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4y^2+b^4x^2}\,dx \qquad \text{(समीकरण (2) से)}$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^2\left(a^2-x^2\right)+b^2x^2}\,dx$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^2\left(a^2-x^2\right)+a^2(1-e^2)x^2}\,dx \quad \left[\because b^2=a^2(1-e^2)\right]$$

$$= \frac{4\pi be}{a}\int_0^a \sqrt{(a/e)^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{4\pi be}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{e}\right)^2-x^2}+\frac{a^2}{2e^2}\sin^{-1}\left(\frac{xe}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= 2\pi ab\left[\sqrt{1-e^2}+\frac{1}{e}\sin^{-1}(e)\right]$$

उदाहरण 2 : कैटिनरी $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ द्वारा x-अक्ष के सापेक्ष परिक्रमण से जनित ठोस का आयतन एवं पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि $2V = as = \pi a\left(ax+sy\right)$, जहाँ V,S तथा s सामान्य संकेत हैं।

हल :

यहाँ $V = \int_0^x \pi y^2\,dx = \int_0^x \pi a^2\cosh^2\frac{x}{a}\,dx$

$$= \frac{\pi a^2}{2}\int_0^x\left(1+\cosh\frac{2x}{a}\right)dx$$

$$= \frac{\pi a^2}{2}\left[x+\frac{a}{2}\sinh\frac{2x}{a}\right]$$

अतः $V = \frac{\pi a^2}{2}\left[x + a\sinh\frac{x}{a}\cosh\frac{x}{a}\right]$ .....(1)

पुनः $S = \int_0^x 2\pi\, y\, \frac{ds}{dx}\, dx$

$$= \int_0^x 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^x a\cosh\frac{x}{a}\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}\, dx$$

$$= 2\pi a \int_0^x \cosh^2\frac{x}{a}\, dx$$

अतः $$S = \pi a\left[x + a\sinh\frac{x}{a}\cosh\frac{x}{a}\right] \quad ...(2)$$

अब चाप की लम्बाई $$(s) = \int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \int_0^x \cosh\frac{x}{a}\, dx$$

$$\therefore s = a\sinh\frac{x}{a} \quad ...(3)$$

अतः (1) ,(2) एवं (3) से

$$V = \frac{\pi a^2}{2}\left[x + a.\frac{s}{a}.\frac{y}{a}\right] = \frac{\pi a}{2}(ax+sy)$$

एवं $$S = \pi a\left(x + a\frac{s}{a}.\frac{y}{a}\right) = \pi(ax+sy)$$

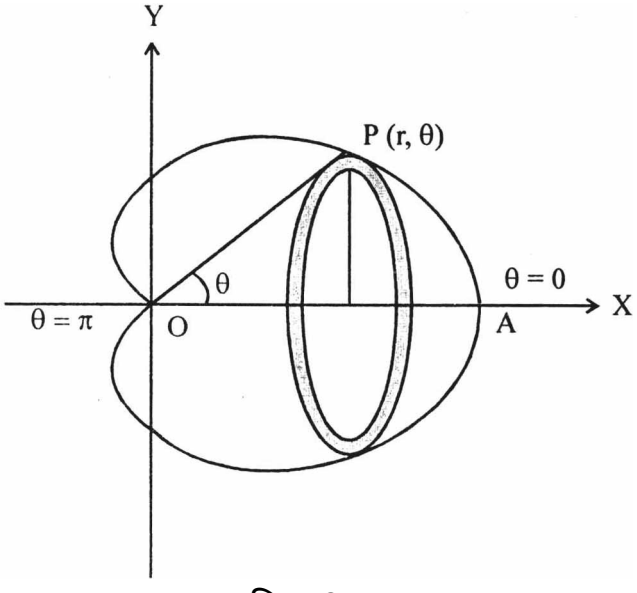
फलत : $2V = aS = \pi a(ax+sy)$

उदाहरण 3 : कार्डिऑइड $r = a(1+\cos\theta)$ को प्रारम्भिक रेखा के सापेंक्ष घुमाने पर बने ठोस का पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : चूंकि $r = a(1+\cos\theta)$

अतः $$\frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$$

$$\therefore \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$



चित्र 12.11

$$= \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}$$

$$= 2a\cos(\theta/2)$$

चूंकि वक्र घूर्णन - अक्ष अर्थात् प्रारम्भिक रेखा के सापेक्ष सममित है। अत : वक्र द्वारा परिक्रमण ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

= चाप APO द्वारा परिक्रमण ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} 2\pi y ds$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} r\sin\theta \frac{ds}{d\theta} d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} a(1+\cos\theta)\sin\theta . 2a\cos\theta \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin(\theta/2)\cos^4(\theta/2) d\theta$$

$$= 16\pi a^2 \left[-\frac{2}{5}\cos^5\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]_0^{\pi} = \frac{32\pi a^2}{5}$$

उदाहरण 4 : एस्ट्राइड $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ को x- अक्ष के सापेक्ष घुमाने से बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $x = a\cos^3 t$ तथा $y = a\sin^3 t$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t, \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t$$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a \sin^4 t \cos^2 t}$$

$$= 3a \sin t \cos t$$

चाप AB की सीमाएँ $t = 0$ से $t = \pi / 2$

अत : अभीष्ट पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2 \int_{t=0}^{\pi/2} 2\pi y ds$

$$= 4\pi \int_0^{\pi/2} y \frac{ds}{dt} dt$$

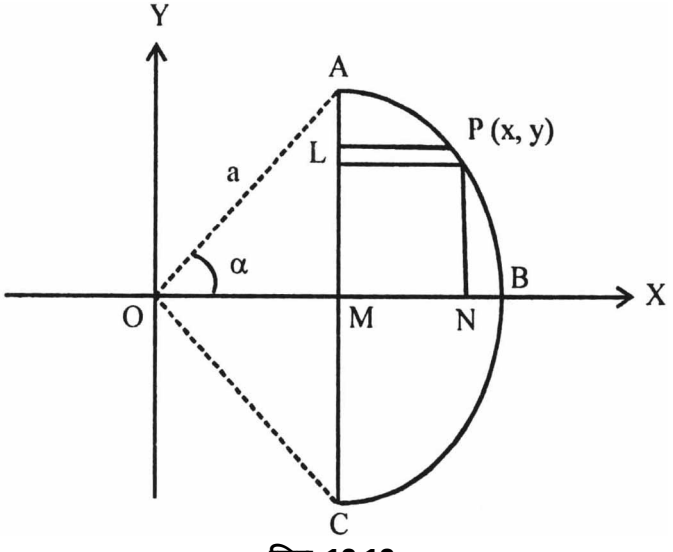
$$= 4\pi \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t . 3a \sin t \cos t dt$$

$$= 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt$$

$$= 12\pi a^2 \left[\frac{\sin^5 t}{5} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{12}{5} \pi a^2$$

उदाहरण 5 : एक वृत्तीय चाप अपनी जीवा के चारों ओर घूमता है। इस प्रकार जनित पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ वृत्त की त्रिज्या a तथा चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण 2α है।



चित्र 12.12

हल : माना कि वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ तथा चाप ABC x- अक्ष के सापेक्ष सममित हैं। चाप पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ है तथा PL एवं PN इस बिन्दु से AC तथा x-अक्ष पर लम्ब है। स्पष्ट है कि $PL = NM = ON - OM$

$$= x - a \cos \alpha \quad \text{.....(1)}$$

चूंकि चाप ABC x- अक्ष के सापेक्ष सममित है। अत : चाप ABC द्वारा AC के सापेक्ष परिक्रमण ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2 \times$ चाप AB (जिसके लिए y की सीमाएं 0 से $a \sin \alpha$) द्वारा AC के सापेक्ष

परिक्रमण ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

∴ अभीष्ट पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\int_0^{a\sin\alpha} 2\pi PL, ds$$

$$= 4\pi \int_0^{a\sin\alpha} PL\frac{ds}{dy}dy$$

$$= 4\pi \int_0^{a\sin\alpha} (x - a\cos\alpha)\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}dy$$

$$= 4\pi a \int_0^{a\sin\alpha} \frac{x - a\cos\alpha}{x}dy$$

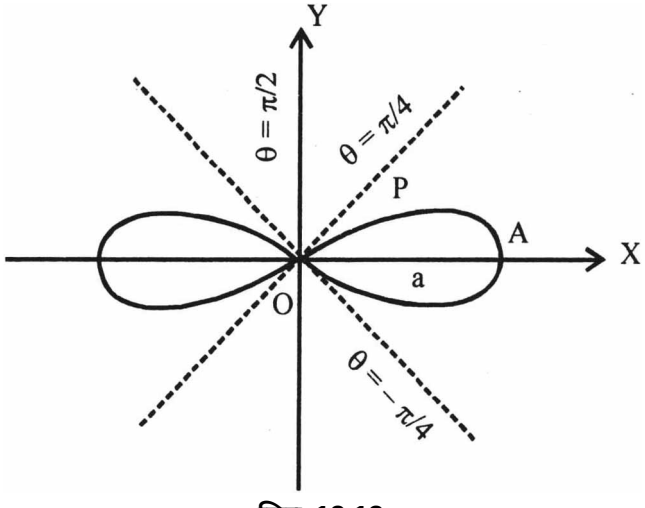
$$= 4\pi a \int_0^{a\sin\alpha} \left(1 - \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{a^2 - y^2}}\right)dy$$

$$= 4\pi a\left[y - a\cos\alpha \sin^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^{a\sin\alpha}$$

$$= 4\pi a^2\left[\sin\alpha - \alpha\cos\alpha\right]$$

उदाहरण 6 : द्विपाशी (Lemniscate) $= r^2 = a^2\cos 2\theta$ से जनित ठोस आकृति का आयतन ज्ञात कीजिए जब यह रेखा $\theta = \pi/2$ के परित: परिक्रमण करता हो।

हल :



चित्र 12.13

चूंकि वक्र रेखा $\theta = \pi/2$ के सापेक्ष सममित है अत: दोनों लूपों द्वारा परिक्रमण ठोस का आयतन

= किसी एक लूप द्वारा परिक्रमण ठोस का आयतन

= 2 (आधे लूप OPA द्वारा $\theta = \pi/2$ के परित: परिक्रमण ठोस का आयतन)

अत: अभीष्ट आयतन (V)

$$= 2\int_0^{\pi/4} \frac{2}{3}\pi r^3 \sin(90 - \theta)d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi/4} (\cos 2\theta)^{3/2} \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi/4} (1-2\sin^2\theta)^{3/2} \cos\theta d\theta$$

माना कि $\sqrt{2}\sin\theta = \sin\phi$

$$\therefore \quad V = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^4\phi \, d\phi$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. वक्र $y = f(x)$ के $x = a$ तथा $x = b$ के मध्य चाप द्वारा x-अक्ष के परितः परिक्रमण से जनित पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।
2. वक्र $r = f(\theta)$ एवं रेखाओं $\theta = \alpha, \theta = \beta,$ के मध्य चाप द्वारा प्रारम्भिक रेखा के परित : परिक्रमण से जनित ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल लिखिए।

निम्नलिखित प्रश्नों (3 - 6) में रिक्त स्थानों की पूर्ति करें :

3. a त्रिज्या के गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल..... होगा।
4. वक्र $r = f(\theta)$ एवं रेखाओं $\theta = \alpha, \theta = \beta,$ द्वारा घिरे क्षेत्रफल का प्रारम्भिक रेखा के सापेक्ष घुमाने पर बने ठोस का आयतन.....,.... होता है।
5. यदि उपरोक्त प्रश्न में क्षेत्रफल रेखा $\theta = \pi/2$ के सापेक्ष परिक्रमा करें तो ठोस का आयतन ..... होगा।
6. उपरोक्त क्षेत्रफल को $\theta = \gamma$ रेखा के सापेक्ष परिक्रमण कराने से जनित ठोस का आयतन ..... होता है।

निम्नलिखित प्रश्नों (7 - 8) में दिए हुए कथन सत्य है अथवा असत्य :

7. यदि कोई समतल बन्द वक्र अपने समतल में स्थित किसी रेखा के सापेक्ष (जिसे वक्र नहीं काटता), परिक्रमा करे तो जनित ठोस का आयतन, वक्र का क्षेत्रफल एवं उसके केन्द्रक द्वारा तय किए गए पथ की लम्बाई का गुणनफल होता हैं।
8. यदि किसी वक्र का चाप अपने समतल में स्थित किसी स्थिर रेखा के सापेक्ष पीरक्रमण करता हो तो जनित ठोस का पृष्ठ चाप की लम्बाई एवं वक्र पर किसी बिन्दु द्वारा तय की लम्बाई का गुणनफल होता है।

12.6 सारांश

इस इकाई में आपने किसी रेखा के सापेक्ष क्षेत्रफल या चाप द्वारा जनित ठोस के आयतन एवं पृष्ठीय क्षेत्रफल से सम्बन्धित गणितीय सिद्धान्तों एवं के महत्वपूर्ण बिन्दुओं का अध्ययन किया है। आपने समझा होगा आवश्यकता अनुसार प्रमेय एवं उदाहरणों से सम्बन्धित चित्र प्रश्न की जटिलता को खुलासा करने एवं उसे सरलता से समझने में सहायक सिद्ध होते हैं।

12.7 शब्दावली

समतल क्षेत्र	Plane region
परिक्रमण	Revolution
पृष्ठ या पृष्ठीय क्षेत्रफल	Surface area
सीमक व्यास	Bounding diameter
सीमित	Bounded
एक-मानीय	Single valued
सतत्	Continuous
समीपवर्ती बिन्दु	Neighborhood points
घूर्णन - अक्ष	Axis of revolution
अनन्तस्पर्शी	Asymptote
सममित	Symmetrical
केन्द्रक	Centroid
वलय	Ring

12.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न -1

(1) $\frac{4}{3}\pi a^3$

(2) $\int_a^b \pi \left(y-c\right)^2 dx$

(3) $\int_c^d \pi \left(x-a\right)^2 dy$

(4) $\int_c^d \pi x^2 dy$

(5) $\frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a \left(a^2-x^2\right)dx$

(6) $\frac{2\pi a^2}{b^2}\int_0^b \left(b^2-y^2\right)dy$

स्वमूल्यांकन प्रश्न -2

(1) $\int_a^b 2\pi y ds$

(2) $\int_\alpha^\beta 2\pi r sin\theta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$

(3) $2\pi a^2$

(4) $\frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin\theta d\theta$

(5) $\frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \cos\theta d\theta$

(6) $\frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin(\theta-\gamma) d\theta$

(7) सत्य

(8) असत्य

12.9 अभ्यास प्रश्न

1. त्रिज्या r एवं ऊँचाई h के गोलीय खण्ड का आयतन ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)$]

2. परवलय $y^2=4ax$ को $x=0$ से $x=h$ तक x - अक्ष के सापेक्ष घुमाने पर जनित परवलय का आयतन एवं पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $2\pi ah^2, \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}\left\{(h+a)^{3/2}-a^{3/2}\right\}$]

3. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को दीर्घ- अक्ष एवं लघुअक्ष के परित : घुमाने पर दीर्घाक्ष - गोलाभ एवं लध्वक्ष -गोलाभ के आयतन एवं पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : आयतन : $\frac{4\pi ab^2}{3}, \frac{4}{3}\pi a^2 b$; **पृष्ठ** : $\frac{2\pi ab}{e}\left[e\sqrt{1-e^2}+\sin^{-1}e\right]$:

एवं $2\pi a^2\left(1+\frac{1-e^2}{2e}\log\frac{1+e}{1-e}\right)$]

4. सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को लघुअक्ष के सापेक्ष घुमाने पर जनित ठोस का आयतन दीर्घवृत्त एवं सहायक वृत्त को दीर्घ अक्ष के सापेक्ष घुमाने से जनित आयतनों का मध्यानुपाती (mean proportional) होता है।
5. परवलय $y^2=4ax$ का नाभिलम्ब द्वारा घिरा हुआ क्षेत्रफल नाभिलम्ब के परित: घूमता है। इस प्रकार बने ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $\frac{32\pi a^3}{15}$]

6. परवलय $y^2=4ax$ का नाभिलम्ब द्वारा कटा हुआ भाग शीर्ष पर स्पर्श रेखा के सापेक्ष परिक्रमण करता है। इस प्रकार जनित रील का आयतन एवं पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $\frac{4\pi a^3}{5}; \pi a^2 3\sqrt{2}-\log\left(\sqrt{2}+1\right)$]

7. एस्ट्रॉयड $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ को x -अक्ष के सापेक्ष घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $\frac{32\pi a^3}{105}$]

8. सिसॉयड $y^2(2a-x)=x^3$ [या $x=2a\sin^2 t, y=2a\frac{\sin^3 t}{\cos t}$ द्वारा अपने अनन्त स्पर्शी के परित : परिक्रमण से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $2\pi^2 a^3$]

9. सिद्ध कीजिए कि वक्र $(a-x)y^2=a^2x$ उसके अनन्तस्पर्शी के सापेक्ष घुमाने पर बने ठोस का आयतन $\frac{\pi^2 a^3}{2}$ होगा।

10. साइक्लाइड $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1-\cos\theta)$ को इसके आधार एवं y-अक्ष सापेक्ष घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $5\pi^2 a^3; 6\pi^3 a^3$]

11. वक्र $y(x^2 + a^2) = a^3$ को इसके अनन्त स्पर्शी के परित : घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $\frac{\pi^2 a^3}{2}$]

12. वक्र $x = t^2, y = t - \frac{1}{3}t^3$ के लूप को x-अक्ष के सापेक्ष घुमाने से जनित ठोस का आयतन एवं पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $\frac{3\pi}{4}, 3\pi$]

13. उस शंकु के पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका अर्ध शीर्ष कोण α तथा आधार एक r त्रिज्या वाला वृत्त है।

[उत्तर : $\pi r^2 \cos ec\alpha$]

14. ट्रैक्टरी $x = a\cos t + \frac{a}{2}\log\tan^2(t/2), y = a\sin t$ को इसके अनन्त स्पर्शी के सापेक्ष घुमाने से जनित ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $4\pi a^2$]

15. दीर्घवृत्त $x^2 + 4y^2 = 16$ को (i) लघु - अक्ष (ii) दीर्घ - अक्ष के सापेक्ष घुमाने पर बने ठोस पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : (i) $32\pi\left\{1 + \frac{1}{4\sqrt{3}}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right\}$ (ii) $8\pi\left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right)$]

16. वक्र $r = 2a\cos\theta$ को प्रारम्भिक रेखा के सापेक्ष घुमाने पर जनित ठोस का आयतन एवं पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $\frac{4\pi a^3}{3}, 4\pi a^2$]

17. वक्र (i) $r = a(1-\cos\theta)$ (ii) $r^2 = a^2\cos 2\theta$ को प्रारम्भिक रेखा के सापेक्ष घुमाने से बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : (i) $\frac{32\pi a^2}{5}$; (ii) $4\pi a^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$]

18. वक्र $r^2 = a^2\cos 2\theta$ को (1i) प्रारम्भिक रेखा (ii) ध्रुव पर स्पर्श रेखा के सापेक्ष घुमाने पर बने ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : (i) $\frac{\pi a^3}{6\sqrt{2}}\left[3\log\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2}\right]$; (ii) $\frac{\pi^2 a^3}{4}$]

19. r त्रिज्या वाले वृत्त का एक चर्तुथांश (Quadrant) अपनी जीवा के सापेक्ष परिक्रमण करता है, तो प्रदर्शित करिये कि जनित चर्खी (spindle) का पृष्ठीय क्षेत्रफल $2\sqrt{2}\pi r^2\left(1-\pi/4\right)$ होगा।

20. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को रेखा $x = a/2$ द्वारा दो भागों में बाँटा जाता है एवं छोटे भाग को इस रेखा के सापेक्ष चार समकोण घुमाया जाता है तो जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $\pi a^2 b\left[\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}\right]$]

21. प्रदर्शित कीजिए कि समान्तर समतलों के बीच गोलीय कटिबन्ध (spherical zone) का पृष्ठ $2\pi ah$ है, जहाँ a गोले की त्रिज्या तथा समतलों के बीच की दूरी h है।

इकाई 13: द्वि -समाकल (Double Integral)

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य

13.1 प्रस्तावना

13.2 द्वि -समाकल की धारणा

13.2.1 कार्तीय निर्देशांको में द्वि-समाकल

13.2.2 द्वि-समाकल के गुणधर्म

13.2.3 द्वि -समाकल का ज्यामितीय अर्थ

13.2.4 द्वि-समाकल का मान ज्ञात करना

13.3 ध्रुवी निर्देशांको में द्वि -समाकल

13.4 द्वि-समाकल का कार्तीय रूप से ध्रुवीय रूप में परिवर्तन

13.5 समाकल का क्रम परिवर्तन

13.6 सारांश

13.7 शब्दावली

13.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

13.9 अभ्यास प्रश्न

13.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप दो चरो वाले फलनो के लिये कार्तीय तथा ध्रुवीय निर्देशांकों में द्वि-समाकलन की विधियों तथा उनके क्रम परिवर्तन के बारे मे जान पायेगे। आप जान पायेंगे कि द्वि-समाकलन का ज्यामितीय अर्थ क्या है।

13.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम द्वि-समाकलन की धारणा एवम् इसके मान ज्ञात करने की विधियों का अध्ययन करेगे। हम कार्तीय एवं ध्रुवीय निर्देशांकों में द्विकलन हल करने की विधियाँ ज्ञात करेंगे। इस इकाई को समझने के बाद आप द्वि-समाकलन का क्षेत्र ज्ञात कर सकेंगे जबकि त्रि-समाकलन में दोनों चरों की सीमाऐ दी गई हो। आप देखेगे कि कई समस्याऐ द्विकलन का क्रम परिवर्तन के पश्चात् इस करने के लिए आसान हो जाती है। इस इकाई को पूर्ण करने के पश्चात् आप तीन चरों वाले त्रि -समाकलन के लिये तैयार हो सकेंगे।

13.2 द्वि-समाकल की धारणा

13.2.1 कार्तीय निर्देशाकों में द्वि-समाकल :

माना कार्तीय xy-समतल में निश्चित क्षेत्र A के प्रत्येक बिन्दु पर दो स्वतंत्र चरों x तथा y का फलन $f(x,y)$ परिभाषित है। क्षेत्र A को, n भागों में विभाजित करने पर क्षेत्रफल क्रमशः $\delta A_1, \delta A_2, \ldots\ldots, \delta A_n$ है यदि प्रत्येक विभाजित क्षेत्र δA_r में स्वेच्छ बिन्दु (x_r, y_r) ले तो, योगफल

$$f(x_1,y_1)\delta A_1, + f(x_2,y_2)\delta A_2, + \ldots\ldots\ldots + f(x_n,y_n)\delta A_n$$

अथवा $$\sum_{r=1}^{n} f(x_r,y_r)\delta A_r \qquad \ldots\ldots(1)$$

विभाजित क्षेत्रों का क्षेत्रफल n का मान बढ़ाने पर न्यून होता जायेगा अर्थात् जब $n \to \infty \quad \delta A_n \to 0$ तब योगफल (1) की सीमा, फलन $f(x,y)$ का क्षेत्र A पर द्वि-समाकल कहलाता है जिसे $\iint_A f(x,y)dA$ से प्रदर्शित किया जाता है

अतः $$\iint_A f(x,y)dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} f(x_r,y_r)\delta A_r$$

यह प्रदर्शित किया जा सकता है कि सीमा का अस्तित्व होगा यदि क्षेत्र A की सीमा पर या भीतर सभी बिन्दुओं पर $f(x,y)$ सतंत हो या खण्डशः सतंत हो।

13.2.2 द्वि-समाकल के गुणधर्म

द्वि-समाकल के निम्न गुणधर्म स्थापित किये जा सकते है

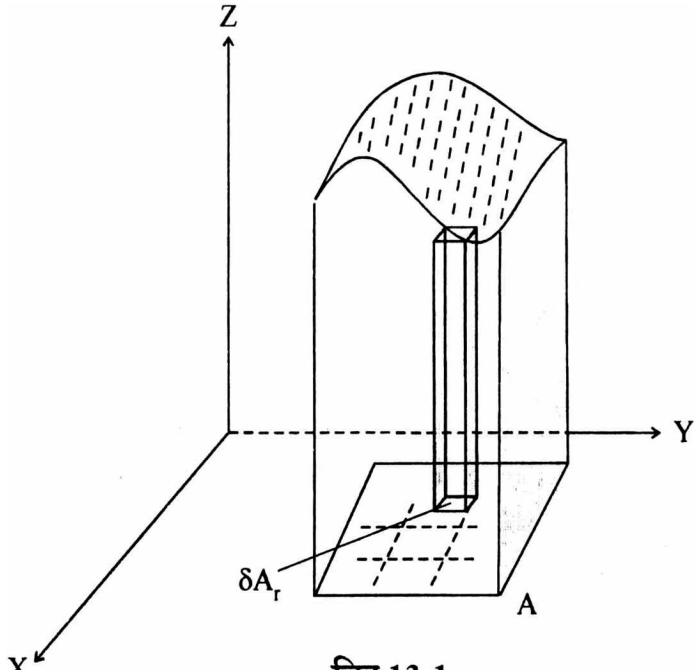
(i) $$\iint_A \{c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y)\} dA$$
$$= c_1 \iint_A f_1(x,y)dA + \iint_A f_2(x,y)dA$$
जहाँ c_1, c_2 अचर है

(ii) $$\iint_A f(x,y)dA = \iint_{A_1} f(x,y)dA + \iint_{A_2} f(x,y)dA$$
जहाँ क्षेत्र A को क्षेत्र A_1 तथा क्षेत्र A_2 मे विभाजित किया गया है।

13.2.3 द्वि-समाकल का ज्यामितीय अर्थ

यदि कार्तीय xy-समतल में $z = f(x,y)$ क्षेत्र A पर एक पृष्ठ S को निरुपित करता है। तो व्यापक पद $f(x_r,y_r)\delta A_r$ आधार δA_r पर पृष्ठ $z = f(x,y)$ तक खडे स्तम्भ का आयतन व्यक्त करता है। इसलिये योगफल $\sum_{r=1}^{n} f(x_r,y_r)\delta A_r$ क्षेत्र A पर पृष्ठ $z = f(x,y)$ तक खडे स्तम्भ का कुल आयतन व्यक्त करता है अब $n \to \infty$ लेने पर उक्त् योगफल की सीमा क्षेत्र A सोम S तक के ठोस का आयतन व्यक्त करती है, यदि $f(x,y) = 1$ ले तो द्वि-समाकल क्षेत्र A के क्षेत्रफल को व्यक्त करेगा , अतः क्षेत्र A का क्षेत्रफल $= \iint_A 1.dA$ यदि $f(x,y)$ धनात्मक है तो द्वि -समाकल

$\iint_A f(x,y)dA$ को A क्षेत्रफल की पतली असमान प्लेट की संहति के रूप में लिया जा सकता है, जहाँ प्लेट के किसी बिन्दू (x,y) पर संहति प्रति इकाई क्षेत्र $f(x,y)$ है।



चित्र 13.1

13.2.4 द्वि -समाकल का मान ज्ञात करना

द्वि -समाकल का मान योगफल की सीमा ज्ञात करके करना बड़ा कठिन है, कई बार क्षेत्र A पर प्रत्येक सतंत फलन समाकलनीय नहीं होता। अतएव हम उन्हीं क्षेत्रों पर ध्यान केन्द्रित करेगे सतंत प्रत्येक सतंत फलन समाकलनीय होता है। यहां हम द्वि -समाकल का अन्य वैकल्पिक विधि से मूल्यांकन करेगे जिसमें इसे उत्तरोत्तर एकल समाकल द्वारा ज्ञात किया जा सकता है :

यदि समाकलन क्षेत्र $A = x = a, x = b$ **तथा वक्रों** $y = f_1(x), y = f_2(x)$ **से घिरा हुआ हो तो द्वि -समाकल**

$$\iint_A f(x,y)dA = \int_a^b \left\{ \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx$$

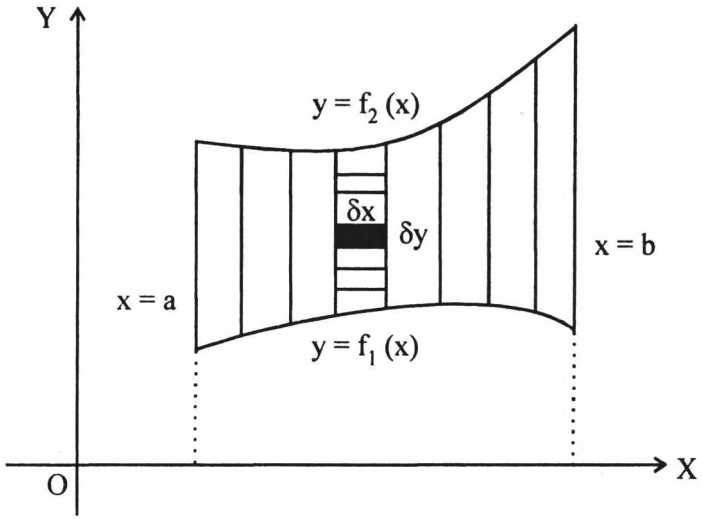
जहाँ x को अचर मानकर $f(x,y)$ **का पहले y के सापेक्ष समाकलन किया जाता है।**

क्षेत्र A को निर्देश अक्षों के समान्तर रेखाएँ खींचकर आयतो में विभाजित किया जाता है जिनकी चौड़ाई δx तथा ऊँचाई δy है तो

$$\iint_A f(x,y)dA = \lim_{\substack{\delta x \to 0 \\ \delta y \to 0}} \sum f(x_r, y_r)\delta x \delta y$$

जहाँ $(x_r, y_r), r$ वे आयत में स्वेच्छ बिन्दू है तथा सभी पूर्ण आयतो का योगफल लिया जाता है। सीमा ज्ञात करने के लिये आयतो के क्षेत्रफल का योग किसी भी क्रम में लिया जा सकता है।

माना किं हम पहले एक उर्ध्वाघर पट्टी (चित्र 13.2) में एक के उपर एक बने आयतो का योगफल ज्ञात करते है। इसी प्रकार अन्य पट्टियों में भी योग ज्ञात करते है। तब योगफल (1) निम्म प्रकार लिखा आ सकता है।



चित्र 13.2

$$\lim_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0}} \sum_{r=1}^{n}\left\{\sum_{s=1}^{m} f(x_r, y_s)\delta y\right\}\delta x \qquad \text{.....(2)}$$

जहाँ बिन्दु $(x_r, y_r), r$ वीं उर्ध्वाघर पट्टी के s वें आयत में है। r पट्टी में कुल आयतों की संख्या m तथा कुल n पट्टियाँ है। पहले कोष्ठक के अन्दर का योगफल ज्ञात करते समय x_r को अचर मान लिया जाता है। योगफल (2) में कोष्ठक के अन्दर के योग की सीमा लेने पर

$$\lim_{\delta y\to 0} \sum_{s=1}^{m} f(x_r, y_r)\delta y = \int_{y_1}^{y_2} f(x_r, y)\delta x$$

जहां y_1 तथा y_2, r वी खड़ी पट्टी में y के चरम मान है क्षेत्र A नीचे तथा ऊपर वक्र $y = f_1(x)$ तथा $y = f_2(x)$ से घिरा हुआ है। इसलिये $y_1 = f_1(x_r)$ तथा $y_2 = f_2(x_r)$ ले सकते है। अत:

$$\lim_{\delta y\to 0} \sum_{s=1}^{m} f(x_r, y_s)\delta y = \int_{f_1(x_r)}^{f_2(x_r)} f(x_r, y)dy = F(x_r) \quad \text{(माना)}$$

तब (2) का रूप,

$$\lim_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0}} \sum_{r=1}^{n}\left\{\sum_{s=1}^{m} f(x_r, y_s)\delta y\right\}\delta x$$

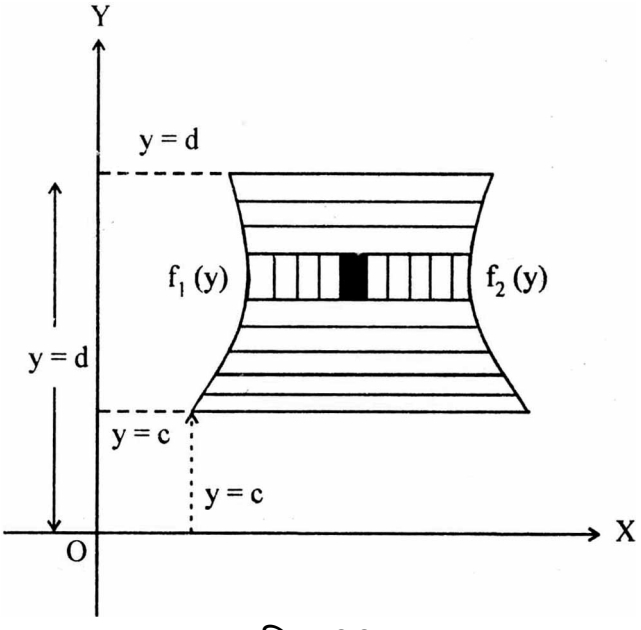
$$= \lim_{\delta x\to 0} \sum_{r=1}^{n} F(x_r)\delta x = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)dy\right]dx \qquad \text{.....(3)}$$

जहां a तथा b, x के चरम मान है। फलत: (1) व (3) से

$$\iint_A f(x, y)dA = \int_a^b \left\{\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)dy\right\}dx$$

इसी -प्रकार यदि पट्टियाँ x - अक्ष के समान्तर लेकर क्षेत्र A का विभाजन किया जावे तो वक्र $x = f_2(y), x = f_2(y), y = c$ तथा $y = d$ से घिरा हुआ क्षेत्र निम्न द्विसमाकल द्वारा दिया जाता है।

$$\iint_A f(x,y)dA = \int_c^d \left\{ \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dx \right\} dy$$



चित्र 13.3

सामान्यत : द्वि - समाकल में कोष्ठको का प्रयोग नहीं किया जाता है अत : उपरोक्त समाकलो को हम निम्न प्रकार लिख सकते है।

$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dxdy \quad \text{या} \quad \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy$$

जहाँ x को अचर मानकर $f(x,y)$ का पहले y के सापेक्ष समाकलन किया जाता है

इसी प्रकार

$$\int_c^d \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)dydx \quad \text{या} \quad \int_c^d dy \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)dx$$

जहां y को अचर मानकर $f(x,y)$ का पहले x के सापेंक्ष समाकलन किया जाता है।

टिप्पणी : सामान्यत : दो समाकलन चिन्हों में एक बाह्य व द्वितीय आंतरिक होता है। उदाहरणार्थ

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$ में

C से d सीमा वाला बाह्य तथा a से b सीमा वाला आन्तरिक चिन्ह होता है। बाह्य सीमाऐ सदैव अचर होती है जबकि आन्तरिक सीमाऐं चर अथवा अचर हो सकती है।

इसी प्रकार $dxdy$ का क्रम समझने के लिए

(i) यदि आन्तरिक सीमा $\theta_1(x)$ से $\theta_2(x)$ हो तो पहले आन्तरिक समाकलन को y के सापेक्ष समाकलित करेंगे व बाद में x के सापेक्ष ब्राह्मा समाकलन करेंगे व इस स्थिति में $dxdy$ अथवा $dydx$ से कोई विरोधाभास नहीं होगा। इसी प्रकार यदि सीमा $\psi_1(y)$ से $\psi_2(y)$ हो तो पहले आन्तरिक समाकलन x के सापेक्ष होगा। [देंखे उदाहरण 1 (ii)]

(ii) यदि बाह्य व आन्तरिक सीमाऐं दोनों अचर हों तो प्रचलन से $dxdy$ लिखने पर dx बाह्य समाकलन के लिए है व उसकी सीमाऐं x के सापेंक्ष समाकलन के लिये है तथा dy आन्तरिक समाकलन के लिये है। (देखें उदाहरण 1(i) 1

उदाहरण 1 : मान ज्ञात कीजिए

(i) $I = \int_0^a \int_0^b \left(x^2 + y^2\right) dxdy$ (ii) $I = \int_1^2 \int_0^x \frac{dxdy}{x^2 + y^2}$

हल (i) दिया हुआ द्वि-समाकल

$$I = \int_0^a \int_0^b \left(x^2 + y^2 \right) d\,x\,d\,y$$

$$= \int_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)_0^b dx (y \text{ के सापेक्ष समाकलन x को अचर मानते हुए})$$

$$= \int_0^a \left(x^2 b + \frac{b^3}{3} \right) dx = \left(\frac{x^3 b}{3} + \frac{b^3 x}{3} \right)_0^a$$

$$= \frac{a^3 b}{3} + \frac{b^3 a}{3} = \frac{1}{3} ab\left(a^2 + b^2\right)$$

हल : (ii) दिया हुआ द्वि-समाकल

$$I = \int_1^2 \int_0^x \frac{dxdy}{x^2 + y^2}$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} \tan^{-1} \frac{y}{x} \right)_0^x dx = \int_1^2 \left[\left(\frac{1}{x} \tan^{-1} 1 \right) - 0 \right] dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4} \left[\log x \right]_1^2 = \frac{\pi}{4} \left[\log 2 - \log 1 \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} \log 2$$

उदाहरण 2 : मान ज्ञात कीजिए

(i) $I = \int_0^1 \int_0^{x^2} e^{y/x} dxdy$

(ii) $= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} xydxdy$

हल (i) दिया हुआ द्वि-समाकल

$$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} e^{y/x} dxdy$$

$$= \int_0^1 \left(xe^{y/x} \right)_0^{x^2} dx = \int_0^1 x\left(e^x - 1\right) dx$$

$$= \left[x\left(e^x - x\right) - \left(e^x - \frac{x^2}{2} \right) \right]_0^1$$

$$= \left[(e-1) - \left(e - \frac{1}{2} \right) + 1 \right] = \frac{1}{2}$$

हल (ii) : दिया हुआ द्वि-समाकल

$$I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xydxdy$$

$$= \int_0^a x \left(\frac{y^2}{2} \right)_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^a x\left(a^2 - x^2\right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2 a^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a$$

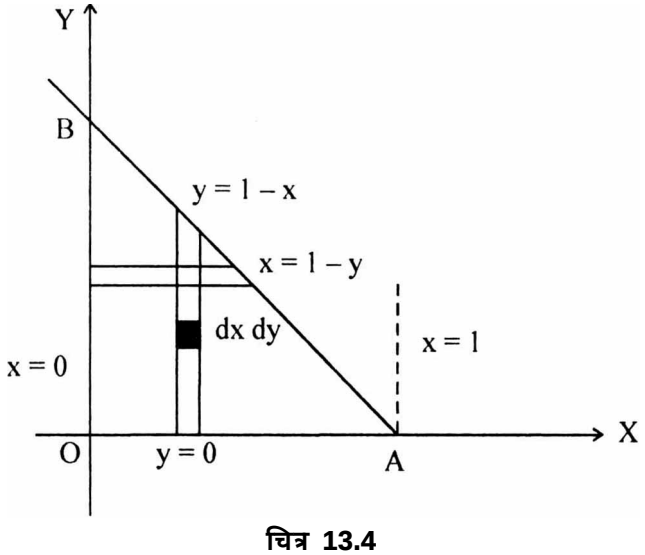
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} \right] = \frac{a^4}{8}$$

उदाहरण 3 : मान ज्ञात कीजिए :

$\iint_A xydxdy$ ज़हाँ समाकलन का क्षेत्र $A, x+y \leq 1$ का धनात्मक पाद है।

हल : विधि 1

यहाँ $x+y=1,$ एक सरल रेखा का समीकरण है जिसके x तथा y-अक्ष पर अन्तखण्ड 1 है। धनात्मक पाद में $x > 0$ तथा $y > 0$ है अत: समाकलन का अभीष्ट क्षेत्र चित्रानुसार OABO होगा, चित्र से x की सीमाऐ $x = 0$ से $x = 1$ तथा y की सीमाऐ $y = 0$ से $y = 1$



चित्र 13.4

अतः

$$I = \iint_A xydxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} xydxdy$$

$$= \int_0^1 x\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-2x+x^2)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)-\left(\frac{2x^3}{3}\right)+\left(\frac{x^4}{4}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{6-8+3}{12}\right] = \frac{1}{24}$$

विधि 2 : यदि समाकलन के क्षेत्र OABO में सीमाऐं $y=0$ से $y=1$ व $x=0$ से $x=1$ -y ली जाए तो

$$I = \int\int_A xydxdy = \int_0^1\int_0^{1-x} xydxdy$$

$$= \int_0^1\left(\frac{x^2y}{2}\right)_o^{1-y} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y(1-y)^2 dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 y(1-2y+y^2)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{2y^3}{3}+\frac{y^4}{4}\right)_0^1$$

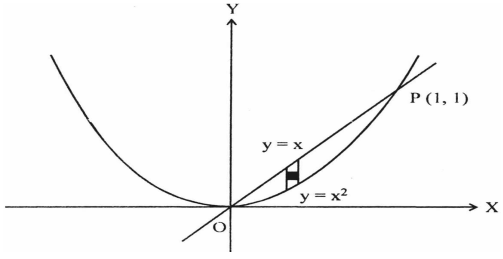
$$= \frac{1}{24}$$

उदाहरण 4 : मान ज्ञात कीजिए

$\int\int_A xy(x+y)dxdy$ जहाँ समाकलन का क्षेत्र A,

परवलय $y=x^2$ तथा रेखा $y=x$ से परिबद्ध है।

हल : यहाँ समाकलन का अभीष्ट क्षेत्र A, चित्रानुसार प्राप्त होता है जहाँ वक्र $y=x^2$ तथा रेखा $y=x$ के प्रतिच्छेदी बिन्दु पर x का मान 0 तथा 1 होगा, अत: चित्र से x की सीमाऐं $x=0$ से $x=1$ तथा y की सीमाऐं $y=x^2$ से $y=x$ अत:



चित्र 13.5

$$I = \iint_A xy(x+y)dxdy$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy(x+y)dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{2} - \frac{x^7}{3} \right] dx$$

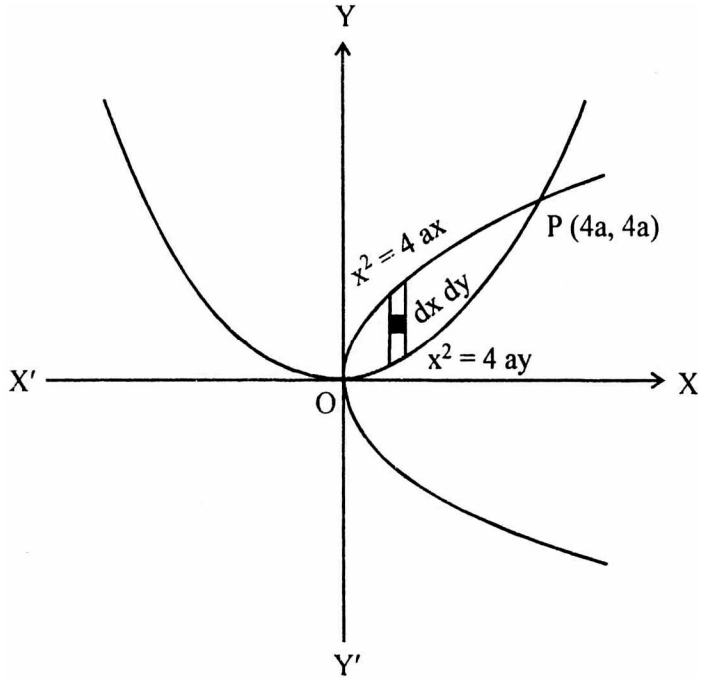
$$= \left(\frac{5x^5}{30} - \frac{x^7}{14} - \frac{x^8}{24} \right)_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{14} - \frac{1}{24} = \frac{3}{56}$$

उदाहरण 5 : मान ज्ञात कीजिए

$$\iint_A ydxdy$$

जहाँ समाकलन का क्षेत्र A परवलय $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4ay$ से परिबद्ध है।

हल : यहां समाकलन का अभीष्ट क्षेत्र A चित्रानुसार प्राप्त होता है, जहाँ परवलय $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4ay$ के प्रतिच्छेदी बिन्दु पर x का मान 0 तथा 4a होगा, अत: चित्र से x की सीमाऐं $x = 0$ से $x = 4a$ तथा y की सीमाऐं $y = \frac{x^2}{4a}$ से $y = 2\sqrt{ax}$



चित्र 13.6

अतः

$$I = \iint_A ydxdy$$

$$= \int_0^{4a} \int_{\frac{x^2}{4a}}^{2\sqrt{ax}} ydxdy = \int_0^{4a} \left(\frac{y^2}{2} \right)_{\frac{x^2}{4a}}^{2\sqrt{ax}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{4a}\left[4ax - \frac{x^4}{16a^2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4ax^2}{2} - \frac{x^5}{80a^2}\right]_0^{4a} = \frac{48}{5}a^3$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. $\iint_A \{f_1(x,y) + f_2(x,y)\}\,dA = \iint_A f_1(x,y)dA + ...$

2. द्वि-समाकल $\iint_A f(x,y)dA$ में यदि $f(x,y) = 1$ ले तो यह क्षेत्र A के क्षेत्रफल को व्यक्त करेगा (सत्या / असत्य)

3. द्वि-समाकल $\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dxdy$ में x को अचर मान कर $f(x,y)$ का पहले y के सापेक्ष समाकल किया जाता है (सत्या / असत्य)

4. द्वि-समाकल $\int_1^a \int_1^b \frac{dxdy}{xy}$ का मान होगा

   (i) $\log a$ (ii) $\log b$

   (iii) $\log ab$ (iv) 0

5. द्वि-समाकलन $\int_1^1 \int_1^2 (x+2)dxdy$ का मान होगा

   (i) 2 (ii) 3

   (iii) 4 (iv 5

13.3 ध्रुवी निर्देशांको में द्वि-समाकल

यदि ध्रुवी वक्र $r = f_1(\theta), r = f_2(\theta), \theta = \alpha,, \theta = \beta$ से घिरा हुआ क्षेत्र A हो तो

$$\iint_A f(r,\theta)dA = \iint_A f(r,\theta)rd\theta dr = \int_\alpha^\beta \left\{\int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r,\theta)rdr\right\}d\theta$$

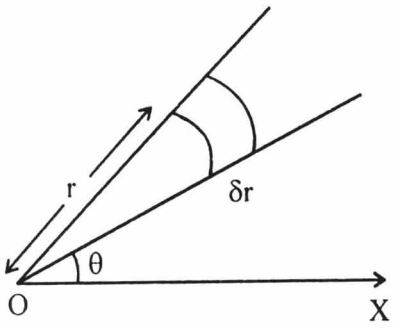
जहाँ θ को अचर मानकर पहले r के सापेक्ष तथा फिर θ के सापेक्ष समाकलन करते है।

फलन $f(r,\theta)$ का समाकलन ध्रुवीय निर्देशांकों से परिबद्ध क्षेत्र A के अन्तर्गत ज्ञात करना है ध्रुव को केन्द्र मानकर कई वृत्तीय चाप तथा ध्रुवान्तर रेखाऐ खीचते है जिससे क्षेत्र A कई छोटे - 2 उपक्षेत्रों $\delta A_1, \delta A_2, ...\delta A_n$ में विभाजित हो जाता है

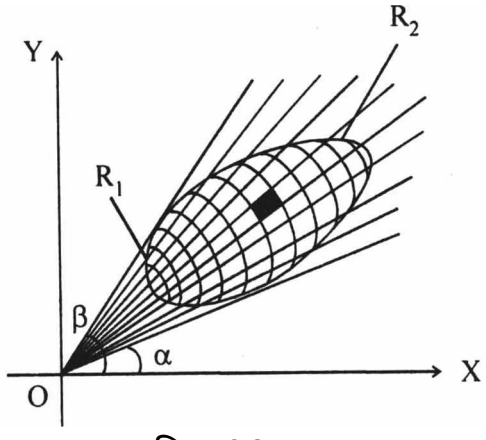
अब योगफल $\sum_{k=1}^{n} f(r_k,\theta_k)\delta A_k$ प्राप्त करते है जहाँ बिन्दु (r_k,θ_k) उपक्षेत्र δA_k में है। यहाँ द्वि - समाकल निम्न प्रकार परिभाषित किया जा सकता है

$$\iint_A f(r,\theta)dA = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(r_k,\theta_k)\delta A_k$$

अब हम (1) के दाहिने हाथ के योग की सीमा ज्ञात करेगे



चित्र 13.7



चित्र 13.8

यदि दो क्रमागत चापों की दूरी δr तथा दो क्रमागत ध्रुवान्तर रेखाओं के मध्य कोण $\delta\theta$ है तो बिन्दु (r,θ) पर उपक्षेत्र होगा

$$\frac{1}{2}\left(r+\delta r\right)^2\delta\theta-\frac{1}{2}r^2\delta\theta=r\delta r\delta\theta(\delta r \text{ तथा } \delta\theta \text{ की उच्च घातों को छोड़ने पर})$$

अत :

$$\iint_A f(r,\theta)dA=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}f(r_k,\theta_k)r_k\delta r\delta\theta\right\}$$

$$=\lim_{\delta\theta\to0}\sum_{k=1}^{n}\left\{\lim_{\delta r\to\infty}\sum_{i=1}^{m}f(r_i,\theta)r_i\delta r\right\}\delta\theta \qquad \text{.....(2)}$$

$$(\therefore n\to\infty\Rightarrow\delta r\to0 \text{ तथा } \delta\theta\to0)$$

जहाँ (r_i,θ_k) k वीं ध्रुवान्तर पट्टी का i वे उपक्षेत्र का बिन्दु है, K वीं ध्रुवान्तर पट्टी में m उपक्षेत्र तथा कुल n ध्रुवान्तर पट्टीयाँ है। पहले कोष्टक के अन्दर का योगफल θ_k को अचर मानकर किया जाता है अत : (2) में अन्दर के योग की सीमा

$$\lim_{\delta r\to0}\sum_{i=1}^{m}f(r_i,\theta_k)r_i\delta r=\int_{r_1}^{r_2}f(r,\theta_k)rdr \qquad \text{....(3)}$$

जहाँ Kवी ध्रुवान्तर पट्टी में r के चरम मान क्रमश : r_1 तथा r_2 है। चूंकि ध्रुवीय क्षेत्र A, नीचे तथा ऊपर से ध्रुवी वक्र $r=f_1(\theta)$ तथा $r=f_2(\theta)$ परिबद्ध है। अत : हम $r_1=f_1(\theta_k)$ तथा $r_2=f_2(\theta_k)$ लिख सकते है।

$$\therefore\lim_{\delta r\to0}\sum_{i=1}^{m}f(r_i,\theta_k)r_i\delta r=\int_{f_1(\theta_k)}^{f_2(\theta_k)}f(r,\theta_k)rdr=F(\theta_k) \text{ (माना) .....(4)}$$

अतः (2) व (4) से

$$\iint_A ff(r,\theta)dA=\lim_{\delta\theta\to0}\sum_{k=1}^{n}F(\theta_k)\delta\theta$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}F\left(\theta\right)d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r,\theta) r dr \right\} d\theta$$

जहाँ α व β, θ के चरम मान है यहाँ कोष्ठक के अन्दर θ को अचर मानकर r के सापेक्ष समाकलन किया जाता है।

सामान्यत : द्वि -समाकल में काष्ठको का प्रयोग नहीं किया जाता अत : उपरोक्त समाकलों को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r,\theta) r d\theta dr \quad \text{या} \quad \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r,\theta) r dr$$

13.4 द्वि -समाकल का कार्तीय रूप से ध्रुवीय रूप में परिवर्तन

द्वि -समाकल $\iint_A f(x,y) dA$ का कार्तीय निर्देशाकों से ध्रुवीय निर्देशाको में परिवर्तन हेतु निम्न प्रतिस्थापन का प्रयोग करते है $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,तथा $dA = r d\theta dr$

अत :

$$\iint_A f(x,y) dA = \iint_A f(x,y) dx dy$$
$$= \iint_A f(r\cos\theta, r\sin\theta) r d\theta dr$$

जहाँ पहले कार्तीय समाकलन की सीमाओं से समाकलन क्षेत्र A ज्ञात करते हैं तथा फिर इससे r व θ, की सीमाऐं निर्धारित करते है।

उदाहरण 1 : मान ज्ञात कीजिए

(i) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{a\cos\theta} r\sin\theta d\theta dr$

(ii) $\int_0^{\pi} \int_0^{a\sin\theta} r d\theta dr$

हल : **(i)** दिया हुआ द्विसमाकल

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{a\cos\theta} r\sin\theta d\theta dr$$
$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^2}{2} \right)_0^{a\cos\theta} \sin\theta d\theta$$
$$= \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta d\theta \left[\because \int_0^{\pi/2} \sin^m\theta \cos^n\theta d\theta = \frac{\left\lceil\left(\frac{m+1}{2}\right)\right\rceil\left\lceil\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil}{2\left\lceil\left(\frac{m+n+2}{2}\right)\right\rceil} \right]$$

$$= \left(\frac{a^2}{2}\right)\frac{\overline{|3/2}\overline{|1}}{\overline{|1}\overline{|5/2}} = \left(\frac{a^2}{2}\right)\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{2.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{a^2}{6}$$

हल : (ii) दिया हुआ द्वि-समाकल

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{a\sin\theta} r\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{r^2}{2}\right)_0^{a\sin\theta} d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi} 2\sin^2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi a^2}{4}$$

उदाहरण 2 : मान ज्ञात कीजिए

(i) $\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r\,d\theta\,dr$

(ii) $\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta\,d\theta\,dr$

हल : **(i)** दिया हुआ -समाकल

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r\,d\theta\,dr$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\frac{r^2}{2}\right)_0^{a(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(2\cos^2\theta/2\right)^2 d\theta = 2a^2\int_0^{\pi}\cos^4\theta/2\,d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi/2}\cos^4\phi\,d\phi \quad [\frac{\theta}{2} = \phi \text{ रखने पर }]$$

$$= 4a^2 \frac{\overline{\left|\frac{5}{2}\right|}\overline{\left|\frac{1}{2}\right|}}{2\overline{|3}}$$

$$= 4a^2 \frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\sqrt{\pi}}{2.2.1}$$

$$= \frac{3\pi a^2}{4}$$

हल: (ii) दिया हुआ द्वि-समाकल

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 \cos\theta d\theta dr = \int_0^{\pi} \left(\frac{r^3}{3}\right)_0^{a(1+\cos\theta)} \cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{a^3(1+\cos\theta)^3 \cos\theta d\theta}{3} = \frac{8a^3}{3} \int_0^{\pi} \cos^6\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right] d\theta$$

$$= \frac{16a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^6\phi(2\cos^2\phi - 1)d\phi \quad \left(\frac{\theta}{2} = \phi \text{ रखने पर}\right)$$

$$= \frac{16a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \left[2\cos^8\phi - \cos^6\phi\right] d\phi$$

$$= \frac{16a^3}{3}\left[2.\frac{\overline{\left|\frac{9}{2}\right|}\overline{\left|\frac{1}{2}\right|}}{2\overline{|5}} - \frac{\overline{\left|\frac{7}{2}\right|}\overline{\left|\frac{1}{2}\right|}}{2\overline{|4}}\right]$$

$$= \frac{16a^3}{3}\left[\frac{105\pi}{384} - \frac{15\pi}{96}\right] = \frac{5\pi}{8}a^3$$

उदाहरण 3 : हृदयाभ (कार्डिऑयड) $r = a(1+\cos\theta)$ के प्रारम्भिक रेखा से ऊपर वाले क्षेत्र पर $r\sin\theta$ का समाकलन कीजिए

हल : यहाँ समाकलन क्षेत्र की सीमाऐ

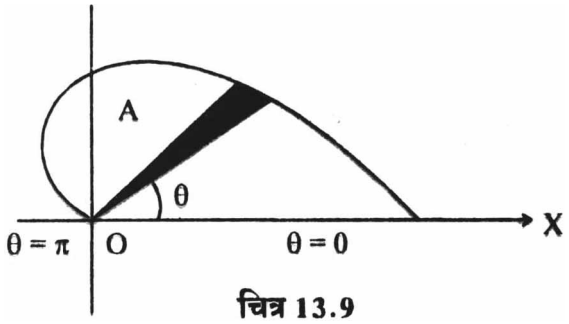
$\theta = 0$ से $\theta = \pi$ तथा

$r = 0$ से $r = a(1+\cos\theta)$ है

अतः

$$I = \int\int_A r\sin\theta dA$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\theta)} r\sin\theta r d\theta dr$$



चित्र 13.9

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{r^3}{3} \right)_0^{a(1+\cos\theta)} \sin\theta d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi} \sin\theta (1+\cos\theta)^3 d\theta;$$

यदि $(1+\cos\theta) = t$ ले तो $-\sin\theta d\theta = dt$

$$\therefore I = \frac{a^3}{3} \int_0^2 t^3 dt = \frac{a^3}{3} \left(\frac{t^4}{4} \right)_0^2 = \frac{4a^3}{3}$$

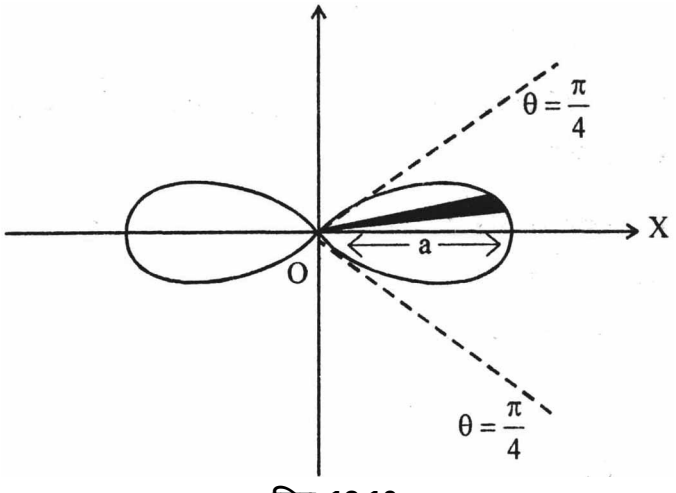
उदाहरण 4 : द्विपाशी (लैमिनीस्केट) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ की एक लूप पर

$\iint \frac{r d\theta dr}{\sqrt{a^2 + r^2}}$ का मान ज्ञात करो

हल : द्विपाशी $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ में एक लूप की निम्न समाकल सीमाऐ प्राप्त होती है।

$\theta = -\frac{\pi}{4}$ से $\theta = \pi/4$ तथा

$r = 0$ से $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$



चित्र 13.10

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{r d\theta dr}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\sqrt{a^2 + r^2} \right)_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left[\sqrt{a^2 + a^2 \cos 2\theta} - \sqrt{a^2} \right] d\theta$$

$$= a \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\sqrt{1 + \cos 2\theta} - 1 \right] d\theta$$

$$= a \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\sqrt{2} \cos\theta - 1 \right) d\theta$$

$$= a \left[\sqrt{2} \sin\theta - \theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$= \frac{a}{2}(4 - \pi)$$

उदाहरण 5 : निम्न समाकल को ध्रुवी निर्देशाको में परिवर्तित कर मान ज्ञात कीजिए

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(x^2 + y^2\right)} dxdy$$

हल : दिए हुए समाकल की सीमाओं से ज्ञात होता है कि समाकलन क्षेत्र A, प्रथम पाद है। अब ध्रुवीय निर्देशांको में बदलने के लिये $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ तथा $dxdy = rd\theta dr$ प्रतिस्थापित करते हैं जिससे हमें $x^2 + y^2 = r^2$ तथा निम्न समाकल सीमाऐं प्राप्त होती है।

$\theta = 0$ से $\theta = \pi/2$, तथा

$r = 0$ से $r = \infty$

$$\therefore \quad I = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2 + y^2)} dx\, dy$$

$$= \int\int_A e^{-r^2} r d\theta dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r e^{-r^2} d\theta dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{e^{-r^2}}{-2} \right)_0^\infty d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$= \pi/4$$

उदाहरण 6 : निम्न द्वि -समाकल को ध्रुवी निर्देशाकों मे परिवर्तित कर मान ज्ञात कीजिए

$$\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

हल : दिये हुये समाकल की सीमाओं से ज्ञात होता है कि समाकल क्षेत्र A, निम्न वक्रों से परिबद्ध है

$x = 0$ से $x = 2a,$ तथा

$y = 0$ से $y = \sqrt{2ax - x^2}$ या $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

ध्रुवीय निर्देशांको में बदलने के लिये

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 2ar\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow r = 2a\cos\theta$$

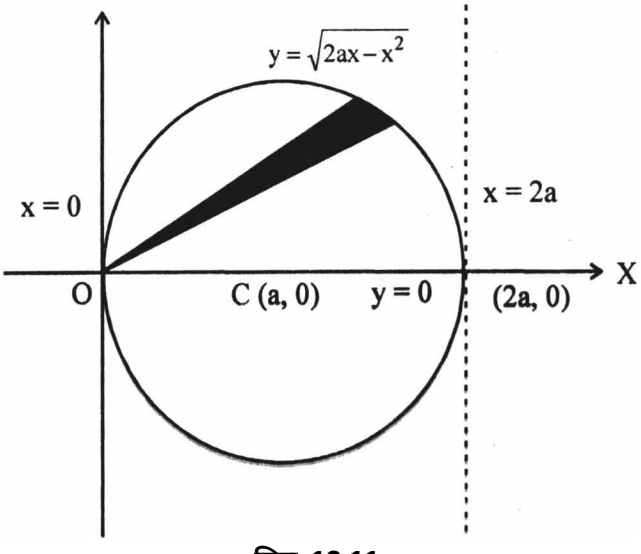
यहाँ हमें निम्न समाकल सीमाऐं प्राप्त होती है

$\theta = 0$ से $\theta = \pi/2$ तथा

$r = 0$ से $r = 2a\cos\theta$

$$\therefore I = \int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta} r.rd\theta dr$$



चित्र 13.11

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{r^3}{3}\right)_0^{2a\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta d\theta$$

$$= \frac{8a^3}{3} \frac{\boxed{1/2}\boxed{2}}{\boxed{2}\boxed{1/2}} = \frac{8a^3}{3} \cdot \frac{\sqrt{\pi}.1}{2.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{16a^3}{9}$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. ध्रुवीय निर्देशाको में द्वि - समाकल,
   $\int_{\alpha}^{\beta} \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r,\theta) r d\theta dr$, में θ को अचर मानकर $f(r,\theta)$ का पहले r के सापेक्ष समाकलन किया जाता है (सत्य / असत्य)
2. द्वि -समाकल का कार्तीय से ध्रुवीय निर्देशाकों में पीरवर्तन करने के लिये $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta, dxdy = ...$ प्रतिस्थापन का प्रयोग किया जाता है।
3. द्वि - समाकल का कार्तीय से ध्रुवीय निर्देशाकों में परिवर्तन करने से समाकलन क्षेत्र A परिवर्तित हो जाता है।

(सत्य / असत्य)

13.5 समाकलन का क्रम परिवर्तन

कई बार समाकलन का क्रम बदलकर द्वि - समाकलन को आसानी से ज्ञात किया जा सकता है : हम देख चुके है कि

$$\iint_A f(x,y)dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dxdy \quad .....(1)$$

$$= \int_c^d \int_{(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dydx \quad .....(2)$$

जहाँ रूप (1) y- अक्ष के समान्तर तथा रूप (2) में x- अक्ष के समान्तर पट्टियाँ लेकर समाकलन की सीमाऐ निर्धारित करते है। द्वि -समाकल में क्रम परिवर्तन हेतु, पहले दी हुयी समाकलन की सीमाओं से समाकलन का क्षेत्र A ज्ञात करते है। जब समाकलन का क्षेत्र A यदि y-अक्ष (x- अक्ष) के समान्तर पट्टियाँ के द्वारा प्राप्त हो तो उसके क्रम परिवर्तन करने के लिये उसी क्षेत्र को x-अक्ष (y-अक्ष) के समान्तर पट्टियाँ लेकर प्राप्त करते है।

उदाहरण 1 : निम्न समाकलन का क्रम बदलकर मान ज्ञात कीजिए

$$\int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dxdy$$

हल : यहाँ समाकलन क्षेत्र की सीमाऐं वक्र

$x = 0$ से $x = \infty$ तथा

$y = x$ से $y = \infty$ से परिबद्ध है जबकि पट्टियाँ y-अक्ष के समान्तर हैं।

समाकलन का क्रम बदलने के लिये हम पीट्टयाँ x-अक्ष के समान्तर लेगे, जिनकी सीमाऐ

$x = 0$ से $x = y$, तथा

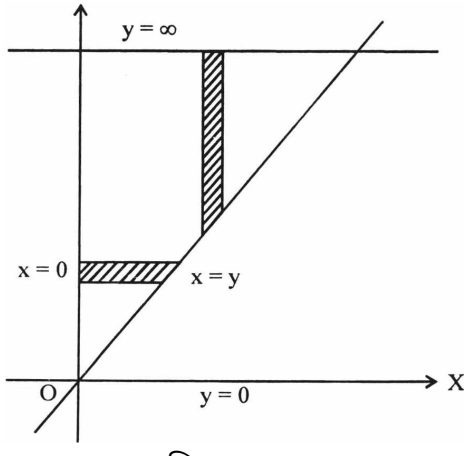
$y = 0$ से $y = \infty$ होगी, अत: समाकलन का क्रम बदलने पर दिया हुआ समाकल

$$\int_0^{\infty}\int_x^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}dxdy = \int_0^{\infty}\int_0^{y}\frac{e^{-y}}{y}dydx$$

$$= \int_0^{\infty}(x)_0^{y}.\frac{e^{-y}}{y}dy$$

$$= \int_0^{\infty} y.\frac{e^{-y}}{y}dy$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-y}dy = -\left(e^{-y}\right)_0^{\infty} = 1$$

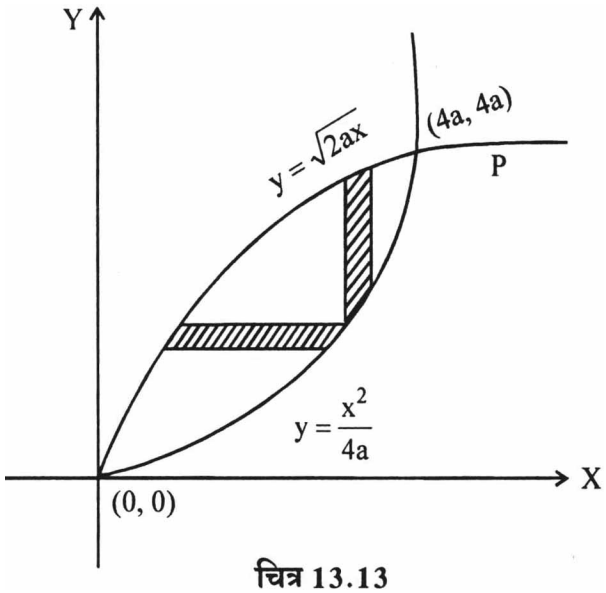


चित्र 13.12

उदाहरण 2 : निम्न समाकल में समाकलन का क्रम परिवर्तन कीजिए द्वि -समाकल

$$\int_0^{4a}\int_{x^2/4a}^{2\sqrt{ax}} f(x,y)dxdy$$

हल : यहां समाकलन क्षेत्र की सीमाऐं वक्र $x=0, x=4a$ तथा $y=\frac{x^2}{4a}, y=2\sqrt{ax}$ से परिबद्ध है। जबकि पट्टियाँ y-अक्ष के समान्तर हैं।



चित्र 13.13

समाकल के क्रम परिवर्तन हेतु हम पट्टियाँ x-अक्ष के समान्तर लेगे जिसकी सीमाऐ $x = \frac{y^2}{4a}$ से $x = 2\sqrt{ay}$, तथा $y = 0$ से $y = 4a$ है। अत: समाकलन का क्रम बदलने पर दिया हुआ समाकल

$$\int_0^{4a} \int_{x^2/4a}^{2\sqrt{ax}} f(x,y)dxdy = \int_0^{4a} \int_{y^2/4a}^{2\sqrt{ay}} f(x,y)dydx$$

उदाहरण 3 : निम्न समाकल

$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin rxdxdy$ में क्रम परिवर्तन से

$\int_0^{\infty} \frac{\sin rx}{x} dx$ का मान ज्ञात कीजिए

हल : दिया हुआ समाकल

$$I = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin rxdxdy$$

$$= \int_0^{\infty} \sin rx.\left(\frac{e^{-xy}}{-x}\right)_0^{\infty} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\sin rx}{x} dx \quad \text{.....(1)}$$

पुन : दिये गये समाकलन में क्रम परिवर्तन से (समाकलन का क्षेत्र पूर्ण धनात्मक चतुर्थांश है अत: सीमाओं में कोई पीरवर्तन नहीं होगा।]

$$I = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin rxdydx$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin rx dx \right] dy$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\frac{-e^{-xy}}{r^2+y^2} (r cosrx + y sinrx) \right]_0^{\infty} dy$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{r}{r^2+y^2} \right) dy = \left(\tan^{-1} \frac{y}{r} \right)_0^{\infty} = \pi/2 \quad ....(2)$$

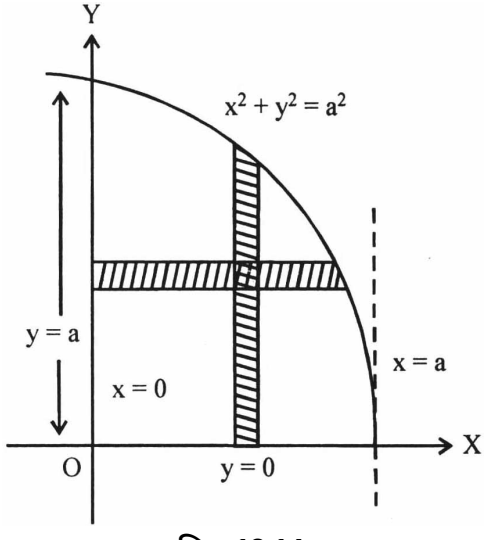
अतः (1) व (2) से $\int_0^{\infty} \frac{\sin rx}{x} dx = \pi/2$

उदाहरण 4 : निम्न द्वि-समाकल में समाकलन का क्रम परिवर्तन कीजिए

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y) dxdy$$

हल : यहाँ समाकलन क्षेत्र की सीमाऐ वक्र $x = 0, x = a$ तथा $y = 0, y = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$ से परिबद्ध है। समाकल के क्रम परिवर्तन हेतु हम पट्टियाँ x- अक्ष के समान्तर लेगे, जिसकी सीमाऐ $x = 0$ से $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ तथा $y = 0$ से $y = a$ है अतः समाकल का क्रम बदलने पर दिया हुआ समाकल

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y) dxdy = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dydx$$



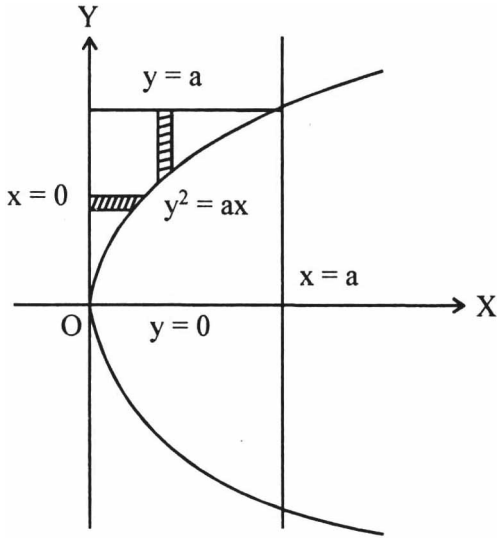
चित्र 13.14

उदाहरण 5 : समाकलन के क्रम परिवर्तन से निम्न द्वि-समाकलन को हल कीजिए

$$\int_0^a \int_{\sqrt{ax}}^a \frac{y^2}{\sqrt{y^4 - a^2x^2}} dxdy$$

हल : यहाँ समाकलन क्षेत्र की सीमाऐं वक्र $x = 0$ से $x = a$ तथा $y = \sqrt{ax} \Rightarrow y^2 = ax$ से $y = a$ तक परिबद्ध है समाकल का क्रम बदलने के लिये हम पट्टियां x-अक्ष के समान्तर लेगे, जिसकी

सीमाऐ $x = 0$ से $x = y^2/a$ तथा $y = 0$ से $y = a$ होगी, अत: समाकल का क्रम बदलने पर दिया हुआ समाकल



चित्र 13.15

$$I = \int_0^a \int_0^{y^2/a} \frac{y^2}{\sqrt{y^4 - a^2x^2}} dydx$$

$$= \int_0^a \frac{y^2}{a} \left[\sin^{-1}\left(\frac{ax}{y^2}\right) \right]_0^{y^2/a} dy$$

$$= \int_0^a \frac{y^2}{a} \left[\sin^{-1} 1 \right] dy = \frac{\pi}{2a} \int_0^a y^2 dy = \frac{\pi}{2a} \left(\frac{y^3}{3} \right)_0^a = \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{a^3}{3}$$

$$= \frac{\pi^2 a}{6}$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 3

1. द्वि-समाकलन के क्रम परिवर्तन से समाकलन का मान परिवर्तित हो जाता है।

(सत्या / असत्य)

2. द्वि-समाकलन के क्रम परिवर्तन से समाकलन का क्षेत्र परिवर्तित नहीं होता

(सत्या / असत्य)

3. द्वि-समाकलन $\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dxdy$ के क्रम परिवर्तन हेतु हमें समाकलन क्षेत्र में पट्टियाँ x-अक्ष के समान्तर लेनी होगी। (सत्या / असत्य)

4. द्वि-समाकलन $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)dxdy$ के कम परिवर्तन से हमें द्वि-समाकल $\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y)dydx$ प्राप्त होता है। (सत्या / असत्य)

13.6 सारांश

यदि कार्य xy-समतल में क्षेत्र A पर $z = f(x,y)$ एक पृष्ठ S को निरुपित करता है तो द्वि-समाकल $\int\int_A f(x,y)dA,$ क्षेत्र A पर पृष्ठ $z = f(x,y)$ तक आयतन को व्यक्त करता है। द्वि- समाकल $\int\int_A f(x,y)dxdy$ में x को अचर मानकर $f(x,y)$ का पहले y के सापेक्ष समाकल किया जाता है। इसी प्रकार द्वि-समाकल $\int\int_A f(r,\theta)rd\theta dr$ में θ का अचर मानकर $f(r,\theta)$ का पहले r के सापेक्ष समाकल किया जाता है। कई बार द्वि-समाकल को कार्तीय से ध्रुवीय निर्देशांको अथवा समाकल का क्रम परिवर्तन कर आसानी से हल किया जा सकता है, कार्तीय से ध्रुर्वी निर्देशाकों में परिवर्तन हेतु $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, dxdy = rd\theta dr$ प्रतिस्थापन का प्रयोग किया जाता है।

द्वि -समाकल $\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dxdy$ के क्रम परिवर्तन हेतु पट्टियाँ x-अक्ष के समान्तर ली जावेगी।

द्वि -समाकल से कार्तीय समतल में वक्रो से परिबद्ध क्षेत्र A का क्षेत्रफल, किसी पतली चद्दर की प्लेट के किसी बिन्दु (x,y) पर द्रव्यमान प्रति इकाई क्षेत्र या घनत्व दिया हो तो उसका कुल द्रव्यमान, तथा आधार A से पृष्ठ $z = f(x,y)$ तक का आयतन एवम् विभिन्न क्षेत्रों का गुरुत्व केन्द्र इत्यादि को भी ज्ञात किया जा सकता है।

13.7 शब्दावली

द्विसमाकल	Double integral
समाकलन क्षेत्र	Region of integration
क्रम परिवर्तन	Change of order

13.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकनप्रश्न - 1

1. $\int\int_A f_2(x,y)dA$ 2. सत्य
3. सत्य 4. $\log ab$
5. 5

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. सत्य 2. $rd\theta dr$
3. असत्य

स्वमूल्यांकन प्रश्न -3

1. असत्य 2. सत्य

3. सत्य 4. सत्य

13.9 अभ्यास प्रश्न

1. मान ज्ञात कीजिए $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$ **[उत्तर :** $\left[\frac{\pi}{4}\log\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$]

2. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ द्वारा घिरे हुये क्षेत्र पर $\int\int\left(x^2+y^2\right)dxdy$ का मान ज्ञात करो।

[उत्तर : $\log\left[\frac{1}{4}\pi ab\left(a^2+b^2\right)\right]$]

3. वृत्त $x^2+y^2=1$ के धनात्मक पाद पर, $\iint \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}}dxdy$ का मान ज्ञात करो।

[उत्तर : 1/6]

4. हृदयाभ (कार्डिआंयड), $r=a(1+\cos\theta)$ के प्रारम्भिक रेखा से ऊपर वाले क्षेत्र पर r^2 का समाकलन कीजिए। **[उत्तर :** $\frac{7\pi a^4}{8}$]

5. निम्न समाकल को ध्रुवी निर्देशांकों में परिवर्तन कर मान ज्ञात कीजिए

$$\int_0^a \int_y^a \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$$ **[उत्तर :** $\frac{a\pi}{4}$]

6. निम्न द्वि-समाकल को ध्रुवी निर्देशांकों में परिवर्तन कर मान ज्ञात कीजिए

$$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \left(x^2+y^2\right)dxdy$$ **[उत्तर :** $\frac{3\pi a^4}{4}$]

7. निम्न द्वि-समाकलन का क्रम बदलिये

$$\int_0^a \int_0^x f(x,y)dxdy$$ **[उत्तर :** $\int_0^a \int_y^a f(x,y)dydx$

8. निम्म समाकल में समाकलन का क्रम परिवर्तन कीजिए

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} Vdxdy$$

[उत्तर : $\int_0^a \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} Vdydx+\int_0^a \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} Vdydx+\int_0^{2a} \int_{y^2/2a}^{2a} Vdydx$

9. निम्न समाकल में समाकल का क्रम बदलकर मान ज्ञात करो

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{xdxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ **[उत्तर :** $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$]

इकाई 14: त्रि -समाकल एवं डिरिचलेट समाकल
(Triple-Integral and Dirichlet ′ s Integral)

इकाई की रूपरेखा

14.0 उद्देश्य
14.1 प्रस्तावना
14.2 त्रि-समाकल
14.2.1 परिभाषा
14.2.2 त्रि-समाकल का मान ज्ञात करना
14.3 डिरिचलेट का समाकल
14.4 साराश
14.5 शब्दावली
14.6 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर
14.7 अभ्यास प्रश्न

14.0 उद्देश्य

इस इकाई का उद्देश्य त्रि-समाकल एवं डिरिचलेट समाकल का अध्ययन करना है।

14.1 प्रस्तावना

आपने अब तक साधारण समाकल व द्वि-समाकल का अध्ययन किया जिससे आप किसी वक्र की लम्बाई, वक्र के द्वारा घेरे गए क्षेत्र का क्षेत्रफल व द्वि -समाकल में क्रम परिवर्तन संबंधी समस्याओं को हल कर सके।

इस इकाई में हम त्रिसमाकल व डिरिचलेट समाकलों का अध्ययन करेंगे जिससे कि हम किसी ठोस का आयतन व द्रव्यमान सरलता पूर्वक ज्ञात कर सकेंगे।

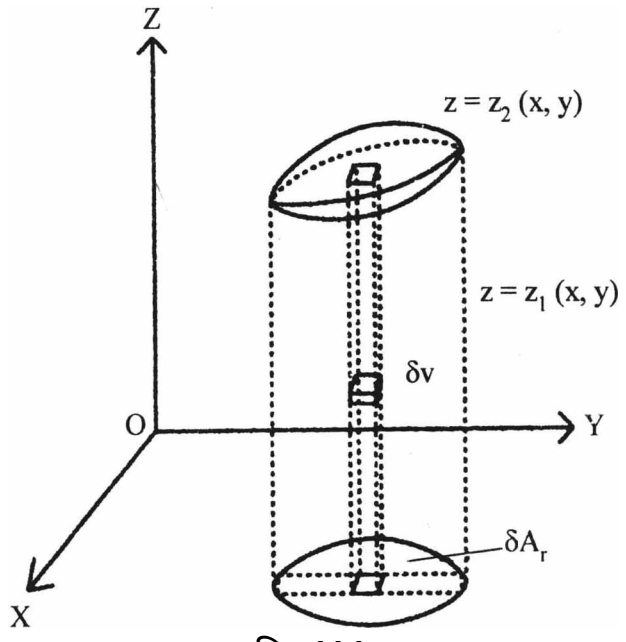
14.2 त्रि -समाकल

14.2.1 परिभाषा

माना त्रिविम समिष्ट में v कोई क्षेत्र है तथा फलन $f(x,y,z)$ क्षेत्र v के प्रत्येक बिन्दु पर परिभाषित है। यदि क्षेत्र v को n प्रारम्भिक आयतन $\delta v_1, \delta v_2, \ldots\ldots\ldots \delta v_n$ में विभाजित कर r वें उपभाग δv_r में त्रि-समाकल एवं डिरिचलेट समाकल कोई बिन्दु (x_r, y_r, z_r) लें तो योगफल $\sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\delta v_r$ की सीमा $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\delta v_r$ क्षेत्र v पर फलन $f(x,y,z)$ का त्रि-समाकलन कहलाती है तथा इसे $\iiint_V f(x,y,z)dv$ से व्यक्त करते हैं। अर्थात्

$$\iiint_v f(x,y,z)dv = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} f(x_r, y_r, z_r)\delta v_r$$

14.2.2 त्रि-समाकलन का मान ज्ञात करना



चित्र 14.1

माना त्रिविम समिष्ट में v कोई क्षेत्र है। क्षेत्र v को तीनों निर्देशांक तलो के समान्तर तल खीचकर छोटे-छोटे धनों में विभाजित कर लेते है। आयतन v को ऐसे सभी उर्ध्वाधर स्तम्भों के आयतनों का योग माना जा सकता है। जिसकी निम्न सीमा पृष्ठ $z = z_1(x, y)$ माना तथा उपरी सीमा पृष्ठ $z = z_2(x, y)$ (माना) से पीरबद्ध है। इन स्तम्भों का आधार क्षेत्र δA_r, है जो कि xy समतल के किसी क्षेत्र को घेरे हुए है। अत: सर्वप्रथम क्षेत्र δA_r पर खड़े स्तम्भ के धन का योग ज्ञात करते हैं xy तल के किसी क्षेत्र A पर प्रत्येक स्तम्भ के आयतन का योग करते है। अत:

$$\sum f(x_{k1}, y_{k1}, z_{k1})\delta v_r = \sum_r \left(\sum_k f(x_r, y_r, z_r)\delta z \right) \delta A_r \qquad \text{.....(1)}$$

जहाँ बिन्दु (x_r, y_r, z_r) क्षेत्र δA_r पर खड़े k वें धन पर स्थित है। यदि सीमा $\delta A_r \to 0$ तथा $\delta z \to 0$ तो (1) को निम्न प्रकार से लिख सकते है।

$$\lim_{\substack{\delta A \to 0 \\ \delta z \to 0}} \sum f(x_k, y_k, z_k)\delta v_k$$

$$= \iint_A \left\{ \int_{z_1(x,y)} f(x, y, z)\, dr \right\} dA$$

$$\iiint_v f(x, y, z)dv = \iint_A \left\{ \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)dz \right\} dA \qquad \text{....(2)}$$

यदि क्षेत्र A वक्रों $y = y_1(x), y = y_2(x), x = a$ तथा $x = b$ से घिरा हो तो (z) को निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$\iiint_v f(x,y,z)dv = \int_a^b \int_{y_2(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dxdydz$$

यहाँ सर्वप्रथम x तथा z को अचर मानते हुए z के सापेक्ष समाकलन किया जाता है। इसके बाद x को अचर मानते हुए y के सापेक्ष समाकलन किया जाता हैं और अंत में x के सापेक्ष समाकलन किया जाता है।

टिप्पणी : जब z के सापेक्ष समाकलन होगा तो समाकलन की सीमाऐं x व y का फलन हो सकती हैं। इसी प्रकार, उपरोक्त दिये गये समाकलन में y के सापेक्ष समाकलन की सीमाएँ मात्र x का फलन हो सकती हैं। अन्त में जो समाकलन किया जाये (यहाँ x के सापेक्ष) तो सीमाऐं अचर राशियाँ होगी।

उदाहरण 1 : निम्न त्रि -समाकलों का मान ज्ञात कीजिये :

(1) $\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$

(2) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{\frac{x^2+y^2}{4}} dxdydz$

हल :

(1) $$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz = \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(x^2+y^2\right)z+\frac{z^3}{3}\right]_{-c}^{c}dxdy$$

$$= 2\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(x^2+y^2\right)c+\frac{c^3}{3}\right]dxdy = 2\int_{-a}^{a}\left[x^2cy+\frac{cy^3}{3}+\frac{c^3y}{3}\right]_{-b}^{b}dx$$

$$= 4\int_{-a}^{a}\left[bcx^2+\frac{b^3c}{c}+\frac{bc^3}{c}\right]dx = 4\left[bc\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\left(b^3c+bc^3\right)x\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{8}{3}bc\left[x^3+\left(b^2+c^2\right)x\right]_0^a = \frac{8}{3}bc\left[a^2+a\left(b^2+c^2\right)\right]$$

$$= \frac{8}{3}abc\left[a^2+b^2+c^2\right]$$

(2) $$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{\frac{x^2+y^2}{4}} dxdydz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (Z)_0 \frac{x^2+y^2}{4} = \frac{1}{4}\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \left(x^2+y^2\right)dxdy$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2x-x^2}}dx = \frac{1}{4}\int_0^2\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2x-x^2}}dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^2 x^{3/2}(x+1)\sqrt{2-x}\,dx$$

माना $x = 2\sin^2\theta$ इसलिये $dx = 4\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ अत:

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\pi/2} (2)^{3/2}\sin^3\theta\left(2\sin^2\theta+1\right)(2)^{1/2}\cos\theta.4\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{16}{6}\int_0^{\pi/2}\left(2\sin^2\theta+1\right)\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta + \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^6\theta\cos^2\theta\,d\theta\right)$$

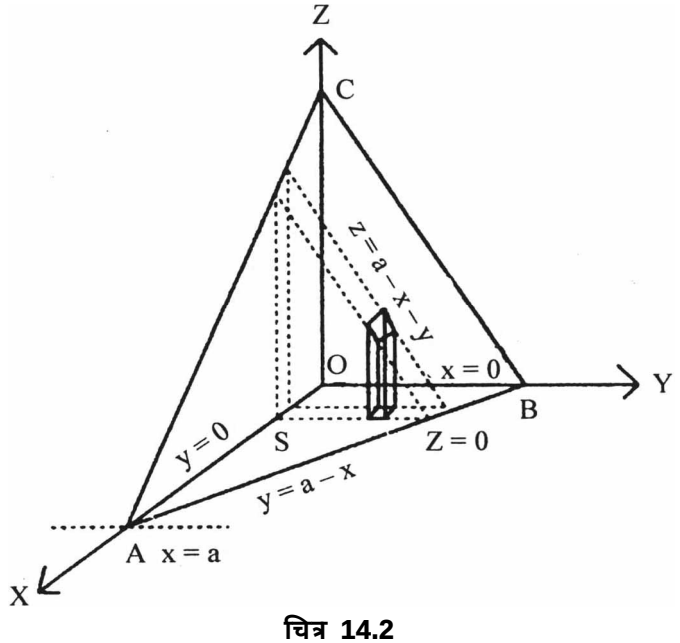
$$= \frac{8}{3}\frac{\left|\frac{4+1}{2}\right|\frac{2+1}{2}}{2\left|\frac{4+2+2}{2}\right.} + \frac{16}{3}\cdot\frac{\left|\frac{6+1}{2}\right|\frac{2+1}{2}}{2\left|\frac{6+2+2}{2}\right.}$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\left|5/2\right|3/2}{\lfloor 4} + \frac{8}{3}\frac{\left|7/2\right|3/2}{\lfloor 5}$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\pi}{16} + \frac{8}{3}.\frac{5}{128}\pi = \frac{3}{16}\pi$$

उदाहरण 2 : मान ज्ञात कीजिये $\iiint_v x^2\,dxdydz$ जहाँ क्षेत्र v तलों $x=0, y=0, z=0$ तथा $z+y+z=a$ से घिरा हुआ है।

हल :



चित्र 14.2

यहाँ समाकलन की सीमाओं से ज्ञात होता है कि समाकलन क्षेत्र चतुष्फलक OABC है। इसमें उर्ध्वाधर स्तम्भ की सीमाएँ $z=0$ से $z=a-x-y$ है। xy तल में x व y की सीमाएँ क्रमश: $y=0$ से $y=a-x$ व $x=0$ से $x=a$ होंगी।

अतः

$$\iiint_v x^2\,dxdydz = \int_0^a \int_0^{a-x} \int_0^{a-x-y} x^2\,dzdxdy$$

$$= \int_0^a \int_0^{a-x} \left\{x^2 z\right\}_0^{a-x-y} dxdy$$

$$= \int_0^a \int_0^{a-x} \left\{x^2(a-x-y)dy\right\} dx$$

$$= \int_0^a \left[x^2(a-x)y - {}^{x^2}\frac{y^2}{2} \right]_0^{a-x} dx$$

$$= \int_0^a \left[x^2(a-x)y - \frac{x^2(a-x)^2}{2} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a x^2(a-x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \left(x^2a^2 - 2ax^3 + x^4\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a^2x^3}{3} - \frac{2ax^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}a^5 - \frac{1}{2}a^5 + \frac{1}{5}a^5 \right]$$

$$= \frac{1}{60}a^5$$

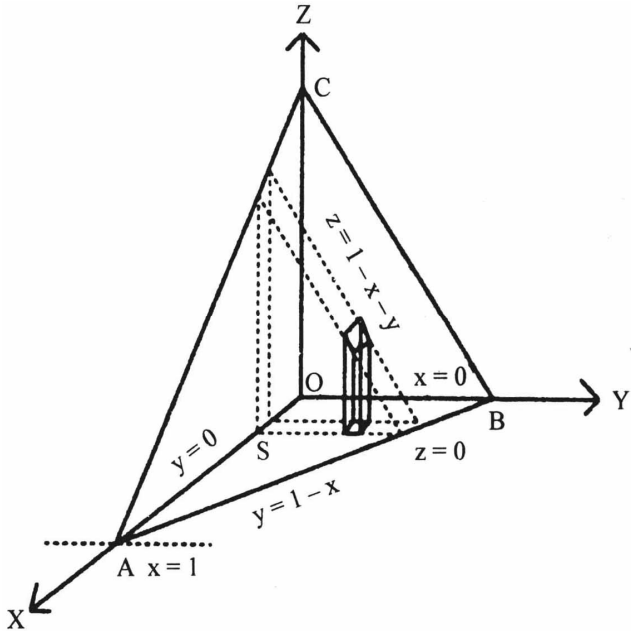
14.3 डिरिचलेट समाकल (Dirichlet's Integral)

त्रि-समाकल

$$\iiint v\,x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}dxdydz = \frac{\lfloor l \rfloor m \lfloor n}{\lfloor l+m+n+1}$$

जहाँ $x>0, y>0, z>0, x+y+z\le 1$ को डिरिचलेट समाकल कहते है।

प्रमाण



चित्र 14.3

दी गई सीमाओं से स्पष्ट है कि समाकलन का क्षेत्र तीनों निर्देश तलों तथा तल $x+y+z=1$ से परिबद्ध ठोस का आयतन v है जो कि एक चतुष्फलक है।

चित्रानुसार उर्ध्वाधर स्तम्भ (vertical column) समतलों $z=0$ तथा $z=1-x-y$ द्वारा घिरे हुए है। xy तल पर x व y की सीमाएँ क्रमशः $y=0$ से $y=1-x$ तथा $x=0$ से $x=1$ होगी। अतः

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}dxdydz$$

अब x व y को अचर मानकर z के सापेक्ष समाकलन करने पर

$$=\int_0^1\int_0^{1-x} x^{l-1}y^{m-1}\left[\frac{z^n}{n}\right]_0^{1-x-y}dxdy$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1\int_0^{1-x} x^{l-1}y^{m-1}(1-x-y)^n dxdy$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1 x^{l-1}\left\{\int_0^{1-x} y^{m-1}(1-x-y)^n\,dy\right\}dx$$

इस द्विसमाकल में पहले x को अचर मान y के सापेक्ष समाकलन करने के लिये माना $y=(1-x)t$ तो $dy=(1-x)dt$

$$I=\frac{1}{n}\int_0^1 x^{l-1}\left\{\int_0^1\{(1-x)t\}^{m-1}\{1-x-(1-x)t\}^n(1-x)dt\right\}dx$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^m\left\{\int_0^1 t^{m-1}\{(1-x)(1-t)\}^n dt\right\}dx$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m+n}\left\{\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^n\,dt\right\}dx$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m+n}\left\{\beta(m,n+1)\right\}d$$

$$\left(\because \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}dt = \beta(m,n) \text{ एक } \beta \text{ फलन है}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\beta(m,n+1)\int_0^1 x^{l-1}(1-x)^{m+n}\,dx$$

$$= \frac{1}{n}\beta(m,n+1)\,\beta(l,m+n+1)$$

$$= \frac{1}{n}\frac{\lceil m\rceil n+1}{\lceil m+n+1}\cdot\frac{\lceil l\rceil m+n+1}{\lceil l+m+n+1} \qquad \left(\because \beta(m,n) = \frac{\lceil m\rceil n}{\lceil m+n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\frac{\lceil m.n\rceil n.\lceil l}{\lceil m+n+1} = \frac{\lceil l\rceil m\rceil n}{\lceil l+m+n+1}$$

तीन से अधिक चरों के लिए इसका व्यापकीकरण ज्ञात किया जा सकता है अर्थात्

$$\iint --\int x_1^{1_1-1}x^{1_{2-1}} --x_n^{1_{n-1}}dx_1dx_2.....dx_n = \frac{\lceil 1_1\rceil 1_2 --\lceil 1_n}{\lceil(1_1+1_2+.....+1_n)}$$

जहाँ $x_1, x_2, ...x_n > 0, x_1 + x_2 + ... + x_n \le 1$

स्वमूल्यांकन प्रश्न

1. डिरिचलेट समाकल का क्षेत्र (द्वि आयामी क्षेत्र / द्वि आयामी ठोस) है।
2. x ,y व z मे मानक डिरिचलेट समाकल की क्या सीमाएँ हैं ?
3. $\int_0^1 x^5(1-x)^4dx$ का $\beta-$ व $\gamma-$ फलन के रूप में हल ज्ञात कीजिये।

उदाहरण 1 : समाकलन $\iiint_V x^2 ydxdydz$ का मान डिरिचलेट समाकल की सहायता से ज्ञात कीजिये जबकि क्षेत्र v निम्न तलों से परिबद्ध आयतन है : $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$

हल :

हमे ज्ञात है कि डिरिचलेट समाकल द्वारा $\iiint_V x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}dxdydz = \frac{\lceil l\rceil m\rceil n}{\lceil l+m+n+1}$ जबकि $x>0, y>0, z>0, x+y+z\le 1$ दिये प्रश्न में $l=3, m=2, n=1$ है अत: समाकल का मान (आयतन v में)

$$= \frac{\lceil 3\rceil 2\rceil 1}{\lceil 3+2+1+1} = \frac{\lceil 3\rceil 2\rceil 1}{\lceil 7}$$

$$= \frac{2}{\underline{|6}} = \frac{2}{6.5.4.3.2.1} = \frac{1}{360}$$

उदाहरण 2 : समाकल $\iiint x^{l-1} y^{m-1} z^{n=-1} dxdydz$ का मान ज्ञात कीजिये जबकि

$$x, y, z > 0 \text{ व } \left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$$

हल :

दिये गए सामाकलन के प्रतिबंधों में रूस प्रतिबंध डिरिचलेट के प्रतिबंध से भिन्न है। इस प्रश्न को हल करने के लिये हम दूसरे प्रतिबंध को परिवर्तित कर डिरिचलेट के प्रतिबंध के समान करेंगे जिससे समाकलन भी पीरवर्तित होगा।

अत: माना $\left(\frac{x}{a}\right)^p = u, \left(\frac{y}{b}\right)^q = v, \left(\frac{z}{c}\right)^r = w$

अत: $x = au^{1/p}, y = bv^{1/q}, z = cw^{1/r}$

अब $dx = \frac{1}{p} au^{\frac{1}{p}-1} du, dy = \frac{1}{q} bv^{\frac{1}{q}-1} dv, dz = \frac{1}{r} cw^{\frac{1}{r}-1} dw$

अत: समाकलन व प्रतिबंधों का नया परिवर्तित रूप होगा।

$$\iiint \left(au^{1/p}\right)^{1-1} \left(bv^{1/q}\right)^{m-1} \left(cw^{\frac{1}{r}}\right)^{n-1} \frac{a}{p} u^{1/p-1} \frac{b}{q} v^{\frac{1}{q}-1} \frac{c}{r} w^{\frac{1}{r}-1} dudvdw$$

जबकि $u, v, w \geq 0$ व $u + v + w \leq 1$ अथवा

$$\frac{a^1 b^m c^n}{pqr} \iiint u^{\frac{1}{p}-1} v^{\frac{m}{q}-1} w^{\frac{n}{r}-1} dudvdw$$

जबकि $u, v, w \geq 0$ व $u + v + w \leq 1$ स्पष्टत: यह डिरिचलेट का समाकलन है।

अत: समाकलन का मान $= \frac{a^{\ell} b^m c^n}{pqr} \cdot \frac{\left|\frac{1}{p}\right| \left|\frac{m}{q}\right| \left|\frac{n}{r}\right|}{\left|\frac{1}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} + 1\right|}$

उदाहरण 3 : मान ज्ञात कीजिए -

$\iiint xyzdxdydz$ जहाँ समाकलन का क्षेत्र धनात्मक अष्टांशक में दीर्घवृत्तज

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

हल : समाकल का क्षेत्र धनात्मक अष्टांशक में होने के कारण $x, y, z \geq 0$ यदि दिए गये समाकल में $\frac{x^2}{a^2} = u \frac{y^2}{b^2} = v, \frac{z^2}{c^2} = w$ प्रतिस्थापित करें तो

$$x = au^{1/2}, y = bv^{1/2}, z = cw^{1/2}$$

अत: $dx = \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{u}}du, dy = \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{v}}dv, dz = \frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{w}}dw$

$\therefore \iiint xyzdxdydz = \iiint \frac{a^2b^2c^2}{8}dudvdw$

जहाँ $u, v, w > 0$ व $u + v + w \le 1$ अत : दिया गया समाकलन

$= \frac{a^2b^2c^2}{8}\iiint u^{1-1}v^{1-1}w^{1-1}dudvdw$

$= \frac{a^2b^2c^2}{8}\frac{\lfloor 1\lfloor 1\lfloor 1}{\lfloor 1+1+1+1} = \frac{a^2b^2c^2}{8}.\frac{1}{3.2.1} = \frac{a^2b^2c^2}{48}$

उदाहरण 4 : मान ज्ञात कीजिए

$\iiint x^2dxdydz$ जहाँ समाकलन का क्षेत्र सम्पूर्ण दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$ है।

हल : यदि दिये गये समाकलन में $\frac{x^2}{a^2} = u, \frac{y^2}{b^2} = v, \frac{z^2}{c^2} = w$ प्रतिस्थापित करें तो

$x = au^{1/2}, y = bv^{1/2}, z = cw^{1/2}$

$dx = \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{u}}du, dy = \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{v}}dv, dz = \frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{w}}dw$

$\iiint x^2dxdydz = \iiint a^2u.\frac{a^2b^2c^2}{8abc\sqrt{uvw}}dudvdw$

$= \frac{a^3bc}{8}\iiint u^{1/2}v^{-1/2}w^{-1/2}dudvdw$

$= \frac{a^3bc}{8}\iiint u^{\frac{3}{2}-1}v^{-\frac{1}{2}-1}w^{\frac{1}{2}-1}dudvdw$

$= \frac{8^3bc}{8}\frac{\lfloor\frac{3}{2}\lfloor\frac{1}{2}\lfloor\frac{1}{2}}{\lfloor\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1} == \frac{8^3bc}{8}.\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}}$

$= \frac{a^3bc}{30}$

अब चूंकि समाकलन का क्षेत्र सम्पूर्ण दीर्घवृत्तज है तथा यह आंठो अष्ठांशों में समरूप है इसलिए समाकलन का मान $= 8\frac{a^3bc}{30}\pi = \frac{4}{15}a^3bc\pi$

उदाहरण 5 : गोले $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ के घनात्मक अष्टांशक के रूप में ठोस का द्रव्यमान ज्ञात कीजिये जिसके किसी बिन्दु (x, y, z) पर घनत्व $\rho = kxyz$ है

हल : यदि घनात्मक अष्टाशंक में गोले का आयतन v हो तो

इस ठोस का द्रव्यमान $(m) = \iiint_V \rho dxdydz$

अथवा $m = \iiint_V kxyzdxdydz$

जहाँ $x, y, z > 0$ तथा $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

अथवा $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 = 1$

अब हम यदि $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = u, \left(\frac{y}{a}\right)^2 = v$ व $\left(\frac{z}{a}\right)^2 = w$ रखें तो

$$x = au^{1/2}, y = av^{1/2}, z = aw^{1/2}$$

$$dx = \frac{1}{2}au^{-1/2}du, dy = \frac{1}{2}av^{-1/2}dv \text{ व } dz = \frac{1}{2}aw^{-1/2}dw$$

अत: समाकलन (1) से

$$m = \iiint_V kau^{1/2}.av^{1/2}.aw^{1/2}.\frac{1}{2}au^{-1/2}du.\frac{1}{2}av^{-1/2}dv\frac{1}{2}aw^{-1/2}dw$$

$$= \frac{ka^6}{8}\iiint_v dudvdw$$

जहाँ $u, v, w \geq 0$ व $u + v + w \leq 1$ जो कि डिरिचलेट समाकल के प्रतिबन्ध है अत: डिरिचलेट समाकल के प्रयोग से

$$m = \frac{ka^6}{8}\iiint_v u^{1-1}v^{1-1}w^{1-1}dudvdw$$

जहाँ $u, v, w \geq 0, u + v + w \leq 1$

अतः $m = \frac{ka^6}{8}.\frac{\lfloor 1\lfloor 1\lfloor 1}{\lfloor 1+1+1+1}} = \frac{ka^6}{8}.\frac{1}{\lfloor 4} = \frac{ka^6}{8.3.2} = \frac{ka^6}{48}$

उदाहरण 6 : बेलनों $x^2 + y^2 + = a^2$ तथा $x^2 + z^2 + = a^2$ से घिरे हुए प्रथम अष्टाशंक में ठोस का आयतन ज्ञात कीजिये।

हल : इन बेलनों के आधार पर a त्रिज्या वाले वृत्त हैं। इनके केन्द्र मूल बिन्दु $(0,0,0)$ पर है तथा इनकी जनक रेखाएँ क्रमश: y-अक्ष व z-अक्ष के समान्तर है। अत: इनसे परिवद्ध ठोस की प्रथम अष्टांशक में निम्न सीमाएँ होंगी। $z = 0$ से $z = \sqrt{a^2 - x^2}, y = 0$ से $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ व $x = 0$ से $x = a$

अत: अभीष्ट आयतन =

$$= \iiint_v dxdydz = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dxdydz$$

$$= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} [z]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dxdy$$

$$= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2}\, dxdy$$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \left[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \right] dx$$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} [y]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$= \int_0^a . \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$= \int_0^a \left(a^2 - x^2 \right) dx$$

$$= \left(a^2 x = \frac{x^3}{3} \right)_0^a = a^3 = \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$$

14.4 सारांश

इस इकाई में हमने त्रि -समाकल व डिरिचलेट समाकल का अध्ययन किया है जिसका प्रयोग ठोस आयतन एवं द्रव्यमान ज्ञात करने में होता है। त्रि -समाकल की परिभाषा में $f(x, y, z) = 1$ प्रतिस्थापित करें तो $\iiint_v f(x, y, z) dv = \iiint_v dv = v$ उसका आयतन होगा

तथा उसका कुल द्रव्यमान $M = \iiint_v \rho dv = \iiint_v \rho(x, y, z) dxdydz$

ठोस का आयतन व द्रव्यमान इन सूत्रों की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है।

14.5 शब्दावली

त्रि-समाकल	Triple integral
ऊर्ध्वाधर स्तम्भ	Vertical column

14.6 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

1. त्रि आयामी ठोस
2. $x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z \leq 1$
3. $\beta(6,5)$ व $\frac{\lfloor 6 \rfloor 5}{\lfloor 11}$

14.7 अभ्यास प्रश्न

1. मान ज्ञात कीजिये

   (i) $\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x (y + 2z) dxdydz$ **[उत्तर :** $\frac{19}{3} e^2 + 19]$

   (ii) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dxdydz}{(z + y + z + 1)^2}$ **[उत्तर :** $\frac{1}{2} \log 2 - \frac{5}{16}]$

2. मान ज्ञात कीजिये

$\int_0^{\log 2}\int_0^{x}\int_0^{x+\log y} e^{x+y+z}dxdydz$ [उत्तर : $\frac{8}{3}\log 2-\frac{19}{9}$]

3. निर्देशी तलों एवं समतल $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ से घिरे हुए भाग का आयतन ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : $\frac{1}{6}abc$]

इकाई 15: गामा तथा बीटा फलन
(Beta and Gamma Function)

इकाई की रूपरेखा

15.0 उद्देश्य
15.1 प्रस्तावना
15.2 गामा फलन की परिभाषा व अन्य रूप
15.3 बीटा फलन की परिभाषा तथा गामा फलन से इसका सम्बन्ध
15.4 गामा तथा बीटा फलनों के विशेष गुणधर्म
15.5 साराश
15.6 शब्दावली
15.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर
15.8 अभ्यास प्रश्न

15.0 उद्देश्य

इस इकाई का उद्देश्य दो विशेष फलनों बीटा तथा गामा फलन की सहायता से जटिल समाकलनों का मान ज्ञात करना है। ये समाकलन परिमित समाकलन में विशेष स्थिति में भी महत्वपूर्ण होते हैं।

15.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम बीटा तथा गामा फलन को परिभाषित कर उनकी सहायता से जटिल समाकलनों के मान सरलता से ज्ञात करेंगे। बीटा तथा गामा फलनों में आपसी सम्बन्ध व इनके विशेष गुणधर्म का अध्ययन करेंगे।

15.2 गामा फलन की परिभाषा व अन्य रूप

गामा फलन (Gamma Function) : - समाकलन $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$ को गामा फलन कहते हैं जहाँ $n>0$ समाकलन के n का फलन होने के कारण इसे $\lceil n$ (गामा,n) से व्यक्त करते हैं। अर्थात

$$\lceil n = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx (n>0) \quad \text{....(1)}$$

उपरोक्त परिभाषा से

$$\lceil n+1 = \int_0^\infty x^n e^{-x}dx$$

खण्डश: समाकलन करने पर

$$= \left[x^n \left(-e^{-x}\right) \right]_0^\infty - \int_0^\infty nx^{n-1}\left(-e^{-x}\right)dx$$

$$= n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \left[\because \lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0\right]$$

$\lceil n+1 = n\lceil n$ (परिभाषा से) .....(2)

इसी प्रकार

$$\lceil 1 = \int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}dx$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = (0+1) = 1$$

$\therefore \lceil 1 = 1$ .....(3)

यदि, n कोई धन पूर्णाक हो तो

$$\lceil n+1 = n\lceil n$$

$$= (n-1)\lceil n-1$$

$$= n(n-1)(n-2)---3.2.\lceil 1$$

$\therefore \lceil n+1 = \lfloor n$ .....(4)

इसे गामा फलन का पुनरावृत्ति सूत्र (Recurrence formula) भी कहते हैं।

(a) यदि (1) में $x = \ell og\frac{1}{y}$ तो $y = e^{-x}$

$\Rightarrow dy = -e^{-x}dx$

अतः $\lceil n = \int_1^0 \left(\ell og\frac{1}{y}\right)^{n-1}(-dy)$

$$= \int_0^1 \left(\ell og\frac{1}{y}\right)^{n-1}(dy)$$

अथवा निश्चित समाकलन के नियम से

$$\int_0^1 \left(\ell og\frac{1}{x}\right)^{n-1}dx = \lceil n$$

(b) यदि (1) में $x_n = y$ तो $nx^{n-1}dx = dy$

अतः $= \lceil n = \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-y^{1/n}}dy$

$$\therefore \int_0^\infty e^{-y^{1/n}}dy = n\lceil n = \lceil n+1$$

निश्चित समाकलन के गुणधर्म से $\int_0^\infty e^{-x^{1/n}}dx = n\lceil n = \lceil n+1$

विशेषत: यदि ,तो $n = \frac{1}{2}$, तो $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\lceil 1/2$

(c) यदि (1) में $x = az$ तो $dx = a\,dz$

अतः $$\lceil n = \int_0^\infty (az)^{n-1} e^{-az}.a\,dz$$

$$= a^n \int_0^\infty z^{n-1} e^{-az}\,dz$$

$$= a^n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-ax}\,dx$$ (निश्चित समाकलन के गुणधर्म से)

अतः $$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-ax}\,dx = \frac{\lceil n}{a^n}$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

(1) $\frac{\lceil 15}{\lceil 16}$ का मान होगा -

(2) $\int_0^\infty x^n e^{-2x}\,dx$ का मान गामा फलन के रूप में ज्ञात कीजिए।

15.3 बीटा फलन की परिभाषा तथा गामा फलन से इसका सम्बन्ध

समाकलन $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ जहाँ $m, n > 1$ को बीटा फलन कहते है तथा इसे $\beta(m,n)$ से व्यक्त करते हैं।

अतः

$$\beta(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \qquad \text{.....(1)}$$

अब हम बीटा तथा गामा फलन में सम्बन्ध

$$\beta(m,n) = \frac{\lceil m \lceil n}{\lceil m+n}, (m,n>0) \qquad \text{....(2)}$$

स्थापित करते हैं।

गामा फलन की परिभाषा से

$$\lceil n = \int_0^\infty z^{n-1} e^{-z}\,dz$$

$$= a^n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-ax}.dx$$ (माना $z = ax \Rightarrow dz = a\,dx$)

दोनों तरफ $e^{-a}.a^{m-1}$ से गुणा करने पर

$$e^{-a}.a^{m-1}\lceil n = \int_0^\infty a^{m+n-1} x^{n-1} e^{-a(1+x)}\,dx$$

दोनों पक्षों का समाकलन a के सापेक्ष 0 से ∞ के मध्य करने पर

$$\lceil n \int_0^\infty a^{m-1}e^{-a}.da = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty a^{m+n-1}x^{n-1}e^{-a(1+x)}dx \right\} da$$

$$= \int_0^\infty x^{n-1} \left\{ \int_0^\infty a^{m+n-1}e^{-a(1+x)}da \right\} dx$$

माना $a(1+x) = y$

$$\Rightarrow da = \frac{dy}{1+x}$$

$$= \int_0^\infty x^{n-1} \left\{ \int_0^\infty \frac{y^{m+n-1}}{(1+x)^{m+n-1}} e^{-y}.\frac{dy}{(1+x)} \right\} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} \left\{ \int_0^\infty y^{m+n-1}e^{-y}.dy \right\} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} \left\{ \lceil (m+n) \right\} dx$$

$$= \lceil m+n \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

$$= \lceil m+n \beta(n,m)$$

अतः $\lceil n \int_0^\infty a^{m-1}e^{-a}da = \lceil m+n \beta(n,m)$

$\lceil n \lceil m = \lceil m+n \beta(n,m)$ (परिभाषा से)

या $\beta(n,m) = \frac{\lceil m \lceil n}{\lceil m+n}$ $\left[\because \beta(n,m) = \beta(n,m)\right]$

15.4 गामा तथा बीटा फलनों के विशेष गुणधर्म

I. सिद्ध करो कि $\beta(n,m) = \beta(n,m)$

हल : बीटा फलन की परिभाषा से

$$\beta(n,m) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \forall m,n > 0$$

(1) में $x = 1-y$ प्रतिस्थापित करनें पर

$$\beta(n,m) = \int_1^0 (1-y)^{m-1}y^{n-1}(-dy)$$

$$= \int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{m-1}dy$$

$$= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}dx$$ (निश्चित समाकलन गुणधर्म से)

$$= \beta(n, m)$$

II. सिद्ध करो कि $\beta(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$

हल :

बीटा फलन की परिभाषा से

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx, m.n > 0 \quad \ldots(1)$$

(1) में $x = \frac{y}{1+y}$ रखने पर $dx = \frac{1}{(1+y)^2} dy$

$$\beta(m, n) = \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{y}{(1+y)}\right)^{n-1} \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{m-1} \left(\frac{1+y-y}{1+y}\right)^{n-1} \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{(1+y)}\right)^{n-1} \frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$$

अतः $\beta(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}} dx \quad \ldots(2)$

यदि इसमें $x = \sin^2\theta$ रखें तो

$$\beta(m, n) = \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2\theta\right)^{m-1} \left(1 - \sin^2\theta\right)^{n-1} .2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$\beta(m, n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta d\theta$$

III. सिद्ध करो कि $\lceil n \lceil 1-n = \frac{\pi}{\sin n\pi}$

हल :

$\because \beta(m, n) = \frac{\lceil m \lceil n}{\lceil m+n}$

तथा $\beta(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$ (15.4.2 से)

अतः $\lceil m \lceil n = \lceil m+n \beta(m, n)$

$$= \overline{|m+n} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

यदि $m + n = 1$ हो तो

$$\overline{|1-n}\overline{|n} = (1)\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin n\pi} \left[\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin n\pi} \right. \text{ जब } 0 < n < 1]$$

अतः $\overline{|n}\overline{|1-n} = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ ....(1)

(1) में यदि $n = \frac{1}{2}$ रखे तो

$$\overline{|1/2}\overline{|1/2} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi$$

अतः $\left(\overline{\left|\frac{1}{2}\right.}\right)^2 = \pi \Rightarrow \overline{|1/2} = \sqrt{\pi}$

उदाहरण 1 : सिद्ध करो कि $\overline{|m}\overline{\left|m+\frac{1}{2}\right.} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\overline{|2m}$ जहाँ $m > 0$

हल : हम जानते हैं कि

$$\beta(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta.\cos^{2n-1}\theta d\theta$$

$$= \frac{\overline{|m}\overline{|n}}{\overline{|m+n}} \quad \text{....(1)}$$

(1) में $n = \frac{1}{2}$ रखने पर

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta d\theta = \frac{\overline{|m}\overline{\left|\frac{1}{2}\right.}}{\overline{\left|m+\frac{1}{2}\right.}}$$

या $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta d\theta = \frac{\overline{|m}\overline{|\pi}}{2\overline{\left|m+\frac{1}{2}\right.}} \quad \text{...(2)}$$

(1) में $n = m$ रखने पर

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta.\cos^{2m-1}\theta d\theta = \frac{\left(\overline{|m}\right)^2}{\overline{|2m}}$$

या $$\int_0^{\pi/2} \frac{2^{2m-1}}{2^{2m-1}} (\sin\theta\cos\theta)^{2m-1} d\theta = \frac{\left(\lceil m\right)^2}{2\lceil 2m}$$

या $$\frac{1}{2^{2m-1}} \int_0^{\pi/2} (\sin 2\theta)^{2m-1} d\theta = \frac{\left(\lceil m\right)^2}{2\lceil 2m} \quad \text{....(3)}$$

(3) में $2\theta = \phi$ रखने पर

$$\frac{1}{2^{2m-1}} \int_0^{\pi} \sin^{2m-1}\phi d\phi = \frac{\left(\lceil m\right)^2}{2\lceil 2m}$$

या $$\frac{2}{2^{2m-1}} \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\phi d\phi = \frac{\left(\lceil m\right)^2}{\lceil 2m} \quad \text{(निश्चित समाकलन के गुणधर्म से)}$$

या $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\phi d\phi = \frac{2^{2m-1}\left(\lceil m\right)^2}{2\lceil 2m} \quad \text{.....(4)}$$

समीकरण (2) व (4) से

$$\frac{2^{2m-1}\left(\lceil m\right)^2}{2\lceil 2m} = \frac{\lceil m \lceil \pi}{2\lceil m+1/2}$$

अतः $$\lceil m \lceil m+1/2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \lceil 2m \quad \text{....(5)}$$

(5) को द्विगुण सूत्र (Duplication formula) भी कहते है।

उदाहरण 2 : सिद्ध करो कि $\beta(m,n) = \beta(m+,n) + \beta(m,n+1)$

हल :

$$\because \beta(m,n) = \frac{\lceil m \lceil n}{\lceil m+n} \quad \text{.....(1)}$$

(1) में m की $m+1$ से प्रतिस्थापित करने पर

$$\beta(m+1,n) = \frac{\lceil m+1 \lceil n}{\lceil m+n+1} \quad \text{....(2)}$$

(1) में n को $n+1$ से प्रतिस्थापिंत करने पर

$$\beta(m,n+1) = \frac{\lceil m \lceil n+1}{\lceil m+n+1} \quad \text{.....(3)}$$

समीकरण (2) व (3) को जोड़ने पर

$$\beta(m+1,n) + \beta(m,n+1) = \frac{\lceil m+1 \lceil n}{\lceil m+n+1} + \frac{\lceil m \lceil n+1}{\lceil m+n+1}$$

$$= \frac{m \lceil m \lceil n}{\lceil m+n+1} + \frac{\lceil mn \lceil n}{\lceil m+n+1}$$

$$= \frac{\lceil m \lceil n (m+n)}{\lceil m+n+1}$$

$$= \frac{\lceil m \lceil n (m+n)}{(m+n)\lceil m+n}$$

$$= \frac{\lceil m \lceil n}{\lceil m+n}$$

$$= \beta(m,n)$$

उदाहरण 3 : सिद्ध करो कि $\left\lceil \frac{1}{n} \left\lceil \frac{2}{n} \left\lceil \frac{3}{n} ..... \right\lceil \frac{(n-1)}{n} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{1/2}} \right.\right.\right.$ जहाँ $n > 1$ तथा $n \in N$

हल : माना $P = \left\lceil \frac{1}{n} \left\lceil \frac{2}{n} \left\lceil \frac{3}{n} ..... \right\lceil \frac{(n-1)}{n} \right\lceil \frac{(n-2)}{n} \right.\right.\right.$

$$= \left\lceil \frac{1}{n} \left\lceil \frac{2}{n} \left\lceil \frac{3}{n} ..... \right\lceil \left(1-\frac{2}{n}\right) \right\lceil \left(1-\frac{1}{n}\right) \right.\right.\right. \quad .....(1)$$

या $P = \left\lceil \left(1-\frac{1}{n}\right) \right\lceil \left(1-\frac{2}{n}\right) ..... \left\lceil \frac{3}{n} \left\lceil \frac{2}{n} \left\lceil \frac{1}{n} \right.\right.\right.$ (उल्टे क्रम में रखने पर) .....(2)

समीकरण (1) व (2) का गुणा करने पर

$$P_2 = \left\{ \left\lceil \left(\frac{1}{n}\right) \right\lceil \left(1-\frac{1}{n}\right) \right\} \left\{ \left\lceil \frac{2}{n} \right\lceil 1-\frac{2}{n} \right\} ..... \left\{ \left\lceil 1-\frac{n-1}{n} \right\lceil \frac{n-1}{n} \right\} .....$$

$$\left\{ \left\lceil \left(1-\frac{2}{n}\right) \right\lceil \left(\frac{2}{n}\right) \right\} \left\{ \left\lceil 1-\frac{1}{n} \left\lceil \frac{1}{n} \right\} \right. \right. \quad .....(3)$$

लेकिन $\left\{ \left\lceil \left(\frac{r}{n}\right) \right\lceil \left(1-\frac{r}{n}\right) \right\} = \frac{\pi}{\sin\frac{r\pi}{n}}$

अतः $P^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{n}} ..... \frac{\pi}{\sin\left\{\frac{(n-1)\pi}{n}\right\}}$

$$= \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} .....\sin\left\{\frac{(n-1)\pi}{n}\right\}}$$

लेकिन त्रिकोणमिति से

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = 2^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\theta+\frac{2\theta}{n}\right)...\sin\left(\theta+\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi\right) \quad ....(4)$$

दोनों तरफ सीमा $\theta \to 0$ लेने पर

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=\lim_{\theta\to 0}2^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\theta+\frac{2\theta}{n}\right)...\sin\left(\theta+\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi\right)$$

$$\lim_{\theta\to 0}\left\{n.\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}.\frac{\theta}{\sin\theta}\right\}=2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left\{\frac{2\pi}{n}\right)...\sin\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi\right)$$

अतः $n=2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).....\sin\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)\pi\right)$ . ....(5)

अतः समीकरण (3) व (5) से

$$P^2=\pi^{n-1}\left(\frac{2^{n-1}}{n}\right)=\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}$$

या $$P=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}$$

अतः $$\lfloor\frac{1}{n}\lfloor\frac{2}{n}\lfloor\frac{3}{n}.....\lfloor\frac{(n-1)}{n}=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}$$

उदाहरण 4 : सिद्ध करो -

(a) $$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx x^{n-1}dx=\frac{\lfloor n}{\left(a^2+b^2\right)^{n/2}}\sin n\theta$$

(b) $$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx x^{n-1}dx=\frac{\lfloor n}{\left(a^2+b^2\right)^{n/2}}\cos n\theta$$ **जहाँ** $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

हल : $\because \lfloor n=\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$

तथा $$\frac{\lfloor n}{z^n}=\int_0^\infty e^{-zx}x^{n-1}dx$$

$z=a-ib$ रखने पर

$$\int_0^\infty e^{-(a-ib)x}x^{n-1}dx=\frac{\lfloor n}{(a-ib)^n}=\frac{\lfloor n(a+ib)^n}{\left(a^2+b^2\right)^n}$$

माना $a=r\cos\theta, b=r\sin\theta$

तब $r=\sqrt{a^2+b^2}$ and $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

अतः $$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}e^{ibx}dx=\frac{\lfloor n r^n\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n}{r^{2n}}$$

या $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}e^{ibx}dx = \frac{\lceil n(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{r^n}$

$$= \frac{\lceil n(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{(a^2+b^2)^{n/2}}$$

या $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}(\cos bx + i\sin bx)dx = \frac{\lceil n(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{(a^2+b^2)^{n/2}} \left(e^{ibx} = \cos bx + i\sin bx\right)$

दोनों पक्षों के वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}\cos bxdx = \frac{\lceil n}{(a^2+b^2)^{n/2}}\cos n\theta \qquad ...(1)$$

और $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}\sin bxdx = \frac{\lceil n}{(a^2+b^2)^{n/2}}\sin n\theta \qquad ....(2)$

यदि परिणाम (1) व (2) में $a = 0$ तो $\theta = \frac{\pi}{2}$

अतः $\int_0^\infty x^{n-1}\cos bxdx = \frac{\lceil n}{b^n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

अतः $\int_0^\infty x^{n-1}\sin bxdx = \frac{\lceil n}{b^n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

उदाहरण 5 : सिद्ध करो

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{\left(\lceil 1/3\right)^3}{2^{4/3}\sqrt{3\pi}}$$

हल :

माना $x^3 = \sin^2\theta$ या $x = \sin^{2/3}\theta$ तब $dx = \frac{2}{3}\sin^{-1/3}\theta\cos\theta d\theta$

$$\therefore \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{2}{3}\sin^{-1/3}\theta\cos\theta d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^{-1/3}\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\frac{\lceil 1/3 \lceil 1/2}{2\lceil 5/6} = \frac{\sqrt{\pi}}{3}\frac{\lceil 1/3}{\lceil 5/6} \qquad ....(1)$$

परन्तु हम जानते हैं कि

$$= 2^{2m-1}\lceil m\left|\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\right. = \sqrt{\pi}\lceil 2m$$

$m = \frac{1}{3}$ रखने पर

$$2^{-1/3}\left|\tfrac{1}{3}\right|\tfrac{5}{6} = \sqrt{\pi}\left|\tfrac{2}{3}\right.$$

अत: $$\frac{1}{\left|\tfrac{5}{6}\right.} = \frac{\left|\tfrac{1}{3}\right.}{2^{1/3}\sqrt{\pi}\left|\tfrac{2}{3}\right.} \qquad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) से

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^3\right)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{3}\left|\tfrac{1}{3}\right. \frac{2^{-1/3}\left|\tfrac{1}{3}\right.}{\sqrt{\pi}\left|\tfrac{2}{3}\right.}$$

$$= \frac{1}{3.2^{1/3}} \cdot \frac{\left(\left|\tfrac{1}{3}\right.\right)^3}{\left|\tfrac{1}{3}\right|\tfrac{2}{3}}$$

$$= \frac{\left[\left|\tfrac{1}{3}\right.\right]^3}{3.2^{1/3}} \cdot \frac{\sin\left(\pi/3\right)}{\pi} \quad \left[\because \lceil n|1-n = \frac{\pi}{\sin n\pi}\right]$$

$$= \frac{\left[\left|1/3\right.\right]^3}{3.2^{1/3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$= \frac{\left(\pi/3\right)^3}{2^{4/3}\sqrt{3}\pi}$$

उदाहरण 6 : **(i)** $\left|-\tfrac{1}{2}\right.$ (ii) $\left|\left(-\tfrac{5}{2}\right)\right.$ के मान ज्ञात करो।

हल :

(i) यहाँ $n = -\tfrac{1}{2}$ लेने पर -

$$\therefore \lceil n|1-n = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

अतः $$\left|-\tfrac{1}{2}\right|\tfrac{3}{2} = \frac{\pi}{\sin\left(-\pi/2\right)} = -\pi$$

या $$\left|-\tfrac{1}{2}\right. = \frac{-\pi}{\left|\tfrac{3}{2}\right.} = \frac{-\pi}{\frac{1}{2}\left|\tfrac{1}{2}\right.} = \frac{-2\pi}{\sqrt{\pi}} = -2\sqrt{\pi}$$

(ii) $n = -\tfrac{5}{2}$ लेने पर -

$$\therefore \lceil n|1-n = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

अतः $\left\lceil -\frac{5}{2} \right\rceil \left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil = \frac{\pi}{\sin\left(-5\pi/2\right)} = \frac{\pi}{\sin\left(5\pi/2\right)} \quad .-1$

$$= -\frac{\pi}{\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = -\pi$$

या $\left\lceil -\frac{5}{2} \right\rceil = \frac{-\pi}{\left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil} = \frac{-\pi}{\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{\pi}} = \frac{-8\sqrt{\pi}}{15}$

उदाहरण 7 : मान ज्ञात कीजिये -

(i) $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$ (ii) $\int_0^\infty e^{-4x}.x^{3/2} dx$ (iii) $\int_0^\infty \frac{x}{\left(1+x^6\right)} dx$

हल :

(i) माना $x^2 = u$

$$\Rightarrow x = \sqrt{u}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$\int_0^\infty ue^{-u}.\frac{1}{2}u^{\frac{-1}{2}}du = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\frac{1}{2}}e^{-u}du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{3}{2}-1}du$$

$$= \frac{1}{2}\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = \frac{1}{4}.\sqrt{\pi}$$

(ii) माना $4x = u$

$$\Rightarrow x = \frac{u}{4}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{4}du$$

अतः $\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{4}\right)^{3/2}.\frac{1}{4}du = \frac{1}{32}\int_0^\infty e^{-u}u^{\frac{5}{2}-1}du$

$$= \frac{1}{32}\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = \frac{1}{32}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{128}$$

(iii) माना $x_6 = t$

$$\Rightarrow x = t^{1/6}$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{6}t^{-5/6}dt$$

अतः $$\int_0^\infty \frac{x}{\left(1+x^6\right)}dx = \int_0^\infty \left(\frac{t^{1/6}}{1+t}\right)\times\frac{1}{6}t^{-5/6}dt$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{t^{-4/6}}{1+t}dt = \frac{1}{6}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{3}-1}}{1+t}dt$$

$$= \frac{1}{6}\frac{\pi}{\sin\left(\pi/3\right)} \quad \left[\because \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin n\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{6}.\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

उदाहरण 8 : दर्शाइये कि -

$$\int_0^{\pi/2} \tan^n x dx = \frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2}$$

हल : $$\int_0^{\pi/2} \tan^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{-n} x\cos^{-n} x dx$$

$$= \frac{\left|\frac{n+1}{2}\right|\left|\frac{-n+1}{2}\right|}{2\left|\frac{n-n+2}{2}\right|} \text{ (गामा सूत्र से)}$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{n+1}{2}\right|\left|\left(1-\frac{n+1}{2}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{\pi}{\sin\frac{1}{2}(n+1)\pi} = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{\cos\frac{n\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.\sec\frac{n\pi}{2}$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. $\left|\frac{11}{2}\right|$ का मान है.....।
2. $\left|\frac{1}{4}\right|\left|\frac{3}{4}\right| =$
3. $\beta(5,3)$ का मान गामा फलन के रूप में व सांख्यिक रूप में ज्ञात कीजिए।

15.5 सारांश

इस इकाई में हमने वह निश्चित समाकलन जाने जो कि बीटा व गामा फलनों के रूप में निरूपित किये जाते हैं। इन फलनों के कुछ विशिष्ट गुणधर्मों को उदाहरण के रूप में स्थापित किया। ये गुण समाकलनों की कई जटिल समस्याओं का हल करने में उपयोगी होते हैं।

15.6 शब्दावली

बीटा फलन	Beta function
गामा फलन	Gamma function
द्विगुण सूत्र	Duplication formula

15.7 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न -1

1. $\frac{1}{15}$ 2. $\frac{\lceil n+1}{2^{n+1}}$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. $\frac{945}{32}\sqrt{\pi}$ 2. $\sqrt{2}\pi$ 3. $\frac{\lceil 5 \lceil 3}{\lceil 8}, \frac{1}{105}$

15.8 अभ्यास प्रश्न

1. सिद्ध कीजिए कि

$$\int_a^b (x-a)^{m-1}(b-x)^{n-1}dx = (b-a)^{m+n-1}\beta(m,n)$$

2. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\left(1-x^4\right)^{1/2}} \times \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^4\right)^{1/2}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\left(\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)$$

3. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^1 \log\left(\lceil x\right)dx = \frac{1}{2}\log 2\pi$

4. सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^\infty e^{-x^n}dx = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)\right.$$

अत : दर्शाइये कि

$$\int_0^\infty e^{-x^n}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

इकाई 16: अवकल समीकरण (Differential Equation)

इकाई की रूपरेखा

16.0 उद्देश्य
16.1 प्रस्तावना
16.2 परिभाषा
16.3 अवकल समीकरण के प्रकार
16.3.1 साधारण अवकल समीकरण
16.3.2 आंशिक अवकल समीकरण
16.4 कोटि एवं घात
16.4.1 अवकल समीकरण की कोटि
16.4.2 अवकल समीकरण की घात
16.5 हल के प्रकार
16.5.1 व्यापक हल
16.5.2 विशिष्ट हल
16.5.3 विचित्र हल
16.6 प्रथम कोटि एवं प्रथम घात अवकल समीकरण
16.7 चरों का पृथक्करण
16.8 समघात अवकल समीकरण
16.9 समघात समीकरण में समानयन वाले समीकरण
16.10 रैखिक अवकल समीकरण
16.11 बरनौली अवकल समीकरण
16.12 यथातथ अवकल समीकरण
16.13 यथातथ अवकल समीकरण में समानयन वाले समीकरण
16.13.1 निरीक्षण द्वारा समाकलन गुणक ज्ञात करना
16.13.2 समाकलन गुणक ज्ञात करने के नियम
16.14 सारांश
16.15 शब्दावली
16.16 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर
16.17 अभ्यास प्रश्न

16.0 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई में आप अवकल समीकरणों के संबंध में प्रारम्भिक जानकारी प्राप्त करेंगे तथा इन समीकरणों को हल करने की विधियों को सीखेगें। इस इकाई में विशेष रूप से प्रथम कोटि और प्रथम घात के अवकल समीकरणों के विशेष रूप यथा समघात समीकरण, रैखिक अवकल समीकरण, बरनौली समीकरण एवं यथातथ अवकल समीकरण का अध्ययन करेंगे।

16.1 प्रस्तावना

अभियांत्रिकी, भौतिकी एवं अन्य अनुप्रयुक्त विज्ञान में बहुदा ऐसी स्थितियाँ आती है जब समस्या में स्वतन्त्र चर, आश्रित चर और उनके अवकलज विद्यमान होते है। प्रस्तुत इकाई में आप इस प्रकार प्राप्त अवकल समीकरण के संबंध में अध्ययन करेंगे। आप विशेष रूप से उन अवकल समीकरणों का अध्ययन करेंगे जिनमें अवकलन प्रथम कोटि और प्रथम घात के रूप में उपस्थित होगा।

16.2 परिभाषा

एक समीकरण जिसमें स्वतन्त्र चर, आश्रित चर तथा इनके अवकलजों के बीच में संबंध हो, अवकल समीकरण कहलाता है। उदाहरणार्थ :

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = \sin x$

(ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

(iii) $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz$

16.3 अवकल समीकरण के प्रकार

अवकल समीकरण मुख्यत : दो प्रकार के होते है :

16.3.1 साधारण अवकल समीकरण

जब किसी अवकल समीकरण में उपस्थित अवकल गुणांक केवल एक ही स्वतंत्र -चर के सापेक्ष हो तो ऐसा अवकल समीकरण साधारण अवकल समीकरण कहलाता है। उदाहरणार्थ :

$$\frac{dy}{dx} + xy = \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = e^x$$

16.3.2 आंशिक अवकल समीकरण

जब किसी अवकल समीकरण में एक से अधिक स्वतंत्र -चर हो तथा आंशिक अवकल गुणाक इनमें से किसी के भी सापेक्ष हो, तो ऐसे समीकरण आंशिक - अवकल समीकरण कहलाते है।
उदाहरणार्थ :

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ax$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

16.4 कोटि (Order) एवं घात (Degree)

16.4.1 अवकल समीकरण की कोटि (Order)

अवकल समीकरण में विद्यमान अवकलजों की उच्चतम कोटि ही अवकल समीकरण की कोटि कहलाती है। उदाहरणार्थ :

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{dy}{dx}+2y=e^x+\sin x$$

$$x(1-x)\frac{dy}{dx}+xy=x\sin x$$

क्रमश : द्वितीय एवं प्रथम कोटि के अवकल समीकरण है।

16.4.2 अवकल समीकरण की घात (Degree)

किसी अवकल समीकरण को अवकलजों के सन्दर्भ में परिमेय और पूर्ण बीजीय बनाने के बाद उसमें सबसे उच्चतम कोटि के अवकलज की घात, अवकल समीकरण की घात कहलाती है। उदाहरणार्थ :

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+x^2\frac{dy}{dx}-3y=0 \quad \text{एवं}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\frac{dy}{dx}\right]^{5/2}=0$$

क्रमश : तीन एवं दो कोटि के अवकल समीकरण है।

16.5 हल के प्रकार

एक अवकल समीकरण का समाकलन (हल), इसमें उपस्थित चरों में संबंध होता है जिसमें कोई भी अवकल समीकरण अवकल गुणांक ना हो, तथा यह संबंध और इससे प्राप्त अवकल गुणांक दिए गए अवकल समीकरण को सन्तुष्ट करते हों।

किसी अवकल समीकरण को उसके हल से, अवकलन तथा दूसरी बीजगणितीय विधियों का प्रयोग करते हुए विलोपन द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। अत: अवकल समीकरण के हल को पूर्वग भी कहते है। किसी भी अवकल समीकरण के हलो को निम्न प्रकार परिभाषित करते है।

16.5.1 व्यापक हल (General solution)

यदि अवकल समीकरण के हल में समीकरण की कोटि के बराबर स्वेच्छ अचर हो तो ऐसा हल व्यापक हल कहलाता है। व्यापक हल को पूर्ण समाकलन या पूर्ण पूर्वग भी कहते है।

16.5.2 विशिष्ट हल (Particular solution)

अवकल समीकरण का ऐसा हल जो उसके व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों को विशिष्ट मान देने पर प्राप्त होता है, समीकरण का विशिष्ट हल कहलाता है।

16.5.3 विचित्र हल (Singular solution)

किसी अवकल समीकरण का वह हल जो उसके व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों को विशिष्ट मान देने पर प्राप्त नही होता, विचित्र हल कहलाता है।

उदाहरण 1 : निम्नलिखित अवकल समीकरणों की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिये।

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \cos^2 x$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + \int y dx = 4x^3$

हल :

1 अवकल समीकरण में उच्चतम कोटि के अवकलज की कोटि 2 और घात 1 है अत : दिए गए अवकल समीकरण की कोटि 2 और घात 1 है।

2 दिए गए अवकल समीकरण में समाकलन चिन्ह से स्वतंत्र करने के लिए समीकरण को x के सापेक्ष अवकलन करने पर $\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{d^2y}{dx^2} + y = 12x^3 + c$ यहाँ उच्चतम कोटि के अवकलज की कोटि 3 और घात 1 है, अत: दिए गए अवकल समीकरण की कोटि 3 और घात 1 है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न- 1

1. निम्नलिखित अवकल समीकरणों की कोटि तथा घात ज्ञात कीजिए।

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} = \int x^2 dx$

(2) $y = x\frac{dy}{dx} + 4\frac{dx}{dy}$

(3) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$

2. किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या लिखिए।
3. अवकल समीकरण की कोटि एवं घातक परिभाषित कीजिए।
4. अवकल समीकरण के विशिष्ट हल को परिभाषित कीजिए।

16.6 प्रथम कोटि एवं प्रथम घात अवकल समीकरण

अवकल समीकरण $f(x,y)dx + \Phi(x,y)dy = 0$ प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरण का व्यापक रूप है। इस रूप को सुविधाजनक रूप में $Mdx + Ndy = 0$ के रूप में लिख सकते है, जहाँ M और N ,x या y या दोनों के फलन है। इस इकाई में आप इस प्रकार के अवकल समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन करेंगे।

16.7 चरों का पृथक्करण (Separation of variables)

अवकल समीकरण जिसमें चरों को पृथक किया जा सके, अर्थात समीकरण $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$ के रूप में लिखा जा सकता हो तो समीकरण को निम्न प्रकार से लिख सकते है :

$$f_1(x) + f_2(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

X के सापेक्ष समाकलन करने पर

$$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)\frac{dy}{dx}.dx = c$$

या $$\int f_1(x)dx + \int f_2(y)dy = c$$

जो अवकल समीकरण का व्यापक हल है और c एक स्वेच्छ चर है।

उदाहरण 1 : हल कीजिए-

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$$

हल : दिए गए समीकरण के दोनो पक्षो को से गुणा करने पर

$e^y\frac{dy}{dx} = e^x + x^2$ या $e^ydy = (e^x + x^2)dx,$ दोनो पक्षो का समाकलन करने पर

$$\int e^ydy = \int\left(e^x + x^2\right)dx$$

$\Rightarrow e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$ जोकि दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

उदाहरण 2 : हल कीजिए-

$$3e^x\tan ydx + (1-e^x)\sec^2 ydy = 0$$

हल : चरों को पृथक् करने पर

$$\frac{3e^x}{(1-e^x)}dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y}dy = 0$$

समाकलन करने पर

$$3\int\frac{e^x}{\left(1-e^x\right)}dx + \int\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy = k$$

या $-3\log(1-e^x) + \log(\tan y) = \log c (k = \log c$ लेने पर)

या $\log(1-e^x)^{-3} + \log(\tan y) = \log c$

या $\log\left[\tan y.(l-e^x)^{-3}\right] = \log c$

या $\tan y.(1-e^x)^{-3} = c$

अत: अभीष्ट हल $\tan y = c(1-e^x)^3$

उदाहरण 3 : हल कीजिए-

$$y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$$

हल : $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \frac{dy}{dx}\right)$

या $y(1-ay) = (x+a)\frac{dy}{dx}$

या $\dfrac{dx}{(x+a)} = \dfrac{dy}{y(1-ay)} = \int\left[\dfrac{1}{y} + \dfrac{a}{1-ay}\right]dy$ (आंशिक भिन्नों में लिखने पर)

समाकलन करने पर

$$\int \frac{dx}{x+a} = \int \frac{dy}{y} + a\int \frac{dy}{(1-ay)}$$

$$\Rightarrow \log(x+a) = \log y(1-ay) + \log c$$

या $\log(x+a) = \log \dfrac{y.c}{(1-ay)}$

या $(x+a) = \dfrac{cy}{(1-ay)}$

$$\Rightarrow cy = (x+a)(1-ay)$$

जो कि दिए गए अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 4 : निम अवकल समीकरण को हल कीजिए

$$\cos(x+y)dy = dx$$

हल : $\cos(x+y)dy = dx$

या $\cos(x+y)\dfrac{dy}{dx} = 1$ ...(1)

यहाँ माना कि $x+y = v \Rightarrow 1 + \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1 \quad \text{....(2)}$$

अतः (1) और (2) से

$$\cos v\left(\frac{dv}{dx} - 1\right) = 1$$

$$\Rightarrow \cos v \frac{dv}{dx} = 1 + \cos v$$

$$\Rightarrow \frac{\cos v}{1+\cos v} dv = dx$$

समाकलन करने पर

$$\int \frac{\cos v}{1+\cos v} dv = \int dx$$

$$\Rightarrow \int dx = \int \frac{1+\cos v - 1}{1+\cos v} dv$$

$$\Rightarrow \int dx = \int dv = \int \frac{dv}{1+\cos v}$$

$$\Rightarrow \int dx = \int dv - \frac{1}{2}\int \sec^2 \frac{v}{2} dv \quad \left(1+\cos v = 2\cos^2 \frac{v}{2}\right)$$

अतः $x + c = v - \tan \dfrac{v}{2}$

$$\Rightarrow x + c = x + y - \tan\frac{(x+y)}{2}$$ (v का मान रखने पर)

अभीष्ट हल $y - c = \tan\frac{1}{2}(x+y)$

उदाहरण 5 : $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$

हल : माना $x + y = v \Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1$

अतः $\frac{dv}{dx} - 1 = \sin v + \cos v$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \sin v + \cos v + 1$$

या $$\int dx = \int \frac{dv}{\sin v + \cos v + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sin v/2 \cos v/2 + \cos^2 v/2}$$

या $$\int dx = \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2 v/2}{1 + \tan v/2} dv$$

या $$x + c = \log\left(1 + \tan v/2\right)$$

अतः अभीष्ट $x + c = \log\left[1 + \tan\frac{1}{2}(x+y)\right]$ (v का मान रखने पर)

स्वमूल्यांकन प्रश्न -2

निम्नलिखित अवकल समीकंरणों को हल कीजिए।

1. $\left(e^y + 1\right)\cos x dx + e^y \sin x dy = 0$
2. $\left(1 + x^2\right)dy = \left(1 + y^2\right)dx = 0$
3. $dy = (4x + y + 1)^2 dx$
4. $(x - y)^2 dy = a^2 dx$
5. $\left(e^{x+y} - 1\right)dx = dy$

16.8 समघात अवकल समीकरण (Homogeneous differential equations)

एक अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$ समघात अवकल समीकरण कहलाता है यदि) $f_1(x,y)$ तथा $f_2(x,y)$ दोनों एक ही घात के समघात फलन हो।

समघात अवकल समीकरण को हल करने की क्रिया विधि

दिए गए समघात अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$ .....(1) में माना कि $f_1(x,y)$ और $f_2(x,y)$ दोनो n घात के समघात फलन हैं, अत : $f_1(x,y)=x^nF_1\left(y/x\right)$ और

$f_2(x,y)=x^nF_2\left(y/x\right)$ .....(2)

(1) और (2) से

$$\frac{dy}{dx}=\frac{F_1\left(y/x\right)}{F_2\left(y/x\right)} \quad \text{.....(3)}$$

समघात अवकल समीकरणों का हल ज्ञात करने के लिए $y=vx$ प्रतिस्थापित करने पर $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ जबकि v भी xका फलन है।

अत: समीकरण (3) से $v+x\frac{dy}{dx}=\frac{F_1(v)}{F_2(v)}$

$$\Rightarrow \frac{F_2(v)\,dv}{\left[F_1(v)-vF_2(v)\right]}=\frac{dx}{x}$$

जिसने समाकलन करने पर दिए गए समघात समीकरण का व्यापक हल प्राप्त हो सकता है क्योकि यहाँ हमे पर पृथक होकर समीकरण प्राप्त हुआ है।

उदाहरण 1: हल कीजिए.

$$y^2dx+\left(xy+x^2\right)dy=0$$

हल : दिए गए समीकरण को निम्न रूप में लिखने पर

$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{xy+x^2}$.....(1) जो कि एक समघात समीकरण है अत:

$y=vx$ रखने पर $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$. .....(2) अब (1) और (2) से

$$v+x\frac{dv}{dx}=-\frac{v^2x^2}{vx^2+x^2}=-\frac{v^2}{v+1}$$

या $$x\frac{dv}{dx}=-\frac{v^2}{v+1}-v=-\frac{v(2v+1)}{(v+1)}$$

या $$\int\frac{(v+1)\,dv}{v(2v+1)}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow\int\left[\frac{1}{v}-\frac{1}{(2v+1)}\right]dv=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \log v - \frac{1}{2}\log(2v+1) = -\log x + \log k$$

$$\Rightarrow \log \frac{v^2}{(2v+1)} = log\, \frac{k^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow v^2x^2 = k^2(2v+1)$$

अब $v = y/x$ प्रतिस्थापित करने पर

$$xy^2 = k^2(2y+x) \qquad \left[k^2 = c\right]$$

$$\Rightarrow xy^2 = c(2y+x)$$ जो अभीष्ट हल है।

उदाहरण 2 : हल कीजिए-

$$x\sin\left(y/x\right)dy = \left[y\sin\left(y/x\right) - x\right]dx$$

हल : दिए हुए अवकल समीकरण को निभ प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(y/x\right)\sin\left(y/x\right) - 1}{\sin\left(y/x\right)} \qquad \text{.....(1)}$$

जो कि एक समघात समीकरण है अत:

$y = vx$ रखने पर $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\sin v - 1}{\sin v}$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v\sin v - 1}{\sin v} - v = \frac{-1}{\sin v}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \sin v\, dv + c$$

$$\Rightarrow \log x = \cos v + c$$

या $x = ce^{\cos v}$

या $x = ce^{\cos\left(y/x\right)}$ जो कि दिए गए अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण- 3 : हल कीजिए

$$\left[x\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]y = \left[\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right].x\frac{dy}{dx}$$

हल : दिए गए अवकल समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता हैं।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[x\cos\frac{y}{x} + y\sin\frac{y}{x}\right]y}{\left[y\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{y}{x}\right]x}$$

जो कि एक समघात समीकरण है अत:

$y = vx$ रखने पर $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{(\cos v + v\sin v)}{(v\sin v - \cos v)}.v$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{(\cos v + v\sin v)v}{(v\sin v - \cos v)} - v = \frac{2v\cos v}{v\sin v - \cos v}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{vsinv - cosv}{2vcosv} = \frac{1}{2}\left[\frac{sinv}{cosv} - \frac{1}{v}\right]dv$$

$$\Rightarrow 2\int\frac{dx}{x} = \int \tan v dv - \int\frac{dv}{v} + c$$

$$\Rightarrow 2.\log x = \log\sec v - \log v + \log c$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{csecv}{v} = x^2 = \frac{c.\sec(\frac{y}{x})}{y/x}$$

$$\Rightarrow xy = c\sec\left(y/x\right)$$

जो कि अभीष्ट हल है।

उदाहरण 4 : हल कीजिए-

$$xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$$

हल : दिए गए अवकल समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(y/x\right)^2} \quad \text{....(1)}$$

जो कि एक समघात समीकरण है अत:

$y = vx$ रखने पर $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

समीकरण (1) से प्रतिस्थापित करने पर

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1 + v^2}$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}}$$

$$\Rightarrow \log x = \log\left\lfloor v + \sqrt{1 + v^2}\right\rfloor + \log c$$

$$\Rightarrow \log x = \log c.\left[y/x + \sqrt{1 + y^2/x^2}\right]$$

$$\Rightarrow x^2 = c.\left\lfloor y + \sqrt{x^2 + y^2}\right\rfloor$$

जो कि दिए गए अवकल समीकरण का अभीष्टा हल हैं

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 3

निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए-

1. $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$
2. $y - x\frac{dy}{dx} = x + y\frac{dy}{dx}$
3. $2xydy = \left(x^2 + y^2\right)dx$
4. $x^2 dy + y\left(x + y\right)dx = 0$

16.9 समघात समीकरण में समानयन किये जा सकने वाले समीकरण (Equation reducible to a homogeneous equations)

जब समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{Ax + By + C}$ के रूप में हो तो इसे समघात अवकल समीकरण में निम्न प्रकार पीरवर्तित कर सकते हैं :

स्थिति- I : जब $\frac{a}{A} \neq \frac{b}{B} \Rightarrow aB - bA \neq 0$ हो तो c तथा C को निम्न प्रतिस्थापन के द्वारा हटाकर समघात समीकरण बनाते है।

$x = X + h$ और $y = Y + k$ .....(1)

जहाँ h और k स्वेच्छ अचर है और उनका चयन इस प्रकार से किया जाता है जिससे दिया हुआ अवकल समीकरण समघात बन जाए।

सम्बंध (1) से $dx = dX, dy = dY \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$ .....(2)

(1) और (2) का प्रयोग दिए गए समीकरण में करने पर,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a\left(X + h\right) + b\left(Y + k\right) + c}{A\left(X + h\right) + B\left(Y + k\right) + C}$$

या $$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + \left(ah + bk + c\right)}{AX + BY + \left(Ah + Bk + C\right)}$$ .....(3)

समीकरण (3) को समघात बनाने के लिए अचर h और k का चयन इस प्रकार करते है कि

$ah + bk + c = 0$ और $Ah + Bk + C = 0$

अत: $h = \frac{bC - Bc}{aB - Ab'} k = \frac{Ac - aC}{aB - Ab}$

प्राप्त होता है, जो कि जम ही सम्भव है जब $aB - Ab \neq 0$ हो। अस समघात समीकरण (3) का नया रूप निम्न प्रकार प्राप्त होगा।

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{AX + BY}$$ .....(4)

अवकल समीकरण (4) को समघात समीकरण के लिए वर्णित विधि द्वारा हल किया जा सकता है।

स्थिति II : जब $\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{1}{m}$ (माना)

इस स्थिति में दिए समीकरण को निम्न प्रकार लिख सकते है -

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{m(ax+by)+C} \quad \text{.....(5)}$$

जिसे $ax+by=v$ प्रतिस्थापन के द्वारा हल कर सकते है

अर्थात $a+b\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b}\left(\frac{dv}{dx}-a\right)$

समीकरण (5) और (6) से

$$\frac{1}{b}\left(\frac{dv}{dx}-a\right)=\frac{v+c}{mv+C}$$

या $$\frac{dv}{dx}=a+\frac{b(v+c)}{mv+C}$$

जो एक ऐसा अवकल समीकरण है जिसमें चर पृथक हो गए है अत : इस समीकरण को अनुच्छेद 16.7 में वर्णित विधि द्वारा हल कर सकते है।

उदाहरण 1 : निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए-

$$\frac{dv}{dx}=\frac{x+2y-3}{2x+y-3}$$

हल : दिए गए अवकल समीकरण को समघात बनाने के लिए $x=X+h$ और $y=Y+k$ लेने पर अवकल समीकरण का नया रूप निम्न होगा -

$$\frac{dY}{dX}=\frac{(X+h)+2(Y+k)-3}{2(X+h)+(Y+k)-3}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+(h+2k-3)}{2x+y+(2h+k-3)} \quad \text{.....(1)}$$

अत : hतथा k का चयन इस प्रकार करते हैं कि

$$\left.\begin{matrix}h+2k-3=0\\2h+k-3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow h=k=1$$

समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y}{2X+y} \quad \text{.....(2)}$$

जो कि समघात अवकल समीकरण हैं इसलिए हैं इसलिए माना कि

$$Y=vx\Rightarrow\frac{dY}{dx}=v+X\frac{dv}{dx} \quad \text{.....(3)}$$

समीकरण (2) व (3) से

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{X + 2vX}{2X + v + X} = \frac{2v+1}{v+2}$$

$$\Rightarrow \frac{dX}{X} = \frac{v+2}{(1+v)(1-v)}dv = \left[\frac{1}{2(1+v)} + \frac{3}{2(1v)}\right]dv$$

समाकलन करने पर

$$\int\frac{dX}{X} = \frac{1}{2}\int\frac{dv}{v+1} + \frac{3}{2}\int\frac{dv}{(1-v)}$$

$$\Rightarrow \log X + \log c = \frac{1}{2}\log(v+1) - \frac{3}{2}\log(1-v)$$

$$\Rightarrow X^2c^2 = \frac{(1+v)}{(1-v)^3}$$

$$\Rightarrow c^2X^2\left(1-\frac{Y}{X}\right)^3 = (X+Y)\frac{1}{x}$$

$\because X = x-1, Y = y-1$ रखने पर

$$\Rightarrow c^2(x-y)^3 = (x+y-2)$$

जो कि अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 2 : निम्न अवकल समीकरण का हल ज्ञात कीजिए-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x+y+1}$$

हल : दिए गए समीकरण में $x + y = v \Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$ रखने पर समीकरण निम्न प्रकार परिवर्तित होता हैं।

$$\frac{dv}{dx} - 1 = \frac{v-1}{v+1}$$

या $$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{v+1}$$

$$\Rightarrow \int\frac{v+1}{2v}dv = \int dx + c$$

$$\Rightarrow v + \log v = 2x + c$$

अब $v = x + y$ रखने पर

$$x + y + \log(x+y) = 2x + c$$

$$\Rightarrow \log(x+y) = x - y + c$$

जो कि दिए गए अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 4

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए-

1. $(x-y)dy = (x+y+1)dx$

2. $(4x+6y+5)\,dy=(3y+2x+4)\,dx$

3. $(2x+3y-5)\,dy+(3x+2y-5)\,dx=0$

16.10 रैखिक अवकल समीकरण (Linear differential equations)

यदि किसी अवकल समीकरण में आश्रित चर तथा उसका अवकलज प्रथम घात में हो तो वह समीकरण प्रथम कोटि का रैखिक अवकलन समीकरण कहलाता है। रैखिक अवकल समीकरण का मानक रूप निम्न प्रकार होता है

$$\frac{dy}{dx}+py=Q \qquad \text{.....(1)}$$

जहाँ P , Q स्वतन्त्र चर x के फलन है। यदि y स्वतन्त्र चर और x आश्रित चर हो तो रैखिक अवकल समीकरण का मानक रूप निम्न प्रकार होगा-

$$\frac{dx}{dy}+py=Q \qquad \text{.....(2)}$$

जहाँ P, Q स्वतन्त्रचर y के फलन होगे।

रैखिक अवकल समीकरण का हल ज्ञात करने के लिए समीकरण (1) के दोनो पक्षो को $e^{\int pdx}$ से गुणा करने पर

$$e^{\int pdx}\left[\frac{dy}{dx}+py\right]=Q.e^{\int pdx}$$

या $$\frac{d}{dx}\left[y.e^{\int pdx}\right]=Q^{e\int pdx}$$

समाकलन करने पर

$$ye^{\int Pdx}=\int Q.e^{\int pdx}dx+C$$

या $y = e^{-\int Pdx}[\int Q.e^{\int Pdx}dx + c]$

जो की रैखिक अवकल का अभीष्ट हल है।

टिप्पणी: यहाँ $e^{\int Pdx}$ समीकरण का समाकल गुणक (integrating factor) कहलाता है। अतः अभीष्ट हल होगा - y(I.F.) = $\int(I.F) = \int(I.F)Q.dx + C$

उदाहरण 1 : हल कीजिए-

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2yx - 4x^2 = 0$$

हल : दिए हुए अवकल समीकरण को निम्म प्रकार लिख सकते है :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{(1+x^2)}y = \frac{4x^2}{1+x^2}$$

जो की एक रैखिक अवकल समीकरण है जहां

$$P = \frac{2x}{(1+x^2)} \text{ व } Q = \frac{4x^2}{(1+x^2)}$$

अतः I.F. (समाकलन गुणांक)

$= e^{\int P dx} = e^{\int \frac{2x}{(1+x^2)} dx}$

$= e^{\int \frac{dt}{t}} \quad \because t = 1 + x^2, dt = 2xdx$

I.F. = $e^{\log t} = t = (1 + x^2)$

अवकल समीकरण (1) का अभीष्ट हल होगा :

$y.(I.F.) = \int (I.F.) Q.dx + C$

$y(1 + x^2) = \int (1 + x^2) \frac{4x^2}{(1+x^2)} dx + C$

$y(1 + x^2) = \frac{4x^3}{3} + C$

जो की रैखिक अवकल का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 2 : हल कीजिए-

$$\left(1+y^2\right)dx = \left(\tan^{-1} y - x\right)dy$$

हल : दिए हुए रैखिक अवकल समीकरण को मानक रूप में निम्म प्रकार लिख सकते है :

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$$

यहाँ y स्वतन्त्र चर ओर x एक आश्रित चर हैं

समाकलन गुणांक $(I.F) = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{tan^{-1}y}$

अत: रैखिक अवकल समीकरण का हल होगा :

$$x.(I.F) = \int (I.F) Q dy + C$$

$$x.e^{\tan^{-1}y} = \int e^{\tan^{-1}y} \frac{\tan^{-1} y}{(1+y^2)} dy + C$$

$\tan^{-1} y = t$ प्रतिस्थापित करने पर $\frac{1}{1+y^2} dy = dt$

अत: $x.e^t = \int e^t.t dt + C$

या $x.e^t = te^t = e^t + C$

या $x.e^{\tan^{-1}y} = \left(\tan^1 y - 1\right) e^{tan^{-1}y}$ (t का मान रखने पर)

जो कि दिए गए रैखिक समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 3 : हल कीजिए-

$$\sec x \frac{dy}{dx} = \sin x + y$$

हल : दिए गए समीकरण को रैखिक अवकल समीकरण के मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{dy}{dx} - (\cos x) y = \sin x \cos x \qquad \text{.....(1)}$$

यहाँ $I.F. = e^{-\int \cos x dx} = e^{-\sin x}$

अत: दिए गए रैखिक अवकल समीकरण का अभीष्ट हल

$$y.(I.F) = \int (I.F).Q.dx + C$$

$$y.e^{-\sin x} = \int (\sin x)(\cos x)e^{-\sin x}dx + C$$

उपरोक्त में $\sin = t$ अथवा $\cos x dx = dt$ रखने पर

$$ye^{-t} = \int te^{-t}dt + C$$

$$= -te^{-t} - e^{-t}C = -(t+1)e^{-t} + C$$

$$ye^{-\sin x} = -(\sin x + 1)\ e^{-\sin x} + C$$

अत: अभीष्ट हल $y = Ce^{\sin x} - (1 + \sin x)$ होगा।

उदाहरण 4 : हल कीजिए-

$$\left(x + 2y^3\right)\frac{dy}{dx} = y$$

हल :

दी गई समीकरण को मानक रूप में लिखने पर

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + 2y^3}{y}$$

या $$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y^2$$

जो कि रैखिक अवकल समीकरण है जिसमें मुक्त चर y है

अत:

समाकलन गुणांक $(I.F.) = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = e^{-\log y} = \frac{1}{y}$

अत: दी गई रैखिक अवकल का अभीष्ट हल

$$x\frac{1}{y} = \int \frac{1}{y}.2y^2 dy + C$$

$$x\frac{1}{y} = y^2 + C$$

$$\Rightarrow x = y^3 + cy$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 5

1. $\left(1 + y^2\right) + \left(x - e^{\tan^{-1}y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$
2. $\frac{dy}{dx} + y\tan x - \sec x = 0$
3. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$
4. $x\left(1 - x^2\right)dy + \left(2x^2y - y - ax^3\right)dx = 0$

16.11 बरनौली अवकल समीकरण (Bernoulli's differential equation)

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=Q(x)\,y^n$ ..... (1) बरनौली समीकरण कहलाता है। बरनौली समीकरण को रैखिक अवकल समीकरण में बदलने के लिए इसमें y^n का भाग देते है।

अत : $y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{-n+1}=Q$ ....(2)

मानाकि $y^{1-n}=v\Rightarrow(1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$

$$\Rightarrow\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx}+P.v=Q$$

या $\frac{dv}{dx}+(1-n)Pv=(1-n)Q$

जो कि एक रैखिक अवकल समीकरण है जिसको पिछले अनुच्छेदमें वर्णित विधि द्वारा हल कर सकते हैं।

उदाहरण 1 : हल कीजिए

$$x\frac{dy}{dx}+y=y^2\log x$$

हल : दिए गए समीकरण को निम्न रूप में लिख सकते है।

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{y^{-1}}{x}=\frac{\log x}{x}$$ .....(1)

जो कि बरनौली अवकल समीकरण है।

माना कि $\frac{1}{y}=v\Rightarrow-y^2\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$ .... (2)

समीकरण (1) व (2) से

$$-\frac{dv}{dx}+\frac{v}{x}=\frac{\log x}{x}$$

या $\frac{dv}{dx}-\frac{v}{x}=-\frac{1}{x}.\log x$

जो कि रैखिय अवकल समीकरण है अत: समाकलन गुणक $(I.F.)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\log x}=\frac{1}{x}$

अत: अभीष्ट हल

$$\frac{1}{x}.v=-\int\frac{\log x}{x}.\frac{1}{x}dx+C$$

जहाँ

$$v.e^{-t}=-\int t.e^{-t}dt+C \text{ अत:} \begin{bmatrix}\log x=t\\ \frac{1}{x}dx=dt\end{bmatrix}$$

$$\frac{v}{x}=\frac{(\log x+1)}{x}+C$$

या $$\frac{1}{y}=(1+\log x)+Cx$$

जो कि दिए गए अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 2 : हल कीजिए-

$$\frac{dy}{dx}+x\sin 2y=x^3\cos^2 y$$

हल : दिये गये अवकल समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\sec^2 y\frac{dy}{dx}+2x\tan y=x^3 \qquad \text{.....(1)}$$

जो बरनौली अवकल समीकरण है अत: माना कि

$$\tan y=v\Rightarrow \sec^2 y\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx} \qquad \text{.....(2)}$$

समीकरण (1) व (2) से

$$\frac{dv}{dx}+2xv=x^3 \qquad \text{.....(3)}$$

जो कि एक रैखिक अवकल समीकरण है जिसका समाकलन गुणांक

$$(I.F.)=e^{2\int xdx}=e^{x^2}$$

अत: समीकरण (3) का अभीष्ट हल

$$v.e^{x^2}=\int e^{x^2}.x^3dx+C$$

$$\Rightarrow \tan y e^{x^2}=\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+C$$

जो कि दिए गए अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 6

1. $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{(1+x)}\tan y=(1+x)e^x\sec y$
2. $\cos x dy=y(\sin x-y)dx$
3. $(1-x^2)dy+xydx=xy^2dx$

16.12 यथातथ (यथार्थ) अवकल समीकरण (Exact differential equations)

किसी अवकल समीकरण को यथार्थ अवकल समीकरण कहते है यदि इसके पूर्वग से इसे बिना किसी और परिवर्तन के अवकलन द्वारा व्युत्पन्न किया जा सके।

उदाहरणार्थ : $x\frac{dy}{dx}+y=0$ एक यथार्थ अवकल समीकरण है क्योकि इसके पूर्वग $xy=c$ को अवकलन करने पर इसको बिना किसी और पीरवर्तन के सीधा प्राप्त कर सकते हैं।

टिप्पणी : प्रथम घात एवं प्रथम कोटि के अवकल समीकरण $Mdx+Ndy=0$ के यथार्थ अवकल समीकरण होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त (necessary and sufficient) प्रतिबंध $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ होता है।

यथार्थ अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात करने कि क्रिया विधि

यथार्थ अवकल समीकरण का व्यापक हल $U(x,y)+V(y)=C$ होता है जिसे आप निम्न क्रिया विधि के द्वारा प्राप्त कर सकते है।

(1) सर्वप्रथम y को अचर मानकर M को x के सापेक्ष समाकलन करके $U(x,y)=\int Mdx$ ज्ञात कीजिए।

(2) प्राप्त $U(x,y)$ का y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करके $\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}$ में ज्ञात करते है

(3) द्वितीय चरण में प्राप्त $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)$ को N में घटाने पर $\left(N-\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ प्राप्त होता है जो सदैव y का फलन होगा।

(4) तीसरे चरण में प्राप्त $\left(N-\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ का y के सापेक्ष समाकलन करने $V(y)$ ज्ञात करते है

अर्थात $V(y)=\int\left(N-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy$

(5) इस प्रकार दिये गए यर्थाथ अवकल समीकरण का अभीष्ट हल $U(x,y)+V(y)=C$ प्राप्त कर सकते है।

उपर्युक्त क्रिया विधि को आप निम्न उदाहरणों की सहायता से सुगमता से समझ सकते हैं।

उदाहरण 1 : हल कीजिए

$$(x+y)^2dx-\left(y^2-2xy-x^2\right)dy=0$$

हल : दिए गए समीकरण में

$$M=(x+y)^2 \text{ व } N=-\left(y^2-2xy-x^2\right)$$

यहाँ $\frac{\partial M}{\partial y}=2(x+y)$ व $\frac{\partial N}{\partial x}=2y+2x$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

अर्थात् दिया गया अवकल समीकरण यथार्थ है। अत: आप उपर्युक्त क्रियाविधि से इसका हल निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हो।

(i) $U(x,y)=\int Mdx=\int(x+y)^2dx=\frac{(x+y)^3}{3}$

y को अचर मान कर

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{(x+y)^3}{3}\right]=(x+y)^2$$

(ii)

$$N-\frac{\partial U}{\partial y}=-y^2+2xy+x^2-(x+y)^2=-2y^2$$

(iii)

$$V(y)=\int\left(N-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dy=\int -2y^2dy=\frac{-2y^3}{3}$$

(iv)

अत: यथार्थ अवकल समीकरण के अभीष्ट हल

$$U(x,y)+V(y)=C_1 \text{ से}$$

$$\frac{(x+y)^3}{3}-\frac{2y^3}{3}=C_1$$

या $$(x+y)^3-2y^3=3c_1=C$$

जो कि अवकल समीकरण का अभीष्ट हल है।

उदाहरण 2 : हल कीजिए-

$$xdx+ydy=a^2\left(\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}\right)$$

हल : दिए गए अवकल समीकरण को $Mdx+Ndy=0$ के रूप में लिखने पर निम्न प्रकार प्राप्त होता है

$$\left[x+\frac{a^2y}{x^2+y^2}\right]dx+\left[y-\frac{a^2x}{x^2+y^2}\right]dy=0 \quad \text{.....(1)}$$

अत: $$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{a^2.(x^2+y^2)-y.2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{a^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

और $$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-a^2(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{a^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ अत: समीकरण (1) यथार्थ अवकल समीकरण है। अत:

(i) $$U(x,y)=\int Mdx=\int\left[x+\frac{a^2y}{x^2+y^2}\right]dx$$

y अचर

$$=\frac{x^2}{2}+a^2.y\frac{1}{y}\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$U(x,y)=\frac{x^2}{2}+a^2\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

(ii) $\frac{\partial U}{\partial y} = a^2 \frac{1}{1+x^2/y^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{a^2 x}{x^2+y^2}$

(iii) $N - \frac{\partial U}{\partial y} = \left[y - \frac{a^2 x}{x^2+y^2}\right] - \left[\frac{-a^2 x}{x^2+y^2}\right] = y$

(iv) $V(y) = \int\left(N - \frac{\partial U}{\partial y}\right)dy = \int y dy = \frac{y^2}{2}$

अत: दिए गए समीकरण का व्यापक हल $U(x,y)+V(y)=C$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + a^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^2}{2} = C$$

उदाहरण 3 : हल कीजिए-

$$y\sin 2x dx - \left(1+y^2+\cos^2 x\right)dy = 0$$

हल : दिए गए समीकरण में

$M = y\sin 2x$ व $N = -\left(1+y^2+\cos^2 x\right)$

अत: $\frac{\partial M}{\partial y} = \sin 2x$ व $\frac{\partial N}{\partial x} = 2\cos x \sin x = \sin 2x$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

अत: दिया हुआ अवकल समीकरण एक यथातथ समीकरण है।

(i) $U(x,y) = \int M dx = \int y\sin 2x dx = \frac{-y\cos 2x}{2}$

y - अचर

(ii) $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\cos 2x}{2}$

(iii) $N - \frac{\partial U}{\partial y} = -1 - y^2 - \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{3}{2} - y^2$

(iv) $V(y) = \int\left(N - \frac{\partial U}{\partial y}\right)dy = \int -\frac{3}{2}dy - \int y^2 dy = -\frac{3}{2}y - \frac{y^3}{3}$

अत: दिए गए यथार्थ समीकरण का अभीष्ट हल $U(x,y)+V(y)=C$

$$\Rightarrow \frac{-y\cos 2x}{2} - \frac{3}{2}y - \frac{y^3}{3} = C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}y\cos 2x + \frac{3}{2}y + \frac{y^3}{3} = C$$

उदाहरण 4 : हल कीजिए.

$$\left(x^2 - 2xy - y^2\right)dx - \left(x+y\right)^2 dy = 0$$

हल : दिये गये अवकल समीकरण में

$$M = x^2 - 2xy - y^2 \text{ व } N = -(x+y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = -2x - 2y \text{ व } \frac{\partial N}{\partial x} = -2x - 2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

अर्थात् दिया गया अवकल समीकरण यथार्थ है। अत:

(i) $U(x,y) = \int M dx = \left(x^2 - 2xy - y^2\right) dx$

y अचर

$$U(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 y - y^2 x$$

(ii) $$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 y - y^2 x\right] = -x^2 - 2xy$$

(iii) $$\left(N - \frac{\partial U}{\partial y}\right) = -x^2 - 2xy - y^2 + x^2 + 2xy = -y^2$$

(iv) $$V(y) = \int\left(N - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dy = \int -y^2 dy = \frac{-y^3}{3}$$

अत: अभीष्ट हल $U(x,y) + V(y) = C$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x^3 - x^2 y - y^2 x - \frac{y^3}{3} = C$$

$$\Rightarrow \left(x^3 - y^3\right) - 3xy(x+y) = C$$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 7

1. $$\left[y\left(1+\frac{1}{x}\right) + \cos y\right] dx + \left[x + \log x - x\sin y\right] dy = 0$$
2. $\left(x^2 - ay\right) dx - \left(ax - y^2\right) dy = 0$
3. यथार्थ अवकल समीकरण के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध लिखिए।

16.13 यथार्थ अवकल समीकरण में समानयन वाले समीकरण

यदि कोई समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ यथार्थ नही हो तो उसे x व y के फलन से गुणा करके यथार्थ बनाया जा सकता है। ऐसा गुणक समाकलन गुणक कहलाता हैं।

समाकलन गुणक $(I.F.)$ ज्ञात करने के लिए कोई व्यापक विधि नही है।अवकल समीकरण के विशेष रूप के लिए समाकलन ज्ञात करने की कुछ विधियाँ तथा नियम निम्म प्रकार है।

16.13.1 समाकलन गुणक ज्ञात करने के नियम

नियम I : यदि समीकरण $Mdx+Ndy=0$ समघात अवकल समीकरण हो एवं $Mx+Ny\neq 0$ हो तो $\frac{1}{Mx-Ny}$ समीकरण का समाकलन गुणक होता है। यदि $Mx-Ny=0$ हो तो $\frac{M}{N}$ के स्थान पर $-\frac{y}{x}$ प्रतिस्थापित करके समाकलन करने पर हल x = cy होता है।

नियम II : यदि अवकल समीकरण $yf_1(x,y)dx+xf_2(x,y)dy=0$ एवं $Mx-Ny\neq 0$ हो तो अवकल समीकरण का समाकलन गुणक $(I.F.)\frac{1}{Mx-Ny}$ होता है। यदि $Mx-Ny=0$ हो तो $\frac{M}{N}=\frac{y}{x}$ प्रतिस्थापित करने पर हल xy = c प्राप्त होगा।

नियम III : यदि अवकल समीकरण $Mdx+Ndy=0$ में व्यजंक $\frac{1}{N}\left[\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right]=f(x)$ या अचर हो तो समाकलन गुणक $(I.F.)=e^{\int f(x)dx}$ होता है।

नियम IV : यदि अवकल समीकरण $Mdx+Ndy=0$ में व्यजंक $\frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]=f(y)$ या अचर हो तो समाकलन गुणक $e^{\int f(y)dy}$ होता है।

टिप्पणी : कई बार निरीक्षण द्वारा समीकरण के पदों को एक विशेष रूप में व्यवस्थित करने पर इसके पदों का सरलतापूर्वक समाकलन हो जाता है।

उदाहरण 1 : हल कीजिए-

$$y\left(2xy+e^x\right)dx-e^xdy$$

हल : दिए गए समीकरण को निम्न प्रकार लिख सकते है :

$$2xy^2dx+ye^xdx-e^xdy=0$$

या $2xdx+\frac{ye^xdx-e^xdy}{y^2}=0$

या $2xdx+d\left[\frac{e^x}{y}\right]=0$ (निरीक्षण से)

समाकलन करने पर

$$x^2+\left(\frac{e^x}{y}\right)=c$$

या $yx^2+e^x=cy$

जो अभीष्ट हल है

उदाहरण 2 : हल कीजिए-

$$\left(x^2y-2xy^2\right)dx-\left(x^3-3x^2y\right)dy=0$$

हल : दिया गया समीकरण तृतीय घात का समघात समीकरण है और यथार्थ नहीं है।

$\left(\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ यहाँ

$Mx + Ny = \left(x^2y - 2xy^2\right)x - \left(x^3 - 3x^2y\right)y$

$= x^2y^2 \neq 0$

अत: नियम 1 से समाकलन गुणक

$I.F. = \frac{1}{x^2y^2}$ होगा।

दिए गए समीकरण को $I.F. = \frac{1}{x^2y^2}$ से गुणा करने पर

$\left(\frac{x^2y - 2xy^2}{x^2y^2}\right)dx - \left(\frac{x^3 - 3x^2y}{x^2y^2}\right)dy = 0$

या $\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} - \frac{3}{y}\right)dy = 0$

जो कि एक यथार्थ अवकल समीकरण है अत: उसका अभीष्ट हल

$U(x, y) + V(y) = C$

$\Rightarrow \frac{x}{y} + \log\left(\frac{y^3}{x^2}\right) = C$ प्राप्त होगा।

उदाहरण 3 : हल कीजिए-

$(xy\sin xy + \cos xy)\,ydx + (xy\sin xy - \cos xy)\,xdy = 0$

हल : दिये गये समीकरण में

$Mx - Ny = (xy\sin xy + \cos xy)\,xy$

$= (xy\sin xy - \cos xy)\,xy$

$= 2xy\cos xy \neq 0$

अत: नियम II से $I.F. = \frac{1}{2xy\cos xy}$

दिए गए समीकरण के दोनों पक्षों का समाकलन गुणक $(I.F.)$ से गुणा करने पर

$\frac{1}{2}\left[y\tan xy + \frac{1}{x}\right]dx + \frac{1}{2}\left[x\tan xy - \frac{1}{y}\right]dy = 0$

जो यथार्थ अवकल समीकरण है जिसका समाकलन करने पर अभीष्ट हल $\frac{x}{y}\sec xy = C$ प्राप्त होगा।

उदाहरण 4 : हल कीजिए-

$\left(3xy - 2ay^2\right)dx + \left(x^2 - 2axy\right)dy = 0$

हल : दिए गये समीकरण में

$M = 3xy - 2ay^2$ व $N = x^2 - 2axy$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3x - 4ay$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x - 2ay$$

$$\therefore \frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{1}{x(x-2ay)} \times (x-2ay)$$

$$= \frac{1}{x}$$

अत: नियम III से $I.F. = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log x} = x$

दिए गए समीकरण के दोनों पक्षों को x से गुणा करने पर समीकरण यथार्थ समीकरण में पीरवर्तित हो जाती है : $\left(3x^2y - 2axy^2\right)dx + \left(x^3 - 2ax^2y\right)dy = 0$ जिसका अभीष्ट हल $x^3y - ax^2y^2 = c$ प्राप्त होगा।

उदाहरण 5 : हल कीजिए-

$$\left(y^4 + 2y\right)dx + \left(xy^3 + 2y^4 - 4x\right)dy = 0$$

हल : दिए गए अवकल समीकरण में

$$M = y^4 + 2y \text{ व } N = xy^3 + 2y^4 - 4x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = y^3 - 4 - \left(4y^3 - 2\right) = -3\left(y^3 + 2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{M}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] = -\frac{3}{y}$$

अत: नियम IV से $I.F. = e^{-\int \frac{3}{y} dy} = e^{-3\log y} = 1/y^3$

दिए गए समीकरण को समाकलन गुणक $I.F. = 1/y^3$ से गुणा करने पर

$$\left(y + \frac{2}{y^2}\right)dx + \left(x + 2y - \frac{4x}{y^3}\right)dy = 0$$

जो कि एक यथार्थ अवकल समीकरण है अत: इसका अभीष्ट हल $\left(y + \frac{2}{y^2}\right)x + y^2 = C$ प्राप्त होगा।

टिप्पणी : उदाहरण 1 से 5 तक यथार्थ अवकल समीकरण को पिछले भाग में दी गई विधि से हल करें।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 8

हल कीजिये-

1. $y\left(axy + e^x\right)dx - e^x dy = 0$
2. $\left(y^2 + xy\right)dx - x^2 dy = 0$
3. $\left(x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1\right)ydx + \left(x^3y^3 - x^2y^2 - xy + 1\right)xdy = 0$

4. $\left(x^3 + xy^4\right)dx + 2y^3dy = 0$

16.14 सारांश

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त आप अब अवकल समीकरण की परिभाषा एवं प्रकार के बारे में जानकारी प्राप्त कर चुके है एवं प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के किसी भी प्रकार के अवकल समीकरण का अभीष्ट हल ज्ञात करने की विधियों को भी अच्छी तरह समझ चुके है।

16.15 शब्दावली

अवकल समीकरण	Differential equation
रैखिक	Linear
यथातथ (यथार्थ)	Exact
व्यापक हल	General solution
कोटि	Order
घात	Degree
समाकलन गुणांक	Integration Factor (I.F.)

16.16 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1

1. (i) कोटि 3 घात 1
   (ii) कोटि 1 घात 2
   (iii) कोटि 2 घात 1
2. अवकल समीकरण के कोटि के समान
3. अवकल समीकरण की कोटि एवं घात क्रमश : उच्चतम अवकलज की कोटि एवं घात होती है।
4. ऐसा हल जो व्यापक हल में स्वेच्छ अचरों को विशिष्ट मान देने पर प्राप्त होता है।

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2

1. $\left(e^y + 1\right)\sin x = c$
2. $\left(y - x\right) = c\left(1 + xy\right)$
3. $4x + y + 1 = 2\tan\left(2x + c\right)$
4. $2y + c = a\log\dfrac{\left(x - y - a\right)}{\left(x - y + a\right)}$
5. $xe^{(x+y)} + 1 = ce^{(x+y)}$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 3

1. $cy = e^{y/x}$
2. $\tan^{-1}\left(y/x\right) + \log\sqrt{x^2 + y^2} = C$
3. $c\left(x^2 - y^2\right) = x$

4. $y + 2x = cx^2 y$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 4

1. $\tan^{-1}\dfrac{(2y+1)}{(2x+1)} - \dfrac{1}{2}\log\left(x^2 + y^2 + x + y + \dfrac{1}{2}\right) = C$
2. $(2x+3y) - \dfrac{9}{14}\log(14x + 21y + 22) = \dfrac{7x}{2} + c$
3. $\dfrac{3}{2}(x^2 + y^2) + 2xy - 5(x+y) = C$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 5

1. $xe^{\tan -1_y} = \dfrac{1}{2}e^{2\tan -1_y} + C$
2. $y = \sin x + c\cos x$
3. $xy = \dfrac{x^4}{4} + C$
4. $y = cx\sqrt{x^2 - 1} + ax$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 6

1. $\sin y = (e^x + c)(1+x)$
2. $\sec x = y\tan x + cy$
3. $cy = (1-y)\sqrt{1-x^2}$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 7

1. $yx + y\log x + x\cos y = C$
2. $x^3 - 3axy + y^3 = C$
3. $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

स्वमूल्यांकन प्रश्न - 8

1. $ax^2 y + 2e^x = cy$
2. $y\log x + x = cy$
3. $\left(xy - \dfrac{1}{xy}\right) - \log y^2 = C$
4. $\dfrac{e^{x^2}}{2}(x^2 + y^4 - 1) = C$

16.17 अभ्यास प्रश्न

निम्नलिखित अवकलन समीकरणों को हल कीजिए।

1. $(1-x)dy - (3+y)dx = 0$ **[उत्तर :** $\left[(1-x)(3+y) = C\right]$ **]**
2. $\sec^2 x\tan y dy + \sec^2 y\tan x dx = 0$ **[उत्तर :** $(\sin^2 x + \sin^2 y = C)$ **]**

3. $(\sin y+\cos y)dy-x(2\log x+1)dx=0$ [**उत्तर** : $\left(y\sin y=x^2\log x+c\right)$]

4. $(x+y)(dx-dy)=dx+dy$ [**उत्तर** :$\left(x+y=Ce^{(x-y)}\right)$]

5. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan y/x$ [**उत्तर:** $\left(\sin\dfrac{y}{x}=Cx\right)$]

6. $\left(x^2-y^2\right)dx+2xy\quad dy=0$ [**उत्तर** : $\left(\left(x^2+y^2\right)=2cx\right)$]

7. $x(x-y)dy-y(x+y)dx=0$ [**उत्तर** :$\left(\log(xy)+\dfrac{y}{x}=C\right)$]

8. $x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{dy}{dx}=y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)-x$ [**उत्तर** : $\left(x=ce^{\cos(y/x)}\right)$]

9. $(6x+2y-10)dy-(2x+9y-20)dx=0$ [**उत्तर** :$\left((x+2y-5)=c(2x-y)^2\right)$]

10. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y+1}{2x+2y+3}$ [**उत्तर** : $\left(x+y+\dfrac{4}{3}Ce^{3(x-2y)}\right)$]

11. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y+1}{x+y-1}$ [**उत्तर** : $\left(\log(x+y)=y-x+c\right)$]

12. $x(x-1)\dfrac{dy}{dx}-(x-2)y=x^3(2x-1)$ [**उत्तर** : $\left[y(x-1)=x^2\left(x^2-x+c\right)\right]$]

13. $x\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}+2xy=x\sqrt{1-x^2}$ [**उत्तर** : $\left(y=c\left(1-x^2\right)+\sqrt{1-x^2}\right)$

14. $x^2\dfrac{dy}{dx}+(1-2x)y=x^2$ [**उत्तर** : $\left[y=x^2\left(1+Ce^{1/x}\right)\right]$]

15. $\sin x\dfrac{dy}{dx}+3y=\cos x$ [**उत्तर** : $\left[\left(y+\dfrac{1}{3}\right)\tan^3\dfrac{x}{2}=2\tan\dfrac{x}{2}-x+c\right]$]

16. $x\dfrac{dy}{dx}+y=x^3y^6$ [**उत्तर** ; $\left(cx^5y^5+\dfrac{5}{2}x^3y^5=1\right)$]

17. $2\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2}$ [**उत्तर** : $\left(\dfrac{x}{y}=c\sqrt{x+1}\right)$]

18. $x^2y-x^3\dfrac{dy}{dx}=y^4\cos x$ [**उत्तर** : $\left(\dfrac{x^3}{y^3}=3\sin x+c\right)$]

19. $\left(\sin x\cos y+e^{2x}\right)dx+(\cos x\sin y+\tan y)dy=0$

[**उत्तर** : $\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}+\log\sec y-\cos x\cos y=C\right)$]

ISBN-13/978-81-8496-223-9