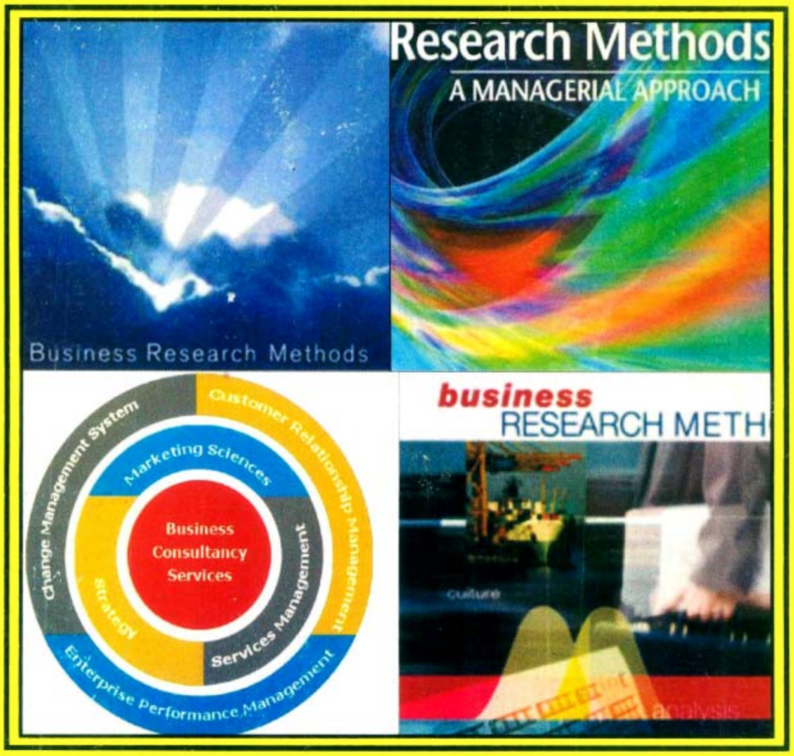
इस पाठ्यसामग्री को निम्नानुसार दो भागो में विभक्त कर के अध्ययन करना होगा :

Semester-III
Semester-III में शोध प्रविधि के पाठ्यक्रम में विद्यार्थियों को MCOMR-01 के अंतर्गत इकाई संख्या 1 से 10 तक का अध्ययन करना होगा I
Semester-IV
Semester-IV में शोध प्रविधि के पाठ्यक्रम में विद्यार्थियों को MCOMR-02 के अंतर्गत इकाई संख्या 11 से 20 तक का अध्ययन करना होगा I

M.COM-05

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा



शोध प्रविधि

M.COM- 05

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

शोध प्रविधि

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

अध्यक्ष

प्रो. (डॉ.) नरेश दाधीच
कुलपति
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा (राजस्थान)

संयोजक / सदस्य

संयोजक

डॉ. एम.एल. जैन 'मणि'
(पूर्व उपप्राचार्य, विश्वविद्यालय वाणिज्य महाविद्यालय, जयपुर)
परामर्शदाता -वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

सदस्य

- **प्रो. (डॉ.) गिरधर सोरल**
  आचार्य एवं विभागाध्यक्ष (ए.बी.एस.टी.)
  एम.एल. सुखाड़िया विश्वविद्यालय, उदयपुर
- **प्रो. (डॉ.) एन.डी. माथुर**
  ई.ए.एफ़.एम. विभाग
  राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
- **प्रो. (डॉ.) गोविन्द पारीक**
  उप प्राचार्य, वाणिज्य महाविद्यालय
  राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
- **प्रो. (डॉ.) पी.के. शर्मा**
  प्रोफेसर, प्रबन्ध अध्ययन विभाग
  वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा
- **डॉ. राजेश कोठारी**
  निदेशक, पोद्दार इंस्टीट्यूट ऑफ मैनेजमेन्ट
  राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
- **डॉ. आर.एस. अग्रवाल**
  वरिष्ठ व्याख्याता ए.बी.एस.टी.
  राजकीय एस.डी. कॉलेज, ब्यावर

संपादन एवं पाठ-लेखन

संपादक

प्रो. (डॉ.) श्याम गोपाल शर्मा
विभागाध्यक्ष, ए.बी.एस.टी. विभाग
राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

पाठ लेखक

- **डॉ. सीमा अग्रवाल** (इकाई संख्या 1,2)
  व्याख्याता
  कनोडिया महाविद्यालय, जयपुर
- **डॉ. बीना शर्मा** (इकाई संख्या 3)
  व्याख्याता
  खण्डेलवाल वैश्य पी.जी. गर्ल्स कॉलेज, जयपुर
- **डॉ.(श्रीमती) मीनू माहेश्वरी** (इकाई संख्या4,5,8,14,15)
  आई.सी.डबल्यू.ए. एवं सहायक प्रोफेसर
  कोटा विश्वविद्यालय कोटा (राज.)
- **डॉ. एम.सी. गुप्ता** (इकाई संख्या 6,7)
  सहायक प्रोफेसर
  विश्वविद्यालय वाणिज्य महाविद्यालय, जयपुर
- **डॉ. एस.के. गर्ग** (इकाई संख्या 9)
  व्याख्याता
  तोदी महाविद्यालय, लक्ष्मनगढ़, सीकर
- **डॉ. प्रेरणा जैन** (इकाई संख्या 10,11)
  व्याख्याता
  राजकीय महाविद्यालय, अजमेर
- **डॉ. मनीष जैन** (इकाई संख्या 12,13)
  व्याख्याता
  एस.एस.जैन सुबोध पी.जी. महाविद्यालय, जयपुर
- **डॉ. अशोक गुप्ता** (इकाई संख्या 16,17,18)
  वरिष्ठ व्याख्याता, ए.बी.एस.टी. विभाग
  राजकीय वाणिज्य महाविद्यालय, कोटा
- **प्रो. (डॉ.) गोविन्द पारीक** (इकाई संख्या 19,20)
  उप प्राचार्य, वाणिज्य महाविद्यालय
  राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

अकादमिक एवं प्रशासनिक व्यवस्था

प्रो.(डॉ.) नरेश दाधीच	**प्रो. (डॉ.) एम. के. घड़ोलिया**	**योगेन्द्र गोयल**
कुलपति	निदेशक(अकादमिक)	प्रभारी
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा	संकाय विभाग	पाठ्य सामग्री उत्पादन एवं वितरण विभाग

पाठ्यक्रम उत्पादन

योगेन्द्र गोयल
सहायक उत्पादन अधिकारी,
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

उत्पादन - मार्च, 2010

M.COM-05

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

अनुक्रमणिका

शोध प्रविधि

इकाई सं.	इकाई का नाम	पृष्ठ संख्या
इकाई -1	व्यावसायिक शोध	6–18
इकाई -2	शोध प्रविधि	19–30
इकाई -3	समंकों का संग्रहण - प्राथमिक एवं द्वितीयक	31–57
इकाई -4	निदर्शन प्रविधियाँ	58–77
इकाई -5	मापन एवं मापनी प्रविधियाँ	78–94
इकाई -6	सांख्यिकीय समंकों का सम्पादन	95–115
इकाई -7	समंकों की चित्रमय एवं बिन्दुरेखीय प्रदर्शन	116–144
इकाई -8	केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप	145–184
इकाई -9	विचरण के माप एवं विषमता	185–229
इकाई -10	प्रतीपगमन विश्लेषण	230–266
इकाई -11	सह-सम्बन्ध	267–307
इकाई -12	कालश्रेणी-विश्लेषण	308–331
इकाई -13	सूचकांक	332–356
इकाई -14	प्रायिकता एवं प्रायिकता नियम	357–385
इकाई -15	प्रायिकता बंटन	386–407
इकाई -16	परिकल्पना परीक्षण - I	408–425
इकाई -17	परिकल्पना परीक्षण - II	426–442
इकाई -18	प्रसारण विश्लेषण	443–459
इकाई -19	शोध कार्य की रिपोर्ट तैयार करना	460–474
इकाई -20	ग्रंथ सूची एवं सन्दर्भिका	475–490
	लोगारिथम आदि	491–504

इकाई-1: व्यावसायिक शोध (Business Research An Introduction)

इकाई की रूपरेखा :

1.1 उद्देश्य
1.2 प्रस्तावना
1.3 अर्थ
1.4 विशेषताएँ
1.5 शोध के प्रकार
1.6 सारांश
1.7 स्व-परख प्रश्न

1.1 उद्देश्य (Objective)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप निम्न से अवगत हो पायेंगे:-

- व्यावसायिक शोध का अर्थ एवं विशेषताएं।
- व्यावसायिक शोध के उद्देश्य ।
- व्यावसायिक शोध के प्रकार ।
- शोध के विभिन्न चरण ।

1.2 प्रस्तावना (Introduction)

वर्तमान युग शोध व सांख्यिकी का युग है । जीवन के प्रत्येक पहलू तथा ज्ञान-विज्ञान के प्रत्येक क्षेत्र में शोध का प्रयोग निरन्तर बढ़ता जा रहा है । संसार में अनेक प्राणी हैं परन्तु मानव ही एक ऐसा प्राणी है जो प्रारम्भ से ही अपने वातावरण के प्रति जागरूक एवं जिज्ञासु रहा है। वह निरन्तर खोज करता रहा कि किन परिस्थितियों में, किन कारणों से कौन से परिणाम निकलते हैं। विभिन्न तथ्य किन समस्याओं को विकसित करते हैं और उन समस्याओं का निदान कैसे किया जा सकता है? अर्थव्यवस्था के विभिन्न पहलुओं के आपसी प्रभाव को समझने के लिए भी व्यावसायिक शोध अति आवश्यक है।

1.3 अर्थ (Meaning)

जीवन को सहज बनाने के लिए मनुष्य ने प्रारम्भ में अपनी आवश्यकताओं की पूर्ति के लिए नई खोज तथा आविष्कार किये। मूलभूत आवश्यकताओं की खोज के बाद मनुष्य अपनी जिज्ञासु प्रवृत्ति के कारण निरन्तर शोध व अनुसंधान के कार्यों में लगा रहा। शोध एक अनवरत प्रक्रिया है चूँकि मनुष्य शोध करता है जिसकी जिज्ञासा अन्तहीन है अत:शोध भी निरन्तर चलने वाली प्रक्रिया है। व्यावसायिक शोध अर्थात व्यवसाय व

अर्थव्यवस्था से जुड़े हुए प्रश्नों के जवाब ढूँढना तथा समस्याओं के कारण पता करना एवं उनके सभी संभावित निदानों को प्रकाश में लाना है ।

व्यावसायिक शोध का अर्थ व्यवसाय के नये तथ्यों को खोजना या पुराने तथ्यों की पुष्टि और जांच करना है।

"दी एडवांस्ट लर्नर्स डिक्शनरी" में शोध को इस प्रकार परिभाषित किया गया है- "ज्ञान की किसी भी शाखा में ध्यानपूर्वक नए तथ्यों की खोज के लिए किये गये अन्वेषण या परीक्षण को शोध कहते हैं।"

"लुण्डबर्ग' ने शोध की परिभाषा में इसकी प्रक्रिया के प्रमुख चरणों का वर्णन निम्नलिखित शब्दों में किया है:-

"अवलोकित सामग्री का सम्भावित वर्गीकरण, साधारणीकरण एवं सत्यापन करते हुए पर्याप्त कर्म विषयक और व्यवस्थित पद्धति शोध कहलाती है।"

रेडमन तथा मोरी के शब्दों में "नवीन ज्ञान प्राप्ति के व्यवस्थित प्रयत्न को हम शोध कहते हैं।"

उपर्युक्त परिभाषाओं से स्पष्ट हो जाता है कि शोधकर्ता के निरन्तर प्रयोग तथा प्रयत्न से जो प्रक्रिया ज्ञान में वृद्धि करे वह शोध कहलाती है। शोध नूतन ज्ञान की प्राप्ति तथा उपलब्ध ज्ञान की व्याख्या करता है। शोध द्वारा किसी एक निश्चित समस्या का वस्तुपरक तथा क्रमबद्ध तरीके से हल खोजने का प्रयत्न किया जाता है।

1.4 विशेषताऐं (Characteristics)

व्यावसायिक शोध में व्यावसायिक घटनाओं के सम्बन्ध में सत्य प्रमाणित और आनुभाविक तथ्यों को वैज्ञानिक प्रणालियों से एकत्र किया जाता है तथा उनका वर्गीकरण, सारणीयन, विश्लेषण तथा निष्कर्ष निकाला जाता है। अध्ययन के प्रारम्भ में जो परिकल्पना लेकर चलते है उसकी जांच की जाती है। पुराने व्यावसायिक सिद्धान्तों के सत्यापन की जाँच की जाती है तथा व्यावसायिक शोध नये सिद्धान्तों का निर्माण करती है। तथ्य तथा सामग्री संकलन के लिए प्राथमिक तथा द्वितीयक स्रोतों का प्रयोग किया जाता है। अवलोकन साक्षात्कार अनुसूची प्रश्नावली सर्वेक्षण आदि सामग्री संकलन के स्रोत हैं। शोध की निम्न विशेषताऐं हैं जो इसकी प्रकृति को भी स्पष्ट करती हैं।

1. **परिकल्पना का निर्माण तथा जाँच (Formation and Testing of Hypothesis)-** शोध का प्रारम्भ परिकल्पना के निर्माण से शुरू होता है। व्यावसायिक शोध में सर्वप्रथम व्यावसायिक व अर्थव्यवस्था सम्बन्धित परिकल्पनाओं की जाँच की जाती है।
2. **कार्यकारण सम्बन्ध का अध्ययन (Study of Cause-effect relationship)-** व्यावसायिक शोध में परिकल्पना अथवा अध्ययन की समस्या से सम्बन्धित तथ्यों के परस्पर कारण-प्रभाव सम्बन्ध का अध्ययन किया जाता है। अर्थव्यवस्था के सन्दर्भ में शोध के विषय की जाँच कारण-प्रभाव के परिप्रेक्ष्य में की जाती है।
3. **सिद्धान्तों की प्रासंगिकता (Relevance of theory)-** शोध कार्य में पूर्वस्थापित सिद्धान्तों की प्रासंगिकता की जाँच की जाती है। सिद्धान्तों की स्थापना शोध निर्णयों व

सिफारिशों के आधार पर की जाती है। शोध कार्य के दौरान ही इन सिद्धान्तों की जाँच नवीन तथ्यों द्वारा समय-समय पर उनकी प्रमाणिकता, विश्वसनीयता तथा सत्यता के लिए होती रहती है।

4. **तथ्यों का विश्लेषण (Analysis of facts)-** सिद्धान्तों की तरह तथ्यों का विश्लेषण भी शोध कार्य का एक अंग है। व्यावसायिक शोध में अर्थव्यवस्था, बाजार मांग-पूर्ति, व्यावसायिक संरचना व संगठन सम्बन्धित नवीन तथ्यों की खोज की जाती है तथा समय-समय पर इन तथ्यों का विश्लेषण किया जाता है।
5. **अवधारणाओं की रचना (Creation of assumption)-** व्यावसायिक शोध में प्रयोगों द्वारा सिद्ध तथ्यों के आधार पर व्यवसाय व अर्थव्यवस्था सम्बन्धी अवधारणाओं की रचना की जाती है जिनके आधार पर नये व्यावसायिक आयामों की शुरूआत की जाती है।
6. **निश्चित प्रविधि (Certain process)-** व्यावसायिक शोध भी अन्य शोधों की तरह एक निश्चित प्रविधि के तहत की जाती है। इस प्रविधि में सर्वप्रथम परिकल्पना का निर्माण किया जाता है फिर जरूरी तथ्यों का संकलन कर उनका वर्गीकरण किया जाता है तत्पश्चात संमकों का विश्लेषण कर निष्कर्ष निकाला जाता है।
7. **निष्कर्ष व सुझाव (Conclusion & Suggestion)-** व्यावसायिक शोध के विषय पर कार्य करने के पश्चात जो निष्कर्ष निकलता है उसके आधार पर शोध विषय सम्बन्धी सुझाव दिये जाते हैं जो व्यावसायिक जगत में बहु त उपयोगी सिद्ध हो सकते हैं।

व्यावसायिक शोध के उद्देश्य (Objects of business research)

व्यावसायिक शोध का मूलभूत उद्देश्य व्यावसायिक जगत की तत्कालीन घटनाओं व समस्याओं को समाधान व नवीनता प्रदान करना होता है। व्यवसाय की योजनाओं को नियंत्रित करने के प्रयास में अनवरत शोध की जाती है। शोध के उद्देश्यों को विस्तरित रूप से समझने के लिए हम इन्हें तीन भागों में बांट सकते हैं :

- सैद्धान्तिक उद्देश्य
- व्यावहारिक उद्देश्य
- व्यक्तिगत उद्देश्य

1. **सैद्धान्तिक उद्देश्य-** शोध मूलरूप से ज्ञान की वृद्धि का साधक है। ज्ञान प्राप्ति के लिए शोध में तथ्यों, घटनाओं तथा समस्याओं के विषय की जानकारी एकत्रित की जाती है। शोध का सैद्धान्तिक उद्देश्य पुराने तथ्यों का सत्यापन, नये तथ्यों की खोज, नये सिद्धान्तों का निर्माण तथा परीक्षण करना होता है। व्यावसायिक शोध के निम्न मुख्य सैद्धान्तिक उद्देश्य हो सकते हैं :
   1. शोध का उद्देश्य आवश्यक तथ्यों व संमकों का संकलन करना, उनका वर्गीकरण कर के संक्षिप्तीकरण करना होता है।

2. व्यावसायिक शोध में पुराने संमकों व तथ्यों की सार्थकता जाँची जाती है तथा नये संमकों व तथ्यों की जानकारी प्राप्त की जाती है।

3. शोध का उद्देश्य पूर्व स्थापित सिद्धान्तों की प्रासंगिकता की जाँच करना होता है।

4. व्यावसायिक शोध का उद्देश्य अर्थव्यवस्था तथा व्यावसायिक जगत में घटना एवं तथ्यों के मध्य कार्य, कारण व सम्बन्ध का पता लगाना भी है।

5. शोध का सैद्धान्तिक उद्देश्य शोध की दिशा निर्धारण करना भी है।

1. **व्यावहारिक उद्देश्य-** मनुष्य अपनी जिज्ञासु प्रवृत्ति एवं ज्ञानार्जन हेतु सैद्धान्तिक उद्देश्य के लिए शोध करता है परन्तु यदि शोध सिर्फ सैद्धान्तिक ज्ञान वृद्धि के लिए किया जाये एवं उसका व्यावहारिक उपयोग कुछ ना हो तो शोध अर्थहीन हो जायेगा। व्यावसायिक शोध के निम्न व्यावहारिक उद्देश्य हो सकते हैं :
   1. प्रतिदिन बदलती अर्थव्यवस्था तथा व्यावसायिक परिस्थितियों में यह अनिवार्य है कि शोध के द्वारा नई जानकारी प्राप्त की जाए।
   2. आर्थिक व्यवस्था को समझने के लिए एवं आर्थिक घटनाओं के प्रभाव को जानना शोध का एक महत्वपूर्ण व्यावहारिक उद्देश्य है ।
   3. शोध के द्वारा सर्वोत्कृष्ट विकल्प खोजा जाता है ।
   4. व्यवसाय की भावी योजनाओं का निर्माण करना भी शोध का एक उद्देश्य है ।
   5. व्यवहार में शोध द्वारा वर्तमान आर्थिक व व्यावसायिक समस्याओं को सुलझाने में सहायता की जाती है ।
   6. शोध राजकीय व आर्थिक नीतियों को आधार प्रदान करती है ।
   7. व्यावसायिक शोध के द्वारा व्यावहारिक आवश्यकतानुसार नये-नये सिद्धान्तों की खोज की जाती है ।
   8. शोध व्यवसाय तथा उद्योग की क्रियात्मक तथा नियोजन सम्बन्धी समस्याओं के समाधान करने में सहायक है ।

3. व्यक्तिगत उद्देश्य- शोध करने वाले व्यक्ति को शोधकर्ता कहा जाता है । प्राय: शोधकर्ता अपने व्यक्तिगत कारण या जरूरत के कारण भी शोध करता है । प्रतियोगिता के इस युग में व्यक्ति अपने निम्नलिखित कारणों से शोध कर सकता है :
   1. वातावरण में उपलब्ध अवसरों को हासिल करने हेतु मनुष्य स्वयं को अधिक से अधिक जानकारी से अवगत रखने के लिए शोध करता है ।
   2. रोजगार का अच्छा साधन पाने के लिए तथा व्यक्ति अपने विषय में श्रेष्ठता हासिल करने के लिए शोध करता है ।
   3. अपने समकक्ष लोगों से उपर उठने तथा उन्नति की ओर अग्रसर होने के लिए व्यक्ति किसी विषय पर शोध करता है ।
   4. कई जिज्ञासु व धुनी व्यक्ति किसी समस्या या कारण की तह तक पहुंचने के लिए शोध करते हैं ।
   5. ऐसी कई समस्याऐं जिनका समाधान नहीं हैं तथा कई प्रश्न जिनके उत्तर ज्ञात नहीं हैं उन्हें चुनौती के रूप में स्वीकार कर के भी शोध की जाती है ।
   6. रचनात्मक प्रवृत्ति तथा प्रयोगात्मक सन्तुष्टि जैसे मनोवैज्ञानिक कारण व्यक्ति को शोध करने के लिए प्रेरित करते हैं ।

7. कुछ व्यक्ति नाम कमाने के उद्देश्य से शोध करने को अभिप्रेरित होते हैं ।
8. कई लोग समाज सेवा के दृष्टिकोण से शोध व अनुसंधान करते हैं ।
9. कई बार राजकीय निर्देशों के कारण शोध करना अनिवार्य होता है ।
10. उत्पादन अपने उत्पाद की गुणवत्ता को अन्य समान उत्पादों से बेहतर करने के लिए भी शोध करवाते है ।

1.5 शोध के प्रकार (Types of Research)

व्यवसाय व अर्थव्यवस्था के विभिन्न पक्षों का अध्ययन व्यावसायिक शोध के द्वारा किया जाता है । व्यवसाय के विभिन्न पहलुओं, समस्याओं तथा घटनाओं की भिन्नता के आधार पर शोध के निम्न प्रकार हो सकते है:-

1. **मौलिक शोध (Basic/Pure Research)-** मौलिक शोध का सम्बन्ध किसी समस्या के समाधान या हल ढूँढने से नहीं होता है, यह तो केवल ज्ञान के विकास के लिए किया गया शोध होता है । नये सिद्धान्तों का सूत्रपात अथवा पुराने सिद्धान्तों की समीक्षा तथा संशोधन मौलिक शोध का विषय है । मौलिक व्यावसायिक शोध का प्रमुख उद्देश्य व्यावसायिक अध्ययन के क्षेत्र, परिप्रेक्ष्य, विषय सामग्री आदि को निश्चित करना है । मौलिक शोध में यह भी देखा जाता है कि क्या परिवर्तित परिस्थितियों मे पुराने सिद्धान्त उचित हैं अथवा नहीं। यदि पुराने सिद्धान्त वर्तमान सन्दर्भ में ठीक न हों तो उन्हें अस्वीकृत कर नये सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया जाता है । मौलिक शोध में ज्ञान वृद्धि के उद्देश्य से सामग्री व संमकों का संग्रहण किया जाता है । तथा आगे के अनुसंधान की आधारशिला बनाया जाता है।
2. **व्यावहारिक शोध (Applied Research)-** व्यवसाय जगत तथा अर्थव्यवस्था से सम्बन्धित समस्याओं के समाधान के लिए जो शोध की जाती है वह व्यावहारिक शोध कहलाती है । व्यावहारिक शोध प्राय: वास्तविक समस्याओं से प्रेरित होती है । व्यावहारिक शोध में मौलिक शोध से प्राप्त परिणामों को वास्तविक घटनाओं तथा परिस्थितियों पर लागू कर प्राप्त परिणामों के आधार पर निष्कर्ष निकाले जाते हैं । **फेस्टिंगर तथा काज** के अनुसार "जब तथ्यों का संकलन उद्योग या प्रशासन के सन्दर्भ में किसी उपयोगितावादी से किया दृष्टिकोण जाता है तथा जिसकी नीति-निर्माताओं को आवश्यकता होती है तब इसे व्यावहारिक शोध कहा जा सकता है ।
   व्यावहारिक शोध उपयोगितावादी होता है । यह व्यावहारिक होता है जिसका तात्पर्य है कि इसके द्वारा प्राप्त ज्ञान का उपयोग समस्याओं के समाधान में सीधा किया जा सकता है । यह समस्याओं के कारणों, लक्षणों, नियमों आदि को समझने मे सहायता करता है, इसके द्वारा आर्थिक नियोजन, नीति निर्धारण, आर्थिक व व्यावसायिक समस्याओं को समझने में सहायता प्रदान की जाती है ।
3. **क्रियात्मक शोध (Action Research)-** किसी समस्या या घटना विशेष पर आधारित शोध क्रियात्मक शोध कहलाती है । इसके द्वारा शोधकर्ता अपनी समस्या का वैज्ञानिक तरीके से अध्ययन करते है जिससे अपने निर्णयों व क्रियाओं को दिशा दे सके तथा

आवश्यकतानुसार उसमें परिवर्तन एवं सुधार कर सकें । क्रियात्मक शोध अर्थव्यवस्था की तात्कालिक घटनाओं व समस्याओं से सम्बन्धित होती है । यह व्यावसायिक व आर्थिक समस्याओं के अध्ययन के लिए वैज्ञानिक विधियों का प्रयोग करके कारकों का पता लगाती है तथा उनको दूर करने के लिए उपचारात्मक उपाय बताती है । क्रियात्मक शोध दिन-प्रतिदिन की सामाजिक, आर्थिक, राजनैतिक समस्याओं के समाधान के लिए किया जाता है । इसलिए यह शोध बहुमुखी होती है । अत: विभिन्न समस्याओं के समाधान में इसकी उल्लेखनीय उपयोगिता देखी जा सकती है ।

4. **अन्वेषणात्मक शोध (Exploratory Research)** जिन क्षेत्रों में अध्ययन नहीं हुए हैं, उनके सम्बन्ध में अध्ययन का कार्य इसी शोध के द्वारा प्रारम्भ होता है, इसीलिए इसे अन्वेषणात्मक शोध कहते हैं । जब शोध का उद्देश्य कार्य-कारण सम्बन्ध की खोज करना होता है तब यह शोध की जाती है । इसका सम्बन्ध नवीन तथ्यों की खोज से है। जहाँ अर्जित ज्ञान सीमित है तथा प्रयोगात्मक अनुसंधान सम्भव नहीं है वहां अन्वेषणात्मक शोध की जाती है । यह विवरणात्मक शोध की प्रथम सीढ़ी है । यह शोध समस्याओं के कारण -प्रभाव सम्बंध स्पष्ट करने के साथ-साथ विषय से भी परिचित करवाती है ।

5. **विवरणात्मक शोध (Descriptive Research)** विवरणात्मक शोध में अध्ययन की समस्या या विषय के सम्बंध में तथ्य, प्रमाणित तथा यथार्थ सामग्री एकत्र करके उनका क्रमबद्ध, तार्किक तथा व्यवस्थित विवरण तैयार किया जाता है । इस शोध में प्राथमिक संमकों का संकलन, अवलोकन, साक्षात्कार, प्रश्नावली और अनुसूची के माध्यम से किया जाता है । इस शोध के लिए विषय सामग्री की पूर्ण जानकारी होना आवश्यक है जो कि यथार्थ व तर्क संगत होनी चाहिए, तभी इसके द्वारा प्राप्त निष्कर्ष लक्ष्य प्राप्ति में सहायक सिद्ध होंगे । प्राप्त विश्वसनीय तथ्यों एवं संमकों का विश्लेषण कर प्राप्त परिणामों से नई जानकारी तथा नये अर्थ का निरूपण करना इस शोध का विषय है । अत: ऐसे शोध का चुनाव करने से पूर्व यह ध्यान रखना होगा कि इसके लिए पर्याप्त समंक तथा सामग्री उपलब्ध हो । एकत्रित तथ्यों तथा समंकों को उनके गुणों तथा प्रकृति के आधार पर अलग-अलग समूहों में वर्गीकृत किया जाता है । समानता के आधार पर वर्ग बनाए जाते हैं । उन वर्गों को क्रम से सारणी के रूप में वर्गीकृत किया जाता है,तथ्यों के गुण-सम्बन्ध को देखने के लिए सांख्यिकी का प्रयोग किया जाता है । अन्त में तथ्यों, समंकों व एकत्रित सूचना को क्रम से विवरणात्मक रुप में लेखबद्ध कर दिया जाता है।

6. **निदानात्मक शोध (Diagnostic Research)-** यह शोध किसी समस्या विशेष के समाधान की खोज के लिए की जाती है । इसमे सर्वप्रथम समस्या के कारणों का गहनता से अध्ययन किया जाता है, जिसके लिए समंकों का संकलन, सारणीयन, विश्लेषण तथा निर्वचन किया जाता है । समस्या के शीघ्र समाधान हेतु, अध्ययन के समय जिन कारणों का पता चलता है उनका तत्कालीन परिस्थितियों से तुलनात्मक

विवेचन किया जाता है । इससे प्राप्त परिणामों से समाधान ढूँढने में मदद मिलती है । निदानात्मक शोध में समस्या को किस तरह सुलझाया जाये इसका वर्णन एवं विश्लेषण प्रस्तुत किया जाता है ।

7. **प्रयोगात्मक शोध (Experimental Research)-** यह ऐसी शोध है जो नियंत्रित परिस्थितियों में की जाती है इस शोध में प्रयोग का विशेष महत्व होता है, प्रयोग से तात्पर्य है नियंत्रित निश्चित परिस्थितियों में कारण-प्रभाव का अवलोकन करना । इस शोध के द्वारा विभिन्न कारकों के प्रभाव का पता वैज्ञानिक पद्धति से लगाया जाता है। प्रयोगात्मक शोध परिकल्पना की सत्यता, प्रामाणिकता तथा विश्वसनीयता की जाँच करने की प्रक्रिया है । इसमें आनुभाविक तथ्यों को एकत्र किया जाता है जिनमें परस्पर कारण-प्रभाव सम्बंध स्पष्ट तथा सुनिश्चित होते हैं । इसमें दो समान समूहों को लेकर एक समूह को पूर्णत: नियंत्रित रखा जाता है जबकि दूसरे समूह को बाध्य कारणों से प्रभावित करने के लिए स्वतन्त्र रखा जाता है, जिससे परिवर्तन लाने वाले कारणों का ज्ञान प्राप्त हो जाता है ।

8. **मूल्यांकनात्मक शोध (Evaluative Research)-** जब नियोजित कार्यक्रम या प्रस्ताव सम्पन्न हो जाते है तब उनका मूल्यांकन यह पता करने के लिए किया जाता है कि वास्तविक कार्यक्रम का नियोजित प्रस्ताव से कितना विचरण रहा है । इस उद्देश्य की पूर्ति मूल्यांकनात्मक शोध करती है । अनेक सरकारी, अर्द्ध-सरकारी तथा गैर-सरकारी संस्थाओं अपने क्रियान्वयन का समय-समय पर मूल्यांकन करवाती है यह देखने के लिए कि क्या वे नियोजित क्रिया के अनुरूप सफल हो रहे हैं या नहीं । मूल्यांकन शोध के द्वारा कार्यक्रमों के लक्ष्यों तथा उपलब्धियों का अन्तर एवं अन्तर के कारण ज्ञात किये जाते हैं । अन्तर के कारणों का निदान कर भविष्य में होने वाले उसी तरह के कार्यक्रम को सफल बनाने की कोशिश की जाती है ।

9. **परिमाणात्मक शोध (Quantitative Research)-** अर्थव्यवस्था तथा व्यावसायिक जगत में जब ऐसे तथ्य होते हैं जिनका मापन संख्या के रुप में किया जाता है, वह शोध परिमाणात्मक शोध कहलाती है । किसी व्यवसाय की कार्यशील पूँजी का अध्ययन, किसी उद्योग की कारखाना लागत का अध्ययन, किसी कम्पनी में कर्मचारियों के वेतन का अध्ययन आदि ऐसे विषय हैं जिन्हें हम समंकों व्यक्त कर सकते हैं । इनका अध्ययन परिमाणात्मक शोध कहलाती है । व्यावसायिक शोध अधिकांशतया परिमाणात्मक होती है ।

10. **गुणात्मक शोध (Qualitative Research)-** जब शोध का विषय आंकड़ो पर निर्भर नहीं हो तथा उसका विश्लेषण भी आंकडों में नहीं किया जा सकता हो तो वह शोध गुणात्मक शोध कहलाती है । शोध के विषय में संख्याओं की बजाय गुणों की बाहुल्यता हो तो उस शोध को गुणात्मक शोध कहा जाता है जैसे-उपभोक्ता व्यवहार का अध्ययन, कर्मचारियों की कर्मठता का अध्ययन, प्रबंधकों की नैतिकता का अध्ययन, उत्पाद की गुणवत्ता का अध्ययन आदि।

शोध के विभिन्न चरण (Various steps of Research)

शोध प्रक्रिया के विभिन्न चरणों के अन्तर्गत किसी शोध कार्य को सम्पन्न करने के लिए उन्हें क्रमबद्ध तरीके से सम्मिलित किया जाता है । जैसे-

(1) समस्या का निर्धारण;

(2) साहित्य सर्वेक्षण;

(3) परिकल्पना का निर्माण;

(4) अनुसन्धान-अभिकल्प तैयार करना;

(5) समंकों का संग्रहण एवं सम्पादन;

(6) प्रतिदर्श अभिकल्प का निर्धारण;

(7) समंकों का वर्गीकरण एवं विश्लेषण;

(8) परिकल्पना परीक्षण;

(9) सामान्यीकरण व निर्वचन तथा

(10) शोध कथासार (Synopsis) तैयार करना ।

यहाँ पर उक्त चरणों को संक्षिप्त में समझाया जा रहा है ।

(1) समस्या का निर्धारण (Formulation of Problem)- समस्त वैज्ञानिक शोध समस्या के निर्धारण से आरम्भ होते हैं सर्वप्रथम किसी कठिनाई का अनुभव किया जाता है । जिससे समस्या की पहचान होती है । इसके बाद समस्या का निर्धारण होता है । यह एक कठिन कार्य है लेकिन किसी भी शोधकर्ता को इस चुनौती को सर्वप्रथम स्वीकार करना पड़ता है। **समस्याएँ तीन प्रकार की हो सकती हैं- (i) आनुभविक समस्याएँ** (Empirical Problem); **(ii) विश्लेषणात्मक समस्याएँ** (Analytical Problem); **(iii) मानवीय समस्याएँ** (Normative Problem); आनुभाविक समस्याओं के समाधान तथ्यात्मक अनुभव के आधार पर ढूँढे जाते हैं । विश्लेषणात्मक समस्याएँ अवधारणाओं से सम्बन्धित होती हैं जबकि मानवीय समस्याएँ मूल्यांकन निर्णयों पर निर्भर होती हैं । मानवीय समस्याओं के दो रूप हो सकते हैं- एक मूल्यांकनात्मक - उदाहरण के लिए भारत में चाय उद्योग का स्तर श्रेष्ठ है, तथा दो निर्देशात्मक- उदाहरण के लिए इस्पात उद्योग की उत्पादकता बढ़नी चाहिए ।

(2) साहित्य सर्वेक्षण (Survey of Literature) समस्या का निर्धारण होने के पश्चात् एक शोधकर्ता को समस्या से सम्बन्धित विषय पर उपलब्ध विषय सामग्री तथा पुस्तकों, पत्रिकाओं, प्रतिवेदनों तथा अन्य पाठ्य-सामग्री का गहन अध्ययन करना चाहिए । इसी प्रकार यदि इस विषय से सम्बन्धित कोई शोध प्रकाशित अथवा अप्रकाशित हो तो उनका भी विषद् अध्ययन करना चाहिए । इसके बिना शोधकर्ता अपने उद्देश्य में सफल नहीं हो पाएगा । आजकल इन्टरनेट की सुविधाएँ भी हर जगह पर उपलब्ध है जिनकी सहायता से देश तथा विदेश में अध्ययन विषय से सम्बन्धित पर्याप्त साहित्य उपलब्ध है । अत: शोधकर्ता को इसकी अधिक सहायता लेकर उच्च

कोटि का अध्ययन करके सम्बन्धित विषय सामग्री को अपने शोध में सम्मिलित कर उसे उपयोगी बनाना चाहिए ।

(3) परिकल्पना का निर्माण (Formulation of Hypotheses)- वैज्ञानिक अध्ययन में परिकल्पनाओं का निर्माण बहुत आवश्यक है । परिकल्पना को प्राकल्पना, पूर्व-कल्पना, उपकल्पना आदि नामों से भी जाना जाता है । यह एक काम सामान्यीकरण है जिसकी शोध के दौरान जाँच की जाती है । यह सत्य भी सिद्ध हो सकती है अथवा असत्य भी सिद्ध हो सकती है । गुडे एवं हाट के शब्दों में "परिकल्पना ऐसी मान्यता है जिसका परीक्षण करने के लिए प्रयोगात्मक जाँच की जाती है ।" बोगार्डस के अनुसार, "परीक्षित किये जाने वाले प्रस्तावों को परिकल्पना कहा जाता है ।" वेबस्टर्स न्यू इन्टरनेशनल डिक्शनरी आफ इंग्लिश लैंग्वेज के अनुसार, "परिकल्पना एक विचार, दशा या सिद्धान्त होती है, जो सम्भवत: बिना किसी विश्वास के स्वीकार कर ली जाती है जिससे कि उसके तार्किक परिणाम निकाले जा सकें और ज्ञात या निर्धारित किए जाने वाले तथ्यों की सहायता से इस विचार की सत्यता की जाँच की जा सके ।" इस प्रकार तात्कालिक सामान्यीकरण अथवा निष्कर्ष को परिकल्पना कहते हैं । इसकी आरम्भिक अवस्था मे यह कल्पना, अनुमान अथवा अन्त: प्रेरणा हो सकती है लेकिन अन्तत: यह शोध की आधारशिला है । एक परिकल्पना स्पष्ट, सरल, उपलब्ध तकनीक से सम्बन्धित अनुभव सिद्ध, वस्तुनिष्ठ तथा विषय के निर्धारित सिद्धान्तों के अनुरूप होनी चाहिए ।

(4) अनुसन्धान अभिकल्प तैयार करना (Preparation of Research Design)- शोध कार्य करने की योजना या शोध प्रक्रिया की रूप रेखा को ही अनुसन्धान अभिकल्प अथवा शोध संरचना कहते है । एफ. एन. कलिंजर के शब्दों में अनुसन्धान अभिकल्प अन्वेषण की योजना संरचना एवं रणनीति है जिसकी रचना इस प्रकार की जाती है कि शोध प्रश्नों के उत्तर प्राप्त हो सकें तथा प्रसारण को नियन्त्रित किया जा सके । यह एक ऐसी सम्पूर्ण रूपरेखा है जिसमें वे सभी बातें होती हैं जो एक शोधकर्ता परिकल्पनाओं के निर्माण से लेकर समंकों के अन्तिम विश्लेषण तक करता है।

अनुसन्धान अभिकल्प में शोध का विषय, अध्ययन की प्रकृति, विषय का परिचय, उद्देश्य, अवधारणाओं, चरों एवं परिकल्पनाओं का विवरण, समयावधि, समंक एकत्रीकरण का आधार व प्रविधियाँ, वर्गीकरण, सारणीयन, विश्लेषण तथा निर्वचन तकनीकों का विवरण, शोध सीमाएँ तथा सन्दर्भ ग्रन्थों की सूची आदि विषयवस्तु सम्मिलित होती है । एक अनुसन्धान अभिकल्प लचीला होना चाहिए जिससे उसे आवश्यकतानुसार संशोधित एवं परिवर्तित किया जा सके क्योंकि एक अनुसन्धान अभिकल्प को प्रभावित करने वाले घटक जिनके कारण एक अनुसंधान अभिकल्प में परिवर्तन आवश्यक हो जाते हैं, इस प्रकार हैं - जैसे समंकों की अपर्याप्तता, समयाभाव, साधनों की उपलब्धता, अनुसन्धानकर्ता की योग्यता तथा असामान्य कारक जैसे आर्थिक, राजनैतिक तथा प्राकृतिक घटनाएँ ।

5. **समंक संग्रहण एवं सम्पादन (Collection and Editing of Data)-** समंक संग्रहण एवं सम्पादन अनुसन्धान अभिकल्प में उल्लिखित महत्वपूर्ण कदम हैं । एक शोधकर्ता को यह निर्णय करना होता है कि उसके द्वारा प्रयोग किए जाने वाले समंकों की प्रकृति तथा स्रोत क्या होंगे । संकलित समंकों को सम्पादित करने की कौन सी रीति का प्रयोग किया जाएगा । समंकों के दो प्रकार के स्रोत होते हैं-प्राथमिक तथा द्वितीयक । प्राथमिक समंकों का प्रयोग किया जाए या द्वितीयक समंकों का प्रयोग किया जाए, यह अध्ययन की प्रकृति पर निर्भर करता है । समंक संग्रहण के लिए प्रश्नावली, साक्षात्कार, अनुसूची अथवा पत्र-पत्रिकाओं आदि का प्रयोग किया जा सकता है । समंकों का संग्रहण करने के पश्चात उनका संक्षिप्तीकरण करना होता है । इसके अन्तर्गत अनावश्यक समंकों की छँटनी कर दी जाती है तथा उनमें से आवश्यक समंकों को ही सारणियों में व्यवस्थित किया जाता है । अत: सारणीयन से पूर्व ही समंकों का शुद्धिकरण अथवा सम्पादन किया जाना आवश्यक ताकि संग्रहित समंक संग्रहणकर्ता के पूर्वाग्रह से ग्रसित न रहें ।
6. **प्रतिदर्श अभिकल्प का निर्धारण (Determining Sample Size)-** एक अनुसन्धानकर्ता के लिए यह सम्भव नहीं होता कि जिस विषय से सम्बन्धित शोध अध्ययन किया जा रहा है उसकी शत प्रतिशत इकाइयों का संग्रहण एव विश्लेषण कर सके । जब एक विषय से सम्बन्धित सभी इकाइयों का अध्ययन किया जाता है तो इसे संगणना विधि (Census Method) कहते हैं। यद्यपि संगणना विधि में शुद्धता अपेक्षाकृत अधिक होती है तथापि समय तथा धन की अपर्याप्तता के कारण एक शोधकर्ता के लिए संगणना विधि अव्यावहारिक है । यही कारण है कि एक शोधकर्ता अध्ययन के लिए प्रतिदर्श विधि का सहारा लेता है । इसे हेतु एक शोधकर्ता को प्रतिदर्श का चुनाव करना होता है जिसे प्रतिदर्श अभिकल्प का निर्धारण भी कहते हैं । जयपुर शहर की गरीबी रेखा से नीचे जीवनयापन करने वाले हजारों व्यक्तियों की आवास स्थिति का अध्ययन करते समय 500 ऐसे व्यक्तियों का चुनाव कर अध्ययन करना प्रतिदर्श अभिकल्प का एक उदाहरण है ।
7. **समंकों का वर्गीकरण एवं विश्लेषण (Classification and Analysis of Data)-** समंकों के संग्रहण के पश्चात् एक शोधकर्ता को समंकों का वर्गीकरण करना होता है । इसके पश्चात् वर्गीकृत समंकों को पंक्तियों तथा स्तम्भों में रख सारणियों के रूप में प्रस्तुत करना होता है । इनके आधार पर ग्राफ तथा चार्ट बनाए जाते हैं तथा समंकों का विभिन्न सांख्यिकीय तकनीकों के आधार पर विश्लेषण किया जाता है । विश्लेषण के लिए केन्द्रीय प्रवृत्तियों की माप,अपकिरण की माप, विषमता की माप, सह-सम्बन्ध विश्लेषण, प्रतीपगमन विश्लेषण, काल श्रेणी का विश्लेषण, विचरण विश्लेषण, काई-वर्ग परीक्षण, F परीक्षण, अनुपात विश्लेषण, प्रवृत्ति अनुपात इत्यादि तकनीकों का प्रयोग किया जाता है ।
8. **परिकल्पना परीक्षण (Hypothesis Testing)-** समंकों के विश्लेषण के आधार पर एक अध्ययनकर्ता द्वारा शोध विषय से सम्बन्धित निर्धारित परिकल्पनाओं का परीक्षण किया जाता है। या तो परिकल्पना स्वीकृत हो जाती है अथवा उसे अस्वीकृत कर दिया जाता है । व्यावसायिक शोध में किसी निश्चित परीक्षण के लिए एक से अधिक परिकल्पनाओं का

निर्माण किया जाता है, अत: यदि एक परिकल्पना अस्वीकृत होती है तो तथ्य सम्बन्धी वैकल्पिक परिकल्पना स्वीकार कर ली जाती है । शून्य परिकल्पना (Ho) में जिस प्राचल का दावा किया गया है उसे प्रतिदर्शज के आधार पर स्वीकार किया जाता है । इसके विपरीत यदि प्रतिदर्शज द्वारा प्राचल के पक्ष में गवाही नहीं दी जाती तो शून्य परिकल्पना को अस्वीकृत करने के साथ ही वैकल्पिक परिकल्पना (h_1) को स्वीकार कर लिया जाता है। वैकल्पिक परिकल्पना स्वीकृति का तात्पर्य प्राचल तथा प्रतिदर्शज में सार्थक अन्तर होना होता है । वैकल्पिक परिकल्पना के आधार पर एक बाहु परीक्षण (One Tail Test) अथवा द्विबाहु परीक्षण (Two Tail Test) के बारे में पता चलता है । परिकल्पना परीक्षण करते समय सार्थकता स्तर तथा निदर्शन बंटन के प्रारूप का निर्धारण भी दी गई मान्यताओं के अनुरूप करना आवश्यक है ।

9. सामान्यीकरण तथा निर्वचन (Generalisation and Interpretation)- शोध का यह एक महत्वपूर्ण चरण है क्योंकि किसी अनुसन्धान की उपादेयता उसके द्वारा प्राप्त निष्कर्षों में निहित है । प्रतिदर्श का चुनाव करते समय एक शोधकर्ता निगमन तर्क (Deductive Logic) का प्रयोग करता है जिसमें एक बहुत बड़े समूह में से एक छोटे समूह का चुनाव किया जाता है तथा ऐसी मान्यता रही है कि सदैव निदर्श पर आधारित इस छोटे समूह में वे सभी विशेषताएँ विद्यमान हैं जो एक बड़े समूह में है । लेकिन किसी भी अध्ययनकर्ता का विषय क्षेत्र छोटा समूह नहीं होता बल्कि सदैव बड़े समूह के सम्बन्ध में निष्कर्ष निकालना अध्ययन का उद्देश्य होता है । परिकल्पना परीक्षण के आधार पर आगमन तर्क (Inductive logic) के आधार पर विशिष्ट (Specific) से सामान्य (General) के बारे में निष्कर्ष निकाले जाते हैं । इसे सामान्यीकरण कहते हैं । उदाहरण के लिए, अजमेर शहर में 100 में से 98 व्यक्ति ईमानदार पाये जाने पर यह निष्कर्ष होगा कि अजमेर के निवासी ईमानदार हैं; अत: यही सामान्यीकरण कहलाएगा । वास्तव में निर्वचन का कार्य बहुत सावधानीपूर्वक किया जाना चाहिए, क्योंकि कभी-कभी समंकों के पक्षपातपूर्ण चुनाव तथा प्रतिदर्श की अपर्याप्तता के कारण भ्रामक निष्कर्ष भी निकल सकते हैं । उपर्युक्त उदाहरण में यदि 100 व्यक्तियों का चुनाव केवल अजमेर विश्वविद्यालय के कर्मचारियों में से किया गया हो तो यह प्रतिदर्श सम्पूर्ण अजमेर नगर के निवासियों का प्रतिनिधित्व नहीं कर पाएगा; अत: परिणाम भ्रामक सिद्ध हो सकते हैं ।

10. शोध कथासार तैयार करना (Preparation of Research Synopsis)- शोध कथासार शोध विषय से सम्बन्धित समस्या का समाधान तथा उनसे प्राप्त परिणाम स्पष्ट एवं सरल भाषा में प्रस्तुत करने का सर्वोत्तम माध्यम है । यह शोध कथासार शोधकर्ता द्वारा तैयार किया जाता है । गुडे व हाट के शब्दों में, "शोध कथासार लिखना शोध का अन्तिम चरण है और इसका उद्देश्य इच्छा रखने वाले पाठक तक शोध परिणाम पहुँचाना है ।" इसे पढ़कर पाठक न केवल तथ्य समझ सके बल्कि स्वयं शोध निष्कर्षों की प्रामाणिकता की जाँच करने योग्य हो सके ।

1.6 सारांश (Summary)

संक्षेप में शोध का अर्थ होता है किसी भी नवीन ज्ञान की प्राप्ति के लिए किया गया व्यवस्थित प्रयास । किसी भी तथ्य की जानकारी, समस्या के समाधान/वैकल्पिक समाधान विभिन्न घटनाओं के आपसी सम्बन्ध, सिद्धान्तों का नवीनीकरण आदि के लिए शोध की जाती है । शोध एक वैज्ञानिक योजना है जिसका उद्देश्य तथ्यों की क्रमबद्धता तथा उनके सम्बन्धों का विश्लेषण कर नियमों का प्रतिपादन करना होता है । व्यावसायिक शोध के सैद्धान्तिक उद्देश्य में पुराने तथ्यों का सत्यापन, नये तथ्यों की खोज नये सिद्धान्तों का निर्माण व परीक्षण करना आदि शामिल होते हैं । अर्थ व्यवस्था को समझने के लिए एवं आर्थिक घटनाओं के प्रभाव को समझने तथा आर्थिक नीतियों को आधार प्रदान करने जैसे व्यावहारिक उद्देश्यों के लिए भी शोध की जाती है । इसके साथ ही व्यावसायिक शोध व्यक्तिगत जरूरतों के लिए भी की जाती है । अलग-अलग उद्देश्य के लिए अलग-अलग प्रकार की व्यावसायिक शोध की जाती है ।

शोध एक व्यवस्थित अध्ययन है,जिसमें क्रमबद्ध तरीके से अध्ययन किया जाता है । सर्वप्रथम समस्या का निर्धारण किया जाता है फिर विषय सम्बन्धी उपलव्यि साहित्य का गहन अध्ययन किया जाता है । विषय के निर्धारित सिद्धान्तों के अनुरूप परिकल्पनाओं का निर्माण किया जाता है उसके बाद शोध का कार्य करने की योजना बनाई जाती है । शोधकर्ता यह निर्णय करता है कि उसके द्‌वारा प्रयोग किये जाने वाले समंकों की प्रकृति तथा स्रोत क्या होगें? संकलित समंकों को सम्पादित करने की कौन सी रीति का प्रयोग किया जायेगा । शत-प्रतिशत इकाइयों के समंक एकत्रित करना संभव नहीं है अत: प्रतिदर्श विधि का चुनाव किया जाता है । समंकों का वर्गीकरण व सारणीयन कर परिकल्पना का परीक्षण किया जाता है । शोध में निर्वचन का चरण अति-महत्वपूर्ण होता है जिसमें निष्कर्षो के आधार पर सामान्यीकरण किया जाता है । अन्त में, विषय से सम्बन्धित समस्या, समस्या का समाधान तथा उनसे प्राप्त परिणाम स्पष्ट व सरल भाषा में शोध कथासार के रुप में प्रस्तुत किए जाते हैं ।

1.7 स्वपरख प्रश्न

लघुउत्तरात्मक प्रश्न

1. शोध के मुख्य सैद्धान्तिक उद्देश्य बताइये ।
2. गुणात्मक व परिमाणात्मक शोध में अन्तर बताइये ।
3. शोध के विभिन्न चरण कौन-कौन से है?
4. परिकल्पनाओं के प्रकार कौन से हैं?
5. शून्य परिकल्पना कथन क्या है?

विवरणात्मक प्रश्न

1. शोध की परिभाषा दीजिए तथा शोध के उद्देश्य बताइये ।

2. शोध के विभिन्न प्रकार विस्तार से समझाइये ।

3. व्यावसायिक शोध की प्रमुख विशेषताएं क्या है?
4. शोध के चरण क्रमानुसार उल्लेखित करें ।
5. परिकल्पना का महत्व व सीमाऐं क्या हैं? परिकल्पना सम्बन्धी विभिन्न प्रकार के कथन स्पष्ट कीजिए।

इकाई-2 : शोध प्रविधि (Research Methodology)

इकाई की रूपरेखा :

2.1 उद्देश्य

2.2 प्रस्तावना

2.3 अर्थ

2.4 शोध प्रविधि के प्रमुख चरण

2.5 शोध समंकों के प्रकार

2.6 सांख्यिकीय विश्लेषण की प्राविधियाँ

2.6 सारांश

2.7 स्व-परख प्रश्न

2.1 उद्देश्य (Objects)

इस इकाई के अध्ययन से आप निम्न तथ्यों से अवगत हो पायेंगे ।

- शोध प्रविधि का अर्थ ।
- शोध प्रविधि के प्रमुख चरण ।
- एक अच्छी शोध प्रविधि के गुण ।
- प्रश्नावली व अनुसूची का अर्थ
- प्रश्नावली व अनुसूची में अन्तर ।

2.2 प्रस्तावना (Introduction)

शोध एक ऐसी प्रक्रिया है जिसमें नूतन ज्ञान की प्राप्ति तथा उपलब्ध ज्ञान की व्याख्या की जाती है । शोध के अन्तर्गत किसी एक निश्चित समस्या का वस्तुपरक तथा क्रमबद्ध तरीके से समाधान निकालने का प्रयास किया जाता है । शोध की प्रकृति वैज्ञानिक है, जिसकी पद्धतियाँ तर्क व प्रयोग पर आधारित होती हैं । तथ्यों की खोज के लिए शोधकर्ता शोध प्रविधि का निर्माण अपने विषय से सम्बन्धित बातों को ध्यान में रखकर करता है।

2.3 अर्थ (Meaning)

शोध समस्या का व्यवस्थित तथा क्रमबद्ध निर्धारण करने का तरीका शोध प्रविधि है । शोध प्रविधि एक विज्ञान है जिसमें समस्या का निर्धारण वैज्ञानिक तरीके से किया जाता है । शोध प्रविधि शोध विषय से सम्बन्धित समस्या, समस्या का समाधान तथा उससे प्राप्त परिणाम स्पष्ट एवं सरल भाषा में प्रस्तुत करने का सर्वोत्तम माध्यम है । इसमें शोधकर्ता द्वारा समस्या के समाधान हेतु तार्किक तरीके से शोध के विभिन्न चरणों का अध्ययन किया जाता है । शोध प्रविधि में सामग्री के स्रोत, उनकी प्रामाणिकता, प्रतिदर्श पद्धति, प्रतिदर्श का आकार और उसका चयन,चरों की परिभाषा,परिकल्पना आदि सम्मिलित होते हैं ।

शोध के द्वारा अनेक महत्वपूर्ण समस्याओं के समाधान और नीतियों के निर्माण में सहायता मिलती है इन विभिन्न प्रकार की समस्याओं का अध्ययन आधुनिक युग में सांख्यिकी के माध्यम से किया जाता है । जिसके लिए यह आवश्यक है कि शोध करने से पहले एक सुनियोजित योजना बनाई जाये तथा उसके अनुरूप कार्य किया जाये ।

शोध प्रविधि में एक शोध कर्ता द्वारा निश्चित उद्देश्यों के साथ उठाये गये विभिन्न क्रमवार चरणों का समावेश किया जाता है । प्रारम्भ में ही शोधकर्ता को यह निश्चित करना चाहिए कि उसे किस प्रकार की समस्या का अध्ययन करना है इसके बाद यह आवश्यक है कि शोधकर्ता शोध समस्या से सम्बन्धित साहित्य का व्यापक रूप से अध्ययन करे । साहित्य के व्यापक अध्ययन के पश्चात शोधकर्ता को यह सुनिश्चित करना चाहिए कि उसे क्या-क्या सूचनायें एकत्रित करनी है तथा इन सूचनाओं को किन स्रोतों द्वारा एकत्रित किया जाना है ।

समंक एकत्रित करते समय शोधकर्ता को चाहिए कि वह सही सांख्यिकीय इकाई का चुनाव करे । एक सही सांख्यिकीय इकाई वह है जो अनुसंधान समस्या के अनुकूल हो, स्वयं में स्पष्ट हो निश्चित हो, समरूप हो, व प्रामाणित हो । शोधकार्य पर और आगे बढ़ने से पूर्व शोधकर्ता को चाहिए कि वह अपनी शोध समस्या हेतु कार्यकारी परिकल्पना का निर्धारण कर ले, परिकल्पना निश्चित, स्पष्ट एवं शोध समस्या से मेल खाती होनी चाहिए ।

2.4 शोध प्रविधि के प्रमुख चरण (Main Steps of Research Methodology)

किसी भी कार्य को प्रारम्भ करने से पूर्व योजना बना लेने से सरलता और स्पष्टता तथा उद्देश्यपरकता आती है । इसी प्रकार शोध कार्य शुरू करने से पहले एक निश्चित योजना बनाना सदैव हितकर होती है । शोध प्रविधि में एक शोधकर्ता द्वारा विभिन्न चरणों का क्रम निश्चित कर लिया जाता है ताकि शोध के उद्देश्यों को प्राप्त करने में सरलता हो । शोध प्रक्रिया के प्रमुख चरण निम्नलिखित हैं :

1. शोध समस्या का चुनाव करना (Selection of Research Problem) : जब किसी शोध की योजना बनायी जाए तो यह आवश्यक है कि उस समस्या का चुनाव किया जाए जिसके सम्बन्ध में शोध करना है । शोध समस्या न तो अधिक संकुचित होनी चाहिए एवं न ही अधिक व्यापक । शोध के लिए चयनित समस्या को स्पष्ट रूप से परिभाषित किया जाना चाहिए ताकि असंख्य समंकों में से सिर्फ आवश्यक समंकों का चयन किया जा सके । शोध विषय के चुनाव के लिए निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए ।

(i) शोध का विषय शोधकर्ता की रूचि का होना चाहिए । विषय में गहरी रूचि होने से अनुसंधानकर्ता अधिक लगन व परिश्रम से कार्य कर सकेगा तथा शोधकर्ता विषय की गहराई तक भी पहुँच सकेगा । अपनी रूचि का शोध विषय होने पर शोधकर्ता प्रत्येक कठिनाई को गहन परिश्रम से हल करने में सक्षम होगा ।

(ii) शोध का विषय ऐसा होना चाहिए जिसके सम्बन्ध में थोड़ा-बहु त पूर्व ज्ञान हो । पूर्व ज्ञान सर्वेक्षण को सुनिश्चित ढंग से निरूपण करने से श्रेष्ठ परिणाम प्राप्त होते है । इसके विपरीत एकदम नवीन तथा असम्बद्ध विषय पर सही विचार होना कठिन हो जाता है ।

(iii) शोध विषय पर साधन-सीमा के अन्तर्गत होना भी आवश्यक है अन्यथा शोध अर्थहीन हो जाती है । शोध विषय इतना विस्तृत न हो कि उसका सर्वेक्षण यथार्थ रूप से सम्भव न हो सके ।

(iv) शोध विषय का चुनाव करने से पहले यह देख लेना चाहिए कि उस विषय के सम्बन्ध में सर्वेक्षण होने पर ज्ञान वृद्धि के साथ-साथ व्यावहारिक उद्देश्य की पूर्ति कहाँ तक हो सकेगी ।

शोध समस्या के चयन के समय ही शोध का उद्देश्य निश्चित किया जाता है । शोध के लिए विषय का चुनाव और उद्देश्य निर्धारण हो जाने के पश्चात् यह आवश्यक है कि विषय के विभिन्न पक्षों को, जहाँ तक सम्भव हो स्पष्टत: परिभाषित व परिसीमित कर लिया जाए । ऐसा करने से सर्वेक्षण कार्य में भटक जाने की सम्भावना कम हो जाती है और सर्वेक्षण के निष्कर्षों को यथार्थ में अपनाने की सम्भावना अधिक हो जाती है ।

2. गहन साहित्य सर्वेक्षण:-

जब शोध समस्या का चयन कर लिया जाए तब यह आवश्यक है कि शोधकर्ता शोध समस्या से सम्बन्धित साहित्य का व्यापक अध्ययन करे । सभी पत्र-पत्रिकाओं जिसमें शोध समस्याओं के सन्दर्भ व सार छपते हैं तथा सभी प्रकाशित एवं अप्रकाशित संदर्भ साहित्य का अध्ययन करना चाहिए । शोध में सफलता के लिए यह अनिवार्य है कि शोध की एक संक्षिप्त रूप रेखा तैयार कर ली जाए । इसलिए उन सभी छात्रों के लिए जो शोध ग्रन्थ लिखना चाहते हैं आवश्यक होता है कि वे शोध विषय से सम्बन्धित कथासार (Synopsis) अनुमोदन हेतु पेश करें ।

शोध सम्बन्धी साहित्य के गहन अध्ययन के द्वारा ही एक स्रोत से दूसरे स्रोत का पता चलता है। साहित्य के व्यापक अध्ययन के पश्चात् शोधकर्ता यह निश्चित करता है उसे कौन सी सूचनायें एकत्रित करनी हैं और इन सूचनाओं को किन स्रोतों द्वारा एकत्रित किया जाना है । सूचना के स्रोत प्राथमिक हो सकते हैं अथवा द्वितीयक । प्राथमिक स्रोतों से सूचना एकत्रित करने के लिए शोधकर्ता को नवीन प्रकार से योजना बनाकर मौलिक सूचना का संग्रहण करना होता है । द्वितीयक सूचनाओं के एकत्रीकरण के लिए शोधकर्ता अन्य शोधकर्ताओं, व्यक्तियों अथवा संस्थाओं द्वारा एकत्रित की गई सामग्री व समंकों तथा विभिन्न पत्र-पत्रिकाओं में प्रकाशित सूचनाओं का उपयोग कर सकता है ।

3. कार्यकारी परिकल्पना का निर्माण (Construction of working hypothesis): -

शोध प्रविधि के अन्तर्गत शोध समस्या हेतु कार्यकारी परिकल्पना का निर्धारण भी किया जाता है। परिकल्पना अध्ययन को दिशा प्रदान करती है । परिणामस्वरूप अनुसंधानकर्ता

को यह पता चल जाता है कि उसे क्या और कितना अध्ययन करना है किन समंकों को एकत्रित करना है और कौन से समंक काम के नहीं हैं ।

4. **शोध अभिकल्प का निर्माण करना (Construction of research design) :-**

शोध समस्या के चयन तथा परिकल्पना के निर्धारण के बाद शोधकर्ता अपनी शोध समस्या से सम्बन्धित शोधकार्य को करने की योजना तैयार करता है । शोध समस्या के समाधान तथा शोध के उद्देश्य को ध्यान में रखते हुए अभिकल्प की रचना की जाती है । शोध अभिकल्प (Research Design) में निम्न बातों का ध्यान रखा जाता है:

i. शोध अध्ययन की प्रकृति;
ii. आवश्यक सामग्री व संमकों को एकत्रित करने के स्रोतों की सूची बनाना;
iii. प्रश्नावली व अनुसूची बनाना;
iv. शोध सहायकों की आवश्यकता;
v. समंकों के सम्पादन वर्गीकरण व निर्वचन की तकनीकों को तय करना;
vi. सन्दर्भ ग्रन्थों की सूची बनाना;
vii. शोध में लगने वाला अनुमानित समय; तथा
viii. शोध की अनुमानित लागत ।

उपर्युक्त तथ्यों के अनुसार शोध का अभिकल्प बनाया जाता है, जिसमें परिस्थितियों के अनुसार परिवर्तन भी किया जाता है । सारांशत: अभिकल्प शोध के लिए रूप रेखा (blue print) के समान है ।

5. **समंकों का संग्रहण (Collection of Data) :-**

समंक संग्रहण का अर्थ है वांछित तथ्यों को एकत्रित करना । यदि ये समंक पत्रिकाओं या पुस्तकों में प्रकाशित हैं तो उन्हें एकत्रित कर एक स्थान पर रखना और यदि वे पहले से कहीं उपलब्ध नहीं हैं तो उन्हें नये सिरे से प्राप्त करना ही समंकों का संग्रहण कहलाता है। संग्रहित समंकों पर ही समंकों का विश्लेषण एवं निर्वचन निर्भर करता है । यदि संग्रहित समंक अशुद्ध एवं अपर्याप्त होंगे तो उनके आधार पर निकाले जाने वाले निष्कर्ष भी भ्रमात्मक एवं अशुद्ध होंगे । समंकों का संकलन शोध का एक महत्वपूर्ण चरण है । एक सांख्यिक द्वारा अनुसंधान की योजना बनाने के पश्चात समंकों के संकलन का कार्य किया जाता है ।

समंक संकलन के लिए किस विधि का उपयोग किया जाये यह निर्भर करता है कि शोधकर्ता को किस प्रकार की सामग्री संकलित करनी है तथा उसका कार्य क्षेत्र किस प्रकार का होगा । एक शोधकर्ता जब समस्या का चयन, परिकल्पनाओं का निर्माण तथा अभिकल्प का रूपांकन कर चुकता है तब उसका प्रायोगिक कार्य (field work)शुरू होता है। इसकी सबसे बड़ी चुनौती सही एवं सम्पूर्ण तथ्यों एवं मूल समंकों का संकलन है । यह सामग्री अध्ययन के विषय से सम्बन्धित होनी चाहिए तथा कम से कम समय धन और मानव शक्ति खर्च करके एकत्रित की जानी चाहिए।

2.5 शोध समंकों के प्रकार (Type of Data)

(1) प्राथमिक समंक (Primary data)

(2) द्वितीयक समंक (Secondary data)

(1) **प्राथमिक समंक**–जो समंक अपने मौलिक रूप में होते हैं वे प्राथमिक समंक कहलाते हैं। इन समंकों को शोधकर्ता द्वारा पहली बार आरम्भ से अन्त तक नये सिरे से एकत्रित किया जाता है । इस प्रकार के समंक किसी पत्र-पत्रिकाओं या पुस्तक में प्रकाशित नहीं होते हैं ।

उदाहरण के लिए जयपुर शहर के एक क्षेत्र में रहने वाले व्यक्तियों की मासिक आय और उनमें से आयकर चुकाने वाले व्यक्तियों की संख्या से सम्बन्धित समंक संग्रहित करने से वे प्राथमिक समंक कहलायेंगे क्योंकि ये समंक किसी जगह प्रकाशित नहीं हैं तथा शोधकर्ता ने स्वयं एकत्रित किये है ।

i. प्राथमिक समंकों के संग्रहण की रीतियाँ

i. प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान

ii. अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान

iii. स्थानीय स्रोतों या संवाददाताओं द्वारा सूचना प्राप्ति

iv. अप्रत्यक्ष प्राथमिक स्रोत (प्रश्नावली)

v. गणकों के माध्यम से सूचना संग्रहण

उपर्युक्त रीतियों में से प्राथमिक समंक एकत्रित करने के लिए किस रीति का चयन किया जाए; यह इस बात पर निर्भर करता है कि शोध का क्षेत्र कितना व्यापक है सूचना देने वाले कितने शिक्षित है, शुद्धता का कितना स्तर अपेक्षित है; आदि ।

2. **द्वितीयक समंक:-** जब कोई अनुसंधानकर्ता उन समंकों का उपयोग करता है जो पहले से ही अन्य व्यक्तियों या संस्थाओं द्वारा एकत्र व प्रकाशित किये जा चुके हों तो इस प्रकार के समंक द्वितीयक समंक कहलाते है । जो समंक द्वितीयक स्रोतों से प्राप्त किये जाते हैं वे द्वितीयक समंक कहलाते है । द्वितीयक स्रोतों के अन्तर्गत सामान्यत: ऐतिहासिक प्रलेखों, सार्वजनिक प्रलेखों व प्रकाशित स्रोतों को सम्मिलित किया जाता है। जब समंक मूल स्रोत से प्राप्त किया जाता है तब वह प्राथमिक समंक कहलाता है तथा जब वह किसी और के द्वारा किसी अन्य उद्देश्य के लिए एकत्रित किए गए हों तो वह द्वितीयक समंक कहलाते हैं । नवीन समंक प्रथम संग्रहकर्ता के हाथ में प्राथमिक होते हैं, किन्तु यदि उन्हीं समंकों का प्रयोग कोई दूसरा व्यक्ति करने लगे तो वही समंक द्वितीयक समंक हो जायेंगे, जैसे महाविद्यालय के विद्यार्थियों के आंकड़े, महाविद्यालय के लिए प्राथमिक समंक है जबकि सामाजिक अनुसंधानकर्ता के लिए वे द्वितीयक समंक कहलायेंगे।

द्वितीयक समंकों के संग्रहण के स्रोत :-

i. व्यक्तिगत प्रलेख

ii. सार्वजनिक प्रलेख

iii. अप्रकाशित प्रलेख

6. शोध समंकों का सम्पादन (Editing of Research Data) :-

सामग्री संकलन के स्रोत प्राथमिक अथवा द्‌वितीयक हो सकते हैं । सामग्री का संकलन किसी भी प्रकार से क्यों न किया जाये उसमें त्रुटि रह जाना स्वाभाविक है । समंकों व सामग्री का विश्लेषण करने से पूर्व संकलित सामग्री की अशुद्धियों को दूर कर लेना अत्यन्त आवश्यक है जिससे परिणाम दूषित न हों, इस हेतु समंकों का सम्पादन करना अति आवश्यक है ।

सम्पादन की क्रिया अनावश्यक समंकों की छँटनी तथा अपर्याप्त व अधूरी सूचनाओं को या तो पुन: एकत्रित किया जाता है अन्यथा अनुमानित किया जाता है । सम्पादन के अन्तर्गत एकत्रित सामग्री का सूक्ष्म परीक्षण किया जाता है । सम्पादन का मुख्य उद्देश्य सम्भावित त्रुटियों और अनियमितताओं का पता लगाना व उन्हें दूर करना है । समंकों का सम्पादन एक विशेषज्ञ द्‌वारा होना चाहिए जिसे शोध के उद्देश्य का ज्ञान होना चाहिए तथा सांख्यिकी में विशिष्ट दक्षता होनी चाहिए । सम्पादन में समको में संगति, एकरूपता, पूर्णता तथा शुद्धता की जांच आदि को सम्मिलित किया जाता है । सर्वप्रथम एकत्रित समंकों को क्रमबद्ध किया जाता है, फिर यह देखा जाता है कि समस्त आवश्यक समंक उपलब्ध हो गये हैं या नहीं । कई प्रश्न अनुत्तरित रह जाते हैं अथवा किन्हीं प्रश्नों के गलत उत्तर प्राप्त होते है, इन सबको सही व सुनिश्चित करने का कार्य सम्पादक को करना होता है । वर्गीकरण व सारणीयन की सुविधा के लिए संकेतों का प्रयोग किया जा सकता है । सम्पादक द्‌वारा अनुसंधान की विधियों के बारे में जानकारी प्राप्त की जाती है माप की इकाई को समरूप किया जाता है । सम्पादक उपयोगिता का ध्यान रखते हुए समंकों के शुद्धता के स्तर को निश्चित करता है तथा उपसाधन की पद्धति की जाँच करता है ।

7. शोध समंकों का वर्गीकरण तथा सारणीयन (Classification and Tabulation of Research Data):-

शोध समंकों का संकलन तथा सम्पादन करने के बाद समंकों का वर्गीकरण व सारणीयन शुरू होता है । एकत्रित समंकों के आधार पर सीधे ही कोई भी निष्कर्ष इसलिए नहीं निकाला जा सकता क्योंकि संख्याएँ जटिल तथा बिखरी हुई होती हैं । समंकों को उनकी समरूपता के आधार पर विभिन्न वर्गों में बाँटने की क्रिया वर्गीकरण कहलाती है । इन वर्गीकृत समंकों का प्रस्तुतीकरण चित्रों अथवा सारणियों के रूप में किया जाता है । वर्गीकरण व सारणीयन एक दूसरे से जुड़े हुए हैं । वर्गीकरण के बिना सारणीयन नहीं हो सकता है तथा सारणीयन के लिए वर्गीकरण अनिवार्य है । सारणीयन में वर्गीकृत समंकों को पंक्तियों तथा कालमों में व्यवस्थित ढंग से प्रस्तुत किया जाता है ।

8. शोध समंकों का विश्लेषण (Analysis of Research Data):-

शोध सामग्री का संग्रहण, सम्पादन, वर्गीकरण व सारणीयन के पश्चात प्रमुख समस्या शोध समंकों का विश्लेषण व उनसे वांछित निष्कर्ष निकालने की होती है । विश्लेषण कार्य के लिए विभिन्न सांख्यिकीय विधियों को प्रयोग में लाया जाता है । विश्लेषण के दौरान पूर्व निर्धारित अथवा नयी परिकल्पना के पक्ष एवं विपक्ष में प्राप्त सूचनाओं की सांख्यिकीय आधार पर परीक्षा कर उनकी सत्यता या असत्यता की जाँच की जाती है । सांख्यिकीय परीक्षणों द्वारा हम इस बात की जानकारी प्राप्त कर सकते हैं कि समंकों में विद्यमान अन्तर वास्तविक है या निर्देशन उच्चावचनों के फलस्वरूप है ।

सांख्यिकीय विश्लेषण की प्राविधियाँ (Techniques of Statistical Analysis) :-

शोध समंकों का विश्लेषण करने के लिए निम्न प्रविधियों में से कोई भी प्रविधि / प्रविधियाँ शोध के उद्देश्य के अनुसार अपनाई जा सकती है:-

i. सांख्यिकीय माध्य
ii. अपकिरण
iii. मूल्य सूचकांक
iv. विषमता
v. सह-सम्बन्ध
vi. प्रतीपगमन
vii. चित्र व ग्राफिक प्रस्तुतीकरण
viii. काल श्रेणियाँ

9. शोध समंकों का निर्वचन (Interpretation of Research Data)

निर्वचन शोध का अन्तिम महत्वपूर्ण चरण है । सांख्यिकी में अनुमान लगाये जाते हैं तथा संभावनाऐं व्यक्त की जाती हैं । यह अनुमान निर्णय का आधार होते है । यही कारण है कि सांख्यिकीय विश्लेषण के द्वारा निकाले गये परिणाम सन्दर्भ युक्त होने चाहिए ।

संकलित तथ्यों का विश्लेषण कर निष्कर्ष निकालना सांख्यिकीय निर्वचन कहलाता है । विश्लेषण के आधार पर सही निष्कर्ष निकालने के लिए सम्बन्धित परिस्थितियों का अच्छी तरह ज्ञान होना आवश्यक है अन्यथा गलत निर्वचन हो सकता है । निर्वचन से पहले शोधकर्ता को प्रतिदर्श का चुनाव उद्देश्य के अनुसार करना चाहिए । एक प्रतिदर्श समग्र का प्रतिनिधित्व तभी कर पायेगा जबकि उसका आकार पर्याप्त रूप से बड़ा हो । यह प्रयास किया जाना चाहिए कि समंक विभ्रमों से यथासम्भव मुक्त हों ।

10. परिकल्पना परीक्षण तथा सामान्यीकरण (Hypothesis testing and generalisation):-

समंक विश्लेषण के पश्चात पूर्व निर्धारित परिकल्पना का परीक्षण वास्तविक निष्कर्षों के आधार पर किया जाता है । परिकल्पना एक पूर्व-निर्धारित सामान्यीकरण है जिसका वास्तविकताओं के आधार पर परीक्षण किया जाता है । समंकों के विश्लेषण एवं निर्वचन के पश्चात शोधकर्ता इस स्थिति में होता है कि वह पूर्व प्रतिपादित परिकल्पना की सत्यता की जाँच कर सके । परिकल्पना परीक्षण के लिए सांख्यिकीय विशेषज्ञों ने

अनेक सार्थकता परीक्षण प्रतिपादित किए है । इन परीक्षणों के आधार पर शोधकर्ता इस बात की जाँच करता है कि उसके द्वारा एकत्रित समंकों से प्राप्त सूचनाएँ पूर्व निर्धारित परिकल्पना की पुष्टि करती है अथवा नहीं । यदि परिकल्पना सही सिद्ध होती है तो हम सिद्धान्त का निर्माण करते है जो शोध के लिए आधार बन जाते हैं । यदि परिकल्पना गलत सिद्ध होती है तो वास्तविकता का पता चलता है । दोनों ही अवस्थाओं में सत्य का पता चलता है जो कि परिकल्पना परीक्षण से ही सम्भव है । परिकल्पना परीक्षण के निर्णय के आधार पर सामान्यीकरण किया जाता है । किसी भी सिद्धान्त का निर्माण अनुमान के आधार पर नहीं होता है, अतएव संकलित समंकों का विश्लेषण व परिकल्पना परीक्षण आवश्यक है ।

11. शोध प्रबन्ध का निर्माण व प्रकाशन (Construction of Research thesis and Publication):-

शोध प्रक्रिया का अन्तिम चरण शोध प्रबन्ध को तैयार करना एवं उसको प्रकाशित करना है । प्रत्येक शोध प्रक्रिया में प्राप्त सूचनाएँ तथा उनके विश्लेषण पर आधारित निष्कर्षों को एक शोध प्रबन्ध के रूप में प्रकाशित किया जाता है ताकि सम्बन्धित व्यक्तियों को उसके सम्बन्ध में जानकारी प्राप्त हो जाए । शोध प्रबन्ध में भाषा तथा विचारों की स्पष्टता, सरलता तथा शुद्धता होना अति आवश्यक है । शोधकर्ता को शोध प्रबन्ध में अपना सुझाव इस प्रकार देना चाहिए जो व्यावहारिक हो और उपलब्ध साधनों की सीमा के अन्दर क्रियान्वित किया जा सके । शोध-प्रबन्ध क्रमानुसार तथा आकर्षक होना चाहिए।

शोध की योजना जितनी सही, व्यावहारिक, त्रुटिरहित तथा उपयुक्त होगी, शोध का कार्य भी सुचारू रूप से संचलित हो पायेगा । शोध प्रबन्ध में उन समस्त तथ्यों का समावेश होना चाहिए जो शोध के लिए प्रयुक्त हुए थे । प्रतिवेदन तैयार करने के लिए ग्राफ, चार्ट, सारणियों तथा मॉडलों का भी आवश्यकतानुसार प्रयोग किया जाना चाहिए । शोध प्रबन्ध लिखना शोध प्रविधि का सबसे महत्वपूर्ण चरण है जिसमें उपलब्ध जानकारी को क्रमबद्ध लिखा जाता है । शोध प्रबन्ध में समंकों के विश्लेषणों से प्राप्त परिणामों को प्रस्तुत किया जाता है ।

एक अच्छी शोध प्रविधि के गुण :-

शोधकर्ता शोध समस्या के क्रमबद्ध समाधान से निष्कर्ष निकालना चाहता है । एक अच्छी शोध प्रविधि शोधकर्ता को शोध के निष्कर्षों तक पहुँचाने में सहायक होती है । एक अच्छी शोध प्रविधि के प्रमुख गुण निम्न प्रकार है :

1. निष्पक्ष शोध कार्य ।
2. स्पष्ट परिभाषित शोध उद्देश्य ।
3. व्यवस्थित व क्रमबद्ध शोध प्रक्रिया ।
4. शोध सामग्री का उचित संकलन व सम्पादन ।
5. तथ्यों की समझ को आसान बनाना ।
6. शोध की परिशुद्धता में वृद्धि करना ।

7. ज्ञान की अभिवृद्धि में सहायक ।
8. शोध उद्देश्य की प्राप्ति में सहायक ।

समंक व सामग्री संग्रहण की तकनीक :-

समंक व सामग्री संग्रहण की तकनीक से तात्पर्य उन साधनों तथा विधियों से है जिनका प्रयोग कर शोधकर्ता शोध के लिए आवश्यक सूचना व समंक एकत्रित करता है । शोध का उद्देश्य शोध प्रविधि की संरचना निर्धारित करना है । शोध प्रविधि की संरचना में यह तय किया जाता है कि परिकल्पना के आधार पर कौन से समंकों का संग्रहण करना है तथा किस वर्ग में से समंकों को संकलित करना है । सामान्यत: शोध में निम्न दो तकनीकें अपनायी जाती है :-

1. प्रश्नावली (Questionnaire)
2. अनुसूची (Schedule)

1. **प्रश्नावली :** प्रश्नावली विभिन्न प्रश्नों की एक व्यवस्थित सूची है जिसका उद्देश्य किसी विषय से सम्बन्धित व्यक्तियों से सूचनाएँ प्राप्त करके सामग्री का संकलन करना होता है । सामान्यत: प्रश्नावली डाक द्वारा भेजी जाती है परन्तु कभी-कभी इसे व्यक्तिगत तौर पर भी पहुँचाया जाता है । अनेक अध्ययन क्षेत्र इस प्रकार के होते हैं जिनसे सम्बन्धित विषय सामग्री एक ही स्थान पर प्राप्त न होकर अनेक स्थानों से प्राप्त होती है । इस स्थिति में प्रत्यक्ष रूप से मिलकर सूचना संकलित करना कठिन व खर्चीला हो सकता है । प्रश्नावली एक दस्तावेज है, जिसमें प्रश्नों के समूह होते है जिनके वस्तुनिष्ठ उत्तर होते हैं । शोध का महत्व उत्तरदाताओं को एक व्याख्या पत्र द्वारा समझा दिया जाता है साथ ही एक टिकट लगा लिफाफा प्रश्नावली के साथ भेजा जाता है । बार-बार पत्र लिखकर निर्धारित अवधि में उत्तर भेजने का आग्रह किया जाता है । अन्त में डाक द्वारा प्राप्त उत्तर से जो सूचनाएँ प्राप्त होती हैं उनके आधार पर अध्ययन से सम्बन्धित निष्कर्ष निकाले जाते हैं । प्रश्नावली साक्षात्कार तकनीक का विकल्प भी माना जाता है । इस प्रकार प्रश्नावली के उपयोग में शोधकर्ता और उत्तर दाता के बीच कोई प्रत्यक्ष सम्पर्क होना आवश्यक नहीं होता बल्कि सामग्री का संकलन अप्रत्यक्ष रूप से भी किया जा सकता है ।

   निम्न परिस्थितियों में प्रश्नावली को संग्रहण तकनीक के रूप में पेश किया जाता है :

   1. जब बहुत बड़े प्रतिदर्शो की आवश्यकता होती है ;
   2. जब बजट छोटा हो ;
   3. जब उत्तरदाताओं में क्षेत्रीय बिखराव अधिक हो ;
   4. जब उत्तरदाता शिक्षित हो ;
   5. जब प्रबन्धन में आसानी की आवश्यकता हो ; तथा
   6. जब सामान्य उत्तर की दर संतोषजनक समझी जाये ।

2. **अनुसूची :-** अनुसूची अनेक प्रश्नों की ऐसी लिखित सूची है जिसे लेकर शोधकर्ता स्वयं उत्तरदाता के पास जाता है और विभिन्न प्रश्नों को पूछकर स्वयं ही उनके उत्तरों का

आलेखन करता है । अनुसूची उन समंकों व सामग्री को प्राप्त करने की एक औपचारिक विधि का प्रतिनिधित्व करती है जो वास्तविक है तथा सरलता से प्राप्ति योग्य हैं । अनुसूची एक ऐसी तकनीक है जिसका उद्देश्य साक्षात्कार तथा अवलोकन को व्यवस्थित बनाना होता है । अनुसूची में पूछे गये प्रश्नों के उत्तर वस्तुनिष्ठ या विवरणात्मक कैसे भी हो सकते हैं । अनुसूची प्रश्नों के समूह का नाम है जो साक्षात्कार द्वारा किसी दूसरे व्यक्ति से प्रत्यक्ष स्थिति में पूछे व भरे जाते हैं ।

अनुसूची से सामग्री संग्रहण निम्न परिस्थितियों में अधिक उपयुक्त है:

1. जब उत्तरदाता एक ही क्षेत्र या जगह से सम्बन्धित है;
2. जब उत्तरदाता अशिक्षित या कम शिक्षित हो;
3. जब शोध कार्य के लिए प्रश्नों के विवरणात्मक उत्तर आवश्यक हों;
4. जब शोधकर्ता को योग्य सहयोगी उपलब्ध हों;
5. जब शोध कम समय में करना हो; तथा
6. जब शोध का बजट पर्याप्त हो ।

प्रश्नावली तथा अनुसूची में अन्तर:-

अनुसूची व प्रश्नावली के विस्तृत विवेचन से यह स्पष्ट होता है कि प्राथमिक सूचना के संग्रहण में अनुसूची और प्रश्नावली दोनो ही महत्वपूर्ण तकनीकें हैं । इन दोनों का उद्देश्य शोध अध्ययन विषय से सम्बन्धित संख्यात्मक तथा गुणात्मक तथ्यों को एकत्रित करना होता है । बाहरी रूप से इन दोनों के बीच इतनी अधिक समानता पायी जाती है कि कभी-कभी इनके बीच स्पष्ट अन्तर करना कठिन हो जाता है । इतनी समानता के बाद भी इनकी आधारभूत विशेषताऐं इन्हे दो भिन्न तकनीकें बनाती हैं । प्रश्नावली व अनुसूची में मुख्य अन्तर निम्न हैं :

अन्तर का आधार	प्रश्नावली	अनुसूची
1. अर्थ	प्रश्नावली प्रश्नों का समूह है जो कि साधारणतया डाक द्वारा उत्तरदाताओं के पास भेजा जाता है ।	अनुसूची, प्रश्नो का समूह है जो कि व्यक्तिगत रूप से उत्तरदाताओं से पूछा जाता है।
2. प्रत्यक्ष सम्पर्क	शोधकर्ता व उत्तरदाता के बीच कोई प्रत्यक्ष सम्बन्ध नहीं होता है।	सोधकर्ता व उत्तरदाता प्रत्यक्ष रूप से मिलते है।
3. आधार	प्रश्नावली का आधार उत्तरदाताओं द्वारा लिखित रूप से भरी गई सूचना होती है।	अनुसूची मे उत्तरदाता मौखिक उत्तर देता है जो शोधकर्ता द्वारा लिखे जाते है।
4. क्षेत्र	प्रश्नावली के माध्यम से बड़े व दूरस्थ क्षेत्रों से सामग्री संकलन करना सम्भव होता है।	अनुसूची में एक छोटे क्षेत्र से ही सामग्री संकलित की जा सकती है ।
5. व्यक्तिगत	प्रश्नावली में व्यक्तिगत सम्पर्क	अनुसूची में शोधकर्ता प्रश्न पूछते

सम्पर्क	नहीं होता है अत: सिर्फ पूर्व लिखित सूचनाएं ही प्राप्त हो सकती हैं ।	समय अन्य आवश्यक सूचनाऐं भी प्राप्त कर सकता है ।
6. शिक्षा का स्तर	प्रश्नावली के द्वारा सिर्फ पढ़े-लिखे उत्तरदाताओं से सूचना प्राप्त की हो सकती है	अनुसूची के द्वारा हर तरह के(अनपढ़ भी) उत्तरदाताओं से सूचना प्राप्त की जा सकती है।
7. लचीलापन	इसमें कोई परिवर्तन नहीं किया जा सकता है ।	इसमें आवश्यकतानुसार परिवर्तन सम्भव है।
8. समय	इसमें बहुत समय लगता है ।	कम समय लगता है ।
9. खर्च	यह मितव्ययी तकनीक है ।	यह खर्चीली तकनीक है ।
10. स्पष्टता	अनेक उत्तर अस्पष्ट रह सकते है।	स्पष्ट सूचना ली जाती है।

उपर्युक्त भिन्नताओं के पश्चात भी दोनों तकनीकें महत्वपूर्ण है । दोनों तकनीकें एक दूसरे की पूरक है; जब प्रश्नावली का उपयोग नहीं किया जा सकता है तो अनुसूची की मदद ली जाती है तथा जहाँ अनुसूची नहीं चल पाती वहाँ प्रश्नावली की मदद से सामग्री एकत्रित की जाती है अर्थात शोधकर्ता अध्ययन क्षेत्र व उत्तरदाताओं की स्थिति के अनुसार प्राथमिक सूचना एकत्रित करने के लिए प्रश्नावली या अनुसूची तकनीक का चयन करता है ।

2.6 सारांश (Summary)

कोई भी शोध सार्थक तभी मानी जाती है जबकि उसके उद्देश्य की प्राप्ति हो जाए । इस सार्थकता के लिए शोध में नियोजन की आवश्यकता होती है, शोध की एक पूर्ण विस्तृत रणनीति बनाई जाती है । शोध प्रविधि, शोध विषय से सम्बन्धित समस्या, समस्या का समाधान और उससे प्राप्त परिणाम सरल भाषा में प्रस्तुत करने का सर्वोत्तम माध्यम है। शोध प्रविधि में आवश्यक सामग्री के स्रोत उनकी प्रामाणिकता, प्रतिदर्श समंकों का निर्वचन परिकल्पना परीक्षण आदि सम्मिलित होते हैं । शोध प्रविधि में शोधकर्ता द्वारा निश्चित उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए क्रमवार चरणों का समावेश किया जाता है । शोध अभिकल्प का निर्माण करके संमकों का संग्रहण किया जाता है । प्राथमिक समंकों के संग्रहण के लिए प्रश्नावली / अनुसूची तकनीक की मदद ली जाती है । दोनो तकनीकें एक उद्देश्य के लिए होती है पर उनमें कई आधारभूत भिन्नताऐं भी हैं । समंकों का सम्पादन कर उनका वर्गीकरण किया जाता है । उसके बाद उनका विश्लेषण कर निष्कर्ष निकाले जाते है । फिर परिकल्पना परीक्षण कर सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया जाता है अन्त में शोध प्रबन्ध लिखा जाता है ।

2.7 स्वपरख प्रश्न

लघुतरात्मक प्रश्न

1. शोध प्रविधि से आप क्या समझते हैं?
2. शोध अभिकल्प का निर्माण करते समय किन बातों का ध्यान रखा जाता है?
3. प्राथमिक समंकों के संग्रहण की प्रमुख दो तकनीक कौनसी है?
4. समंकों के वर्गीकरण व सारणीयन से आप क्या समझते है'
5. सांख्यिकीय विश्लेषण की प्राविधियाँ कौन-कौन सी हैं?
6. परिकल्पना परीक्षण से आप क्या समझते हैं?

विवरणात्मक प्रश्न

1. शोध प्रविधि का क्या अर्थ है? एक अच्छी शोध प्रविधि के प्रमुख गुण समझाइये ।
2. शोध प्रविधि के क्रमवार चरणों को समझाइये ।
3. प्राथमिक व द्वितीयक समंकों से आप क्या समझते हैं? इन्हें कैसे संग्रहित किया जाता है ।
4. प्रश्नावली व अनुसूची से आप क्या समझते हैं? दोनों का तुलनात्मक अध्ययन प्रस्तुत करें ।

इकाई- 3: समंकों का संग्रहण - प्राथमिक व द्वितीयक (Collection of Data - Primary and Secondary)

इकाई की रूपरेखा :-

3.0 उद्देश्य
3.1 प्रस्तावना / परिचय
3.2 अर्थ एवं परिभाषा
3.3 संग्रहण के सन्दर्भ में समंकों के प्रकार
3.3.1 प्राथमिक समंक
3.3.2 द्वितीयक समंक
3.4 प्राथमिक एवं द्वितीय समंकों में अन्तर
3.5 प्राथमिक समंकों के संग्रहण की रीतियाँ
3.5.1 प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान
3.5.2 अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान
3.5.3 संवाददाताओं या स्थानीय स्रोतों से सूचना-प्राप्ति
3.5.4 सूचकों द्वारा प्रश्नावली भरकर सूचना-प्राप्ति
3.5.5 प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना-प्राप्ति
3.6 उपयुक्त रीति का चयन
3.7 प्रश्नावली तथा अनुसूची
3.7.1 प्रश्नावली तैयार करना
3.7.2 अच्छी प्रश्नावली के गुण
3.7.3 अनुसूची
3.8 द्वितीयक समंकों का संग्रहण
3.9 सारांश
3.10 शब्दावली
3.11 स्व-परख प्रश्न /अभ्यास
3.12 उपयोगी पुस्तकें

3.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- समंकों के संग्रहण का अर्थ व प्रकार जान सकें,
- प्राथमिक एवं द्वितीयक समंक का अर्थ व अन्तर बता सकें,
- प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों के संग्रहण की विभिन्न रीतियाँ बता सकें,

- संग्रहण की विभिन्न रीतियों के गुण, दोष एवं सावधानियाँ बता सकें,
- अनुसन्धान की आवश्यकता के अनुसार उपयुक्त रीति का चयन कर सकें,
- प्रश्नावली एवं अनुसूची को तैयार करने की विधि एवं सीमाएँ जान सकें ।

3.1 प्रस्तावना / परिचय

सांख्यिकी अनुसन्धान की व्यापक योजना बनाने के बाद उपयुक्त रीति द्वारा समंकों को एकत्रित करने का कार्य आरम्भ किया जाता है । समंकों का संग्रहण सांख्यिकी विज्ञान की मूलभूत क्रिया है । वास्तव में संकलन-क्रिया की शुद्धता और व्यापकता पर ही के समंकों प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण एवं निर्वचन की आगामी क्रियाओं की सफलता आधारित है । यदि संग्रहीत समंक अशुद्ध और अपर्याप्त होते हैं: तो उनसे निकाले जाने वाले निष्कर्ष भी भ्रामक होंगे। अत: समंकों के संग्रह की क्रिया में सतर्कता और सावधानी रखना बहुत आवश्यक है । इस इकाई में आप समंक संग्रहण के अर्थ व प्रकार का अध्ययन और समंक संग्रहण की विभिन्न रीतियों की जानकारी प्राप्त करेंगे तथा जानेंगे कि प्राथमिक एवं द्वितीयक समंक को संग्रहीत करते समय किन सावधानियों का रखना आवश्यक है।

3.2 अर्थ एवं परिभाषा (Meaning and Definition)

समंकों का संग्रहण अनुसन्धान का एक महत्वपूर्ण चरण है । एक सांख्यिक द्वारा अनुसन्धान की योजना का निर्माण करने के बाद सबसे पहला कार्य समंकों के संग्रहण का किया जाता है । "समंकों के संग्रहण से आशय अनुसन्धान के अन्तर्गत आने वाली अध्ययन के विषय से सम्बद्ध इकाइयों द्वारा उद्देश्यपूर्ण सूचनाओं का एकत्रीकरण है ।"
अनुसन्धान के उद्देश्य पर निर्भर करता है कि सामग्री एकत्रीकरण के लिए किस विधि का उपयोग किया जाये तथा उसके विभिन्न स्रोत क्या होंगे । समंकों को एकत्रित करने के स्रोतों के आधार पर दो भागों में विभाजित किया जा सकता है :
(i) प्राथमिक समंक और (ii) द्वितीयक समंक ।

3.3 संग्रहण के सन्दर्भ में समंकों के प्रकार (Types of Data with reference to collection)

3.3.1 प्राथमिक समंक (Primary Data):

अनुसन्धानकर्ता द्वारा अपने प्रयोग के लिए नये सिरे से पहली बार आरम्भ से अन्त तक एकत्रित किये गये समंक प्राथमिक या मौलिक समंक कहलाते हैं । ये कच्चे माल के समान होते हैं । उदाहरणार्थ : किसी नये उत्पाद के जारी करने से पहले उसकी माँग के सम्बन्ध में पहली बार सूचनाएँ एकत्र करें तो यह संकलित समंक प्राथमिक समंक कहलाता है ।

3.3.2 द्वितीयक समंक (Secondary Data):

वे समंक जिनका पूर्व में अन्य किसी व्यक्ति या संस्था द्वारा संकलन किया जा चुका हो, द्वितीयक समंक कहलाते हैं । अन्य शब्दों मे यदि पूर्व में किसी अनुसन्धानकर्ता ने कोई समंक एकत्रित किये थे और अन्य अनुसन्धानकर्ता अपने अनुसन्धान के लिए उन्हीं समंकों का प्रयोग करता है तो वे पहले अनुसन्धानकर्ता के लिये मौलिक समंक तथा दूसरे अनुसन्धानकर्ता के लिये द्वितीयक समंक माने जायेंगे । ये समंक प्रकाशित अथवा अप्रकाशित दोनों स्थितियों में हो सकते हैं । जैसे- रिजर्व बैंक द्वारा प्रकाशित समंक, जनगणना के प्रकाशित समंक ।

3.4 प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों में अन्तर (Difference between Primary and Secondary Data)

"होरेस सेक्राइस्ट" के शब्दों में, "प्राथमिक तथा द्वितीयक समंकों में अन्तर केवल अवस्था का है, जो समंक एक पक्ष के लिए प्राथमिक हैं वे ही अन्य पक्षों के लिए द्वितीयक होते हैं ।'' सामान्यत: इनके बीच निम्नलिखित अन्तर हैं।

1. प्राथमिक समंक मौलिक होते हैं तथा ये सांख्यिकीय विधियों के लिए कच्चे माल के रूप मे होते हैं जबकि द्वितीयक समंक सांख्यिकीय यन्त्र से एक बार गुजर चुके होते हैं, इसलिए ये निर्मित माल की भाँति होते हैं ।
2. प्राथमिक समंक नये सिरे से शुरू से अन्त तक अनुसन्धानकर्ता द्वारा विभिन्न व्यक्तियों से एकत्रित किये जाते हैं जबकि द्वितीयक समंक अन्य व्यक्तियों या संस्थाओं द्वारा पूर्व संकलित होते हैं ।
3. प्राथमिक समंक अनुसन्धान के उद्देश्य के सर्वथा अनुकूल होते हैं और उनमें अधिक संशोधन करने की आवश्यकता नहीं होती है जबकि द्वितीयक समंकों का प्रयोग करने से पहले उनकी आलोचनात्मक जाँच कर उनमें उद्देश्य के अनुसार संशोधन करने पड़ते हैं।
4. प्राथमिक समंकों के संकलन में अधिक समय, शक्ति य धन व्यय करना पड़ता है जबकि द्वितीयक समंकों मे अपेक्षाकृत कम समय, शक्ति व धन व्यय करना पड़ता है क्योंकि ये अधिकतर पत्र-पत्रिकाओं, विवरणों, सरकारी व गैर-सरकारी प्रकाशनों में सरलता से उपलब्ध हो जाते हैं ।
5. वास्तव में, प्राथमिक एव द्वितीयक समको का अन्तर केवल मात्रा का है, प्रकृति का नहीं । एक प्रकार के समंक जो एक व्यक्ति के लिए प्राथमिक हैं तो दूसरे व्यक्ति के लिए द्वितीयक हो जाते हैं । जैसे रिजर्व बैंक द्वारा एकत्रित आंकड़े उसके लिए प्राथमिक हैं, लेकिन वही अन्य प्रयोगकर्ताओं के लिए द्वितीयक हो जाते हैं।

3.5 प्राथमिक समंकों के संग्रहण की रीतियाँ (Methods of collecting Primary Data)

प्राथमिक समंक संग्रहण करने के लिए निम्नलिखित रीतियाँ अपनाई जाती हैं :

3.5.1 प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान (Direct Personal Investigation)

3.5.2 अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान (Indirect Personal Investigation)

3.5.3 संवाददाताओं या स्थानीय स्रोतों से सूचना-प्राप्ति (Information through Correspondents or local Sources)

3.5.4 सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना-प्राप्ति (Information through Schedules to be filled in by Informants)

3.5.5 प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना-प्राप्ति (Information through Schedules to be filled in by Enumerators)

3.5.1 प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान (Direct Personal Investigation)

इस रीति के अनुसार अनुसन्धानकर्ता स्वयं अनुसन्धान क्षेत्र में जाकर सूचना देने वालों से प्रत्यक्ष रूप से व्यक्तिगत सम्पर्क स्थापित करता है और निरीक्षण तथा अनुभव द्वारा सूचनाएँ एकत्रित करता है । यह रीति ऐसे अनुसन्धानों के लिए अधिक उपयुक्त है जिनका क्षेत्र सीमित या स्थानीय प्रकृति का हो, तथा जहाँ समंकों की मौलिकता, शुद्धता व गोपनीयता का अधिक महत्व हो । यूरोपीय देशों में आर्थर यंग **(Arthur Young)** तथा ली प्ले **(Le Play)** ने अपने अध्ययन के लिए इस रीति का ही प्रयोग किया था ।

इस रीति में अनुसंधानकर्ता को अधिक व्यावहारिक एवं कुशल, धैर्यवान, विनम्र, तर्कशील, निष्पक्ष एवं सूक्ष्मदर्शी होना चाहिए । उसे सम्बन्धित क्षेत्र की भाषा, रीति-रिवाज, व्यावहारिकता आदि का पूर्ण ज्ञान होना चाहिए ताकि विभिन्न सूचकों से अनेक प्रश्न पूछकर विश्वसनीय एवं शुद्ध आंकड़े प्राप्त कर सके । यथासम्भव उसे सूचना देने वाले को पूर्ण विश्वास दिलाना चाहिये कि उनकी सूचना को अधिक गोपनीय रखा जायेगा और वह किसी प्रकार से उनके लिए अहितकर नहीं होगी।

3.5.1.1 प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान की उपयुक्तता: यह रीति ऐसे अनुसन्धानों के लिए अधिक उपयुक्त है:

(i) जिनका क्षेत्र सीमित एवं स्थानीय प्रकृति का हो,

(ii) जिसमें उच्च स्तर की शुद्धता चाही गयी हो,

(iii) जहाँ समंकों की मौलिकता पर अधिक जोर देना हो,

(iv) जहाँ विषय की जटिलता के कारण स्वयं अनुसन्धानकर्ता की उपस्थिति आवश्यक हो, एवं जहाँ समंकों को गुप्त रखना हो ।

3.5.1.2 प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान के गुण: प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान के गुण इस प्रकार हैं:

(i) मौलिकता : अनुसन्धानकर्ता के व्यक्तिगत रूप से उपस्थित होने के कारण एकत्रित समंक अपेक्षाकृत अधिक मौलिक होते हैं ।

(ii) शुद्धता : व्यक्तिगत सम्पर्क की वजह से समंकों में शुद्धता उच्च स्तर की पायी जाती है।

(iii) सजातीयता : एक ही व्यक्ति द्वारा समंक एकत्रित किये जाने के कारण प्राप्त समंकों में सजातीयता बनी रहती है ।

(iv) लोचदार : यह रीति लोचदार है क्योंकि अनुसन्धानकर्ता आवश्यकता पड़ने पर प्रश्नों में आवश्यक सुधार करके अभीष्ट सूचनाएँ उपलब्ध कर सकता है ।

(v) विस्तृतता एवं विश्वसनीय सूचना : इस रीति से अनुसन्धानकर्ता को मुख्य विषय के अतिरिक्त सूचनाओं की जानकारी भी हो जाती है जिन्हें भविष्य में अन्य किसी अनुसंधान में आवश्यकतानुसार प्रयुक्त किये जाने की सम्भावना रहती है ।

(vi) सूचना की सत्यता की जाँच : अनुसन्धानकर्ता अपने चातुर्य व अनुभव के आधार पर समंक संग्रहण के दौरान सूचना की सत्यता की जाँच कर सकता है ।

3.5.1.3 प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान के दोष: प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान के दोष निम्न प्रकार हैं:

(i) पक्षपात : यद्यपि जांचकर्ता से अपेक्षा की जाती है कि वह पूर्ण रूप से निष्पक्ष रहे फिर भी व्यक्तिगत पक्षपात की सम्भावना रहती है जो जाँच कार्य को प्रभावित कर सकती है।

(ii) विस्तृत क्षेत्र के लिए अनुपयुक्त : यह प्रणाली विस्तृत क्षेत्र के लिए सदैव अनुपयुक्त होती है।

(iii) भ्रामक निष्कर्ष : सीमित जाँच क्षेत्रों से प्राप्त समंकों में सभी महत्वपूर्ण तत्वों का समावेश नहीं हो सकता है । अत: सम्भव है ये सम्पूर्ण समग्र का सही प्रतिनिधित्व न कर सके और निष्कर्ष भ्रामक हो ।

(iv) अपव्यय : इसमें समय, धन तथा शक्ति का अपव्यय होता है ।

3.5.1.4 प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान के प्रयोग सम्बन्धी सावधानियाँ: उपयुक्त दोषों के होते हुए भी यह रीति अच्छी है, परन्तु इस पद्धति का उपयोग करते समय निम्न सावधानियों को ध्यान में रखा जाना चाहिये:

(i) अनुसन्धानकर्ता व्यवहारकुशल, मृदुभाषी व धैर्यशील होना चाहिए जिससे सूचना देने वालों का सहयोग और विश्वास प्राप्त किया जा सके ।

(ii) अनुसन्धानकर्ता उस समग्र या क्षेत्र की विशेषताओं, रीति-रिवाजों तथा भाषा इत्यादि से पूर्ण परिचित हो ।

(iii) पूछे जाने वाले प्रश्न संक्षिप्त व सारगर्भित हों ।

(iv) अनुसन्धानकर्ता को बिना पक्षपात व पूर्वाग्रह के जाँच कार्य करना चाहिए ।

(v) अनुसन्धानकर्ता को इस बात की भी पुष्टि कर लेनी चाहिए कि प्रश्न सही व्यक्ति से पूछे गये हैं और वह व्यक्ति इन प्रश्नों के उत्तर देने में सक्षम है ।

3.5.2 अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान (Indirect Oral Investigation)

अनुसन्धान का क्षेत्र विस्तृत व जटिल प्रकृति का होने पर अनुसन्धानकर्ता के लिए यह सम्भव नहीं हो पाता है कि वह प्रत्यक्ष रूप से अनुसन्धान क्षेत्र की सभी इकाइयों से प्रत्यक्ष सम्पर्क स्थापित कर सूचना प्राप्त कर सके । इस स्थिति में वह तृतीय पक्षकारों, जिन्हें उस विषय के बारे में जानकारी है, के सहयोग से सूचनाएँ प्राप्त की जाती हैं । जिन व्यक्तियों से अप्रत्यक्ष एवं मौखिक रूप से सम्बन्धित सूचना प्राप्त की जाती है, उन्हें साक्षी कहा जाता है । साक्षी वे व्यक्ति होते हैं जिनकी सम्बन्धित व्यक्तियों से घनिष्ठता होती है और जो उनके विषय में अधिकृत सूचना व परामर्श दे सकें ।

यह रीति ऐसी समस्याओं के लिए अधिक उपयुक्त रहती है जहाँ सूचना दाताओं के समस्या के सम्बन्ध में परस्पर विरोधी विचार हों ।

3.5.2.1 अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान की उपयुक्तता: यह रीति ऐसे अनुसन्धानों के लिए अधिक उपयुक्त है जहाँ:

(i) क्षेत्र सीमित हो,

(ii) शुद्धता पर अधिक जोर देना हो

(iii) आँकड़े गुप्त रखने हों

(iv) आँकड़ों की मौलिकता पर जोर देना हो ।

3.5.2.2 अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान के गुण: अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान के गुण निम्न प्रकार हैं।

(i) विशेषज्ञों की सम्मति : इस रीति में अनुसन्धान के विषय पर विशेषज्ञों की राय तथा उनके सुझाव प्राप्त हो जाते हैं । पक्ष और विपक्ष के व्यक्तियों से पूछताछ करने से समस्या के विभिन्न पहलुओं का विवेचन हो जाता है ।

(ii) निष्पक्षता : इस रीति के अनुसार संकलित आँकड़े अनुसन्धानकर्ता के व्यक्तिगत पक्षपात से प्रभावित नहीं होते ।

(iii) मितव्ययिता : इस पद्धति में समय, धन व परिश्रम कम लगते हैं । कार्य शीघ्रता से हो जाता है और अधिक परेशानी नहीं उठानी पड़ती ।

(iv) विस्तृत क्षेत्र : यह रीति विस्तृत क्षेत्र में तथा ऐसे अनुसन्धानों में उपयुक्त है जहाँ संसूचकों से प्रत्यक्ष सम्पर्क सम्भव या लाभप्रद न हों ।

(v) गुप्त सूचना : इसमें अन्य पक्षकारों से ऐसी सूचना प्राप्त हो जाती है जो स्वयं सूचक अपने बारे में या तो देना नहीं चाहता या गलत सूचना देता है । जैसे- पूर्ति विभाग के

निरीक्षक राशन कार्ड बनाते समय परिवार के सदस्यों की संख्या की सत्यता की जाँच पड़ोसियों से पूछकर कर लेते है ।

3.5.2.3 अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान के दोष: अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान के दोष निम्नलिखित हैं:

(i) उच्चस्तरीय शुद्वता की कमी : प्रत्यक्ष अनुसन्धान की अपेक्षा इस रीति में प्राप्त समंकों में शुद्वता की कमी रहती है ।

(ii) पक्षपातपूर्ण विचार : जिन साक्षियों से सूचना एकत्र की जाती है, हो सकता है कि वे लापरवाही, पक्षपात या अज्ञानता के कारण झूठी सूचनाएँ दे दें । इसका प्रभाव अनुसन्धान के निष्कर्षो पर पड़ता है ।

(iii) एकरूपता का अभाव : विभिन्न प्रकृति के सूचकों से प्राप्त सूचना मे सजातीयता का गुण समाप्त हो जाता है, जिससे समंक अतुलनीय हो जाते हैं ।

3.5.2.4 अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान के प्रयोग सम्बन्धी सावधानियाँ: इस पद्धति का उपयोग करते समय निम्न सावधानियों को ध्यान में रखा जाना चाहिये:

(i) सूचना देने वाले साक्षियों (witnesses) की संख्या पर्याप्त व सभी वर्गो का प्रतिनिधित्व करनी वाली होनी चाहिए ।

(ii) जिन साक्षियों से सूचना प्राप्त की जा रही है उनकी बात पर बिना पुष्टि किये पूर्ण विश्वास नहीं करना चाहिए ।

(iii) यह सुनिश्चित किया जाना आवश्यक है कि जिन व्यक्तियों से सूचना प्राप्त करनी है, उनको सम्बन्धित तथ्यों की यथेष्ठ जानकारी है, सूचना देने में लापरवाही व उदासीन नहीं हैं तथा उनकी मानसिक स्थिति ठीक है ।

(iv) यह ध्यान में रखा जाना चाहिए कि जिस व्यक्ति के माध्यम से सूचना प्राप्त की जा रही है वह उस विषय के पक्ष या विपक्ष में पक्षपातपूर्ण धारणा तो नहीं रखता है । यदि ऐसा हु आ तो परिणाम भ्रामक होंगे ।

(v) अनुसन्धानकर्ता को चतुराई, विनम्रता, धैर्य व निष्पक्षता से कार्य करना चाहिए ।

(vi) जहाँ तक सम्भव हो, सूचना एकत्रित करने वाला व्यक्ति, सूचनादाताओं का विश्वासपात्र एवं प्रभावशाली व्यक्तित्व का होना चाहिए ।

3.5.3 संवाददाताओं या स्थानीय स्रोतों से सूचना-प्राप्ति (Information through Correspondents or Local Source)

जब विभिन्न स्थानों से नियमित रूप से सूचना प्राप्त करना आवश्यक होता है तो अनुसन्धानकर्ता विभिन्न स्थानों पर स्थानीय व्यक्तियों या संवाददाताओं की सूचना देने के लिए नियुक्ति कर देता है । ये लोग समय-समय पर अनुसन्धानकर्ता को अधिकतर अपने अनुभव पर या अनुमान लगाकर आवश्यक सूचना भेजते रहते हैं । अनुसन्धानकर्ता उन सूचनाओं को सम्पादित करके अपने उपयोग में लाता है । यह रीति अधिकतर समाचार-पत्रों व पत्रिकाओं द्वारा वस्तुओं के बाजार भाव ज्ञात करने,

सरकार द्वारा फसलों के अनुमानित मण्डी मूल्य ज्ञात करने आदि के लिए प्रयोग की जाती है । कौनर के अनुसार, **"यह रीति तब उपयोगी रहती है जबकि सस्ते एवं शीघ्रता से आँकड़े प्राप्त करने हों तथा परिशुद्धता विशेष महत्व न रखती हो ।"**

3.5.3.1 संवाददाताओं या स्थानीय स्रोतों से सूचना प्राप्ति की उपयुक्तता: यह रीति ऐसे अनुसन्धानों के लिए अधिक उपयुक्त है जहाँ शुद्धता की आवश्यकता नहीं होती, केवल अनुमान और प्रवृत्तियाँ ही ज्ञात करनी होती हैं ।

3.5.3.2 संवाददाताओं या स्थानीय स्रोतों से सूचना प्राप्ति के गुण: संवाददाताओं या स्थानीय स्रोतों से सूचना प्राप्ति के गुण निम्न प्रकार है।

(i) मितव्ययिता : इस रीति में समय, शक्ति और धन की बचत होती है । सूचना शीघ्रता से और कम खर्च मे प्राप्त हो जाती है ।

(ii) व्यापक क्षेत्र : इस रीति से दूर-दूर के स्थानों से लगातार सूचना प्राप्त की जा सकती है जिससे व्यापक क्षेत्र का अनुसन्धान किया जा सकता है ।

(iii) सततता : सूचना संग्रहण की इस रीति में सूचना लगातार प्राप्त होती रहती है जिससे अनुमान की आवश्यकता नहीं पड़ती ।

(iv) लोचशीलता : सूचना संग्रहण के लिए संवाददातातों को समय-समय पर परिवर्तित व परिशोधित आदेश दिये जा सकते हैं ।

3.5.3.3 संवाददाताओं या स्थानीय स्रोतों से सूचना प्राप्ति के दोष : संवाददाताओं या स्थानीय स्रोतों से सूचना प्राप्ति के दोष निम्न प्रकार हैं :

(i) मौलिकता का अभाव : संकलित सामग्री में मौलिकता की कमी रहती है क्योंकि यह प्राय: अनुमान या अनुभव के आधार पर भेजी जाती है ।

(ii) उच्च स्तरीय शुद्धता का अभाव : संकलित समंकों से प्राप्त निष्कर्षों से उच्च स्तरीय शुद्धता की आशा नहीं की जा सकती है ।

(iii) एकरूपता का अभाव: अलग-अलग संवाददाता समंक संग्रह करने में अलग-अलग विधियों का प्रयोग करते हैं जिससे समंकों में एकरूपता नहीं रहती है ।

(iv) पक्षपात : एकत्रित सामग्री पर संवाददाताओं के व्यक्तिगत पक्षपात की प्रत्यक्ष छाप रहती है। इससे संकलित समंक अशुद्ध और असत्य होते हैं परिणामस्वरूप गलत एवं भ्रामक निष्कर्ष निकलने की पूर्ण सम्भावना रहती है ।

(v) अनुमान पर आधारित: इसमें सामग्री संकलन केवल अनुमान पर आधारित होता है ।

3.5.3.4 संवाददाताओं या स्थानीय स्रोतों से सूचना प्राप्ति के प्रयोग सम्बन्धी सावधानियाँ: इस पद्धति का उपयोग करते समय निम्न सावधानियों को ध्यान में रखा जाना चाहिये:

(i) संवाददाता इतने योग्य एवं कुशल हों कि वे समस्या को ठीक प्रकार से समझ लें ।

(ii) संवाददाताओं को चाहिए कि वे कार्य में रुचि लेकर अपने कर्त्तव्य का पालन करें ।

(iii) संवाददाता व्यक्तिगत विचारधारा व पक्षपात के दोष से सदैव दूर रहें ।

(iv) संवाददाताओं की संख्या अधिक से अधिक रखी जाए ताकि प्राप्त सूचनाओं को मिलाकर अशुद्धि की जाँच की जा सके ।

3.5.4 सूचकों द्वारा प्रश्नावली भरकर सूचना-प्राप्ति (Information through Questionnaire to filled in by Informants)

इस रीति के अनुसार अनुसन्धानकर्ता, सर्वप्रथम जाँच से सम्बन्धित प्रश्नों की एक प्रश्नावली तैयार करता है । फिर वह उसकी अनेक प्रतियाँ डाक द्वारा सूचना देने वालों के पास भेज देता है जो उसको भरकर निश्चित तिथि तक लौटा देते हैं । संसूचकों का सहयोग व विश्वास प्राप्त करने के लिए वह सूचना को गुप्त रखने का आश्वासन देता है तथा अनुसूची से संलग्न अनुरोध-पत्र द्वारा वह जाँच का उद्देश्य स्पष्ट कर देता है । अनुसूची तैयार करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि प्रश्न सरल, स्पष्ट और छोटे हों, संख्या में कम हों, उत्तेजना, शंका या विरोध उत्पन्न करने वाले न हों, अनुसन्धान से प्रत्यक्ष रूप से सम्बन्धित हों और उत्तर अधिकतर "हाँ" अथवा 'ना' या 'अंक 1, 2,3 ... के रूप में प्राप्त किया जा सकें । इस प्रकार की सावधानियाँ लेने पर यह रीति उपयोगी सिद्ध होती है ।

3.5.4.1 प्रश्नावली द्वारा सूचना-प्राप्ति की उपयुक्तता: समंक संग्रहण की यह प्रणाली ऐसे विस्तृत क्षेत्र के लिए अधिक उपयुक्तता है जहाँ सूचना देने वाले शिक्षित हों । अधिकतर मत-सर्वेक्षण, उपभोक्ताओं की रुचियों का अनुसन्धान आदि इस रीति द्वारा किये जाते हैं । भारत में सरकार द्वारा उद्योगों के वार्षिक सर्वेक्षण के लिए यह प्रणाली अपनाई जाती है ।

3.5.4.2 प्रश्नावली द्वारा सूचना-प्राप्ति के गुण: सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना-प्राप्ति के गुण निम्न प्रकार हैं:

(i) विस्तृत क्षेत्र : इस रीति के माध्यम से विस्तृत क्षेत्र का अनुसन्धान किया जा सकता है ।

(ii) मौलिकता : इस रीति से नये सिरे से समंकों का संग्रहण होता हे, अत: संग्रहीत समंकों में मौलिकता रहती है ।

(iii) मितव्ययिता : इस रीति से कम समय व कम खर्च में विशाल क्षेत्र की सूचनाएँ उपलब्ध की जा सकती है । प्रो. ए.आर इलर्सिक के अनुसार, "यह रीति, जिसका कभी व्यापक प्रयोग होता था, तुलनात्मक रूप से कम लागत पर व्यापक क्षेत्र में अनुसन्धान करने का लाभ रखती है और अनुसन्धान क्षेत्र जितना व्यापक होगा, प्रारूप (प्रश्नावली) भरने से होने वाली गलतियों की सम्भावना उतनी ही कम हो जायेगी ।"

(iv) अभिनति से मुक्ति : प्रश्नावली में सूचनाएँ स्वयं सूचकों द्वारा ही भरी जाती है, अत: संग्रहीत समंक व इससे प्राप्त परिणाम अनुसन्धानकर्ता की अभिनति से मुक्त रहते हैं ।

(v) पर्याप्त प्रतिनिधित्व : सस्ती होने के कारण इस रीति में अनुसन्धान का क्षेत्र आवश्यकतानुसार बढ़ाया जा सकता है अथवा समग्र में से बड़ा प्रतिदर्श लिया जा सकता है जिससे प्रतिदर्श समग्र का अधिक प्रतिनिधि हो जाये व परिणाम अधिक विश्वसनीय हो सकें ।

3.5.4.3 प्रश्नावली द्वारा भरकर सूचना-प्राप्ति के दोष : सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना-प्राप्ति के दोष निम्न प्रकार हैं :

(i) अस्पष्ट एवं अपूर्ण सूचना : सूचकों पर कोई प्रतिबन्ध न होने के कारण वे प्रश्नावलियाँ वापस नहीं भेजते हैं और जो वापस भेजते हैं उनमें से **10%** से 20% तक अपूर्ण रहती हैं। सूचकों के अरुचिकर होने के कारण सूचनाएँ अधिकतर अस्पष्ट एवं अपूर्ण रहती हैं।

(ii) शुद्धता का अभाव : प्राप्त सूचना में शुद्धता की कमी रहती है । यदि प्रश्नावली को सावधानी से तैयार नहीं किया गया तो सूचकों द्वारा प्रश्नों के गलत अर्थ लगाये जाएंगे। इससे गलत सूचना एवं निष्कर्ष प्राप्त होंगे ।

(iii) लोचशीलता का अभाव : यह रीति लोचदार नहीं है क्योंकि अपूर्ण सूचना प्राप्त होने पर पूरक प्रश्नों का पूछना भी सम्भव नहीं है ।

(iv) शिक्षित क्षेत्र तक सीमित : यह रीति केवल शिक्षित सूचकों के लिए ही उपयुक्त है । अत: इसका क्षेत्र भी सीमित होता है ।

(v) पक्षपात : सूचकों के पक्षपातपूर्ण रुख व लापरवाही से गलत उत्तर प्राप्त हो सकते हैं जिससे भ्रामक एवं गलत निष्कर्ष प्राप्त होंगे ।

(vi) सूचना-प्रेषण में भय : सूचक प्रश्नों का उत्तर लिखित में देने से घबराते हैं क्योंकि कहीं सूचना उनके विरुद्ध प्रयुक्त न कर ली जाए ।

(vii) गहन अध्ययन असंभव : गहन अध्ययन के लिए जानकारी अत्यन्त आवश्यक है । ऐसी जानकारी विस्तृत सूचना वाली प्रश्नावली से ही उपलब्ध हो सकती है लेकिन सूचक प्राय: विस्तृत प्रश्नों का उत्तर ही नहीं देते हैं ।

3.5.4.4 प्रश्नावली भरकर सूचना-प्राप्ति के प्रयोग सम्बन्धी सावधानियाँ: इस पद्धति को अधिक उपयोगी एवं सफल बनाने के लिए निम्न सावधानियाँ बरतनी चाहिये:

(i) प्रश्नावली के प्रश्नों की संख्या कम हो, प्रश्न सरल व स्पष्ट हों ।

(ii) सूचनादाताओं का सहयोग, सदभावना एवं विश्वास प्राप्त किया जाये ।

(iii) पूर्ण सूचनाएँ शीघ्रता से प्राप्त करने की व्यवस्था की जाए ।

(iv) यह ध्यान रखें कि कहीं सूचकों में पक्षपात का भाव तो निहित नहीं है ।

3.5.5 प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना-प्राप्ति (Information through Schedules to be filled in by Enumerators)

सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवा कर सूचना प्राप्त करने में अनेक कठिनाइयाँ आती हैं तथा सूचना भी अपर्याप्त व अशुद्ध होती हैं । इन कठिनाइयों को दूर करने के लिए यह

रीति अपनाई जाती है। इस रीति में अनुसन्धान के विभिन्न पहलुओं को ध्यान में रखते हुए अनुसूचियाँ तैयार की जाती हैं । परन्तु इन अनुसूचियों को प्रत्यक्ष रूप से सूचकों के पास नहीं भेजा जाता वरन् अनुसन्धानकर्ता अनुसन्धान के क्षेत्र को अनेक भागों में विभक्त कर प्रत्येक भाग के लिए प्रगणकों की नियुक्ति कर देता है जो घर-घर जाकर सूचकों से पूछताछ करके स्वयं अनुसूचियों को भरते हैं। इस रीति में समंक संग्रहण की सफलता प्रगणकों पर निर्भर करती हैं । प्रगणक परिश्रमी, ईमानदार, कार्यकुशल, सुशिक्षित, धैर्यवान व वाक्पटु होने चाहिए । प्रगणकों को सूचकों के रहन-सहन, भाषा, रीति-रिवाज आदि की पूरी जानकारी होनी चाहिए ताकि वह उनसे विश्वसनीय सूचना संग्रहीत कर सकें ।

3.5.5.1 प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना-प्राप्ति की उपयुक्तता: यह रीति उन अनुसन्धानों में अधिक उपयुक्त है जहाँ का क्षेत्र अत्यन्त विस्तृत होता है तथा समय, धन और श्रम भी उपलब्ध है अर्थात् सामान्यतया सरकार ही इस रीति का प्रयोग करती है न कि निजी संस्थाएँ । जैसे- जनगणना, आर्थिक एवं सामाजिक सर्वेक्षण आदि में इस रीति को अपनाया जाता है ।

3.5.5.2 प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना-प्राप्ति के गुण: प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना-प्राप्ति के गुण निम्न प्रकार हैं:

(i) विस्तृत क्षेत्र: इस प्रणाली द्वारा अत्यन्त विस्तृत क्षेत्र में सूचना प्राप्त की जा सकती है।

(ii) शुद्धता: इस रीति में शुद्धता अधिक होती है क्योंकि योग्य, प्रशिक्षित तथा अनुभवी प्रगणकों द्वारा सूचनाएँ संग्रहीत की जाती हैं ।

(iii) व्यक्तिगत सम्पर्क: प्रगणकों का सूचकों से व्यक्तिगत सम्पर्क रहता है जिससे जटिल प्रश्नों के भी शुद्ध और विश्वसनीय उत्तर प्राप्त हो सकते हैं ।

(iv) निष्पक्षता: इसमें व्यक्तिगत पक्षपात का विशेष प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि प्रगणक अधिकतर पक्ष और विपक्ष दोनों प्रकार के होते हैं ।

(v) अशिक्षित व्यक्तियों से सूचना: प्रगणक अशिक्षित व्यक्तियों से भी सूचना संग्रहीत कर सकते हैं।

3.5.5.3 प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना-प्राप्ति के दोष: प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना-प्राप्ति के दोष निम्नलिखित हैं:

(i) अधिक व्यय : इस रीति में समंक संग्रहण में प्रगणकों के प्रशिक्षण व नियुक्ति में काफी धन खर्च करना होता है ।

(ii) अधिक समय : तथ्य संग्रहण में पर्याप्त समय लग जाता है जिससे कई बार संग्रहीत समंकों का महत्व नहीं के बराबर रह जाता है ।

(iii) प्रगणकों के पक्षपात का प्रभाव : यदि प्रगणक अनुसन्धान के सम्बन्ध में एकपक्षीय विचार रखते हैं तो संग्रहीत समंकों में प्रगणकों के विचार का काफी समावेश हो जाता है।

(iv) निरीक्षण की अव्यवस्था: प्रगणकों के कार्य का निरीक्षण करना एक सरल कार्य नहीं है । इसकी उचित व्यवस्था के अभाव में समंक शुद्ध रूप से प्राप्त नहीं होंगे ।

(v) संगठन में कठिनाई : इस रीति में समंक संग्रहण व प्रशिक्षण के सुदृढ़ संगठन की आवश्यकता होती है ।

3.5.5.4प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना-प्राप्ति के प्रयोग सम्बन्धी सावधानियाँ : इस रीति की सफलता प्रश्नावली की उत्तमता और प्रगणकों की ईमानदारी एवं योग्यता पर पर्याप्त सीमा तक निर्भर करती है । अत: इसका प्रयोग करते समय निम्नलिखित सावधानियों का ध्यान रखना चाहिये :

(i) प्रगणकों की नियुक्ति के समय यह जाँच कर लेना चाहिए कि वे निपुण, ईमानदार व परिश्रमी हों ।

(ii) प्रशिक्षण के बाद उन्हें एक अनुसूची भरकर नमूनार्थ दे देनी चाहिए ।

(iii) प्रश्नों की संख्या कम, सरल व स्पष्ट होनी चाहिए ।

(iv) उत्तरों की पुष्टि करने के लिए प्रगणकों से प्रश्न पूछ लेना चाहिए ।

(v) प्रगणकों के कार्य का समय-समय पर निरीक्षण भी आवश्यक है ।

(vi) प्रगणक कार्य में पूर्णरूप से रुचिकर हों तथा क्षेत्रीय भाषा का ज्ञान और व्यवहार-कुशल होना भी आवश्यक है ।

3.6 उपयुक्त रीति का चयन (Selection of a Suitable Method)

समंकों के संग्रहण की सभी रीतियाँ अपनी दृष्टि से उपयुक्त हैं । प्रत्येक रीति के अपने गुण व दोष हैं । अत: सर्वश्रेष्ठ रीति का चयन करना जटिल कार्य है । कहीं पर एक रीति उपयुक्त हो सकती है, जबकि दूसरी समस्या के अध्ययन के लिए अन्य रीति उपयुक्त हो सकती है ।

डॉ. बाउले के अनुसार, "संकलन तथा सारणीयन में सामान्य ज्ञान प्रमुख आवश्यकता तथा 'अनुभव' प्रमुख शिक्षक होते हैं । " अत: यह बतलाना कि सभी परिस्थितियों में कौन-सी रीति उपयुक्त है, अत्यन्त कठिन है क्योंकि जाँच की आवश्यकतानुसार उपयुक्त रीति का चयन करना पड़ता है । प्राय: उपयुक्त रीति का चुनाव करते समय निम्नांकित बातों का ध्यान रखना चाहिए:

1. **अनुसन्धान की प्रकृति (Nature of Investigation) :** समंक संग्रहण के लिए किस रीति को काम में लाया जावे, यह अनुसन्धान की प्रकृति पर अत्यधिक निर्भर करता है। यदि अनुसन्धान की प्रकृति ऐसी है जिसमें सूचना देने वालों से प्रत्यक्ष सम्पर्क रखना आवश्यक है, जैसे निरक्षर व अशिक्षित किसानों के रहन-सहन की स्थिति का अध्ययन करना हो तो प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान आवश्यक है । यदि क्षेत्र के विस्तृत होने से या अन्य किसी कारण से प्रत्यक्ष व्यक्तिगत सम्पर्क सम्भव या आवश्यक न हो तो अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान अपेक्षित है । यदि सूचकों से लिखित रूप से सूचना प्राप्त करनी हो तथा सूचक शिक्षित हों तो उनसे प्रश्नावली भरवाकर डाक द्वारा प्राप्त करना

अपेक्षित है । यदि कुछ सूचक अशिक्षित हैं उदाहरण के लिए जनगणना करनी हो तो प्रगणकों की सहायता लेना आवश्यक है ।

2. **उद्देश्य एवं क्षेत्र (Objects and Scope) :** यदि जाँच के सीमित क्षेत्र में अनेक विषयों पर सूचना एकत्रित करनी हो तो प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान उपयुक्त हैं किन्तु एक विस्तृत क्षेत्र में नियमित सूचना प्राप्त करने के लिए संवाददाताओं द्वारा सूचना प्राप्त करना ही उपयुक्त होगा । विस्तृत क्षेत्र में व्यापक अनुसन्धान के लिए प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवाकर सूचना एकत्रित की जा सकती है ।

3. **उपलब्ध आर्थिक साधन (Financial Resources) :** अनुसन्धानकर्ता के उपलब्ध वित्तीय साधनों पर निर्भर करता है कि किस रीति को अपनाया जावे । आर्थिक साधन पर्याप्त होने पर प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान अथवा प्रगणकों द्वारा अनुसूची भरवाने की विधियों को अपनाया जा सकता है, क्योंकि ये विधियाँ खर्चीली हैं । पर्याप्त वित्तीय साधनों के अभाव में डाक द्वारा प्रश्नावली भरवाने की रीति अपनायी जा सकती है, क्योंकि यह रीति अपेक्षाकृत सस्ती है ।

4. **शुद्धता का स्तर (Standard of Accuracy) :** जितनी शुद्धता की मात्रा वांछनीय समझी जाए उसी के अनुसार संकलन रीति का चुनाव करना आवश्यक है । विस्तृत क्षेत्र में अत्यधिक शुद्धता क्रमश: प्रगणकों के द्वारा अनुसूचियाँ भरवाकर प्राप्त की जा सकती है । अप्रत्यक्ष अनुसन्धान में अधिक शुद्धता प्राप्त नहीं की जा सकती है ।

5. **उपलब्ध समय (Available Time) :** अनुसन्धान के लिए उपलब्ध समय भी अनुसन्धान की रीति के चुनाव को प्रभावित करता है । यदि सूचनाएँ कम समय में प्राप्त करनी हैं तो संवाददाताओं से प्रश्नावलियाँ भरवाकर सूचना प्राप्त की जा सकती हैं, जबकि पर्याप्त समय होने पर व्यक्तिगत अनुसन्धान या प्रगणकों के माध्यम से सूचना संग्रहीत की जा सकती हैं ।

6. **अन्य परिस्थितियाँ (Other Circumstances) :** अनुसन्धान रीति का चुनाव करते समय सूचकों की योग्यता व रहन-सहन, प्रगणकों के प्रशिक्षण की व्यवस्था, प्रश्नावली के निर्माण व छपवाने की व्यवस्था व अनुसन्धान क्षेत्र में राजनैतिक व सामाजिक परिस्थितियों का विशेष ध्यान रखा जाना चाहिए ।

अत: सामग्री संग्रहण की विभिन्न रीतियों की उपयुक्तता अनुसन्धान के उद्देश्य, क्षेत्र, उपलब्ध समय, परिस्थिति, उपलब्ध धनराशि आदि अनेक बातों पर निर्भर करती है ।

उदाहरण 1 :

निम्न उद्देश्यों हेतु समंक संग्रहण की कौन-सी विधि अधिक उपयुक्त है और क्यों?

Which is the most suitable method of collection of data for the following purposes and why?

(i) किसी नये उत्पाद की बिक्री के बारे में जानकारी प्राप्त करनी है ।

Information is to be gathered about the sale of a certain new product.

(ii) भारत के विद्यालयों में कार्यरत अध्यापकों के जीवन-स्तर के सम्बन्ध में मानव संसाधन मन्त्रालय द्वारा सूचना एकत्रित करनी है ।

Information is to be collected for living standard of school teachers of India by the Ministry of Human Resource Development.

(iii) महाविद्यालयों में छात्रों की उपस्थिति की प्रवृति की जानकारी प्राप्त करना ।

Information is to be gathered about the attendance of students In colleges.

(iv) भारतीय इस्पात प्राधिकरण लिमिटेड की लाभदायकता का विश्लेषण करना है ।

Profitability of Steel Authority of India Ltd. Is to be analysed

(v) किसी दैनिक समाचार-पत्र द्वारा विभिन्न स्कन्ध बाजारों में अंशों व ऋण-पत्रों के प्रतिदिन उद्धृत बाजार मूल्य की जानकारी करनी है ।

To know the market prices of share and debentures quoted Daily in different stock exchanges by a daily newspaper.

(vi) सीमेन्ट फैक्टरी के 100 श्रमिकों का आय-व्यय सम्बन्धी अध्ययन करना ।

The study of income and expenditure of 100 workers of Cement Factory.

(vii) अलवर शहर के ऑटो-रिक्शा चालकों की आर्थिक स्थिति की जानकारी प्राप्त करना ।

To know the economic condition of Auto-Rickshaw pullers in Alwar city.

(viii) एक शोधकर्ता द्वारा भारत सरकार के 2008-2009 के रेलवे बजट का विश्लेषण करना है

The railway budget of Indian Government of 2008-2009 is to be analyzed by a researcher.

(ix) चुनाव का उचित समय निर्धारण करने हेतु सत्तारूढ़ दल द्वारा सूचनाएँ एकत्रित करना।

Informations to be gathered by the ruling party to decide appropriate time Of election.

हल (Solution) :

विभिन्न उद्देश्यों हेतु समंक संग्रहण की उपयुक्त विधियों के प्रकारों को निम्न तालिका के द्वारा स्पष्ट किया गया है :

समंक संग्रहण हेतु उपयुक्त विधि

	विषय वस्तु	**उपयुक्त विधि**	**स्पष्टीकरण**
(i)	नये उत्पाद की बिक्री के बारे जानकारी	फुटकर विक्रेताओं से प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान (प्राथमिक समंक)	अधिक विश्वसनीयता

(ii)	अध्यापकों के जीवन स्तर सम्बन्ध में एच.आर.डी. द्वारा प्राप्त करना	सूचकों द्वारा प्रश्नावली भरवाकर (प्राथमिक समंक)	समिति क्षेत्र एवं वर्ग
(iii)	महाविद्यालयों में छात्रों उपस्थिति की प्रवृत्ति की जानकारी	अप्रकाशित सामग्री उपस्थिति पंजिका (द्वितीयक समंक)	छात्रों द्वारा प्रदत्त सूचना विश्वसनीय नहीं
(iv)	इस्पात प्राधिकरण लाभदायकता की' गणना	प्रकाशित स्रोत (द्वितीयक समंक)	वार्षिक प्रतिवेदन द्वारा
(v)	दैनिक समाचार- पत्र के लिए स्कन्ध बाजारों में अंशों एवं ऋण- पत्रों के प्रतिदिन उद्दत बाजार मूल्य	स्थानीय स्रोतों या संवाददाताओं द्वारा (प्राथमिक समंक)	विस्तृत क्षेत्र अधिक शुद्धता की आवश्यकता नहीं
(vi)	सीमेन्ट फैक्टरी के श्रमिकों आय-व्यय सम्बन्धी अध्ययन	प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान (प्राथमिक समंक)	समिति क्षेत्र एवं अधिक विश्वसनीयता
(vii)	ऑटो-रिक्शा चालकों की आर्थिक स्थिति	प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवाकर (प्राथमिक समंक)	समिति क्षेत्र, अधिक नहीं होना, गहन अध्ययन
(viii)	भारत सरकार के 2008-2009 के रेलवे बजट का विश्लेषण	प्रकाशित स्रोत- सरकारी प्रकाशन (द्वितीयक समंक)	रेलवे मन्त्रालय द्वारा प्रकाशित रेलवे बजट
(ix)	सत्तारूढ़ दल द्वारा चुनाव निर्धारण हेतु	अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान	विस्तृत क्षेत्र, अत: व्यक्तिगत सम्पर्क संभव नहीं

3.7 प्रश्नावली तथा अनुसूची (Questionnaire and Schedule)

सांख्यिकीय अनुसन्धान में चाहे संगणन रीति का प्रयोग किया जाये अथवा निदर्शन रीति का, प्राथमिक समंकों के संकलन के लिए प्रश्नावलियाँ या अनुसूचियों का व्यापक प्रयोग किया जाता है। सूचनादाताओं से अथवा प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ अथवा प्रश्नावलियाँ भरवाकर आवश्यक जानकारी संकलित की जाती है । सरकार द्वारा जनगणनाओं के अन्तर्गत अनुसूचियों के प्रयोग से हम भली-भाँति परिचित हैं किन्तु आज अनेक व्यावसायिक संगठन प्रश्नावलियों के माध्यम से अपनी में सुधार करने हेतु ग्राहकों का मत जानते हैं ।

हालांकि व्यवहार में 'प्रश्नावली' तथा 'अनुसूची' (Schedule) दोनों शब्दों का प्रयोग एक ही अर्थ में किया जाता है परन्तु कई क्षेत्रों में इनमें अन्तर पाया जाता है । **'अनुसूची' प्रश्नों की वह सूची है जिसे प्रगणकों द्वारा सूचकों से पूछताछ करके भरा जाता है जबकि 'प्रश्नावली' में आवश्यक जानकारी सूचकों द्वारा ही भरी जाती है । इसी**

सम्बन्ध में यह कहा जा सकता है कि "प्रश्नावली या अनुसूची वह प्रलेख है जिससे सांख्यिकीय अनुसन्धान की विशिष्ट आवश्यकताओं के सम्बन्ध में प्रश्नों का समावेश होता है ताकि सूचकों से प्रत्यक्ष अथवा प्रगणकों द्वारा सांख्यिकीय जानकारी प्राप्त की जा सके।"

3.7.1 प्रश्नावली तैयार करना (Drafting of a Questionnaire)

प्रश्नावली विभिन्न प्रश्नों की एक व्यवस्थित सूची है जिसका उद्देश्य, किसी विषय से सम्बन्धित व्यक्तियों से, डाक द्वारा सूचनाएँ प्राप्त करके प्राथमिक सामग्री का संकलन करना होता है । अनेक अध्ययन विषय क्षेत्र इस प्रकार के होते हैं जिनसे सम्बन्धित विषय-सामग्री एक ही स्थान पर प्राप्त न होकर अनेक स्थान से प्राप्त होती है । स्वाभाविक है कि इन सभी अथवा इनमें से कुछ व्यक्तियों से प्रत्यक्ष रूप से मिलकर सूचनाओं का संग्रह करना एक कठिन कार्य है । एक दूसरे से बहुत दूर-दूर रहने वाले व्यक्तियों का साक्षात्कार करने के लिए भी बहुत अधिक समय और धन की आवश्यकता होती है । अत: प्रश्नावली एक ऐसी प्रविधि है जिसे इन कठिनाइयों का निराकरण करने के लिए प्रयोग किया जाता है । प्रश्नावली में सर्वप्रथम अध्ययन हेतु, विभिन्न पक्षों से सम्बन्धित जिन सूचनाओं की आवश्यकता होती है, उन्हें प्राप्त करने के लिए कुछ विशेष प्रश्नों का निर्माण कर लिया जाता है । तत्पश्चात् प्रश्नों की यह सूची उत्तरदाताओं के पास इस निवेदन के साथ डाक द्वारा भेज दी जाती है कि वे एक निर्धारित अवधि के अन्दर इसके उत्तर भेजने की व्यवस्था करें । अन्त में डाक द्वारा प्राप्त उत्तर से जो सूचनाएँ प्राप्त होती हैं उन्हीं के आधार पर अध्ययन से सम्बन्धित निष्कर्ष निकाल लिये जाते हैं । इस दृष्टिकोण से प्रश्नावली साक्षात्कार प्रविधि का विकल्प (Alternative) है ।

प्रारम्भिक सर्वेक्षण (Pilot Survey) : प्रश्नावलियों को अनुसन्धान कार्य में प्रयोग में लाने से पूर्व कुछ प्रश्नावलियों को नमूने के तौर पर भरवा कर देख लेना चाहिए । इस प्रकार किये गये पूर्व-परीक्षण को 'प्रारम्भिक सर्वेक्षण' कहा जाता है । यदि अनुसन्धान बड़े पैमाने पर किया जाता है तो प्रारम्भिक सर्वेक्षण और भी आवश्यक होता है । यह सर्वेक्षण वास्तविक सर्वेक्षण का प्रतिरूप ही होता है जिसके माध्यम से प्रश्नावलियों की कमी का तथा आने वाली कठिनाइयों का पूर्व ही आभास हो जाता है । इन अनुभवों के आधार पर प्रगणकों को निर्देश दिये जा सकते हैं तथा आवश्यकता होने पर प्रश्नों में संशोधन किया जा सकता है ।

3.7.2 अच्छी प्रश्नावली के गुण (Merits of a Good Questionnaire)

1. **प्रश्नावली का छोटा आकार (Short from of Questionnaire) :** सूचनादाता प्रश्नावली भरने अथवा प्रश्नों का उत्तर देने में आनन्द का अनुभव नहीं करता है। अत: प्रश्नावली का आकार छोटा तथा समाविष्ट प्रश्नों की संख्या कम होनी चाहिए । केवल वही प्रश्न किए जायें जिनका अनुसन्धान से सम्बन्ध है।

2. सरल, स्पष्ट एवं सूक्ष्म प्रश्न (Simple, clear and Questions) : प्रश्न सरल एवं असंदिग्ध रूप से पूछे जाने चाहिए । जटिल, घुमाफिरा कर पूछे गए प्रश्न सूचक क्रुद्ध कर और वह लापरवाही से उत्तर देते हैं । जहाँ तक हो सके तकनीकी, दिखावटी (Pompous) तथा व्यवहार में न आने वाले शब्दों का प्रयोग नहीं करना चाहिए ।

3. प्रश्नों की प्रकृति (Nature of Questions) : नीस्वेंगर के अनुसार प्रश्न तीन प्रकार के होते हैं:

(i) **सामान्य विकल्प प्रश्न (General alternative questions) :** इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर 'हाँ' अथवा 'नहीं', 'गलत' या 'सही' आदि रूपों में दिये जाते हैं । ऐसे प्रश्नों का गठन श्रेष्ठ रहता है क्योंकि इसका विश्लेषण आसानी से हो जाता है ।

(ii) **बहु विकल्प प्रश्न (Multiple choice questions) :** इस प्रकार के प्रश्नों में कई वैकल्पिक उत्तर होते हैं । ये उत्तर प्रश्न के नीचे छपे होते हैं सूचक उनमें से किसी एक पर (✓) का निशान लगा देता है उदाहरणार्थ- (क) आपका पेशा क्या है ?

(अ) डॉक्टर ☐ (ब) वकील ☐

(स) प्राध्यापक ☐ (द) सी.ए. ☐

(य) अन्य

(iii) खुले प्रश्न (Open questions): ऐसे प्रश्नों के उत्तर सूचक को अपने शब्दों में देने होते हैं। जैसे-सरकार के नये विकास कार्यक्रम को सफल बनाने हेतु आप किस प्रकार योगदान दे रहे हैं? क्या आप उच्च शिक्षा का अधिक निजीकरण चाहते हैं ? नीस्वेंगर के अनुसार, "प्रश्नावली खुले प्रश्न से ही प्रारम्म होनी चाहिए ताकि सूचक उसमें रुचि लेने लगे । इसके अतिरिक्त अन्य प्रकार के प्रश्न होने चाहिए ।"

4. वर्जित प्रश्न (Restricted questions) : प्रश्न मानवीय मनोवृत्ति को ध्यान में रखकर बनाये जाने चाहिए । ऐसे प्रश्न जो आत्मसम्मान तथा धार्मिक व सामाजिक भावनाओं को ठेस पहुँचाएँ प्रश्नावली में सम्मिलित नहीं किये जाने चाहिए । इसी प्रकार ऐसे प्रश्न जिससे सूचक के मन में शंका, विरोध या उत्तेजना उत्पन्न हो, वे भी प्रश्नावली में सम्मिलित नही किये जाने चाहिए । साधारणतया व्यक्ति अपने चरित्र, बीमारी, आय, व्यक्तिगत सम्बन्ध व सामाजिक स्तर के सम्बन्ध में सूचना नहीं देना चाहते । व्यक्तिगत मामलों पर प्रश्न नहीं पूछे जाने चाहिए, इससे सूचक में उत्तेजना व विरोध की भावना उत्पन्न हो जाती है । क्या आप शराब पीते हैं? क्या आप हैजे से पीड़ित हैं ? क्या आप चरित्रवान हैं ? यह प्रश्न उचित नहीं हैं । प्रश्नों के उत्तरों को गुप्त रखने का आश्वासन दिया जाना चाहिए, जिससे सूचक सही सूचना दे सके । सेक्राइस्ट के शब्दों में "यदि कठिन तथा अपरिचित प्रश्नों या अविश्वास तथा सन्देह उत्पन्न करने वाले प्रश्नों को पूछा जाता है तो उनके उत्तर अधूरे, संक्षिप्त, अर्थरहित, सामान्य या जानबूझकर टालने वाले होने की सम्भावना रहती है ।"

5. **प्रश्नों का क्रम (Sequence of questions) :** प्रश्नावली के निर्माण में प्रश्नों का क्रम महत्वपूर्ण होता है । प्रश्नों को इस प्रकार क्रमबद्ध किया जाना चाहिए जिससे कि सूचक के दिमाग में विचारों का तांता बना रहे तथा वह उत्तर देने में सुविधा महसूस करे । हारपर के शब्दों में, "प्रश्नावली इस प्रकार बनाई जानी चाहिए जिसमें प्रश्न तर्कयुक्त क्रम में हों । यह सूचक को प्रश्नावली का उद्देश्य समझने में सहायक होता है जिसके फलस्वरूप उसके उत्तरों की किस्म में सुधार हो सकता है ।"
6. **प्रश्नों के उत्तरों का ज्ञान (Knowledge of the answers of the questions) :** प्रश्नावली में ऐसे प्रश्न पूछे जाने चाहिए जिनके उत्तर के बारे में सूचक को ज्ञान हो । यदि सूचक से 'रक्तचाप' (Blood Pressure), 'रोग उत्पत्ति के कारण' अथवा 'तरलता की पसन्दगी' (Liquidity preference)के बारे में पूछा जाये, तो सम्भवत वह उन प्रश्नों का उत्तर न दे सके, क्योंकि सामान्य व्यक्ति को इसके बारे में ज्ञान नहीं होता है ।
7. **सत्यता की जाँच (Test of accuracy) :** साधारणत: ऐसे प्रश्नों का भी प्रश्नावली में समावेश होना चाहिए जिनके उत्तरों की सत्यता की परस्पर जाँच की जा सके ।
8. **प्रत्यक्ष सम्बन्ध (Direct relationship) :** प्रश्न अनुसन्धान से प्रत्यक्ष रूप से सम्बन्धित होने चाहिए ताकि आवश्यक सूचना एकत्र करने में समय व धन का अपव्यय न हो ।
9. **निर्देश (Directions) :** प्रश्नावली को भरने के लिए उसमें स्पष्ट, संक्षिप्त और निश्चित निर्देश होने चाहिए जिनसे सूचना देने वालों का पथ-प्रदर्शन हो सके ।
10. **पूर्व-परीक्षण व संशोधन (Pre-testing and corrections) :** अनुसूची अथवा प्रश्नावली बनाने के बाद एक बार कुछ संसूचकों में विभिन्न प्रश्नों का पहले ही परीक्षण कर लेना चाहिए और उसमें आवश्यकतानुसार सुधार कर लेना चाहिए ।
11. **प्रश्नावली का गठन (Preparation of questionnaire) :** प्रश्नावली के गठन में विशेष सावधानी रखनी चाहिए । उत्तर लिखने के लिए समुचित रिक्त स्थान रखा जाना चाहिए । सम्भावित उत्तर उनके प्रश्नों के सामने देने से सामग्री के सारणीयन में भी सुविधा रहती है।
12. **आर्थिक-सामाजिक प्रश्न (Economic & Social questions)** - आर्थिक-सामाजिक सर्वेक्षणों के सम्बन्ध में प्रश्नावली को सामान्य तथा विशिष्ट वर्गों में बाँटकर प्रश्न सम्मिलित किए जाने चाहिए ।
13. **उत्तर गुप्त रखने का आश्वासन (Secrecy assurance) :** प्रश्नावली के प्रारम्भ में ही सूचकों को विनम्र आश्वासन दिया गया होना चाहिए कि उनके उत्तरों को गुप्त रखा जायेगा।
14. **सारणीयन की विधि का चुनाव (Selection of the tabulation) :** प्रश्नावली को अन्तिम रूप देने से पूर्व अनुसन्धानकर्ता को निष्कर्षों के सारणीयन करने की विधि के विषय में अवश्य विचार कर लेना चाहिए । यदि प्रश्नावली से प्राप्त निष्कर्षों को

संगणक (Computer) की सहायता से सारणीबद्ध करना हो तो संगणक विशेषज्ञों से प्रश्नावली के अन्तिम रूप (Final Draft) के विषय में अवश्य सलाह ले लेनी चाहिए तथा इसके पश्चात् ही प्रश्नावली को अन्तिम रूप देना चाहिए।

15. व्याख्या पत्र (Covering letter) : अनुसंधानकर्ता को प्रश्नावली के साथ व्याख्या-पत्र अवश्य संलग्न करना चाहिए । व्याख्या-पत्र में अनुसन्धान के बारे में जानकारी होनी चाहिए । इसे साथ प्रश्नावली के साथ वापस प्राप्त करने के लिए पता किया हुआ (Self-addressed) व टिकट सहित (Stamped) लिफाफा (Envelope) भी संलग्न होना चाहिए । इस पत्र में सूचकों द्वारा प्रदान की गई सूचना को गुप्त रखने का आश्वासन भी होना चाहिए ।

प्रश्नावली का प्रारूप

(Specimen of Questionnaire)

(निवास स्थान से दूर उच्च शिक्षा ग्रहण करने वाले विद्यार्थियों की आय-व्यय की जाँच के सम्बध में प्रश्नावली)

.... महाविद्यालय में विद्यार्थियों की आय-व्यय जाँच

A. परिचय

1. महाविद्यालय का नाम ....
2. महाविद्यालय सरकारी है या निजी ....
3. विद्यार्थी का नाम ....
4. लिंग ....
5. आयु ....
6. कक्षा ....
7. पता: I. स्थायी

   II. स्थानीय ....
8. विद्यार्थी कहाँ रहता है

   (क) छात्रावास ....

   (ख) सम्बन्धियों के साथ ....

   (ग) निजी रूप से कमरा लेकर ....

   (घ) अन्य ....

B. आय के साधन (रु.)

(i) माता-पिता से प्राप्त मासिक राशि ....

(ii) छात्रवृत्ति ....

(iii) ऋण

....

(iv) ट्यूशन ....

(v) अन्य स्रोतों से कुल आय ....

C. व्यय के मद: विविध मदों पर मासिक व्यय:

(i) महाविद्यालय का शुल्क ....

(ii) पुस्तकें और स्टेशनरी ....

(iii) भोजन ....

(iv) कपड़े, धुलाई आदि ....

(v) किराया एवं प्रकाशन ....

(vi) आमोद-प्रमोद

....

(vii) विविध ....

कुल योग ....

कमी/बचत

D. बचत यदि हाँ तो कहाँ जमा कराते हैं? ....

हस्ताक्षर (सूचक)

3.7.3 अनुसूची (Schedule)

"अनुसूची अनेक प्रश्नों की एक ऐसी लिखित सूची है जिसे लेकर अध्ययनकर्ता उत्तरदाता के पास स्वयं आता है और विभिन्न प्रश्नों को पूछकर स्वयं ही उनके उत्तरों का आलेखन करता है ।" अनुसूची को उत्तरदाता के पास डाक द्वारा प्रेषित नहीं किया जाता बल्कि यह साक्षात्कार का एक सरल माध्यम है । इस सम्बन्ध में ब्लेयर ने कहा है कि "सांख्यिकी अनुसूची, प्रश्नों की वह क्रमबद्ध व तर्कयुक्त सूची है जिसमें सूचनादाता से पूछताछ करके दी गयी समस्या के लिए समंक एकत्रित किये जाते हैं ।" अनेक विद्वान अनुसूची को एक प्रविधि के रूप में देखते हैं, जिसका उद्देश्य साक्षात्कार तथा अवलोकन को व्यवस्थित बनाना होता है । इसी अर्थ में अनुसूची को 'साक्षात्कार अनुसूची' (Interview Schedule) भी कहा जाता है ।

3.7.3.1 अनुसूची के लाभ (Advantages): अनुसूची विधि से सूचना संग्रहीत करने के निम्न वर्णित प्रमुख लाभ हैं:

(i) इस विधि के माध्यम से ऐसे क्षेत्रों से भी सूचना संग्रहीत की जा सकती है जहाँ अशिक्षित लोग रहते हैं,

(ii) अनुसन्धान एवं समस्या से सम्बन्धित सभी प्रश्नों के आवश्यक उत्तर प्राप्त हो जाते हैं, क्योंकि प्रगणक स्वयं सूचना संग्रहीत करते हैं,

(iii) इससे अधिक शुद्ध सूचना प्राप्त होती है क्योंकि प्रशिक्षित प्रगणक स्वयं प्रश्न का आशय सूचक को स्पष्ट कर देते हैं ।

3.7.3.2 अनुसूची की सीमाएँ (Limitations): अनुसूची विधि से सूचना संग्रहीत करने के कुछ दोष भी हैं जो इसके गुणों को सीमित करते हैं । ये निम्नलिखित हैं:

(i) यह विधि प्रश्नावली विधि की तुलना में अधिक खर्चीली है क्योंकि इसमें प्रगणकों के द्वारा सूचना संग्रहीत करवायी जाती है,

(ii) इस विधि की सफलता प्रगणकों की योग्यता एवं प्रशिक्षण पर निर्भर करती है । यदि प्रगणक प्रशिक्षित नहीं है तथा साक्षात्कार लेने की कला में दक्ष नहीं हैं तो संग्रहीत सूचना अशुद्ध एवं अपूर्ण हो सकती है,

(iii) साक्षात्कार लेने वाले प्रगणकों के व्यक्तित्व में भिन्नता होती है । यदि यह भिन्नता बहुत अधिक हो तो संग्रहीत सूचना में अन्तर आ सकता है क्योंकि प्रत्येक प्रगणक भिन्न-भिन्न तरीकों से सूचना संग्रहीत करते हैं ।

3.7.3.3 प्रश्नावली एवं अनुसूची में अन्तर: व्यावहारिक दृष्टि से प्रश्नावली एवं अनुसूची एक ही अर्थ में प्रयुक्त की जाती है लेकिन तकनीकी दृष्टि से इनमें कुछ महत्वपूर्ण अन्तर निम्न वर्णित हैं:

3.8 द्वितीयक समंकों का संग्रहण (Collection of Secondary Data)

प्रश्नावली एवं अनुसूची में अन्तर

	आधार	प्रश्नावली	अनुसूची
1.	भरने का दायित्व	प्रश्नावली प्रश्नावली भरने का दायित्व सूचकों का होता है ।	अनुसूचियाँ भरने का दायित्व स्वयं प्रगणकों का होता है।
2.	सूचना माध्यम	प्रश्नावली प्राय: डाक द्वारा सूचक को भिजवाई जाती है ।	अनुसूची स्वयं प्रगणक सूचक के पास व्यक्तिगत रूप से ले जाता है ।
3.	सम्पर्क	सूचकों से व्यक्तिगत सम्पर्क नहीं हो पाता है जिसके परिणामस्वरूप अनेक सूचना अपूर्ण प्राप्त होती है।	अनुसूची में प्रगणक का सूचक के साथ व्यक्तिगत सम्पर्क होने से सूचना प्राप्त हो जाती है।
4.	अनुसंधान का क्षेत्र	इसके अध्ययन का क्षेत्र सीमित होता है, चूँकि प्रश्नावली का प्रयोग केवल शिक्षित क्षेत्रों में ही सम्भव है । शिक्षित व्यक्ति ही प्रश्नावली समझकर भर सकते हैं ।	इसका क्षेत्र विस्तृत होता है चूँकि अनुसूचियों का प्रयोग क्षित एवं - दोनों ही क्षेत्रों में किया जा सकता है।
5.	मितव्ययिता	प्रश्नावली के माध्यम से सूचना संग्रहीत से सूचना संग्रहीत करना मितव्ययी होता है क्योंकि इसमें केवल प्रश्नावली तैयार करने एवं डाक-व्यय ही होता है ।	अनुसूचियों से सूचना संग्रहीत करना अपेक्षाकृत महँगा पड़ता है क्योंकि इसमें प्रगणकों की नियुक्ति एवं प्रशिक्षण पर पर्याप्त व्यय करना होता है।
6.	विलम्ब	इस विधि से सूचना संग्रहीत करने में समय अधिक लगता है क्योंकि अनेक	इसमें प्रगणक स्वयं अनुसूचियाँ भरते हैं। अत: सूचना समय पर

		बार सूचकों को स्मरण दिलाने पर भी उत्तर नहीं भेजते।	संग्रहीत जाती है ।
7.	सफलता का आधार	इस विधि की सफलता प्रश्नों की रचना एवं अनुसन्धानकर्ता व सूचकों के सहयोग पर निर्भर करती है ।	इस विधि की सफलता प्रगणकों व्यक्तित्व, प्रशिक्षण, ईमानदारी एवं परिश्रम पर निर्भर करती है।
8.	विश्वसनीयता	इसके माध्यम से प्राप्त सूचना अनुसूचियों के माध्यम से प्राप्त सूचना की अपेक्षा कम शुद्ध होती है । अनेक बार सूचक प्रश्न को सही नहीं समझ पाते, अतः भ्रामक एवं अशुद्ध उत्तर भरकर भेज देते हैं ।	इनके माध्यम से संग्रहीत सूचना प्रश्नावलियों की अपेक्षा अधिक शुद्ध एवं विश्वसनीय होती है क्योंकि प्रगणक स्वयं प्रश्न का स्पष्टीकरण देकर शुद्ध एवं विश्वसनीय उत्तर प्राप्त कर लेते हैं ।
9.	निर्देश सूची	प्रश्नावली के साथ साधारणतया निर्देश सूची संलग्न नहीं की जाती ।	अनुसूचियों में निर्देश सूची संलग्न की जाती है जिनके आधार पर प्रगणक सूचना एकत्रित करते हैं ।
10.	संकेताक्षरों का प्रयोग	प्रश्नावली में संकेताक्षरों का प्रयोग नहीं किया जा सकता, क्योंकि सूचक उन्हें समझ नहीं पाते हैं ।	अनुसूची नें संकेताक्षरों का प्रयोग किया जा सकता है क्योंकि इनका अर्थ प्रगणक को स्पष्ट होता है

एक बार संग्रहण व प्रयोग के बाद समंकों या सामग्री का किसी दूसरे उद्देश्य के लिए प्रयोग किया जाता है तो वे द्वितीयक समंक कहलाते हैं । द्वितीयक समंक - 1. प्रकाशित या 2. अप्रकाशित दोनों ही रूप में हो सकते हैं ।

1. प्रकाशित स्रोत (Published sources) : विभिन्न विषयों पर सरकारी एवं गैर-सरकारी संस्थाएँ एवं अनुसन्धानकर्ता महत्वपूर्ण समंक संग्रहीत करके उन्हें प्रकाशित करते रहते हैं । इन समंकों का विभिन्न व्यक्तियों द्वारा भिन्न-भिन्न उद्देश्य हेतु प्रयोग किया जाता है । प्रकाशित समंकों के स्रोत निम्नानुसार होते हैं :

   (i) अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन : आधुनिक युग मे अनेक अन्तर्राष्ट्रीय संगठन एवं संस्थाएँ अपने से संबन्धित समंकों का संग्रह करके अपने सदस्यों के लिये प्रकाशित करवा लेते हैं जैसे- संयुक्त राष्ट्र संघ, अन्तर्राष्ट्रीय श्रम संघ (I.L.O.) तथा मुद्राकोष (I.M.F.) का वार्षिक प्रतिवेदन ।

   (ii) सरकारी प्रकाशन : केन्द्रीय व राज्य सरकारों के अनेक मन्त्रालयों एवं विभागों (विशेषकर सांख्यिकी विभाग) द्वारा सम्बन्धित विषयों पर आँकड़े एकत्रित करके प्रकाशित किये जाते हैं । कुछ सरकारी प्रकाशन इस प्रकार हैं- रिजर्व बैंक बुलेटिन,

भारतीय जनगणना का प्रतिवेदन, भारत सांख्यिकीय सार । इसके अतिरिक्त सरकार समितियों व आयोगों की रिपोर्ट भी प्रकाशित कराती है । जैसे- शाह आयोग का प्रतिवेदन, वित्त आयोग की रिपोर्ट आदि ।

(iii) अर्द्ध सरकारी प्रकाशन : नगरपालिका, निगम जिला परिषदें, पंचायतें आदि समय-समय पर जन्म- मरण समंक, स्वास्थ्य व शिक्षा, राजस्व समंक एवं रिपोर्ट प्रकाशित करती हैं।

(iv) व्यापारिक संस्थाओं व परिषदों के प्रकाशन : अनेक व्यापारिक संस्थाएँ व परिषदें जैसे- भारतीय वाणिज्य आयोग संघ (F.I.C.C.I), राज्य वाणिज्य संघ, श्रम संघ, हिन्दुस्तान लीवर लि., भारतीय सांख्यिकी संस्थान (I.S.I.) व भारतीय कृषि व शोध संस्थान द्वारा एकत्रित समंक प्रकाशित किये जाते हैं ।

(v) अनुसन्धान संस्थाओं के प्रकाशन : विश्वविद्यालय, रिसर्च ब्यूरो एवं अनुसन्धान संस्थाएँ अनेक प्रकार के विषयों पर समंक एकत्रित व प्रकाशित करती हैं । जैसे- व्यावहारिक आर्थिक शोध की राष्ट्रीय परिषद, भारतीय सांख्यिकीय संस्थान, आर्थिक विकास शोध संस्था आदि ।

(vi) पत्र-पत्रिकाएँ : बहुत से पत्र-पत्रिकाएँ अनेक प्रकार के समंक प्रकाशित करती हैं । जैसे- समाचार- पत्र नियमित रूप से वस्तुओं के भाव, कॉमर्स, इकोनोमिक्स टाइम्स, योजना उद्योग व्यापार पत्रिका आदि में प्रकाशित सामग्री विश्वसनीय होती है । इसका उपयोग द्वितीयक समंक के रूप में करते हैं ।

(vii) व्यक्तियों द्वारा : अनेक व्यक्ति विभिन्न विषय पर शोध कार्य करते हैं फिर उनको सार्वजनिक उपयोग के लिए प्रकाशित करवा देते हैं ।

(viii) संघों एवं संगठनों द्वारा : ऐसी संस्थाएँ अपने से संबन्धित समंकों का संग्रह करवाकर सदस्यों के लिए भी प्रकाशित करवाती हैं, जैसे-भारतीय चीनी मिल संघ, भारतीय एसोसियेटेड सीमेन्ट, भारतीय वाणिज्य उद्योग संघ आदि ।

2. **अप्रकाशित स्रोत (Unpublished sources) :** विभिन्न विषयों पर व्यक्तिगत शोधकर्ता एवं अनेक संस्थाएँ शोध व तथ्य संग्रहण का कार्य करती रहती हैं । इनमें से सभी संग्रहीत तथ्य प्रकाशित नहीं होते । अत: ये अप्रकाशित तथ्य महत्वपूर्ण सूचना के स्रोत हो सकते हैं।

   कभी-कभी सरकार एवं औद्योगिक संस्थान विशिष्ट अनुसन्धान या जाँच कराते हैं । ये अनुसन्धान या जाँच गुप्त होती हैं । अत: इनके परिणाम प्रकाशित नहीं किये जाते । अनुसन्धानकर्ता इन परिणामों के कुछ अंश अनुसन्धान में प्रयुक्त कर सकता है । भारत में लागत अंकेक्षण प्रतिवेदन (Cost Audit Report) इसका एक उदाहरण है :

   द्वितीयक समंकों के प्रयोग में सावधानियाँ :

   द्वितीयक सामग्री की विश्वसनीयता, उपयुक्तता व पर्याप्तता की जाँच करने के लिए निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए :

(1) **पिछले अनुसन्धानकर्ता की योग्यता :** सर्वप्रथम, यह देखना चाहिए कि द्‌वितीयक सामग्री पहले किस अनुसन्धानकर्ता द्‌वारा प्राथमिक रूप से एकत्र की गई थी । उसकी योग्यता, ईमानदारी, अनुभव व निष्पक्षता यदि सन्तोषजनक हैं तो उन समंकों का प्रयोग किया जा सकता है ।

(2) **संग्रहण रीति :** संग्रहण की जो रीति पहले अपनाई गई थी वह के समंकों वर्तमान प्रयोग के लिए कहाँ तक उपयुक्त और विश्वसनीय है ? यदि प्रतिदर्श अनुसन्धान किया गया हो तो यह निश्चित कर लेना चाहिए कि प्रतिदर्श यथेष्ट है और पूर्ण रूप से समग्र का प्रतिनिधित्व करता है अथवा नहीं । इन सब बातों के बारे में सन्तुष्ट हो जाने पर ही द्‌वितीयक समको का प्रयोग करना चाहिए ।

(3) **उद्देश्य व क्षेत्र :** यह भी देख लेना चाहिए कि प्राथमिक रूप से जब प्रस्तुत समंक एकत्रित किये गये थे तो अनुसन्धान के उद्देश्य व क्षेत्र वही थे जिनके लिए उनका अब द्‌वितीयक समंकों के रूप में प्रयोग किया जाना है । यदि उद्देश्य व क्षेत्र में अन्तर है तो समंक अनुपयुक्त और अविश्वसनीय होंगे ।

(4) **जाँच का समय और उसकी परिस्थितियाँ :** यह भी निश्चित कर लेना चाहिए कि उपलब्ध सामग्री किस समय से सम्बन्धित है तथा किन परिस्थितियो में एकत्र की गई थी । युद्धकालीन जाँच के समंक शान्तिकाल में प्रयोग नहीं किये जा सकते । आँकड़ों के प्रारम्भिक संग्रहण और उनके उपयोग के समय की परिस्थितियों में अन्तर होने के कारण उनकी उपयोगिता कम हो सकती है । अत: लोगों के रहन-सहन व रीति-रिवाज में होने वाले परिवर्तन, मूल्यों में अन्तर आदि को ध्यान में रखकर ही प्रकाशित समंकों का प्रयोग करना चाहिए ।

(5) **इकाई की परिभाषा :** यह भी देख लेना चाहिए कि पूर्व-अनुसन्धान में प्रयुक्त सांख्यिकीय इकाइयों के अर्थ वर्तमान प्रयोग के अनुकूल हैं या नहीं ।

(6) **शुद्धता की मात्रा :** इस बात पर भी विचार करना आवश्यक है कि प्रस्तुत समंकों में शुद्धता का स्तर क्या रखा गया था और उसे प्राप्त करने में कहाँ तक सफलता प्राप्त हुई। समंकों में जितनी अधिक शुद्धता होगी वे उतने ही विश्वसनीय होंगे । यह भी देख लेना चाहिए कि आंकड़ों में अत्यधिक सन्निकटन (approximation) तो नहीं किया गया है । जितनी कम मात्रा में सन्निकटन होता है उतनी ही अधिक शुद्धता होती है ।

(7) **तुलना :** यदि एक ही विषय पर अनेक स्रोतों से द्‌वितीयक समंक प्राप्त होते हैं तो उनकी सत्यता की जाँच करने के लिए उनमें तुलना कर लेनी चाहिए । यदि उनमें अन्तर काफी है तो सबसे अधिक विश्वसनीय स्रोत से प्राप्त समंक ही ग्रहण करने चाहिए या फिर नये सिरे से अनुसन्धान करना चाहिए ।

(8) **परीक्षात्मक जाँच :** अनुसन्धानकर्ता को प्रस्तुत समंकों में से कुछ की परीक्षात्मक जाँच करके यह देख लेना चाहिए कि वे विश्वसनीय हैं या नहीं ।

(9) इस प्रकार, उपर्युक्त बातों का ध्यान रखकर द्‌वितीयक समंकों की आलोचनात्मक जाँच कर लेनी चाहिए । यदि परीक्षण के बाद द्‌वितीयक सामग्री विश्वसनीय, उपयुक्त व यथेष्ट

प्रतीत हो तभी उसका प्रयोग प्रस्तुत अनुसन्धान के लिए करना चाहिए । जाँच किये बिना द्वितीयक समंकों का प्रयोग करना सर्वथा अनुचित है । डॉ. बाउले का कथन है, **"प्रकाशित समंकों को ऊपर से ही देखकर उनके बाह्य मूल्य पर ग्रहण कर लेना कभी सुरक्षित नहीं है जब तक उनका अर्थ व उनकी सीमाएँ अच्छी तरह ज्ञात नहीं हो जाएँ; और यह सदैव आवश्यक है कि उन तर्कों की आलोचनात्मक समीक्षा की जाए जो उन पर आधारित है। "**

3.9 सारांश

सांख्यिकीय अनुसन्धान का आयोजन कर लेने के पश्चात् सांख्यिकी का सबसे महत्वपूर्ण कार्य समंकों का संकलन करना है । समंक सांख्यिकीय अनुसन्धान की आधारशिला है । समंक संकलन से अभिप्राय अनुसन्धान सम्बन्धी आवश्यक सामग्री उपलब्ध कराने से है। यह आवश्यक सामग्री अर्थात् समंक प्राथमिक एवं द्वितीयक साधनों से प्राप्त किये जा सकते हैं । प्राथमिक समंक अनुसन्धानकर्ता द्वारा प्रथम बार नये सिरे से संग्रहीत किये जाते है । ये समंक मौलिक होते हैं । जबकि द्वितीयक समंक वे समंक होते हैं जो पहले ही अन्य व्यक्तियों द्वारा संग्रहीत किये जा चुके हैं अथवा प्रकाशित किये जा चुके हैं और अनुसन्धानकर्ता केवल उनका प्रयोग करता है ।

प्राथमिक समंकों के संग्रहण की मुख्य पाँच रीतियाँ है- (i) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान (ii) अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान (iii) संवाददाताओं या स्थानीय स्रोतों से सूचना-प्राप्ति (iv) सूचकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना प्राप्ति (v) प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरकर सूचना प्राप्ति ।

प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान में अनुसन्धानकर्ता स्वयं सूचना देने वालों से प्रत्यक्ष रूप से सम्पर्क कर सूचना संग्रहीत करता है यह रीति ऐसे अनुसन्धानों के लिये अधिक उपयुक्त होती है जहाँ सूचना का क्षेत्र सीमित हो तथा उच्च स्तर की शुद्धता की आवश्यकता हो ।

अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान में अनुसन्धानकर्ता सम्बन्धित व्यक्तियों से सूचना प्राप्त न करके किन्हीं ऐसे व्यक्तियों से सूचना प्राप्त करता है जिन्हें उस विषय की जानकारी हो। यह रीति तब प्रयोग में लाई जाती है जब क्षेत्र व्यापक व समंक जटिल प्रकृति के हों तथा सम्बन्धित व्यक्ति अज्ञानता के कारण सूचना देने में असमर्थ हो ।

संवाददाताओं या स्थानीय स्रोतों से सूचना प्राप्ति रीति में अनुसन्धानकर्ता अनुसन्धान के विभिन्न स्थानों पर स्थानीय संवाददाताओं की नियुक्ति करता है जो नियमित रूप से आवश्यक जानकारी भेजते रहते हैं । यह रीति उन अनुसन्धानों के लिये अधिक उपयोगी है जहाँ पर नियमित रूप से पर्याप्त समय तक सूचना प्राप्त करनी हो तथा उच्च स्तर की शुद्धता आवश्यक हो ।

सूचकों द्वारा अनुसूचियों को भरवाकर सूचना प्राप्ति की रीति में अनुसन्धानकर्ता अपने उद्देश्य के अनुसार सम्बन्धित प्रश्नों की एक प्रश्नावली तैयार कर उन्हें सूचना देने वालों के पास भेज देता है जो उनके द्वारा भरकर निर्धारित समय में अनुसन्धानकर्ता को लौटा दी जाती है । इस रीति का प्रयोग वहाँ अधिक उपयुक्त होता है जहाँ अनुसन्धान का क्षेत्र विस्तृत है तथा व्यक्ति शिक्षित है ।

प्रगणकों द्वारा अनुसूचियों को भर कर सूचना-प्राप्ति की रीति में सम्बन्धित प्रश्नों की अनुसूची तैयार की जाती है लेकिन उन्हें सूचना देने वालों के द्वारा न भरवाकर स्वयं प्रशिक्षित प्रगणकों द्वारा घर-घर जाकर सूचकों से पूछताछ करके भरी जाती है । इस रीति की सफलता प्रगणकों की कार्यकुशलता, धैर्यशीलता तथा वाक्पटुता पर निर्भर करती है ।

विभिन्न रीतियों में से उपयुक्त रीति का चयन अनुसन्धान की प्रकृति, उद्देश्य, क्षेत्र, उपलब्ध वित्तीय साधन, शुद्धता स्तर तथा उपलब्ध समय को ध्यान में रखकर सावधानी से करना चाहिए।

द्वितीयक समंकों के मुख्य स्रोत अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन, सरकार एवं अर्द्ध-सरकारी प्रकाशन, समितियों एवं आयोगों के प्रतिवेदन, व्यापारिक संस्थाओं के प्रकाशन, विश्वविद्यालय तथा शोध संस्थाओं के शोधकार्य, पत्र-पत्रिकाएँ, बाजार समाचार, संघों एवं संगठनों के प्रकाशन तथा व्यक्तिगत अनुसन्धानकर्ता द्वारा संग्रहीत ऐसे समंक जो प्रकाशित नहीं किये गये हों, आदि हैं ।

द्वितीयक समंक अन्य व्यक्तियों द्वारा उनके उद्देश्य के लिये एकत्रित किये जाते हैं इसलिए इनके प्रयोग में लेने के लिये विशेष सावधानी बरतना आवश्यक हो जाता है । अत: इन्हें प्रयोग में लेने से पूर्व गत अनुसंधानकर्ता के विषय में जानकारी प्राप्त करना, उसके उद्देश्य को जानना, पिछले अनुसन्धान व वर्तमान अनुसन्धान के क्षेत्र की समानता की जानकारी लेना, संग्रहण की रीति, संमकों की शुद्धता आदि की जाँच कर लेनी चाहिए। उपयुक्त बातों का ध्यान रखकर यह निर्णय लिया जाना चाहिए कि द्वितीय समंकों का प्रयोग किया जाना है अथवा नही। द्वितीयक समंकों की उपयुक्तता, पर्याप्तता एवं विश्वसनीयता की जाँच करने के बाद उनका उपयोग सुरक्षित रूप से किया जा सकता है।

3.10 तकनीकी शब्दावली (Technical Terms)

प्राथमिक समंक (Primary Data) : समंक जो प्रथम बार अनुसंधानकर्ता द्वारा नये सिरे से संग्रहीत किये जाते हैं।

द्वितीयक समंक (Secondary Data) : समंक जो पूर्व में अन्य व्यक्तियों अथवा संस्थाओं द्वारा संग्रहीत किये जा चुके हों ।

प्रश्नावली (Questionnaire) : विभिन्न प्रश्नों की एक व्यवस्थित सूची जिसका उद्देश्य सम्बन्धित व्यक्तियों से सूचनाएँ प्राप्त करना हो ।

अनुसूची (Schedule) : प्रश्नों की वह क्रमबद्ध सूची जिसका उद्देश्य स्वयं प्रशिक्षित प्रगणकों द्वारा सूचकों से प्रत्यक्ष पूछताछ कर सूचनाएँ प्राप्त करना हो ।

3.11स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

1. सांख्यिकी सामग्री के संग्रहण की विभिन्न रीतियाँ क्या है ? इनमें कौनसी रीति सबसे अधिक विश्वसनीय है और क्यों ?

What are the various methods of collecting statistical data? Which of These is most reliable and why?

2. प्राथमिक तथा द्वितीयक समंकों मे अन्तर स्पष्ट कीजिये तथा प्राथमिक समंकों को ग्रहीत करने की रीतियों की व्याख्या कीजिये ।

   Cleary distinguish between primary data and secondary data and explain The various methods of collecting primary data.

3. प्रश्नावली किसे कहते हैं? प्रश्नावली बनाते समय किन-किन बातों को ध्यान में रखना चाहिये?

   What is questionnaire? What precautions should be taken in drafting a good questionnaire?

4. सांख्यिकीय अनुसन्धान के प्रयोग हेतु उत्तम प्रश्नावली के क्या आवश्यक गुण हैं ? उदाहरण सहित समझाइए ।

   What are the chief requirements of a good questionnaire for use in statistical investigation? Explain giving examples.

5. द्वितीयक समंक क्या होते हैं ? उपयोग से पूर्व इनकी जाँच व सम्पादन क्यों आवश्यक है? इनके उपयोग के पूर्व कौन-सी सावधानियाँ बरतनी चाहिए ?

   What are secondary data? Why is it necessary to scrutinise and edit them before use? What precautions should be necessary before using them?

3.12 उपयोगी पुस्तकें

1. कैलाश नाथ नागर : सांख्यिकी के मूल तत्व (मीनाक्षी प्रकाशन, मेरठ)
2. शर्मा, जैन एवं पारीक : व्यावसायिक सांख्यिकी (शिवम बुक हाउस, जयपुर)
3. रंगा, गुप्ता, गोयल एवं अन्य : व्यावसायिक सांख्यिकी (अजमेरा बुक कम्पनी, जयपुर)
4. ओसवाल, अग्रवाल, भार्गव एवं अन्य : व्यावसायिक सांख्यिकी (रमेश बुक डिपो, जयपुर)

इकाई - 4 : निदर्शन प्रविधियाँ (Sampling Techniques)

इकाई की रूपरेखा :

4.0 उद्देश्य

4.1 परिचय

4.2 निदर्शन का अर्थ एवं परिभाषा

4.3 निदर्शन के उद्देश्य

4.4 निदर्शन का आधार

4.5 निदर्शन धिधियों हेतु उपयुक्तता

4.6 निदर्शन रीति का महत्त्व

4.7 निदर्शन रीति के गुण

4.8 निदर्शन रीति के दोष

4.9 निदर्शन के आवश्यक तत्व

4.10 निदर्शन प्रक्रिया तथा सम्बद्ध समस्याएँ

4.11 निदर्शन विधियाँ

4.12 प्रायिकता सिद्धान्त

4.13 सांख्यिकीय नियमितता नियम

4.14 महांक जड़ता नियम

4.15 निदर्शन एवं गैर निदर्शन विभ्रम

4.16 सारांश

4.17 शब्दावली

4.18 स्वपरख प्रश्न

4.19 उपयोगी पुस्तक

4.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- समग्र एवं समग्र के प्रकारों को समझ सकें ।
- संगणना रीति एवं निदर्शन रीति का अन्तर जान सकें ।
- निदर्शन के अर्थ, उद्देश्य एवं आधार की जानकारी प्राप्त कर सकें ।
- निदर्शन विधियों हेतु उपयुक्तता, निदर्शन विधि के गुण एवं दोषों के साथ-साथ आवश्यक तत्वों को जान सकें ।
- निदर्शन प्रक्रिया, विधियाँ समझकर प्रयुक्त करना सीख सकें ।
- प्रायिकता सिद्धान्त, सांख्यिकीय नियमितता नियम, महांक जड़ता नियम तथा निदर्शन एवं गैर निदर्शन विभ्रम की जानकारी प्राप्त कर सकें ।

4.1 परिचय (Introduction)

अनुसंधानकर्ता को किसी समस्या या अनुसंधान हेतु समंक संग्रहण करते समय यह निर्णय लेना होता है कि समंकों के संकलन में संगणना रीति (Census method) अपनाई जायेगी अथवा निदर्शन रीति (Sampling method) संगणना रीति के अन्तर्गत समग्र (Universe) की प्रत्येक व्यक्तिगत इकाई के बारे में विस्तृत सूचना प्राप्त की जाती है । उदाहरणार्थ, किसी महाविद्यालय के 2,000 छात्रों में से प्रत्येक छात्र की लम्बाई सम्बन्धी समंक एकत्र किये जाते हैं तो यह गणना संगणना रीति पर आधारित मानी जायेगी । यदि समग्र की सभी इकाइयों में से केवल कुछ प्रतिनिधि इकाइयों के बारे में ही सूचना संग्रहित की जाती है तो यह निदर्शन रीति कहलायेगी । इस उदाहरण में यदि समस्त 2000 छात्रों में से 200 प्रतिनिधि छात्रों की ही लम्बाई सम्बन्धी सूचना एकत्रित की जाती है तो हम यह मानेंगे कि अनुसन्धानकर्त्ता ने समंक संकलन की निदर्शन रीति का प्रयोग किया ।

किसी अनुसंधान क्षेत्र की समस्त इकाइयों का समूह समग्र (Universe or Population) कहलाता है। यदि समग्र में इकाइयों की संख्या सुनिश्चित हो तो इसे परिमित समग्र (Finite Universe) कहते हैं। उदाहरणार्थ, एक निश्चित अकादमिक सत्र में वाणिज्य महाविद्यालय कोटा में छात्रों की संख्या, जनवरी 1, 2001 को भारत की जनसंख्या, आदि । यदि समग्र में इकाइयों की संख्या अनन्त या अपरिमित हो अर्थात व्यावहारिक रूप में गणना असम्भव हो तो ऐसा समग्र अपरिमित समग्र (Infinite Universe) कहलायेगा । उदाहरणार्थ, सिर में बालों की संख्या, पेड़ों पर पत्तियों की संख्या, आकाश में तारों की संख्या, दूरदर्शन पर कार्यक्रम देखने वालों की संख्या आदि । यदि समग्र की इकाइयों का अस्तित्व वास्तविक रूप में हो अर्थात् इकाइयाँ यथार्थ रूप में विद्यमान हों तो ऐसा समग्र वास्तविक समग्र (Real Universe) कहलाता है, जैसे :- पुस्तक में पृष्ठों की संख्या, कारखाने में श्रमिकों की संख्या, महाविद्यालय में विद्यार्थियों की संख्या, आदि । यदि समग्र की इकाइयों का अस्तित्व वास्तविक रूप में विद्यमान न होकर कल्पना पर आधारित होता है तो ऐसा समग्र काल्पनिक समग्र (Hypothetical Universe) कहलाता है । सिक्के के उछालने पर चित (Head) तथा पट (Tail) के परिणामों की संख्या लिखकर समग्र निर्माण करना काल्पनिक समग्र का उदाहरण है ।

संगणना रीति को वहीं उपयुक्त मानी जाती है जहाँ पर गहन अध्ययन की आवश्यकता हो, अत्यधिक शुद्धता एवं विश्वसनीयता का स्तर अपेक्षित हो, क्षेत्र सीमित (Finite Population) हो तथा समग्र में विविध गुणों वाली इकाइयां हों अन्यथा इस रीति में अधिक समय, श्रम व धन की आवश्यकता होती है तथा अनुसंधानकर्ता को अनुसंधान प्रबन्धन में कठिनाइयों का सामना करना पड़ता है ।

4.2 निदर्शन का अर्थ एवं परिभाषा (Meaning and Definition of Sampling)

निदर्शन से तात्पर्य समग्र में से कुछ चुनी हुई इकाइयों से सम्बन्धित आंकड़े एकत्र कर सम्पूर्ण समग्र के बारे में निष्कर्ष निकालने से है । सामान्य व्यवहार में हम देखते हैं कि गृहणियाँ चावल के कुछ दानों की जाँच कर समस्त चावल के पकने का निर्णय करती हैं। इसी प्रकार एक डॉक्टर रक्त की एक बूंद के निरीक्षण के आधार पर रोगी के रक्त की संरचना जान लेता है । अत: हम कह सकते हैं कि प्रतिदर्श की इकाइयाँ समग्र का प्रतिनिधित्व करती हैं जिनके अध्ययन के आधार पर प्राप्त परिणाम समग्र के परिणामों के समान ही होंगे । या लुन चाऊ के अनुसार "प्रतिदर्श प्रतिचयन इकाइयों का वह समूह है जो समग्र का प्रतिनिधी सूक्ष्म रूप होता है तथा जिसके आधार पर समग्र के बारे में निष्कर्ष निकाले जाते हैं।"

4.3 निदर्शन के उद्देश्य (Objectives of Sampling)

वेदरबर्न के अनुसार, "प्रतिचयन सिद्धान्त (Theory of Sampling) का उद्देश्य प्रथम, न्यादर्श इकाइयों के अध्ययन के आधार पर समग्र की इकाइयों का अनुमान तथा द्वितीय इन अनुमानों की विश्वसनीयता की जाँच से सम्बन्धित है ।" इस कथन के आधार पर हम निदर्शन के मूल उद्देश्य निम्नांकित रूप में समझेंगे:- 1.

1. समग्र के सम्बन्ध में अनुमान करना : प्रतिदर्श के अध्ययन के आधार पर कम समय व खर्च में समग्र के बारे में अधिकाधिक यथार्थ निष्कर्ष निकालने का प्रयास किया जाता है । प्रतिदर्श अनुसंधान के अधार पर समग्र की आधारभूत विशेषताओं का अनुमान किया जाता है ।

2. विश्वसनीयता की जाँच : एक ही समग्र से लिए गये विभिन्न प्रतिदर्शों के सांख्यिकीय मापों (प्रतिदर्शज) में भिन्नता हो सकती है तथा इन मापों (प्रतिदर्शज) की समग्र के सांख्यिकीय मापों (प्राचल) से भी भिन्नता हो सकती है । ये अन्तर निदर्शन उच्चावचनों के कारण हैं या अन्य किसी कारण से उत्पन्न हुए हैं, इसका पता लगाना निदर्शन का उद्देश्य है । इसके लिए अन्तर की सार्थकता का परीक्षण किया जाता है ।

3. समग्र के प्राचलों का अनुमान लगाना : समय के सांख्यिकीय मापों को प्राचल (Parameters) तथा प्रतिदर्श के सांख्यिकीय मापों को प्रतिदर्शज (Statistic) कहा जाता है । प्रतिदर्श के प्रतिदर्शजो के आधार पर प्राचलों का अनुमान लगाया जाता है ।

4. संगणना अनुसंधान की जाँच : संगणना अनुसंधान से प्राप्त परिणामो की जाँच प्रतिदर्श अनुसंधान द्वारा की जाती है । उदाहणार्थ, प्राय: प्रत्येक देश में जनगणना के परिणामों की जाँच हेतु जनगणना के बाद प्रतिदर्श के आधार पर परिणामों की शुद्धता की जाँच की जाती है ।

4.4 निदर्शन का आधार (Basis of Sampling)

निदर्शन प्रणाली के कुछ निश्चित आधारभूत सिद्धान्त हैं जिनके कारण निदर्शन प्रणाली सर्व-स्वीकृत मानी गई है । अब हम इनका अध्ययन करेगे :

1. विविधता में अन्तनिर्हित एकता : निदर्शन प्रणाली इस मान्यता पर आधारित है कि सभी मूर्त पदार्थो एवं प्रवृत्तियों में विविधता के उपरान्त भी अन्तनिर्हित एकता विद्‌यमान रहती है । उदाहरणार्थ, संगणना रीति से विभिन्न वस्तुओं के मूल्यों में उतार-चढ़ाव का अध्ययन करने की अपेक्षा प्रत्येक वर्ग की कुछ न्यादर्श इकाइयों का अध्ययन निदर्शन प्रणाली से करेंगे तो परिणामों में विशेष अन्तर नहीं पाया जायेगा ।

2. समग्र के गुणों की समाविष्टता : सांख्यिकीय नियमितता नियम (Law of statistical regularity) यह बताता हैं कि यदि समग्र में से दैव प्रतिचयन के आधार पर समुचित इकाइयों का चयन किया जाये तो यह लगभग निश्चित हैं कि इन चुनी गई इकाइयों में समग्र की विशेषताएँ विद्‌यमान होंगी । अत: न्यादर्श में दैव प्रतिचयन होने पर समग्र के गुणों के समावेश होने की संभावना होती है ।

3. पर्याप्त परिशुद्धता : न्यादर्श से प्राप्त परिणाम पर्याप्त परिशुद्ध होते हैं यद्‌यपि ये संगणना रीति की भाँति शत-प्रतिशत शुद्ध नहीं होते हैं । न्यादर्श के आकार को बढ़ाकर परिशुद्धता की मात्रा में सुधार किया जा सकता है । इसमें महांक जड़ता सिद्धान्त लागू होता है जिसके अनुसार “अन्य बातें समान रहने पर, न्यादर्श का आकार जितना अधिक व्यापक होगा, परिणाम भी उतने ही परिशुद्ध होंगे ।"

4. परिणामों की जाँच : निदर्शन विभ्रम (Sampling errors) जाँच नियमों द्‌वारा न्यादर्श से प्राप्त परिणामों की विश्वसनीयता की जाँच की जा सकती है ।

4.5 निदर्शन विधियों हेतु उपयुक्तता (Suitability for Sampling Techniques)

1. जहाँ समग्र अनन्त एवं असीमित हो जैसे - किसी योग पद्धति का व्यक्तियों के स्वास्थ्य पर प्रभाव का अध्ययन ।
2. जहाँ समय, मानवीय श्रम एवं धन की सीमितता हो ।
3. जहाँ अत्यधिक परिशुद्धता आवश्यक न हो ।
4. जहाँ इकाइयों में सजातीयता एवं एकरूपता हो ।
5. जहाँ इकाइयों के अनुसंधान के दौरान नष्ट या समाप्त होने की संभावना हो
6. जैसे :- दियासलाई की तीली जलाकर देखना, शीतल पेय पदार्थ की बोतल पीना आदि ।
7. जहाँ संगणना जाँच करना असम्भव हो।

4.6 निदर्शन रीति का महत्त्व (Importance of Sampling Method)

सामाजिक एवं राजनैतिक क्षेत्रों के अतिरिक्त आर्थिक एवं व्यापारिक क्षेत्रों में भी दिन-प्रतिदिन इस विधि का प्रयोग बढ़ रहा है । अनेक व्यावसायिक समस्याओं जैसे - बाजार शोध, लेखा एवं वित्त समस्याओं, उत्पादन प्रबन्ध, मानवीय संसाधन प्रबन्ध की समस्याओं के अध्ययन में निदर्शन रीति का व्यापक प्रयोग हो रहा है । प्रो. नीसवेंगर के अनुसार, "आर्थिक एवं व्यावसायिक अनुसंधान में निदर्शन रीति का प्रयोग विस्तृत रूप में किया जाता हैं क्योंकि सामूहिक समंकों के अध्ययन में कभी-कभी यह एकमात्र संभव, प्राय: सर्वाधिक व्यावहारिक तथा सामान्यत: सर्वोत्तम रीति होती है ।" इस कथन के आधार पर निम्नांकित तीन कारणों के आधार पर हम निदर्शन रीति का महत्व समझ सकेंगे:-

1. एकमात्र संभव रीति : यदि अनुसंधान के दौरान इकाइयाँ नष्ट हो सकती हों या समग्र अनन्त एवं असीमित हो तो निदर्शन रीति ही एकमात्र संभव रीति होगी जिसके आधार पर अनुसंधान कार्य किया जा सकता है।

2. सर्वाधिक व्यावहारिक रीति : अनुसंधान का क्षेत्र विशाल होने पर निदर्शन रीति अपनाना ही अधिक व्यावहारिक होगा क्योंकि इससे समय, श्रम व धन की बचत होती है । उदाहरणार्थ, भारत में आर्थिक सुधारों का रोजगार पर प्रभाव का अध्ययन करना हो तो संगणना रीति की अपेक्षा निदर्शन रीति अधिक व्यावहारिक सिद्ध होगी ।

3. सर्वोत्तम रीति : यदि प्रतिदर्श में इकाइयों का चयन यादृच्छिक रूप से समुचित मात्रा में किया गया हो तो उससे प्राप्त परिणाम लगभग उतने ही परिशुद्ध होंगे जितने संगणना रीति से । कई बार प्रशिक्षित गणकों के माध्यम से प्रतिदर्श में अपेक्षाकृत कम इकाइयाँ होने के कारण संगणना रीति की तुलना में अधिक शुद्ध निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं ।.

4.7 निदर्शन रीति के गुण (Merits of Sampling Method)

1. वैज्ञानिक विधि : गणितीय सम्भाविता सिद्धान्त पर आधारित होने के कारण अशुद्धियों का पर्याप्त सीमा तक अनुमान लगाया जा सकता है, साथ ही विश्वसनीयता की जाँच भी की जा सकती है ।

2. समय, श्रम तथा धन की बचत : तुलनात्मक रूप से कम इकाइयों से सम्बन्धित समंकों के संग्रहण एवं विश्लेषण द्‌वारा निष्कर्ष निकलने से समय, श्रम व धन की बचत हो जाती है।

3. गहन अध्ययन एवं निष्कर्ष : समग्र की कुछ इकाइयों को चुने जाने से इन सीमित इकाइयों का गहन अध्ययन, सकता है । यादृच्छिक चयन एवं समुचित आकार के न्यादर्श से प्राय: परिशुद्ध निष्कर्ष प्राप्त किए जा सकते है ।

4. संगठन एवं प्रबन्ध में सुविधा : कम इकाइयाँ होने से अनुसंधानकर्ता भी कम ही होंगे जिनका प्रशिक्षण, संगठन आदि सुविधापूर्वक किया जा सकता है ।

5. एकमात्र संभव विधि : जहाँ संगणना रीति का प्रयोग नहीं किया जा सकता हो वहाँ निदर्शन रीति प्रयुक्त की जाती है ।
6. समग्र के परिणामों की जाँच : संगणना रीति से प्राप्त परिणाम शुद्ध एवं विश्वसनीय हैं या नहीं इसकी जाँच का एकमात्र तरीका निदर्शन विधि के द्‌वारा ही किया जाना संभव है ।

4.8 निदर्शन रीति के दोष (Demerits of Sampling Method)

1. इकाइयों में एकरूपता एवं सजातीयता न होने पर अनुपयुक्त ।
2. न्यादर्श में दैव प्रतिचयन न होने तथा समुचित आकार में कमी होने पर परिणाम अशुद्ध एवं भ्रामक होंगे ।
3. प्रतिदर्श हेतु चुनी गई इकाई उपलब्ध न होने पर उसके स्थान पर प्रतिस्थापित इकाई में दैव प्रतिचयन संभव नहीं हो पाता अत: परिणामों में निष्पक्षता नहीं रह पाती है ।
4. प्रतिदर्श लेना, उसका आकार तथा संभावित विभ्रम ज्ञात करने हेतु विशिष्ट ज्ञान की आवश्यकता होती है । विशिष्ट ज्ञान के अभाव में परिणाम अशुद्ध एवं भ्रामक हो सकते हैं ।

4.9 निदर्शन के आवश्यक तत्व (Essentials of Sampling)

1. **सजातीयता (Homogeneity) :** समग्र में शामिल इकाइयों में सजातीयता होनी चाहिए ताकि एक से अधिक प्रतिदर्श लिये जाने पर निर्धारित सीमाओं में ही उनके गुणों के विचरण ज्ञात किए जा सकें एवं विश्वसनीय परिणाम प्राप्त हो सकें ।
2. **स्वतंत्रता (Independence) :** एक इकाई के प्रतिदर्श में सम्मिलित किए जाने का प्रभाव अन्य इकाई के शामिल होने या न होने पर नहीं पड़े । समग्र की स्थिति में विभिन्न वर्गो की इकाई को प्रतिदर्श में शामिल होने के समान अवसर मिलने चाहिए ।
3. **प्रतिनिधित्व (Representativeness) :** प्रतिदर्श ऐसा होना चाहिए जिसमें समग्र के सभी गुण विद्‌यमान हों । समग्र में विविधता होने की स्थिति में विभिन्न वर्गो की इकाइयों को प्रतिदर्श में शामिल किया जाना चाहिए । प्रतिदर्श पक्षपात रहित में लिया जाना चाहिए ।
4. **पर्याप्तता (Adequacy) :** प्रतिदर्श का आकार जितना बड़ा होगा, उससे प्राप्त परिणामों में उतना ही अधिक परिशुद्धता का स्तर होगा । अतएव समग्र के अनुपात में प्रतिदर्श का आकार पर्याप्त होना चाहिए ।
5. **अभिनति का अभाव (Lack of Bias) :** प्रतिदर्श रीति का चयन अनुसंधानकर्ताओं के कार्यो, सूचकों द्‌वारा भेजी गई सूचनाओं, निष्कर्षों के निर्वचन आदि सभी स्तरों पर पक्षपात का अभाव होने पर ही निदर्शन विधि सफल हो सकती है ।

4.10 निदर्शन प्रक्रिया तथा सम्बद्ध समस्याएँ (Sampling Process and Related Problems)

1. **समस्या की परिभाषा** : निदर्शन रीति, प्रतिदर्श का स्वरूप तथा अपेक्षित परिशुद्धता के स्तर का निर्धारण समस्या के अनुरूप होता है अत: निदर्शन कार्य के आरंभ में ही समस्या को परिभाषित किया जाना श्रेयस्कर होगा ।

2. समग्र का ज्ञान : अनुसंधान की सम्पूर्ण इकाइयाँ जिनमें से प्रतिदर्श चुना जाना है, समग्र कहलाती हैं । समग्र परिमित या अपरिमित तथा काल्पनिक या वास्तविक हो सकता है ।

3. सांख्यिकीय इकाइयाँ : इकाई एक व्यक्ति, परिवार या समूह हो सकता है । न्यादर्श इकाइयों को निम्नांकित चार भागों में बाँट सकते है :

1. व्यक्ति;

2. सामाजिक समूह जैसे - स्कूल, क्लब, कुटुम्ब;

3. निर्माणी इकाई जैसे- घर

4. भौगोलिक इकाई जैसे- वार्ड, शहर, तहसील, जिला, राज्य, आदि ।

5. साधन सूची : ऐसी सूची जिसमें समग्र की सभी इकाइयों के नाम एवं संक्षिप्त जानकारी उपलब्ध हो सके, साधन सूची कहलाती है ।

6. न्यादर्श का आकार : समग्र की वे इकाइयाँ जिन्हें अनुसंधान हेतु चुना गया है । बड़े आकार का प्रतिदर्श होने पर परिणाम परिशुद्धता के निकट होंगे किन्तु अध्ययन कार्य कठिन हो जायेगा । छोटा प्रतिदर्श अध्ययन की दृष्टि से उपयोगी होगा किन्तु परिणामों की विश्वसनीयता कम हो जायेगी ।

पारटेन के अनुसार, "अनुसंधान में अनुकूल आकार का प्रतिदर्श वह है जो कार्यक्षमता, प्रतिनिधित्व, विश्वसनीयता तथा लोचशीलता की आवश्यकताओं को पूरा- करता है ।

न्यादर्श के आकार को प्रभावित करने वाले तत्व (Factors Affecting the Size of Sample):-

(i) समग्र की प्रकृति : सजातीय इकाइयों की स्थिति में छोटा तथा विविधतापूर्ण इकाइयों की स्थिति में बड़े आकार का न्यादर्श होना चाहिए ।

(ii) वर्गों की संख्या: अधिक वर्ग बनाने की स्थिति में प्रतिदर्श का आकार बड़ा होगा ।

(iii) अनुसंधान की प्रकृति : विस्तृत एवं गहन अध्ययन की स्थिति में न्यादर्श का आकार छोटा रखना चाहिए । तकनीकी सर्वेक्षण में छोटा एवं साधारण सर्वेक्षण में बड़े आकार का न्यादर्श उचित रहता है।

(iv) निदर्शन विधि: स्तरित विधि में छोटे आकार के न्यादर्श से तथा साधारण दैव निदर्शन विधि में न्यादर्श के आकार को बड़ा रखने पर विशुद्ध परिणाम प्राप्त होंगे । अत: न्यादर्श के आकार निर्धारण में निदर्शन विधि की महत्वपूर्ण भूमिका है ।

(v) प्रश्नावली का आकार : पूछे गए प्रश्नों की संख्या कम होने पर न्यादर्श का आकार अधिक तथा प्रश्नों की संख्या अधिक होने पर न्यादर्श का आकार कम रखना चाहिए ।

(vi) सूचनादाताओं की प्रकृति : यदि सूचना अधिक सूचकों से प्राप्त होने की संभावना हो तो न्यादर्श का आकार बड़ा तथा कम सूचकों से प्राप्त होने की संभावना हो तो न्यादर्श का आकार छोटा रखना होगा ।

(vii) परिशुद्धता की मात्रा: सामान्यतया यह माना जाता है कि न्यादर्श के बड़े होने पर परिशुद्धता का स्तर अधिक होगा किन्तु प्रतिदर्श इकाइयों का चयन विशेष वैज्ञानिक

पद्धति से विशेषज्ञों द्वारा किया जाये तो छोटे आकार के न्यादर्श से भी अच्छे परिणाम प्राप्त किए जा सकते हैं ।

(viii) व्यावहारिक कारण: समय, प्रशिक्षित प्रगणकों की संख्या तथा धन पर्याप्त रूप सn उपलब्ध हों तो न्यादर्श का आकार बड़ा रखा जा सकता है जबकि इनकी सीमितता की स्थिति में छोटा आकार रखना ही उचित होगा ।

6. **निदर्शन पद्धति का चयन :** निदर्शन की दैव निदर्शन विधियों एवं गैर दैव निदर्शन विधियों में से उचित विधि का चयन किया जाना चाहिए ।

7. **निदर्शन व्यवस्था का संचालन :** विशेष सावधानी का प्रयोग करते हुए समग्र में से प्रतिदर्श इकाइयों का संकलन करते है ।

8. **प्रतिदर्श की विश्वसनीयता परीक्षण :** निम्नांकित तीन रीतियों द्वारा प्रतिदर्श की विश्वसनीयता की जाँच कर सकते है ।

(i) प्रतिदर्श के मापों की समग्र के मापों से तुलना

(ii) समानान्तर प्रतिदर्श लेकर दोनों प्रतिदर्शो के मापों की तुलना

(iii) उप न्यादर्श (उसी प्रतिदर्श में से एक प्रतिदर्श लेकर) के मापों से तुलना

9. **प्रतिचयन में अभिनति :** अवलोकन की त्रुटियों का वह समूह जो प्रतिदर्श इकाइयों के चयन को प्रभावित करता हैं अभिनति कहलाता है । अभिनति चेतन (Conscious) अथवा अवचेतन (Sub conscious) हो सकती है । चेतन अभिनति अनुसंधानकर्ता की व्यक्तिगत धारणाओं के कारण पूर्व नियोजित होती हैं जिसके परिणाम गंभीर हो सकते है । इसके विपरीत अवचेतन अभिनति अनजाने में होने से परिणाम ज्यादा गंभीर नहीं होते है । अभिनति प्रमुख रूप से तीन स्तरों पर हो सकती है । चयन में अभिनति दोषपूर्ण दैव चयन, सविचार चयन तथा इकाइयों के प्रतिस्थापन में हो सकती है । **संग्रहण** में अभिनति अपूर्ण सूचना, सूचकों में पक्षपात, अनुसंधानकर्ता के पूर्वाग्रह तथा दोषपूर्ण प्रश्नावली के कारण हो सकती है **विश्लेषण एवं निर्वचन** में अभिनत अनुपयुक्त सांख्यिकी रीतियों के कारण हो सकती है । अभिनति की रोकथाम हेतु निम्नांकित उपाय अपनाने चाहिए:-

(i) प्रतिदर्श चयन यंत्रों या दैविक अंकों के आधार पर किया जाये ।

(ii) प्रतिदर्श इकाइयों की प्रतिस्थापना से बचा जाये ।

(iii) प्रतिदर्श की सभी इकाइयों से सम्बन्धित पूर्ण सूचना संगृहीत की जानी चाहिए ।

(iv) प्रश्नावली में ऐसे प्रश्नों का ही समावेश हो जिनके अधिक से अधिक उत्तर प्राप्त किए जा सकें ।

(v) अनुसंधानकर्ता अनुभवी, प्रशिक्षित तथा पूर्वाग्रहों से रहित निष्पक्ष होना चाहिए ।

(vi) समंकों के विश्लेषण एवं निर्वचन की उपयुक्त विधियों का प्रयोग किया जाना चाहिए ।

10. **समंक विधियन एवं निर्वचन :** संकलित संमकों का विधिवत विश्लेषण एवं विधियन करके कुशल निर्णय हेतु सावधानी से निर्वचन किया जाता है ।

4.11 निदर्शन विधियाँ (Sampling Techniques)

1. प्रायिकता निदर्शन या दैव निदर्शन विधियों (Probability Sampling or Random Sampling Methods)

(अ) सरल दैव निदर्शन (Simple Random Sampling)

(ब) सीमित दैव निदर्शन (Restricted Random Sampling)

(i) व्यवस्थित दैव निदर्शन (Systematic Random Sampling)

(ii) मिश्रित या स्तरित निदर्शन (Mixed or Stratified Sampling)

(iii) बहु स्तरीय निदर्शन (Multistage Sampling)

(iv) क्षेत्रफल निदर्शन (Area Sampling)

(v) समूह निदर्शन (Cluster Sampling)

(स) स्वीकृत या अनुक्रमित निदर्शन (Acceptance or Sequential Sampling)

2. अप्रायिकता निदर्शन या गैर दैव निदर्शन विधियाँ (Non-probability Sampling or Non-random Sampling Methods)

(अ) सविचार निदर्शन (Purposive Sampling)

(ब) अभ्यंश निदर्शन (Quota Sampling)

(स) सुविधानुसार निदर्शन (Convenience Sampling)

(द) विस्तृत निदर्शन (Extensive Sampling)

(य) स्वयं निर्वाचित निदर्शन (Self-Selected Sampling)

1. प्रायिकता निदर्शन (Probability Sampling)

(अ) सरल दैव निदर्शन (Simple Random Sampling) : इस विधि के अन्तर्गत इकाइयों को समग्र में से इस प्रकार छाँटा जाता है कि प्रत्येक इकाई के न्यादर्श में चुने जाने की सम्भावना समान रहती है । न्यादर्श हेतु इकाई का चयन अनुसंधानकर्ता की व्यक्तिगत इच्छा पर आधारित न होकर संयोग (Chance)अथवा प्रायिकता (Probability)पर आधारित होता है । दैव निदर्शन हेतु निम्नांकित में से किसी भी एक रीति का प्रयोग किया जा सकता है :

(i) लॉटरी विधि : इसमें समग्र की प्रत्येक इकाई का नाम या नम्बर एक अलग पर्ची पर लिखते हैं, तत्पश्चात् सभी पर्चियों की एक समान गोलियाँ बनाकर किसी थैले या बर्तन में डाल देते हैं । अनुसंधानकर्ता द्वारा स्वयं आँख बन्द कर अथवा निष्पक्ष व्यक्ति द्वारा उतनी पर्चियाँ निकाली जाती हैं जितनी इकाइयाँ न्यादर्श में शामिल करनी हों ।

(ii) ढोल घुमाकर : समान आकर के गत्ते, लकड़ी या लोहे के टुकड़े जिन पर 0 से 9 तक अंक लिखे रहते हैं उन्हें किसी ढोल में डाल देते हैं । ढोल को हाथ से या बिजली से खूब घुमाकर निष्पक्ष व्यक्ति से एक-एक टुकड़ा निकलवाया जाता है । इकाई, दहाई, सैंकड़ा, हजार आदि के लिए अलग-अलग टुकड़े निकालकर इन अंकों

की सहायता से न्यादर्श की इकाइयाँ तैयार कर ली जाती है । आजकल ढोल के स्थान पार चक्र का उपयोग भी होने लगा है ।

(iii) दैव संख्याओं द्वारा : विभिन्न संस्थाओं एवं सांख्यिकों द्वारा रचित निम्नांकित प्रमुख दैव संख्या तालिकाओं से इकाइयों का चयन प्रतिदर्श हेतु किया जा सकता है :

(अ) टिप्पेट की चार-चार अंकों वाली 10400 दैव संख्या,

(ब) फिशर एवं येट्स की दो-दो अंकों वाली 15000 दैव संख्या

(स) केण्डाल एवं स्मिथ की दो-दो तथा चार-चार अंकों वाली 1, 00,000 दैव संख्या

(द) बैण्ड कारपोरेशन की दस लाख दैव संख्या सारणी

(य) स्ने डेकर की दैव संख्या सारणी

(र) आई.बी.एम. की दैव संख्या सारणी

दैव निदर्शन रीति के गुण :

1. यह सम्भाविता सिद्धान्त का प्रयोग किये जाने के कारण वैज्ञानिक विधि है तथा सरल रीति है।

2. प्रत्येक इकाई को चयन का समान अवसर मिलने से निष्पक्षता रहती है ।

3. प्रतिदर्श में चुनी गई इकाइयों में समग्र के गुण होने से प्रतिनिधित्वपूर्ण प्रतिदर्श का चुनाव होता है।

4. मूल न्यादर्श की विश्वसनीयता की जाँच उप-न्यादर्श द्वारा की जा सकती है ।

5. विभिन्न सार्थकता स्तरों पर प्रतिचयन विभ्रम (Sampling error) का मापन किया जा सकता है ।

दैव निदर्शन रीति के दोष :

1. केवल परिमित समग्र की स्थिति में ही उपयोगी क्योंकि प्रत्येक इकाई को क्रमांक देना होता है।

2. समग्र में सजातीयता न हो तथा प्रतिदर्श का आकार छोटा हो तो प्रतिदर्श न तो समग्र का प्रतिनिधित्व ही करेगा न ही परिणाम शुद्ध होंगे ।

3. अपूर्ण समंकों की स्थिति में अनुपयोगी तथा चुनी हुई इकाइयों से सम्पर्क न होने की स्थिति में अशुद्ध परिणाम ।

4. इस विधि में कई बार ऐसी आवश्यक इकाइयाँ छूट जाती हैं जो अनुसंधान की दृष्टि से महत्वपूर्ण सिद्ध हो सकती थी ।

(ब) `सीमित दैव निदर्शन (Restricted Random Sampling) :

(i) व्यवस्थित दैव निदर्शन (Systematic Random Sampling) : इस विधि में समग्र की सभी इकाइयों की भौगोलिक, वर्णात्मक, संख्यात्मक अथवा किसी अन्य आधार पर क्रमबद्ध सूची तैयार कर ली जाती है । प्रतिदर्श का आकार निश्चित कर प्रथम इकाई का चयन दैव आधार पर तथा अन्य इकाइयों का चयन बराबर दूरी

पर आई इकाई के आधार पर किया जाता है । उदाहरणार्थ, 100 इकाइयों के समग्र में से 5 इकाइयों का चयन करना हो तो पहली इकाई यदि दैव आधार पर 6 हो तो उसमें 100 / 5 = 20 द 2० के अन्तर से 6 के पश्चात् 26,46,66, 86वीं संख्या वाली इकाइयाँ न्यादर्श में होंगी ।

यह विधि पूर्ण रूप से दैव विधि नहीं है अत: इसे सीमित दैव निदर्शन विधि भी कहते है। यद्यपि इस विधि में परिशुद्धता का उच्चतम स्तर नहीं रहता तथापि पक्षपात रहित एवं सरल होने के कारण व्यवहार में अधिकतम उपयोग में लाई जाती है

(ii) मिश्रित या स्तरित दैव निदर्शन (Mixed or Stratified Random Sampling) : यदि समग्र की इकाइयों में गुणों की दृष्टि से अलग-अलग विशेषताएँ हों तो प्रतिबन्धित दैव निदर्शन की स्तरित दैव निदर्शन विधि का प्रयोग किया जाता है । यह विधि सविचार निदर्शन तथा दैव निदर्शन विधि का मिश्रण है । इसमें सर्वप्रथम प्रतिदर्श इकाइयों को उनकी विशेषताओं के आधार पर भिन्न-भिन्न सजातीय वर्गों में बाँटते हैं । इसके पश्चात् प्रत्येक वर्ग में से कुछ इकाइयों को वर्ग की इकाइयों के अनुपात में दैव विधि से चुन लेते हैं । उदाहरणार्थ, एक महाविद्यालय के 1000 छात्रों में से 200 प्रथम श्रेणी, 300 द्वितीय श्रेणी तथा 500 तृतीय श्रेणी प्राप्त करने वाले हैं । यदि 20% छात्र अर्थात् 200 छात्रों का न्यादर्श लेना हो तो 2 : 3 : 5 के अनुपात में प्रथम श्रेणी से 40 छात्र, द्वितीय श्रेणी से 60 छात्र तथा तृतीय श्रेणी से 100 छात्र चयनित होंगे । इस विधि में सभी वर्गों को शामिल किया जाता है । अनुसंधानकर्ता के नियंत्रण के कारण महत्त्वपूर्ण इकाइयाँ शामिल हो जाती हैं । प्रतिस्थापन की समस्या नहीं रहती क्योंकि किसी स्तर की इकाई से सम्पर्क न हो तो उसी वर्ग की दूसरी को चुन सकते हैं । इसमें स्तर विभाजन सही न होने की स्थिति में निष्कर्ष भ्रामक होंगे ।

(iii) बहुस्तरीय दैव निदर्शन (Multistage Random Sampling) : यदि समग्र में अत्यधिक इकाइयाँ हो अथवा क्षेत्र बहुत बड़ा हो तो समग्र को कई स्तरों में बाँटकर दैव निदर्शन विधि द्वारा उसमें से इकाइयों का चयन किया जाता है । इन चयनित इकाइयों का उप-विभाजन कर दैव निदर्शन आधार पर कुछ उप-इकाइयों को चुना जाता है । इस प्रकार यह कार्य अगले स्तरों तक चलता रहता है । यह विधि स्तरित निदर्शन तथा दैव निदर्शन विधि का सम्मिश्रण है । उदाहरणार्थ, राजस्थान में गेहूँ की प्रति एकड़ उपज ज्ञात करने हेतु राजस्थान के कुछ जिलों, जिलों में से गाँवों तथा गाँवों में से कुछ खेतों का चयन किया जायेगा ।

(iv) क्षेत्रफल निदर्शन (Area or Cluster Random Sampling) : इस विधि में प्रतिदर्श के चयन हेतु क्षेत्र (Area) को आधार रूप में लेते हैं । सम्पूर्ण समग्र को क्षेत्रीय आधार पर कई खण्डों में विभक्त कर दिया जाता है । इन खण्डों में से कुछ खण्डों को दैव प्रतिचयन विधि से चुन कर न्यादर्श में सम्मिलित करते है ।

इस विधि में क्षेत्र प्रतिचयन इकाई (Sampling) माना जाता हैं तथा जिन इकाइयों के सम्बन्ध में सूचना एकत्र की जाती है वे प्रारंभिक इकाइयाँ (Elementary units) के रूप में जानी जाती है । उदाहरण के लिए यदि हमें राजस्थान के लोगों के खान-पान का अध्ययन करना है तो सर्वप्रथम हम राजस्थान राज्य को जिले, तहसील एवं गाँव में विभक्त करेंगे । सभी गाँवों में से कुछ गाँव न्यादर्श के रूप में लिये जायेंगे । यहाँ "गाँव" प्रतिदर्श इकाई तथा इन गाँवों के व्यक्ति, परिवार सर्वे की प्रारंभिक इकाई होंगे । इस विधि में कार्य यांत्रिक होने से सरल व मितव्ययी होता है ।

(स) स्वीकृत या अनुक्रमित निदर्शन (Acceptance or Sequential Sampling) : इस विधि के अन्तर्गत किसी गुण विशेष के आधार पर वस्तु को स्वीकृत किया जाये अथवा नहीं यह निर्णय प्रतिदर्श इकाइयों की जाँच द्वारा किया जाता है । दोषपूर्ण इकाइयों की संख्या निर्धारित सीमा के बाहर होने पर प्रचय (Lot) को अस्वीकृत तथा निर्धारित सीमा में होने पर स्वीकृत कर दिया जाता है । यह विधि अन्य विधियों से इस अर्थ में भिन्न हैं कि अन्य विधियों में निदर्शन विभ्रम न्यादर्श के चुनाव के पश्चात् ज्ञात किया जाता हैं किन्तु इस रीति में निदर्शन विभ्रम (Sampling Error) का अनुमान लगाकर उसके आधार पर न्यादर्श का आकार निर्धारित किया जाता है ।

इसमें न्यादर्श इकाई के स्थान पर प्रचय (Lot) में लिया जाता है । यह विधि उद्योगों में किस्म नियंत्रण हेतु प्रयोग में लाई जाती है । हम इस विधि को निम्नांकित तीन भागों में कार्यान्वित कर सकते हैं:-

(i) एकल निदर्शन (Single Sampling) :- प्रचय की स्वीकृति हेतु एक न्यादर्श चुन कर केवल उसी न्यादर्श के निरीक्षण के आधार पर प्रचय (Lots) स्वीकृत करने अथवा न करने का निर्णय लेने की व्यवस्था एकल निदर्शन कहलाती है । उदाहरणार्थ किसी वस्तु के उत्पादन में 5000 इकाइयों के समूह में से 500 का न्यादर्श चुना जाये तथा 500 में से अधिकतम दूषित स्वीकार्य संख्या 30 हो तो ऐसी स्थिति में 500 के प्रतिदर्श में 30 से अधिक दूषित इकाइयाँ पाये जाने पर पूरा समूह अस्वीकृत कर दिया जायेगा ।

(ii) दोहरा निदर्शन (Double Sampling) :- एकल निदर्शन में जहाँ एक प्रतिदर्श के निरीक्षण के आधार पर स्वीकृत होने या न होने का निर्णय ले लिया जाता हैं, वही दोहरा निदर्शन में एक के अस्वीकृत होने पर दूसरा प्रचय (Lot) लेंगे अगर इसमें दूषित इकाइयों की संख्या निर्धारित सीमा से कम पाई जाती हैं तो पूरा माल स्वीकृत कर दिया जाता है ।

(iii) बहुल निदर्शन (Multiple Sampling) :- इसके अंतर्गत तीन या अधिक एक के बाद एक अनेक प्रतिदर्श लेकर निर्णय लिए जाते है । इसमें कुल कितने न्यादर्श निकाले जायेंगे इसका निर्णय पहले ही कर लिया जाता है ।

स्वीकृत निदर्शन विधि वहाँ उपयोगी होती हैं जहाँ निर्णय एक प्रतिदर्श के आधार पर नहीं लिए जा सकते हैं । इस विधि में कई निरीक्षण होने से यह खर्चीली एंव श्रमसाध्य होती है । इसमें परिशुद्धता प्रमाप पूर्व निर्धारित करना तर्क संगत प्रतीत नहीं होता है ।

2. अप्रायिकता निदर्शन विधियाँ (Non-probability Sampling Methods)

ऐसी निदर्शन विधियाँ जिनमें इकाइयों का चयन संयोग अथवा प्रायिकता पर आधारित न होकर अनुसंधानकर्ता के उद्देश्यों एवं सुविधा पर आधारित होता हैं गैर प्रायिकता अथवा गैर दैव निदर्शन विधियाँ कहलाती है । अब हम इनका विस्तार से अध्ययन करेंगे:-

(अ) सविचार निदर्शन (Purposive or Judgment Sampling) : जब अनुसंधानकर्ता अपने शान, प्रशिक्षण, अनुभव के आधार पर अनुसंधान के उद्देश्यानुसार ऐसी कुछ इकाइयों का चयन करता है जिनमें समग्र के गुणों का उचित प्रतिनिधित्व होता हो तो ऐसा निदर्शन सविचार निदर्शन कहलाता है । दैव निदर्शन विधि के अन्तर्गत महत्वपूर्ण इकाइयों के छूटने की संभावना रहती है इस विधि में चयन पूर्णतया अनुसंधानकर्ता की व्यक्तिगत इच्छा एंव विवेक पर निर्भर होने के कारण अनुसंधान की सफलता उसकी निष्पक्षता एवं ज्ञान से प्रभावित होती है । दो अनुसंधानकर्ताओं द्‌वारा चयन की स्थिति में परिणामों में स्वाभाविक रूप से अन्तर होगा । समग्र का क्षेत्र सीमित होने पर यह विधि उपयोगी है साथ ही सरल एवं मितव्ययी भी है । यह विधि उन अनुसंधानों में अत्यधिक उपयोगी साबित होगी जहाँ इकाई विशेष या इकाइयों को गहन अध्ययन हेतु प्रतिदर्श में सम्मिलित करना आवश्यक हो । इस विधि में इकाई को चुनने के समान अवसर नहीं होने से वैज्ञानिक विधि के रूप में स्वीकार नहीं किया जाता है । पक्षपात की संभावना होने से न्यादर्श के प्रतिनिधित्वपूर्ण न होने की संभावना बनी रहती हैं साथ ही न्यादर्श विभ्रम का अनुमान लगाना कठिन कार्य होता है ।

(ब) अभ्यंश निदर्शन (Quota Sampling): समग्र को स्तरित प्रतिचयन की भाँति कुछ निश्चित वर्गों में बाँट दिया जाता है । प्रत्येक से कितनी इकाइयों का चयन किया जायेगा यह पूर्व में निर्धारित कर दिया जाता है जिसे अभ्यंश (Quota) कहते है । विभिन्न वर्गों में से प्रतिचयन इकाइयों का चुनाव दैव आधार के स्थान पर प्रगणकों (Enumerators) के विवेक पर छोड़ दिया जाता है ।

जनमत सर्वेक्षणों (Public Opinion Polls) तथा व्यावसायिक सर्वेक्षणों (Business Surveys) के लिये उपयुक्त इस रीति में प्रगणकों की स्वतंत्रता से परिणामों में पक्षपात की संभावना बनी रहती है । इस हेतु पूर्ण प्रशिक्षित एवं ईमानदार प्रगणकों की आवश्यकता रहती है । यद्‌यपि इकाई चयन की स्वतंत्रता से महत्वपूर्ण इकाइयों को न्यादर्श में शामिल तो किया जा सकता है किन्तु निदर्शन विभ्रम का निर्धारण करना संभव नहीं हो पाता है ।

(स) **सुविधानुसार निदर्शन (Convenience Sampling) :** जब अनुसंधानकर्ता किसी निश्चित पद्धति को अपनाने के स्थान पर अपनी सुविधानुसार इकाइयों का चयन

कर लेता हैं तो इसे सुविधानुसार निदर्शन के नाम से जाना जाता है । समग्र के स्पष्टतया परिभाषित न होने की स्थिति में इस विधि का प्रयोग किया जाता है । दूरभाष निर्देशिका (Telephone Directory) में से नाम, पते छाँटकर उन्हें प्रतिदर्श में शामिल करना, वाणिज्य महाविद्यालय कोटा के किसी प्राध्यापक द्वारा कोटा शहर के छात्रों पर शोध हेतु अपनी सुविधा से केवल वाणिज्य महाविद्यालय कोटा के छात्रों को शामिल करना सुविधानुसार निदर्शन के उदाहरण है ।

(द) **विस्तृत निदर्शन (Extensive Sampling):** इस विधि में केवल वे ही इकाइयाँ छोड़ी जाती हैं जिनके संबंध में सूचना प्राप्त करना कठिन या लगभग असंभव हो अन्यथा बडी संख्या में इकाइयों की सूचना एकत्र की जाती है । उदाहरण के लिए यदि समग्र में 1000 इकाइयाँ है तो 900 अथवा अधिक इकाइयाँ विस्तृत निदर्शन हेतु चयनित की जा सकती है ।

(य) स्वयं निर्वाचित निदर्शन (Self-Selected Sampling): इस विधि में इकाइयों का चयन अनुसंधानकर्ता पर निर्भर न होकर इकाइयों पर स्वतंत्र रूप से निर्भर होता है कि वे प्रतिदर्श की इकाई बनें अथवा नहीं । इकाई द्वारा स्वयं प्रतिदर्श में सम्मिलित होने से यह विधि स्वयं निर्वाचित निदर्शन विधि कहलाती है । उदाहरणार्थ, कोई कम्पनी अपने उत्पाद हेतु समाचार पत्र रेडियो एवं टेलीविजन के माध्यम से जनता से सुझाव आमंत्रित करती है तो जो व्यक्ति सुझाव भेजते हैं वे प्रतिदर्श की इकाई बन जाते हैं ।

4.12 प्रायिकता सिद्धान्त (Probability Theory)

दैव न्यादर्श विधि प्रायिकता अथवा सम्भाविता सिद्धान्त पर आधारित है । कॉनर के अनुसार, "प्रायिकता हमारी इस प्रत्याशा का माप है कि एक घटना घटित होगी या नहीं।" लाप्लास के शब्दों में, "प्रायिकता अनुकूल घटनाओं का समान रूप से घटित होने वाली कुल घटनाओं के साथ अनुपात है ।" अगर किसी घटना के घटित होने के लिए m तथा न घटित होने के लिए n प्रयुक्त करें तो उस घटना के घटित होने की अथवा घटित न होने की प्रायिकता को हम निम्नानुसार ज्ञात कर सकते है:-

घटना के घटित होने की प्रायिकता (p) $= \frac{m}{m+n}$

घटना के घटित न होने की प्रायिकता (q) $= \frac{n}{m+n}$

उदाहरण के लिए ताश के 52 पत्तों में से कोई एक पत्ता निकालने पर उसके किसी एक बेगम होने की प्रायिकता $\frac{4}{52}$ या $\frac{1}{13}$ है । इसी प्रकार एक सिक्के को उछालने पर या तो वह चित (Head) गिरेगा या पट (Tail). सिक्के के चित गिरने की प्रायिकता

$\frac{1}{2}$ तथा पट गिरने की प्रायिकता भी $\frac{1}{2}$ है । यदि एक सुडौल सिक्के को 500 बार उछाला जाये तो वह लगभग 250 बार चित तथा लगभग 250 बार पट आना चाहिए । प्रायिकता ज्ञात करने हेतु उपर्युक्त सूत्र को निम्नांकित रूप में भी लिख सकते है:-

$$\text{प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूलतम परिस्थितियों की संख्या}}{\text{समस्त परिस्थितियों की कुल संख्या}}$$

निश्चितता की स्थिति में प्रायिकता का मान 1 तथा अनिश्चितता की स्थिति में 0 होता है । प्रायिकता सिद्धान्त यह स्पष्ट करता है कि यदि किसी समग्र में से विभिन्न इकाइयों के चुने जाने की संभावना समान हो एवं उस समग्र में से कुछ इकाइयों का चयन दैव आधार पर किया जाये तो चयन किए गए न्यादर्श में विभिन्न गुणों वाली इकाइयाँ उसी अनुपात में होंगी जिसमें वे पूरी समग्र में मिलती है । तात्पर्य यह है कि दैव न्यादर्श पर्याप्त रूप से समग्र का प्रतिनिधित्व करेगा । सांख्यिकीय नियमितता नियम तथा महांक जड़ता नियम इसी सिद्धान्त पर आधारित है ।

4.13 सांख्यिकीय नियमितता नियम (Law of Statistical Regularity)

सांख्यिकीय नियमितता नियम का आधार प्रायिकता सिद्धान्त है । किंग के अनुसार, "यदि किसी बहुत बड़े समूह में से दैव प्रतिचयन द्वारा यथोचित रूप से बड़ी संख्या में इकाइयों को चुन लिया जाये तो यह लगभग निश्चित है कि इन इकाइयों में औसत रूप से उस बड़े समूह के गुण आ जायेंगे।" इस प्रवृति को हम सांख्यिकीय नियमितता नियम कहते है । यह नियम निदर्शन विधि हेतु आधार पर माना जाता है क्योंकि दैव प्रतिचयन द्वारा बड़े आकार के न्यादर्श का अध्ययन कर कम समय, कम श्रम व कम व्यय में उतने ही विश्वसनीय एवं परिशुद्ध परिणाम ज्ञात किए जा सकते है जितने संगणना रीति से । व्यावहारिक जगत में अत्यधिक उपयोगी इस नियम को बीमा-व्यवसाय, जुए के खेल, अपराधों में पाई जाने वाली नियमितताओं के अध्ययन में प्रयुक्त किया जाता है । इस नियम के औसत रूप से ही सत्य होने के कारण प्रतिदर्श और समग्र के परिणामों में कुछ अन्तर हो सकता है । इस नियम के लागू होने के लिये आवश्यक है कि इकाइयों को न्यादर्श में सम्मिलित होने के समान अवसर प्राप्त हो साथ ही उन्हें दैव आधार पर चुना जाये । सविचार प्रतिचयन की दशा में यह नियम लागू नहीं होगा । इस नियम के लागू होने के लिये यह भी आवश्यक है कि प्रतिदर्श में इकाइयाँ पर्याप्त मात्रा में चयनित की जाये ।

4.14 महांक जड़ता नियम (Law of Inertia of Large Numbers)

इस नियम को सांख्यिकीय नियमितता नियम का उप प्रमेय (Corrollary) मानते है । इस नियम के अनुसार डॉ. बाउले के शब्दों में, "बड़ी संख्याएँ छोटी संख्याओं की अपेक्षा

अधिक स्थिर होती हैं ।" छोटी संख्याओं के एक समूह में यदि एक दिशा में कोई परिवर्तन होता है और दूसरे समूह में किसी दूसरी दिशा में परिवर्तन होता हैं तो दोनों समूहों को मिलाने पर परिवर्तन क्षतिपूरक होने से कोई प्रभाव नहीं होगा या अत्यधिक कम होगा । इस प्रकार कह सकते है कि छोटे समूह में परिवर्तन अधिक होता है जबकि बड़े समूह में परिवर्तन कम होता है । किंग ने इस बात पर बल देते हुए कहा है कि "अनेक बार तथ्यों के एक बड़े समूह के एक भाग में एक दिशा में परिवर्तन होता हैं तो संभावना यही होती है कि उसी समूह के इसके बराबर के दूसरे भाग में परिवर्तन ठीक विपरीत दिशा में होता हैं, अत: कुल परिवर्तन बहुत कम होता है ।" दैव प्रतिचयन में उपयोगी इस सिद्धान्त के कारण बड़ी मात्रा में प्रतिदर्श इकाइयों के होने से परिशुद्धता उच्चतम स्तर की होगी । डॉ. बाउले के अनुसार "बड़ी संख्याओं में अत्यधिक जड़ता होती है । इस स्थिरता के कारण ही सांख्यिकीय माप संभव होती है ।"

4.15 निदर्शन एवं गैर निदर्शन विभ्रम (Sampling and Non-Sampling Errors)

न्यादर्श कितनी ही निष्पक्षता के साथ लिया जाये फिर भी यह आवश्यक नहीं है कि वह समग्र के गुणों का पूर्ण रूप से प्रतिनिधित्व करेगा । समग्र एवं न्यादर्श के सांख्यिकीय मापों (प्राचल एवं प्रतिदर्शज) में अंतर हो सकता हैं साथ ही यह भी संभव है कि एक ही समग्र से लिए गए भिन्न-भिन्न न्यादर्शों के सांख्यिकीय मापों में भी अंतर आये । यह अन्तर दो कारणों से होता है- पहला जो अन्तर निदर्शन प्रक्रिया के कारण उत्पन्न होता है, निदर्शन विभ्रम (Sampling Error) कहलाता है । तथा दूसरा जो निदर्शन अथवा संगणना रीति दोनों में ही अन्तर्निहित होता है । गैर-निदर्शन विभ्रम (Non-Sampling Error) कहलाता है ।

निदर्शन विभ्रम (Sampling Error)

अनुसंधान की निदर्शन प्रणाली में समग्र के एक छोटे हिस्से का अध्ययन करते है । दैव (Chance) कारक के कारण विभ्रम उत्पन्न होते है, फलस्वरूप समग्र एवं न्यादर्श के मापों में भिन्नता दृष्टिगोचर होती हैं जिसे निदर्शन विभ्रम के नाम से जाना जाता है । दूसरे शब्दों में, "अवसर की उपस्थिति के परिणामस्वरूप प्राचल (Parameters) तथा प्रतिदर्शज (Statistic) में पाये जाने वाला अन्तर निदर्शन विभ्रम कहलाता हैं ।" निदर्शन विभ्रम जितना कम होगा न्यादर्श उतना ही समग्र के निकट व प्रतिनिधि होगा । दैव आधार पर चुने गये न्यादर्श के आकार में वृद्धि कर निदर्शन विभ्रम को कम किया जा सकता है । निदर्शन विभ्रम का आकलन विभिन्न सार्थकता स्तरों (Level of significance) पर प्रमाप विभ्रम द्वारा करते हैं जो कि निश्चित सीमाओं के अन्तर्गत होता है ।

गैर-निदर्शन विभ्रम तप (Non-Sampling Error)

सभी प्रकार की शोध प्रणालियों (संगणना तथा निदर्शन) में गैर-निदर्शन विभ्रम प्रकट होते हैं जो मानव कारक (Human Factor) के कारण उत्पन्न होते है । अनुसंधानकर्ता की अनुभवहीनता, प्रशिक्षण विहीनता एवं पक्षपातपूर्ण झुकाव, अनुपयुक्त सांख्यिकीय इकाई चयन, न्यादर्श का बहुत छोटा आकार, दोषपूर्ण वर्गीकरण, सविचार निदर्शन, साधन सूची के दोषपूर्ण या अपूर्ण होने, निष्कर्षों के प्रस्तुतीकरण में त्रुटि आदि से गैर-निदर्शन विभ्रम उत्पन्न होते है । इन्हें मापा नहीं जा सकता तथा एक ही दिशा में होने के करण संचयी (Cumulative) प्रकृति के होते है । निर्वचन की दृष्टि से ये महत्वपूर्ण (Significant) होते है । जिनके सम्बन्ध में यदि उचित सावधानी बरती जाये तो नियंत्रण संभव है ।

4.16 सारांश (Summary)

अनुसंधान क्षेत्र की समस्त इकाइयों का समूह समग्र कहलाता है । अगर समग्र की प्रत्येक इकाई के सम्बन्ध में विस्तृत जानकारी प्राप्त करनी हो तो यह संगणना रीति तथा कुछ प्रतिनिधि इकाइयों का ही अध्ययन किया जाना हो तो यह निदर्शन रीति कहलाती है । समग्र में संख्या निश्चित होने पर उसे परिमित समग्र तथा अनंत एवं असीमित होने की दशा उसे अपरिमित समग्र कहते है । समग्र वास्तविक या काल्पनिक हो सकता है । जहाँ गहन अध्ययन अपेक्षित हो, क्षेत्र सीमित हो, विश्वसनीयता एवं शुद्धता का उच्च स्तर अपेक्षित हो वहाँ संगणना रीति का प्रयोग किया जाता है । प्रतिदर्श से आशय समग्र की इकाइयों के ऐसे हिस्से से है जिनके आधार पर समग्र के संबंध में निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं । प्रतिचयन सिद्धान्त के उद्देश्यों में न्यादर्श इकाइयों के अध्ययन के आधार पर समग्र की इकाइयों का अनुमान लगाना तथा इन अनुमानों की विश्वसनीयता की जाँच को शामिल किया जाता है । निदर्शन प्रणाली के कुछ निश्चित आधारभूत सिद्धान्त हैं जिनमें विविधता में अन्तर्निहित एकता, समग्र के गुणों की समाविष्टता, पर्याप्त परिशुद्धता तथा परिणामों की विश्वसनीयता की जाँच को प्रमुख माना जाता है । समग्र के अनन्त होने, मानवीय श्रम, समय व धन की सीमितता, तुलनात्मक रूप से कम परिशुद्धता स्तर, इकाइयों की सजातीयता, अनुसंधान के दौरान इकाइयाँ नष्ट होने की संभावना तथा संगणना रीति की अंसभवता जैसी स्थितियों में निदर्शन रीति उपयुक्त होती है । आधुनिक युग में निदर्शन रीति का महत्त्व औद्योगिक, सामाजिक एवं राजनैतिक क्षेत्रों में दिन-प्रतिदिन बढ़ रहा है क्योंकि यह एकमात्र संभव रीति है साथ ही सर्वाधिक व्यावहारिक एवं सर्वोत्तम रीति है ।

निदर्शन रीति गणितीय संभाविता सिद्धान्त पर आधारित होने के कारण वैज्ञानिक रीति है जिसमें समय, श्रम व धन की बचत के साथ-साथ गहन अध्ययन कर परिशुद्ध निष्कर्ष प्राप्त किए जा सकते हैं । इसके द्वारा समग्र के परिणामों की जाँच की जा सकती हैं संगठन एवं प्रबन्ध में कम इकाइयों के कारण सुविधा रहती है । निदर्शन रीति इकाइयों में विविधता होने पर अनुपयुक्त रहती है । इकाइयों के प्रतिस्थापन की स्थिति में दैव चयन की अनुपस्थिति निष्पक्षता पर प्रभाव डालती है । प्रतिचयन

प्रक्रिया में विशिष्ट ज्ञान की आवश्यकता होती है । निदर्शन हेतु आवश्यक है कि इकाइयाँ सजातीय, स्वतंत्र, प्रतिनिधित्वपूर्ण हों । प्रतिदर्श का आकार पर्याप्त हो तथा अभिनति का अभाव होना चाहिए । निदर्शन प्रक्रिया में समस्या को परिभाषित किया जाना चाहिए, समग्र की प्रकृति की जानकारी होनी चाहिए, सांख्यिकीय इकाई सुनिश्चित एवं सुपरिभाषित हो, साधन सूची की जानकारी हो तथा न्यादर्श का आकार इतना बड़ा भी न हो कि अध्ययन करना कठिन हो तथा इतना छोटा भी न हो कि परिणामों की विश्वसनीयता ही न रहे । निदर्शन की उचित विधि का चयन, निदर्शन व्यवस्था का संचालन, प्रतिदर्श की विश्वसनीयता परीक्षण, प्रतिचयन में अभिनति, समंक विधियन एवं निर्वचन जैसे तत्वों का निदर्शन प्रक्रिया के दौरान ध्यान रखा जाना चाहिए ।

निदर्शन की विधियों को प्रमुखत: दो भागों में बाँटा जा सकता है । पहले में प्रायिकता आधारित निदर्शन जिसमें दैव निदर्शन, सीमित दैव निदर्शन (व्यवस्थित दैव निदर्शन, मिश्रित, बहुस्तरीय, क्षेत्रफल तथा समूह निदर्शन) तथा स्वीकृति या अनुक्रमिक निदर्शन शामिल है । दूसरे में अप्रायिकता निदर्शन के आधार पर अध्ययन कर सकते हैं जिनमें सविचार, अभ्यंश, सुविधानुसार, विस्तृत एवं स्वयं निर्वाचित निदर्शन को शामिल करते है। दैव निदर्शन में प्रत्येक इकाई को न्यादर्श में शामिल होने का समान अवसर प्राप्त होता है अनुसंधानकर्ता की वैयक्तिक इच्छा शामिल नहीं होती है । इसके अन्तर्गत लॉटरी विधि, ढोल घुमाकर, दैव संख्याओं द्वारा इकाइयों का चयन किया जाता है । यह सरल, मितव्ययतापूर्ण एवं वैज्ञानिक विधि हैं जिसमें प्रतिचयन विभ्रम का मापन किया जा सकता है । किन्तु यह विधि तभी उपयोगी हैं जब की सभी इकाइयों की वर्णात्मक, भौगोलिक, संख्यात्मक आधार पर सूची तैयार कर प्रथम इकाई का चयन दैव आधार पर तथा शेष को समान दूरी पर आई इकाई के आधार चयनित किया जाता है । मिश्रित निदर्शन में इकाइयों को विशेषताओं के आधार पर सजातीय वर्गो में बाँटकर प्रत्येक वर्ग में से दैव विधि से वर्गानुपात में चुन लेते है । बहुस्तरीय में समग्र को कई स्तरों मे बाँटकर दैव निदर्शन विधि से चुनते है । क्षेत्रफल निदर्शन में क्षेत्र को आधार मानते है जबकि समूह निदर्शन में समग्र को निश्चित समूहों में बाँटकर दैव निदर्शन विधि द्वारा न्यादर्श में इकाइयों से चुना जाता है ।

गैर प्रायिकता निदर्शन विधियों में सविचार निदर्शन के अन्तर्गत अनुसंधानकर्ता स्वविवेक से ऐसी इकाइयों का चयन करता है जो समग्र के गुणों का उचित प्रतिनिधित्व करती है। अभ्यंश निदर्शन के अन्तर्गत समग्र को वर्गो में बाँटकर प्रत्येक में से कितनी इकाइयों का चयन किया जायेगा यह पूर्व में ही निर्धारित कर देते हैं तत्पश्चात् प्रगणक स्वविवेक से इकाइयों का चयन कर लेता है । सुविधानुसार निदर्शन में अनुसंधानकर्ता की अपनी सुविधानुसार तथा विस्तृत निदर्शन में समग्र की इकाइयों का बड़ी संख्या में चयन किया जाता है । स्वयं निर्वाचित निदर्शन में इकाइयाँ स्वयं न्यादर्श का हिस्सा बनती है ।

निदर्शन की दैव विधि प्रायिकता सिद्धान्त पर आधारित है । प्रायिकता अनुकूल घटनाओं का समान रूप से घटित होने वाली कुल घटनाओं के साथ अनुपात है । प्रायिकता

सिद्धान्त पर सांख्यिकीय नियमितता नियम तथा महांक जडता नियम आधारित है । सांख्यिकीय नियमितता नियम यह बताता है कि यदि किसी बहुत बड़े समूह में से दैव प्रतिचयन द्वारा यथोचित रूप से बडी संख्या में इकाइयों को चुन लिया जाये तो यह लगभग निश्चित है कि इन इकाइयों में औसत रूप से उस बड़े समूह के गुण आ जायेंगे। महांक जडता नियम के अनुसार एक बडे समूह के एक भाग में एक दिशा में परिवर्तन होता है तथा दूसरे भाग में दूसरी दिशा में परिवर्तन होता है तो बडे समूह में कुल मिलाकर परिवर्तन बहुत कम होगा । दूसरे शब्दों में बड़ी संख्याओं में अत्यधिक जडता होती है । निदर्शन प्रणाली में दो प्रकार के विभ्रम होते है । अवसर की उपस्थिति के परिणामस्वरूप प्राचल एवं प्रतिदर्शज में पाये जाने वाला अन्तर निदर्शन विभ्रम (Sampling Error) कहलाता है जिसे न्यादर्श के आकार में वृद्धि कर कम किया जा सकता है । ऐसा विभ्रम जो मानव कारक के कारण उत्पन्न होता हैं अर्थात् अनुसंधानकर्ता की अनुभवहीनता पक्षपातपूर्ण झुकाव, दैव न्यादर्श आकार छोटा होना इत्यादि कारणों से उत्पन्न होता हैं उसे गैर निदर्शन विभ्रम (Non-Sampling Error) कहते हैं ।

4.17 शब्दावली (Glossary)

समग्र (Universe or Population) : किसी अनुसंधान क्षेत्र की समस्त इकाइयों का समूह ।

परिमित समग्र (Finite Universe) : ऐसा समग्र जिसकी इकाइयों की संख्या सुनिश्चित हो ।

अपरिमित समग्र (Infinite Universe) : जिस समग्र की इकाइयों की संख्या अनन्त या अपरिमित हो ।

वास्तविक समग्र (Real Universe) : जब समग्र की इकाइयों का अस्तित्व वास्तविक रूप में हो।

काल्पनिक समग्र (Hypothetical Universe) : जब समग्र की इकाइयों का अस्तित्व वास्तविक रूप में विद्यमान न होकर कल्पना पर आधारित होता है ।

निदर्शन (Sampling) : समग्र में से चुनी हुई इकाइयों से सम्बन्धित आँकड़े एकत्र कर सम्पूर्ण समग्र के बारे में निष्कर्ष निकालने से है ।

प्राचल (Parameters) : समग्र के सांख्यिकीय माप ।

प्रतिदर्शज (Statistic) : प्रतिदर्श के सांख्यिकीय माप ।

सांख्यिकीय नियमितता नियम (Law of Statistical Regularity) : यदि समग्र में से दैव प्रतिचयन के आधार पर समुचित इकाइयों का चयन किया जाये तो इन चुनी हुई इकाइयों में समग्र के गुण विद्यमान होंगे ।

महांक जडता नियम (Law of Inertia of Large Numbers) : न्यादर्श का आकार जितना अधिक व्यापक होगा, परिणाम भी उतने ही परिशुद्ध होंगे ।

निदर्शन विभ्रम (Sampling Errors) : अवसर की उपस्थिति के परिणामस्वरूप प्राचल एवं प्रतिदर्शज में पाये जाने वाला अन्तर ।

गैर निदर्शन विभ्रम (Non-sampling Errors) : अनुसंधानकर्ता की अनुभवहीनता, पक्षपातपूर्णता, न्यादर्श का अपर्याप्त आकार आदि कारणों से उत्पन्न विभ्रम ।

4.18 स्वपरख प्रश्न (Self-Assessment Questions)

1. संगणना तथा निदर्शन जाँच में अन्तर स्पष्ट कीजिए तथा उन परिस्थितियों को स्पष्ट कीजिए, जिनके अन्तर्गत निदर्शन जाँच ही केवल सम्भव तथा व्यावहारिक साधन है ।
2. निदर्शन की विभिन्न विधियों एवं सीमाओं को समझाइए ।
3. निदर्शन एवं गैर निदर्शन विभ्रमों के बारे में आप क्या समझते हैं ? उदाहरण सहित समझाइए ।
4. निदर्शन रीति के गुण-दोषों पर प्रकाश डालते हुए निदर्शन के आधार का वर्णन कीजिए ।
5. निदर्शन प्रक्रिया एवं सम्बद्ध समस्याओं पर टिप्पणी लिखिए ।

4.19 उपयोगी पुस्तकें (Further Readings)

1. शर्मा, जैन, पारीक, शोध प्रविधियाँ एवं सांख्यिकीय तकनीकें, रमेश बुक डिपो, जयपुर (राज.)
2. माथुर, खण्डेलवाल, गुप्ता, गुप्ता, शोध पद्धति एवं सांख्यिकीय प्रविधियाँ, अजमेरा बुक कम्पनी जयपुर (राज.)
3. कैलाश नाथ नागर, सांख्यिकी के मूल तत्व, मीनाक्षी प्रकाशन, मेरठ
4. वीरेन्द्र प्रकाश शर्मा, सामाजिक अन्वेषण की पद्धतियाँ, पंचशील प्रकाशन, जयपुर (राज.)
5. C.R. Kothari, Research Methodology - Methods & Techniques, New Age International Publishers, New Delhi.
6. K.R. Sharma, Business Research Methods, National Publishing House, New Delhi.
7. J.A. Khan, Research Methodology, APH Publishing House Corporation, New Delhi.

इकाई - 5: मापन एवं मापनी प्रविधियाँ (Measurement and Scaling Techniques)

इकाई की रूपरेखा :-

5.0 द्देश्य

5.1 परिचय एवं अर्थ

5.2 मापन की प्राथमिक मापनियाँ

5.3 मापन में अशुद्धि

5.4 प्रभावी मापन के परीक्षण

5.5 मापनी

5.6 मापनी प्रविधियाँ

5.7 मापनी संरचना निर्णय

5.8 सारांश

5.9 शब्दावली

5.10 स्वपरख प्रश्न

5.11 उपयोगी पुस्तकें

5.0 द्देश्य (Objectives)

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- मापन का अर्थ समझ सकें ।
- मापन की प्राथमिक मापनियों की जानकारी प्राप्त कर सकें एवं मापन में अशुद्धि के कारणों को पहचान सकें ।
- प्रभावी मापन के परीक्षणों को समझकर लागू कर सकें ।
- मापनी तथा मापनी प्रविधियों के बारे में जानकर उनका व्यावहारिक उपयोग करना सीख सकें ।
- मापनी संरचना के सम्बन्ध में निर्णय ले सकें ।

5.1 परिचय एवं अर्थ (Introduction and Meaning)

न केवल अनुसंधान के क्षेत्र में अपितु दैनिक जीवन में भी हम अपनी पसन्द-नापसन्द के निर्णय हेतु मापन का प्रयोग करते हैं । किसी व्यक्ति या संस्था द्वारा प्रदान की गई सेवाओं का स्तर, किसी उत्पाद की गुणवत्ता की स्वीकार्यता, किसी मित्र के व्यक्तित्व के गुण, किसी अभिनेता का अभिनय, कोई पेंटिंग, किसी शिक्षक का अध्यापन आदि का निर्णय हम मापन के आधार पर करते हैं । मापन में सामान्यतया भौतिक तत्व/वस्तु (Physical object) तथा अमूर्त अवधारणा (Abstract concepts) को शामिल करते हैं । भौतिक तत्वों के मापन में वजन (Weight),

ऊँचाई (Height), लम्बाई (Length), आयु (Age), आय (Income) आदि को प्रतिमान (Yardstick) के रूप में प्रयुक्त करते हैं । जब हमें गुणात्मक अथवा अमूर्त तत्वों/घटनाओं (Abstract Phenomena) का मापन करना हो तो स्थिति जटिल हो जाती है । किसी की बौद्धिक क्षमता, नेतृत्व क्षमता, वैवाहिक समायोजन, संस्था के प्रति निष्ठा इत्यादि का मापन करना सहज कार्य नहीं है । भौतिक तत्वों के मापन में परिशुद्धता का स्तर उच्च रखा जा सकता है किन्तु अमूर्त अवधारणाओं के सम्बन्ध में मापन के परिणामों की परिशुद्धता प्रमापित मापन उपकरण अपनाये जाने के बावजूद भी पूर्ण रूप से विश्वसनीय नहीं होती है । मापन से अभिप्राय किसी तत्व (Object) के गुणों (Characteristics) को संख्या अथवा कोई चिन्ह प्रदान करने से है ।

5.2 मापन की प्राथमिक मापनियाँ (Primary Scales of Measurement)

मापन (Measurement) हेतु प्रयुक्त प्राथमिक मापनियों (Scales) को हम निम्नांकित चार भागों में बाँट सकते हैं :

1. नामित अथवा शाब्दिक मापनी (Nominal Scale) :

नामित अथवा शाब्दिक मापनी के अन्तर्गत केवल पहचान हेतु (Identification) संख्या चिन्ह (Number Symbols) प्रदान किये जाते हैं जिनका कोई परिमाणात्मक मूल्य (Quantitative Value) नहीं होता बल्कि सुविधा की दृष्टि से वस्तु, घटना, व्यक्ति की जानकारी हेतु इन अंकों को प्रयुक्त किया जाता है । दूसरे शब्दों में, नामित समंक (Nominal data) केवल नाममात्र के होते हैं क्योंकि इनमें साधारण अंकगणित की भाँति अंकों में कोई विशेषता (Properties) नहीं होती है । यदि हम शैक्षिक स्तर हेतु 1,2,3,4 प्रदान करें तो उसे 4 > 2 या 1 < 3 नहीं लिखेंगे । उदाहरण की दृष्टि से हॉकी के खिलाडियों में से प्रत्येक को पहचान हेतु कोई संख्या (Number) प्रदान करना ताकि उनके बारे में जानकारी संधारित की जा सके । नामित मापनी केवल वस्तुओं/व्यक्तियों के बीच संख्या के आधार पर अंतर को व्यक्त करती है । इसे मापन का सबसे कम प्रभावी स्तर माना गया है । तथापि इसे सर्वेक्षणों एवं कार्यान्तर तथ्य परीक्षण (Expost facto experiments) में प्रमुखता से प्रयुक्त किया जाता है । नामित मापनी में केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों में से बहुलक (Mode) तथा सांख्यिकी सार्थकता परीक्षण में काई वर्ग परीक्षण (Chi-square test) का प्रयोग किया जाता है ।

2. क्रमिक मापनी (Ordinal Scale) :

क्रमिक मापनी घटनाओं (Events) या तत्वों/वस्तुओं (Objects) को क्रम प्रदान करती हैं जिसमें प्रदान की गई संख्याएँ (Assigned numbers) यह सूचित करती हैं कि उस तत्व/ वस्तु में सापेक्ष रूप से किस सीमा तक गुण विद्यमान है । दूसरे शब्दों में,

एक क्रमिक मापनी यह बताती हैं कि एक वस्तु, तत्व या घटना की तुलना में अन्य वस्तु, तत्व या घटना में सापेक्ष रूप से अधिक या कम गुण विद्यमान हैं । ये गुण कितने अधिक या कम विद्यमान हैं इसकी जानकारी इसके अन्तर्गत नहीं दी जाती हैं । उदाहरण के लिए अंशुमान का अपनी कक्षा में प्रथम स्थान है तथा अजय का पाँचवां स्थान है तो यह कह सकते हैं कि अंशुमान अजय की तुलना में होशियार हैं किन्तु यह नहीं कह सकते कि अंशुमान अजय की तुलना में पाँच गुना होशियार है । इस प्रकार कह सकते हैं कि क्रमिक मापनी 'से बडा' (Greater than) या 'से छोटा' (Less than) को ही प्रस्तुत कर सकती है किन्तु कितना बड़ा या छोटा को नहीं । प्रथम स्थान (First rank) तथा दूसरे स्थान (Second rank) वाले विद्यार्थी के अंकों का अन्तर तथा आठवें स्थान (Eight rank) तथा नवें स्थान (Ninth rank) वाले विद्यार्थी के अंकों का अन्तर अधिक अथवा कम हो सकता है । क्रमिक मापनी मदों (Items) को केवल उच्चतम (Highest) से निम्नतम (Lowest) श्रेणी प्रदान करती है । अधिकतर इसका प्रयोग गुणात्मक तत्वों से संबंधित अनुसंधान में किया जाता है । सांख्यिकीय दृष्टि से केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों में से मध्यका (Median) तथा अपकिरण मापन हेतु शतकम (Percentile) तथा चतुर्थकों (Quartiles) का प्रयोग किया जाता है । सहसम्बन्ध में इसका सम्बन्ध कोटि अन्तर सहसम्बन्ध (Rank-Correlation) तक सीमित है । सांख्यिकीय सार्थकता मापन हेतु अप्राचलीय विधियों (Non-Parametric Methods) का प्रयोग करते हैं इसमें नामित मापनी भी शामिल होती है ।

3. अन्तराल मापनी (Interval Scale) :

अन्तराल मापनी के अन्तर्गत क्रमिक मापनी की समस्त सूचनाएँ शामिल रहती हैं किन्तु यह वस्तुओं/तत्वों (Objects) के मध्य अन्तर की तुलना में सहायक होता है । इसके अन्तर्गत मापनी पर समान दूरी पर स्थित संख्याओं के मध्य गुणों (Characteristics) का अन्तर भी समान होता है । अर्थात् दो मापनी मूल्यों (Scale Values) का अन्तर समान या स्थिर या बराबर अन्तराल का होता है । उदाहरण के लिए 3 तथा 4 का अन्तर 4 तथा 5 के अन्तर के समान हैं जो कि 5 तथा 6 के अन्तर के समान है । तापमान मापनी (Temperature Scale) इसका अन्य उदाहरण है । हम यह कह सकते हैं कि 20° से 30° के तापमान हेतु जितनी वृद्धि की आवश्यकता हैं उतनी ही वृद्धि की आवश्यकता 40° से 50° तापमान हेतु होगी । दूसरे शब्दों में, यह कह सकते हैं कि किसी वस्तु के तापमान को 20° से 30° करने पर उतनी ही गर्मी (Heat) की आवश्यकता होगी जितनी 40° से 50° हेतु । इसका तात्पर्य यही यह नहीं हैं कि 40° का तापमान 20° तापमान की अपेक्षा दुगुना है । 20° तथा 40° दोनों तापमानों का अनुपात अर्थहीन हैं क्योंकि यहाँ शून्य एक स्वेच्छाचारी बिन्दु (Arbitrary point) है । अन्तराल मापनी में शून्य बिन्दु की स्थिति

(Location of zero point) स्थाई न होकर स्वेच्छाचारी (Arbitrary) होती है । अन्तराल मापनी में वास्तविक शून्य (True zero) की कमी एक प्रमुख सीमा (limitation) है । अन्तराल मापनी को क्रमिक मापनी की तुलना में अधिक प्रभावी माना जाता हैं क्योंकि इसमें अन्तराल की समानता (Equality of interval) की अवधारणा सम्मिलित होती है । अन्तराल मापनी में नामित मापनी, क्रमिक मापनी के साथ-साथ सांख्यिकी की प्रविधियों में विस्तार (Range) समान्तर माध्य (Mean), प्रमाप विचलन (Standard Deviation) सह–सम्बन्ध (Correlation) टी-परीक्षण (T-test) एफ-परीक्षण (F-test), प्रसरण विश्लेषण (ANOVA), प्रतीपगमन (Regression) को प्रयुक्त किया जा सकता है ।

4. अनुपात मापनी (Ratio Scale) :

अनुपात मापनी में नामित, क्रमिक एवं अन्तराल मापनी के समस्त गुण विद्‌यमान होते हैं साथ ही इसमें निरपेक्ष शून्य बिन्दु (Absolute zero point) भी होता हैं । अनुपात मापनी में तुलनात्मक अध्ययन की सुविधा है जो कि अन्तराल मापनी में संभव नहीं है । उदाहरण के लिए किसी पृष्ठ पर टाइप किए गए गलत अक्षरों (Incorrect letters) की संख्या को अनुपात मापनी के आधार पर दो व्यक्तियों के मध्य तुलना हेतु प्रयुक्त करते हुए कह सकते हैं कि सुनील की कार्य निष्पत्ति संजय की तुलना में दुगुनी श्रेष्ठ है । अनुपात मापनी के उदाहरण हेतु लम्बाई (Length), ऊँचाई (Height), उम्र (Age), लागत (Cost), आय (Income), बिक्री (Sales) आदि को ले सकते हैं । अनुपात मापनी के अन्तर्गत सभी सांख्यिकीय प्रविधियों (Statistical Techniques) को प्रयुक्त किया जा सकता है ।

5.3 मापन में अशुद्धि (Error in Measurement)

अनुसंधान की सफलता के लिये मापन की निश्चितता एवं स्पष्टता आवश्यक हैं । मापन में अशुद्धि किन कारणों से हो सकती हैं इसकी जानकारी अनुसंधानकर्ता को होनी आवश्यक है । हम इस संदर्भ में ऐसे कारकों (Factors) का अध्ययन करेंगे जिनके कारण मापन में अशुद्धि की संभावना होती है । तथा इनको दूर करने अथवा निरर्थक करने का प्रयास करना चाहिए ताकि अनुसंधान के परिणाम शुद्धता से परिपूर्ण हो ।

1. उत्तरदाता (Respondent) :

कभी-कभी उत्तरदाता ने थकान, बोरियत, बैचेनी जैसी अल्पकालिक समस्या से ग्रस्त होकर आधे-अधूरे उत्तर दिये हों अथवा उत्तर न दिए हों । नकारात्मक भावना अथवा विषय के प्रति अज्ञानता को स्वीकार न करने की भावना से कई बार उत्तरदाता जवाब देने में अनिच्छुक रहता है । सभी प्रकार की अनिच्छुकता से साक्षात्कार मात्र अनुमानों पर आधारित रह जाता है, परिणामस्वरूप मापन में अशुद्धि उत्पन्न होती है ।

2. मापक अथवा साक्षात्कारकर्त्ता (Measurer or Interviewer) :

साक्षात्कारकर्त्ता का व्यवहार एवं व्यक्तित्व, कार्यशैली इत्यादि उत्तरदाता को उत्साहित या हतोत्साहित कर सकते हैं । प्रश्नों के उत्तर में क्रम एवं जवाब बदलकर साक्षात्कारकर्त्ता मूल उद्देश्य को नुकसान पहुँचा सकता है । गलत संकेतन (Coding), दोषयुक्त सारणीयन तथा सांख्यिकीय गणनाएं भी अशुद्धि को बढ़ाने में सहायक हो सकती है ।

3. उपकरण (Instrument) :

दोषयुक्त मापन उपकरणों के कारण भी अशुद्धि उत्पन्न हो सकती हैं । अस्पष्ट अवधारणाएँ, कठिन शब्दों का प्रयोग, उत्तर हेतु विकल्पों का अभाव, उत्तर हेतु उपयुक्त स्थान का अभाव, उत्तरदाता की बुद्धि के परे प्रश्न, अस्पष्ट छपाई इत्यादि के कारण मापन उपकरण दोषयुक्त हो जाते हैं परिणामस्वरूप मापन में अशुद्धियाँ उत्पन्न हो जाती हैं ।

4. परिस्थितियाँ (Situations) :

साक्षात्कारकर्त्ता एवं उत्तरदाता के मध्य सम्बन्धों में समायोजन न होने से भी साक्षात्कार तनावपूर्ण एवं बोझिल (Strainful) हो सकता है । उत्तरदाता यदि यह महसूस करे कि उसका नाम गुप्त नहीं रह पायेगा तो वह कई बार उत्तर देने में अनिच्छा प्रकट कर सकता है । कई बार साक्षात्कार के समय कोई ऐसा व्यक्ति भी उपस्थित हो सकता हैं जो साक्षात्कार कर्त्ता एवं उत्तरदाता के साथ सहभागी होकर या केवल उपस्थिति मात्र से अनुसंधान के उद्देश्य को निरर्थक कर सकता है ।

5.4 प्रभावी मापन के परीक्षण (Tests of Sound Measurement)

मापन उपकरण के मूल्यांकन हेतु वैधता (Validity), विश्वसनीयता (Relability) तथा व्यावहारिकता (Practicality) परीक्षण को ध्यान में रखना चाहिए । वैधता के अन्तर्गत हम जो कुछ वास्तव में मापना चाहते हैं उस मापन परीक्षण की सीमा को शामिल करते हैं । विश्वसनीयता में मापन प्रक्रिया की परिशुद्धता एवं यथार्थता को तथा व्यावहारिकता में मितव्ययता, सुविधा तथा निर्वचनीयता (Interpretability) को शामिल करते हैं ।

हम इन सभी परीक्षणों का विस्तार से अध्ययन करेंगे :-

1. वैधता / मान्यता परीक्षण (Test of Validity)

मान्यता परीक्षण यह बताता है कि मापन उपकरण से जो मापने की अपेक्षा है उसकी मात्रा (Degree) क्या होगी ? इस संदर्भ में हम तीन प्रकार की मान्यता का अध्ययन करते हैं -

(i) विषय वस्तु / अन्तर्वस्तु वैधता (Content validity); (ii) कसौटी / मानदण्ड सम्बन्धी वैधता (Criterion-relation validity); (iii) संरचना / निर्माण वैधता (Construct validity).

(ii) विषय वस्तु / अन्तर्वस्तु वैधता (Content validity) : यह उस सीमा का निर्धारण करती है जिसके अन्तर्गत मापन उपकरण (Measuring Instrument) अध्ययन के अन्तर्गत आने वाले विषय (Topic) को पर्याप्त रूप से शामिल करता है । उदाहरणार्थ, एक स्टोर की छवि (Image) में मापन उपकरण यथाक्रम किए हुए व्यापारिक माल (Assortment of merchandise), किस्म (Variety), गुणवत्ता (Quality) इत्यादि को शामिल नहीं करता तो इसे अपर्याप्त माना जायेगा । मापन उपकरण यदि समग्र के प्रतिनिधि न्यादर्श (Representative Sample) से युक्त हैं तो विषयवस्तु वैधता उत्तम मानी जायेगी ।

(iii) कसौटी / मानदण्ड सम्बन्धी वैधता (Criterion-related validity) : यह कुछ परिणामों (Outcome) के पूर्वानुमान या कुछ वर्तमान दशाओं के अस्तित्व के अनुमान की योग्यता है । इसके अन्तर्गत आनुभविक अनुमान के उद्देश्य से प्रयुक्त किए गए मापनों की सफलता को प्रदर्शित किया जाता है । सम्बन्धित कसौटी/मानदण्ड में प्रासंगिकता (Relevance), पूर्वाग्रह से मुक्ति (Freedom from bias), विश्वसनीयता (Reliability), उपलब्धता (Availability) जैसे गुण होने चाहिए। कसौटी/मानदण्ड सम्बन्धी वैधता को परीक्षण अंक (test score) तथा भावी निष्पत्ति के मापन के मध्य सह-सम्बन्ध गुणांक के रूप में व्यक्त किया जाता है । कसौटी/मानदण्ड सम्बन्धी वैधता के अन्तर्गत पूर्वानुमानित वैधता (Predictive validity) किसी परीक्षण (test) के भावी निष्पत्ति (Future performance) के पूर्वानुमान में उपयोगिता को बताती हैं तो संगामी वैधता (Concurrent validity) ज्ञात वैधता के अन्य मापनों से निकटतम सम्बन्ध में परीक्षण की उपयोगिता को प्रदर्शित करती है ।

(iv) संरचना / निर्माण वैधता (Construct validity) : इसके अन्तर्गत इस प्रश्न का उत्तर दिया जाता हैं कि किन गुणों का मापन किया जा रहा हैं । संरचना वैधता के मूल्यांकन के समय शोधकर्ता उन सैद्धान्तिक प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयास करता हैं जिनमें यह पूछा जाता है कि मापन क्यों कार्य करता हैं तथा मापन में अन्तर्निहित सम्बन्धित सिद्धान्त क्या निगमन (Deductions) किए जा सकते है । संरचना वैधता एक मात्रा (degree) हैं जिसके लिए परीक्षण के अंकों को जिम्मेदार ठहराया जा सकता है ।

2. विश्वसनीयता परीक्षण (Test of Reliability) :

विश्वसनीयता उस सीमा को प्रदर्शित करती हैं जिसमें मापनों की पुनरावृत्ति किये जाने पर भी मापन उपकरण एकरूप / सुसंगत परिणाम (Consistent results) प्रदान करते हों। अन्य शब्दों में, विश्वसनीयता से आशय उस सीमा (extent) से हैं जिसमें मापन अशुद्धियों से मुक्त हों । मापन में अशुद्धि के कारकों में स्वास्थ्य (Health), शोरगुल (Noise), थकान (Fatigue), सामाजिक आवश्यकताएँ (Social Desirability), अन्य

व्यक्तियों की उपस्थिति (Presence of Other People),किसी व्यक्ति की बौद्धिक क्षमता (Intelligence of an Individual), अस्पष्ट छपाई (Poor Printing), प्रश्नावली में मदों की अधिकता एवं न्यून अभिकल्पना (Overcrowding of items in questionnaire and poor design) को शामिल किया जाता है । विश्वसनीय मापन उपकरण वैधता में योगदान देते हैं किन्तु यह आवश्यक नहीं हैं कि विश्वसनीय मापन उपकरण वैध उपकरण हो । स्थिरता (Stability) तथा समतुल्यता (Equivalence) विश्वसनीयता के दो पहलू हैं । स्थिरता पहलू (Stability aspect) का सम्बन्ध समान व्यक्ति तथा समान उपकरण के साथ पुनरावृत्त मापनों से प्राप्त परिणामों में एकरूपता सुनिश्चित करने से है । समतुल्यता पहलू विभिन्न अनुसंधानकर्ताओं या विभिन्न प्रतिचयन मदों में कितनी अशुद्धि हैं, को ध्यान में रखता है । विश्वसनीयता मूल्यांकन में निम्नांकित तरीकों / विचारधाराओं (Approaches) को प्रयुक्त किया जाता हैं :-

(i) परीक्षण -पुन: परीक्षण विश्वसनीयता (Test-Retest Reliability) : इसमें उत्तरदाता को दो विभिन्न समयों पर जहाँ तक संभव हो लगभग समान परिस्थितियों में मापन मदों के समान समुच्यों (Identical sets) के साथ प्रयुक्त (administered) किया जाता है अर्थात उत्तरदाता से उन्हीं प्रश्नों को दुबारा कुछ समयान्तराल से पूछा जाता है । यह अन्तराल सामान्यतया दो से चार सप्ताह का होता है ताकि उत्तरदाता पहली बार में दिए गए उत्तरों को याद न रख सके । दोनों मापनों में समानता की मात्रा का निर्धारण सहसम्बन्ध गुणांक के परिकलन द्वारा किया जाता है । उच्च सहसम्बन्ध गुणांक उच्च विश्वसनीयता को प्रदर्शित करता है ।

(ii) वैकल्पिक प्रारूप विश्वसनीयता (Alternative -Forms Reliability) : इसके अन्तर्गत माप के दो समतुल्य प्रारूपों (Equivalent forms) तैयार किए जाते है । इसके अन्तर्गत भी उत्तरदाता वही रहते हैं किन्तु मापन प्रारूप दोनों समय अलग-अलग रहते हैं । समय अन्तराल भी दो से चार सप्ताह का रहता है । दोनों वैकल्पिक मापन प्रारूपों के अंकों के मध्य्य सहसम्बन्ध द्वारा विश्वसनीयता मूल्यांकन किया जाता है ।

(iii) आन्तरिक सुसंगति विश्वसनीयता (Internal Consistency Reliability) : इसमें मापन की मदों को दो भागों में बाँटकर आधे-अधूरे अंक परिणामों को सहसम्बन्धित किया जाता है । मापन की मदों को दो भागों में सम या विषम संख्या या दैव आधार (Randomly) पर बाँट सकते है । दोनों भागों में उच्च सहसम्बन्ध उच्च आन्तरिक सुसंगतता को प्रदर्शित करता है ।

3. व्यावहारिकता परीक्षण (Test of Practicality) : मापन उपकरण में व्यावहारिकता गुण को मितव्ययता, सुविधा तथा निर्वचनीयता (Interpretability) के रूप में समझ सकते हैं । संचालन के दृष्टिकोण से मापन उपकरण व्यावहारिक हों । यद्यपि अनुसंधान में

उच्चस्तरीय परिशुद्धता एवं विश्वसनीयता हेतु अधिकतम मदों को शामिल किया जाना उचित रहता हैं किन्तु साक्षात्कार - अवलोकन की समय सीमा, समंक संकलन विधियाँ, अनुसंधान हेतु खर्च राशि की तुलना में प्राप्त होने वाले परिणाम इत्यादि आर्थिक कारण ध्यान में रखे जाने चाहिए । सुविधा परीक्षण (Convenience test) यह बताता है कि मापन उपकरण इतने सरल होने चाहिए कि उनका प्रबन्ध किया जा सके । इस हेतु मापन उपकरण (Measuring Instrument) के उचित अभिविन्यास (Lay-out) पर ध्यान दिया जाना चाहिए । उदाहरणार्थ, एक प्रश्नावली जिसमें स्पष्ट निर्देश हों, ज्यादा प्रभावी होगी बजाए इसके कि वह जिसमें अपूर्ण तथा अस्पष्ट निर्देश हों । निर्वचनीयता का अभिप्राय है कि परीक्षणकर्त्ताओं के अतिरिक्त अन्य व्यक्ति भी परिणामों का निर्वचन कर सकें इस हेतु परीक्षण प्रबन्ध के विस्तृत निर्देश, विश्वसनीयता गवाही दस्तावेज, अंकीय तालिकाएँ (Scoring keys), परीक्षण उपयोग हेतु मार्गदर्शन सहायक के रूप में दिए जाने चाहिए ।

5.5 मापनी (Scaling)

मापन के दौरान विशेषकर जब चाहते हुए भी वैध मापन (Valid Measurement) न हो पाये तो शोधकर्ता को मापन समस्या से गुजरना होता है । अमूर्त तथा जटिल अवधारणाएं जैसे नजरिया (Attitude) राय (Opinion) में वैध मापन की समस्या का सामना करना पड़ता है । यद्यपि भौतिक अवधारणाओं (Physical Concepts) में भी थोड़ी-बहुत मापन की समस्या आती है । अतएव अमूर्त अवधारणाओं के अधिक परिशुद्धता से मापन हेतु मापनी प्रविधियों (Scaling Techniques) का प्रयोग किया जाता है । मापनी (Scaling) उत्तरदाता को उसके नजरिये (Attitude), राय (Opinion) के आधार पर संख्या प्रदान कर एक छोर (Continuum) पर रखने की प्रक्रिया हैं । मापनी व्यक्तिपरक अमूर्त अवधारणाओं (Subjective abstract Concepts) के गुणात्मक मापन निर्धारण की कार्यविधियों (Procedures) का प्रयास है । मापनी कार्यविधि के आधारों में विषय पुनश्चर्या (Subject orientation), उत्तर प्रारूप (Response form), व्यक्तिपरकता की मात्रा (Degree of Subjectivity) मापनी गुण/लक्षण (Scale Properties), आयामों की संख्या (Number of dimensions) तथा मापनी निर्माण प्रविधियों (Scale Construction Techniques) को शामिल किया जाता है।

5.6 मापनी प्रविधियाँ (Scaling Techniques)

अध्ययन की दृष्टि से मापनी प्रविधियों का वर्गीकरण दो भागों में कर सकते है:

(i) तुलन मापनियाँ (Comparative Scales)

(ii) गैर तुलन या श्रेणीकरण मापनियाँ (Non Comparative or categorical Scales):

तुलन मापनी के अन्तर्गत मदों की एक दूसरे से सीधी तुलना की जा सकती है । उदाहरणार्थ, आप क्या पसंद करेंगे चाय अथवा काफी? तुलन मापनी संमकों का सापेक्ष अर्थ (Relative terms) में निर्वचन किया जाना चाहिए क्योंकि इनमें क्रमिक तथा कोटि लक्षण (Ordinal and rank properties) होते हैं । तुलन मापनियाँ समझने एवं लागू करने में आसान होती हैं तथा उत्प्रेरक तत्वों/वस्तुओं (Stimulus objects) के मध्य बारीक भिन्नताओं को इसमें ढूँढा जा सकता है । इसमें मदों को स्वतंत्र रूप से मापित (Scaled) नहीं किया जा सकता अतएव इस कमी को दूर करने हेतु गैर तुलन मापनी का प्रयोग किया जाता है जिसमें परिणामी संमकों (Resulting data) को सामान्यतया अन्तराल (Interval) या अनुपात (Ratio) मापनी के अन्तर्गत दिया जाता है । गैर तुलन मापनियाँ को अधिकतर व्यावसायिक शोध कार्यो में प्रयुक्त किया जाता है । अब हम सुविधा की दृष्टि से मापनी प्रविधियों का अध्ययन तुलन एवं गैर तुलन मापनी प्रविधियों में बाँटकर निम्नानुसार करेंगे :

(अ) तुलन मापनी प्रविधियाँ (Comparative Scaling Techniques)

(i) युग्मित तुलना विधि (Paired Comparison Method)

(ii) कोटि क्रम विधि (Rank order Method)

(iii) स्थिर योग विधि (Constant sum method)

(ब) गैर तुलन मापनी प्रविधियाँ (Non Comparative Scaling Techniques)

(i) निरंतर मूल्यांकन मापनी (Continuous Rating Scale)

(ii) मदीकृतमूल्यांकन मापनी (Itemized Rating Scale)

(अ) तुलन मापनी प्रविधियां : अब हम इनका विस्तार से अध्ययन करेंगे:

(i) युग्मित तुलना विधि (Paired Comparison Method) : इस मापनी के अन्तर्गत उत्तरदाता को दो वस्तुऐं (Objects) दी जाती हैं तथा किसी एक मानदण्ड (Criteria) के आधार पर किसी एक को चुनने हेतु कहा जाता है । उदाहरण के लिए चाय के एक नए जायके (Flavour) तथा चाय के एक स्थापित ब्रांड के बीच चयन । अगर दो से अधिक वस्तुओं (Objects) के बीच निर्णय करना हो तो युग्मित तुलना विधि में निर्णयों की संख्या (The number of judgement) को निम्नांकित सूत्रानुसार ज्ञात किया जायेगा:

$$N = \frac{n(n-1)}{2}$$

यहाँ N = Number of Judgements

N = Number of Stimuli or objects to Judged.

युग्मित तुलना मापनी उसी स्थिति में उपयोगी हैं जबकि वस्तुओं की संख्या (अर्थात ब्रांड्स) सीमित हों क्योंकि इसके अन्तर्गत सीधी तुलना तथा बाध्यकारी चयन (Forced choice) हैं । युग्मित तुलना मापनी को हम नहाने के साबुन की प्राथमिकता के उदाहरण द्वारा समझ सकते हैं:

निर्देश :

आपको नहाने के साबुनों के ब्रांड के दस 10 युग्म (Pairs) दिए जा रहे हैं । प्रत्येक युग्म के लिए कृपया सूचित कीजिए कि युग्म के दो ब्रांड में से कौनसा एक आप अपने निजी प्रयोग के लिए चुनेंगे:

अभिलेखन प्रारूप Recording Form	A	B	C	D	E
A	-	0	0	1	0
B	1	-	0	1	0
C	0	0	-	1	0
D	1	1	0	-	1
E	3	2	0	4	1
No. of items Preferred					

उपरोक्त में 1 से अभिप्राय है सम्बन्धित पंक्ति (Row) की तुलना में उस खाने (Column) के ब्रांड को वरीयता दी गई है जबकि 0 का अभिप्राय है कि खाने (Column)की तुलना में पंक्ति(row) को वरीयता दी गई हैं । कोई ब्रांड कितनी बार वरीयता प्राप्त करता हैं इसकी गणना प्रत्येक खाने के 1 को जोड़कर की गई है ।

उपरोक्त उदाहरण में अधिकतम से निम्नतम वरीयता क्रम में D,A,B,E,C इस प्रकार हैं:-

(ii) कोटि क्रम विधि (Rank order Method) : युग्मित तुलना मापनी की तुलना में कोटि कम विधि सरल एवं कम समय लेने वाली है । इसके अन्तर्गत उत्तरदाता को अनेक वस्तुऐं (Several objects) दी जाती हैं तथा कुछ मानदण्डों के आधार पर अपनी पसंद के अनुसार उन्हें क्रम (Order) देने को कहा जाता है । इस विधि का लाभ यह हैं कि उत्तरदाता सरलता से कोटियन निर्देशों (Instructions for ranking) को समझ लेता हैं । युग्मित तुलना मापनी में जहाँ खरीददारी माहौल (Shopping environment) से सादृश्यता (Resemblance) कम होती हैं वहीं कोटि कम मापनी में सादृश्यता ज्यादा होती है । कोटि क्रम मापनी को हम निम्नांकित उदाहरण की सहायता से समझ सकते हैं:

उदाहरणार्थ, सम्पूर्ण निष्पत्ति (Overall performance) के आधार पर उत्तरदाता से कारों को कोटि कम हेतु पूछा जाये-

निर्देश (Instructions)

प्राथमिकता क्रम से विभिन्न कारों को कोटि (Rank) प्रदान कीजिए। सबसे पहले जिस कार को आप सर्वाधिक पसन्द करते हैं, उसे संख्या 1 प्रदान कीजिए। उसके बाद दूसरी पसंद को संख्या 2 कीजिए। इसी प्रकार आगे प्राथमिकता क्रम में सभी को संख्या प्रदान करें। अन्तिम पसंद को 5 वां स्थान दीजिए। कोई भी दो कार समान अंक प्राप्त न करे। प्राथमिकता मानदण्ड पूर्ण रूप से आप पर निर्भर हैं।

	Car	Rank order (to be filled by respondent)
1.	Brand P	-
2.	Brand Q	-
3.	Brand R	-
4.	Brand S	-
5.	Brand T	-

(iii) स्थिर योग विधि (Constant Sum Method): इस विधि के अन्तर्गत उत्तरदाता को इकाइयों का स्थिर योग (A constant sum of units) आवंटित किया जाता है, जैसे वस्तु के उत्प्रेरक समुच्चय के मध्य कुछ मानदण्डों के संदर्भ में अंक (Points) प्रदान करना, उदाहरणार्थ एक टी.वी. सेट के विभिन्न गुणों हेतु कुल 100 अंक प्रदान किए जाएँ । अगर कोई गुण महत्वपूर्ण नहीं हैं तो उसे शून्य अंक प्रदान किए जाएँ, कोई तीन गुणा महत्वपूर्ण है तो उसे अन्य बिन्दुओं की तुलना में तीन गुने अंक दिए जाऐ । सभी अंकों का योग 100 होना चाहिए । इस विधि में सबसे बड़ी कमी यह है कि उत्तरदाता कई बार निर्धारित अंकों से ज्यादा या कम अंक प्रदान कर देते हैं जैसे 105 या 95 अंक । इस विधि को निम्नांकित उदाहरण की सहायता से समझ सकते हैं:

Form

		Average Responses of three Groups		
	Attribute	Group I	Group II	Group III
1.	Screen Size	7	3	5
2.	Sound	3	4	15
3.	Picture Quality	4	8	7
4.	Price	52	15	8
5.	Appearance	8	1	20
6.	Facilities	5	6	9
7.	Guarantee	6	2	19
8.	Service	15	61	17

Sum	**100**	**100**	**100**

उपर्युक्त संख्याओं में तीनों समूहों के उत्तरदाताओं के परिणाम दिए हुए हैं । पहला समूह कीमत (Price) को, दूसरा समूह सेवा (Service) को तथा तीसरा समूह आकृति (Appearance), गारंटी, सेवा तथा आवाज को महत्त्व देता है । ऐसी सूचनाएँ कोटि अन्तर संमकों (Rank order data) से प्राप्त नहीं की जा सकतीं अतएव उनका रूपांतरण अन्तराल समको (Interval data) में करना आवश्यक है ।

(ब) गैर-तुलन मापनियाँ (Non-Comparative Scalling):

(i) निरन्तर मूल्यांकन मापनी (Continuous Rating Scale) : उत्तरदाता मानदण्ड चर (Criterion Variable) के एक छोर से दूसरे छोर तक बनी हुई रेखा पर उचित स्थान पर चिन्ह बनाकर (Placing a mark) वस्तु (Object) का मूल्यांकन करता है । यह रेखा लम्बवत् (Vertical) अथवा क्षैतिज (Horizontal) हो सकती है । इसमें उत्तरदाता अनुसंधानकर्ता द्वारा पूर्व-निर्धारित अंकों के चयन तक सीमित नहीं रहता । मापनी अंक (Scale points) संख्या या संक्षिप्त वर्णन (Brief description) के रूप में हो सकते हैं । इसे ग्राफिक मूल्यांकन मापनी भी कहते हैं । इसे हम निम्नांकित उदाहरण से समझ सकते है जिसमें पाँच बिन्दु निरन्तर मूल्यांकन मापनी के दिए गए हैं । इनके आधार पर पथ परिवहन निगम की सेवाओं की पंसदगी (Liking) तथा नापसंदगी (Disliking) जानेंगे।

निरन्तर मूल्यांकन मापनी

आप राजस्थान राज्य पथ परिवहन निगम की सेवाओं का मूल्यांकन किस प्रकार करेंगे?

बहुत पसंद | ठीक-ठाक | तटस्थ | कुछ-कुछ नापसंद | बिल्कुल नापसंद

(ii) समीकृत मूल्यांकन मापनी (Itemized Rating Scale): इसे संख्यात्मक मापनी (Numerical Scale) भी कहते है जिसमें प्रत्येक श्रेणी (Category) के साथ संख्याएँ या संक्षिप्त वर्णन होता है । इसमें कथनों (Statements) की एक श्रृंखला (Series) होती है जिसमें से उत्तरदाता किसी एक का चयन करता है जो उसके मूल्यांकन की दृष्टि से सर्वश्रेष्ठ होता है । इस विधि को हम निम्नांकित उदाहरण की सहायता से समझ सकते हैं:

मान लीजिए कि हम यह जानना चाहते हों कि एक कम्पनी मैनेजर का संस्था के अन्य व्यक्तियों के साथ व्यवहार कैसा हैं? ऐसी स्थिति में उत्तरदाता की राय जानने हेतु निम्न कथनों में से उसे किसी एक को चुनने हेतु कहेंगे :

1. मैनेजर का व्यवहार लगभग किसी के प्रति भी खराब नहीं रहता है ।

2. मैनेजर का व्यवहार हमेशा सबके प्रति खराब रहता है ।

3. मैनेजर का व्यवहार एक दो व्यक्तियों के प्रति खराब रहता है ।

4. मैनेजर का व्यवहार कभी-कभी खराब रहता है ।

इस प्रकार की मापनी में मूल्यांकन (Rater) को अधिक सूचनाएँ उपलब्ध रहती हैं । यह तरीका सापेक्ष दृष्टि से कठिन है इसमें उत्तरदाता वास्तव में जो कहना चाहते है वह कभी-कभी कथनों द्वारा पूर्ण रूप से व्यक्त नहीं हो पाता है ।

5.7 मापनी संरचना निर्णय (Scale Constructing Decisions)

मापनी संरचना में शोधकर्ता को निम्नांकित निर्णयों को ध्यान में रखना चाहिए :

(1) **मापनी श्रेणियों की संख्या (The Number of Scale Category to Use)** : उत्प्रेरक वस्तुओं के मध्य निर्णय को सर्वोत्तम बनाने में मापनी श्रेणियों की संख्या का अधिक होना ठीक रहता हैं किन्तु अधिकतर उत्तरदाता ज्यादा श्रेणियों में ठीक निर्णय नहीं ले पाते है । अतएव पाँच से नौ के मध्य की संख्या श्रेणी संख्या के रूप में उचित रहती हैं।

(2) **संतुलित बनाम असंतुलित मापनी (Balanced Verses Unbalanced Scale) :** संतुलित मापनी में अनुकूल तथा प्रतिकूल श्रेणियाँ समान होती है जबकि असंतुलित मापनी में असमान होती है । इसे निम्नांकित उदाहरण की सहायता से समझ सकते हैं:

संतुलित मापनी	असंतुलित मापनी
चाय पीना स्वास्थ्य के लिए	चाय पीना स्वास्थ्य के लिए
Extremely Good -	Extremely Good -
Very Good -	Very Good -
Good -	Good -
Bad -	Somewhat good -
Very Bad -	Bad -
Extremely Bad -	Very Bad -

वस्तुनिष्ठ समंक (Objective data) प्राप्त करने हेतु संतुलित मापनी का प्रयोग करना चाहिए ।

(1) बाध्यकारी बनाम स्वतंत्र चयन (Forced Versus Non Forced Choice) : बाध्यकारी मूल्यांकन मापनी में उत्तरदाता अपनी राय देने को बाध्य हैं, उसके पास 'कोई राय नहीं' का विकल्प नहीं हैं । ऐसे में उत्तरदाता बिना राय के मध्य मापनी स्थिति (Middle Scale position) को चिन्हित कर देता है । स्वतंत्र मापनी (Non-forced Scale) में 'कोई राय नहीं' (No opinion) की श्रेणी को शामिल कर समंकों में परिशुद्धता (Accuracy) लाई जा सकती है ।

(2) श्रेणियों की सम या विषम संख्या (Odd or Even Number of Categories) : श्रेणियों की संख्या विषम होने की स्थिति में मध्य मापनी स्थिति (Middle Scale position) को तटस्थ (Neutral) मान सकते हैं ।

(3) वर्णन की प्रकृति एवं मात्रा (Nature and the Degree of Description) : मापनी श्रेणियाँ में वाचिक (Verbal), संख्यात्मक (Numerical) अथवा चित्रात्मक (Pictorial) विवरण (Description) हो सकता है । अनुसंधानकर्ता अस्पष्टता को कम करने के उद्देश्य से सभी मापनी श्रेणियों को, कुछ मापनी श्रेणियों को या अत्यावश्यक मापनी श्रेणियों (Extreme Scale Categories) को पहचान (Label) प्रदान कर सकता है ।

(4) भौतिक स्वरूप या आकार (Physical Form or Configuration) : मापनी को लम्बवत् या क्षैतिज आकार में प्रस्तुत किया जा सकता है । श्रेणियों को खानों (Boxes), खण्डित रेखाओं (Discrete Lines) या इकाइयों (Units) के रूप में छोर (Continuum) पर प्रदर्शित किया जा सकता है । इन्हें संख्याएँ प्रदान की जा सकती है और नहीं भी । संख्यात्मक मूल्य धनात्मक या ऋणात्मक अथवा दोनों प्रकार के हो सकते हैं।

(5) मनोवैज्ञानिकों एवं समाजशास्त्रियों ने अनेक मापनी प्रविधियों का विकास किया है । शोधकर्ताओं को अपने अध्ययन हेतु उचित मापनी विकास के क्रम में उन प्रविधियों का अध्ययन करना चाहिए। ऐसी मापनियों में स्वेच्छाचारी मापनी (Arbitrary Scale), भिन्नता मापनी (Differential Scale), योग मापनी (Summated Scale), संचयी मापनी (Cumulative Scale), कारक मापनी (Factor Scale) व बहुआयामी मापनी (Multidimensional Scale) प्रमुख हैं ।

5.8 सारांश (Summary)

किसी वस्तु अथवा सेवा अथवा व्यक्ति के गुणों का निर्णय हम मापन के आधार पर करते है । मापन में भौतिक तत्व/वस्तुऐं तथा अमूर्त अवधारणा शामिल होती हैं । इनमें गुणों को कोई संख्या या चिन्ह प्रदान किया जाता है । मापन की प्राथमिक मापनियों में नामित मापनी (Nominal Scale), क्रमिक मापनी (Ordinal Scale), अन्तराल मापनी (Interval Scale) तथा अनुपात मापनी (Ratio Scale) शामिल होती है । मापन की अशुद्धि के कारकों में उत्तरदाता, साक्षात्कारकर्त्ता, उपकरण तथा परिस्थितियाँ प्रमुख है । उत्तरदाता की नकारात्मक भावना, विषय के प्रति अज्ञानता, न स्वीकार करने की भावना, थकान, बैचेनी के कारण असहभागिता के साथ-साथ साक्षात्कारकर्त्ता का व्यवहार, व्यक्तित्व व हतोत्साहित करने वाली कार्यशैली हो तो मापन ने अशुद्धि हो जायेगी । अस्पष्ट अवधारणाएँ दोषपूर्ण, प्रश्नावली, अस्पष्ट छपाई, साक्षात्कारकर्त्ता, एवं उत्तरदाता के मध्य असमायोजन आदि अनेक कारणों से उत्तरदाता की अनिच्छुकता से भी मापन दोषपूर्ण हो जाता है । मापन उपकरण के मूल्यांकन हेतु वैधता, विश्वसनीयता एवं व्यावहारिकता परीक्षण किये जाने चाहिए । वैधता परीक्षण मापन परीक्षण की सीमा को, विश्वसनीयता परीक्षण मापन प्रक्रिया की परिशुद्धता एवं यथार्थता को तथा व्यावहारिकता परीक्षण मितव्ययता, सुविधा एवं निर्वचनीयता को शामिल करते हैं ।

वैधता परीक्षण में विषयवस्तु वैधता, कसौटी/मानदण्ड सम्बन्धी वैधता तथा संरचना वैधता का अध्ययन करते हैं । स्थिरता एवं समतुल्यता विश्वसनीयता के दो पहलू है । स्थिरता पहलू का सम्बन्ध समान व्यक्ति तथा समान उपकरण के साथ पुनरावृत मापनों से प्राप्त परिणामों में एकरूपता सुनिश्चित करने से हैं जबकि समतुल्यता पहलू विभिन्न अनुसंधानकर्ताओं या विभिन्न प्रतिचयन मदों में कितनी अशुद्धि है को ध्यान में रखने से है । विश्वसनीयता मूल्यांकन के अन्तर्गत परीक्षण-पुन: परीक्षण विश्वसनीयता, वैकल्पिक प्रारूप विश्वसनीयता तथा आंतरिक सुसंगति विश्वसनीयता अपनाये जाते हैं । व्यावहारिकता परीक्षण में अनुसंधान हेतु खर्च की तुलना में प्राप्त होने वाला लाभ, समंक संकलन सीमा आदि मितव्ययता की दृष्टि से ध्यान में रखकर मूल्यांकन किया जाता हैं साथ ही यह भी देखा जाता हैं कि मापन उपकरण एवं प्रबंध उचित प्रकार से किया गया हैं या नहीं । परिणामों का निर्वचन शोधकर्ता के अतिरिक्त अन्य व्यक्तियों द्वारा भी संभव होना चाहिए ।

अमूर्त अवधारणाओं (Abstract Concepts) के अधिक परिशुद्धता से मापन हेतु मापनी प्रविधियों का प्रयोग किया जाता है । मापनी (Scalling) व्यक्तिपरक अमूर्त अवधारणाओं के गुणात्मक मापन निर्धारण की कार्यविधियों का प्रयास है । मापनी कार्यविधि के आधारों में विषय पुनश्चर्या, उत्तर प्रारूप, व्यक्तिपरकता की मात्रा, मापनी गुण, आयामों की संख्या, तथा मापनी निर्माण प्रविधियाँ शामिल की जाती हैं । मापनी प्रविधियाँ दो प्रकार की होती है । पहली तुलन मापनी जिसके अन्तर्गत मदों की एक दूसरे से सीधी तुलना की जा सकती है । इसके अन्तर्गत वस्तुओं के मध्य बारीक भिन्नताओं को ढूँढा जा सकता है किन्तु मदों को स्वतंत्र रूप से मापित नहीं किया जा सकता । तुलन मापनी प्रविधियों में युग्मित तुलना मापनी, कोटि क्रम मापनी तथा स्थिर योग विधि प्रमुख है । गैर तुलन मापनी को व्यावसायिक शोध कार्यो में प्रयुक्त किया जाता है तथा मदों का स्वतंत्र रूप से मापन किया जा सकता है । गैर तुलन मापनी प्रविधियों में निरंतर मूल्यांकन मापनी तथा समीकृत मूल्यांकन मापनी को प्रयुक्त किया जाता है । मापनी सरंचना में शोधकर्ता को मापनी श्रेणियों की संख्या, संतुलित या असंतुलित मापनी, बाध्यकारी या स्वतंत्र चयन, श्रेणियों को सम या विषम संख्या, वर्णन की प्रकृति एवं मात्रा तथा भौतिक आकार को ध्यान में रखाना चाहिए ।

5.9 शब्दावली (Glossary)

1. नामित मापनी (Nominal Scale) : केवल पहचान हेतु संख्या या चिन्ह प्रदान करना जिनका कोई परिमाणात्मक मूल्य न हो ।
2. क्रमिक मापनी (Ordinal Scale) : घटनाओं, वस्तुओं को क्रम प्रदान करना जिसमें क्रम की संख्या यह सूचित करती हैं कि सापेक्ष रूप से उस तत्व / घटना / वस्तु में किसी सीमा तक गुण विद्यमान है ।

3. अन्तराल मापनी (Internal Scale) : क्रमिक मापनी की समस्त सूचनाओं सहित यह व्यक्त करती हैं कि दो मापनी मूल्यों का अंतर समान या स्थिर या बराबर अन्तराल का होता है।
4. अनुपात मापनी (Ratio Scale) : नामित, क्रमिक तथा अन्तराल मापनी के गुणों से युक्त ऐसी मापनी जिसमें निरपेक्ष शून्य बिन्दु के गुण के साथ तुलनात्मक अध्ययन की सुविधा होती है।
5. वैधता परीक्षण (Test of Validity) : यह बताता है कि मापन उपकरण से जो मापने की अपेक्षा है उसकी मात्रा क्या होगी ।
6. विषयवस्तु वैधता (Content Validity) : यह उस सीमा का निर्धारण करती हैं जिसके अन्तर्गत मापन उपकरण अध्ययन के अन्तर्गत आने वाले विषय को पर्याप्त रूप से शामिल करता है ।
7. कसौटी / मानदण्ड सम्बन्धी वैधता (Criterion-related Validity) : यह कुछ परिणामों के पूर्वानुमान या कुछ वर्तमान दशाओं के अस्तित्व के अनुमान की योग्यता है।
8. संरचना वैधता (Construct Validity) : एक ऐसी मात्रा जिसके लिए परीक्षण के अंकों को जिम्मेदार ठहराया जा सकता हैं तथा किन गुणों का मापन किया जा रहा हैं इसका उत्तर दिया जाता है ।
9. विश्वसनीयता परीक्षण (Test of Reliability) : विश्वसनीयता उस सीमा को प्रदर्शित करती हैं जिसमें मापनों की पुनरावृत्ति किए जाने पर भी मापन उपकरण सुसंगत परिणाम प्रदान करते हों।
10. युग्मित तुलना मापनी (Paired Comparison Scaling) : उत्तरदाता द्वारा किसी एक मानदण्ड के आधार पर दो वस्तुओं में से किसी एक को चुनने की विधि ।
11. कोटि क्रम विधि (Rank order Method) : अनेक वस्तुओं को कुछ मानदण्डों के आधार पर क्रम प्रदान करना ।
12. स्थिर योग विधि (Constant Sum Method) : इकाइयों के अंकों के स्थिर योग के अन्तर्गत गुणों को अंक प्रदान करना ।
13. निरन्तर मूल्यांकन मापनी (Continuous Rating Scale) : मानदण्ड चर के दो छोरों के मध्य बनी रेखा पर उचित स्थान पर चिन्ह प्रदान कर वस्तु उद्देश्य का मूल्यांकन करना ।
14. मदीकृत मूल्यांकन मापनी (Itemized Rating Scale) : कथनों की श्रृंखला में से किसी एक सर्वश्रेष्ठ का चयन ।

5.10 स्वपरख प्रश्न (Self-Assessment Questions)

1. मापन का अर्थ स्पष्ट करते हुए मापन की प्राथमिक मापनियों को उदाहरण सहित स्पष्ट कीजिए ।

2. मापन में अशुद्धि के कारकों को समझाइये तथा प्रभावी मापन के परीक्षणों का सविस्तार वर्णन कीजिए ।
3. मानी से आपका क्या अभिप्राय हैं? मापनी प्रविधियों में किसे शामिल किया जाता है उदाहरण सहित समझाइये ।
4. एक शोधकर्त्ता को मापनी संरचना के निर्णय में किन-किन बातों का ध्यान रखना चाहिए? उदाहरण सहित वर्णन कीजिए ।
5. टिप्पणियाँ लिखिए :

   (अ) कसौटी/मानदण्ड सम्बन्धी वैधता

   (ब) परीक्षण-पुन: परीक्षण विश्वसनीयता

   (स) स्थिर योग (Constant Sum) विधि

   (द) मदीकृत मूल्यांकन मापनी

5.11 व उपयोगी पुस्तकें (Further Readings)

1. C.R. Kothari, Research Methodology - Method & Techniques, New Age International Publishers, New Delhi.
2. Susmit Jain, Research Methods in Management, Shivam Book House (P) Ltd. Jaipur.

इकाई-6: सांख्यिकीय समंकों का सम्पादन (Editing of Statistical Data)

इकाई की रूपरेखा :

6.0 उद्देश्य

6.1 प्रस्तावना

6.2 प्राथमिक समंकों का सम्पादन

6.3 सम्पादन की प्रक्रिया

6.4 परिशुद्धता की मात्रा

6.5 सन्निकरन अथवा उपसादन

6.6 उपसादन की रीतियाँ

6.7 सांख्यिकीय विभ्रम

6.7.1 सांख्यिकीय विभ्रमों के स्त्रोत

6.7.1 सांख्यिकीय विभ्रमों के प्रकार

6.7.3 सांख्यिकीय विभ्रमों की माप

6.7.4 सांख्यिकीय विभ्रमों का अनुमान

6.8 द्वितीयक समंकों का सम्पादन

6.9 सारांश

6.10 पारिभाषिक शब्द

6.11 स्वपरख प्रश्न

6.12 उपयोगी पुस्तकें

6.0 उद्देश्य

इस अध्याय के अध्ययन का उद्देश्य निम्नलिखित के सम्बन्ध में जानकारी प्राप्त करना तथा उनका व्यवहार में उपयोग करना है -

- समंकों के सम्पादन की आवश्यकता
- समंकों के सम्पादन की प्रक्रिया
- परिशुद्धता की मात्रा
- उपसादन की विधि
- सांख्यिकीय विभ्रम

6.1 प्रस्तावना

समंक-संकलन की प्रक्रिया में अनुसंधानकर्ता के कार्यालय में सूचकों अथवा प्रगणकों द्वारा भरकर भेजी गयी प्रश्नावलियों अथवा अनुसूचियों का ढेर लगा जाता है । संकलित सामग्री ऐसी दशा में अव्यवस्थित तथा अर्थहीन होती है, जिसे व्यवस्थित तथा

अर्थपूर्ण करने के लिए अनुसन्धानकर्ता को उसका सम्पादन करना पड़ता है । अनुसूचियों का सम्पादन करने में, अनुसन्धानकर्ता, सूचकों द्वारा दी गयी जानकारी में भूलों तथा गणना की त्रुटियों का पता लगाने का प्रयत्न करता है । सम्पादन की प्रक्रिया में संकलित समंकों का सूक्ष्म परीक्षण किया जाता है तथा असावधानी से दी गयी जानकारी छाँटकर अलग कर दी जाती है । संकलित समंकों का धैर्य तथा आलोचनात्मक दृष्टिकोण से सूक्ष्म निरीक्षण किया जाता है । यद्यपि इस प्रक्रिया में पर्याप्त समय लगता है, परन्तु यह एक आवश्यक प्रक्रिया है । वास्तव में, सम्पादन में उच्च-स्तरीय कौशल की आवश्यकता होती है तथा सम्पादन-तकनीक एवं कौशल पर ही परिणामों की परिशुद्धता निर्भर करती है । प्राथमिक समंकों का तथा द्वितीयक समंकों का सम्पादन करने की प्रक्रिया अग्रलिखित प्रकार से है ।

6.2 प्राथमिक समंकों का सम्पादन (Processing of primary data)

प्राथमिक अथवा मौलिक समंकों का संकलन अधिकतर अनुसूचियों या प्रश्नावलियों के आधार पर किया जाता है । अनुसूचियाँ अथवा प्रश्नावलियाँ या तो सूचकों द्वारा भरकर भेज दी जाती हैं या प्रगणकों द्वारा सूचकों से भेंट करके भरी जाती हैं । दोनों दशाओं में संकलित तथ्यों में अनेक अशुद्धियों, भूलों और अनियमितताओं की सम्भावना रहती है । सूचकों की लापरवाही, भ्रम अथवा उदासीनता के कारण अनेक प्रश्नों के उत्तर अस्पष्ट, अपूर्ण अथवा भ्रमात्मक होते हैं । अनेक सूचकों द्वारा प्रश्नों का गलत अर्थ लगाया जाता है और अशुद्ध उत्तर लिखे जाते हैं प्रगणकों की असावधानी एवं पक्षपात के कारण भी प्राप्त उत्तर अशुद्ध हो सकते हैं । अन्तत: अनुसन्धानकर्ता को सभी प्रश्नावलियों अथवा अनुसूचियों की गहन जांच करनी पड़ती है तथा उसमें आवश्यक संशोधन करने पड़ते हैं । गहन जाँच के परिणामस्वरूप ठीक से सभी प्रश्नावलियों को स्वीकृत किया जाता है, अपूर्ण तथा असावधानी से भरी प्रश्नावलियों को अस्वीकृत किया जाता है, कुछ प्रश्नावलियों में संशोधन किये जाते हैं, यदि आवश्यक हो तो कुछ को वापस सूचकों को भेजा जाता है जिससे उन पर ठीक उत्तर लिखे जा सकें और उन्हें पूरा किया जा सके ।

6.3 सम्पादन की प्रक्रिया (Process of Editing)

बेले तथा कमिंग्स (W.B. Bailey and John Cummings) ने चार प्रकार की सम्पादन प्रक्रियाओं का उल्लेख किया है, जो निम्नलिखित हैं :

(1) **संगतता के लिए सम्पादन (Editing for Consistency)** - प्रश्नावली में कुछ प्रश्न ऐसे होते हैं जिनके उत्तरों की सत्यता का आपस में परीक्षण हो जाता है । अत: ऐसे उत्तरों का आपस में मिलान करके जाँच की जानी चाहिए । यदि उत्तरों से परस्पर विरोधाभास प्रकट होता हो, तो यह निर्णय करना आवश्यक होता है कि उनमें से कौन-सा उत्तर विश्वसनीय है । यदि प्रश्नावलियों में असंगत (Unconsistent) उत्तर हों

तो उन्हें या तो ठीक किया जाना चाहिए या अस्वीकृत कर देना चाहिए । असंगत समंकों से भ्रमात्मक निष्कर्ष निकाले जाने की सम्भावना बनी रहती है ।

(2) **एकरूपता कें लिए सम्पादन (Editing for Uniformity) -** कभी-कभी प्रश्नों के उत्तरों में एकरूपता का अभाव होता है । उदाहरण के लिए भिन्न-भिन्न सांख्यिकीय इकाइयों में उत्तर व्यक्त किये जा सकते हैं, जैसे- कृषि उत्पादन 'क्विण्टलों में' आय 'माहवारी' अथवा 'वार्षिक' रूपयों में, ऊँचाई अन्यों में अथवा 'सेण्टीमीटरों' में, आदि । संकलित सामग्री में एकरूपता व सजातीयता लाने के लिए इस प्रकार की अशुद्धियों को ठीक करना आवश्यक होता है । इकाइयों में एकरूपता लाना शुद्ध परिणाम प्राप्त करने के लिए आवश्यक होता है ।

(3) पूर्णता के लिए सम्पादन (Editing for Completeness) - सम्पादन करने में यह देख लेना चाहिए कि प्रश्नावलियों में सभी प्रश्नों के उत्तर प्राप्त कर लिये गये हैं या नहीं । कभी-कभी सूचक ऐसे प्रश्नों का उत्तर नहीं देता जो उसकी समझ में नहीं आते । जिन प्रश्नों के उत्तर नहीं दिये गये हों, उनके उत्तर अवश्य प्राप्त कर लेने चाहिए । अपूर्ण प्रश्नावली को कभी भी स्वीकार नहीं करना चाहिए । यदि यान्त्रिक सारणीयन (mechanical tabulation) किया जाता है तो संकलित समंकों को पूर्व-निश्चित संकेतकों (code numbers) में व्यक्त करना पड़ता है । अनुसन्धानकर्ता को इस बात की जाँच कर लेनी चाहिए कि ये सभी क्रियाएँ समुचित रूप से पूरी हो गयी हैं या नहीं।

(4) परिशुद्धता के लिए सम्पादन (Editing for Accuracy) - संकलित सामग्री की परिशुद्धता के लिए जाँच करना सम्पादन की सबसे कठिन क्रिया है । अनुसूचियों में अनेक ऐसी त्रुटियाँ रह जाती हैं, जिनकी सत्यता का परीक्षण आन्तरिक प्रमाणों से सम्भव नहीं होता। अनुसन्धानकर्ता का विशेष कौशल एवं अनुभव ही उन्हें खोजने में सहायक होता है । अनुसूचियों के सांख्यिकीय विश्लेषण द्‌वारा अनुसन्धानकर्ता को यह भली-भाँति ज्ञात कर लेना चाहिए कि संकलित सामग्री यथार्थता के वांछित स्तर के अनुरूप है अथवा नहीं ।

सम्पादन की उपर्युक्त विधियों से समंकों की संगतता, विश्वसनीयता, एकरूपता, पूर्णतातथा यथार्थता की जाँच हो जाती है जिससे वे सांख्यिकीय विश्लेषण तथा निर्वचन के लिए उपयुक्त हो जाते हैं ।

समंकों के सम्पादन में निम्नलिखित तीन बातों का समावेश होता है :

(1) परिशुद्धता की मात्रा (Degree of Accuracy)

(2) सन्निकटन अथवा उपसादन (Approximation)

(3) सांख्यिकीय विभ्रम (Statistical Errors)

6.4 परिशुद्धता की मात्रा (Degree of Accuracy)

पूर्ण परिशुद्धता (Perfect accuracy) का अर्थ किसी तथ्य को बिल्कुल यथार्थ रूप में प्रस्तुत करना है । व्यावहारिक मानव-ज्ञान (applied human knowledge) की

किसी भी शाखा में पूर्ण परिशुद्धता नहीं पायी जाती है । विज्ञान के क्षेत्र में भी सूक्ष्म-जीव विज्ञान (micro-biology) के अध्ययन से लेकर अन्तरिक्ष में राकेट छोड़ने तक की यथार्थ माप (exact measurement) विद्‌यमान नहीं होती है । सामाजिक विज्ञानों में व्यक्तियों अथवा उनकी क्रियाओं की माप की जाती है अत: यथार्थ मापन सम्भव नहीं होता है । सांख्यिकी को अनुमानों तथा सम्भावनाओं के विज्ञान की संज्ञा दी गयी है । अनुमानों में पूर्ण परिशुद्धता प्राप्त नहीं की जा सकती है । इसीलिए बॉडिंगटन (Boddington) ने कहा है कि "कुछ भी पूर्ण नहीं है, कम-से-कम एक सांख्यिकीय अनुसन्धान ।" (Nothing is perfect, least of all statistical enquiry) परन्तु "इसका अर्थ यह नहीं है कि सांख्यिक गलत स्थान पर दशमलव बिन्दु की परवाह नहीं करता अथवा प्रश्नावलियों के उत्तरों का लेखा करते हुए कुछ सूचकों की उपेक्षा करता है । सत्य यह है कि गणित अथवा लेखाकर्म के अर्थ में शत-प्रतिशत शुद्धता सांख्यिकीय अनुसन्धानों में सम्भव नहीं होती है ।"

सांख्यिकीय मापों में पूर्ण शुद्धता न तो आवश्यक है और न वांछनीय । अनेक परिस्थितियों में तो पूर्ण शुद्धता प्राप्त करने का प्रयत्न करना मूर्खता पूर्ण और हास्यास्पद माना जाता है । किंग के अनुसार 'शुद्धता का अधिकतम सम्भव स्तर प्राप्त करने के प्रयत्न प्राय: समय का अपव्यय मात्र होते हैं । उदाहरणार्थ, यदि भारत के कुल वार्षिक निर्यात का मूल्य रूपये और पैसे तक शुद्ध रूप में प्रकट किया जाये तो उससे कोई लाभ नहीं होगा बल्कि समझने में जटिलता आ जायेगी। यह मूल्य केवल करोड़ या लाख रूपयों तक सन्निकट करके प्रस्तुत करना अधिक उपयुक्त है । इसी प्रकार जहाँ लाखों या हजारों किलोमीटर या टन के रूप में माप किये जा रहे हैं वहाँ मीटर या किलोग्राम तक का कोई महत्व नहीं है । वास्तव में सांख्यिकी में तो केवल यथोचित या सापेक्ष शुद्धता (reasonable or relative accuracy) ही अपेक्षित है । यथोचित परिशुद्धता एक सापेक्ष धारणा है । यह अनुसन्धान की प्रकृति व उद्देश्य, संकलन की रीति तथा शुद्धता की सम्भावित मात्रा आदि पर निर्भर होती है । कहीं अत्यधिक शुद्धता की आवश्यकता होती है तथा कहीं अनुमान-मात्र ही पर्याप्त होते हैं । उदाहरणार्थ, व्यक्तियों की ऊँचाई मापने में सेण्टीमीटर के अंशों तक को नहीं छोड़ा जा सकता, जबकि दो नगरों के बीच का फासला मापने में किलोमीटर के भागों को छोड़ा जा सकता है और पृथ्वी से सूर्य की दूरी का अनुमान लगाने में हजारों किलोमीटर तक की उपेक्षा की जा सकती है । फिर भी परिणाम यथोचित रूप से शुद्ध माने जायेंगे । अत: सांख्यिकी में केवल सापेक्ष शुद्धता ही होनी चाहिए और उसका स्तर पहले ही निर्धारित कर लेना चाहिए । मापयंत्रो में नित्यप्रति सुधार होते रहने में सापेक्ष शुद्धता का स्तर भी निरन्तर बढ़ता ही जा रहा है ।

6.5 सन्निकटन अथवा उपसादन (Approximation)

बड़ी संख्याऐं अधिकतर भ्रमात्मक और जटिल होती है । उन्हें समझना और स्मरण रखना लगभग असम्भव होता है । अत: सरल और बुद्धिगम्य बनाने के उद्देश्य से उन्हें

उनकी निकटतम सरल संख्या के रूप में व्यक्त कर दिया जाता है । इससे परिणाम में कोई विशेष अन्तर नहीं पड़ता और समंकों का विश्लेषण तथा निर्वचन सरल हो जाता है । वास्तविक और सरल संख्याओं को किसी स्थानीय मान के आधार पर निकटतम सरल संख्याओं के रूप में व्यक्त करने की क्रिया को सन्निकटन या उपसादन (approximation) कहते हैं । यह क्रिया इस प्रकार सम्पन्न की जाती है कि परिणाम में कोई अन्तर न पड़े, स्थिति को आसानी से समझा जा सके और समंक विश्लेषण के योग्य हो जायें । सन्निकट जटिलताओं को सरल बनाने तथा समंकों में यथोचित परिशुद्धता प्राप्त करने के उद्देश्य से किया जाता है ।

लाभ - सन्निकटन के निम्न लाभ हैं-

(i) **सरलता -** सन्निकटन से जटिल संख्याएँ सरल और आसानी से स्मरण रखने योग्य हो जाती हैं । उदाहरणार्थ, यदि यह कहा जाये कि 1991 में भारत की कुल जनसंख्या 84,63,02,688 थी तो इस संख्या को याद रखने में निश्चित रूप से कठिनाई होगी परन्तु उपसादित संख्या अर्थात् 846 करोड़ सरल व बुद्धिगम्य है ।

(ii) **तुलना की सुविधा** - सन्निकट संख्याओं की तुलना, वास्तविक और जटिल संख्याओं की पारस्परिक तुलना की अपेक्षा अधिक सुविधाजनक होती है । भारत में 1991 में पुरूषों की कुल संख्या 43,92,30,458 और स्त्रियों की कुल संख्या 40,70,72,230 की तुलना करने से 439 करोड़ तथा 407 करोड़ की तुलना कहीं अधिक सरल है ।

(iii) **गणन-क्रियाओं की सरलता -** सन्निकटन से संख्याओं का जोड़ना, घटाना, गुणा करना आदि गणितीय क्रियायें अत्यन्त सरल हो जाती हैं ।

6.6 उपसादन की रीतियाँ (Methods of Approximation)

संख्याओं का उपसाधन करने से पूर्व यह निर्णय करना चाहिए कि उन्हें किस सीमा तक उपसादन करना है, जैस-तीन दशमलव बिन्दुओं तक, दो दशमलव बिन्दुओं तक, एक दशमलव बिन्दु तक अथवा इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार या लाख तक । यह निर्धारित करने के पश्चात् निम्नलिखित तीन रीतियों में से किसी एक रीति द्वारा उपसादन किया जा सकता है :

(1) कुछ अंकों को छोडकर - (By discarding digits entirely) - उपसाधन की इस रीति के अनुसार पूर्व-निर्धारित स्थानीय मान तक अंकों को रखकर बाकी अंकों को छोड़ दिया जाता है । यदि 43, 82,35,282,3759 का इस रीति से उपसाधन करना हो तो विभिन्न स्थानीय मानों तक इस संख्या को निम्न प्रकार उपसादित किया जायेगा:

तीन दशमलव अंकों तक उपसादित मूल्य	43,82,35,282.375
दो दशमलव अंकों तक उपसादित मूल्य	43,82,35,282.37
एक दशमलव अंक तक उपसादित मूल्य	43,82,35,282.3
इकाई तक उपसादित मूल्य	43,82,35,282
दहाई तक उपसादित मूल्य	43,82,35,280

सैकड़ा तक उपसादित मूल्य	43,82,35,200
हजार तक उपसादित मूल्य	43,82,35,000
दस हजार तक उपसादित मूल्य	43,82,30,000
लाख तक उपसादित मूल्य	43,82,00,000
दस लाख तक उपसादित मूल्य	43,80,00,000
करोड़ तक उपसादित मूल्य	43,00,00,000

उपसाधन की इस रीति से संख्याओं का उपसाधन करने से उपसादित संख्या सदैव ही वास्तविक संख्या से कम होगी । संख्या जितनी छोटी होगी उपसाधन में अशुद्धि की मात्रा भी उतनी ही कम होगी । अशुद्धि एक ही दिशा में और संचयी प्रकृति की होगी ।

(2) संख्या को अगली संख्या तक बढ़ाकर - (By raising the figure to the next Higher figure)-

इस रीति के अनुसार संख्या के बाद में आने वाली पूर्ण संख्या में एक जोड़ दिया जाता है और उसके बाद के अंकों को छोड़ दिया जाता है । यदि 43,82,35,282.3759 का इस रीति से उपसाधन करना हो तो विभिन्न स्थानीय मानों तक इस संख्या को निम्न प्रकार उपसादित किया जायेगा :

तीन दशमलव अंकों तक उपसादित मूल्य	43,82,35,282.376
दो दशमलव अंकों तक उपसादित मूल्य	43,82,35,282.38
एक दशमलव अंक तक उपसादित मूल्य	43,82,35,282.4
इकाई तक उपसादित मूल्य	43,82,35,283
दहाई तक उपसादित मूल्य	43,82,35,290
सैकड़ा तक उपसादित मूल्य	43,82,35,300
हजार तक उपसादित मूल्य	43,82,36,000
दस हजार तक उपसादित मूल्य	43,82,40,000
लाख तक उपसादित मूल्य	43,83,00,000
दस लाख तक उपसादित मूल्य	43,90,00,000
करोड़ तक उपसादित मूल्य	44,00,00,000

उपसाधन की इस रीति में उपसादित संख्या वास्तविक संख्या से सदैव अधिक होती है । इस प्रकार अशुद्धि एक ही दिशा में तथा संचयी (cumulative) प्रकृति की होती है ।

(3) निकटतम पूर्ण संख्या तक उपसाधन - (Approximation to the nearest whole number) - इस विधि के अनुसार जिस अंक तक उपसाधन करना है उसके बाद की संख्या 5 से कम होती है तो उसे छोड़ दिया जाता है और 5 या 5 से अधिक होने पर अन्तिम अंक में एक बढ़ा दिया जाता है । उदाहरण के लिए, 43, 82,35,282.3759 को विभिन्न स्थानीय मानों तक इस प्रकार उपसादित किया जायेगा:

तीन दशमलव अंकों तक उपसादित मूल्य	43,82,35,282.376
दो दशमलव अंकों तक उपसादित मूल्य	43,82,35,282.38
एक दशमलव अंक तक उपसादित मूल्य	43,82,35,282.4
इकाई तक उपसादित मूल्य	43,82,35,283
दहाई तक उपसादित मूल्य	43,82,35,290
सैकड़ा तक उपसादित मूल्य	43,82,35,300
हजार तक उपसादित मूल्य	43,82,36,000
दस हजार तक उपसादित मूल्य	43,82,40,000
लाख तक उपसादित मूल्य	43,82,00,000
दस लाख तक उपसादित मूल्य	43,80,00, 000
करोड़ तक उपसादित मूल्य	44,00,00,000

उपसाधन की यह रीति सर्वोत्तम मानी जाती है क्योंकि यह अधिक वैज्ञानिक व न्यायोचित है । उपसादित मूल्य वास्तविक मूल्य से अधिक भी हो सकता है और कम भी । इसमें अशुद्धि दोनों दिशाओं (धनात्मक तथा ऋणात्मक) में होने के कारण उनकी प्रकृति क्षतिपूरक (compensating) होती है।

उपसाधन की तीनों रीतियों में अन्तर -

उपसाधन की तीनों रीतियों में अग्रलिखित अन्तर पाये जाते हैं :

कुछ अंकों को छोड़कर उपसाधन विधि	संख्या को अगली संख्या तक बढाकर उपसाधन विधि	निकटतम पूर्ण संख्या तक उपसाधन विधि
वास्तविक संख्या उपसादित संख्या से सदैव अधिक होती है।	वास्तविक संख्या उपसादित संख्या से सदैव कम होती है ।	उपसादित मूल्य वास्तविक संख्या के निकटतम होता है। संख्या अधिक भी हो सकती है और कम भी ।
अशुद्धि धनात्मक ही होती है और उसकी प्रकृति संचयी होती है।	अशुद्धि ऋणात्मक तथा संचयी प्रकृति की होती है।	अशुद्धियाँ धनात्मक व ऋणात्मक दोनों प्रकार की हो सकती हैं, उनकी प्रकृति क्षतिपूरक होती है ।

उपसाधन की इन तीनों विधियों के प्रभाव का अन्तर निम्न तालिका से स्पष्ट हो जायेगा :

मौलिक संख्या	अंकों को छोड़कर उपसाधन	अगले अंक को बढ़ाकर उपसाधन	निकटतम संख्या तक उपसाधन
41	40	50	40
62	60	70	60
87	80	90	90
96	90	100	100
32	30	40	30

39	30	40	40
योग 357	330	390	360
विभ्रम	+ 27	-33	-3
सापेक्षिक विभ्रम	+8.2%	-8.5%	-0.8%

उपर्युक्त तालिका से स्पष्ट हो जाता है कि प्रथम तथा द्‌वितीय विधि से संख्याओं का उपसाधन करने में अशुद्धि एक ही दिशा में अधिक मात्रा में होती है परन्तु तीसरी विधि में अशुद्धियाँ क्षतिपूरक होने के कारण कम हो जाती हैं । संख्या को बढ़ाकर उपसाधन (rounding up) तथा संख्या को छोड़कर उपसाधन (rounding down) की विधि अनुचित है क्योंकि इनसे व्यवस्थित अभिनति को स्थान मिलता है । संख्या को बढ़ाकर उपसाधन में प्रत्येक संख्या में कुछ बढ़ जाता है और अन्तिम योग सही योग से कहीं अधिक होता है । इसी प्रकार संख्या को छोडकर उपसाधन करने मे अन्तिम योग सही योग से कम होता है । निकटतम संख्या तक उपसाधन करने में अन्तिम योग सही योग के लगभग बराबर होता है ।

वधानियाँ (Precautions)

संख्याओं का उपसाधन करते समय निम्नलिखित बातों को ध्यान में रखना चाहिए :

1. सीमित प्रयोग - उपसाधन से वास्तविक संख्याओं में परिवर्तन हो जाता है, अत: उसी दशा में संख्याओं का उपसाधन किया जाना चाहिए जबकि उपसाधन करने से उनके महत्व में कोई परिवर्तन न हो । यदि मूल संख्याएँ सरल हों, तो उपसाधन नहीं करना चाहिए ।

2. न्यूनतम अंकों तक - जहाँ तक सम्भव हो, न्यूनतम अंकों तक ही उपसाधन किया जाना चाहिए । जितने अधिक अंकों तक उपसाधन किया जायेगा, अशुद्धि की मात्रा उतनी ही अधिक होगी । उदाहरणस्वरूप, लाखों तक संख्याओं का सन्निकटन सैकड़े तक करने पर हजार तक सन्निकटन करने की अपेक्षा अशुद्धि की मात्रा अधिक होगी ।

3. पूर्व-निर्धारण - किस सीमा तक संख्याओं का उपसाधन करना है, इसका निर्धारण, अनुसन्धान की प्रकृति व उद्देश्य, यथोचित शुद्धता की मात्रा, उपलब्ध साधन, वास्तविक संख्या के मूल्यों आदि तथ्यों को ध्यान में रखकर करना चाहिए । उपसादित संख्याओं का प्रयोग करते समय उपसाधन करने की सीमा तथा रीति आदि का स्पष्टीकरण कर देना चाहिए ।

4. अन्तिम स्तर पर उपसाधन किया जाय - उपसाधन का कार्य गणन-क्रिया के अन्तिम स्तर पर किया जाना चाहिए । गुणा, भाग, वर्गमूल आदि की गणना करने के पश्चात् ही अन्तिम रूप में प्राप्त संख्या का उपसाधन किया जाना चाहिए, अन्यथा उपसाधन की अशुद्धि का गणना पर विपरीत प्रभाव पड़ेगा ।

प्रतिशतों का उपसाधन (Approximation of Percentages)

जिस प्रकार संख्याओं का उपसाधन किया जाता है, उसी प्रकार प्रतिशतों का उपसाधन किया जा सकता है ।

उदाहरणस्वरूप :

	प्रथम रीति	द्वितीय रीति	तृतीय रीति
45.765% को	45.7%	45.8%	45.8%
41.325% को	41.3%	41.4%	41.3%

उपसादित किया जा सकता है ।

6.7 सांख्यिकीय विभ्रम (Statistical Errors)

सांख्यिकीय तत्वों का संकलन मापन (measurement) अथवा अवलोकन (observation) के आधार पर किया जाता है, परिणामस्वरूप उनमें पूर्ण परिशुद्धता प्राप्त करना सम्भव नहीं होता है । सांख्यिकीय अनुसन्धानों की यह स्वाभाविक और महत्वपूर्ण सीमा है । माप करने में भी शत-प्रतिशत शुद्धता का आश्वासन नही होता । उदाहरणस्वरूप, जनगणना के बारे में यह नहीं कहा जा सकता कि एक भी मनुष्य छूटा नहीं होगा अथवा विद्यार्थियों की ऊँचाई की माप में 0.001 सेण्टीमीटर की भी अशुद्धि नहीं होगी । प्रतिदर्श (sample) के आधार पर समग्र (universe) के बारे में अनुमान करने में भी पूर्ण शुद्धता का आश्वासन नहीं दिया जा सकता । सांख्यिकी विज्ञान में इन अशुद्धियों को विभ्रमों या त्रुटियों (errors) की संज्ञा दी जाती है । सांख्यिकी में 'विभ्रम' से आशय अशुद्धि या गलती (mistake) से नहीं है । विभ्रम या त्रुटि समंकों के 'वास्तविक मूल्य' (actual value) और 'अनुमानित मूल्य' (estimated value) के अन्तर को कहते हैं । यदि किसी कक्षा में 50 विद्यार्थी हों और हम उन्हें 52 गिनें तो यह अशुद्धि कहलायेगी, परंतु यदि किसी आधार पर कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या 52 होने का अनुमान लगाया जाये, तो इसको सांख्यिकीय विभ्रम कहेंगे । प्रो. कॉनर (Connor) के अनुसार, "सांख्यिकीय अर्थ में विभ्रम अनुमानित मूल्य तथा वास्तविक अथवा आदर्श मूल्य जिसका शुद्धता से निर्धारण करना असम्भव हो, का अन्तर मात्र है ।" प्रो. बॉडिंगटन (Boddington) ने सांख्यिकीय विभ्रम को, "वास्तविक संख्या तथा अनुमान का अन्तर" बताया है । उन्होंने यह भी स्पष्ट किया है कि "विभ्रम से आशय गणितीय गणना में गलती करने से नहीं है बल्कि यह इसलिए उत्पन्न होता है कि समंकों के संकलन में पूर्ण क्षेत्र को शामिल करना असम्भव है, जैसा कि प्रतिचयन में होता है ।"

अशुद्धि या गलती (mistake) तथा सांख्यिकीय विभ्रम या त्रुटि (Statistical errors) में अन्तर इस प्रकार है :

अशुद्धि तथा विभ्रम में अन्तर

(Difference between Mistake and Errors)

क्र. सं.	**अन्तर का आधार**	**अशुद्धि**	**विभ्रम**
	प्रकृति	अशुद्धि प्राय: जान-बूझकर की जाती है ।	विभ्रम अनजाने में होता है।

	उत्पत्ति	अशुद्धि गलत रीतियों या गलत गणन क्रियाओं के कारण उत्पन्न होती है ।	विभ्रम वास्तविक एवं अनुमानित मूल्यों की भिन्नता से उत्पन्न होता है ।
	अनुमान	अशुद्धि को अनुमानित करना कठिन है ।	विभ्रम का अनुमान लगाया जा सकता है ।
	रोकथाम	सावधानी रखने पर अशुद्धि को सरलता से रोका जा सकता है ।	विभ्रम को पूर्ण रूप से नहीं रोका जा सकता क्योंकि वे मापन की प्रकृति में निहित होते हैं।
	उत्पत्ति का स्तर	अशुद्धि अनुसंधान में किसी भी स्तर पर हो सकती है ।	विभ्रम समंक संग्रह विश्लेषण एवं निर्वचन के स्तर पर ही होता है ।

6.7.1 सांख्यिकीय विभ्रमों के स्त्रोत (Sources of Statistical Errors)

विभ्रम अग्रलिखित स्त्रोतों से उत्पन्न हो सकते हैं:

(1) मूल विभ्रम (Errors of Origin) - मूल विभ्रम समंक संकलन प्रक्रिया में विभिन्न कारणों से उत्पन्न होते हैं । अनुसन्धान विषय की दोषपूर्ण परिभाषा, अनुपयुक्त सांख्यिकीय इकाई, सूचकों या प्रगणकों की असावधानी तथा पक्षपात की भावना, प्रश्नावली के दोष, त्रुटिपूर्ण प्रतिचयन विधि आदि के कारण मूल विभ्रम उत्पन्न होते हैं । मूल विभ्रम उत्पन्न होने के निम्न कारण हो सकते हैं :

(अ) उचित माप का अभाव - अनेक तथ्यों की शुद्ध माप करना सम्भव नहीं होता है । डॉ. बॉउले ने तो यहाँ तक कहा है कि “भौतिक अथवा आर्थिक किसी भी प्रकार के तथ्यों को पूर्ण शुद्धता से माप करने का मापदण्ड विद्यमान ही नहीं है, जैसे कि एक पूर्ण सरल रेखा अथवा पूर्ण द्रव नहीं होते ।” अनेक तथ्य इस प्रकार के होते हैं, जिनकी सूक्ष्म गणितीय माप सम्भव नहीं होती है । बड़े समूहों के माप में और अधिक कठिनाई होती है । उदाहरण स्वरूप, एक किसान की उपज की माप अधिक शुद्धता से की जा सकती है, परन्तु यदि सम्पूर्ण देश की कृषि उपज की माप की जाये तो उतनी शुद्ध माप करना असम्भव होता है । समूह जितना बड़ा होगा, शुद्ध माप करने में उतनी ही कठिनाई होगी और विभ्रम उत्पन्न होने की उतनी ही अधिक सम्भावना होगी। कभी-कभी समूह (aggregate) में निरन्तर परिवर्तन होते रहते हैं, जिसके कारण शुद्ध माप करना कठिन हो जाता है । उदाहरणार्थ, देश की जनगणना में, गणना करते समय भी जन्म-मृत्यु के कारण संख्या में परिवर्तन होते रहते हैं, और पूर्ण गणना करना सम्भव होता है।

(ब) प्रतिचयन के कारण - प्रतिदर्श का चुनाव चाहे कितने ही वैज्ञानिक ढंग से किया जाये, उसके माप समग्र के पाप के ठीक अनुरूप नहीं हो सकते हैं । सबसे अधिक प्रतिनिधि प्रतिदर्श अध्ययन से प्राप्त परिणाम भी एक सीमा तक ही शुद्ध होते हैं ।

(स) गलत सूचना देने अथवा गलत लेखा होने से - सूचकों द्वारा गलत सूचना देने अथवा प्रगणक द्वारा उन सूचनाओं का त्रुटिपूर्ण ढंग से लेखा करने के कारण विभ्रम उत्पन्न हो सकते हैं।

(द) अनुमानों का प्रयोग - सांख्यिकीय अनुसन्धानों में अनेक तथ्यों के बारे में अनुमान करना पड़ता है, अनुमान तथा वास्तविक मूल्य में अन्तर होना स्वाभाविक है ।

(य) सांख्यिकीय इकाई, अनुसन्धान क्षेत्र आदि की त्रुटिपूर्ण परिभाषा का प्रयोग - सांख्यिकीय अनुसंधानों में समंक-संग्रह की इकाई, अनुसन्धान क्षेत्र आदि की स्पष्ट परिभाषा के अभाव विभ्रम उत्पन्न होते हैं । उदाहरणस्वरूप, यदि किसी सर्वेक्षण में "अगले जन्म दिवस पर आयु" के बारे में समंक संकलित किये जायें, तो इससे विभ्रम उत्पन्न होगा । इसी प्रकार "श्रमिकों के रहन-सहन से सम्बन्धित" सर्वेक्षण में कुछ मध्यवर्गीय कुटुम्बों को शामिल करने से परिणामों में विभ्रम होगा ।

(2) अपर्याप्तता के कारण विभ्रम - (Errors of Inadequacy) छोटे आकार का प्रतिदर्श लेकर अनुसन्धान करने से विभ्रम उत्पन्न होते हैं । इस प्रकार विभ्रमों को रोकने के लिए प्रतिदर्श के आकार में वृद्धि तकनीक तथा में सुधार करना चाहता है ।

(3) प्रहस्तन विभ्रम - (Errors of Manipulation) इस प्रकार के विभ्रम सांख्यिकीय सामग्री के विधियन में हो जाते हैं । गणना, आगणन, मापन, विवरण, वर्गीकरण, उपसाधन आदि विधियों में अशुद्धियाँ जाने के कारण प्रहस्तन विभ्रम उत्पन्न होते हैं । माध्यों, प्रतिशतों आदि का गलत प्रयोग भी इस प्रकार के विभ्रम का कारण होता है । समंकों के विश्लेषण में अधिक सावधानी रखने से इस प्रकार के विभ्रम कम हो जातै हैं ।

(4) निर्वचन की विभ्रम - (Errors of Interpretation) संकलित समंकों का विश्लेषण के पश्चात् उनसे उचित निष्कर्ष निकालते समय अनुसन्धानकर्ता की असावधानी, अभिनति (bais) व अनुभवहीनता के कारण भी अनेक विभ्रम उत्पन्न हो जाते हैं । इन विभ्रमों को निर्वचन-विभ्रम कहते हैं ।

6.7.2 सांख्यिकीय विभ्रमों के प्रकार (Kinds of Statistical Errors)

सांख्यिकीय विभ्रम, अपनी प्रकृति के आधार पर दो प्रकार के हो सकते हैं:

(i) अभिनत विभ्रम (Biased Error), (ii) अनभिनत विभ्रम (Unbiased Error) ।

6.7.2.1 अभिनत विभ्रम (Biased Error) - अभिनत विभ्रम उनको कहते हैं जो प्रगणकों अथवा सूचकों के पक्षपात अथवा दोषपूर्ण मापदण्डों के कारण उत्पन्न होते हैं । अभिनत विभ्रमों को 'व्यवस्थित विभ्रम' (Systematic errors), सतत विभ्रम (Constant errors), संचयी विभ्रम (Cumulative errors) अथवा दृढ़ विभ्रम (Persistent errors) भी कहते हैं । इकाइयों की संख्या बढ़ने के साथ-साथ अभिनत त्रुटि की कुल मात्रा भी बढ़ जाती है । उदाहरणार्थ, यदि किसी व्यापारी के एक क्विंटल के बाँट में 100 ग्राम की कमी है तो 1 क्विंटल तोलने में 100 ग्राम की त्रुटि होगी । मैट्रिक टन

तोलने में 1 किलोग्राम और इसी प्रकार अधिक तोलने में विभ्रम की मात्रा बढ़ती ही जायेगी ।

अभिनत विभ्रम मुख्यत: निम्न कारणों से उत्पन्न होते हैं-

(अ) सूचना प्रदान करते हैं । उदाहरणार्थ, अशिक्षित वृद्ध व्यक्ति अधिकतर अपनी उम्र अधिक बतलाने में गौरव का अनुभव करते है । नवयुवतियाँ प्राय: अपनी उम्र कम ही बतलाती हैं । प्रत्येक व्यक्ति अपनी आयु कम बताने की चेष्टा करता है । ये सब अभिनत विभ्रम हैं ।

(ब) प्रगणकों का पक्षपात - प्रगणकों की पूर्व-धारणाओं के कारण भी अभिनत त्रुटियाँ हो जाती हैं । उदाहरण के लिए, यदि प्रगणकों की यह धारणा है कि अमुक क्षेत्र में किसानों की आर्थिक स्थिति अच्छी है तो वे इस प्रकार के समंक एकत्रित करेंगे जिनसे उनकी राय के अनुकूल ही निष्कर्ष निकलें ।

(स) मापदण्ड की त्रुटियाँ - सांख्यिकी माप के लिए जिस यन्त्र का प्रयोग किया जा रहा है यदि उसमें दोष है तो अभिनत त्रुटियाँ उत्पन्न हो जायेंगी । यदि किसी मीटर के माप में 5 मिलीमीटर की कमी है तो 1 मीटर नापने में 5 मिलीमीटर की त्रुटि होगी, 10 मीटर नापने में 5 सेण्टीमीटर की कमी होगी, 100 मीटर नापने में 50 सेण्टीमीटर अर्थात् आधे मीटर की कमी होगी । इस प्रकार अभिनत त्रुटि की मात्रा बढ़ती ही जायेगी ।

(द) दोषपूर्ण प्रतिचयन - सविचार प्रतिचयन में भी अभिनत त्रुटि हो जाती है । अनुसंधानकर्ता अपनी इच्छा और पूर्व धारणाओं के अनुकूल ही प्रतिदर्श छाँटेगा जिससे प्रतिदर्श-इकाइयों पर उसकी अभिनति का प्रभाव आ जायेगा ।

अभिनत त्रुटि की रोकथाम के लिए, उपर्युक्त स्रोतों की जाँच करके उन कारणों को दूर करने का प्रयत्न करना चाहिए जिनसे पक्षपात उत्पन्न होता है । सूचकों व प्रगणकों में निष्पक्षता होनी चाहिए, माप-यन्त्र में त्रुटि नहीं होनी चाहिए तथा यथेष्ट प्रतिनिधि समंक दैव चयन के आधार पर चुने जाने चाहिए । इस प्रकार, अभिनत या संचयी विभ्रमों से बचा जा सकता है ।

6.7.2.2 अनभिनत विभ्रम (Unbiased Error) - जो त्रुटियाँ किसी पक्षपात के कारण उत्पन्न नहीं होतीं वरन् प्रगणकों या सूचकों की असावधानी के कारण, समंकों में संयोगवश हो जाती हैं वे अनभिनत विभ्रम कहलाते हैं । इन विभ्रमों की प्रमुख विशेषता यह है कि ये दोनों दिशाओं में होते हैं, अत: एक-दूसरे से कटते रहते हैं । यही कारण है कि इन्हें क्षतिपूरक विभ्रम (compensating errors) भी कहते हैं । उदाहरण के लिए, यदि व्यापारी के क्विंटल के बाँट में तो कोई कमी न हो परन्तु वह असावधानी से तोले, तो एक क्विंटल में 10 ग्राम भार अधिक हो सकता है परन्तु 10 बार एक-एक क्विंटल तोलने में कभी कुछ कम और कभी कुछ अधिक तोले जाने के कारण कुल त्रुटि नगण्य होगी ।

अन्तर - अभिनत तथा अनभिनत विभ्रम में निम्नलिखित अन्तर है -

(1) **उत्पति -** अभिनत विभ्रम सूचकों, गणकों या मापयन्त्रों के पक्षपात के कारण उत्पन्न होती हैं । इसके विपरीत, अनभिनत त्रुटियाँ पक्षपात के कारण उत्पन्न नहीं होती । वे तो गणना में स्वाभाविक रूप से संयोगवश प्रकट होती हैं ।

(2) **विभ्रम की दिशा -** अभिनत त्रुटियाँ अधिकतर एक ही दिशा में बढ़ने वाली होती हैं । परन्तु अनभिनत त्रुटियाँ दोनों दिशाओं की होती हैं । उनमें से कुछ धनात्मक और कुछ ऋणात्मक होती हैं ।

(3) **प्रकृति -** अभिनत विभ्रम संचयी प्रकृति के होते हैं । पदों की संख्या बढ़ने के साथ-साथ विभ्रम की मात्रा में वृद्धि होती रहती है । इसके विपरीत, अनभिनत विभ्रम क्षतिपूरक प्रकृति के होते हैं । पदों की संख्या में वृद्धि के साथ-साथ विभ्रम की मात्रा भी कम हो जाती है । विभ्रमों की धनात्मक तथा ऋणात्मक प्रवृत्तियाँ एक-दूसरे को निष्क्रिय कर देती हैं, इससे परिणामों पर विशेष प्रभाव नहीं पड़ता है । प्रो. किंग (W.I.King) के अनुसार, "जब इकाइयों की संख्या अधिक होती है तो क्षतिपूरक विभ्रम नगण्य होते हैं, परन्तु इसके विपरीत, संचयी विभ्रम सदैव योग अथवा माध्य की शुद्धता को गम्भीर रूप से प्रभावित करते हैं ।"

(4) **रोकथाम के उपाय -** अभिनत विभ्रम को रोकने के लिए उस स्त्रोत का पता लगाना चाहिए जिसके द्वारा संकलित समंकों में विभ्रम उत्पन्न होता है । यदि पक्षपात के कारण विभ्रम उत्पन्न हो तो उसे दूर करने की चेष्टा करनी चाहिए और यदि माप-यन्त्र के कारण विभ्रम उत्पन्न होते हों तो उसमें सुधार करना चाहिए । अनभिनत विभ्रम के प्रभावों को निष्क्रिय करने के लिए पदों की संख्या में वृद्धि करनी चाहिए ।

पदों की संख्या में वृद्धि के साथ जहाँ अभिनत विभ्रम में वृद्धि होती है वहीं अनभिनत विभ्रम कम हो जाता है । इसीलिए कहा जाता है कि "जहाँ तक अभिनत विभ्रम का प्रश्न है संख्याशास्त्री को एक भी ऐसा विभ्रम नहीं चाहिए, किन्तु अनभिनत जितने ही अधिक होंगे, प्रसन्नता की बात है।"

6.7.2.3 शक्य विभ्रम तथा सम्भावित विभ्रम (Possible Error and Probable Error)

क्य विभ्रम उन सीमाओं को स्पष्ट करता है जिनके अन्तर्गत वास्तविक विभ्रम हो सकता है । उदाहरण स्वरूप, 13,750 को हजार तक उपसादित किया जाए तो 'निकटतम पूर्ण संख्या तक उपसाधन विधि के अनुसार यह संख्या 14,000 होगी । इस विधि के अनुसार 500 तक के मूल्य को छोड़ दिया जाता है और 500 या 500 से अधिक मूल्य को 1,000 मान लिया जाता है । अत: ऐसी दशा में शाक्य विभ्रम ± 500 होगा तथा उपसादित संख्या 14000 होने पर वास्तविक संख्या $14,000 \pm 500$ अर्थात् 14,500 व 13,500 के बीच होगी ।

सम्भावित विभ्रम तथा प्रमापित विभ्रम प्रतिचयन विधि के प्रयोग में उत्पन्न होता है । यह विभ्रम उन सीमाओं का निर्धारण करता है, जिनके बीच प्रतिदर्श की विशेषताएँ समग्र की विशेषताओं से विचलित होती है ।

6.7.2.4 I तथा II प्रकार के विभ्रम (Types-I and Type-II Error)

किसी परिकल्पना (hypothesis) की जाँच करने में दो प्रकार के विभ्रम हो सकते हैं : I प्रकार का विभ्रम उस दशा मे होता है जब ऐसी परिकल्पना को अस्वीकार कर दिया जाता है, जो वास्तव में सही है । II प्रकार का विभ्रम उस दशा में उत्पन्न होता है जब गलत परिकल्पना को स्वीकार कर लिया जाता है । प्रत्येक परिकल्पना या तो सही होगी या गलत, सही परिकल्पना को अस्वीकार नहीं किया जाता तो निर्णय ठीक रहता है इसी प्रकार गलत परिकल्पना को स्वीकार नहीं किया जाता, तो भी निर्णय ठीक रहता है । यह निम्न चार्ट में दर्शाया गया है :-

शून्य परिकल्पना (Null Hypothesis) है

निर्णय (Decision)	सही (True)	गलत (False)
शून्य परिकल्पना अस्वीकार →	I विभ्रम (Type-I Error) (Alpha Error)	सही निर्णय (Correct Decision)
शून्य परिकल्पना स्वीकार →	सही निर्णय (Correct Decision)	II विभ्रम (Type-II Error) (Beta Error)

6.7.3 सांख्यिकीय विभ्रमों की माप (Measurement of Statistical Errors)

सांख्यिकीय विभ्रमों की माप दो प्रकार से की जा सकती है :

1. निरपेक्ष विभ्रम (Absolute Error)
2. सापेक्ष विभ्रम (Relative Error)

1. निरपेक्ष विभ्रम (Absolute Error) - वास्तविक मूल्य (actual value) तथा अनुमानित मूल्य (Estimated Value) का अन्तर निरपेक्ष विभ्रम कहलाता है । प्रो. बॉडिंगटन (Boddington) के शब्दों में, "अनुमानित अंक तथा मूल संख्या का अंक गणितीय अन्तर" निरपेक्ष विभ्रम होते हैं । प्रो. कॉनर के अनुसार, "किसी संख्या का निरपेक्ष विभ्रम उसके अनुमानित व वास्तविक मूल्यों का वास्तविक अन्तर होता है, यह वास्तविक मूल्य से अनुमानित मूल्य के अधिक या कम होने के अनुसार धनात्मक अथवा ऋणात्मक होता है ।" सूत्र के रूप में निरपेक्ष विभ्रम की गणना इस प्रकार की जा सकती है :

$$A.E. = a - e$$

जहां पर A.E. का अर्थ है निरपेक्ष विभ्रम (Absolute Error)

a का अर्थ है वास्तविक मूल्य (Actual value),

e का अर्थ है अनुमानित मूल्य (Estimated value)

निरपेक्ष विभ्रम धनात्मक (Positive) अथवा ऋणात्मक (Negative) हो सकता हैं यदि वास्तविक मूल्य अनुमानित मूल्य से अधिक होता है तो विभ्रम धनात्मक (Positive) होता है तथा वास्तविक मूल्य के अनुमानित मूल्य से कम होने पर विभ्रम ऋणात्मक (Negative) होता है । सूत्रानुसार :

a>e = धनात्मक निरपेक्ष विभ्रम (Positive Absolute Error)

a<e= ऋणात्मक निरपेक्ष विभ्रम (Negative Absolute Error)

यदि तीन कर्मचारियों की मासिक आय क्रमश: 220, 420 तथा 820 रूपये है जबकि उनकी आयों का अनुमान क्रमश : 200, 400, 800 रूपये लगाया गया है तो इन अनुमानों का निरपेक्ष विभ्रम इस प्रकार होगा :

	I	II	III
A.E.	Rs. (320-300) =+20	Rs. (420-400)=+20	Rs.(820-800)=+20

इन तीनों उदाहरणों में निरपेक्ष विभ्रम की मात्रा समान है, परन्तु उनकी तुलना नहीं की जा सकती, क्योंकि प्रथम में यह विभ्रम 400 में से तथा तीसरे में यह विभ्रम 800 में से है ।

2. सापेक्ष विभ्रम (Relative Error) निरपेक्ष विभ्रम का अनुमानित मूल्य से अनुपात सापेक्ष विभ्रम कहलाता है । निरपेक्ष विभ्रम को अनुमानित मूल्य से भाग देने पर सापेक्ष विभ्रम ज्ञात किया जाता है । इसका सूत्र इस प्रकार है :

सापेक्ष विभ्रम (R.E.) = $\frac{AE}{e}$ or $\frac{a-e}{e}$

उपर्युक्त उदाहरणों में सापेक्ष विभ्रम इस प्रकार होगा :

I	II	III
$\frac{220-200}{200}=0.1$	$\frac{420-400}{400}=0.5$	$\frac{820-800}{800}=.025$

प्रथम की तुलना में दूसरे का सापेक्ष विभ्रम आधा तथा तीसरे का सापेक्ष विभ्रम चौथाई है।

प्रतिशत विभ्रम (Percentage Error) - सापेक्ष विभ्रम को 100 से गुणा करके प्रतिशत विभ्रम ज्ञात किया जा सकता हैं संकेताक्षरानुसार P.E. = R.E. x 100 इससे तुलना करना सरल हो जाता है । उपर्युक्त उदाहरणों में प्रतिशत विभ्रम इस प्रकार होगा ।

	I	II	III
प्रतिशत विभ्रम	0.1x100=10%	.05x100=5%	.025x100=2.5%

यदि निरपेक्ष तथा सापेक्ष विभ्रम ज्ञात हो तो वास्तविक और अनुमानित मूल्यों को ज्ञात किया जा सकता है । इस गणना को नीचे दिखाया जा रहा है :-

I II

ज्ञात A.E.= +10 ज्ञात A.E.= -10

R.E.= +.04 R.E.= -.01

वास्तविक तथा अनुमानित मूल्यों ज्ञात करें

R.E.= $\frac{A.E.}{e}$ R.E.= $\frac{A.E.}{e}$

मूल्यों का प्रतिस्थापन करने पर :

$.04 = \frac{10}{e}$ $-.01 = \frac{-10}{e}$

अथवा .04 x e = 10 अथवा -.04 x e = -10

$e = \frac{10}{.04}$ $e = \frac{-10}{-0.1}$

E = 250 e= 1000

a = e + A.E. a = e + A.E.

= 250 + 10 =260 = 1000 - 10 = 990

वास्तविक मूल्य (Actual value) = 260 वास्तविक मूल्य (Actual value) = 260

अनुमानित मूल्य (Estimated value) = 250 अनुमानित मूल्य (Estimated value) = 1000

6.7.4 सांख्यिकीय विभ्रमों का अनुमान (Estimation of Statistical Errors)

अनेक सांख्यिकीय अनुसंधानों में समंकों के वास्तविक मूल्य ज्ञात नहीं होते; ऐसी दशा में निरपेक्ष व सापेक्ष विभ्रमों की माप नहीं की जा सकती । इन विभ्रमों का केवल अनुमान ही लगाया जा सकता है ।

सांख्यिकीय त्रुटियों के अनुमान लगाने की बॉडिगंटन तथा बाउले द्वारा अलग-अलग रीतियां प्रस्तुत की गई हैं जो निम्न प्रकार हैं -

(क) बॉडिगंटन[1] द्वारा दी गई रीतियां - बॉडिगंटन के अनुसार जब त्रुटि अभिनत प्रकृति की हो, तो कुल निरपेक्ष त्रुटि का अनुमान लगाने के लिए औसत निरपेक्ष त्रुटि को इकाईयों की संख्या के वर्गमूल से गुणा करना चाहिए तथा सापेक्ष त्रुटि अनुमानित करने के लिए कुल निरपेक्ष त्रुटि को कुल अनुमानित मूल्य से भाग दे देना चाहिए । इन त्रुटियों के सूत्र के निम्न प्रकार हैं -

कुल निरपेक्ष त्रुटि = औसत निरपेक्ष त्रुटि $\times\sqrt{N}$

कुल निरपेक्ष त्रुटि = औसत निरपेक्ष त्रुटि $\times\sqrt{N}$

अनुमानित मूल्य

'N' पदों की संख्या के लिए प्रयुक्त किया गया है ।

जब त्रुटि अभिनत प्रकृति की होती है तो औसत निरपेक्ष त्रुटि को इकाईयों की संख्या से गुणा करके कुल निरपेक्ष त्रुटि की मात्रा तथा कुल निरपेक्ष त्रुटि को कुल अनुमानित मूल्य से भाग देकर सापेक्ष त्रुटि अनुमानित कर ली जाती है ।

कुल निरपेक्ष त्रुटि = औसत निरपेक्ष त्रुटि X N

$$\text{कुल निरपेक्ष त्रुटि} = \frac{\text{औसत निरपेक्ष त्रुटि} \times N}{e}$$

(ख) डा बाउले[2] के अनुसार - जब त्रुटि अभिनत होती है तो अग्रांकित सूत्र द्वारा उसका निरपेक्ष माप किया जाता है -

$$\text{कुल निरपेक्ष त्रुटि} = \frac{2}{3} \times \frac{\text{औसत निरपेक्ष त्रुटि}}{\sqrt{N}}$$

कुल सापेक्ष त्रुटि ज्ञात करने के लिए कुल निरपेक्ष त्रुटि को अनुमानित मूल्य से भाग दे देना चाहिए ।

उदाहरण (Illustration) -

निम्न कथनों की समीक्षा कीजिए -

Comment on the following statements:

(i) एक महिला ने अपनी उम्र 24 वर्ष बताई जबकि विवाह हुए 10 वर्ष बताए । उनके पति ने पत्नी की उम्र 28 वर्ष बताई और विवाह हुए 10 वर्ष बताए ।

10 years back. Her husband told her age to be 208 years and told that Their marriage took place 10 years back.

(ii) एक गृहिणी ने अपने पति को बाजार से कमीज के बटन लाने को कहा । 12 बटनों की आवश्यकता थी पति महोदय जो सांख्यिक ने उपसाधन की सर्वोत्तम विधि लगाकर निकटतम आधार पर 10 बटन क्रय किए । गृहिणी नाराज थी ।

A housewife asked her husband to bring shirt buttons from the market. 12 buttons were required. The husband, who happened to be a statistician, applied the best method of approximation and purchased on nearest basis 10 buttons. The house wife was angry.

(iii) जयपुर से दिल्ली की दूरी मीटरों में मापी गई ।

The distance between Jaipur to Delhi was measured in meters.

(iv) एक परीक्षार्थी ने प्रश्न-पत्र हल करने हेतु समय को अंकों के आधार पर विभाजित किया। उसने। अगले पूर्ण मिनट तक उपसाधन कर प्रत्येक प्रश्न हल करने का प्रयत्न किया । अन्त में कुछ प्रश्न छूट गए ।

An examinee distributed the time available for solving a question-paper as per the marks allotted. He tried to solve every question by approximating to the next minute in round figures. In the last, some questions remained unattempt.

हल -

(i) पति ने पत्नी की जो उम्र बताई है वह अधिक उपयुक्त लगती है, क्योंकि महिला द्वारा बताई गई उम्र के अनुसार विवाह की उस 14 वर्ष आती है जो उचित प्रतीत नहीं होती। समंकों के सम्पादन करते समय सूचनाओं की शुद्धता का ध्यान रखना आवश्यक है । सम्पादन कर यह सूचना शुद्ध करनी होगी ।

(ii) यहां उपसाधन करने की कोई आवश्यकता ही नहीं थी और अगर करना ही था तो अगली दहाई तक ।

(iii) निकटतम पूर्णांक तक उपसाधन विधि सर्वोत्तम है लेकिन किस सीमा तक उपसाधन करना है, यह परिस्थितियों पर निर्भर करता है । प्रस्तुत उदाहरण में यह विधि अनुपयुक्त है ।

(iv) दो शहरों की दूरी किलोमीटर में मापना ही उपयुक्त है । मीटर में मापने से कोई प्रयोजन सिद्ध नहीं होगा ।

इस प्रकार उपसाधन करने से विभ्रम संचयी प्रकृति का हो जाएगा । अत: अन्त में समय कम पड़ना स्वाभाविक है । निकटतम मिनट तक उपसाधन करने से संभवत: ऐसा नहीं होता क्योंकि विभ्रम क्षतिपूरक होती । यदि पिछले पूर्ण मिनट तक उपसाधन किया जाए तो सर्वश्रेष्ठ होगा । यद्यपि ऐसी दशा में भी संचयी प्रवृति का विभ्रम होगा लेकिन उसमें कुछ समय की बचत होगी ।

6.8 द्वितीयक समंकों का सम्पादन (Processing of secondary data)

द्वितीय समंकों को सांख्यिकीय विश्लेषण तथा निर्वाचन के योग्य बनाने के लिए उनका अनुसन्धान की आवश्यकतानुसार सम्पादन करना आवश्यक होता है । सम्पादन द्वारा द्वितीयक समंकों की अशुद्धियों, भूलों एवं अनियमितताओं का पता लगाकर उनको दूर किया जाता है । द्वितीयक सामग्री के सम्पादन द्वारा उनकी विश्वसनीयता, अनुकूलता और पर्याप्तता की जांच की जाती है । द्वितीयक समंकों का सम्पादन करने में निम्नलिखित बातों का विशेष रूप से ध्यान रखना चाहिए :-

1 द्वितीयक समंकों का उद्गम ।

2 उनके संकलन में अपनायी गयी विधि ।

3 अनुसन्धान का उद्देश्य व क्षेत्र और उसकी प्रकृति ।

4 कितने समय पूर्व अनुसन्धान किया गया था ।

5 अनुसन्धानकर्ता व प्रगणकों की योग्यता व ईमानदारी ।

6 अनुसंधान में प्रयुक्त इकाइयों की परिभाषा ।

7 शुद्धता का स्तर ।

8 विभिन्न स्त्रोतों, प्राप्त समंकों की तुलना तथा परीक्षण ।

यदि इन सभी बातों से द्वितीयक समको की जांच कर उनकी विश्वसनीयता प्रमाणित हो जाए, तभी उनका प्रयोग करना चाहिए ।

6.9 सारांश

प्राथमिक तथा द्वितीयक रीतियों द्वारा संकलित समंकों में प्राय: अनेक अशुद्धियाँ और अनियमितताएँ पाई जाती हैं । समंकों का विश्लेषण व निर्वचन करने से पूर्व यथासम्भव उन त्रुटियों की जाँच करना नितान्त आवश्यक है ताकि शुद्ध समंकों के आधार पर सही निष्कर्ष निकाले जा सकें ।

प्राथमिक समंकों का संकलन अधिकांशत: अनुसूचियों या प्रश्नावलियों के आधार पर किया जाता है । सूचकों की लापरवाही, भ्रम, उदासीनता और पक्षपात के कारण अनेक प्रश्नों के उत्तर अस्पष्ट, अपूर्ण और भ्रमात्मक होते हैं । कभी-कभी संकलित प्राथमिक समंकों में इतने अधिक दोष आ जाते हैं कि उनका विस्तृत विश्लेषण करना असम्भव हो जाता है । ऐसी स्थिति में त्रुटिपूर्ण अनुसूचियों को अस्वीकृत करके नये सिरे से प्राथमिक अनुसंधान करना चाहिए ।

सम्पादन प्रक्रिया में संगति के लिए सम्पादन, एकरूपता की जाँच, पूर्णता की जाँच तथा परिशुद्धता की जाँच के लिए सम्पादन किया जाता है ।

समंक सम्पादन में परिशुद्धता का स्तर, सन्निकटन की मात्रा और सांख्यिकीय विभ्रमों के विश्लेषण का समावेश किया गया है ।

द्वितीयक समंकों को विश्लेषण और निर्वचन के योग्य बनाने के लिए उनका यथोचित सम्पादन करना बहुत आवश्यक होता है । सम्पादित द्वितीयक सामग्री यदि विश्वसनीय, सजातीय, पर्याप्त और उपयुक्त हो तभी उसका प्रयोग करना चाहिए ।

6.10 पारिभाषिक शब्द

प्राथमिक समंक	:	अनुसूचियों एवं प्रश्नावलियों के आधार पर संकलित किये गये समंक प्राथमिक समंक कहलाते हैं ।
सम्पादन	:	संकलित समंकों का धैर्य तथा आलोचनात्मक दृष्टिकोण से किया गया सूक्ष्म परीक्षण, सम्पादन कहलाता है ।
पूर्ण परिशुद्धता	:	किसी तथ्य को बिल्कुल यथार्थ रूप में प्रस्तुत करने से है ।
सन्निकटन अथवा उपसाधन	:	संख्याओं को सरल और बुद्धिगम्य बनाने के उद्देश्य से उन्हें उनकी निकटतम सरल संख्या के रूप में व्यक्त करने से है।
विभ्रम	:	समंकों के वास्तविक मूल्य और अनुमानित मूल्य के अन्तर को विभ्रम कहते हैं।
मूल विभ्रम	:	समंक संकलन प्रक्रिया में अनुपयुक्त सांख्यिकीय इकाई, प्रगणकों की असावधानी, प्रश्नावली दोष, त्रुटिपूर्ण प्रतिचयन विधि के कारण मूल विभ्रम उत्पन्न होते हैं ।

प्रस्तर विभ्रम	:	गणना, मापन, विवरण, वर्गीकरण, उपसाधन विधियों में अशुद्धियाँ हो जाने के कारण प्रहस्तन विभ्रम उत्पन्न होते हैं।
निर्वचन विभ्रम	:	निष्कर्ष निकालते समय अनुसंधानकर्ता की असावधानी, अभिनति एवं अनुभवहीनता के कारण उत्पन्न होते हैं ।
अभिनत विभ्रम	:	प्रगणकों अथवा सूचकों के पक्षपात एवं दोषपूर्ण मापदण्डों के कारण उत्पन्न होते हैं ।
निरपेक्ष विभ्रम	:	वास्तविक मूल्य तथा अनुमानित मूल्य का अन्तर है जो धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकता है ।
सापेक्ष विभ्रम	:	निरपेक्ष विभ्रम का अनुमानित मूल्य से अनुपात सापेक्ष विभ्रम कहलाता है ।

6.11 स्वपरख प्रश्न

1. विश्लेषण तथा निर्वचन के लिए प्राथमिक तथा द्वितीय समंकों के सम्पादन पर एक निबन्ध लिखिए ।

   Write a note on the editing of primary and secondary data for purpose of analysis and interpretation.

2. सांख्यिकीय विभ्रम से आप क्या समझते हैं? अशुद्धि से वह कहाँ तक भिन्न है? उसका माप आप किस प्रकार करेंगे?

   What is a statistical error? How does it differ form a mistake? How would you measure it?

3. शुद्धता एवं सन्निकट पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिये

   Write a short note on Accuracy and Approximation.

4. सांख्यिकीय अनुसंधानों हेतु किस स्तर की परिशुद्धता चाहिए? उपसाधन की विभिन्न विधियों का उल्लेख कीजिए तथा सांख्यिकी में उनकी उपयोगिता बताइए ।

   What standard of accuracy is needed for statistical investigation? State the various methods of approximation and their utility in statistics.

5. सांख्यिकी में उपसाधन के लाभों का उल्लेख कीजिए । सामान्यत: प्रत्येक सांख्यिकी अनुसन्धान में परिशुद्धता का स्तर क्या होना चाहिए?

   State the advantages of approximation in statistics. Ordinarily, what should be the degree of accuracy in every statistical investigation?

6. “पूर्ण परिशुद्धता की उपलब्धि सांख्यिकीय में शायद ही कभी होती है । उक्त कथन को समझाइए ।”

   “Perfect accuracy is very seldom obtained in statistics.” Explain the meaning of this statement.

7. सांख्यिकीय अनुसन्धानों में विभिन्न प्रकार के विभ्रमों के उत्पन्न होने की सम्भावना का विवेचन करो और बताओ उन्हें किस प्रकार दूर या ठीक किया जा सकता है?

   Discuss the various types of errors likely to creep into statistical investigation and suggest how to avoid or correct them.

8. सांख्यिकीय विभ्रम क्या हैं? उनके विभिन्न प्रकार कौन-से हैं? वे किस प्रकार अशुद्धियों से भिन्न है?

   What are statistical errors? What are their various kinds? How they differ from mistakes?

9. सांख्यिकीय विभ्रम क्यों उत्पन्न होते हैं? यदि संकलित समंकों में अपर्याप्तता तथा प्रहस्तन विभ्रम हों तो विश्लेषण तथा निर्वचन से पूर्व उन्हें किस प्रकार दूर करोगे।

   Why do statistical errors arise? If there are errors of inadequacy and manipulation in the collected data, how would you eliminate them before analysis and interpretation?

10. अभिनत तथा अनभिनत विभ्रम में आप किस प्रकार भेद करेंगे? अभिनत और अनभिनत विभ्रमों को निरपेक्ष तथा सापेक्ष दोनों प्रकार से अनुमानित करने की विभिन्न रीतियों का विवेचना कीजिए ।

    How would you distinguish between and unbiased errors? Discuss the various methods of estimating biased and unbiased errors both absolutely and relatively.

11. सांख्यिकीय विभ्रम पर टिप्पणी लिखिये ।

    Write a short note on Statistical Errors.

6.12 उपयोगी पुस्तकें

1.	शर्मा, जैन, पारीक	:	व्यावसायिक सांख्यिकी
2.	कैलाश नाथ नागर	:	सांख्यिकी के मूल तत्व
3.	यादव, जैन, मित्तल	:	व्यावसायिक सांख्यिकी
4.	S.P. Gupta	:	Statistical Methods
5.	Sancheti, Kapoor	:	Statistics (Theory Methods & Application)
6.	D.N. Elhance	:	Fundamentals of Statistics
7.	Garg, Sharma, Jain, Pareek	:	Business Statistics

इकाई -7 : समंकों का चित्रमय एवं बिन्दुरेखीय प्रदर्शन (Diagrammatic and Graphic Presentation of Data)

इकाई की रूपरेखा :

7.0 उद्देश्य
7.1 प्रस्तावना
7.2 चित्रमय प्रदर्शन की उपयोगिता चित्रों की परिसीमाएँ
7.3 चित्र संरचना के सामान्य नियम
7.5 चित्रों के प्रकार
- 7.5.1 एक-विमा चित्र
- 7.5.2 द्‌वि-विमा चित्र
- 7.5.3 त्रि-विमा चित्र
- 7.5.4 चित्र-लेख
- 7.5.5 मानचित्र

7.6 समंकों के बिन्दुरेखीय प्रस्तुतीकरण की उपयोगिता
7.7 बिन्दु रेखा के कार्य
7.8 बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के लाभ
7.9 बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के दोष
7.10 बिन्दु रेखा चित्रों की संरचना
7.11 रेखाचित्र बनाने के नियम
7.12 रेखाचित्रों के प्रकार
- 7.12.1 कालिक-चित्र
- 7.12.2 आवृति चित्र

7.13 सारांश
7.14 पारिभाषिक शब्द
7.15 निबन्धात्मक प्रश्न
7.16 व्यावहारिक प्रश्न
7.17 संदर्भ ग्रन्थ

7.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि -

- समंकों के चित्रमय एवं बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की आवश्यकता समझ सकें ।
- चित्रमय एवं बिन्दुरेखीय प्रदर्शन करने के नियमों को समझ कर उनका व्यावहारिक उपयोग कर सकें ।

– दिए गए सांख्यिकीय समंकों के आधार पर उपयुक्त चित्र अथवा ग्राफ का निर्माण कर सकें।
– पत्र, पत्रिकाओं में दिए गए चित्रों तथा रेखाचित्रों को समझ सकें तथा उनका विश्लेषण कर सकें ।

7.1 प्रस्तावना

बड़े समंक समूहों के अर्थ को सरल, स्पष्ट एवं व्यापक रूप से समझने में सहायता करना सांख्यिकीय विज्ञान का एक प्रमुख कार्य है । इस कार्य का निष्पादन करने के लिए अनेक सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग किया जाता है, जिनमें से समंकों का चित्रमय एवं बिन्दुरेखीय प्रदर्शन एक महत्वपूर्ण दृष्टिगत विधि (Visual Method) है । नीरस समंकों को चित्रों तथा रेखाचित्रों के माध्यम से प्रदर्शित करके उन्हें अर्थपूर्ण तथा रोचक और उनकी विशेषताओं को स्पष्ट बनाया जा सकता है । विभिन्न प्रकार के समंकों को प्रस्तुत करने में इनका प्रयोग अत्यन्त प्रभावी रहता है । किसी दृश्य का फोटो उसके शाब्दिक विवरण से अधिक श्रेष्ठ होता है, उसी प्रकार आंकिक तथ्यों का प्रदर्शन उनकी विशेषताओं को अधिक श्रेष्ठ रूप में स्पष्ट करता है। उचित प्रकार से बनाये गये चित्र अथवा रेखाचित्र जानकारी को आसानी से समझने योग्य बना देते हैं, जबकि समंकात्मक सारणी के विवरणों में उसे ढूंढना कठिन हो जाता हैं चित्रों के माध्यम से सांख्यिकीय तथ्यों का प्रदर्शन करने की कला संख्याशास्त्री की एक महत्वपूर्ण उपलब्धि है । सबसे पहले चित्रमय प्रदर्शन का अध्ययन करेंगे । इसके बाद बिन्दुरेखीय प्रस्तुतीकरण की जानकारी प्राप्त करेंगे ।

7.2 चित्रमय प्रदर्शन की उपयोगिता (Utility of Diagrammatic Presentation)

बाउले के अनुसार, "संख्याओं की कोई भी सूची, जैसे-जैसे उसकी लम्बाई बढ़ती जाती है, कम ग्राह्य होती जाती है । दस संख्याओं की श्रेणी को सरलता से समझा जा सकता है, सत्तर संख्याओं की श्रेणी को प्रयत्न करने पर, जबकि एक सौ लगातार वर्षों की संख्याओं की छपी सूची हमारे मस्तिष्क पर कोई भी प्रभाव नहीं छोड़ती, हम उनसे कुछ भी निष्कर्ष नहीं निकाल सकते।" सांख्यिकीय सामग्री का चित्रों, रेखागणितीय आकृतियों आदि से प्रदर्शन इस कठिनाई को सुगम कर देता है । एक सुरचित चित्र नेत्रों तथा मस्तिष्क दोनों को भला लगता है, क्योंकि वह व्यावहारिक, स्पष्ट तथा ऐसे व्यक्तियों के लिए भी जो प्रदर्शन-विधि से भी परिचित नहीं हैं, सरलता से समझने योग्य होता है । चित्र सांख्यिकीय तथ्यों को नवीन अर्थ प्रदान नहीं करते, बल्कि उनको अधिक स्पष्ट व सरल रूप में प्रस्तुत करते हैं । विशेषकर उन व्यक्तियों को, जिन्हें सांख्यिकीय विधियों का ज्ञान नहीं होता है, चित्र तथ्यों को समझाने में सहायक होते हैं ।

समंकों की सारणी का गहन अध्ययन करना एक सामान्य व्यक्ति के लिए थकाने वाला और भ्रम उत्पन्न करने वाला ढंग है । सांख्यिकीय तथ्यों का चित्रमय निरूपण आंखों के माध्यम से मस्तिष्क पर प्रभाव डालता है । उदाहरणार्थ, बिक्री तथा लागत की प्रवृत्तियों का प्रदर्शन करने वाले सुरचित चित्र, महीनों की इनसे संबन्धित अंकों के अध्ययन की अपेक्षा, कम समय व प्रयत्न से उद्योगपति को उस उद्योग की प्रगति के बारे में समझा सकते हैं । संख्याशास्त्री भी संकलित तथ्यों के वितरण की रचना जानने के लिए चित्रों का उपयोग करता है, क्योंकि वितरण की प्रकृति ज्ञात हो जाने के पश्चात् यह निश्चय किया जा सकता है कि सांख्यिकीय विश्लेषण की किस विधि को अपनाया जाये? चित्रों से तथ्यों को एक नजर में समझने से उनकी उपयोगिता स्पष्ट हो जाती है । अंकों को जब चित्रों द्वारा व्यक्त किया जाता है तो वे आकर्षक बन जाते हैं । अन्य शब्दों में, नीरस अंकों से भरे पृष्ठ चित्रीय भाषा में अनुदित हो जाने पर स्पष्ट भाषा में अर्थों को व्यक्त करते हैं । यही नहीं, सांख्यिकीय गणनाओं की त्रुटियों का पता लगाने में भी चित्र महत्वपूर्ण साधन होते हैं । अत: चित्रीय प्रदर्शन का सांख्यिकीय विधियों में महत्वपूर्ण स्थान है, इसके कारण निम्नलिखित है :-

1 **आकर्षक एवं प्रभावी (Attractive and Impressive) -** चित्र आकर्षक होते हैं तथा मानव-मस्तिष्क पर स्थायी प्रभाव डालते हैं । साधारण व्यक्ति जो एक मिनट भी नीरस अंकों को समझने में नहीं लगाना चाहेगा उन्हीं समंकों के प्रदर्शन करने पर विभिन्न रंगों से उन चित्रों में उसका ध्यान अनायास आकर्षित हो ही जायेगा । चित्र अवलोकनकर्ता के मस्तिष्क पर दबाव नहीं डालते । आकर्षक होने के कारण चित्रों का प्रचार (Propaganda) काफी होता है । सामान्य व्यक्ति जो समंकों के जाल में उलझना नहीं पसन्द करेगा, चित्रों का रूचि के साथ अवलोकन करता है और उनसे जानकारी प्राप्त करता है ।

2 **तथ्यों को सरल व बुद्धिगम्य बनाना (To make data simple and intelligible)** चित्रों में तथ्यों को सरल व बुद्धिगम्य बनाने का गुण होता है । चित्रों से जटिल समंक-समूहों की समस्त विशेषताएं स्पष्ट हो जाती है ।

3 **तुलना में सहायक (To make comparison possible)** चित्रों का एक प्रमुख उद्देश्य, तुलना करना सम्भव व सरल बनाना है । निरपेक्ष रूप से समंकों की तुलना अधिक स्पष्ट नहीं होती, परन्तु चित्रीय प्रदर्शन से तुलना करना सरल हो जाता है । उदाहरणार्थ, मूल्य-वृद्धि के समंक सामान्य व्यक्ति को अधिक स्पष्ट नहीं होंगे, परन्तु इनको चित्र द्वारा स्पष्ट करने पर, यह तुलना की जा सकती है कि पहले की अपेक्षा मूल्यों में कितनी वृद्धि हुई?

4 **समय व श्रम की बचत (Saving of Time and Labour)** चित्रों द्वारा प्रदर्शित समंकों को समझने में समय व श्रम की बचत होती है । मस्तिष्क पर अधिक भार डाले बिना ही उनकी विशेषताओं को समझ लिया जाता है । जिन समंकों की

विशेषताओं को समझने में घण्टों लगेंगे उनके चित्रीय प्रदर्शन से उन्हें मिनटों में समझा जा सकता है ।

5 **व्यापक उपयोगिता (Universal Utility)** समंकों के चित्रीय प्रदर्शन की विधि का व्यापक प्रयोग होता है । आर्थिक, व्यापारिक, शासकीय, सामाजिक तथा अन्य क्षेत्रों में चित्रों द्वारा समंकों के प्रदर्शन का प्रचलन पर्याप्त रूप से होता है ।

6 **अधिक जानकारी देना (More Information)** एक चित्र सारणीबद्ध समंकों से अधिक जानकारी प्रदर्शित करता है । वह समंकों में विद्यमान प्रवृत्ति (trend) तथा किस प्रकार प्रवृत्ति में परिवर्तन होता है, भी स्पष्ट करता है । यद्यपि यह जानकारी समंक सारणी में भी निहित होती है, परन्तु उनसे प्रवृत्ति का पता लगाना कठिन तथा समय खपाने वाला कार्य होता है ।

7.3 चित्रों की परिसीमायें (Limitations of Diagrams)

सांख्यिकीय चित्रों की कुछ परिसीमायें भी हैं जिनके कारण उनका प्रयोग अत्यन्त सावधानी से करना चाहिए । मोरोन ने ठीक ही कहा है 'किसी चित्र का अध्ययन करने में पूर्ण सजग (सावधान) रहना लाभप्रद होता है । वह (चित्र) इतना सरल, निष्कपट और आकर्षक लगता है कि लापरवाह व्यक्ति आसानी से मूर्ख बन जाता है ।' चित्रमय प्रदर्शन की निम्नलिखित प्रमुख परिसीमायें हैं -

1. **सीमित परिशुद्धता (Limited Accuracy)** - सांख्यिकीय चित्रों की शुद्धता सीमित होती है । वास्तव में, चित्रों द्वारा यथार्थ संख्यात्मक प्रदर्शन सम्भव नहीं है । वे सन्निकट मूल्यों (Approximate values) पर आधारित होते हैं । अत: वे तथ्यों का शुद्ध विवेचन नहीं करते ।

2. **अनुपयुक्तता (Unsuitability) -** चित्रों की सहायता से विभिन्न मूल्यों का सूक्ष्म अन्तर प्रदर्शित करना असम्भव है । उदाहरणार्थ, 9210 और 9350 का अन्तर चित्रों द्वारा स्पष्ट नहीं किया जा सकता चाहे मापदण्ड कुछ भी रखा जाए ।

3. **सीमित तुलनीयता (Limited Comparability) -** चित्रों द्वारा सही तुलनात्मक अध्ययन के लिए यह आवश्यक है कि समंक दो या दो से अधिक हों परन्तु वे स्वभाव में सजातीय हो अन्यथा भ्रमात्मक निष्कर्ष निकलेंगे । विभिन्न गुणों के आधार पर बने चित्र अतुलनीय होते हैं ।

4. **बहुगुणी प्रदर्शन में कठिनाई (Difficulty in multiple representation) -** चित्रों के रूप में बहुगुणी सूचनाएं प्रदर्शित नहीं की जा सकतीं । इस प्रकार की बहुगुणी सूचनाएं बहुगुणी सारणियों के रूप में व्यक्त की जा सकती हैं ।

5. **दुरूपयोग (Misuse)** - चित्रों का सरलता से दुरूपयोग हो सकता है । गलत माप-दण्ड से बने चित्र भ्रमात्मक होते हैं । विज्ञापन आदि में इनका अत्यधिक दुरूपयोग किया जा सकता है ।

6. **सारणियों के स्थानापन्न नहीं (No substitutes of tables) -** चित्र निष्कर्ष निकालने का एक साधन है जिसका प्रयोग सारणियों के साथ-साथ करना, चाहिए । केवल चित्रों से ही यथार्थ परिणाम नहीं निकाले जा सकते । वास्तव में, चित्र सारणियों के अनुपूरक हैं, स्थानापन्न नहीं।

7.4 चित्र-संरचना के सामान्य नियम (General Rules for making Diagram)

चित्रमय निरूपण सारणी को स्पष्ट एवं समझने योग्य बनाने की सरल एवं प्रभावी विधि है । इसका कारण यह है कि अधिकांश व्यक्तियों की याददाश्त फोटोग्राफिक अथवा दृष्टिगत (photographic or visual memory) होती है । वे चित्राकृतियों में प्रस्तुत तथ्यों को, अन्य किसी रूप में, प्रस्तुत तथ्यों की अपेक्षा, अधिक समय तक याद बनाये रख सकते हैं । इसलिए यह भी आवश्यक है क़द प्रदर्शन सरल व स्पष्ट हो और उसमें असम्बन्धित विवरणों का समावेश न हो । समंक समूहों को चित्रों के माध्यम से चित्रीय प्रभाव (pictorial effect) प्रदान किया जाता हैं चित्रों की रचना करना एक कला है, जिसको व्यवहार से ही प्राप्त किया जा सकता है, परन्तु कुछ सामान्य नियमों के पालन से उनको अधिक प्रभावशील बनाने में योगदान मिलता हैं ये सामान्य नियम निम्नलिखित है :-

1 **आकर्षक (Attractive) -** चित्र आकर्षक व स्वच्छ होने चाहिए, जिससे अनायास ही लोगों का ध्यान उनकी ओर खिंच जाये । उनको निहारना आंखों को भला लगना चाहिए ।

2 **शुद्धता (Accuracy) -** चित्रों के बनाने में जिन ज्यॉमितीय आकृतियों का प्रयोग किया जाये उनकी माप बिल्कुल शुद्ध एवं अनुपात के हिसाब से होनी चाहिए । आकर्षण के लिए शुद्धता का परित्याग नहीं करना चाहिए । अशुद्ध माप से भ्रमात्मक निष्कर्ष निकाले जायेंगे ।

3 **आकार (Size) -** चित्र का आकार कागज के अनुसार होना चाहिए । चित्र न तो बहुत बड़ा होना चाहिए और न बहुत छोटा ही । सामान्यत: चित्र का आकार इतना बड़ा होना चाहिए कि समंकों की महत्वपूर्ण विशेषताओं का प्रदर्शन हो सके । चित्र कागज के मध्य में होना चाहिए तथा उसके चारों और मोटी रेखाएं खींचने से उनकी सुन्दरता बढ़ जाती है।

4 **शीर्षक (Heading) -** प्रत्येक चित्र के ऊपर उचित परन्तु स्पष्ट व संक्षिप्त शीर्षक दिया जाना चाहिए । शीर्षक में इस बात का पता लग जाना चाहिए कि चित्र किन तथ्यों को प्रदर्शित करता है। आवश्यकता हो तो उपशीर्षक भी दिया जाना चाहिए । शीर्षक में समंकों की इकाई का उल्लेख भी होना चाहिए ।

5 **मापदण्ड (Scale) -** चित्र मापदण्ड निर्धारित करने में इसका विशेष ध्यान रखा जाना चाहिए कि आवश्यक विवरणों व उनकी विशेषताओं का भली भांति स्पष्टीकरण हो सके।

कागज के आकार तथा समंकों की प्रकृति के आधार पर मापदण्ड का उल्लेख चित्र के एक कोने में किया जाना चाहिए ।

6 **चित्र खींचना (Drawing) -** प्रभावशाली बनाने के लिए ड्राइंग-उपकरणों (Drawing Instruments) के द्वारा शुद्ध तथा स्वच्छ चित्र बनाना चाहिए । निर्धारित मापदण्ड का पूर्णत: पालन किया जाना चाहिए । रंगों का प्रयोग, बिन्दुओं तथा चिन्हों से चित्र के विभागों का भरना आदि का उचित ध्यान रखा जाना चाहिए । चित्र में कहीं भी दाग-धब्बे नहीं होने चाहिए ।

7 **संकेत (Index) -** चित्र में प्रयुक्त रंगों अथवा चिन्हों द्वारा किन-किन तथ्यों का प्रदर्शन किया गया है, यह चित्र के ऊपर एक कोने में दिया जाना चाहिए । परिचय के लिए संकेत देना आवश्यक हो जाता है ।

8 **उपयुक्त विधि का चुनाव (Selection of Right Method) -** समंकों का चित्रों के माध्यम से प्रदर्शन करने के लिए विभिन्न प्रकार के चित्रों को बनाया जाता है । किन समंकों को किस प्रकार के चित्रों द्वारा प्रदर्शित किया जाये, यह एक सांख्यिकीय तकनीक हैं उचित चित्र का चुनाव समंकों की प्रकृति, प्रदर्शन का उद्देश्य, न्यूनतम तथा अधिकतम मूल्यों आदि पर निर्भर करता है । जहां तक सम्भव हो चित्र समतल होने चाहिए, यद्यपि क्षैतिज चित्र भी बनाये जा सकते हैं उपयुक्त विधि के चुनाव के सम्बन्ध में सी.डब्ल्यू. लोवे (C.W.Lowe) लिखते हैं : "सदैव इस महत्वपूर्ण बात को ध्यान में रखना चाहिए कि किसी भी स्थिति का चित्रमय निरूपण सही सम्बन्धों को दर्शाये और उचित निष्कर्ष इंगित करे । अनुचित्र चित्र का उपयोग तथ्यों का गलत प्रदर्शन कर सकता है और दर्शक को गुमराह कर सकता है । सर्वोपरि बात यह है कि चित्र ईमानदार होना चाहिए ।"

9 **प्रदर्शन (Presentation) -** उन मौलिक समंकों को, जिनके आधार पर चित्र बनाया गया है, उन्हें यथासम्भव चित्र के साथ अथवा उसके निकट देने का प्रयत्न किया जाना चाहिए । समंकों तथा उनके आधार पर बने चित्र का साथ अवलोकन करने पर गलतफहमी की सम्भावना कम हो जाती हैं ।

10 **मितव्ययिता (Economy) -** 'अवलोकनकर्ता जिस शीघ्रता एवं सरलता से चित्र को समझ कर उसका सत्य निर्वचन करता है', यह चित्रमय निरूपण की श्रेष्ठता की कसौटी है । चित्र बनाने में साधन एवं शक्ति का मितव्ययिता पूर्ण उपयोग होना चाहिए ।

एक उत्तम चित्र के आवश्यक गुण (Essential requisites of a good diagram): एक उत्तम व आकर्षक चित्र बनाने के लिए उसके कलात्मक तथा वैज्ञानिक पहलुओं को ध्यान में रखना आवश्यक होता है । सावधानी से बनाया गया चित्र, यदि उचित रूप में न बनाया गया तो उसकी ओर ध्यान आकर्षित नहीं होगा, और उसकी रचना में व्यय, श्रम व धन व्यर्थ जायेगा । इसके विपरीत, यदि कलात्मक ढंग से कोई चित्र बनाया जाये परन्तु उसकी माप आदि गलत हो तो उससे भ्रमात्मक निष्कर्ष निकाले जायेंगे । चित्र का श्रेष्ठ दृष्टिगत प्रभाव पड़ना चहिए । चित्र अधिक

जटिल अथवा गलत चित्रित नहीं होने चाहिए, अन्यथा दर्शकों पर वांछित प्रभाव नहीं पड़ेगा। चित्र का डिजाइन सरल होना चाहिए तथा जहां आवश्यक हो, तुलनाओं का प्रदर्शन किया जाना चाहिए ।

7.5 चित्रों के प्रकार (Kind of Diagram)

7.5.1 एक-विमा चित्र (One-Dimensional Diagrams)

एक विमा चित्र उन चित्रों को कहते हैं जिन्हें बनाने में केवल एक ही विस्तार- ऊँचाई का प्रयोग किया जाता है । ये चित्र (lines) या दण्ड-चित्रों (bar diagrams) के रूप में होते हैं । विभिन्न इकाइयों के माप के आधार पर रेखाओं या दण्ड-चित्रों की ऊंचाई रखी जाती है । दण्ड-चित्रों में चौड़ाई भी प्रदर्शित की जाती है, परन्तु सभी चित्रों की समान चौड़ाई होने के कारण उसका कोई प्रभाव नहीं पड़ता और मापदण्ड से सम्बन्ध भी नहीं होता ।

एक विस्तार वाले चित्र निम्न प्रकार के होते हैं -

1 **रेखा चित्र (Lines Diagrams) -** यदि एक तथ्य से सम्बन्धित पद-मूल्यों की संख्या अधिक हो तथा न्यूनतम व अधिकतम मूल्यों का अनुपात कम हो तो एक उचित मापदण्ड के अनुसार प्रत्येक मूल्य के बराबर लम्बाई की खड़ी या उदग्र (vertical) रेखा खींची जाती है । रेखाओं के बीच में समान अन्तर रखा जाता है । रेखा-चित्र से अधिक संख्या में दिये गये मूल्यों का तुलनात्मक अध्ययन हो जाता है, परन्तु चौड़ाई न होने के कारण इनमें विशेष आकर्षण नहीं होता।

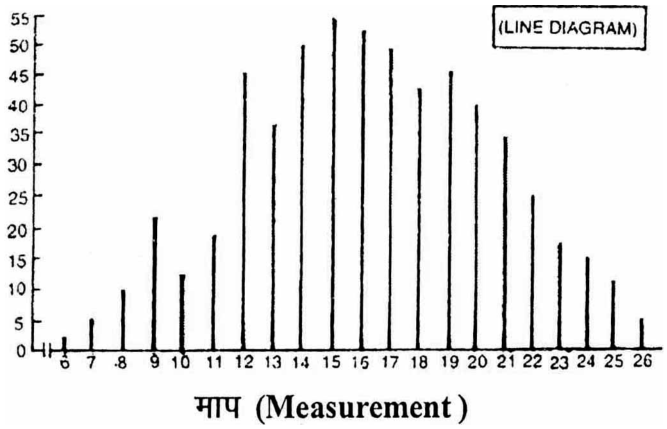
उदाहरण (Illustration) -

Represent the following data by a suitable diagram:

निम्नांकित आंकडों का एक उचित चित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिए ।

X	f	x	f	x	f	x	f
6	2	12	45	18	42	24	15
7	6	13	36	19	46	25	11
9	22	15	54	21	30	27	10
10	12	16	53	22	25		
11	19	17	50	23	17		
						Total	600

हल (Solution) -



2 सरल दण्ड-चित्र (Simple Bar Diagram) - पद मूल्यों के अनुपात में ऊँचाई (या लम्बाई) तथा समान चौड़ाई वाले चित्र सरल दण्ड चित्र कहलाते हैं । इन चित्रों में बराबर अन्तर रखा जाता है । व्यक्तिगत मूल्यों, कालश्रेणी तथा स्थानानुसार समंकश्रेणी के प्रदर्शन के लिए दण्ड-चित्र विशेष रूप से उपयुक्त होते हैं । सरल दण्ड चित्र बनाने के लिए सबसे अधिक मूल्य के आधार पर उचित मापदण्ड निश्चित कर लिया जाता है । फिर सभी दण्ड इस पैमाने के अनुसार बनाये जाते हैं । अधिक आकर्षक बनाने के लिए इनमें रंगों का प्रयोग किया जाता है । ये उदग्र (खड़े) तथा क्षैतिज (पड़े) - दोनों प्रकार से बनाये जा सकते हैं, परन्तु उदग्र दण्ड चित्रों का अधिक प्रयोग किया जाता है ।

उदाहरण (Illustration)

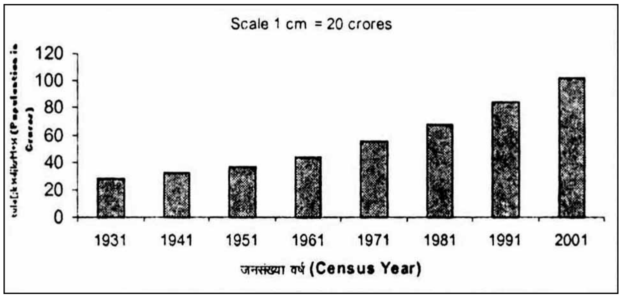
भारतीय जनसंख्या के निम्नांकित आंकड़ों को उपयुक्त चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए-

Represent the following data regarding India's population by a suitable diagram-

वर्ष Year	**जनसंख्या (करोड़ों में) Population in Crores**
1931	27.9
1941	31.9
1951	36.1
1961	43.9
1971	54.8
1981	68.3
1991	84.6
2001	102.7

हल (Solution) -

अधिकतम संख्या 102.7 करोड़ है, अत: 1 cm. = 20 करोड़ का मापदण्ड उपयुक्त रहेगा। प्रत्येक वर्ष की संख्या को 20 से भाग दिया जायेगा और इस प्रकार प्राप्त मूल्य के बराबर सेन्टीमीटर की ऊँचाई का दण्ड-चित्र खींचा जायेगा ।



3 बहुगुणी दण्ड-चित्र (Multiple Bar Diagram) - दो या दो से अधिक सम्बन्धित अंक समूहों की समय या स्थान के आधार पर तुलना करने के लिए बहुगुणी या बहुदण्ड चित्रों का प्रयोग किया जाता है । एक स्थान या समय से सम्बन्धित विभिन्न समूहों के दण्ड-चित्र एक दूसरे से मिलाकर बनाये जाते हैं । फिर थोड़ा रिक्त स्थान छोडकर दूसरे स्थान अथवा समय के दण्ड चित्र बनाये जाते हैं । विभिन्न तथ्यों को प्रदर्शित करने वाले दण्डों को अलग-अलग चिन्हों द्वारा अंकित किया जाता है । दो समूहों तथा तीन समूहों को प्रदर्शित करने वाले बहुगुणी दण्ड-चित्र क्रमश: युगल दण्ड-चित्र (double bars) और त्रिदण्ड चित्र (triple bars) कहलाते हैं ।

4 अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्र (Sub-divided Bar Diagram) - जब समंकों के जोड़ तथा उनके विभिन्न विभागों (sub-divisions) का प्रदर्शन करना हो तो अन्तर्विभक्त दण्ड चित्रों का प्रयोग किया जाता है । इन्हें संघटक दण्ड-चित्र (component bar diagrams) भी कहते हैं । इन चित्रों द्वारा एक समूह से सम्बन्धित विभिन्न उप विभागों के समंकों तथा उनके जोड़ में होने वाले निरपेक्ष परिवर्तनों का यथोचित दिग्दर्शन हो जाता है ।

5 प्रतिशत अन्तर्विभक्त दण्ड-चित्र (Percentage Sub-divided Bars) - एक तथ्य के विभिन्न विभागों से सम्बन्धित समंकों में होने वाले सापेक्ष (relative) परिवर्तनों की आपस में तुलना करने के लिए प्रतिशत आधार पर अन्तर्विभक्त चित्र बनाये जाते हैं । इन्हें बनाने के लिए पहले, जोड़ को 100 मानकर सभी विभागों को प्रतिशत के रूप में बदल लिया जाता है, फिर संचयी प्रतिशत (cumulative percentage) निकाल ली जाती है । इसके बाद उचित मापदण्ड (जैसे, व से.मी. = 10%) के अनुसार 100% के बराबर ऊँचाई के सरल दण्ड चित्र बनाकर उनमें आधार रेखा से संचयी प्रतिशतों के बराबर विभाग काट लिए जाते हैं । विभिन्न विभागों को अलग-अलग चिन्हों द्वारा अंकित कर दिया जाता है ।

7.5.2 दो विस्तार वाले या द्वि-विमा चित्र (Two Dimensional Diagrams)

दण्ड-चित्रों में केवल एक ही विस्तार का ध्यान रखा जाता है, परन्तु द्वि-विमा चित्रों में दो विस्तारों-ऊँचाई तथा चौड़ाई के द्वारा समंकों का चित्रण किया जाता है । इन चित्रों के क्षेत्रफल पद-मूल्यों के अनुपात में होते हैं अत: इन्हें क्षेत्रफल चित्र (area diagram) अथवा धरातल चित्र (surface diagrams) भी कहते हैं ।

द्वि-विमा चित्र निम्न प्रकार के होते हैं -

1 **आयत चित्र (Rectangular Diagram) -** आयत चित्र उस स्थिति में उपयुक्त होते हैं जब विभिन्न उप-विभागों वाली दो या दो से अधिक राशियों की परस्पर तुलना करनी होती है । विभिन्न परिवारों के पारिवारिक बजट की तुलना करने के लिए अधिकतर आयत चित्र का प्रयोग किया जाता है । परिवार की कुल आय को 100 मानकर विभिन्न मदों पर होने वाले व्यय की राशियों को प्रतिशत में बदल दिया जाता है । तत्पश्चात् 100 के बराबर मापदण्ड पर सभी परिवारों के लिए बराबर ऊँचाई वाले आयत बना लिए जाते हैं तथा इनकी चौड़ाई परिवारों की कुल आय के अनुपात में रखी जाती है। व्यय की प्रतिशत राशियों के अनुसार नीचे से ऊपर की ओर विभिन्न खण्ड काट लिए जाते हैं । इस प्रकार इन आयतों के क्षेत्रफल द्वारा कुल आय की तथा विभिन्न उप विभागों द्वारा व्यय की मदों की सापेक्ष तुलना की जा सकती है ।

2 **वर्ग चित्र (Square Diagram) -** जब तथ्यों के न्यूनतम और अधिकतम मूल्यों में काफी अन्तर होता है तो दण्ड चित्र नहीं बनाये जा सकते । उदाहरणार्थ- यदि न्यूनतम और अधिकतम मूल्य क्रमश: 100 और 3600 हो तो सबसे बड़ा दण्ड सबसे छोटे का 36 गुना होगा । अत: इस अनुपात को एक विमा चित्रों द्वारा प्रदर्शित करना लगभग असम्भव है । ऐसी स्थिति में वर्ग चित्रों का प्रयोग किया जाता है । वर्ग बनाने से पहले समंकों का वर्गमूल लिया जाता है फिर वर्गमूलों के अनुपात में वर्गों की रचना की जाती है । 100 और 3600 के वर्गमूल 10 और 60 हैं। यदि एक वर्ग 1 cm. के आधार पर बनाया जाये और दूसरा 6 cm. के आधार पर, तो इन दोनों वर्गो के क्षेत्रफल द्वारा 100 से 3600 का यथोचित चित्रण हो जायेगा । यह आवश्यक है कि सभी वर्ग एक ही क्षैतिज सरल रेखा के आधार पर बनाये जायें जिससे उनकी सरलता से तुलना की जा सके ।

3 **वृत्त चित्र (Circular or Pie Diagram) -** जिन परिस्थितियों में वर्ग चित्रों का प्रयोग उपयुक्त होता है उन्हें बनाने के लिए वृत चित्रों का प्रयोग किया जा सकता है । वृत का क्षेत्रफल उसकी त्रिज्या या अर्द्ध व्यास (radius) के अनुपात में बदलता है । वृत चित्र बनाने में सरल होते हैं और देखने में अधिक चित्ताकर्षक लगते हैं । वर्ग रचना की भांति वृत चित्रों की रचना भी मूल्यों के वर्गमूल निकाल कर की जाती है । वर्गमूलों के अनुपात में वृत्तों की त्रिज्यायें ज्ञात की जाती है जिनके आधार पर उनकी रचना कर ली जाती है। यह ध्यान रखना आवश्यक है कि सभी वृत्तों के केन्द्र एक

सरल क्षैतिज रेखा पर होने चाहिये तथा उन वृत्तों में आपस में बराबर अन्तर रखना चाहिए ।

7.5.3 तीन विस्तार वाले त्रि-विमा चित्र (Three dimensional Diagram)

पद मूल्यों में अधिक विषमता होने की दशा में वर्ग या वृत चित्र बनाना भी कठिन हो जाता है, क्योंकि उनके वर्गमूलों में भी पर्याप्त अन्तर होता है । इस कठिनाई को तीन माप वाले चित्रों की रचना करके सुलझाया जाता है । तीन माप वाले चित्रों को घनफल (Volume) चित्र भी कहते हैं क्योंकि इनमें लम्बाई या ऊँचाई, चौड़ाई या मोटाई तथा गहराई का प्रयोग किया जाता है । इस प्रकार के चित्र घन (Cubes), गोल (Spheres), बेलनाकार (Cylinder), इष्टका (Block), क्रकच (Prism) की आकृतियों में बनाये जाते हैं, परन्तु घन आकृति में बनाना ही सरल होता है। घन की एक भुजा मूल्य के घनमूल (Cube roots) को मापदण्ड में परिवर्तित करके ज्ञात करते हैं । मूल्यों के घनमूल सारणियों को देखकर अथवा लघुगणक (Logarithm) की सहायता से मालूम किये जा सकते हैं । मूल्यों का लघुगणक ज्ञात करके उसमें 3 का भाग देकर प्राप्त राशि की प्रतिलघुगणक (Antilogarithm) संख्या, उस मूल्य का घनमूल होगी ।

7.5.4 चित्र-लेख (Pictograms)

इस रीति के अन्तर्गत समंकों को सम्बन्धित वस्तुओं के आकर्षक चित्रों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है । उदाहरणार्थ - जनसंख्या को मनुष्य के चित्रों द्वारा पंचवर्षीय योजनाओं में सरकार के कुल व्यय को रूपयों की थैली के चित्रों द्वारा तथा इस्पात का उत्पादन इस्पात पिण्ड के चित्र बनाकर प्रदर्शित किया जा सकता है । चित्र समंकों के अनुपात में बनाये जाते हैं । विज्ञापन व प्रचार कार्य में इनका बहु त अधिक प्रयोग किया जाता है । ये अत्यन्त आकर्षक व प्रभावशाली होते हैं । निरक्षर व्यक्ति भी इन्हें आसानी से समझ लेता है । परन्तु इनकी रचना सरल नहीं है । चित्र-लेख द्वारा समंकों का आकर्षक प्रदर्शन करने की रीति का प्रयोग सर्वप्रथम वियना निवासी डॉ. ऑटो न्यूरैथ (Dr. Otto Neurath) ने किया था । इसी कारण चित्र लेख रीति को वियना रीति (Vienna method) भी कहा जाता है ।

7.5.5 मानचित्र (Cartograms)

प्रादेशिक या भौगोलिक समंकों के प्रदर्शन के लिए मानचित्र अधिक उपयुक्त होते हैं । किसी देश में राज्यों की सीमाओं का निरूपण, जनसंख्या का घनत्व, जलवायु या वनस्पति वितरण, कृषि-उपज, औद्योगिक उत्पादन, खनिज पदार्थों का उत्पादन, जल-विद्युत योजनाओं आदि का प्रदर्शन उस देश के मानचित्र पर आकर्षक ढंग से किया जा सकता है । विभिन्न तथ्यों को दिखाने के लिए विभिन्न संकेतों, चिन्हों व रंगों का प्रयोग किया जाता है ।

7.6 समंकों का बिन्दुरेखीय प्रस्तुतीकरण की उपयोगिता (Graphical Presentation of Data)

समंक समूहों का बिन्दुरेखीय प्रदर्शन उन्हें समझने योग्य बनाने की सरल व प्रभावी विधि है । अंग्रेजी शब्द 'ग्राफ' (GRAPH) से बने शब्द ग्राफिक (GRAPHIC) का अर्थ सचित्र अथवा सजीव (vivid or springing of life) है । बिंदुरेखा का उस समंक सारणी के संदर्भ में, जिसे वह प्रदर्शित करती है, वास्तव में यही कार्य है। सांख्यिकीय सामग्री इतनी जटिल होती है कि उसे समझना सामान्य व्यक्ति के लिए कठिन होता है । यद्यपि वर्गीकरण तथा सारणीयन द्वारा उसकी जटिलता को पर्याप्त मात्रा तक दूर कर दिया जाता है, परन्तु फिर भी उसे समझना सरल नहीं होता हे । बहुत समय पूर्व ही सांख्यशास्त्रियों ने अपने शोध परिणामों को बिन्दुरेखा द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। समंक स्वभाव से ही नीरस होते हैं, परन्तु जब विशाल व जटिल समंक समूहों को रेखाओं के माध्यम से प्रस्तुत किया जाता है तो उनको समझना सरल हो जाता है। बिन्दुरेखाओं में उनकी विशेषताएं तत्काल ही दृष्टिगोचर हो जाती हैं । वास्तव में, बिन्दुरेखा समंकों की कहानी सरल रूप में प्रस्तुत कर देती है ।

7.7 बिन्दुरेखा के कार्य (Functions of Graph)

बिन्दुरेखा (1) विश्लेषण के यंत्र (Tools of Analysis) तथा (2) समंकों के प्रदर्शन का कार्य करती है । सांख्यिकीय सामग्री के विश्लेषण में बिन्दुरेखा का प्रयोग अत्यन्त उपयोगी तथा प्रभावी सिद्ध होता है । विश्लेषण के यंत्र के रूप में बिन्दुरेखा (अ) अनुसंधान के नियोजन, उसकी सामान्य विधि तथा उनसे सम्बन्धित गणना कार्य में विश्लेषणकर्ता का मार्गदर्शन करती है, (ब) प्रत्येक स्तर पर होने वाली प्रगति का चित्र प्रस्तुत करती है जिससे परिणामों की सत्यता की जांच हो जाती है, (स) बिन्दुरेखा का प्रयोग गणना कार्य के स्थान पर समय व श्रम बचाने के लिए किया जाता है, तथा (द) गणितीय वक्र (mathematical curve) के स्थान पर मुक्तहस्त वक्र (freehand curve) समंकों की प्रवृत्ति के अधिक अनुरूप बनाया जा सकता है । समंकों के प्रदर्शन का कार्य करने में बिन्दुरेखा, (क) जटिल समंकों को चित्रित करके उन्हें सरल व समझने योग्य बनाती है, तथा (ख) सम्बन्धित तथ्यों को एक स्थल पर निकट ही प्रदर्शित करके उनमें तुलना करना सरल बना देती है ।

7.8 बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के लाभ (Advantages of Graphic Presentation)

बिन्दुरेखा समंकों का प्रदर्शन करने की दृष्टिगत विधि है । सभी प्रकार के समंकों का प्रभावी प्रदर्शन करने के लिए बिन्दुरेखा का प्रयोग किया जा सकता है । "उनकी संरचना उचित ढंग से होने पर, वह उस जानकारी को आसानी से प्रदर्शित करती है, जो

संख्यात्मक सारणीयन के विवरणों में दृष्टिगोचर नहीं हो पाती । एक चित्र अथवा बिन्दुरेखा एक सांख्यिकीय माप से अधिक दर्शाती है, वह प्रवृत्ति जो विद्यमान हो, बताती है तथा वह प्रवृत्ति किस प्रकार परिवर्तित होती है, इसे भी दर्शाती है । यद्यपि यह जानकारी सारणी में निहत होती है परन्तु उसके अस्तित्व का तथा प्रवृत्ति की प्रकृति का निर्धारण सारणीबद्ध समंकों से कठिन, समय लगने वाला और कभी-कभी असम्भव होता है ।" इस प्रकार समंकों के बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के लाभ निम्नलिखित हैं :-

1 **समंकों का बिन्दुरेखीय प्रदर्शन आकर्षक, प्रभावशाली तथा रोचक होता है :** समंकों की सारणी की अपेक्षा बिन्दुरेखीय प्रदर्शन अधिक आकर्षक होता है । नीरस समंक-समूहों में मनुष्य खो जाता है और पर्याप्त गूढ़ अध्ययन के पश्चात् की वह कोई निष्कर्ष निकालने में सफल होता है । समंकों की विशेषताएं बिन्दुओं पर दृष्टि पड़ने पर ही दिख जाती हैं, अत: उनकी प्रवृत्ति तथा उच्चावचनों का अध्ययन आसानी से किया जा सकता है । बिन्दुरेखीय प्रदर्शन का मनोवैज्ञानिक प्रभाव पड़ता है, मनुष्य उसका अवलोकन किये बिना नहीं रह सकता ।

2 **बिन्दुरेखीय प्रदर्शन को समझने के लिए गणित के विशेष ज्ञान की आवश्यकता नहीं होती है:** सामान्य व्यक्ति भी बिन्दुरेखीय प्रदर्शन से सांख्यिकीय तथ्यों की विशेषताएं स्पष्ट रूप से समझ सकता है । बिन्दुरेखा को समझने के लिए गणित के विशिष्ट ज्ञान की आवश्यकता नहीं होती है।

3 **सांख्यिकीय तथ्यों को प्रदर्शित करने में बिन्दुरेखा सरलतम विधि है :** इससे संख्याशास्त्री तथा अवलोकनकर्ता दोनों के समय व श्रम की बचत होती है । उदाहरणार्थ, एक कार्यरत व्यापारी के लिए व्यापार के क्रय, विक्रय, लागत, लाभ आदि से सम्बन्धित आंकड़ों का अध्ययन करके उनकी प्रवृत्तियों को ज्ञात करने के लिए समय नहीं होता । यदि इन तथ्यों से सम्बन्धित आंकड़ों को बिन्दुरेखाओं द्वारा प्रदर्शित किया जाये तो वह कम समय में न्यूनतम प्रयत्नों से उनको समझ सकेगा । बिन्दुरेखा के माध्यम से कालश्रेणी (time series) तथा आवृति वितरण (Frequency distribution) का प्रदर्शन अत्यन्त श्रेष्ठ ढंग से हो सकता है । आवृति-वितरण के बिन्दुरेखीय प्रदर्शन से तुरन्त पता चल जाता है कि वितरण सममितीय है या गैर-सममितीय या वक्र 'J' आकार का या 'U' आकार का ।

4 **बिन्दु रेखाओं के माध्यम से दो सम्बन्धित तथ्यों की तुलना करना सरल होता है** बिन्दु रेखाओं के माध्यम से दो तथ्यों के मध्य पाये जाने वाले सह-सम्बन्ध (Correlation) को स्पष्ट किया जा सकता है।

5 **बिन्दु रेखाओं की सहायता से विभिन्न सांख्यिकीय मापों को ज्ञात किया जा सकता है** स्थिति-माध्यमों (Positional averages); जैसे - मध्यका (median), चतुर्थक (quartiles) भूयिष्ठक अथवा बहुलक (mode) का बिन्दुरेखा की सहायता से अनुमान किया जा सकता है । आन्तरगणन बाह्यगणन (extrapolation), तथा पूर्वानुमान

(forecasting) करने में भी बिन्दुरेखीय विधि अधिक उपयोगी तथा सुविधाजनक होती है।

उपर्युक्त लाभों के कारण ही बिन्दुरेखीय प्रदर्शन का प्रचलन अति सामान्य हो गया है । संख्याशास्त्री वर्ग समंकों के प्रदर्शन की इस विधि का अधिकाधिक उपयोग कर रहा है । वास्तव में, प्रत्येक क्षेत्र में बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की उपयोगिता बढ़ती जा रही है । हबर्ड (Hubbard) के शब्दों, "रेखाचित्र गतिमान व नाटकीय प्रभाव वाले होते हैं । वे किसी घटना को प्रदर्शित कर सकते हैं, प्रत्येक बिन्दु एक तथ्य होता है, प्रत्येक घुमाव एक घटना होती है तथा प्रत्येक वक्र एक इतिहास होता है । जहां कहीं भी समंकों से अभिलेख रखने हों, निष्कर्ष निकालने हों अथवा तथ्यों को बताना हो, वहां रेखाचित्र एक ऐसा अद्‌वितीय साधन प्रदान करते हैं, जिसकी शक्ति का अनुभव हम अभी कर रहे हैं।"

7.9 बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के दोष (Defects of Graphic Presentation)

बिन्दुरेखीय प्रदर्शन पूर्णत: दोषरहित नहीं है । आई.आर वेसेलो (I.R.Vesselo) लिखते हैं, "शीघ्रता से पढ़ने में कुछ सम्बन्धों को आवश्यकता से अधिक महत्व देना और यहां तक कि अ-विद्‌यमान सम्बन्धों को देखना आसान होता है । सोद्देश्य रेखाचित्र-संरचक उन विशेषताओं को, जिन्हें वह सर्वोपरि समझता है, अनुचित महत्व दे सकता है तथा जिन्हें वह बेकार समझता है, उनके महत्व को कम करके दिखा सकता है । रेखाचित्रों .... का प्रयोग बढ़ने के कारण, बुद्धिमान पाठक से चित्र तल के पीछे भी देखने की अपेक्षा करनी चाहिए ।" जे.आर रिगलमैन तथा आई.एन. फ्रिस्वी के अनुसार, "यदि बिन्दुरेखीय प्रदर्शन को सर्वाधिक प्रभावी बनाना है तो जो इनसे अनभिज्ञ हैं उन्हें इनके आधारभूत ढांचे पर विशेष ध्यान देना चाहिए । सरल रेखाचित्रों से भी, उन्हें पूर्णत: समझे बिना, गलत निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं ।" बिन्दुरेखीय प्रदर्शन के प्रमुख दोष निम्नलिखित हैं :-

(1) अनेक व्यक्ति रेखाचित्रों से अनभिज्ञ होते हैं, वे इनको कोई महत्व नहीं देते ।

(2) बिन्दुरेखा केवल समंकों की प्रवृति तथा उनके उच्चावचनों (fluctuations) तक ही प्रदर्शन करती है । समंकों जा वास्तविक मूल्य ज्ञात नहीं होता है । रेखाचित्रों की शुद्धता का भी आभास नहीं हो पाता ।

(3) रेखाचित्र कभी-कभी भ्रमात्मक प्रभाव डालते हैं । रेखाचित्रों के मापदण्डों में परिवर्तन करके प्रवृतियों व उच्चावचनों के महत्व में परिवर्तन किया जा सकता है । दो मापदण्डों से बनाये गये रेखाचित्रों में समंकों के उच्चावचन भिन्न-भिन्न दिखायी देंगे ।

(4) रेखाचित्रों में आंकिक शुद्धता संभव नहीं होती है ।

(5) रेखाचित्रों को उद्धरण (quotation) के रूप में प्रस्तुत करना संभव नहीं होता है ।

(6) समंकों की एक या दो विशेषताएं रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित करना संभव होता है । अधिक विशेषताओं का प्रदर्शन करने से रेखाचित्र जटिल हो जाता है और उससे कुछ भी समझना संभव नहीं होता ।

इन समस्त सीमाओं व कमियों के होते हुए भी रेखाचित्र सांख्यिकीय विश्लेषण से प्राप्त परिणामों को सरल व आकर्षक रूप से प्रस्तुत करते हैं ।

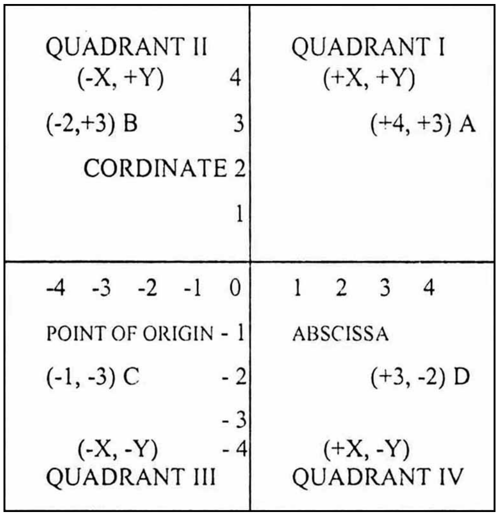
7.10 बिन्दु रेखाचित्र की संरचना (Construction of Graphs)

सामान्यत: बिन्दुरेखीय कागज (Graph Paper) पर दर्शाये जाने वाले बिन्दुओं को आपस में मिला देने से ही मानचित्र की रचना की जाती है । रेखाचित्र बनाने के लिए पहले एक उपयुक्त प्रतिच्छेदन (कटान) बिन्दु (Intersecting Point) को मूल बिन्दु (Point of Origin or o) मान लिया जाता है । इस बिन्दु पर समकोण बनाती हुई दो रेखायें खींच ली जाती हैं । बायें से दायें खींची जाने वाली क्षैतिज रेखा (Horizontal) को भुजाक्ष (Abscissa) या X- अक्ष (X-axis or XX') कहते हैं तथा नीचे से ऊपर की ओर जाने वाली उदग्र रेखा (Vertical line) कोटि अक्ष (Ordinate) या Y-अक्ष (Y-axis or YY) कहलाती है । इस प्रकार सम्पूर्ण बिन्दु-रेखीय पत्र चार भागों में बंट जाता है जिन्हें चरण (Quadrants) कहते हैं ।

बिन्दुरेखीय कागज पर किसी एक बिन्दु को दर्शाने के लिए दो मूल्यों की आवश्यकता होती है- स्वतंत्र चर-मूल्य (independent variable or X-variable) जैसे समय, मध्यबिन्दु या वर्ग सीमाओं आदि को भुजाक्ष (X-axis) के आधार पर दिखलाया जाता है। दर्शाये जाने वाले मूल्य धनात्मक या ऋणात्मक हो सकते हैं । X- श्रेणी के धनात्मक मूल्यों को उदग्र रेखा के दाहिनी ओर वाले चरणों में धनात्मक मूल्यों को इस रेखा के बायीं ओर वाले चरणों में अंकित किया जाता है । इसी प्रकार Y- श्रेणी के धनात्मक मूल्य क्षैतिज रेखा के ऊपर वाले चरणों में तथा ऋणात्मक मूल्य इससे नीचे वाले भागों में दिखलाये जाते हैं । X और Y के धनात्मक मूल्यों (+X,+Y) को मूल-बिन्दु के ऊपर और दाहिनी ओर वाले चरण (Quadrant I) में अंकित किया जाता है । X के धनात्मक और Y के ऋणात्मक मूल्य (+X, -Y) को मूल बिन्दु से नीचे और दाहिनी ओर वाले चरण (Quadrant I.V) में X और Y के ऋणात्मक मूल्यों (-X,-Y) को शून्य बिन्दु के नीचे बायीं ओर वाले चरण (Quadrant III) में तथा X के ऋणात्मक और Y के धनात्मक मूल्यों (-X,+Y) मूल बिन्दु के ऊपर और बायीं ओर वाले चरण (Quadrant II) में दर्शाया जाता है । अगले चित्र में चार बिन्दुओं को दर्शाया गया है :-

बिन्दु	**भुजा (X)**	**कोटि अ (Y)**	**चरण**
A	+4	+3	Quadrant I
B	-2	+3	Quadrant II
C	-1	-3	Quadrant III

D	+3	-3	Quadrant IV



व्यवहार में, प्रथम तथा चतुर्थ, दो चरणों का ही प्रयोग किया जाता है, क्योंकि अधिकतर X और Y के धनात्मक मूल्य होते हैं या X के धनात्मक और Y के ऋणात्मक मूल्य होते हैं । अत: मूल बिन्दु रेखाचित्र में बायीं और निचली ओर कोने में ही रखा जाता है ।

7.11 रेखाचित्र बनाने के नियम (Rules for Constructing a Graph)

निम्नलिखित नियमों को ध्यान में रखकर ही रेखाचित्र की रचना करनी चाहिए-

1 **शीर्षक -** रेखाचित्र का एक उपयुक्त एवं पूर्ण शीर्षक होना चाहिए जिसे देखते ही उसकी विषय वस्तु का आभास हो जाए ।

2 **रेखाचित्र की बनावट -** रेखाचित्रों की बनावट भुजाक्ष (x-axis) पर बायीं ओर से दायीं ओर वाले कोटि अक्ष (y-axis) पर नीचे से ऊपर की ओर होनी चाहिए । स्वतंत्र चर (x) मूल्यों को क्षैतिज पैमाने पर तथा आश्रित चर (y) मूल्यों को उदग्र पैमाने पर प्रदर्शित करना चाहिए । कोटि अक्ष का मापदण्ड शून्य (0) से प्रारम्भ होकर आगे तक जाना चाहिए । यदि कृत्रिम आधार रेखा का प्रयोग किया जाये तो मापदण्ड में अन्तर अवश्य दिखाया जाना चाहिए । x तथा y अक्षों को लिखना चाहिए तथा जिन इकाइयों का प्रयोग किया गया है उन्हें स्पष्ट करना चाहिए । जहां आवश्यक हो दोहरा मापदण्ड प्रयोग किया जाना चाहिए ।

3 **अक्षों का अनुपात -** भुजाक्ष तथा कोटि अक्ष का अनुपात सावधानी से विचार कर निश्चित करना चाहिए । यह अनुपात इस प्रकार का होना चाहिए, जिससे रेखाचित्र देखने में अच्छा लगे तथा आवश्यक जानकारी सुगमता से स्पष्ट हो जाये ।

4 **मापदण्ड चुनाव -** रेखाचित्रण मे उचित मापदण्ड के चुनाव की समस्या आती है । मापदण्ड का चुनाव ऐसा होना चाहिए जिससे सम्पूर्ण समंकों का प्रदर्शन किया जा सके। मापदण्ड के चुनाव के लिए किसी निश्चित नियम का अनुकरण नहीं किया जा सकता, परन्तु डॉ. ए.एन. बॉउले (Dr.A.L.Bowley) के ये शब्द महत्वपूर्ण हैं : "उचित मापदण्ड, जिसके द्वारा समंकों को प्रांकित करना चाहिए के चुनाव के लिए नियम निश्चित करना कठिन है । भुजाक्ष तथा कोटि अक्ष के मापदण्डों के अनुपात को ही केवल विचारगत करने की आवश्यकता है । आकृति इतनी छोटी होनी चाहिए कि यह पूर्ण रूप से एकदम दिखायी दे, यदि आकृति जटिल हो-जो अनेक वर्गों की श्रेणी से सम्बन्धित हो तथा उसमें विभिन्न अंग हों तो इस विचार के आगे सूक्ष्म शुद्धता का त्याग कर देना चाहिए । माना कि भुजाक्ष का मापदण्ड निश्चित किया जा चुका है, तो कोटि-अक्ष के मापदण्ड का चुनाव इस प्रकार किया जाना चाहिए कि वक्र का वह भाग जो कि वृद्धि की अधिकतम दर का प्रदर्शन करता हो वह कोटि अक्ष की ओर अधिक झुका हु आ हो, जिसको पर्याप्त छोटा मापदण्ड अपनाकर किया जा सकता है, तथा दूसरी ओर सभी महत्वपूर्ण परिवर्तन स्पष्ट रूप से दृष्टिगोचर हों । कोई भी मापदण्ड जो इन दोनों आवश्यकताओं को पूरा करता है, उद्देश्य को पूरा कर सकता है ।"

5 **कृत्रिम आधार रेखा का प्रयोग -** मूल बिन्दु सै (शून्य से) मूल्य प्रारम्भ होते हैं । यदि आश्रित चर मूल्य शून्य से पर्याप्त अधिक एक सीमा में ही हो तो सम्पूर्ण कोटि अक्ष का प्रदर्शन करना कठिन हो जाता है । ऐसी दशा में मूल बिन्दु से ऊपर एक उचित मूल्य से पैमाना प्रारम्भ किया जाता है, जिसे कृत्रिम आधार रेखा (False Base Line) कहते हैं । परन्तु मूल बिन्दु का प्रदर्शन अवश्य किया जाता है ।

6 **अनुपात माप श्रेणी का प्रयोग -** आनुपातिक परिवर्तन को प्रदर्शित करने के लिए अनुपात अथवा लघुगणक मापदण्ड (Ratio or Logarithmic Scale) का प्रयोग करना चाहिए।

7 **सारणियों का प्रदर्शन -** रेखाचित्र के साथ-साथ सम्बन्धित समंक सारणी भी दी जानी चाहिए, इससे समंकों का विस्तृत अध्ययन सम्भव हो जाता है और वक्रों की शुद्धता का परीक्षण भी हो जाता है ।

8 **स्पष्ट प्रदर्शन -** रेखाचित्र में प्रत्येक बिन्दु को स्पष्ट रूप से अंकित करना चाहिए । विभिन्न बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा स्पष्ट होनी चाहिए तथा वह समान रूप से ही मोटी अथवा पतली होनी चाहिए । यदि एक चित्र में एक से अधिक रेखाओं का प्रदर्शन करना हो तो विभिन्न प्रकार की रेखाएं खींची जानी चाहिए, जैसे:

सरल रेखा (Unbroken line) ---

टूटी रेखा (Broken line) – – – – – – – – – – – – – – – –

बिन्दु रेखा (Dotted line)

....

बिन्दु विराम रेखा (Dot-dash line) –. –. –. –. –. –. –. –. –. –. –. –.

कटी रेखा (Hatched line) ┼┼┼┼┼┼┼┼┼┼┼┼┼┼┼┼┼┼┼┼┼

9 संकेत - मापदण्डों तथा विभिन्न रेखाओं को संकेत देकर स्पष्ट करना चाहिए ।

10 स्त्रोत - जानकारी के स्त्रोत का उल्लेख किया जाना चाहिए ।

7.12 रेखाचित्रों के प्रकार (Type of Graphs)

बिन्दुरेखीय विधि का प्रयोग निम्न दो प्रकार की समंक-श्रेणियों के प्रदर्शन के लिए किया जा सकता है-

7.12.1 कालिक-चित्र (Histograms)

जब समय के आधार पर क्रमबद्ध (या ऐतिहासिक) समंकों को सतत् वक्रों के रूप में प्रदर्शित किया जाता है तो ऐसे रेखाचित्रों को कालिक चित्र (Histograms) कहते हैं । कालिक चित्रों की रचना में समय (वर्ष, माह आदि) को सदा भुजाक्ष (X-axis) तथा मूल्यों को कोटि अक्ष (Y-axis) पर अंकित किया जाता है । कालिक चित्र दो प्रकार की माप श्रेणियों के आधार पर बनाये जा सकते हैं - (1) प्राकृतिक माप श्रेणी द्वारा, या (2) अनुपात माप-श्रेणी के आधार पर ।

प्राकृतिक माप श्रेणी के कालिक चित्र (Histograms on Natural Scale)- यदि काल श्रेणी से सम्बन्धित निरपेक्ष मूल्यों (absolute values) को साधारण बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रदर्शित करना हो तो प्राकृतिक माप श्रेणी का प्रयोग किया जाना चाहिए । यह माप श्रेणी गणितीय वृद्धि (arithmetic progression) का प्रदर्शन करने के लिए उपयुक्त समझी जाती है । इसके आधार पर यदि कोटि अक्ष पर 1 सेमी. = 10 इकाइयां तो 2 सेमी. = 20 इकाइयां, 3 सेमी. = 30 इकाइयां, आदि । प्राकृतिक माप श्रेणी के कालिक चित्र भी दो प्रकार के हो सकते हैं -

1 **निरपेक्ष कालिक चित्र (Absolute Histogram) -** जब कालिक चित्र के लिए समंक श्रेणी के ही मौलिक समंकों या मूल राशियों को प्रांकित किया जाता है तो उसे निरपेक्ष कालिक चित्र कहते हैं। इसमें निरपेक्ष मूल्यों, जैसे टन, किलोग्राम, किलोमीटर, रूपये आदि का प्रयोग किया जाता है ।

2 **निर्देशाकं कालिक चित्र (Index Histogram) -** जब वास्तविक मूल्यों के स्थान पर उन मूल्यों के सूचकांकों अर्थात् सापेक्ष मूल्यों को बिन्दुरेखीय पत्र पर अंकित किया जाता है तो वह रेखाचित्र निर्देशांक कालिक चित्र कहलाता है ।

7.12.2 आवृति बंटनों के रेखाचित्र (Graphs of Frequency distribution)

आवृति श्रेणी के रेखाचित्र बनाने के लिए आकार, वर्ग सीमायें या मध्य बिन्दु को भुजाक्ष (X-axis) पर तथा आवृत्तियों को कोटि अक्ष (Y-axis) पर रखा जाता है । ये रेखाचित्र निम्न प्रकार के होते हैं -

(1) रेखा आवृति चित्र (Line Frequency Diagram),

(2) आवृति आयत चित्र (Histogram),

(3) आवृति बहुभुज (Frequency Polygon),

(4) आवृति वक्र (Frequency Curve),

(5) संचयी आवृति वक्र (Cumulative Frequency Curve or Ogive) ।

1 रेखा आवृति चित्र (Line Frequency Diagram) - इस चित्र द्वारा खण्डित समंकमालाओं का बिन्दुरेखीय प्रदर्शन किया जाता है । मूल्यों को भुजाक्ष पर तथा आवृत्तियों को कोटि अक्ष पर रखकर प्रत्येक मूल्य के बिन्दु पर उसकी आवृति के माप की ऊंचाई के बराबर लम्ब रेखा खींच दी जाती है ।

उदाहरण (Illustration) -

निम्न समंकों का बिन्दुरेखीय चित्रण कीजिए -

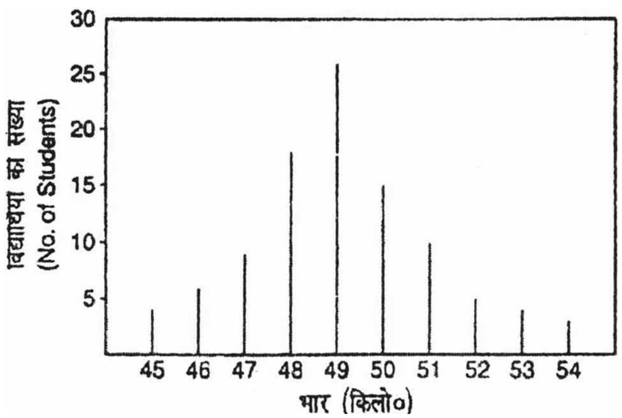
Present the following data graphically-

भार (किलो) Weight (kg.) :	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
विद्यार्थियों की संख्या No. Of Students:	4	6	9	18	26	15	10	5	4	3

हल (Solution) :

विद्यार्थियों का भार

Weight of Student



2 **आवृति-आयत-चित्र (Histogram) -** सतत् समंक श्रेणी का प्रदर्शन करने के लिए आवृति आयत चित्र की रचना की जाती है । आवृति चित्र आयताकार चित्रों का वह समूह होता है जिसमें आयतों की ऊंचाई आकृतियों के अनुपात में रखी जाती है । आवृति आयत चित्र को सोपान चित्र (Staircase Diagram) या खण्ड चित्र (Block Diagram) भी कहते हैं। इसे बनाने के लिए वर्गान्तरों की सीमाओं (Class-limits) को भुजा पर तथा आवृत्तियों को कोटि अक्ष पर प्रदर्शित किया जाता है । फिर प्रत्येक वर्गान्तर की सीमाओं माप बिन्दुओं पर आवृति की ऊँचाई के माप के बराबर लम्ब रेखायें खींचकर आयत चित्र बना लिया जाता है । इस प्रकार सभी वर्गान्तरों के आयत

एक दूसरे से सटे हुए रहते हैं । यदि वर्गान्तर समावेशी हैं तो पहले उन्हें अपवर्जी बना लेना चाहिए ।

बहुलक निर्धारण की बिन्दु रेखीय विधि (Graphic Method of Locating Mode) - सतत् श्रेणी में बिन्दुरेखीय विधि द्वारा बहुलक का निर्धारण आवृति आयत चित्र द्वारा किया जाता है । इसकी विधि निम्न प्रकार है -

(1) सबसे अधिक ऊँचाई वाले आयत को बहुलक वर्ग (Modal Group) का आयत माना जाता है।

(2) सबसे ऊँचे आयत के दाहिनी ओर के ऊपरी कोने को उससे पहले वाले आयत के दाहिनी ऊपरी कोने से मिला दिया जाता है । इसी प्रकार सर्वोच्च आयत के बायें ऊपरी कोने को उससे अगले आयत के बायें ऊपरी कोने को उससे अगले आयत के बायें ऊपरी कोने से मिला देते हैं ।

(3) इन दोनों रेखाओं के प्रतिच्छेद-बिन्दु अर्थात् कटान बिन्दु से भुजाक्ष पर एक लम्बवत् रेखा खींच दी जाती है। यह रेखा जिस बिन्दु पर भुजाक्ष से मिलती है, यही बहुलक मूल्य है।

सतत् श्रेणी में आवृति बहुभुज (Frequency Polygon) या आवृति-वक्र (Frequency Curve) की सहायता से भी बहुलक का मूल्य निर्धारित किया जा सकता है, परन्तु उपर्युक्त रीति अधिक सरल और अधिक शुद्ध है ।

उदाहरण (Illustration) -

निम्न समंकों को आवृति-आयत-चित्र प्रदर्शित कीजिए और बहुलक का मूल्य ज्ञात कीजिए। गणना करके इस मूल्य की जांच कीजिए ।

Represent the following data by a Histogram and locate the value of Mode. Verify your result by calculation.

वर्गान्तर (Class):	0-10	10-20	20-30	0-40	40-50	50-60	60-70
आवृति (Frequency) :	4	8	14	20	30	15	6

हल (Solution) :

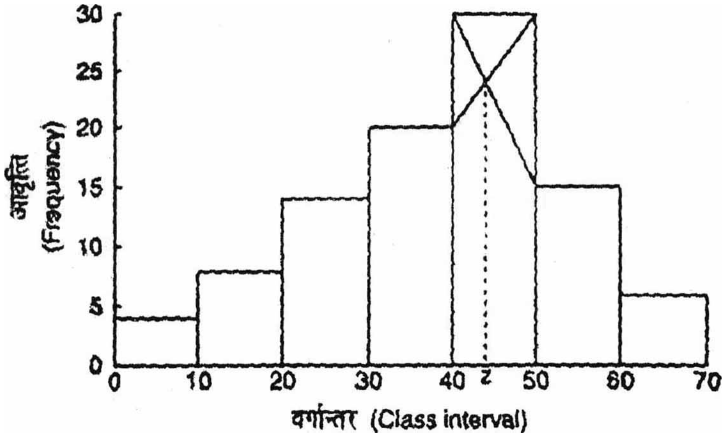
गणना द्वारा बहुलक की जांच -

$$Z = L_1 + \frac{f1 - fo}{2f1 - f0 - f2} \times i = 40 + \frac{30-20}{60-20-15} \times 10 = 40\frac{100}{25} = 44$$

$\therefore$ बहुलक = 44

आवृति चित्र द्वारा बहुलक निर्धारण

(Location of mode by Histogram)



किया जा सकता हे । आवृति बहुभुज बनाने के लिए प्रत्येक आयत के शीर्ष के मध्य बिन्दुओं को सरल रेखाओं द्वारा मिला देते हैं । इसमें यह मान्यता रहती है कि वर्गान्तर में आवृतियों का समान रूप से वितरण है । आवृति बहुभुज का क्षेत्रफल आवृति चित्र के बराबर ही होता है क्योंकि जितना भाग छोड़ा जाता है, उसके बराबर ही भाग शामिल हो जाता है ।

3 **आवृति वक्र (Frequency Curve)** - मुक्तहस्त (Freehand) से आवृति बहुभुज का सरलित (smoothed) रूप आवृति वक्र कहलाता है । आवृति बहुभुज को इस विधि से सरलित किया जाता है कि उसकी कोणीयता (angularity) समाप्त हो जाये और वक्र का क्षेत्रफल उतना ही रहे जितना आवृति बहुभुज का है । एक सरलित आवृति वक्र एक नियमित तथा सतत् वक्र होता है और अगर यह ठीक से बनाया जाये तो आन्तरगणन (interpolation) के लिए भी प्रयोग में लाया जा सकता है ।

आवृति वक्र के भेद (Types of Frequency Curve) - सामान्यत: आवृति वक्र निम्न चार प्रकार के होते हैं -

(i) प्रसामान्य वक्र (Normal Curve) - सममित बंटन (Symmetrical Distribution) में आवृतियां शून्य से धीरे-धीरे बढ़ती हुई अधिकतम आवृति तक पहुंच जाती हैं और फिर वहां से उसी क्रम और गति से धीरे-धीरे घटती हुई शून्य हो जाती हैं । ऐसे वितरण का वक्र घण्टाकार (Bell shaped) होता है । इस वक्र को प्रसामान्य वक्र (Normal Curve) कहा जाता है । सांख्यिकी में इस प्रकार के वक्र का बहुत महत्व है ।

(ii) साधारण असममित वक्र (Moderately Asymmetrical Curve) - ऐसे वितरणों के वक्र साधारण असममित वक्र कहलाते हैं जिनमें आवृतियों के बढ़ने व घटने का क्रम भिन्न होता है । इन वक्रों को विषम वक्र (Skewed Curves) भी कहा जाता है । ये वक्र दो प्रकार के होते हैं - (क) धनात्मक विषमता वाले वक्र (Positively Skewed Curves) जिनमें दाहिना सिरा (tail) अधिक लम्बा होता है, तथा (ख) ऋणात्मक विषमता वाले वक्र (Negatively Skewed Curves)

जिनमें बायीं ओर का सिरा अधिक लम्बा होता है । आर्थिक व सामाजिक क्षेत्र में विभिन्न तथ्यों के अधिकतर साधारण असममित वक्र बनते हैं ।

(iii) अत्यधिक असममित वक्र या J- आकार वाले वक्र (Extremely Asymmetrical Curve or J-shaped Curves) - अत्यधिक विषमता वाले वितरणों के वक्र अंग्रेजी के अक्षर J आकार के होते हैं, अत: इन्हें J आकार वाले वक्र भी कहते हैं । यदि अधिकतम आवृति अन्त में होती है तो वक्र J के स्वरूप का होता है । यदि अधिकतम आवृति अन्त में होती है तो वक्र J के स्वरूप का होता है । यदि अधिकतम आवृति आरम्भ में होती है तो वक्र का आकार विपरीत J जैसा होता है । अधिकतर धन के वितरण के वक्र इसी प्रकार के होते है ।

(iv) 'यू' तथा 'वी' आकार वाले वक्र (U-shaped and V-shaped Curves) - जिन वितरणों में अधिकतम आवृतियां आरम्भ और अन्त में होती हैं तथा न्यूनतम आवृतियां लगभग मध्य में होती हैं उनके आवृति वक्र यू आकार वाले (U-shaped) या वी-आकार वाले (V-shaped) होते हैं । कुछ विशेष प्रकार के समंकों के वक्र U तथा V आकार के होते हैं ।

(v) संचयी आवृति वक्र (Cumulative Frequency Curve or Ogive) - जब वर्गान्तरों की ऊपरी सीमाओं (upper limits) को भुजाक्ष पर तथा संचयी आवृतियों (Cumulative Frequency) को कोटि अक्ष पर अंकित करके वक्र बनाया जाता है तो उसे संचयी आवृति वक्र कहते हैं । इसी वक्र को 'ओजाइव वक्र (Ogive Curve) भी कहा जाता है।

यह दो प्रकार से बनाया जा सकता है - (अ) ऊपरी सीमाओं और बढ़ती हुई संचयी आवृतियों के आधार पर, तथा (ब निचली) सीमाओं और घटती हुई संचयी आवृतियों के आधार पर । प्रथम प्रकार के वक्र को 'Less than Ogive' कहते हैं । इसे बनाने के लिए ऊपरी सीमायें भुजाक्ष (X-axis) पर और संचयी आवृतियां कोटि अक्ष (Y-axis) पर अंकित की जाती हैं । यह वक्र ऊपर की ओर उठा हुआ है । दूसरे प्रकार के वक्र को 'More than Ogive' कहते हैं । इसकी रचना करने के लिए निजी सीमाओं को भुजाक्ष पर और घटती हुई संचयी आवृतियों को कोटि अक्ष पर रखा जाता है । यह वक्र नीचे की ओर गिरता हुआ होता है ।

मध्यका व विभाजन मूल्यों का निर्धारण (Location of Median and Partition Values) - संचयी आवृति वक्र की सहायता से मध्यका (Median) तथा अन्य विभाजन मूल्यों (Partition Values) का निर्धारण किया जा सकता है । मध्यका का मूल्य ज्ञात करने के लिए N/2 द्वारा मध्यका की संख्या निकाल ली जाती है, फिर कोटि अक्ष पर उस संख्या से एक सरल रेखा भुजाक्ष के समानान्तर खींची जाती है । जिस बिन्दु पर यह रेखा संचयी आवृति वक्र को स्पर्श करती है उस बिन्दु से भुजाक्ष पर लम्ब खींच लिया जाता है । अन्त में भुजाक्ष पर इस लम्ब के स्पर्श बिन्दु का

मूल्य ज्ञात कर लिया जाता है । यही मध्यका मूल्य है । इसी प्रकार चतुर्थक, दशमक आदि अन्य विभाजन-मूल्य ज्ञात किये जा सकते हैं ।

उदाहरण (Illustration) -

कर्मचारियों के वजन से सम्बन्धी समंकों से एक ही रेखाचित्र में 'Less than' व 'More than' वक्र बनाइये तथा उससे मध्यका ज्ञात कीजिए ।

Prepare 'less than' and 'more than' curves from the weights of the employees on one graph and find out of median therefrom.

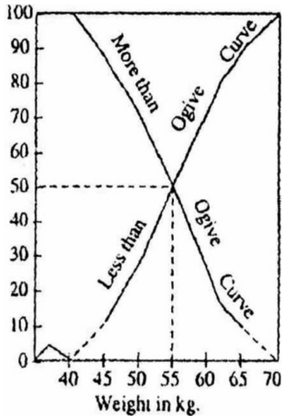
Weight (in kg.)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70
No. of Employees	10	17	23	32	12	6

हल :

Cumulative Frequency Distributions

Weight (in kg.)	No. of Employee	Weight (in kg.)	No.of Employees
Less than 45	10	More than 40	100
Less than 50	27	More than 45	90
Less than 55	50	More than 50	73
Less than 60	82	More than 55	50
Less than 65	94	More than 60	18
Less than 70	100	More than 65	6

Graph Showing Weight of Employees through 'Less than' and 'more than' Ogive Curves



मध्यका निर्धारण की गाल्टन विधि (Galton's Method)

गाल्टन के अनुसार माध्यका ज्ञात करने की विधि निम्न प्रकार है -

1 मूल्यों को X- अक्ष पर तथा आवृतियों को Y- अक्ष पर लिया जाता है ।

2 प्रत्येक मूल्य की आवृति के बराबर बिन्दुओं को रेखाचित्र पर अंकित किया जाता है । इसके लिए एक मूल्य के आवृति बिन्दुओं को एक के ऊपर एक से अंकित किया जाता है और अगले मूल्य के सम्बन्ध में पिछले मूल्य की आवृति के उच्चतम बिन्दु के बाद के प्रांकन प्रारम्भ किया जाता है ।

3 इन बिन्दुओं से होकर एक रेखा इस प्रकार खींची जाती है ताकि मध्य बिन्दु स्पर्श हो जाए और न हो सके तो रेखा बिन्दुओं के लगभग मध्य से होकर गुजरे, यह एक प्रकार से संचयी आवृति वक्र ही बन जाता है ।

4 मध्यका ज्ञात करने के लिए मध्यका संख्या (n/2) जिस स्थान पर वक्र से मिलेगी उससे लेकर Y- अक्ष के समानान्तर एक लम्ब खींच लिया जाएगा जो X- अक्ष पर मध्यका मूल्य बतायेगा ।

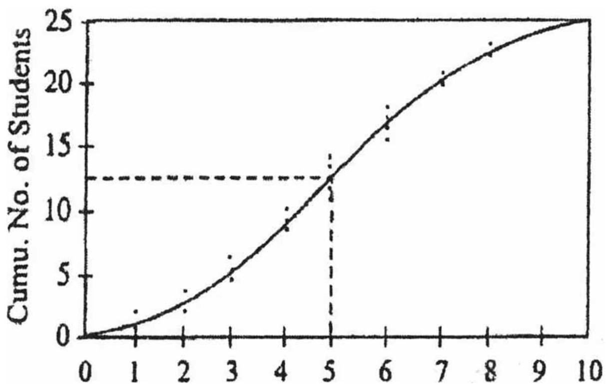
उदाहरण (Illustration)

निम्न आंकड़ों से गाल्टन विधि द्वारा मध्यका मूल्य ज्ञात कीजिए -

Find out the value of Median by Galton's method from the following figures:

Marks	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
No. of Students	1	2	3	3	5	4	2	2	1	1

हल :



मध्यका का मूल्य 5 है जो कि n/2 अर्थात 25/2 = 12.5 आवृति के समकक्ष रेखा खींचकर ज्ञात किया जाता है ।

7.13 सारांश

सांख्यिकीय तथ्यों को **दृश्य** विधियों (Visual Methods) द्वारा इस प्रकार प्रदर्शित किया जाये कि मस्तिष्क पर अनावश्यक रूप से भार भी न पड़े और एक ही दृष्टि में वस्तुस्थिति सरल और स्पष्ट हो जाये । सांख्यिकी में समंकों के आकर्षक प्रदर्शन की दो विधियाँ हैं - (अ) चित्रमय प्रदर्शन, तथा (ब) बिन्दुरेखीय प्रदर्शन ।

सांख्यिकीय तथ्यों को रोचक एवं आकर्षक ज्यॉमितीय आकृतियों (Geometrical Figures) या लेखाचित्रों (Charts) जैसे - दण्ड चित्र, आयत-चित्र, वृत आदि अथवा

चित्रों (Pictures) या मानचित्रों (Maps) के रूप में प्रदर्शित करने की क्रिया चित्रमय प्रदर्शन कहलाती है ।

समंकों का बिन्दुरेखीय प्रदर्शन रेखा-पत्र पर पूर्व-निर्धारित मापदण्ड के अनुसार प्रांकित बिन्दुओं को आपस में मिलाने से बनी रेखाओं व वक्रों के रूप में किया जाता है । बिन्दुरेखीय प्रदर्शन समंकों को प्रस्तुत करने का आकर्षक एवं प्रभावशाली साधन है । इससे एक ही दृष्टि में समंकों का अर्थ समझने और उनकी तुलना करने में सहायता मिलती है ।

बिन्दुरेखीय चित्रों की संरचना, रेखाचित्र बनाने के नियम तथा रेखाचित्रों के प्रकारों को भलीभांति विस्तृत रूप में समाहित किया गया है । बिन्दुरेखीय विधि का प्रयोग दो प्रकार की समंक श्रेणियों अर्थात् कालिक चित्र एवं आवृत्ति चित्र के प्रदर्शन के लिये किया गया है ।

7.14 पारिभाषिक शब्द

(i) चित्रमय प्रदर्शन : नीरस समंकों को चित्रों के माध्यम से प्रदर्शित करके उन्हें रोचक तथा अर्थपूर्ण बनाना ही चित्रमय प्रदर्शन है ।

(ii) एक विमा चित्र : वे चित्र जिन्हें बनाने में केवल एक ही विस्तार-ऊँचाई का प्रयोग किया जाता है ।

(iii) रेखाचित्र : एक उचित मापदण्ड के अनुसार प्रत्येक मूल्य के बराबर लम्बाई की खड़ी या उदग्र रेखा खींचकर बनाये जाते हैं ।

(iv) दण्ड चित्र : पद मूल्यों के अनुपात में ऊँचाई (या लम्बाई) तथा समान चौड़ाई वाले चित्र दण्ड चित्र कहलाते हैं ।

(v) द्वि-विमा चित्र : दो विस्तारों - ऊँचाई तथा चौड़ाई के द्वारा समंकों का चित्रण किया जाता है ।

(vi) त्रि-विमा चित्र : लम्बाई या ऊँचाई या मोटाई तथा गहराई का प्रयोग करके घन, गोल, बेलनाकार, इष्टका आदि आकृतियों में बनाये जाते हैं ।

(vii) चित्र-लेख : समंकों से सम्बन्धित वस्तुओं के आकर्षक चित्रों द्वारा प्रदर्शित करना, चित्रलेख कहलाता है ।

(viii) मानचित्र : प्रादेशिक या भौगोलिक समंकों के प्रदर्शन के लिए मानचित्र अधिक उपयुक्त होते हैं । इनमें संकेतों, चिन्हों व रंगों का प्रयोग होता है ।

(ix) बिन्दुरेखीय प्रदर्शन : विशाल एवं जटिल समंक समूहों को रेखाओं के माध्यम से प्रस्तुत करना ही बिन्दुरेखीय प्रदर्शन कहलाता है ।

(x) कृत्रिम आधार रेखा : मूल बिन्दु से ऊपर एक उचित मूल्य से पैमाना प्रारम्भ करना ही कृत्रिम आधार रेखा कहलाती है ।

(xi) कालिक चित्र : समय के आधार पर क्रमबद्ध समंकों को सतत् वक्रों के रूप में प्रदर्शित किया जाता है ।

(xii) आवृत्ति-आयत चित्र : सतत् समंक श्रेणी का प्रदर्शन करने के लिए बनाते हैं जिसमें आयतों की ऊँचाई आवृत्तियों के अनुपात में रखी जाती है ।

(xiii) आवृत्ति बहुभुज : प्रत्येक आयत के शीर्ष के मध्य बिन्दुओं को सरल रेखाओं द्वारा मिलाने से बनता है ।

(xiv) आवृत्ति वक्र : मुक्त हस्त से आवृत्ति बहुभुज कार सरलित (Smoothed) रूप आवृत्ति वक्र कहलाता है ।

(xv) संचयी आवृत्ति वक्र : वर्गान्तरों की ऊपरी सीमाओं को भुजाक्ष पर तथा संचयी आवृत्तियों को कोटि अक्ष पर अंकित करके बनाये जाने वाला वक्र, संचयी आवृत्ति वक्र कहलाता है । इसे 'ओजाइव' वक्र भी कहते हैं।

7.15 निबन्धात्मक प्रश्न (Essay Type Question)

1. सांख्यिकी में चित्रों की आवश्यकता तथा महत्व स्पष्ट कीजिए । एक उत्तम चित्र की रचना में किन-किन सावधानियों को ध्यान में रखना चाहिए?

Show Cleary the necessity and importance of diagram in statistics. What precautions should be taken in drawing a good diagram?

2. तथ्यों के चित्रमय प्रदर्शन की उपयोगिता की विवेचना कीजिए । इसके गुण दोष बताइए। Explain the importance of diagrammatic representation of facts. Explain its merits and demerits.

3. चित्र समंकों के समझने में कोई योगदान नहीं करते, परन्तु उनके विवेकपूर्ण निर्माण और अध्ययन से वर्गो और मालाओं की प्रमुख विशेषताएं स्वयं स्पष्ट हो जाती हैं । इस कथन की विवेचना कीजिए और विभिन्न प्रकार के चित्रों का संक्षिप्त वर्णन कीजिए।

Diagrams do not add anything to the meaning of statistics but when drawn and studied intelligently they bring to view the salient characteristics of group and series. 'Discuss this statement describing briefly the various types of diagrams'

4. सांख्यिकीय तथ्यों का प्रदर्शन करने के लिए सामान्यत: जिन विभिन्न प्रकार के चित्रों का प्रयोग किया जाता है उनका संक्षिप्त वर्णन कीजिए ।

Give a brief description of the different kind of diagrams generally used to present statistical data.

5. बिन्दुरेखीय प्रदर्शन से आप क्या समझते हैं? इसके लाभ-हानि और विभिन्न प्रकारों की विवेचना कीजिए ।

What do you understand by graphical presentation? Describe its advantages and various forms.

6. रेखा का घुमाव मस्तिष्क को प्रभावित करने में सारणीकृत विवरण की अपेक्षा कहीं अधिक शक्तिशाली होता है, वह उतनी शीघ्रता से यह प्रदर्शित करने में समर्थ है कि क्या हो रहा है और क्या होने वाला है, जितनी शीघ्रता से यह कार्य हमारी आंख करने में समर्थ है?- बाडिंगटन । उपर्युक्त कथन के प्रकाश में, बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की उपयोगिता का विवेचन कीजिए ।

"The wandering of a line is more powerful in its effect on the mind than a tabulated statement, it shows that is happening and what is likely to take place just as quickly as the eye is capable of working.' - Boddington. In the light of the above statement, discuss the utility of graphic presentation.

7. एक उचित रेखाचित्र बनाने के मुख्य नियमों की व्याख्या कीजिए । सारणी और चित्रों में अन्तर स्पष्ट कीजिए ।

Explain the main rules for the construction of a suitable graph. Elucidate the difference between tables and diagrams.

8. कृत्रिम आधार रेखा क्या है? बिन्दु रेखाचित्र के निर्माण में इसकी उपयोगिता स्पष्ट कीजिए ।

What is false Base line? Explain its utility in construction of graphs.

9. ओजाइव वक्र या संचयी आवृति वक्र से आप क्या समझते हैं? एक सांख्यिकीय उदाहरण देकर ऐसा वक्र बनाइए ।

What do you understand by Ogive or Cumulative frequency curve? Draw such a curve on the basis of a statistical example.

7.16 व्यावहारिक प्रश्न (Practical Questions)

1 एक कक्षा के 25 विद्यार्थियों की ऊंचाई (सेण्टीमीटर में) आंकडे निम्नांकित हैं । उक्त समंकों का रेखा चित्र द्वारा निरूपण कीजिए-

Heights (in cms.) of 25 students of a class are given bellow., Reperesnt these figures by a line digram.

150; 151; 153; 155; 155; 156; 157; 157; 158; 159; 160; 162; 162; 162; 163; 165; 168; 170; 170; 171; 174; 175; 179; 180; 180;

2 निम्नलिखित सारणी में भारत के भुगतान अवशेष में कुछ वर्षो के चालू खाता घाटे (मिलियन डॉलर में) के आंकडे दिए गए हैं । सरल दण्ड चित्रों द्वारा उक्त समंकों का निरूपण कीजिए -

The following table gives the data relating to India's Current Account Deficit (in US $ million) in the Balance of Payments for the last few years. Represent the same by simple bar diagrams-

वर्ष Year	2000-01	2001-02	2002-03	2003-04	2004-05	2005-06	2006-07
घाटा Deficit	9680	1178	3526	1158	2634	5434	4860

3 भारतीय रेलों की वर्ष 2006 में पथ लम्बाई (किलोमीटर में) के निम्नांकित समंकों को उपयुक्त चित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिए -

Represent the following route kilometer age of Indian Railways in 2006 by a suitable diagram-

Railway Zone	***Route kilometer age***
Southern	7.021
Central	7.158
Western	9.727
Northern	10.993
North-Eastern	5.144
North-East Frontier	3.728
Eastern	4.303
South-Eastern	7.161
South Central	7.227

4 निम्न आंकडों को एक ग्राफ पेपर पर प्रस्तुत कीजिए -

5 Graphically present the following data -

6 वर्ष Year 1996 1997 1998 1999 2000 2001 2002 2003 2004 2005 2006

7 सूचकांक Index Numbers 139 134 140 157 148 160 180 189 245 281 301

8 निम्न आंकडों को एक उपयुक्त रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए -

9 Present the following data by a suitable graph-

10 वर्ष Year 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

11 सूचकांक Index Numbers 133 138 141 149 159 150 152 165 168

7.17 संदर्भ (Books Recommended)

1 शर्मा, जैन, पारीक : व्यावसायिक सांख्यिकी

2 कैलाश नाथ नागर : सांख्यिकी के मूल तत्व

3 यादव, जैन, मित्तल : व्यावसायिक सांख्यिकी

4 S.P. Gupta : Statistical Methods

5 Sancheti, Kapoor : Statistics (Theory Methods & Application)

6 D.N. Elhance : Fundamentals of Statistics

7 Garg, Sharma, Jain, Pareek : Business Statistics

इकाई-8 : केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप (Measures of Central Tendency)

इकाई की रूपरेखा :

8.0 उद्देश्य

8.1 परिचय

8.2 सांख्यिकीय माध्यों का अर्थ एवं परिभाषा

8.3 सांख्यिकीय माध्यों के उद्देश्य एवं कार्य

8.4 आदर्श माध्य के आवश्यक लक्षण

8.5 सांख्यिकीय माध्यों के प्रकार

8.6 स्थिति सम्बन्धी माध्य

(1) बहुलक

(अ) बहुलक की गणना (ब) बहुलक के गुण अथवा लाभ

(स) बहुलक के दोष

(2) मध्यका

(अ) मध्यका का परिकलन (ब) मध्यका के प्रयोग

(स) मध्यका के गुण (द) मध्यका के दोष

8.7 गणितीय माध्य

1. समान्तर माध्य
2. समान्तर माध्य के प्रकार
3. सरल समान्तर माध्य की गणना
4. समान्तर माध्य के गुण
5. समान्तर माध्य के दोष
6. भारित समान्तर माध्य
7. भारित समान्तर माध्य की गणना

8.8 गुणोत्तर माध्य

1. गुणोत्तर माध्य के गुण
2. गुणोत्तर माध्य के दोष

8.9 हरात्मक माध्य

1. हरात्मक माध्य के गुण
2. हरात्मक माध्य के दोष

8.10 सारांश

8.11 शब्दावली

8.12 स्वपरख प्रश्न

8.13 उपयोगी पुस्तकें

8.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि:-

- केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप का अर्थ समझ सकें ।
- सांख्यिकीय माध्यों का अर्थ, परिभाषा, उद्देश्य एवं कार्य की जानकारी प्राप्त कर सकें ।
- आदर्श माध्य के लक्षण जान सकें ।
- सांख्यिकीय माध्यों के प्रकार जान सकें ।
- बहुलक, मध्यका तथा समान्तर माध्य गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य की जानकारी प्राप्त कर विभिन्न श्रेणियों के अन्तर्गत उनकी गणना एवं प्रयोग सीख सकें ।

8.1 परिचय (Introduction)

मानवीय मस्तिष्क में इतनी क्षमता नहीं होती है कि वह जटिल समंकों को भली-भाँति समझ व तुलना कर सकें । अतएव सांख्यिकीय समंकों का वर्गीकरण एवं सारणीयन की रीतियों द्वारा संक्षिप्त करके आवृत्ति-बंटन के रूप में व्यक्त किया जाता है । परन्तु इन विधियों से केवल समंकों को सरल और बोधगम्य बनाया जाता हैं इनसे समंकों की सभी महत्त्वपूर्ण विशेषतायें स्पष्ट नहीं होती है । अतएव सांख्यिकीय सामग्री का विश्लेषण करना अत्यन्त आवश्यक है । आर.ए. फिशर के अनुसार, "संख्यात्मक तथ्यों के विशाल समूह को पूर्णरूपेण समझने की मानव मस्तिष्क की अन्तर्निहित अयोग्यता, हमें ऐसे अपेक्षाकृत थोडे अचर या स्थिर माप उपलब्ध करने को बाध्य करती है, जो समंकों की पर्याप्त रूप से व्याख्या कर सकें ।" इसीलिए सांख्यिकीय विज्ञान में सांख्यिकीय माध्यों का महत्त्वपूर्ण स्थान है ।

8.2 सांख्यिकीय माध्यों का अर्थ एवं परिभाषा (Meaning and Definition of Statistical Averages)

सांख्यिकीय अनुसंधान में माध्यों अथवा औसत का एक विशेष स्थान है । प्रत्येक समंक-श्रेणी में एक ऐसा बिन्दु होता है जिसके आसपास अन्य समंकों के एकत्र होने की प्रवृत्ति पाई जाती है । यह मूल्य उस समंक श्रेणी के महत्त्वपूर्ण लक्षणों का प्रतिनिधित्व करता है तथा लगभग केन्द्र में स्थित होता है । सांख्यिकी में, ऐसा मूल्य जो सम्पूर्ण समंक श्रेणी को केन्द्रीय प्रवृत्ति के सरल एवं सारांश रूप में व्यक्त करता है, केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप या माध्य कहलाता है । प्रो. क्रॉक्सटन तथा काउडेन के अनुसार, "माध्य समंकों के विस्तार के अन्तर्गत स्थित एक ऐसा अकेला मूल्य है जिसका प्रयोग श्रेणी के सभी मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है चूँकि माध्य सदैव समंकों के विस्तार के अन्तर्गत ही पाया जाता हैं इसलिए इसे प्राय: केन्द्रीय प्रवृत्ति या केन्द्रीय मूल्य का माप भी कहा जाता है । सिम्पसन एवं काफ्का के

अनुसार, “केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप एक ऐसा प्रतिरूपी मूल्य है जिसके चारों ओर अन्य संख्याएँ संकेन्द्रित होती हैं ।”

8.3 सांख्यिकीय माध्यों के उद्देश्य एवं कार्य (Objectives and Functions of Statistical Averages)

सांख्यिकीय माध्यों के निम्नलिखित कार्य व उद्देश्य होते हैं-

1 संक्षिप्त रूप में प्रस्तुतीकरण : माध्यों द्वारा संकलित सामग्री को सरल, स्पष्ट एवं संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत किया जाता है ताकि उपयोगकर्ता शीघ्रता एवं सरलता से संकलित तथ्यों को समझ सके ।

2 तुलनात्मक अध्ययन की सुविधा प्रदान करना : माध्यों की सहायता से दो या अधिक समूहों का तुलनात्मक अध्ययन सरलता से किया जा सकता है । जैसे- भारत और चीन की औसत प्रति व्यक्ति आय की तुलना करके उचित परिणाम निकाले जा सकते है ।

3 सम्पूर्ण समूह का प्रतिनिधित्व करना : माध्यों द्वारा प्रतिदर्श के अध्ययन के आधार सम्पूर्ण समग्र के बारे में पर्याप्त जानकारी प्राप्त की जा सकती है । प्रतिदर्श माध्य के आधार पर समग्र के माध्य का अनुमान लगाया जा सकता हैं ।

4 सांख्यिकीय विवेचन का आधार : माध्य सांख्यिकीय विवेचन का आधार होते है । सांख्यिकीय विश्लेषण की अनेक क्रियाएं यथा - अपकिरण विषमता, सहसम्बन्ध, प्रतीपगमन आदि माध्यों के आधार पर ज्ञात की जाती है ।

5 भावी योजनाओं का आधार : माध्यों से ऐसे मूल्य ज्ञात किये जाते हैं जो भावी योजनाओं के लिए आधार स्तम्भ का कार्य करते हैं । माध्य भावी क्रियाओं एवं नीतियों के निर्धारण में मार्गदर्शन देते हैं ।

8.4 आदर्श माध्य के आवश्यक लक्षण (Essential Features of An Ideal Average)

1 सरल : आदर्श माध्य वही होता हैं जिसे ज्ञात करने व समझने में कठिनाई न हो । माध्य ऐसा होना चाहिए जो आसानी से निकाला जा सके ।

2 स्पष्ट : आदर्श माध्य स्पष्ट होना चाहिए । स्पष्ट होने से अनुसंधानकर्ता को अनुमान लगाने की जरूरत नहीं पड़ती है ।

3 सभी मूल्यों पर आधारित : एक आदर्श माध्य सम्पूर्ण श्रेणी के पद मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने वाला होना चाहिए । सभी मूल्यों पर आधारित न होने वाले माध्य को असंतोषजनक माना जाता है ।

4 निश्चित : आदर्श माध्य एक निश्चित संख्या में होना चाहिए ।

5 प्रतिचयन के परिवर्तनों का न्यूनतम प्रभाव : एक आदर्श माध्य वही माना जाता हैं जिसमें प्रतिचयन के परिवर्तनों का न्यूनतम प्रभाव पड़े अर्थात एक ही समग्र से निकाले गये विभिन्न प्रतिदर्शो के माध्यों में लगभग समानता होनी चाहिए ।

6 निरपेक्ष मूल्य : आदर्श माध्य निरपेक्ष होना चाहिए न कि सापेक्ष मूल्य ।

7 बीजगणितीय विवेचन सम्भव होना : आदर्श माध्य ऐसा होना चाहिए जिससे उसका बीजगणितीय विवेचन आसानी से किया जा सके । जैसे - दो समंक श्रेणियों के माध्य ज्ञात हो तो उनकी सहायता से सामूहिक माध्य भी ज्ञात हो जाना चाहिए ।

8.5 सांख्यिकीय माध्यों के प्रकार (Kinds of Statistical Averages)

सांख्यिकी में निम्नलिखित माध्य ज्ञात किये जाते है-

(अ) स्थिति-सम्बन्धी माध्य (Positional Averages)

(i) बहुलक (Mode)

(ii) मध्यका (Median)

(ब) गणितीय माध्य (Mathematical Averages)

(i) समान्तर माध्य (Arithmetic Averages)

(ii) गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)

(iii) हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

(iv) द्विघातीय माध्य (Quadratic Mean)

(स) व्यापारिक माध्य (Business Averages)

(i) चल माध्य (Moving Average)

(ii) प्रगामी या संचयी माध्य (Progressive Average)

(iii) संग्रहित माध्य (Composite Average)

8.6 स्थिति सम्बन्धी माध्य (Positional Averages)

इन माध्यों का निर्धारण सामान्यत: निरीक्षण मात्र से ही हो जाता है । स्थिति सम्बन्धी माध्य से आशय ऐसे मूल्य से है जिन्हें श्रेणी के अन्तर्गत स्थिति के आधार पर परिकलित किया जाता है । स्थिति माध्य में बहुलक तथा मध्यका को सम्मिलित किया जाता है । अब हम इनका विस्तार से अध्ययन करेंगे :-

(i) बहुलक (Mode)

किसी श्रेणी में सर्वाधिक पुनरावृत्ति वाले मूल्य को बहुलक कहते है अर्थात् वह मूल्य जो समंक माला मे सबसे अधिक बार आता हो । इसे 'भूयिष्ठक' नाम से भी जाना जाता है। क्रॉक्सटन एवं काउडेन के अनुसार 'एक समंक बंटन का बहुलक वह मूल्य है जिसके निकट श्रेणी की इकाइयाँ अधिक से अधिक केन्द्रित होती हैं । उसे मूल्यों की श्रेणी का सबसे अधिक प्रतिरूपी मूल्य माना जा सकता है ।' यदि यह कहा जाए कि एक फैक्ट्री में 500 श्रमिक कार्य करते है उनकी बहुलक मजदूरी 2000/- रूपये मासिक है तो इसका अभिप्राय है कि फैक्ट्री में जितने भी श्रमिक कार्य करते है उनमें से सबसे अधिक संख्या 2000 रूपये प्रतिमाह मजदूरी पाने वालों की है, लेकिन यहाँ इसका

तात्पर्य यह नहीं है कि किसी भी श्रमिक की मजदूरी 2000 रूपये से कम या अधिक नहीं है । बहुलक को संकेताक्षर 'Z' द्वारा व्यक्त करते है ।

(अ) बहुलक की गणना (Calculation of Mode)

बहुलक को अधिकतम आवृत्ति का मूल्य होने के कारण निरीक्षण द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता हैं । बहुलक की गणना की विधि विभिन्न श्रेणियों पर निर्भर करती हैं जो निम्न प्रकार हैं-

(1) व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक का निर्धारण

व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक निम्नलिखित तरीकों से निर्धारित किया जाता है :-

1.1 निरीक्षण के द्वारा

1.2 व्यक्तिगत श्रेणी को खण्डित श्रेणी में परिवर्तित करके

1.3 मध्यका एवं समान्तर माध्य की सहायता से

1.1 निरीक्षण द्वारा बहुलक का निर्धारण - व्यक्तिगत श्रेणी में निरीक्षण द्वारा बहुलक निर्धारण में जिस पद की सर्वाधिक आवृत्ति होती है वही बहुलक होता है ।

उदाहरण : 1

एक कक्षा के 15 छात्रों के गणित विषय में प्राप्तांक निम्न हैं, बहुलक ज्ञात कीजिए-

4, 6, 5, 8, 5, 6, 6, 7, 4, 2, 4, 6, 6, 7, 8

हल : निरीक्षण द्वारा स्पष्ट होता है कि प्राप्तांक 6 सर्वाधिक बार (5 बार) आया हैं अत: कक्षा के 15 छात्रों के गणित में बहुलक अंक '6' हैं ।

1.2 व्यक्तिगत श्रेणी को खण्डित श्रेणी में परिवर्तित करके बहुलक का निर्धारण - जब व्यक्तिगत श्रेणी के अनेक मूल्य दो या दो से अधिक बार पाये जाते हैं तो उन्हें आरोही क्रम के अनुसार लिखकर उनके सामने उनकी आवृत्ति लिख देते है । फिर निरीक्षण द्वारा यह देखते हैं कि किस मूल्य की सर्वाधिक आवृत्ति है । सर्वाधिक आवृत्ति का मूल्य ही बहुलक होता है ।

उदाहरण : 2

किसी कक्षा के 20 विद्यार्थियों की आयु का बहुलक ज्ञात कीजिए :

7, 8, 10, 5, 10, 6, 8, 11, 5, 9, 3, 5, 4, 8, 5, 12, 10, 5, 6, 5

हल : पहले इन व्यक्तिगत समंकों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करेंगे-

पद-मूल्य (छात्रों की आयु वर्षों में)	**आवृत्ति**
3	1
4	1
5	6
6	2

7	1
8	3
9	1
10	3
11	1
12	1

उपर्युक्त पद-मूल्यों की आवृत्तियों के निरीक्षण से स्पष्ट होता हैं कि सर्वाधिक आवृत्ति (6 बार) पद मूल्य 5 वर्ष की है । अत: छात्रों की आयु का बहुलक 5 वर्ष होगा ।

1.3 मध्यका व समान्तर माध्य की सहायता से बहुलक का निर्धारण

व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक का निर्धारण निम्न सूत्र द्वारा भी कर सकते है :-

सूत्र : $Z = 3M - 2\overline{X}$

संकेताक्षर Z = बहुलक

M = मध्यका

$\overline{X}$ = समान्तर माध्य

1 खण्डित श्रेणी में बहुलक का निर्धारण - खण्डित श्रेणी में बहुलक निर्धारण निम्न तरीकों से किया जा सकता हैं-

2.1 निरीक्षण द्वारा

2.2 समूहन द्वारा

2.3 घनत्व द्वारा

2.1 निरीक्षण द्वारा: इस प्रणाली में आवृत्तियों का निरीक्षण किया जाता है तथा मालूम किया जाता है कि सर्वाधिक आवृत्ति किस मूल्य की है । जिस पद की आवृत्ति सबसे अधिक होती हैं वही बहुलक होता है ।

उदाहरण : 3

मजदूरी (हजार रूपयों में)

बहुलक ज्ञात कीजिए-	6	8	12	16	9	10	18	14
व्यक्तियों की संख्या (आवृत्ति)	1	6	11	5	2	8	5	7

हल : निरीक्षण विधि द्वारा ज्ञात होता है कि 12000 रूपये ऐसी मजदूरी है जिसकी आवृत्ति सबसे अधिक 11 व्यक्ति है अत: बहुलक Z = 12000 रूपये है ।

2.2 समूहन प्रणाली - जब आवृत्तियों का क्रम नियमित नहीं होता है तथा अधिकतम आवृत्ति को ज्ञात करना कठिन होता है तो समूहन रीति द्वारा बहुलक की गणना की जाती है । अनियमित आवृत्तियाँ तब मानी जाती है जब (1) आवृत्ति अनियमित प्रकार से घटे या बढ़े (2) अधिकतम आवृत्ति दो या इससे अधिक स्थानों पर हो (3)

अधिकतम आवृत्ति बिल्कुल प्रारम्भ अथवा अन्त में हो (4) अधिकतम आवृत्ति के दोनो ओर की आवृत्तियाँ बहुत भिन्न हों ।

परिकलन की विधि :-

प्रारम्भ में एक छः खानों वाली सारणी तैयार की जाती है । इन 6 खानों में आवृत्तियों को दो-दो और तीन-तीन के समूहों में समूहन निम्न क्रम से किया जाता है -

(1) प्रथम खाने में, प्रश्न में दी हुई आवृत्ति ही लिख दी जाती है ।

(2) दूसरे खाने में, आरम्भ से दो-दो आवृत्तियों का योग लिखते हैं ।

(3) तीसरे खाने में पहली आवृत्ति को छोड़कर दो-दो आवृत्तियों का योग लिखते हैं ।

(4) चौथे खाने में, तीन-तीन आवृत्तियों का योग लिखते हैं ।

(5) पाँचवे खाने में, पहली आवृत्ति को छोड़कर तीन-तीन आवृत्तियों का योग लिखते हैं।

(6) छठे खाने में, प्रथम दो आवृत्तियों को छोड़कर तीन-तीन आवृत्तियों का योग लिखते हैं ।

उपर्युक्त प्रक्रिया से समूहन करने के बाद प्रत्येक खाने की अधिकतम आवृत्ति अथवा आवृत्ति समूह को रेखांकित (चिन्ह) कर दिया जाता है । जिस मूल्य के सामने अधिकतम चिन्ह होते है वही बहुलक मूल्य होता है।

उदाहरण : 4

एक कक्षा के छात्रों के निम्न प्राप्तांकों से बहुलक ज्ञात कीजिए-

प्राप्तांक	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
छात्रों की संख्या	3	5	9	14	18	12	10	3	2	2

हल : आवृत्तियाँ अनियमित होने के कारण समूहन रीति द्वारा बहुलक ज्ञात किया जायेगा -

समूहन द्वारा बहुलक निर्धारण

प्राप्तांक	आवृति						अधिकतम आवृति की संख्या	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)		
20	3	8						
25	5		14	17				
30	9	23			28		I	1
35	14					41	II	3
40	18		32	44			IIIIII	6
		30			40		III	3
45	12					25	I	1
50	10	13	22	15				
			(151)					

55	3						7				
60	2		4	7							
65	2										

स्तम्भ संख्या	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
1					1					
2					1	1				
3				1	1					
4				1	1	1				
5					1	1	1	1		
6			1	1	1					
आवृति			1		6	3	3	1		

अत: सारणी से स्पष्ट है कि प्राप्तांक 40 सबसे अधिक बार (6 बार) आया है अत: बहुलक प्राप्तांक 40 है ।

घनत्व परीक्षण :

बहुलक ज्ञात करने के लिए समूहीकरण विधि ही सर्वोत्तम विधि है । लेकिन इसमें घनत्व परीक्षण का प्रयोग तब किया जाता हैं जब दो पद मूल्यों की आवृत्ति एक समान होती है । इस विधि में सर्वप्रथम सम्भावित बहुलक ज्ञात करते हैं उस पद की आवृत्ति (f_1) में इससे ठीक पूर्व की आवृत्ति (f_0) व पश्चात् की आवृत्ति (f_2) को योग ज्ञात करें । इसी प्रकार जो दूसरा सम्भावित बहुलक ज्ञात करें उसकी भी आवृत्ति (f_1) व पूर्व की आवृत्ति (f_0) तथा पश्चात् की आवृत्ति (f_2) का योग ज्ञात करें ।

इस प्रकार सम्भावित बहुलक के भिन्न-भिन्न योगफलों में जिस पद मूल्य से सम्बन्धित आवृत्तियों का योग सर्वाधिक हो, वही मूल्य बहुलक होगा ।

उदाहरण : 5

निम्न समंकों से बहुलक की गणना कीजिए-

पदों का मूल्य :	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
आवृत्ति :	2	4	3	5	10	6	4	10	5	2

हल : अधिकतम आवृत्ति 10 दो बार है अत: घनत्व परीक्षण द्वारा बहुलक ज्ञात करेंगे-

सम्भावित बहुलक का मूल्य -

मूल्य	50	80
सम्भावित बहुलक मूल्य की पिछली आवृत्ति (f_0)	5	4
सम्भावित बहुलक मूल्य की आवृत्ति (f_1)	10	10
सम्भावित बहुलक मूल्य की अगली आवृति (f_2)	6	5

21	19

मूल्य 50 का योगफल 21 है जो अधिक है अत: अंकों का बहुलक 50 है ।

3. सतत् श्रेणी में बहुलक निर्धारण :

सतत् श्रेणी में बहुलक निम्न दो चरणों द्वारा ज्ञात किया जाता है :-

(1) बहुलक वर्ग ज्ञात करना तत्पश्चात्

(2) सूत्र द्वारा बहुलक वर्ग में से निश्चित बहुलक ज्ञात करना

बहुलक वर्ग ज्ञात करने हेतु निम्न दो विधियों में से किसी का भी प्रयोग कर सकते हैं :-

(अ) निरीक्षण विधि:

इस विधि में श्रेणी का निरीक्षण करके यह देखा जाता है कि जिस मूल्य वर्ग की आवृत्तियाँ सबसे अधिक है वही बहुलक वर्ग है । अगर सबसे अधिक आवृत्ति वाले वर्ग एक से अधिक होते है तो निरीक्षण विधि के स्थान पर समूहन रीति का प्रयोग करते है ।

(ब) समूहीकरण विधि द्वारा:

जब निरीक्षण विधि द्वारा बहुलक वर्ग से जानकारी प्राप्त न हो तो समूहीकरण विधि द्वारा बहुलक वर्ग ज्ञात किया जाता है । यहाँ भी समूहीकरण तालिका व विश्लेषण सारणी खण्डित श्रेणी के समान ही तैयार की जाती है ।

बहुलक वर्ग ज्ञात करने के पश्चात् यह जानना होता है कि उस वर्ग का कौन सा निश्चित मूल्य बहुलक है क्योंकि कोई समूह या वर्ग बहुलक नहीं हो सकता ।

निश्चित बहुलक ज्ञात करने के लिए नीचे दिये गये सूत्रों का उपयोग किया जाता हैं :-

आरोही क्रम में (Ascending Order) श्रेणी होने पर -

सूत्र : $$Z = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i \quad \text{अथवा}$$

$$Z = L_1 + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

यहाँ $$\Delta_1 = (f_1 - f_0)$$

$$\Delta_2 = (f_1 - f_2)$$

नोट : Δ_1 व Δ_2 को ज्ञात करते समय बीजगणित चिन्हों ($\pm$) का ध्यान नहीं रखा जाता है । Δ ग्रीक भाषा का कैपिटल अक्षर डेल्टा है । Δ_1 को डेल्टा वन तथा Δ_2 को डेल्टा टू पढ़ा जाता है ।

अवरोही क्रम में (Descending Order) श्रेणी होने पर

सूत्र : $$Z = L_2 - \frac{f_1 - f_2}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i \quad \text{अथवा}$$

$$Z = L_2 - \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

सूत्र में प्रयुक्त चिन्हों का अभिप्राय

Z = बहुलक (Mode)

L_1 बहुलक वर्ग की निचली सीमा

L_2 = बहुलक वर्ग की ऊपरी सीमा

f_1 = बहुलक वर्ग की आवृत्ति

f_0 = बहुलक वर्ग से पूर्व वाले वर्ग की आवृति

f_2 = बहुलक वर्ग के बाद वाले वर्ग की आवृत्ति

i = बहुलक वर्ग विस्तार

उदाहरण : 6

निम्न समंकों से बहुलक मजदूरी ज्ञात कीजिए :

मजदूरी (रूपयों में)	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
श्रमिकों की संख्या	20	30	50	40	10
			f_0	f_1	f_2

हल : निरीक्षण विधि के द्वारा बहुलक वर्ग (15 - 20) है अत: = 15 f_0= 30 f_1**= 50**

f_2 = 40, i = 5 होगा ।

सूत्र, $$Z = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$Z = 15 + \frac{(50-30)}{(2\times 50 - 30 - 40)} \times 5$$

$$Z = 15 + \frac{20}{30} \times 5 = 18.33 \text{ रु.}$$

डेल्टा वाले सूत्र द्वारा :-

$$Z = L_1 + \frac{\triangle_1}{\triangle_1 + \triangle_2} \times i$$

$$\triangle_1 = \left(f_1 - f_0\right) = 50 - 30 = 20$$

$$\triangle_2 = \left(f_1 - f_2\right) = 50 - 40 = 10$$

$$Z = 15 + \frac{20}{\left(20+10\right)} \times 5$$

$$Z = 15 + \frac{100}{30} = 18.33 \text{रु.}$$

(ब) बहुलक के गुण अथवा लाभ (Merits of Mode)

1. बहुलक को ज्ञात करना अत्यन्त सरल है कई बार तो निरीक्षण मात्र से बहुलक पता लग जाता है ।

2. बिन्दुरेखीय विधि द्वारा बहुलक आसानी से ज्ञात किया जा सकता है ।

3. असमान पदों का इस पर प्रभाव नहीं पड़ता है ।

4. इस पर चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव पड़ता है ।

5. न्यादर्शों के परिवर्तन का बहुलक पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता ।

6. बहुलक को ज्ञात करने के लिए श्रेणी के सभी पदों की जानकारी होना आवश्यक नहीं है।

7. यह श्रेणी का सर्वाधिक प्रतिनिधित्व मूल्य होता है क्योंकि इसका सम्बन्ध बहुमत से होता है।

(स) बहुलक के दोष (Demerits of Mode)

1. गणितीय विश्लेषण के लिए बहुलक अनुपयुक्त माध्य है ।

2. बहुलक एक ऐसा माध्य है जो सबसे अधिक अनिश्चित व अस्पष्ट है ।

3. यह श्रेणी के सभी पद मूल्यों पर आधारित नहीं होता है ।

4. यदि श्रेणी के सभी पदों की आवृत्तियाँ समान हों तो बहुलक का निर्धारण असम्भव है।

5. बहुलक सर्वाधिक भ्रामक माध्य है तथा कभी-कभी समंक श्रेणी का प्रतिनिधित्व नहीं करता है।

6. वर्ग-विस्तार में परिवर्तन करने पर बहुलक के मूल्य में भी परिवर्तन हो जाता है ।

7. बहुलक को उसके पदों की संख्या से गुणा करने पर श्रेणी के कुल पद मूल्यों का योग प्राप्त नहीं होता है ।

(2) मध्यका (Median)

मध्यका किसी श्रेणी का ऐसा माध्य है जो उस श्रेणी को दो बराबर भागों में बाँटता है । जब श्रेणी को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित कर लेते हैं, तब बिल्कुल मध्य में जो मूल्य आता है वही मध्यका कहलाता है । मध्यका भी बहुलक की भाँति एक स्थिति सम्बन्धी माध्य है उसके एक तरफ सभी चर (Variables) 'उससे' कम मूल्य के तथा दूसरी ओर के सभी चर 'उससे' अधिक मूल्य के होते है । कोनर के अनुसार, "मध्यका समंक श्रेणी का वह चर मूल्य होता है जो समूह को दो बराबर भागों में इस प्रकार विभाजित करता है कि एक भाग में सारे मूल्य मध्यका से अधिक और दूसरे भाग में सारे मूल्य उससे कम हों।" इस प्रकार कह सकते है कि मध्यका वह केन्द्रीय मूल्य होता है जो आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित समंक माला को दो बराबर भागों में विभाजित करता है ।

(अ) मध्यका का परिकलन (Calculation of Median)

तीनों विभिन्न प्रकार की समंकमालाओं में परिकलन की विधि अलग-अलग इस प्रकार हैं-

(2) व्यक्तिगत श्रेणी में

(3) खण्डित श्रेणी में

(4) सतत् श्रेणी में

(1) व्यक्तिगत श्रेणी : व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका का परिकलन करने हेतु सबसे पहले श्रेणी को आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करेंगे । श्रेणी को क्रमबद्ध करने के बाद निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे:

सूत्र : M = Size of $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ (वां पद)

यहीं, M = मध्यका (Median)

N= पदों की कुल संख्या (Total No of items)

नोट : सूत्रों को याद रखने के दृष्टिकोण से 'आरोही क्रम उत्तम रहता है ।

अगर व्यक्तिगत इकाइयों की संख्या सम हो तो उनमें दो का भाग पूरा चला जाता है जैसे - 8,10,12 आदि तो केन्द्रीय पद पूर्ण अंक नहीं आएगा बल्कि 4.5, 5.5, 6.5 होगा ऐसी स्थिति मध्य पद का मूल्य निश्चित करने के लिए उनके दोनों ओर की दो पूर्ण क्रम संख्याओं के मूल्यों का योग लेकर उनमें 2 का भाग देंगे । यह भागफल ही मध्यका मूल्य होगा ।

सूत्र : $\text{Size of 5.5 th items} = \dfrac{\text{size of } 5^{th} \text{ item} + \text{size of } 6^{th} \text{ item}}{2}$

या

$$\text{5.5 वे पद का मान} = \frac{\text{5वें पद का मान + 6वें पद का मान}}{2}$$

उदाहरण : 7

एक कक्षा के 10 छात्रों ने एक बुद्धिलब्लि परीक्षा दी । नीचे दिये गए प्राप्तांकों के आधार पर मध्यका की गणना कीजिए-

अनुक्रमांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
प्राप्तांक	25	40	10	35	15	41	14	19	30	15

हल : सर्वप्रथम इसे आरोही क्रम में व्यवस्थित करेंगे

क्रम संख्या :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
प्राप्तांक	10	14	15	15	19	25	30	35	40	41

सूत्र : $M = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वाँ पद का मान = $\frac{10+1}{2}$ वाँ पद का मान = 5.5 वे पद का मान

$$\text{5.5 वे पद का मान} = \frac{\text{5वेंपद का मान + 6वें पद का मान}}{2} = \frac{19+25}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

अत: मध्यका प्राप्तांक 22 है ।

(2) खण्डित श्रेणी :

खण्डित श्रेणी में मध्यका की गणना की निम्नांकित प्रक्रिया है :-'

(1) सर्वप्रथम, खण्डित श्रेणी अगर व्यवस्थित क्रम में नहीं है तो उसे व्यवस्थित किया जायेगा ।

(2) फिर श्रेणी की आवृत्तियों की संचयी आवृत्ति इतत करते है ।

(3) मध्यका की गणना निम्नांकित सूत्र से की जायगी :-

सूत्र : M = Size of $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ वे पद का मान

इस सूत्र के द्वारा जो पद आता है और वह जिस संचयी आवृत्ति में स्थित होता है, उस संचयी आवृत्ति का पद मूल्य मध्यका होगा ।

उदाहरण : 8

निम्नांकित श्रेणी से मध्यका मूल्य ज्ञात कीजिए-

पद का आकार :	10	12	14	16	18	20	22
आवृत्ति :	3	7	12	28	10	9	6

हल :

पद का आकार	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
10	3	3
12	7	10
14	12	22
16	28	50
18	10	60
20	9	69
22	6	75
	N = 75	

$$M = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{th item}$$

$$= \text{Size of } \left(\frac{75+1}{2}\right) = 38 \text{ th item}$$

$\therefore$ Median= 16

उपर्युक्त सचंयी आवृत्तियों को देखने से डग़त होता है कि 22 की इकाई तक मूल्य 10,12 व 14 आकार के है । 23 वीं इकाई से 50 वीं इकाई तक सभी 28 पदों का मूल्य 16 है । अत: 38 वीं इकाई का मूल्य भी 16 है ।

(3) सतत् श्रेणी - सतत् श्रेणी में मध्यका निर्धारण की प्रक्रिया इस प्रकार हैं-

1. सर्वप्रथम खण्डित श्रेणी की भाँति संचयी आवृत्तियाँ ज्ञात करेंगे ।
2. निम्नांकित सूत्र द्वारा मध्यका वर्ग ज्ञात करेंगे :-

(मध्यका क्रमांक) m = $\left(\frac{N}{2}\right)$ वां पद

इस प्रकार जो पद क्रमांक आता है उसे संचयी आवृत्ति वाले कॉलम में देखते है । जिस संचयी आवृत्ति में प्रथम बार यह क्रमांक पड़ता है उस संचयी आवृत्ति के सामने वाला

वर्ग ही मध्यका वर्ग होता है । मध्यका वर्ग ज्ञात करने के पश्चात मध्यका मूल्य ज्ञात करने का सूत्र होगा :

आरोही क्रम में - $$M = L_1 + \frac{i}{f}\left(m - c_\circ\right)$$

अवरोही क्रम में - $$M = L_2 + \frac{i}{f}\left(m - c_\circ\right)$$

नोट - आरोही क्रम में प्रश्न हल करना ज्यादा सरल रहता हैं सूत्र में प्रयुक्त चिन्ह इस प्रकार हैं-

L_1 = मध्यका वर्ग की निचली सीमा

L_2 = मध्यका वर्ग की ऊपरी सीमा

i = मध्यका वर्ग का वर्ग विस्तार

f = मध्यका वर्ग की आवृत्ति

m = मध्यका क्रमांक

$C_\circ$ = मध्यका वर्ग के ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति

उदाहरण : 9

100 विद्यार्थियों के गणित विषय में प्राप्तांकों से मध्यका ज्ञात कीजिए-

प्राप्तांक :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
विद्यार्थियों की संख्या :	12	26	40	12	10

हल : मध्यका का परिकलन

प्राप्तांक (x)	विद्यार्थियों की संख्या (आवृत्ति f)	संचयी आवृत्ति (Cf)
0 - 10	12	12
10 - 20	26	$38\left(C_\circ\right)$
20 - 30	40 f	78
30 - 40	12	90
40 - 50	10	100
	N=100	

m = $\frac{N}{2}$ वां पद

m = $\frac{100}{2}$ 50 वां पद

50 वां पद संचयी आवृत्ति वाले स्तम्भ में 78 संचयी आवृत्ति में हैं अत: मध्यका वर्ग 20 - 30 होगा तथा मध्यका क्रमांक m = 50 है ।

सूत्र, $M = L_1 + \frac{i}{f}(m - c_{\circ}) = 20 + \frac{10}{40}(50 - 38)$

M = 23 अंक

(ब) मध्यका का प्रयोग (Use of Median)

मध्यका का प्रयोग तब करते है जब प्रत्यक्ष संख्याओं की गणना करना जटिल होता है । जब केवल गुण के आधार पर ही समंकों को क्रमबद्ध किया जा सकता हैं जैसे - सामाजिक सर्वेक्षणों तथा अनुसंधानों में जिनमें ईमानदारी, स्वास्थ्य, बुद्धिमानी जैसे गुणात्मक विषयों का अध्ययन करना हो, तब अधिकतर मध्यका का प्रयोग किया जाता है ।

(स) मध्यका के गुण (Merits of Median)

1. मध्यका की गणना के लिए श्रेणी के सभी पदों का पता होना आवश्यक नहीं है ।
2. मध्यका की गणना सरल होती है ।
3. मध्यका पर सीमान्त पदों का कोई प्रभाव नहीं होता है ।
4. मध्यका स्पष्ट एवं निश्चित माध्य हैं तथा सदा ही ज्ञात किया जा सकता है ।
5. मध्यका की गणना प्रत्येक पद के आधार पर की जाती है इसलिए यह माध्य इकाइयो का प्रतिनिधित्व करता है ।
6. गुणात्मक तथ्यों जैसे- चतुराई, ईमानदारी, बुद्धिमानी, स्वास्थ्य आदि के माध्य निर्धारण में मध्यका को प्रयुक्त किया जाता है ।

(द) मध्यका के दोष (Demerits of Median)

1. मध्यका की गणना के लिए समको को मूल्यों के आधार पर आरोही तथा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करना आवश्यक है ।
2. मध्यका श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होता है ।
3. मध्यका को आवृत्तियों के कुल योग से गुणा करने पर मूल्यों का कुल योग प्राप्त नहीं होता ।
4. पदों के अनियमित वितरण होने पर प्राय: भ्रमात्मक निष्कर्ष प्राप्त होते है ।
5. इसका प्रयोग बीजगणितीय विवेचन में नहीं किया जाता है ।

8.7 गणितीय माध्य (Mathematical Averages) ।

1. समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)

समान्तर माध्य सबसे प्रचलित माध्य है । समान्तर माध्य के लिए 'औसत' शब्द का भी प्रयोग किया जाता है गणितीय माध्यों में यह सबसे उत्कृष्ट माध्य माना जाता है । समान्तर माध्य में एक आदर्श माध्य की अधिकांश विशेषताएँ पाई जाती हैं ।

समान्तर माध्य किसी श्रेणी का वह मूल्य है जो उस श्रेणी के सभी पदों के मूल्यों के योग में पदों की कुल संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है । यह माध्य सामाजिक विज्ञानों में प्रयोग की जाने वाली समस्त सांख्यिकीय प्रणालियों की आधारशिला है ।

प्रो. मिल के शब्दों में, "समान्तर माध्य किसी वितरण का समात्तोलन केन्द्र हैं।" किंग के अनुसार, "समंकमाला के पक्ष के जोड़ में उनकी संख्या के द्वारा भाग देने से जो राशि प्राप्त होती है, उसे ही माध्य के रूप में परिभाषित किया जा सकता है ।"

समान्तर माध्य के प्रकार

(1) सरल समान्तर माध्य

(2) भारित समान्तर माध्य

सरल समान्तर माध्य में श्रेणी के समस्त पदों को समान महत्व दिया जाता हैं जबकि भारित समान्तर माध्य में श्रेणी के सभी पदों को उनकी महत्ता के अनुसार भार प्रदान किया जाता है । भार निरपेक्ष अथवा सापेक्ष हो सकते है ।

सरल समान्तर माध्य की गणना (Calculation of Simple Arithmetic Mean)

सरल समान्तर माध्य की गणना व्यक्तिगत श्रेणी, खण्डित श्रेणी और सतत् श्रेणी में प्रत्यक्ष और लघु विधि से की जाती है ।

(1) व्यक्तिगत श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना

1.1 प्रत्यक्ष रीति

1.2 लघु रीति

(2) खण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना

2.1 प्रत्यक्ष रीति

2.2 लघु रीति

(3) सतत् श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना

3.1 प्रत्यक्ष रीति

3.2 लघु रीति

3.3 पद विचलन रीति

(1) व्यक्तिगत श्रेणी में समान्तर माध्य

1.1 प्रत्यक्ष रीति द्वारा: प्रत्यक्ष रीति में श्रेणी के सभी मदों के मूल्यों का योग करके मदों की संख्या से भाग देने पर जो भागफल प्राप्त होता है । वही समान्तर माध्य है ।

गणना : समान्तर माध्य की गणना का सूत्र :

$$\bar{\times} = \frac{\sum \times}{N} \text{ अथवा } \frac{\times_1 + \times_2 + \times_3 - - - - + \times_n}{N}$$

संकेताक्षर : $\bar{\times}$ = समान्तर माध्य

$\sum$ = योग

X = विभिन्न इकाइयों के मूल्य

N = मदों की कुल संख्या

$\sum \times$ = समस्त मदों के मूल्यों का योग

उदाहरण : 10

10 छात्रों की लम्बाई का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए-

छात्र :	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
लम्बाई (सेमी.):	160	140	168	170	165	162	145	180	167	163

हल :

संख्या	लम्बाई (सें.मी.)
1. A	160
2. B	140
3. C	168
4. D	170
5. E	165
6. F	162
7. G	145
8. H	180
9. I	167
10. J	163
N = 10	$\sum X = 1620$

$$\bar{\times} = \frac{\sum \times}{N} = \frac{1620}{10}$$

$\bar{\times} =$ 162 से. मी.

1.2 **लघु रीति**: इस रीति द्‌वारा समान्तर माध्य ज्ञात करने के चरण इस प्रकार है-

(अ) सर्वप्रथम श्रेणी में दिये गये मूल्यों मे से किसी एक मूल्य को काल्पनिक माध्य (Assumed Mean) मानते है ।

(ब) काल्पनिक माध्य से विभिन्न पदों के विचलन (Deviation) निकालते है । मद मूल्य में से कल्पित माध्य मूल्य को घटाने से विचलन ज्ञात होता है ।

(स) सभी विचलनों को जोड़ लेते है ।

गणना : समान्तर माध्य की गणना निम्नांकित सूत्र द्‌वारा की जाती है :-

सूत्र :
$$\bar{\times} = A + \frac{\sum dx}{N}$$

संकेताक्षर : $\bar{\times}$ = समान्तर माध्य

A = कल्पित माध्य

N = पदों की कुल संख्या

dx = पद-मूल्यों का कल्पित माध्य से विचलन अर्थात् dx = (X-A)

N = पदों की कुल संख्या

उदाहरण : 11

उदाहरण संख्या 10 को लघु रीति द्‌वारा हल कीजिए :

हल : लघुरीति द्वारा समान्तर माध्य की गणना

संख्या	लम्बाई (सें.मी.)	A = 150 (X-A) = dx
1	160	+10
2	140	-10
3	168	+18
4	170	+20
5	165	+15
6	162	+12
7	145	-5
8	180	+30
9	167	+17
10	163	+13
		15 + 135 = $\sum$dx = +120

यहाँ, A = 150, $\sum$dx= 120, N = 10

सूत्र : $$\bar{\times} = A + \frac{\sum dx}{N} = 150 + \frac{120}{10}$$

= 150 + 12 = 162 सें.मी.

2 खण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य

2.1 प्रत्यक्ष रीति द्वारा: प्रत्यक्ष रीति की प्रक्रिया इस प्रकार है :

(अ) प्रत्येक पद मूल्य (x) को उसकी सम्बन्धित आवृति (f) से गुणा करें जिससे (fx) प्राप्त होगा।

(ब) Fx का योग ज्ञात कर ले जो $\sum f \times$ कहलाएगा ।

(स) आवृत्तियों का योग यानि N = $\left(\sum f\right)$ ज्ञात करें ।

(द) इसके पश्चात निम्नांकित सूत्र द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात करें:–

$$\bar{\times} = \frac{\sum f \times}{N}$$

2.2 लघु रीति द्वारा: खण्डित श्रेणी में लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य इस प्रकार ज्ञात किया जायेगा-

(अ) सर्वप्रथम श्रेणी के पद मूल्यों में से किसी एक पद मूल्य को कल्पित माध्य (A) मानते हैं ।

(ब) प्रत्येक पद मूल्य (x) में से कल्पित माध्य (A) को घटाकर विचलन ज्ञात करते हैं । (dx = X=A)

(स) प्रत्येक विचलन को सम्बन्धित आवृत्ति (f) से गुणा करके (fdx) ज्ञात करेंगे ।

(द) गुणनफल (fdx) का कुल योग $\left(\sum fd\times\right)$ ज्ञात करेंगे ।

उपर्युक्त प्रक्रिया के पश्चात् निम्नांकित सूत्र से समान्तर माध्य ज्ञात करेंगे-

सूत्र $$\bar{\times} = A + \frac{\sum fd\times}{N}$$

उदाहरण : 12

एक कक्षा के 100 छात्रों के प्राप्तांकों का प्रत्यक्ष रीति व लघुरीति द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए-

प्राप्तांक :	10	20	25	40	60	80
आवृत्ति :	5	25	20	30	15	5

हल : समान्तर माध्य की गणना

प्रत्यक्ष रीति द्वारा			लघु रीति द्वारा			
पद मूल्य	आवृत्ति	पद मूल्य व आवृत्ति का गुणनफल	पद मूल्य	आवृत्ति	पद विचलन A = 25	गुणनफल
(X)	**(f)**	**(fx)**	**(X)**	**(f)**	**(X-A) =dx**	**fdx**
10	5	50	10	5	-15	-75
20	25	500	20	25	-5	-125
25	20	500	25	20	0	0
40	30	1200	40	30	15	45
60	15	900	60	15	35	525
80	5	400	80	5	55	275
	N=100	$\sum f\times = 3550$		N=100	$\sum d\times = 85$	$\sum fd\times = 1050$

$$\bar{\times} = \frac{\sum f\times}{N}$$

$$\bar{\times} = \frac{3550}{100}$$

$\bar{\times} =$ 35.50 अंक

$$\bar{\times} = A + \frac{\sum f\times}{N}$$

$$\bar{\times} = 25 + \frac{1050}{100}$$

$\bar{\times} =$ 25+ 10.50

$\bar{\times} =$ 35.50 अंक

3. सतत श्रेणी में समान्तर माध्य

सतत श्रेणी में पद मूल्य वर्गान्तर के रूप में होते हैं । वर्गान्तरों से समान्तर माध्य निकालना संभव नहीं है । अत: सर्वप्रथम वर्गान्तरों के मध्य बिन्दुओं (Midpoints) की गणना की जाती हैं, इस प्रकार प्राप्त मध्य बिन्दुओं (X) तथा आवृत्ति के आधार पर समान्तर माध्य की गणना की जाती है । मध्य बिन्दु की गणना के पश्चात शेष गणना प्रक्रिया खण्डित श्रेणी के समान ही है।

सूत्र : समान्तर माध्य ज्ञात करने का सूत्र भी खण्डित श्रेणी के समान ही है । (मध्य बिन्दु ज्ञात करें)

प्रत्यक्ष रीति $\overline{\times} = \frac{\sum f \times}{N}$ लघु रीति = $\overline{\times} = A + \frac{\sum fd \times}{N}$

उदाहरण : 13

निम्नांकित समंकों से औसत लाभांश प्रति अंश ज्ञात कीजिए-

लाभांश प्रति अंश (रू.) :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
अंशों की संख्या :	10	12	20	18	10

हल : प्रत्यक्ष रीति एवं लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य की गणना

लाभांश प्रति अंश (रू.)	मध्य बिन्दु (X)	अंशों की संख्या (f)	(fx)	पद विचलन A=25(dx)	fdx
0-10	5	10	50	-20	-200
10-20	15	12	180	-10	-120
20-30	25	20	500	0	0
30-40	35	18	630	+10	+180
40-50	45	10	450	+20	+200
		N=70	$\sum f \times = 1080$		$\sum fd \times = 60$

प्रत्यक्ष रीति

सूत्र, $\overline{X} = \frac{\sum f \times}{N} = \frac{1810}{70}$

$\overline{\times} = 25.86$ रू.

लघु रीति

सूत्र, $\overline{X} = A + \frac{\sum fd \times}{N} = 25 + \frac{60}{70}$

$\overline{\times} =$ 25 + 0.86 = 25.86 रू.

पद विचलन रीति : समान्तर माध्य ज्ञात करने की यह कोई नयी विधि न होकर लघु रीति की सहायक रीति के रूप में प्रयोग में लाई जाती है । इस रीति के प्रयोग के लिए सतत श्रेणी के वर्गान्तरों का विस्तार समान होना चाहिए । इस रीति से समान्तर माध्य ज्ञात करने की विधि इस प्रकार है-

1. सर्वप्रथम सतत श्रेणी के वर्गान्तरों का मध्य मूल्य ज्ञात करते है ।
2. ज्ञात किये गये मध्य मूल्य में से किसी एक को कल्पित माध्य मान लेते हैं ।
3. कल्पित माध्य से मध्य मूल्यों का विचलन (dx) ज्ञात करते हैं । ऐसा करते समय धनात्मक व ऋणात्मक चिन्हों का ध्यान रखते हैं ।
4. इन विचलनों को ऐसी संख्या से विभाजित कर देते हैं जिसका सभी में भाग चला जाये। ये ही पद-विचलन (Step deviation) होते है । (dx')
5. इसके पश्चात पद विचलनों को उनकी आवृत्ति से गुणा करके गुणनफल ज्ञात कर लेते है । $(\sum fd \times ')$
6. पद विचलन रीति अपनाने पर निम्नांकित सूत्र का प्रयोग करते हैं -

$$\overline{\times} = A + \frac{\sum fd \times '}{N} \times i$$

यहाँ, $\overline{\times}$ = समान्तर माध्य

A = कल्पित माध्य

i = वर्गान्तर

$d\times'$ = पद विचलन

$\sum fd\times'$ = पद विचलनों और आवृत्तियों के गुणनफल का योग

उदाहरण : 14

एक कक्षा के विद्यार्थियों के विज्ञान विषय में प्राप्तांकों का पद विचलन रीति से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए-

प्राप्तांक :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
विद्यार्थियों की संख्या :	10	12	20	15	5	3	5

हल : पद विचलन रीति द्वारा समान्तर माध्य की गणना

प्राप्तांक	मध्य बिन्दु(x)	विद्यार्थियों की संख्या (f)	A = 35 (X-A)=(dx)	पद विचलन $\frac{d\times}{i}$ = (d ′ x)	fd ′ x
0-10	5	10	-30	-3	-30
10-20	15	12	-20	-2	-24
20-30	25	20	-10	-1	-20
30-40	35	15	0	0	0
40-50	45	5	+10	+1	5
50-60	55	3	+20	+2	6
60-70	65	5	+30	+3	15
		N=70			$\sum fd'\times = 48$

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd'\times}{N} \times i$$

$$\overline{X} = 35 + \left(\frac{-48}{70}\right) \times 10 = 35 - \frac{480}{70} = 35 - 6.86$$

$\overline{\times} =$ 28.14 अंक

समान्तर माध्य के गुण (Merits of Arithmetic Mean) :

1. गणितीय माध्यों में समान्तर माध्य की गणना करना बहुत सरल है, साधारण व्यक्ति भी इस माध्य को आसानी से समझ सकता है ।
2. समान्तर माध्य में श्रेणी को मध्यका की भाँति आरोही तथा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करना आवश्यक नहीं होता है ।
3. यह माध्य सुनिश्चित तथा स्थिर होता हैं, इसके निर्धारण में अनुमान का प्रयोग नहीं किया जाता है ।
4. इस माध्य में अनेक बीजगणितीय गुण होने से इसका प्रयोग उच्च स्तरीय सांख्यिकीय परिकलनों तथा विश्लेषणों में किया जाता है ।
5. समान्तर माध्य पर निदर्शन के परिवर्तनों का प्रभाव सबसे कम पड़ता है ।

6. यह माध्य श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता है । इसमें किसी मद को कम या अधिक महत्व नहीं दिया जाता है ।

7. यदि केवल पद-मूल्यों का योग और पदों की संख्या ज्ञात हो तो समान्तर माध्य की गणना की जा सकती है जबकि बहुलक तथा मध्यका की नहीं ।

समान्तर माध्य के दोष (Demerits of Arithmetic Mean)

1. यह माध्य श्रेणी में दिये हुये मूल्यों में से न होकर, उन सबसे अलग कोई मूल्य भी हो सकता है।

2. जब कोई संख्या मद बहुत बड़ी अथवा बहुत छोटी होती हैं तो समान्तर माध्य अवास्तविक होता है।

3. इस माध्य को ज्ञात करते समय प्रत्येक मद को समान महत्व दिया जाता है, जिससे कई बार बड़े भ्रमात्मक परिणाम प्राप्त होते हैं ।

4. संमकमाला के एक भी पद मूल्य का ज्ञात न होने पर समान्तर माध्य की गणना नहीं की जा सकती ।

5. कई परिस्थितियों में समान्तर माध्य अवास्तविक, भ्रमपूर्ण, त्रुटिपूर्ण तथा हास्यापद उत्तर प्रस्तुत करता है । प्राय: ऐसा खण्डित श्रेणी में होता हैं जैसे - व्यक्तियों की संख्या 1, 2, 3, में हो सकती है ।$1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$ आदि व्यक्ति नहीं हो सकते।

6. समंक श्रेणी का सिंहावलोकन मात्र से समान्तर माध्य को नहीं निकाला जा सकता हैं इसमें गणना आवश्यक है ।

भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Average)

सरल समान्तर माध्य का सबसे बड़ा दोष यह है कि यह समंक श्रेणी के सभी मूल्यों को समान महत्त्व देता हैं जबकि व्यवहार में किसी मूल्य का महत्त्व अधिक तथा किसी मूल्य का महत्त्व कम होता है जैसे- किसी परिवार के पारिवारिक बजट की विभिन्न मदों का अलग-अलग महत्त्व होता है । ऐसी स्थिति में इन मूल्यों के सापेक्षिक महत्त्व को ध्यान में रखकर ही सही माध्य की गणना की जा सकती है । जब माध्य ज्ञात करते समय श्रेणी के विभिन्न मूल्यों को आवश्यकतानुसार कम या अधिक महत्त्व दिया जाता है तब इसे भारित माध्य कहते है । विभिन्न मूल्यों से सम्बन्धित महत्व को दर्शाने वाले अंक ही भार कहे जाते है ।

भार प्रदान करना : भारित समान्तर माध्य की गणना करते समय सर्वप्रथम समंकों को भार प्रदान किये जाते हैं । भार वास्तविक तथा अनुमानित हो सकते हैं । पदों के सापेक्षिक महत्व को दर्शाने के लिए वास्तविक भार प्रदान किये जाते हैं । वास्तविक भार या तो स्पष्ट रूप से दिये जाते हैं और कभी-कभी आंकड़ों में गर्भित भी होते है । वास्तविक भार अंकों में व्यक्त किये जाते हैं इनका व्यक्तिगत श्रेणी में प्रयोग किया जाता है । खण्डित व सतत् श्रेणी में आवृत्तियों को भार मान लेते हैं, जो गर्भित भार का स्वरूप है । जब भार स्पष्ट अथवा गर्भित रूप से न दिये गये हो तो पदों के

महत्त्व के आधार पर अनुमान के आधार पर भार प्रदान करते है । अनुमानित भार विश्लेषणकर्त्ता द्वारा भिन्न-भिन्न होते हैं ।

भारित समान्तर माध्य की गणना -

भारित समान्तर माध्य ज्ञात करने की रीतियाँ :-

1. प्रत्यक्ष रीति
2. लघु रीति

दोनों का वर्णन इस प्रकार है

प्रत्यक्ष रीति -

1. यदि प्रश्न में भार न दे रखें हों तो महत्त्व के अनुसार अनुमानित भार (w) प्रदान करें।
2. श्रेणी के मूल्यों (X) तथा उसके भारों (w) का गुणा करके उनका योग $\sum$(wx) निकाल लेते है।
3. मूल्यों और भारों के गुणनफल के योग $\sum$(wx) में कुल भार $\sum$(w) का भाग देते हैं और प्राप्त भजनफल ही भारित समान्तर माध्य होता है ।

   सूत्र, $$\overline{\times}_w = \frac{\sum(w\times)}{\sum(w)}$$

लघु रीति -

1. किसी भी मूल्य को काल्पनिक भारित माध्य (AW) मानकर मूल्यों के विचलन (dx) निकाले जाते है ।
2. यदि प्रश्न में भार नहीं दे रखे हों तो विभिन्न पदों को अनुमानित भार प्रदान करें।
3. इसके पश्चात कल्पित माध्य से ज्ञात विचलनों (dx) को भार से गुणा करके उनका गुणनफल ज्ञात करें ।
4. प्राप्त गुणनफलों के योग $\sum$(Wdx) में कुल भार $\sum$(w) का भाग दें ।

   सूत्र, $$\overline{\times}_w = \frac{\sum(wd\times)}{\sum(w)}$$

नोट : व्यवहार में भारित समान्तर माध्य निकालने के लिए प्रत्यक्ष रीति का प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण : 15

छात्रवृत्ति प्रदान करने के लिए एक परीक्षा आयोजित की गयी । विभिन्न विषयों को भिन्न-भिन्न भार प्रदान किये गये । तीन परीक्षार्थियों के परिणाम इस प्रकार हैं -

विषय	भार	प्राप्तांक 'x'	प्राप्तांक 'y'	प्राप्तांक 'z'
लागत लेखांकन	5	70	65	90
सांख्यिकी	4	63	80	75
व्यावसायिक सन्नियम	2	50	40	65

अर्थशास्त्र	3	55	50	40
बीमा	1	60	40	38

उस परीक्षार्थी को छात्रवृत्ति दी जायेगी जिसके सबसे ज्यादा औसत प्राप्तांक होंगे, बताइए किसे छात्रवृत्ति प्राप्त होगी?

हल : उपर्युक्त प्रश्न को भारित समान्तर माध्य के द्‌वारा हल करेंगे-

भारित समान्तर माध्य की गणना विषय

	भार	'x' के प्राप्तांक		'y' के प्राप्तांक		'z' के प्राप्तांक	
	(w)	(x_1)	$(w \times_1)$	$(\times_2)$	$(w \times_2)$	$(\times_3)$	$(w \times_3)$
लागत लेखांकन	5	70	350	65	325	90	450
सांख्यिकी	4	63	252	80	320	75	300
व्यावसायिक सन्नियम	2	50	100	40	80	65	130
अर्थशास्त्र	3	55	165	50	150	40	120
बीमा	1	60	60	40	40	38	38
			927		915		1038

$$\bar{\times}_w = \frac{\sum(w\times)}{\sum(w)}$$

अत: भारित समान्तर माध्य 'X'   भारित समान्तर माध्य 'Y'   भारित समान्तर माध्य 'Z'

$$\bar{\times}_{w1} = \frac{927}{15} = 61.8 \qquad \bar{\times}_{w2} = \frac{915}{15} = 61.0 \qquad \bar{\times}_{w3} = \frac{1038}{15} = 69.2$$

उपर्युक्त विश्लेषण के आधार पर 'जेड' का भारित समान्तर माध्य सर्वाधिक है अत: 'जेड' को छात्रवृत्ति दी जायेगी ।

8.8 गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)

गुणोत्तर माध्य किसी श्रेणी के समस्त पद मूल्यों के गुणनफल का वह मूल (Root) होता है जितनी उस श्रेणी में संख्याएँ हैं । यदि श्रेणी में दो मूल्य दिए गए हैं तो दोनों मूल्यों के गुणनफल का वर्गमूल (Square root) तथा तीन मूल्य दिए गए हैं तो तीनों मूल्यों के गुणनफल का घनमूल (Cube root) ही गुणोत्तर माध्य माना जायेगा । गुणोत्तर माध्य की गणना हेतु निम्नांकित सूत्र का प्रयोग किया जाता है -

$$\text{G.M.} = n\sqrt{\times_1 \times \times_2 \times \times_3 .... \times n}$$

G.M. = Geometric Mean (गुणोत्तर माध्य)

n = number of items (पदों की संख्या)

X1, X2, X3....... Xn = Values of items (पदों का मूल्य)

श्रेणी में मूल्यों की संख्या अधिक होने की स्थिति में उपरोक्त सूत्र से गुणोत्तर माध्य की गणना करना कठिन हो जाता है । ऐसी स्थिति में लघुगुणक (Logarithm or Log) तथा प्रति-लघुगुणक (Antilogarithm) की सहायता से गुणोत्तर माध्य की गणना की जानी चाहिए । लघुगुणकों के प्रयोग की स्थिति में गुणोत्तर माध्य की गणना निम्न सूत्रानुसार की जायेगी :-

$$\text{G.M.} = \text{Antilog}\left[\frac{Log \times_1 + Log \times_2 + Log \times_3 .... Log \times n}{N}\right]$$

$$\text{Or G.M} = \text{Antilog}\ \frac{Log \times}{N}$$

व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series)

व्यक्तिगत श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने हेतु निम्नांकित प्रक्रिया अपनाई जायेगी:-

1. श्रेणी में दिए गए मूल्यों के लघुगुणक सारणी से ज्ञात करते हैं ।
2. सभी पदों के लघुगुणकों का योग करके ले से भाग दिया जाता है ।
3. प्राप्त संख्या का प्रतिलघुगुणक ज्ञात करते हैं जो कि गुणोत्तर माध्य होगा ।

उदाहरण :-

निम्नांकित दो श्रेणियों के गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए -

I 3884 382 63 80.4 .03 .009 .005

II 0.8974 0.0570 0.0081 0.5677 0.0002 0.0984 0.0854 0.5672

हल :- गुणोत्तर माध्य की गणना

श्रेणी I		श्रेणी II	
X	Log of X	X	Log of X
3884	3.5893	0.08974	$\bar{1}.9530$
382	2.5821	0.0570	$\bar{2}.7559$
63	1.7993	0.0081	$\bar{3}.9085$
8	0.9031	0.5677	$\bar{1}.7541$
0.4	$\bar{1}.6021$	0.0002	$\bar{4}.3010$
0.03	$\bar{2}.4771$	0.0984	$\bar{2}.9930$
0.009	$\bar{3}.9542$	0.0854	$\bar{2}.9315$
0.005	$\bar{4}.6990$	0.5672	$\bar{1}.7538$
N=8	$\sum Logx = 1.6062$	N=8	$\sum Logx = 10.3508$

श्रेणी I	श्रेणी II

$G.M. = Anti\log\left(\frac{\sum Logx}{N}\right)$ $= A.L.\left(\frac{1.6062}{8}\right)$ $= A.L.(0.2008)$ $= 1.588$	$G.M. = A.L.\left(\frac{\sum Logx}{N}\right)$ $= A.L.\left(\frac{10.3508}{8}\right)$ $= A.L.\left(\frac{16+6.3508}{8}\right)$ $= A.L.(2.7938)$ $= 0.0622$

टिप्पणी -

1. दशमलवांश (mantissa) सदैव धनात्मक (+) होंगे जबकि पूर्णांश (characteristics) धनात्मक या ऋणात्मक दोनों में से हो सकते हैं । अतएव इनके योग करते समय दशमलवांश एक साथ जोड़े जाते हैं तथा हासिल (carry) को धनात्मक होने से धनात्मक पूर्णांक जोड़कर ऋणात्मक पूर्णांक घटा दी जायेगी ।
2. लघुगुणकों के योग करने पर पूर्णांक (characteristics) ऋणात्मक आने की स्थिति में यह देखना चाहिए कि पूर्णांक में N का पूरा भाग जाता है या नहीं । N का पूरा भाग नहीं जाने की स्थिति में पूर्णांक योग में संशोधन किया जाता है । दशमलवांश सदैव धनात्मक होने के कारण पूर्णांक का शेष दशमलवांश के साथ शामिल नहीं किया जायेगा। पूर्ण विभाजन हेतु ऋणात्मक पूर्णांक में ऐसी संख्या घटा देंगे तथा उसी संख्या को दशमलवांश में जोड़ देंगे । उपर्युक्त उदाहरण की द्वितीय श्रेणी में पूर्णांक (10) ऋणात्मक है तथा N=8 है जिससे पूर्ण विभाजन नहीं हो सकता । इस स्थिति में ऋणात्मक 10 में से 6 अंक घटाने पर $\overline{16}$ हो जाता है जो उसे पूर्ण विभाज्य है । इसी अंक को दशमलवांश में जोड़कर ल से विभाजित किया गया है ।

खण्डित श्रेणी (Discrete Series) :-

खण्डित श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने हेतु निम्नांकित प्रक्रिया अपनाई जाती है :-

1 श्रेणी के दिए गए पद मूल्यों के लघुगुणक ज्ञात कर लिए जाते हैं ।

2 प्रत्येक लघुगुणक को सम्बन्धित आवृत्ति (f) से गुणा करते हैं ।

3 गुणनफलों के योग $\sum(Logxf)$ को N से विभाजित कर प्रतिलघुगुणक ज्ञात किया जाता है जिसे गुणोत्तर माध्य कहते हैं ।

इस हेतु निम्नांकित सूत्र का प्रयोग किया जाता है :-

$$\text{G.M. = A.L.}\left[\frac{\sum Logxf}{N}\right]$$

उदाहरण :-

निम्नलिखित समंकों से गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए :-

आकार	10	20	30	40	50	60

आवृत्ति	12	15	25	10	6	2

हल :-

आकार x	f	Log x	Log xf
10	12	1.0000	12.0000
20	15	1.3010	19.5120
30	25	1.4771	36.9275
40	10	1.6021	16.0210
50	6	1.6990	10.1940
60	2	1.7782	3.5564
		N=70	$\sum Log \times f$ =98.2139

$$G.M. = A.L.\left(\frac{\sum Logxf}{N}\right)$$

$$G.M. = A.L.\left(\frac{98.2139}{70}\right)$$

$$G.M. = A.L.(1.4070)$$

$$G.M. = 25.30$$

सतत् श्रेणी (Continuous Series) : सतत् श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने की प्रक्रिया खण्डित श्रेणी के समान ही है केवल इतना अंतर है कि सतत् श्रेणी में वर्गान्तरों के मध्य मूल्यों को ज्ञात करके उनका लघुगुणक ज्ञात किया जाता है ।

उदाहरण :-

निम्नांकित श्रेणी से गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए :-

Weight (lbs)	100-104	105-109	110-114	115-119	120-124
Frequency	24	30	45	65	72

हल :- गुणोत्तर माध्य की गणना

Weight (lbs)	Mid value×	f	$Log \times$	$Log \times f$
100-104	102	24	2.0086	48.2064
105-109	107	30	2.0294	60.8820
110-114	112	45	2.0492	92.2140
115-119	117	65	2.0682	134.4330
120-124	122	72	2.0864	150.2208
		N=236		$\sum Log \times f$ =485.9562

$$G.M. = A.L.\left(\frac{\sum Logxf}{N}\right)$$

$$G.M. = A.L.\left(\frac{485.9562}{236}\right)$$

$$G.M. = A.L.(2.059)$$

$$G.M. = 114.6$$

भारित गुणोत्तर माध्य (Weighted Geometric Mean) :-

समंक श्रेणी के मूल्यों का सापेक्षिक महत्त्व अलग-अलग होने की स्थिति में गुणोत्तर माध्य को समान्तर माध्य की भाँति भारित करना चाहिए । भारित गुणोत्तर माध्य की गणना में आवृत्ति (f) के स्थान पर भार (W) का प्रयोग करते हैं । शेष गणना पूर्ववत् ही रहती है । भारित गुणोत्तर माध्य की गणना निम्नांकित सूत्र द्वारा की जायेगी :-

$$WG.M. = A.L.\left[\frac{\sum Logxw}{sw}\right]$$

गुणोत्तर माध्य का दरों तथा अनुपातों में प्रयोग :-

गुणोत्तर माध्य को प्रतिशत वृद्धि दरों तथा अनुपातों की औसत दरों की गणना में भी प्रयुक्त करते हैं । चक्रवृद्धि ब्याज, जनसंख्या वृद्धि आदि में इसका उपयोग करते हैं । इस हेतु निम्नांकित सूत्रों का प्रयोग करते हैं :-

(i) $P_N = P_0 (1+r)^N$

(ii) $r = \sqrt[N]{\frac{P_N}{P_0}} - 1$

यहाँ $P_{N=}$ निश्चित अवधि के पश्चात् चर मूल्य (Value of variable at the end of the period)

$P_0 =$ अवधि के आरम्भ में चर मूल्य (variable in the beginning of the period)

$N =$ वर्षों की संख्या (Number of Years)

$r =$ प्रति इकाई परिवर्तन की दर (Rate of change per unit)

उदाहरण :-

यदि 4 वर्ष में किसी वस्तु की कीमत दुगुनी हो जाती है तो बताइये कि औसत वार्षिक वृद्धि की दर कितनी है?

हल :-

माना वस्तु का मूल्य 100 है तो 4 वर्ष पश्चात् 200 होगा अत: वार्षिक वृद्धि दर निम्नानुसार ज्ञात की जायेगी :-

$$r = \sqrt[N]{\frac{P_N}{P_0}} - 1 \qquad P_0 = 100; P_N = 200; N = 4$$

$= \sqrt[4]{\frac{200}{100}} - 1$ अथवा $A.L.\left(\frac{Log 2}{4}\right) - 1$

$= A.L.\left(\frac{0.3010}{4}\right) - 1$ या $A.L.(0.07525 - 1$

$= 1.190 - 1 = .19 = 19\%$

गुणोत्तर माध्य के गुण (Merits of Geometric Mean) :-

1 इसके अन्तर्गत बड़े मूल्यों को कम भार तथा छोटे मूल्यों को अधिक भार देने से श्रेणी संतुलित होती है ।

2 श्रेणी के पदमूल्यों में विषमता की स्थिति में यह माध्य उचित प्रतिनिधित्व करता है ।

3 अनुपातों तथा प्रतिशत दरों की औसत गणना हेतु उपयुक्त

4 श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित माध्य होता है, अत: एक पद मूल्य बदलने पर परिणाम भी बदल जाते हैं ।

5 उच्चस्तरीय गणितीय विवेचन हेतु उपयुक्त ।

गुणोत्तर माध्य के दोष (Demerits of Geometrics Mean) :-

1 जटिल गणन क्रिया;

2 कोई भी एक मूल्य ऋणात्मक या शून्य होने पर गुणोत्तर माध्य की गणना असम्भव;

3 श्रेणी का कोई भी मूल्य अज्ञात न हो अर्थात् सभी पदमूल्यों की जानकारी आवश्यक;

4 बहुलक की भाँति निरीक्षण द्वारा गणना नहीं

5 श्रेणी में दिए गए वास्तविक मूल्यों से बाहर आने की संभावना होने से श्रेणी का उचित प्रतिनिधित्व नहीं ।

8.9 हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

किसी समूह अथवा श्रेणी के व्युत्क्रमों के समान्तर माध्य का व्युत्क्रम ही हरात्मक माध्य है । अन्य शब्दों में "किसी समंक श्रेणी के मूल्यों की संख्या को उनके व्युत्क्रमों (Reciprocals) के योग से भाग देने पर जो भागफल प्राप्त होता है, वह हरात्मक माध्य कहलाता है ।" व्युत्क्रम से अभिप्राय ऐसी संख्या से है

जो 1 में उस मूल्य से भाग देने से उपलब्ध होती है । उदाहरण के लिये 5 का व्युत्क्रम $\frac{1}{5} = 0.2$ होगा । व्युत्क्रम को सारणी की सहायता से भी ज्ञात कर सकते हैं ।

हरात्मक माध्य की गणना (Calculation of Harmonic Mean) :-

व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series) :-

1 समंक श्रेणी में दिए गए मूल्यों के व्युत्क्रम ज्ञात किये जाते हैं । इन्हें 1 में सम्बन्धित संख्या का भाग देकर अथवा व्युत्क्रम सारणी की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है ।

2 सभी व्युत्क्रमों का योग $\left(\sum \text{Re}\,ciprocalX\right)$ ज्ञात करके श्रेणी के कुल पदों (N) का भाग देना चाहिए ।

3 भाग देने पर प्राप्त भागफल का पुन: व्युत्क्रम देखना चाहिए । यही संख्या हरात्मक माध्य (H.M.) होगी ।

हरात्मक माध्य को सूत्र रूप में निम्नानुसार ज्ञात करेंगे :-

$$H.M. = \text{Re}\,ciprocal\left[\frac{\sum \text{Re}\,ciprocalx}{N}\right]$$

उदाहरण :- निम्नांकित समंकों से हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिए :-

9.7; 0.0009; 178.7; 0.874; 1238; 0.012; 89.9; 78.4; 0.989; तथा 0.008

हल - हरात्मक माध्य की गणना -

पद मूल्य	व्युत्क्रम
9.7	0.1030
0.0009	1111.1111
178.7	0.0056
0.874	1.1442
1238	0.0008
0.012	8.3333
89.9	0.0111
78.4	0.0128
0.989	1.0111
0.008	125.0000
N=10	$\sum(\text{Re}\,c.of\,\times) = 1246.7329$

$$H.M. \quad = \text{Re}\,c.\left[\frac{1246.7329}{10}\right]$$

$$= \text{Re}\,c.[124.67329]$$

$$H.M. \quad = 0.008$$

खण्डित सतत् तथा श्रेणियों में हरात्मक माध्य (Harmonic Mean in Discrete and Continuous) :-

1 सतत् श्रेणी में वर्गान्तर के मध्य बिन्दु ज्ञात कर उन्हें खण्डित श्रेणी के समान मान लें । मूल्यों के व्युत्क्रम $(\text{Re}\,ciprocalofx)$ ज्ञात करें ।

2 इन व्युत्क्रमों को आवृत्ति (f) तथा भारित हरात्मक माध्य की स्थिति में (W) से गुणा करें तथा इनका योग $\left(\sum \text{Re}\,c.xf\right)$ प्राप्त करें ।

3 इस प्रकार प्राप्त योग में आवृत्तियों अथवा भारों के योग का भाग देना चाहिए ।

4 अंत में प्राप्त भागफल का व्युत्क्रम ज्ञात करना चाहिए । इसे ही हरात्मक माध्य माना जायेगा ।

सूत्र रूप में :-

$$H.M. = \text{Reciprocals}\left[\frac{\sum(\text{Reciprocals} x f)}{N}\right]$$

उदाहरण :-

निम्नांकित समंकों से हरात्मक माध्य की गणना कीजिए :-

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
आवृत्ति	5	10	7	3	2

हल :- हरात्मक माध्य की गणना

प्राप्तांक f	आवृत्ति x	मध्य बिन्दु $\left(\frac{1}{x}\right)$	व्युत्क्रम	$\text{Rec}.xf$
0-10	5	5	0.20000	1.00000
10-20	10	15	0.06666	0.66667
20-30	7	25	0.4000	0.28000
30-40	3	35	0.02857	0.08571
40-50	2	45	0.0222	0.04444
	N=27			$\sum \text{Rec}.xf = 2.07682$

$$H.M. = \text{Rec}.\left[\frac{\sum(\text{Rec}.xf)}{N}\right]$$

$$= \text{Rec}.\left(\frac{2.07682}{27}\right)$$

$$= \text{Rec}.0.0769193$$

H.M. = 13 अंक

हरात्मक माध्य का विशेष उपयोग (Special use of Harmonic Mean) :-

समय तथा दर से सम्बन्धित ऐसी समस्याओं में जहाँ दर जिसे चल (Variable) दिया गया हो किन्तु प्रश्न में अचल (Constant) रखना हो अथवा दर में अचल किन्तु प्रश्न में चल रखना हो तो हरात्मक माध्य की गणना की जाती है । निम्नांकित परिस्थितियों में हरात्मक माध्य का प्रयोग किया जाता है :-

1 औसत गति (Average speed) की गणना :- इसके अन्तर्गत गति मिनट प्रति किलोमीटर दिये जाने पर समय को चल तथा दूरी को अचल मानते हैं । किन्तु गति किलोमीटर प्रति घण्टा दी गई हो तो दूरी चल तथा समय अचल माना जायेगा ।

2 मूल्य का औसत ज्ञात करने हेतु :- यदि दर एक रूपये की पाँच किलो में दी जाये तो रूपया अचल तथा मात्रा चल मानी जायेगी । इसके विपरीत एक किलो दस रूपये में दी गई हो तो किलो अचल तथा रूपया चल होगा ।

3 चलन वेग का औसत ज्ञात करने हेतु :- इसमें विपरीत दर ज्ञात करने हेतु हरात्मक माध्य ज्ञात करना चाहिए ।

उदाहरण :

रिंकू एक फ्रूट स्टॉल से 5 रू. प्रति किलो की दर से अमरूद क्रय करता है । दूसरी स्टॉल से 7 रू. प्रति किलो की दर से तथा तीसरे स्टील से 8 रू. प्रति किलो की दर से क्रय करता है । अमरूदों की औसत दर क्या होगी?

हल :-

प्रश्न में अमरूदों की दर प्रति किलो ज्ञात करने हेतु कहा गया है । दर ज्ञात करने में मूल्य अचल है लेकिन प्रश्न में मूल्य चल है अत: हरात्मक माध्य ज्ञात करेंगे :-

मूल्य प्रति किलो x	$1/x$ अथवा व्युत्क्रम
5	0.2000
7	0.1429
8	0.1250
N=3	$(\sum \text{Re}\, c.ofx) = 0.4679$

$$H.M. = \text{Re}\,c.\left[\frac{\sum(\text{Re}\,c.ofx)}{N}\right]$$

$$orH.M. = \left[\frac{N}{\sum(\text{Re}\,c.ofx)}\right]$$

$$= \left[\frac{3}{0.4679}\right]$$

= रू. 6.42 प्रति किलो

हरात्मक माध्य के गुण (Merits of Harmonic Mean) :-

1 श्रेणियों में विषमता अधिक होने पर उपयुक्त;

2 सभी मूल्यों पर आधारित होने से प्रत्येक मूल्य द्वारा औसत प्रभावित;

3 छोटे मूल्यों को अधिक तथा बड़े मूल्यों को कम भार;

4 समय, दर, गति आदि के अध्ययन हेतु उपयुक्त

हरात्मक माध्य के दोष (Demerits of Harmonic Mean) :-

1 गणन क्रिया जटिल;

2 श्रेणी के सभी मूल्यों की जानकारी आवश्यक;

3 हरात्मक माध्य का मूल्य श्रेणी से बाहर होने की स्थिति में पूरे समूह का प्रतिनिधित्व नहीं।

लघुगुणक एवं व्युत्क्रम (Logarithms and Reciprocals)

लघुगुणक :- दिये गये आधार पर किसी संख्या का लघुगुणक वह संख्या होती है जिसे आधार का घात (Power) बनाने पर प्राप्त घात का मूल्य दी हुई संख्या के बराबर हो ।

$$X = \text{लघु } a^{N}$$

इसे x = a आधार पर N का लघुगुणक पढेंगे ।

$\therefore 4^{3} = 4 \times 4 \times 4 = 64$

अतएव 64 का आधार 4 पर लघुगुणक 3 है ।

लघुगुणक देखने में सर्वप्रथम उस संख्या का पूर्णांश (Characteristics) ज्ञात करते हैं तत्पश्चात् सारणी की सहायता से दशमलवांश (Mantissa) ज्ञात करना पड़ता है । लघुगुणक का पूर्णांक भाग पूर्णांश तथा भिन्न भाग दशमलवांश कहलाता है ।

पूर्णांश ज्ञात करना :-

(i) एक या एक से बड़ी संख्या का पूर्णांश :- ये सदैव धनात्मक होते हैं । ये संख्याएँ पूर्णांक अथवा दशमलव सहित हो सकती है उदाहरणार्थ 8, 63, 382, 38.84 या 38.84 । पूर्णांक संख्याओं के पूर्णांश ज्ञात करने हेतु (N-1) सूत्र का प्रयोग करते हैं । अत: पूर्णांक संख्याओं के पूर्णांश हमेशा उनके कुल अंकों की संख्या से एक कम होगा । जैसे 8, 63, 382, 38.84 या 3.84 के पूर्णांश क्रमश: 0, 1, 2, 1 होगा क्योंकि इनमें अंकों की संख्या 1, 2, 3 तथा 2 है । दशमलव वाली संख्या एक से बड़ी हो तो दशमलव के पूर्व वाले अंकों की संख्या के आधार पर पूर्णांश निर्धारित होगा जैसा कि ऊपर 38.84 में किया गया है ।

(ii) एक से छोटी संख्या का पूर्णांश : ये सदैव ऋणात्मक होंगे । पूर्णांश की संख्या दशमलव के बाद और किसी अंक के बीच आने वाले शून्यों की संख्या पर निर्भर है । दशमलव के बाद कोई शून्य (Zero) हो तो पूर्णांश $\bar{1}$ एक शून्य हो तो $\bar{2}$ तथा शून्य होने पर $\bar{3}$ होगा । इसमें (N+1) सूत्र का प्रयोग करते हैं । यहाँ N से अभिप्राय दशमलव के बाद किन्तु अंक से पहले आने वाले शून्यों की संख्या से है । इसमें ऋणात्मक चिहन (-) संख्या के पूर्व न लगाकर संख्या के ऊपर लगाया जाता है क्योंकि केवल पूर्णांश ही ऋणात्मक होता है, दशमलवांश नहीं ।

दशमलवांश ज्ञात करना :-

इसे लघुगुणक सारणी की सहायता से ज्ञात करते हैं जो सदैव धनात्मक होगा । लघुगुणक सारणी से दशमलवांश देखने हेतु संख्या का कम से कम 3 अंकों की संख्या तथा अधिक से अधिक 4 अंकों की संख्या तक सन्निकटन करते हैं । उदाहरणार्थ 5 तथा 525672 का दशमलवांश देखना हो तो सर्वप्रथम 5 के आगे दो शून्य लिखकर 500 तथा 525672 को 5257 तक सश्किटन कर लेंगे। सश्किटन संख्या के प्रथम दो अंक लघुगुणक सारणी के प्रथम खाने में उदग्र (Vertical) पंक्ति में देखते हैं । उसके

ठीक सामने वाले क्षैतिज खाने में तीसरा अंक सम्बन्धित खाने में देखा जायेगा । वही संख्या दशमलवांश (Mantissa) होगी । चौथा अंक होने की स्थिति में उसे प्रथम दो अंकों के सामने मध्यान्तर (Mean Difference) में चौथे अंक के नीचे की संख्या ज्ञात करके उपरोक्त तीन संख्याओं के दशमलवांश में जोड़ देंगे । यह दशमलवांश कहलायेगा । गणना की विधि व्यावहारिक रूप में उदाहरण में समझाई गई है।

प्रतिलघुगुणक (Anti Logarithms) :-

किसी संख्या का प्रति-लघुगुणक वह संख्या होता है जिसका लघुगुणक दी गई संख्या है । प्रतिलघुगुणक ज्ञात करने हेतु सारणी का प्रयोग करते हैं जिसमें उदग्र रूप में .00 से .99 तक संख्या होती है तथा उसी प्रकार क्षैतिज खाने होते हैं । लघुगुणक के दो भाग पूर्णांश तथा दशमलवांश होते हैं । प्रतिलघुगुणक ज्ञात करते समय पूर्णांश नहीं देखा जाता है, केवल दशमलवांश ही देखा जाता है । दशमलवांश के प्रथम दो अंक उदग्र खाने में तथा तीसरा अंक उसके सामने क्षैतिज रूप में सम्बन्धित खाने में तथा चौथा अंक मध्यांतर में ज्ञात करके प्राप्त संख्या में दशमलव लगाने हेतु पूर्णांश में एक जोड़कर जितना आये उतने अंकों के बाद दशमलव लगायेंगे । यही प्रतिलघुगुणक होगा । पूर्णांश ऋणात्मक होने पर पूर्णांश में से एक घटाकर जितना आये उतने शून्य दशमलवांश के प्रतिलघुणक के बायीं ओर लगाकर दशमलव लगाते हैं । उदाहरण में व्यावहारिक रूप में स्पष्ट कर दिया गया है ।

व्युत्क्रम (Reciprocals) :-

किसी पूर्णांक संख्या के व्युत्क्रम का आशय उस संख्या का 1 में भाग देना है । एक से बड़ी संख्या का व्युत्क्रम दशमलव संख्या में तथा एक से छोटी संख्या का व्युत्क्रम एक से अधिक होगा। व्युत्क्रम सारणी देखने की विधि लघुगुणक तथा प्रतिलघुगुणक सारणियों के समान ही है केवल इतना सा अंतर है व्युत्क्रम ज्ञात करते समय मध्यान्तर (Mean Difference) को घटाते हैं । सारणी से प्राप्त संख्या में दशमलव बिन्दु निर्धारण के निम्नांकित नियम हैं :-

(i) यदि मूल संख्या एक सं अधिक है तो उस संख्या के पूर्णांक की संख्या में से 1 घटाकर उतने शून्य व्युत्क्रम संख्या में दशमलव बिन्दु के बाद लिखेंगे । किन्तु 1 के आगे केवल शून्य संख्याएँ हों तो इसमें अपवादस्वरूप N-2 सूत्र प्रयुक्त होगा ।

(ii) यदि मूल संख्या 1 से कम हो तो दशमलव बिन्दु के बाद जितने शून्य होंगे उनकी संख्या में 1 जोड़कर व्युत्क्रम संख्या में उतने अंकों के पश्चात् दशमलव बिन्दु लगायेंगे। दशमलव वाली संख्या में केवल अंक 1 हो तो N+2 का सूत्र प्रयुक्त करेंगे व्यावहारिक रूप में उदाहरण में समझाया गया है ।

8.10 सारांश (Summary)

सांख्यिकीय समंकों के वर्गीकरण एवं सारणीयन से समंक सरल एवं बोधगम्य हो सकते हैं किन्तु समंक की महत्त्वपूर्ण विशेषताएँ स्पष्ट नहीं होती । सांख्यिकी में ऐसा मूल्य जो सम्पूर्ण समंक श्रेणी को केन्द्रीय प्रवृत्ति के सरल एवं सारांश रूप में व्यक्त करता

है, केन्द्रीय प्रवृति का माप या माध्य कहलाता है । सांख्यिकीय माध्य संकलित सामग्री को संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत करते हैं, दो या अधिक समूहों के तुलनात्मक अध्ययन की सुविधा प्रदान करते है, सम्पूर्ण समूह का प्रतिनिधित्व करते हैं तथा सांख्यिकीय
विवेचन के आधार होते हैं । भावी क्रियाओं एवं नीतियों के निर्धारण में मार्गदर्शन प्रदान करते हैं । आदर्श माध्य सरल, स्पष्ट, सभी मूल्यों पर आधारित, निश्चित, प्रतिचयन के परिवर्तनों से न्यूनतम प्रभावित, निरपेक्ष मूल्य के साथ-साथ ऐसे हों जिनका बीजगणितीय विवेचन सम्भव हो।

माध्य तीन प्रकार के होते हैं । स्थिति सम्बन्धी माध्यों में बहुलक तथा मध्यका, गणितीय माध्यों में समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य, द्विघातीय माध्य तथा व्यापारिक माध्यों में चल माध्य, प्रगामी या संचयी माध्य तथा संग्रथित माध्य को शामिल किया जाता है । किसी श्रेणी में सर्वाधिक पुनरावृत्ति वाला मूल्य बहुलक कहलाता है । बहुलक को संकेताक्षर 'Z' से इंगित किया जाता है । बहुलक की गणना सरल है जिस पर असमान पदों का प्रभाव नहीं पडता, चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव, न्यादर्श परिवर्तन से अप्रभावित, श्रेणी के सभी पदों की जानकारी आवश्यक नहीं जैसे गुण बहुलक में पाये जाते हैं किन्तु यह गणितीय विश्लेषण हेतु अनुपयुक्त है। सभी पदों की समान आवृत्तियाँ होने पर बहुलक निर्धारण असंभव हैं तथा सर्वाधिक भ्रामक माध्य माना जाता है । मध्यका श्रेणी को दो बराबर भागों में बाँटता है । गुणात्मक विषयों के अध्ययन हेतु मध्यका का प्रयोग किया जाता है । मध्यका हेतु श्रेणी के सभी पदों का पता होना आवश्यक नहीं है । इस पर सीमान्त पदों का कोई प्रभाव नहीं होता हैं । मध्यका हेतु श्रेणी को आरोही तथा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करना आवश्यक है । इसमें पदों के अनियमित वितरण होने पर प्राय: भ्रमात्मक निष्कर्ष प्राप्त होते हैं ।

गणितीय माध्यों में समान्तर माध्य उत्कृष्ट माध्य माना जाता है । समान्तर माध्य किसी श्रेणी का वह मूल्य है जो उस श्रेणी के सभी पदों के मूल्यों के योग में पदों की कुल संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है । इसमें बीजगणितीय गुण होने के कारण सांख्यिकीय विश्लेषण में प्रयुक्त किया जाता है । श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता हैं जिसके निर्धारण में अनुमान का प्रयोग नहीं किया जाता है । संख्या के बहुत बड़ी या छोटी होने पर समान्तर माध्य अवास्तविक होता है । एक भी पद ज्ञात न होने पर इसकी गणना नहीं की जा सकती । भारित समान्तर माध्य की गणना हेतु श्रेणी के विभिन्न मूल्यों को आवश्यकतानुसार कम या अधिक महत्त्व दिया जाता है ।

8.11 शब्दावली (Glossary)

केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप (Measures of Central Tendency) :- समंकों के विस्तार के अन्तर्गत स्थित ऐसा मूल्य जो श्रेणी के सभी मूल्यों का प्रतिनिधित्व करता है ।

स्थिति सम्बन्धी माध्य (Positional Average) :- स्थिति माध्य ऐसा मूल्य हैं जो श्रेणी के अन्तर्गत बीच में स्थित होने के आधार पर परिकलित किया जाता हैं ।

बहुलक (Mode) :- एक समंक बंटन का वह मूल्य जिसके निकट श्रेणी की इकाइयाँ अधिक से अधिक केन्द्रित होती हैं ।

मध्यका (Median) :- वह केन्द्रीय मूल्य जो आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित समंकमाला को दो बराबर भागों में विभाजित करता है ।

समान्तर माध्य (Arithmetic Mean) :- समंकमाला के पदों के योग में उनकी संख्या द्वारा भाग देने पर प्राप्त राशि ।

8.12 स्वपरख प्रश्न (Self-Assessment Questions)

1. सांख्यिकीय माध्य से आप क्या समझते हैं? इसके मापने की विभिन्न रीतियों का उल्लेख कीजिए ।
2. एक माध्य किस उद्देश्य की पूर्ति करता है? विभिन्न प्रकार के सांख्यिकीय माध्यों के सापेक्षिक गुण-दोषों की विवेचना कीजिए ।
3. केन्द्रीय प्रवृत्ति के अच्छी माप के आवश्यक तत्वों की विवेचना कीजिए ।
4. प्रत्येक माध्य की अपनी विशेषताएँ होती हैं । यह कहना कठिन है कि कौनसा माध्य सबसे अच्छा हैं? " इस कथन की व्याख्या उदाहरण सहित कीजिए ।
5. विभिन्न प्रकार के सांख्यिकीय माध्यों के सापेक्षिक गुण दोषों की विवेचना कीजिए ।
6. भारित माध्य की परिभाषा दीजिए । सरल समान्तर माध्य से यह किस प्रकार भिन्न है।
7. निम्न पद मूल्यों से बहुलक ज्ञात कीजिए -

   33, 20, 35, 50, 33, 35, 37, 25, 35, 34, 35

   (उत्तर : Z=35)
8. एक टेलीफोन एक्सचेंज में निरन्तर एक मिनट के अंतराल में 240 आने वाले टेलीफोन कॉलों की संख्या निम्नांकित आवृत्ति बंटन में दी गयी है । बहुलक ज्ञात कीजिए -

कॉल की संख्या :	0	1	2	3	4	5	6	7
आवृत्ति :	14	21	25	43	51	35	39	12

   (उत्तर : Z=25)

9. निम्नांकित सारणी से बहुलक ज्ञात कीजिए -

प्राप्तांक :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
विद्यार्थियों की सं.:	10	12	18	12	10	6	5	4

   (उत्तर : Z = 25)

10. निम्नांकित समंकों से बहुलक ज्ञात कीजिए

-माप	आवृत्ति
3 से कम	2
5 से कम	5
7 से कम	10
10 से कम	15

13 से कम	30
15 से कम	35
20 से कम	42
25 से कम	47
30 से कम	50

(उत्तर : Z = 12.174)

11. निम्नांकित समंकों से बहुलक का मान ज्ञात कीजिए

प्राप्तांक (से अधिक)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
आवृत्ति	80	77	72	65	55	43	28	16	10	8	0

(उत्तर Z = 55)

12. नीचे दी गई सारणी से मध्यका ज्ञात कीजिए-

18, 12, 17, 16, 6, 20, 23, 23, 37, 28, 24, 50, 55, 57, 60

(उत्तर: M = 23)

13. नीचे दिये गये श्रमिकों की मध्यका मजदूरी ज्ञात कीजिए -

मजदूरी (रू. में)	20	50	12	30	65
श्रमिकों की संख्या	10	15	8	21	4

(उत्तर : M = 30रू.)

14. किसी कक्षा के छात्रों के सांख्यिकी विषय में प्राप्तांकों से मध्यका प्राप्तांक ज्ञात कीजिए-

प्राप्तांक	**छात्रों की संख्या**
0-10	4
10-20	9
20-30	6
30-40	13
40-50	27
50-60	21
60-70	12
70-80	8

(उत्तर : M = 46.67)

15. निम्नांकित समंकों से मध्यका ज्ञात कीजिए -

मध्य बिन्दु :	115	125	135	145	155	165	175	185	195
आवृत्ति :	6	25	48	72	116	60	38	22	3

(उत्तर: M= 153.793)

16. आपको निम्नांकित अपूर्ण आवृत्ति वितरण दिया गया है । कुल आवृत्तियों का योग 1000 तथा मध्यका मूल्य 413.11 है । अज्ञात आवृत्तियाँ ज्ञात कीजिए तथा बहुलक का मूल्य ज्ञात कीजिए -

मूल्य (X)	आवृत्तियाँ (f)
300-325	5
325-350	17
350-375	80
375-400	?
400-425	326
425-450	?
450-475	88
475-500	9

(उत्तर: f_1= 227; f_2 =248; Z= 413.98)

17. निम्नांकित समंकों से समान्तर माध्य, मध्यका और बहुलक की गणना कीजिए -

क्र.सं.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
प्राप्तांक	17	32	35	33	15	21	41	32	11	18	20	20	11	15	35	23	38	12

(उत्तर :$\bar{\times}$= 23.94; M = 21.5; Z = 16.62)

18. दी गई खण्डित श्रेणी में (अ) 15 को शून्य (अर्थात् कल्पित माध्य) मानकर समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए तथा (ब) प्रत्यक्ष रीति द्वारा परिणाम की जाँच कीजिए -

आकार :	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
आवृत्ति :	1	2	4	8	11	10	7	4	2	1

(उत्तर: $\bar{\times}$= 15.54)

19. निम्नांकित सारणी से माध्य, मध्यका और बहुलक ज्ञात कीजिए -

मूल्य :	10-20	10-30	10-40	10-50	10-60	10-70	10-80	10-90	10-100
आवृत्ति :	9	21	49	35	127	109	182	195	200

(उत्तर $\bar{\times}$ = 53.65, M = 53.57, Z = 53.75)

20. निम्नांकित श्रेणी से समान्तर माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए -

मूल्य :	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30
आवृत्ति :	20	30 50	40	10	

(उत्तर : $\bar{\times}$ = 17.67, Z = 18.83)

21. दी गई सारणी का माध्य 50 है । परन्तु f_1और f_2 की आवृत्तियाँ उपलब्ध नहीं है । अज्ञात आवृत्तियाँ ज्ञात कीजिए -

वर्ग :	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	कुल
आवृत्ति :	17	f_1	32	f_2	19	120

(उत्तर : f_1 = 28; f_2 = 24)

22. एक परीक्षा में एक परीक्षार्थी के प्राप्तांक प्रतिशत संस्कृत 75, गणित 84, अर्थशास्त्र 56, अंग्रेजी 78, राजनीतिशास्त्र 57, इतिहास 54, भूगोल 47 । यह माना गया कि अंग्रेजी, गणित व संस्कृत के प्राप्तांकों को दुगना भार प्रदान किया जाये । भारित एवं अभारित माध्य ज्ञात कीजिए।

(उत्तर: $\overline{x_w}$ = 68.8; $\bar{x}$= 64.43)

23. निम्नांकित आंकड़ों से भारित माध्य ज्ञात कीजिए - वास्तविक भारों और अनुमानित भारों का प्रयोग करके, और दोनों भारित माध्यों में अन्तर दिखलाइए ।

मद	खर्च (रू.)	वास्तविक भार	अनुमानित भार
खाद्यान्न	940	7.5	5
किराया	200	2.5	5
कपड़ा	500	1.5	4
ईधन और रोशनी	250	1.0	2
अन्य मद	240	0.5	1

(उत्तर: $\bar{x}_w$ (वास्तविक भार) = 666.92; $\bar{x}_w$ (अनुमानित भार) = 660.74)

24. दस व्यक्तियों की निम्नांकित दैनिक आय से गुणोतर माध्य तथा हरात्मक माध्य की गणना कीजिए:-

क्र.सं.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
रूपये	360	850	700	150	750	5000	80	450	2500	400

(उत्तर : G.M. = रू. 580.30; H.M. = रू. 320.50)

25. निम्नांकित समंकों से गुणोत्तर माध्य की गणना कीजिए :

प्राप्तांक	आवृत्ति	प्राप्तांक	आवृत्ति
4-8	6	24-28	12
8-12	10	28-32	10
12-16	18	32-36	6
16-20	30	36-40	2
20-24	15		

(उत्तर: G.M. = 18.14)

26. प्रथम दशक में जनसंख्या में वृद्धि 15%, दूसरे दशक में 20% एवं तीसरे दशक में 30% की वृद्धि हो तो औसत जनसंख्या वृद्धि की दर ज्ञात कीजिए ।

(उत्तर. G.M. = 121.5% जनसंख्या वृद्धि दर 21.5%प्रति दशक)

27. निम्नांकित समंकों से हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिए

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50

विद्यार्थियों की संख्या	4	5	11	6	4

(उत्तर : H.M. = 16.36)

28. एक यात्री कोटा से सवाईमाधोपुर 30 मील प्रति घण्टा की चाल से यात्रा करता है तथा 60 मील प्रति घण्टा की चाल से वापस लौटता है। उसकी औसत गति ज्ञात कीजिए।
(उत्तर : H.M. 40)

8.13 उपयोगी पुस्तकें (Further Readings)

1. शर्मा, जैन, पारीक, "व्यावसायिक सांख्यिकी", शिवम् बुक हाउस (प्रा.) लि., जयपुर (राज.)
2. रंगा, गुप्ता, गोयल, भटनागर, शाह, "व्यावसायिक सांख्यिकी", अजमेरा बुक कम्पनी, जयपुर
3. कैलाश नाथ नागर, "सांख्यिकी के मूल तत्व", मीनाक्षी प्रकाशन, मेरठ
4. वीरेन्द्र प्रकाश शर्मा, सामाजिक अन्वेषण की पद्धतियाँ, पंचशील प्रकाशन, जयपुर (राज.)
5. Gupta, S.P. Statistical Methods, Sultani Chand & Sons, New Delhi.

इकाई-9 : विचरण के माप एवं विषमता (Measures of Variation and Skewness)

इकाई की रूपरेखा

9.0 उद्देश्य

9.1 प्रस्तावना

9.2 विचरण का अर्थ

9.3 विचरण के उद्देश्य

9.4 विचरण के अच्छे माप की विशेषताएँ

9.5 विचरण के निरपेक्ष एवं सापेक्ष माप

9.6 विचरण के माप

9.7 सीमा रीतियाँ

9.8 चतुर्थक विचलन

9.9 माध्य विचलन

9.10 प्रमाप विचलन

9.11 प्रसरण एवं विचरण गुणांक

9.12 प्रमाप विचलन की गणितीय विशेषताएँ तथा गुण - दोष

9.13 लॉरेंज वक्र

9.14 विषमता का अर्थ

9.15 विषमता के प्रकार

9.16 विषमता की जांच

9.17 विषमता के माप

9.18 विचरण एवं विषमता के अन्तर

9.19 सारांश

9.20 शब्दावली

9.21 स्वपरख प्रश्न

9.22 व्यावहारिक प्रश्न

9.23 उपयोगी पुस्तकें

9.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप :

- विचरण का अर्थ एवं उसे मापने के उद्देश्य समझ सकेंगे ।
- विचरण के निरपेक्ष एवं सापेक्ष मापों में अन्तर कर सकेंगे ।

- विचरण के विभिन्न मापों - विस्तार, चतुर्थक, विचलन, माध्यम विचलन एवं प्रमाप विचलन आदि का परिकलन कर सकेंगे ।
- विषमता का अर्थ समझ सकेंगे ।
- विषमता की प्रकृति धनात्मक एवं ऋणात्मक विषमता को समझ सकेंगे ।
- विभिन्न मापों से विषमता का परिकलन कर सकेंगे ।
- विचरण एवं विषमता में अन्तर कर सकेंगे ।

9.1 प्रस्तावना

संकलित किये गये सांख्यिकीय समंक एक-दूसरे से काफी भिन्न होते है । पद मूल्यों की भिन्नता के कारण ही सांख्यिकीय माध्यों यथा समान्तर माध्य, मध्यका, बहुलक के समंक माला की केन्द्रीय प्रवृति का ज्ञान हो जाता है । केन्द्रीय प्रवृति के मापों से हमें समंक माला की बनावट का पता नहीं चल पाता है अर्थात् यह ज्ञात नहीं होता है कि विभिन्न पद मूल्यों का माध्य से क्या अन्तर है? अत: किसी समंक माला का सार्थक विश्लेषण करने से उद्देश्य से न केवल केन्द्रीय प्रवृति के माप आवश्यक हैं अपितु विचरण के मापों की जानकारी भी आवश्यक है । साथ ही माध्य के किस और पदों का बिखराव अधिक है अर्थात् बंटन में व्याप्त विषमता की प्रकृति की जानकारी भी आवश्यक है ।

9.2 विचरण का अर्थ (Meaning of Variation)

विचरण से आशय समंक माला के फैलाव (Spread) या बिखराव (Scatter) से है अर्थात् समंक माला का प्रत्येक पद माध्य से कितनी दूरी पर हे या बिखरा हुआ है । अत: माध्य के दोनों ओर विभिन्न पद मूल्यों के बिखराव की सीमा को ही विचरण (Variation) कहा जाता है । इसे अपकिरण (Dispersion) भी कहते हैं विचरण शब्द का प्रयोग दोनों अर्थों में किया जाता है

1. विचरण, किसी भी समंक माला के अधिकतम व न्यूनतम मूल्यों का अन्तर या विस्तार है;
2. विचरण समंक माला के माध्य से निकाले गये विभिन्न पद मूल्यों के अन्तर का माध्यम है ।

दो समंक मालाओं का माध्यम समान होते हुए भी उनकी बनावट अर्थात् केन्द्रीय प्रवृति के माप के चारों मूल्यों में पर्याप्त अन्तर हो सकता है । ऐसे में माध्य के आधार पर लिये गये निर्णय भ्रामक हो सकते है । इसे निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है ।

उदाहरण - 1

तीन विद्यार्थियों A, B, व C के पांच विषयों में अधिकतम अंक 100 में से प्राप्त किये गये अंक निम्नानुसार है :

विषय	**A**	**B**	**C**
सांख्यिकीय	60	32	30

लेखांकन	60	48	35
मुद्रा एवं बैंकिंग	60	60	38
अर्थ शास्त्र	60	75	97
प्रबन्ध	60	85	100
कुल प्राप्तांक	300	300	300
औसत / माध्य अंक $\bar{x}$	60	60	60

उपरोक्त तीनों छात्रों के माध्यम अंक बराबर हैं । अत: माध्य के आधार पर निर्णय लिया जाए तो तीनों छात्र समान स्तर के प्रतीत होते हैं । यदि प्राप्तांकों को ध्यान से देखें तो आप पायेंगे कि प्रत्येक छात्र के प्राप्तांकों में विचरण अन्य छात्रों के प्राप्तांको में विचरण से भिन्न है।

छात्र A के प्राप्तांको में विचरण शून्य है जबकि छात्र B के प्राप्तांको में विचरण छात्र A के प्राप्तांको में विचरण से अधिक हैं तथा छात्र C के प्राप्तांको में विचरण सर्वाधिक है । यदि प्रति विषय न्यूनतम उत्तीर्ण अंक 40 हों तो छात्र B एक विषय में तथा छात्र C तीन विषयों में अनुत्तीर्ण हैं । ऐसे में माध्य के आधार पर लिया गया निर्णय अशुद्ध होगा ।

यह स्पष्ट है कि केवल माध्यों के आधार पर समंक श्रेणी की सभी विशेषताओं का ज्ञान नहीं हो पाता है । अत: समंक माला की सम्पूर्ण विशेषताओं की जानकारी के लिए अनेक सांख्यिकीय मापों यथा विचरण या अपकिरण, विषमता एवं पृथुशीर्षत्व का अध्ययन भी आवश्यक है ।

9.3 विचरण के उद्देश्य (Objects of Variation)

विचरण (अपकिरण) के मापों का परिकलन निम्न उद्देश्य से किया जाता है -

1. समंक माला के माध्य से विभिन्न पद मूल्यों की दूरी ज्ञात करना ।
2. समंक माला की बनावट जानने के लिए यह ज्ञात करना की माध्य के दोनों ओर मूल्यों का फैलाव या बिखराव कैसा है ।
3. यह ज्ञात करना कि माध्य किस सीमा तक समंक माला का प्रतिनिधित्व कर रहा है । अर्थात माध्य की विश्वसनीयता की जांच करना । माध्य से विचरण जितना कम होगा । माध्य उतना ही अधिक विश्वसनीय होगा ।
4. दो समंक मालाओं के विचरण की तुलना कर यह ज्ञात करना कि किस समंक माला में विचरण अधिक है ।
5. विचरण की प्रकृति एवं कारण ज्ञात करना ताकि स्वयं, विचरण को नियंत्रित किया जा सके ।
6. विचरण के माप अन्य सांख्यिकीय रीतियों यथा सहसम्बन्ध, विषमता एवं प्रतीपगमन आदि मे भी प्रयोग किये जाते हैं ।

विचरण के माप विभिन्न क्षेत्रों में विचरण सम्बन्धी समस्याओं का अध्ययन करने के लिए महत्वपूर्ण होते हैं । व्यापारिक एवं औद्योगिक क्षेत्रों में औसत उत्पादन, ओसत लागत एवं औसत लाभ आदि से होने वाले परिवर्तनों का विश्लेषण कर संस्था की प्रगति का अनुमान लगाया जा सकता है । विचरण के माप उत्पादन नियन्त्रण एवं किस्म नियन्त्रण में भी उपयोगी साबित हुए हैं। आर्थिक व सामाजिक क्षेत्र में आय व सम्पत्ति के वितरण के अध्ययन में भी विचरण के माप अधिक सहायक सिद्ध हुए हैं ।

9.4 चरण के अच्छे माप की विशेषताएँ

एक अच्छे विचरण माप में निम्नलिखित विशेषताएँ होनी चाहिए:

1 यह समझने एवं गणना करने में सरल होना चाहिए ।

2 यह स्पष्ट रूप से परिभाषित होना चाहिए ।

3 यह समंक माला के सभी पद मूल्यों पर आधारित होना चाहिए ।

4 इसका बीजगणितीय विश्लेषण संभव होना चाहिए ।

5 इसमें प्रतिचयन स्थिरता होनी चाहिए ।

6 यह सीमान्त मूल्यों से अधिक प्रभावित नहीं होना चाहिए ।

9.5 विचरण के निरपेक्ष एवं सापेक्ष माप

किसी भी समंकमाला के बिखराव, फैलाव, प्रसार या विचरण का माप उसी इकाई में प्रकट किया जाए, जिसमें मूल समंक हैं तो यह निरपेक्ष माप (Absolute Measure) कहलाता है ।

जैसे उदाहरण - 1 में छात्र C के प्राप्तांकों का विस्तार 100-30=70 अंक है । यह प्राप्तांको के विस्तार का निरपेक्ष माप हैं । निरपेक्ष माप में उसी इकाई में होते है जिसमें मूल समंक हैं ।

निरपेक्ष माप का मुख्य दोष है कि इसके आधार पर दो या अधिक श्रेणियों का तुलनात्मक अध्ययन संभव नहीं हैं क्योंकि विभिन्न श्रेणियों के माप अलग-अलग इकाइयों में हो सकते है । अत: तुलनात्मक अध्ययन के उद्देश्य से विचरण के निरपेक्ष माप को सम्बन्धित माध्य से भाग देने पर जो अनुपात या प्रतिशत आता है वह विचरण के सापेक्ष माप (Relative Measure) कहलाता है । इसे विचरण या अपकिरण गुणांक (Coefficient of Variation) भी कहते हैं । दो समंक मालाओं की तुलना हेतु विचरण के सापेक्ष माप का ही प्रयोग किया जाता है ।

9.6 विचरण के माप (Measures of Variation)

(अ) सीमा रीतियाँ (Methods of Limits)

1. विस्तार (Range)
2. अन्तर चतुर्थक विस्तार (Inter Quartile Range)
3. शतमक विस्तार (Percentile Range)

(ब) विचलन माध्य रीतियाँ (Methods of Averaging Deviation)

1. चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)
2. माध्य विचलन (Mean Deviation)
3. प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

(स) बिन्दुरेखीय रीतियाँ (Graphic Method)

1 लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve)

9.7 सीमा रीतियाँ (Methods of Limits)

1. विस्तार (Range)

एक समंकमाला के सबसे बड़े मूल्य (Largest Value) व सबसे छोटे मूल्य (Smallest Value) का अन्तर उसका विस्तार (Range) कहलाता है । एक सतत् श्रेणी में सबसे बड़े वर्गान्तर की उच्च सीमा व सबसे छोटे वर्गान्तर की निम्न सीमा का अन्तर उसका विस्तार कहलाता है । विस्तार के अधिक होने पर श्रेणी अनियमित होती हैं तथा कम होने पर श्रेणी नियमित होती है ।

विस्तार गणना विधि

Range or R = L-S L = Largest Value

S = Smallest Value

विस्तार गुणांक (Coefficient of Range)

$$\text{C of R} = \frac{L-S}{L+s}$$

दो समंक मालाओं की तुलना करने के लिए विस्तार का सापेक्ष माप अर्थात् विस्तार गुणांक ज्ञात करना आवश्यक है जिसकी गणना उपरोक्त सूत्र से की जाती है ।

उदाहरण - 2

नीचे दो नगरों का कुछ दिनों का तापक्रम डिग्री सेन्टीग्रेट में दिया गया है :

नगर	A	10,	12,	5,	-6,	-10,	4,	-3
नगर	B	12,	18,	14,	16,	15,	10,	10

दोनों नगरों के तापक्रम के विस्तार की तुलना कीजिए ।

हल :

	नगर A		नगर B
R_A	= L-S	R_B	= L-S
	= 12-(-10)		= 18-10
	= 12+10		= 8 डिग्री सेन्टीग्रेड
	= 22 डिग्री सेन्टीग्रेड		

दोनों नगरों के तापक्रम का तुलनात्मक अध्ययन विस्तार के निरपेक्ष माप से न करके विस्तार गुणांक से किया जाएगा ।

विस्तार गुणांक - C of R = $\frac{L-S}{L+S}$

C of R_A = $\frac{12-(-10)}{12+(-10)}$ C of R_B = $\frac{18-10}{18+10}$

= $\frac{12+10}{12-10}$ या $\frac{22}{2}$ = $\frac{8}{28}$

= 11 = 0.29

यह स्पष्ट है कि नगर A के तापक्रम में विचरण अधिक है ।

उदाहरण - 3

निम्न आंकड़ों से विस्तार एवं विस्तार गुणांक का परिकलन कीजिए -

मजदूरी (रू. में)	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
व्यक्तियों की सं.	10	20	45	30	20

हल :

सर्वप्रथम समावेशी वर्गान्तरों को अपवर्जी वर्गान्तरों में बदल लिया जाएगा । अत: प्रथम वर्ग की न्यूनतम सीमा 505 व अन्तिम वर्ग की उच्चतम सीमा 100.5 होगी ।

विस्तार (Range) विस्तार गुणांक (Coefficient of Range)

R = L-S C of R = $\frac{L-S}{L+S}$

= 100.5 - 50.5 = $\frac{100.5-50.5}{100.5+50.5}$ या $\frac{50}{151}$

Range 50 रु. विस्तार गुणांक = 0.33

विस्तार के गुण -दोष

विस्तार की गणना बहुत सरल है । एवं इसे आसानी से समझा जा सकता है। चूंकि विस्तार दो सीमान्त मूल्यों पर आधारित होता है । अत: श्रेणी के विचरण का व्यापक चित्र प्रस्तुत करता है। विस्तार का प्रयोग वस्तुओं की किस्म नियंत्रण में अधिक उपयोगी होता है।

उपयुक्त गुणों के बावजूद विस्तार का एक दोष यह है कि यह समस्त पद मूल्यों पर आधारित न होकर केवल सीमान्त मूल्यों पर आधारित है । अत: सीमान्त मूल्यों में परिवर्तन से विस्तार परिवर्तित हो जाता है । विस्तार से समंक माला की बनावट की जानकारी भी नहीं होती है । यह आवृत्ति बंटन एवं खुले सिरे वाली श्रेणी (Open Ended Series) में अनुपयुक्त है ।

विस्तार का उपयोग भौगोलिक अध्ययनों, तापक्रम का विस्तार तथा स्टॉक बाजार मे होने वाले उतार- चढ़ाव को ज्ञात करने में किया जाता है ।

1 अन्तर चतुर्थक विस्तार (Inter Quartile Range)

एक समंक माला के उच्च चतुर्थक Q_3 एवं निम्न चतुर्थक Q_1 के अन्तर को अन्तर चतुर्थक विस्तार कहते है । यह मध्यवर्ती 50 प्रतिशत पद मूल्यों का विस्तार भी कहलाता है । इसे निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है :-

$$\text{I.Q.R.} = Q_3 - Q_1$$

IQR = अन्तर चतुर्थक विस्तार

Q_3 = उच्च चतुर्थक (Upper Quartile)

Q_1 = निम्न चतुर्थक (Lower Quartile)

दोनों चतुर्थकों की गणना व्यक्तिगत श्रेणी, खण्डित श्रेणी एवं अखण्डित श्रेणी में ठीक उसी प्रकार से की जाती है जिस प्रकार. पिछली इकाई में बताया गया है ।

अन्तर चतुर्थक विस्तार के गुण -दोष

विस्तार की भांति अन्तर चतुर्थक विस्तार सरल रीति है । इस पर चरम मूल्यों का प्रभाव नहीं पड़ता है । यह चरम / सीमान्त मूल्यों पर आधारित न होकर उच्च एवं निम्न चतुर्थकों पर आधारित है । अत: यह विस्तार से श्रेष्ठ है । यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होता है। अत: श्रेणी की बनावट को स्पष्ट नहीं करता है । इसका बीजीय विवेचन संभव नहीं है । अत: यह विचरण का असंतोषजनक माप है।

शतमक विस्तार (Percentile Range)

एक समंक माला के P_{90} एवं P_{10} के अन्तर के शतमक विस्तार कहते है । इसे समंक माला के मध्यवर्ती 80 प्रतिशत पद मूल्यों को विस्तार भी कहते हैं । शतमक विस्तार का उपयोग मुख्यत: शिक्षा एवं मनोविज्ञान सम्बन्धी अध्ययनों में किया जाता है ।

शतमक विस्तार ज्ञात करने के लिए आवश्यक P_{90} एवं P_{10} की गणना पिछली इकाई में बताये गये सूत्रों के अनुसार की जाती है । शतमक विस्तार निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है:-

$$\text{P.R} = P_{90} - P_{10}$$

P.R = शतमक विस्तार

P_{90} = 90 वां शतमक

P_{10} = 10 वां शतमक

शतमक विस्तार गुणांक (Coefficient of C.R.) $\dfrac{P_{90} - P_{10}}{P_{90} + P_{10}}$

चूंकि P_{90} एवं P_{10} का मूल्य D_9 एवं D_1 के बराबर होता है । अत: इस माप को D_9 एवं D_1 के आधार पर भी ज्ञात किया जा सकता है ।

शतमक विस्तार के गुण - दोष

शतमक विस्तार रीति विचरण ज्ञात करने की अन्य सीमा रीतियों से श्रेष्ठ मानी जाती है। क्योंकि यह सीमान्त मूल्यों पर आधारित नहीं है और मध्यवर्ती 80 प्रतिशत पदों

पर आधारित है। इस रीति का मुख्य दोष है कि यह सभी पद मूल्यों पर आधारित न होकर केवल दो मूल्यों पर आधारित है, इससे श्रेणी की बनावट का ज्ञान भी नहीं हो पाता है ।

उदाहरण - 4

निम्न आंकड़ों से अन्तर चतुर्थक विस्तार, शतमक विस्तार एवं शतमक विस्तार गुणांक का परिकलन कीजिए -

भार (किग्रा में) :	42	43	44	45	46	47	48	49
छात्रों की संख्या :	3	7	10	15	20	12	8	8

हल : अन्तर चतुर्थक विस्तार, शतमक विस्तार एवं शतमक विस्तार गुणांक का परिकलन

भार (किग्रा. में)	**आवृति**	**संचयी आवृति**
42	3	3
43	7	10
44	10	20
45	15	35
46	20	55
47	12	67
48	8	75
49	5	80

$Q_1 = Size of \left[\frac{N+1}{4}\right] th$ item

$= Size of \left[\frac{80+1}{4}\right] th$ item

=Size of 20.25 Th item

$Q_1 = 45$

$Q_3 = Size of\, 3\left[\frac{N+1}{4}\right] th$ item

$= Size of\, 3\left[\frac{80+1}{4}\right] th$ item

=Size of 60.75 th item

$Q_3 = 47$

अतः अन्तर चतुर्थक विस्तार IQR = Q3-Q1

=47-45 = 2 किग्रा.

$P_{10} = Size of\, 10\left[\frac{N+1}{100}\right] th$ item

$= Size of\, 10\left[\frac{80+1}{100}\right] th$ item

= Size of 10 x.81 th item

= Size of 831 th item

$P_{10} = 43$

$P_{90} = Size of\, 90\left[\frac{N+1}{100}\right] th$ item

$= Size of\, 90\left[\frac{80+1}{100}\right] th$ item

= Size of 90 x.81 th item

= Size of 72.9 th item

$P_{90} = 48$

अतः शतमक विस्तार PR = $P_{90} - P_{10}$

= 48-43= 5 किग्रा.

शतमक विस्तार गुणांक (Coefficient of Percentile Range)

C.Of P.R $= \frac{P_{90} - P_{10}}{P_{90} + P_{10}} = \frac{48-43}{48+43} = \frac{5}{91}$ = 0.055

उदाहरण - 5

किसी परीक्षा मे 100 विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्न प्रकार हैं :-

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
विद्यार्थियों की संख्या	7	5	40	11	7

मध्यवर्ती 50 प्रतिशत एवं मध्यवर्ती 80 प्रतिशत विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का विस्तार ज्ञात कीजिए ।

हल :

मध्यवर्ती 50 प्रतिशत छात्रों के प्राप्तांकों की सीमाएँ अन्तर चतुर्थक विस्तार द्वारा एवं मध्यवर्ती 80 प्रतिशत छात्रों के प्राप्तांकों की सीमाएँ शतमक विस्तार द्वारा ज्ञात की जाएगी । अत: सर्वप्रथम उक्त समंकों से $Q_1\, Q_3 \;\; P_{10}$ एवं P_{90} का परिकलन किया जाएगा ।

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या आवृत्ति	संचयी आवृति
0-10	7	7
10-20	35	42
20-30	40	82
30-40	11	93
40-50	7	100

निम्न चतुर्थक

q_1 = Size of $\left[\frac{N}{4}\right] th$ item

= Size of $\left[\frac{100}{4}\right] th$ item

= Size of 25 th item

q_1 Group is 10-20

$$Q_1 = Li + \frac{i}{f}(q_1 - c)$$

$$= 10 + \frac{10}{35}(25-7)$$

$$= 10 + \frac{10 \times 18}{35}$$

उच्च चतुर्थक

q_3 = Size of $\left[\frac{N}{4}\right] th$ item

= Size of 3 $\left[\frac{100}{4}\right] th$ item

= Size of 75 th item

= q_3 Group is 20-30

$$Q_1 = Li + \frac{i}{f}(q_3 - c)$$

$$= 20 + \frac{10}{40}(75-42)$$

$$= 20 + \frac{10 \times 33}{40}$$

= 10+ 5.14

$Q_1 = 15.14$ अंक

=20+8.25

$Q_3 = 28.25$ अंक

अत: मध्यवर्ती 50 प्रतिशत छात्रों के प्राप्तांकों का विस्तार $= Q_3 - Q_1$

= 28.25 -15.14 = 13.11 अंक

10वां शतमक

$P_{10} = Size\ of\ 10\left[\frac{N}{100}\right] th$ item

$= Size\ of\ \left[\frac{100}{100}\right] th$ item

= Size of 10 th item

P_{10} Group is 10-20

$P_{10} = Li + \frac{i}{f}(P_{10} - c)$

$= 10 + \frac{10}{35}(10 - 7)$

$= 10 + \frac{10 \times 3}{35}$

= 10+0.86

$P_{10} = 10.86$ अंक

90 वां शतमक

$P_{90} = Size\ of\ 90\left[\frac{N}{100}\right] th$ item

$= Size\ of\ 3\left[\frac{100}{100}\right] th$ item

= Size of 90 th item

$= P_{90}$ Group is 30-40

$P_{90} = Li + \frac{i}{f}(P_{90} - c)$

$= 30 + \frac{10}{11}(90 - 82)$

$= 30 + \frac{10 \times 8}{11}$

=30+7.27

$P_{90} = 37.27$ अंक

अत: मध्यवर्ती 80 प्रतिशत छात्रों के प्राप्तांकों का विस्तार $= P_{90} - P_{10}$

= 37.27-10.86 = 26.41 अंक

9.8 चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

तृतीय चतुर्थक एवं प्रथम चतुर्थक के अन्तर का आधा चतुर्थक विचलन कहलाता है । चतुर्थक विचलन चतुर्थक विस्तार का आधा होता है । अत: इसे अर्द्ध अन्तर चतुर्थक विस्तार (Semi Inter Quartile Range) भी कहते हैं।

चतुर्थक विचलन की गणना का सूत्र :

$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ यहाँ $Q.D. =$ चतुर्थक विचलन

चतुर्थक विचलन का गुणांक (Coefficient of Quartile Deviation)

चतुर्थक विचलन विचरण का निरपेक्ष माप है । जब दो श्रेणियों का तुलनात्मक अध्ययन करना हो या विचरण की जानकारी करनी हो तो चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात किया जाता है ।

चतुर्थक विचलन गुणांक C. Of Q.D. $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

उदाहरण - 6

निम्नांकित दो श्रेणियों में विचरण की तुलना चतुर्थक मापों द्वारा कीजिए :

Wages (in Rs)	Factory X	30	40	70	60	36	34	50
Wages (in Rs)	Factory Y	20	15	16	3	18	25	20

हल :

चतुर्थक मापों द्वारा विचरण की तुलना करने के लिए सर्वप्रथम दोनों श्रेणियों के चतुर्थक गुणांक ज्ञात किये जायेंगे जिसके लिए प्रथम / निम्न चतुर्थक (Q_1) एवं तृतीय / उच्च चतुर्थक (Q_3) की गणना दोनों समंक मालाओं को आरोही क्रम में रखकर निम्नानुसार की आएगी :-

Factory X	Factory Y
Wages (in Rs)	Wages (in Rs)
30	15
34	16
36	18
40	20
50	20
60	25
70	30

कारख़ाना X

$Q_1 \quad = Size of \left[\frac{N+1}{4}\right] th$ item

$= Size\ of \left[\frac{7+1}{4}\right] th$ Item

= Size of 2nd item

Q_1 = 34 रु.

$Q_3 = Size\ of\ 3\left[\frac{N}{4}+1\right] th$ item

$= Size\ of\ 3\left[\frac{7+1}{4}\right] th$ item

Q_3 = 60 रु.

कारख़ाना Y

$Q_3 \quad Size of\ 3\left[\frac{N+1}{4}\right] th$ item

$= Size\ of\ 3\left[\frac{7+1}{4}\right] th$ item

= Size of 2nd item

$= Q_1$ = 16 रु.

$Q_3 = Size\ of\ 3\left[\frac{N}{4}+1\right] th$ item

$= Size\ of\ 3\left[\frac{7+1}{4}\right] th$ item

Q_3 = 25 रु.

चतुर्थक विचलन गुणांक C.of Q.D. = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

कारखाना X **कारखाना Y**

C. of Q.D. = $\frac{60-34}{60+34}$ or $\frac{26}{94}$ C. of Q.D. = $\frac{25-16}{25+16}$ or $\frac{9}{41}$

= 0.28 = 0.22

अत: कारखाना X में कारखाना Y की तुलना में विचरण अधिक है ।

उदाहरण - 7

निम्न समंकों से छात्रों के प्राप्तांकों का चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात करो ।

प्राप्तांक (से कम)	10	20	30	40	50	60	70
छात्रों की संख्या	3	8	15	25	33	37	40

हल :

पहले ' से कम ' की संचयी आवृति सारणी को साधारण आवृति सारणी में परिवर्तित कर दोनों चतुर्थकों की गणना निम्नानुसार की जावेगी :

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या आवृति	संचयी आवृति
0 - 10	3	3
0 - 20	5	8
20 - 30	7	15
30 - 40	10	25
40 - 50	8	33
50 - 60	4	37
60 - 70	3	40
	N =40	

चतुर्थकों का परिकलन

$q_1 = Size\ of \left[\frac{N}{4}\right] th$ item $q_3 = Size\ of\ 3\left[\frac{N}{4}\right] th$ item

$= Size\ of\ \frac{40}{4} th$ item $= Sizeof\ \frac{40}{4} th$ item

= Size of 10 th item = Size of 30 th item

अत: Q_1 वर्ग = 20 - 30 होगा । अत: Q_3 वर्ग = 40 - 50 होगा ।

$Q_1 = Li + \frac{i}{f}(q_1 - c)$ $Q_3 = Li + \frac{i}{f}(q_3 - c)$

$= 20 + \frac{10}{7}(10-8)$ $= 40 + \frac{10}{8}(30-25)$

$= 20 + \frac{10 \times 2}{7}$ $= 40 + \frac{10 \times 5}{8}$

= 20+ 2.86 = 40+ 6.25

Q_1 = 22.86 अंक Q_3 = 46.25 अंक

चतुर्थक विचलन गुणांक = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \frac{46.25 - 22.86}{46.25 + 22.86} = \frac{23.39}{69.11}$ = 0.338

चतुर्थक विचलन के गुण-दोष

चतुर्थक विचलन को समझना आसान है एवं यह गणना में सरल है । इस पर चरम मूल्यों में परिवर्तन का कम प्रभाव पड़ता हैं यदि समंकमाला के आधे भाग का अध्ययन करना हो तो यह माप उपयोगी है । इसके अनेक दोष भी हैं । समस्त पद मूल्यों पर आधारित न होने के कारण श्रेणी की बनावट का ज्ञान नहीं होता है । इसका बीजगणितीय विवेचन नहीं किया जा सकता है । इसका बहुत कम प्रयोग होता है।

9.9 माध्य विचलन (Mean Deviation)

एक समंकमाला के सांख्यिकीय माध्य (समान्तर माध्य, मध्यका एवं बहुलक) से निकाले गये विचलनों का समान्तर माध्य, उसका माध्य विचलन कहलाता है । माध्य विचलन समंकमाला के सभी पदों के विचलनों का माध्य होता है । अत: यह विचरण की विस्तार रीति एवं चतुर्थक विचलन रीति से श्रेष्ठ माप होता है । माध्य विचलन की गणना करते समय सभी विचलनों को धनात्मक माना जाता है । अर्थात विचलन चिन्हों $\pm$ की उपेक्षा कर दी जाती है ।

माध्य विचलन की गणना करते समय निम्न बातों का ध्यान रखा जाता है :-

(i) **माध्य का चयन:** माध्य विचलन समान्तर माध्य, मध्यका एवं बहुलक मे से किसी एक माध्य से ज्ञात किया जा सकता है किन्तु व्यवहार में मध्यका को ही आधार माना जाता है, क्योंकि मध्यका एक स्थिर, निश्चित एवं प्रतिनिधि माध्य है । इससे निकाले गये विचलनों का योग न्यूनतम होता है ।

(ii) **चिन्हों की उपेक्षा:** माध्य विचलन की गणना करते समय गणितीय चिन्हों (+) अथवा (-) को छोड़ दिया जाता है क्योंकि समान्तर माध्य से निकाले गये विचलनों का बीजीय योग शून्य होता है मध्यका से निकाले गये विचलनों का बीजीय योग लगभग शून्य होता है ।

(iii) **विचलनों का माध्य:** समस्त विचलनों के योग में पदों की संख्या का भाग देने पर प्राप्त मूल्य माध्य विचलन होता है । माध्य विचलन को व्यक्त करने के लिए ग्रीक वर्णमाला का अक्षर δ डेल्टा (Small delta) का प्रयोग किया जाता है तथा उपसंकेतक के रूप में उस माध्य का चिन्ह प्रयोग किया जाता है, जिससे माध्य विचलन की गणना की जा रही है ।

माध्य विचलन की गणना व्यक्तिगत एवं खण्डित श्रेणियों में निम्न सूत्रों से की जाएगी :

	व्यक्तिगत श्रेणी	खण्डित और अखण्डित श्रेणी
सामान्तर माध्य से माध्य विचलन	$\delta \overline{X} = \frac{\sum \lvert dX \rvert}{N}$	$\frac{\sum f \lvert dX \rvert}{N}$
माध्यका से माध्य विचलन	$\delta M = \frac{\sum \lvert dm \rvert}{N}$	$\frac{\sum f \lvert dm \rvert}{N}$
बहुलक से माध्य विचलन	$\delta z = \frac{\sum z \lvert dz \rvert}{N}$	$\frac{\sum \lvert dz \rvert}{N}$

माध्य विचलन गुणांक (Coefficient of Mean Deviation)

माध्य विचलन गुणांक ज्ञात करते समय माध्य विचलन के निरपेक्ष माप मे उस माध्य का भाग दिया जाता है जिससे विचलन ज्ञात किये गये हैं । अत: माध्य विचलन के सापेक्ष माप को ही माध्य विचलन गुणांक कहते हैं । इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है :

Coefficient of Mean Deviation = $\frac{\delta \overline{X},}{\overline{X},} \quad \frac{\delta m,}{M,} \quad \frac{\delta z,}{Z,}$

सामान्यत: बहुलक से माध्य विचलन का व्यवहार में प्रयोग नहीं किया जाता है ।

उदाहरण - 8

विद्यार्थियों द्वारा प्राप्तांकों से मध्यका और माध्य द्वारा माध्य विचलन और उसका गुणांक ज्ञात कीजिए :

प्राप्तांक 52, 76, 31, 46, 46, 48, 60, 60, 65, 66,

हल :

माध्यका ज्ञात करने के लिए समंक माला का आरोही क्रम में होना आवश्यक है । अत: सर्वप्रथम समंक माला को आरोही में रखकर प्रत्यक्ष रीति से निम्नानुसार माध्य विचलन ज्ञात करेंगे :

Calculation of Mean Deviation

S.No.	X	X= 55 $\lvert dx \rvert$ या $\lvert X - X \rvert$	M= 56 $\lvert dm \rvert$ या $\lvert x - m$
1	31	24	25
2	46	9	10
3	46	9	10
4	48	7	8
5	52	3	4
6	60	5	4

7	60	5	4
8	65	10	9
9	66	11	10
10	76	21	20
	$\sum$**X= 550**	$\sum \lvert d\overline{X} \rvert = 104$	$\sum \lvert dm \rvert = 104$

Median M = $Size of \left[\frac{N+1}{2}\right] th$ item Mean $\overline{X} = \frac{\sum X}{N}$

= $Size of \left[\frac{10+1}{2}\right] th$ item $\overline{X} = \frac{550}{10}$

= Size of 5.5th item $\overline{X} = 55$

$= \frac{Size of\ 5^{th}\ item + 6^{th}\ item}{2}$

M = $\frac{52+60}{2}$ = 56

मध्यका से माध्य विचलन $\delta m = \frac{\sum|dm|}{N} = \frac{104}{10}$ = 10.4

माध्य से विचलन गुणांक = $\frac{\delta m}{m} = \frac{10.4}{56}$ = 0.186

माध्य से माध्य विचलन $\delta \overline{X} = \frac{\sum|d\overline{X}|}{N} = \frac{104}{10}$ = 10.4

माध्य विचलन गुणांक = $\frac{\delta \overline{X}}{X} = \frac{10.4}{55}$ = 0.189

लघु रीति (Short cut Method)

व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य विचलन लघु रीति से भी ज्ञात किया जा सकता है ।

मध्यका से माध्य विचलन की गणना की प्रक्रिया :

(i) सर्वप्रथम मध्यका (M) का निर्धारण करें ।

(ii) मध्यका मूल्य से बड़े पद मूल्यों का योग ($\sum$XA) एवं मध्यका से छोटे पद मूल्यों का योग ($\sum$XB) ज्ञात करें ।

(iii) निम्न सूत्र से माध्य विचलन ज्ञात करें :

$$\delta m = \frac{\sum XA - \sum XB}{N}$$

समान्तर माध्य से माध्य विचलन की गणना प्रक्रिया :-

1. सर्वप्रथम समान्तर माध्य ($\overline{X}$) का निर्धारण करें ।
2. समान्तर माध्य से बड़े पद मूल्यों का योग ($\sum$XA) एवं समान्तर माध्य से छोटे पद मूल्यों का योग ($\sum$XB) ज्ञात करें ।

3. समान्तर माध्य से बड़े पदों की संख्या (NA) एवं समान्तर माध्य से छोटे पदों की संख्या (NB) ज्ञात करें ।

4. निम्न सूत्र से समान्तर माध्य से माध्य विचलन ज्ञात करें :

$$\delta X = \frac{\sum XA - \sum SB - (NA - NB)\overline{X}}{N}$$

यहाँ : δm = माध्यका से माध्य विचलन ।

$\delta \overline{X}$ = समान्तर माध्य से माध्य विचलन ।

$\sum XA$ = माध्य से बड़े पद मूल्यों का योग (Sum of the items above the Mean/Median)

$\sum XB$ = माध्य से छोटे पद मूल्यों का योग (Sum of the items below the Mean/Median)

NA = माध्य से बड़े पदों की संख्या ।

NB = माध्य से छोटे पदों की संख्या ।

N = कुल पदों की संख्या ।

उदाहरण - 9

उदाहरण - 8 की सूचनाओं से मध्यका से माध्य विचलन की गणना लघु रीति (Short cut Method) से करें ।

हल: उदाहरण 8 में दी गई गणना के अनुसार मध्यका (M) = 56 है ।

अत: $\sum XA$ = 60+60+65+66+76 =327

$\sum XB$ = 31+46+46+48+52 =223

$$\delta m = \frac{\sum XA - \sum XB}{N} = \frac{327-223}{10} = \frac{104}{10} = 10.4$$

उदाहरण - 8 में की गई गणना के अनुसार समान्तर माध्य ($\overline{X}$) = 55 है ।

अत: $\sum XA$ = 60+60+65+66+76 = 327

$\sum XB$ = 31+46+46+48+52 =223 NA = 5, NB = 5, N = 10

$$\delta X = \frac{(327-223)-(5-5)55}{10} = \frac{104-(0)\times 55}{10}$$

$$= \frac{104-0}{10} = \frac{104}{10} = 10.4$$

उदाहरण - 10

निम्न श्रेणी से माध्य तथा मध्यका से माध्य विचलन एवं उसका गुणांक ज्ञात करिये:

Size :	10	15	20	25	30	35
Frequency:	7	20	24	30	10	6

हल :

Calculation of Mean Deviation from Median and Mean

Size X	f	fx	From Median M=20 (X-M) $\lvert dm \rvert$	$f\lvert dm \rvert$	From Mean $\overline{X}$ =22 (X-$\overline{X}$) $\lvert d\overline{X} \rvert$	$f\lvert d\overline{X} \rvert$	CF
10	7	70	10	70	12	84	7
15	20	300	5	100	7	140	27
20	24	480	0	0	2	48	51
25	30	750	5	150	3	90	81
30	13	390	10	130	8	104	94
35	3	210	15	90	13	78	100
	$N=100$	$\sum fx = 2200$		$\sum f\lvert dm \rvert = 540$		$\sum f\lvert d\overline{X} \rvert = 544$	

मध्यका से माध्य विचलन

Median = Size of $\frac{N+1}{2}^{th}$ item

= Size of $\frac{100+1}{2}^{th}$ item

= size of 50.5 th item

$\delta m = \frac{\sum f\lvert dm \rvert}{N} = \frac{540}{100}$ = 5.40

C.of $\delta m = \frac{\delta m}{m} = \frac{5.40}{20}$ = 0.27

समान्तर माध्य से माध्य विचलन

Mean = $\frac{\sum fx}{N}$

$= \frac{2200}{100}$

$\overline{X}$ = 22

$\delta \overline{X} = \frac{\sum d\overline{X}}{N} = \frac{544}{100}$ = 5.44

C.of $\delta \overline{X} = \frac{\delta \overline{X}}{\overline{X}} = \frac{5.44}{22}$ = 0.247

अखण्डित या सतत् श्रेणी (Continuous Series)

अखण्डित या सतत् श्रेणी के अन्तर्गत प्रत्यक्ष रीति से माध्य विचलन निकालने की वही रीति है जो खण्डित श्रेणी में प्रयुक्त होती है । मुख्य अन्तर यह है कि अखण्डित श्रेणी में वर्गान्तरों के मध्य बिन्दु निकालने होते है जिन्हें (X) माना जाता है जबकि खण्डित श्रेणी में (X) दिये हुये होते हैं । शेष क्रियाएँ पूर्ववत् रहती है ।

उदाहरण - 11

कुछ कम्पनियों की दैनिक बिक्री के निम्न समंकों से माध्य एव मध्यका से माध्य विचलन एवं उनके गुणांक ज्ञात कीजिए :

बिक्री (000 रूपये में)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
कम्पनियों की संख्या	5	15	25	30	20	5

हल : Calculation of Mean Deviation from Median and Mean

Sales	Mid	f	fx	Median=41.67	Mean= 41	cf

in(' 000 Rs.)	value X			(X-M)		(X- $\overline{X}$)		
				$\lvert dm \rvert$	$f\lvert dm \rvert$	$\lvert d\overline{X} \rvert$	$f\lvert d\overline{X} \rvert$	
10-20	15	5	75	26.67	133.35	26	130	5
20-30	25	15	375	16.67	250.05	16	240	20
30-40	35	25	875	6.67	166.75	6	150	45
40-50	45	30	1350	3.33	99.90	4	120	75
50-60	55	20	1100	13.33	266.60	14	280	95
60-70	65	5	325	23.33	166.65	24	120	10
		N= 100	$\Sigma fx = 4100$		$\sum f\lvert dm \rvert = 1033.3$		$\sum f\lvert d\overline{X} \rvert$ =1040	

मध्यका (Median)

$$m = \left[\frac{N}{2}\right]th$$

$= \frac{100}{2}$ = 50th item

Median Group is =40-50

$$M = Li + \frac{i}{f}(m-c)$$

$$= 40 + \frac{10}{30}(50-45)$$

$M = 40 + \frac{1 \times 5}{3}$ =41.67

मध्यका से माध्य विचलन एवं गुणांक

$\delta m = \frac{\Sigma f\lvert dm \rvert}{N} = \frac{1033.3}{100}$ = 10.33

C.of $\delta m = \frac{\delta m}{m} = \frac{10.33}{41.67}$ = 0.248

समान्तर माध्य (Mean)

$$X = \frac{\Sigma fx}{N}$$

$= \frac{4100}{100}$ =41

समान्तर माध्य से माध्य विचलन

$\delta \overline{X} = \frac{\Sigma f\lvert d\overline{X} \rvert}{N} = \frac{1040}{100}$ = 10.40

C of $\delta \overline{X} = \frac{\Sigma \overline{X}}{X} = \frac{10.40}{41}$ =0.254

खण्डित एवं अखिण्डत श्रेणी में लघु रीति से माध्य विचलन की गणना :

खण्डित श्रेणी में माध्य विचलन की गणना का आधार मूल्य (X) दिया हुआ होता है जबकि अखण्डित श्रेणी में वर्गान्तरों के मध्य बिन्दु को मूल्य (X) माना जाता है, शेष गणना निम्नानुसार की जाती है :-

(i) जिस माध्य से माध्य विचलन की गणना की जानी है उसे ज्ञात करें ।

(ii) मूल्य/मध्य मूल्य एवं आवृति (f) का गुणनफल (fx) ज्ञात करें ।

(iii) माध्य मूल्य से बड़े मूल्यों एवं उनकी आवृतियों के गुणनफल का योग एवं ($\sum$fa) माध्य मूल्य से छोटे मूल्यों एवं उनकी आवृतियों के गुणनकल का योग ($\sum$fb) ज्ञात करें।

(iv) ठीक माध्य मूल्य के बराबर वाले मूल्य एवं उसकी आवृति के गुणनफल को छोड़ दिया जाता है।

(v) समंकमाला की कुल आवृति ($\sum$f) ज्ञात करें । निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है :

(vi) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है:

मध्यका से
$$\delta m = \frac{\sum fx_A - \sum fx_B - [\sum f_A - \sum f_B]M}{\sum f}$$

स. माध्य से
$$\delta\bar{\times} = \frac{\sum fx_A - \sum fx_B - [\sum f_A - \wp\sum f_B]\bar{\times}}{\sum f}$$

यहाँ $\sum fx_A$ = सम्बन्धित माध्य से बड़े मूल्यों एवं उनकी आवृतियों के गुणनफल का योग ।

$\sum fX_B$ = सम्बन्धित माध्य से छोटे मूल्यों एवं आवृतियों के गुणनफल का योग ।

$\sum f_A$ = सम्बन्धित माध्य से बड़े मूल्यों की आवृत्तियों का योग ।

$\sum f_B$ = सम्बन्धित माध्य से छोटे मूल्यों की आवृत्तियों का योग ।

$\sum f$ = कुल आवृत्तियों का योग ।

उदाहरण - 12

उदाहरण - 11 में दी गई सूचनाओं से माध्य एवं मध्यका से माध्य विचलन एवं उनके गुणांक का परिकलन लघु रीति (Short Cut Method) से कीजिए ।

हल :

Calculation of Mean Deviation from Median and

Seles (Rs'000)	mid Value X	f	fx	Median Mean(m) = 41.67	Mean($\bar{\times}$)=41
10-20	15	5	75	$\sum f_B$=1325	$\sum fx_B$=1325
20-30	25	15	375	$\sum f_B$=45	$\sum f_B$=45
30-40	35	25	875		
40-50	45	30	1350		
50-60	55	20	1100	$\sum fx_A$=2775	$\sum fx_A$=2775
60-70	65	5	325	$\sum f_A$=55	$\sum f_A$=5

		$\sum f = 100$			

मध्यका से माध्य विचलन

$$\delta m = \frac{\sum fx_A - [\sum fx_B - \sum f_A - \sum f_B]M}{\sum f}$$

$$= \frac{2775 - 1325 - (55-45)41.67}{100}$$

$$= \frac{1450 - 416.7}{100} \qquad = \frac{1033.3}{100}$$

$$\delta m = 10.33$$

C. of $\delta m = \dfrac{\delta m}{M} = \dfrac{10.33}{41.67}$ = 0.248

माध्य से माध्य विचलन

$$\delta X = \frac{\sum fx_A - [\sum fx_B - \sum f_A - \sum f_B]M}{\sum f}$$

$$= \frac{1450 - (10 \times 41)}{100}$$

$$= \frac{1050 - 410}{100} \quad = \frac{1040}{100}$$

$$\delta m = 10.33$$

C. of $\delta \bar{\times} = \dfrac{\delta \bar{\times}}{\bar{\times}} = \dfrac{10.40}{41}$

=0.254

माध्य विचलन के गुण-दोष :

माध्य विचलन समझने में आसान एवं गणना करने में सरल है । यह समंकमाला के सभी पद मूल्यों पर आधारित है । यह चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होता है । इसका मुख्य दोष यह है कि इनकी गणना में गणितीय चिन्हों की उपेक्षा कर दी जाती है । चिन्हों को छोड़ देने के कारण यह माप अशुद्ध एवं अवैज्ञानिक हो जाता है, अत: उच्च गणना में प्रयोग नहीं रहता है । अन्य दोष यह भी है कि इसकी गणना माध्य, मध्यका एवं बहुलक के आधार पर की जा सकती है । अत: यह अनिश्चित माप होती है ।

उक्त दोषों के बावजूद माध्य विचलन आर्थिक, सामाजिक एवं व्यापारिक क्षेत्रों में पर्याप्त रूप से उपयोग किया जाता है । आय व धन के वितरण सम्बन्धी असमानताओं का अध्ययन इसी रीति द्वारा किया जाता है ।

9.10 प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

अभी तक विचरण के जिन मापों का वर्णन किया गया है । उनका मुख्य दोष यह है कि या तो वे दो मूल्यों पर आधारित हैं या माध्य विचलन की गणना में चिन्हों का परित्याग कर दिया जाता है। अत: वह गणितीय रूप में अशुद्ध है ऐसी दशा में एक समंकमाला के विचरणों के परिकलन का सर्वोतक माप प्रमाप विचलन ही है ।

प्रमाप विचलन विचरण का सर्वोत्तम माप है क्योंकि इसकी गणना हमेशा समान्तर माध्य से ही की जाती है एवं माध्य से लिये गये विचलनों के चिन्हों की उपेक्षा नहीं की जाती है अपितु उनका वर्ग कर लिया जाता है जिससे ऋणात्मक चिन्ह भी धनात्मक हो जाते हैं। अन्त में विचलन वर्गो का माध्य ज्ञात कर उसका वर्ग मूल ज्ञात कर लिया जाता है । यही प्रमाप विचलन का मूल्य होता है ।

प्रमाप विचलन का सर्वप्रथम प्रयोग प्रसिद्ध सांख्यिक कार्ल पियर्सन के द्वारा किया गया था । प्रमाप विचलन किसी समंकमाला के समान्तर माध्य से लिये गये विचलनों के

वर्गों के समान्तर माध्य का वर्गमूल होता है । इसे माध्य विभ्रम (Mean Error), माध्य-वर्ग विभ्रम (Mean Square Error) आदि भी कहा जाता है ।

प्रमाप विचलन का गुणांक (Coefficient of Standard Deviation)

प्रमाप विचलन एक निरपेक्ष माप (Absolute Deviation) है जबकि दो श्रेणियों का तुलनात्मक अध्ययन करने हेतु प्रमाप, विचलन का सापेक्ष माप ज्ञात किया जाता है, जिसे प्रमाप विचलन का गुणांक

(Coefficient of standard Deviation) कहा जाता है जिसे निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है:-

$$Cofficient\ of\ S.D = \frac{\sigma}{x} \text{ or } \frac{\text{Standard Deviation}}{\text{Mean}}$$

व्यक्तिगत श्रेणी में प्रमाप विचलन ज्ञात करने की प्रक्रिया

(अ) प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)

1. श्रेणी का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए
2. विभिन्न पद मूल्यों का समान्तर माध्य से विचलन d= $\left(X - \bar{\times}\right)$ ज्ञात कीजिए ।
3. विचलनों के वर्ग का उनका जोड़ $\sum d^2$ ज्ञात कीजिए ।
4. विचलन वर्गों के जोड़ में पदो की संख्या का भाग दीजिए $\sum d^2 \div N$
5. प्राप्त भागफल का वर्गमूल ज्ञात कीजिए । यही प्रमाप विचलन है ।

इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है :-

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}} \text{ या } \sqrt{\frac{\sum\left(X - \bar{\times}\right)^2}{N}}$$

यहाँ - σ = प्रमाप विचलन का संकेत ।

$\sum d^2$ = माध्य से विचलन वर्गो का योग ।

N = पदों की संख्या

उदाहरण - 13

एक फर्म की मासिक बिक्री के निम्न आंकड़ों से प्रमाप विचलन और उसका गुणांक ज्ञात कीजिए।

Month	Jan.	Feb.	Mar.	Apr.	May.	June.	July.	Aug.	Sep.	Oct.	Nov.	Dec.
Sales (in '000 Rs)	10	12	18	25	40	32	32	24	37	15	15	40

हल:

Calculation of Standard Deviation (Direct Method)

Month	Sales (in '000 Rs.)	X=25 $(X - \bar{\times})$ =d	d^2

January	10	-15	225
February	12	-13	169
March	18	-7	49
April	25	0	0
May	40	15	25
June	32	7	49
July	32	7	49
August	24	-1	1
September	37	12	144
October	15	-10	100
November	15	-10	100
December	40	15	225
N = 12	$\sum x$ = 300		$\sum d^2$ =1336

समान्तर माध्य $(\bar{\times})$ $\frac{\sum X}{N} = \frac{300}{12}$

प्रमाप विचलन

$$6 = \sqrt{\frac{\sum d^2}{N}} = X = \sqrt{\frac{1336}{12}}$$

$$\sigma = \sqrt{111.33}$$

σ = 10.55 रु.

प्रमाप विचलन का गुणांक

C. of S.D. $\frac{\sigma}{\bar{\times}}$

$= \frac{10.55}{25}$ = 0.422

(ब) लघु रीति (Short Cut Method)

प्रमाप विचलन ज्ञात करने की प्रत्यक्ष रीति तभी सरल रहती है जब समान्तर माध्य का मूल्य पूर्णांक में हो । यदि समान्तर माध्य का मूल्य दशमलव में हो तो प्रत्यक्ष रीति से प्रमाप विचलन की गणना जटिल हो जाती है । ऐसे में प्रमाप विचलन गणना की लघु रीति का प्रयोग उचित रहता है । लघु रीति से प्रमाप विचलन ज्ञात करने की प्रक्रिया :

1. किसी भी एक मूल्य को कल्पित माध्य (A) मान लिया जाता है ।
2. कल्पित माध्य से प्रत्येक पद मूल्य का विचलन dx = (X-A) निकालकर उनका योग $\sum dx$ ज्ञात किया जाता है ।
3. विचलनों के वर्ग करके उनका जोड़ $\sum d^2x$ ज्ञात करते हैं ।
4. निम्न में से किसी एक सूत्र का प्रयोग करके प्रमाप विचलन ज्ञात कर लेते हैं:-

(i) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2x}{N} - \left[\frac{\sum dx}{N}\right]^2}$ (ii)) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2x}{N} - \left(\bar{\times} - A\right)^2}$

मूल्य (X) एवं उनके वर्गो (X^2) के आधार पर प्रमाप विचलन

कल्पित माध्य दिये मूल्यों में से किसी मूल्य को न मानकर, यदि शून्य (0) को माना जाए तो ऐसी स्थिति में dx = X (पद मूल्य) के एवं $d^2x = x^2$ के होगा अर्थात् प्रमाप विचलन की गणना मूल्यों के योग ($\sum x$) एवं उनके वर्गो के योग $\left(\sum x\right)^2$ के आधार पर निम्न सूत्र से की जा सकती है :-

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \left[\frac{\sum x}{N}\right]^2} \quad \text{या} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \left(\bar{\times}\right)^2}$$

चूंकि A = 0 है ।

उदाहरण - 14

उदाहरण -13 में दिये गये समंकों से लघु रीति का प्रयोग करके प्रमाप विचलन की गणना कीजिए।

हल :

Calculation of Standard Deviation (Short-cut Method)

Month	**Sales (in '000 Rs)**	**A = 32 (X-A) = dx**	d^2x	x^2
January	10	-22	484	100
February	12	-20	400	144
March	18	-14	196	324
April	25	-7	49	625
May	40	8	64	1600
June	32	0	0	1024
July	32	0	0	1024
August	24	-8	64	576
September	37	5	25	1369
October	15	-17	289	225
November	15	-17	289	225
December	40	8	64	1600
N= 12	$\sum x$=300	$\sum dx$=(21-105)=-84	$\sum d^2x$=1924	$\sum x^2$=8836

$\bar{\times}$=A+$\frac{\sum dx}{N}$; 32+ $\frac{-84}{7}$; 32-7=25 हजार रु.

प्रथम सूत्र के अनुसार द्वितीय सूत्र के अनुसार

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2x}{N} - \frac{\sum dx^2}{N}} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2x}{N} - \left(\overline{X} - A\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1924}{12} - \left[\frac{-84}{12}\right]^2} \qquad = \sqrt{\frac{1924}{12} - (25-32)^2}$$

$$= \sqrt{160.33 - 49} \qquad = \sqrt{160.33 - (-7)^2}$$

$$= \sqrt{111.33} \qquad = \sqrt{111.33}$$

σ = 10.55 हजार रु. $\qquad$ σ = 10.55 हजार रु.

मूल संख्या = X एवं उनके वर्गो = X^2 के आधार पर प्रमाप विचलन

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - \left[\frac{\sum x}{N}\right]^2}$$

$$= \sqrt{\frac{8836}{12} - \left[\frac{300}{12}\right]^2}$$

$$= \sqrt{736.33 - 625}$$

$$= \sqrt{111.33}$$

σ =10.55 हजार रु.

खण्डित श्रेणी में प्रमाप विचलन ज्ञात करने की प्रक्रिया

(अ) प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)

1. श्रेणी का समान्तर माध्य ($\bar{\times}$) ज्ञात कीजिए ।
2. विभिन्न पद मूल्यों का समान्तर माध्य से विचलन D = ($X - \bar{\times}$) ज्ञात कीजिए ।
3. विचलनों के वर्ग d^2 ज्ञात कीजिए ।
4. विचलनों के वर्गो को उनकी आवृत्ति से गुणा कर उनका योग $\sum fd^2$ ज्ञात कीजिए ।
5. निम्न सूत्र का प्रयोग कीजिए

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}} \qquad \text{या} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum f\left(X - \bar{\times}\right)^2}{N}}$$

उदाहरण - 15

निम्न समंकों से प्रत्यक्ष रीति द्वारा प्रमाप विचलन एवं उसका गुणांक (Coefficient of S.D.) ज्ञात कीजिए ।

आकार :	20	22	24	26	28	30	32
आवृति :	3	5	9	16	8	7	2

हल :

Calculation of Standard Deviation (Direct-Method)

Size X	f	$\overline{X}$ =26$\left(X - \bar{\times}\right)$	d^2	fd^2	fx

20	3	-6	36	108	60
22	5	-4	16	80	110
24	9	-2q	4	36	216
26	16	0	0	0	416
28	8	2	4	32	224
30	7	4	16	112	210
32	2	6	36	72	64
N = 50				$\sum fd^2$ **=440**	$\sum fx$ **=1300**

$\overline{X} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{1300}{50}$ $\qquad$ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}} = \sqrt{\frac{440}{50}}$ या $\sqrt{8.8}$

= 2.966 आकार

C. of S.D. $\frac{\sigma}{\overline{\overline{X}}} = \frac{2.966}{26}$ 0.114

(ब) लघु रीति (Short-cut Method)

यदि किसी समंकमाला का समान्तर माध्य दशमलव में आता है तो प्रत्यक्ष रीति से प्रमाप विचलन की गणना क्रिया जटिल हो जाती है । ऐसी स्थिति में कल्पित माध्य (A) से विचलन लेकर प्रमाप विचलन का परिकलन निम्न लघु रीति से करना चाहिए :

1. दिये हुये मूल्यों में से किसी एक मूल्य को कल्पित माध्य मान लीजिए ।
2. कल्पित माध्य से विभिन्न मूल्यों का विचलन dx=(X-A) ज्ञात कीजिए ।
3. विचलनों को उनकी आवृति (f) से गुणाकर fdx ज्ञात कीजिए तथा इस fdx को पुन: dx से गुणा कर fd^2x ज्ञात करें ।
4. उक्त (3) में परिकलित fdx एवं fd^2x का योग $\sum fdx$ एवं $\sum fd^2x$ ज्ञात करे ।
5. निम्न सूत्रों में से एक का प्रयोग कर प्रमाप विचलन ज्ञात करें:-

(i) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2x}{N} - \left[\frac{\sum fdx}{N}\right]^2}$ $\qquad$ (ii) $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2x}{N} - \left(\overline{X} - A\right)^2}$

यदि A = 0 मानें तो मूल्यों एवं मूल्यों के वर्गो सें भी प्रमाप विचलन ज्ञात किया जा सकता हैं। इसके लिए मूल्यों (X) एवं उनके वर्गो (X^2) को आवृति (F) से गुणा कर उनके योग $\sum x^2 f$ एवं $\sum fx$ ज्ञात करें ।

तत्पश्चात् निम्न सूत्र से प्रमाप विचलन ज्ञात करें :-

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum X^2 f}{N} - \left[\frac{\sum fx}{N}\right.^2} \qquad \text{या} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{N} - \left(\overline{X}\right)^2}$$

उदाहरण - 16

उदाहरण - 15 के समंकों की सहायता से लघु रीति का प्रयोग कर प्रमाप-विचलन का परिकलन कीजिए ।

हल :

Size X	f	A=30 (X-A) dx	fdx	fd^2x	मूल्यों के वर्ग एवं आवृति का गुणनफल fx	x^2	x^2f
20	3	-10	-30	300	60	400	1200
22	5	-8	-40	320	110	484	2420
24	9	-6	-54	324	216	576	5184
26	16	-4	-64	256	416	676	10816
28	8	-2	-16	32	224	784	6272
30	8	0	0	0	210	900	6300
32	2	2	4	8	64	1024	2048
	N=50		$\sum fdx$=200	$\sum fd^2x$=1240	$\sum fx$=1300		$\sum x^2f$=34240

$\overline{X}$ = A+ $\frac{\sum fdx}{N}$; 30+ $\frac{-200}{50}$ या 30-4=26 हजार रू.

A = 30 के आधार पर प्रमाप विचलन मूल्यों के वर्गो के आधार परप्रमाप विचलन

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2x}{N} - \left[\frac{\sum fdx}{N}\right]^2} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{N} - \left[\frac{\sum fx}{N}\right]^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1240}{50} - \left[\frac{-200}{50}\right]^2} \qquad = \sqrt{\frac{34240}{50} - \left[\frac{-1300}{50}\right]^2}$$

$$= \sqrt{24.8 - 16} \qquad = \sqrt{684.8 - 676}$$

$$= \sqrt{8.8} \qquad = \sqrt{8.8}$$

= 2.966 =2.966

अखण्डित श्रेणी में प्रमाप विचलन

अखण्डित श्रेणी में प्रमाप विचलन ज्ञात करने से पहले प्रत्येक वर्ग के मध्य मूल्य (X) का परिकलन किया जाता है तथा शेष प्रक्रिया खण्डित श्रेणी की भांति ही अपनायी जाती है । अखण्डित श्रेणी में प्रमाप विचलन निम्न रीतियों से ज्ञात कर सकते हैं :-

1. प्रत्यक्ष रीति (By Direct Method)

2. लघु रीति (By Short Cut Method)
3. पद विचलन रीति (By Step Deviation Method)

अखण्डित श्रेणी में प्रमाप विचलन ज्ञात करने की प्रत्यक्ष रीति एवं लघु रीति में उन्हीं सूत्रों का प्रयोग किया जाता है जो खण्डित श्रेणी में प्रयोग किये जाते हैं । प्रमाप विचलन का परिकलन पद विचलन रीति में निम्नानुसार किया जाता है :-

– कल्पित माध्य (A) से विचलन dx का परिकलन करते हैं ।

– वर्ग विस्तार के बराबर उभयनिष्ठ गुणांक ज्ञात किया जाता है । $d'x = dx \div i$

– $d'x$ का आवृत्ति से गुणा कर $fd'x$ एवं उनका योग $\sum fd'x$ ज्ञात करते हैं।

– $fd'x$ को $d'x$ से गुणा कर $fd^{2'}x$ एवं उनका योग $\sum fd^{2'}x$ ज्ञात करते हैं ।

– निम्न में से किसी एक सूत्र का प्रयोग कर प्रमाप विचलन ज्ञात करते हैं ।

(i) $\sigma = ix\sqrt{\frac{\sum fd'^2 x}{N} - \left[\frac{\sum fd'x}{N}\right]}$ (ii) $\sigma = \frac{i}{n}\sqrt{\sum fd'^2 N - [\sum fd'x]^2}$

उदाहरण - 17

निम्नलिखित समंकों से प्रत्यक्ष एल लघु रीति द्‌वारा समान्तर माध्य व प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए ।

Marks (Less then)	60	50	40	30	20	10
No. of Students	100	96	86	45	18	5

हल :

सर्वप्रथम 'से कम' संचयी बारम्बारता सारणी को साधारण श्रेणी में परिवर्तित कर आरोही क्रम में रखकर निम्नानुसार प्रमाप विचलन का परिकलन करेंगे :

Marks	Mid Value X	f	$\bar{x}$=30 d=$(X - \bar{x})$	d^2	fd^2	fx
0-10	5	5	-25	625	3125	25
10-20	15	13	-15	225	2925	195
20-30	25	27	-5	25	675	675
30-40	35	41	5	25	1025	1435
40-50	45	10	15	225	2250	450
50-60	55	4	25	625	2500	220
		$\sum f$ =100			$\sum fd^2$ =12500	$\sum fx$ =3000

समान्तर माध्य प्रमाप विचलन

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}}$$

$$= \frac{3000}{100} \qquad = \sqrt{\frac{12500}{100}} \text{ या } \sqrt{125}$$

$\bar{x}$=30 अंक σ = 11.18 अंक

Calculation of Mean and Standard of Deviation (Short Cut Method)

Marks	Mid Value X	f	A=35 (X-A) dx	fdx	fd^2x

0-10	5	5	-30	-150	4500
10-20	15	13	-20	-260	5200
20-30	25	27	-10	-270	2700
30-40	35	41	0	0	0
40-50	45	10	10	100	1000
50-60	55	4	20	80	1600
		$\sum f$ =100		$\sum fdx =$ (180-680)-500	$\sum fd^2x$ =15000

समान्तर माध्य

$$\bar{x} = A + \sqrt{\frac{\sum fdx}{N}}$$

$$= 35 + \frac{-500}{100}$$

= 35 -5

$\bar{x}$ = 30

प्रमाप विचलन

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2x}{N} - \left[\frac{\sum fdx}{N}\right]^2}$$

$$= \sqrt{\frac{15000}{100} - \left[\frac{-500}{100}\right]^2}$$

$= \sqrt{150 - 25}$ या $= \sqrt{125}$

6 = 11.18

उदाहरण - 18

निम्नलिखित समंकों से प्रमाप विचलन तथा उसका गुणांक ज्ञात कीजिए ।

Wages (in Rs.)	No. of Person
48 &Above	5
40 and above	15
32-40	20
16-32	45
8-24	32
Less then 16	20
Less then 8	8

हल :

सर्वप्रथम प्रश्न में दी हुई बारम्बारता सारणी को 8-8 के वर्ग वाली साधारण बारम्बारता सारणी में परिवर्तित कर प्रत्येक वर्ग की आवृत्ति ज्ञात करेंगे तथा पद विचलन रीति से प्रमाप विचलन की गणना करेंगे :-

Calculation of Standard Deviation and its coefficient (Step deviation Method)

Wages (in Rs.)	Mid Value X	No. of Person f	A = 28 (X-A) dx	$dx \div i$	fd'^2x	$fd'x$

				i=8 $d'x$		
0-8	4	8	-24	-3	-24	72
8-16	12	12(20-8)	-16	-2	-24	48
16-24	20	20(32-12)	-8	-1	-20	20
24-32	28	25(45-20)	0	0	0	0
34-40	36	20	8	1	20	20
40-48	44	10(15-5)	16	2	20	40
48-56	52	5	24	3	15	45
		$\sum f$ =100			$\sum fd'x$ =(-13)	$\sum fd'^2x$ =245

समान्तर माध्य

$$\bar{\times} = A + \frac{\sum fd'x}{N} \times I$$

$$= 28 + \frac{-13}{100} \times 8$$

= 28-1.04

$\bar{\times}$ =26.96

प्रमाप विचलन

$$\sigma = ix\sqrt{\frac{\sum fd'^2x}{N} - \left[\frac{\sum fd'x}{N}\right]^2}$$

$$= 8 \times \sqrt{\frac{245}{100} - \left[\frac{-13}{100}\right]^2}$$

$= \sqrt{8x2.45 - 0.169}$

= 8 x 1.56

या 6 =12.48

प्रमाप विचलन गुणांक

Coefficient of Standard Deviation = $\frac{\delta}{\bar{\times},}$ = $\frac{12.48}{26.96}$ = 0.463

9.11 प्रसरण एव विचरण गुणांक (Variance and coefficient of Variation)

9.11.1 प्रसरण

किसी भी समंकमाला के समान्तर माध्य से लिये गये विचलनों के वर्गों का माध्य ही प्रसरण कहलाता है । दूसरे शब्दों में किसी भी समंकमाला के प्रमाप विचलन का वर्ग प्रसरण होता -है । इसे अपकिरण की द्वितीय घात भी कहते हैं । इसकी गणना निम्नानुसार की जा सकती है :-

(i) Variance or V = $\sigma x \sigma = \sigma^2$

(ii) V = $\frac{\sum d^2}{N}$ (व्यक्तिगत श्रेणी में)

(iii) V = $\frac{\sum fd^2}{N}$ (खण्डित एवं अखण्डित श्रेणी में)

9.11.2 विचरण गुणांक (Coefficient of Variation)

प्रमाप विचलन एक निपेक्ष माप है जबकि दो या अधिक समंक मालाओं की तुलना करने के लिए सापेक्ष माप ज्ञात करना जरूरी होता है प्रमाप विचलन गुणांक भी सापेक्ष माप है किन्तु इसका मान एक से कम एवं दशमलव में आता है । अत: दो श्रेणियों की तुलना करने में असुविधा होती है । अत: विचरण गुणांक का प्रयोग किया जाता है ।

विचरण गुणांक वास्तव में प्रमाप विचलन गुणांक का प्रतिशत रूप है अर्थात् प्रमाप विचलन को समान्तर माध्य से भाग देकर 100 से गुणा करने पर जो प्रतिशत आता है वही प्रतिशत ही विचरण गुणांक है ।

Coefficient of Variation of C.V. = $\frac{\sigma}{\bar{\times}}$ x 100

कार्ल पियर्सन के अनुसार "विचरण गुणांक माध्य में होने वाला प्रतिशत विचरण है जबकि प्रमाप विचलन माध्य में होने वाला कुल विचरण है ।" विचरण गुणांक का उपयोग दो श्रेणियों में स्थिरता (Stability), एकरूपता (Uniformity), सजातीयता (Homogeneity), संगतता (consistencey), की जांच के लिए किया जाता है जिस समंकमाला का विचरण गुणांक अधिक होता है, वह रेणी अधिक स्थिर, असंगत, एवं ज्यादा विचरण वाली मानी जाती है जबकि दूसरी श्रेणी ज्यादा एकरूप, स्थिर एवं संगत मानी जाती है ।

उदाहरण - 19

एक फूटबॉल मैंच में दो टीमों A और B के द्वारा किये गये गोलों की संख्या निम्न प्रकार थी :-

No. of Goals	0	1	2	3	4
No. of Match A:	27	9	8	5	4
B:	17	9	6	5	3

बताइये कौनसी टीम का खेल अधिक संगत या स्थिर है ।

हल :

Calculation of Mean and coefficient of Variation

No of Goals Scored	A=2 (X-A)	Team - A			Team - B		
X	dx	f_A	fdx	fd^2x	f_B	fdx	fd^2x
0	-2	27	-54	108	17	-34	68
1	-1	9	9	9	9	-9	9
2	0	8	0	0	6	0	0

3	1	5	5	5	5	5	5
4	2	4	8	16	3	6	12
		N_A =53	$\sum fd \times_A$ =-50	$\sum fd^2 \times_B$ =138	N_B =40	$\sum fd \times_B$ = -32	$\sum fd^2 \times_A$ =94

Team - A

$$\overline{X_A} = A + \frac{\sum fd \times_A}{N}$$

$$= 2 + \frac{-50}{53}$$

$\overline{X_A}$ = 2-0.94 = 1.06

$$\delta_A = \sqrt{\frac{\sum fd^2 \times_A}{N} - \left[\frac{\sum fd \times_A}{N}\right]^2}$$

$$= \sqrt{\frac{138}{53} - \left[\frac{-50}{53}\right]^2}$$

$\delta_A = \sqrt{2.6 - 0.890}$ = 1.31

C.V. $= \frac{\delta}{\overline{X}} \times 100 = \frac{1.31}{1.06} \times 100$

C.V. =123.58%

Team - B

$$\overline{X_B} = A + \frac{\sum fd \times_B}{N}$$

$$= 2 + \frac{-32}{40}$$

$\overline{X_B}$ = 2-0.8 = 1.20

$$\delta_B = \sqrt{\frac{\sum fd^2 \times_B}{N} - \left[\frac{\sum fd^2 \times_B}{N}\right]^2}$$

$$= \sqrt{\frac{94}{40} - \left[\frac{-32}{40}\right]^2}$$

$\delta_A = \sqrt{2.35 - 0.64}$ = 1.31

C.V. $= \frac{\delta}{\overline{X}} \times 100 = \frac{1.31}{1.2} \times 100$

C.V. = 109.17%

टीम - B का खेल अधिक संगत है क्योंकि उसमें विचरण की मात्रा कम है ।

9.12 प्रमाप विचलन की गणितीय विशेषताएँ तथा गुण दोष

9.12.1 गणितीय विशेषताएँ

1. यदि किसी समंकमाला के प्रत्येक पद मूल्य में एक निश्चित संख्या जोड़ी जाए या घटायी जाए तो प्रमाप विचलन अपरिवर्तित रहेगा ।
2. यदि किसी समंकमाला के प्रत्येक पद मूल्य को एक निश्चित संख्या से गुणा किया जाए अथवा भाग दिया जाए तो प्रमाप विचलन भी उसी अनुपात में बढ़ जाएगा या कम हो जाएगा अर्थात प्रमाप विचलन पर भी समान प्रभाव पड़ेगा ।
3. यदि दो या अधिक समंकमालाओं का समान्तर माध्य $\overline{X_1}\,\overline{X_2}$ .... $\overline{X_n}$ प्रमाप विचलन σ_1, σ_2 .... σ_n एवं पदों की संख्या N_1, N_2 .... N_n ज्ञात हो तो सामूहिक प्रमाप विचलन (Combined Standard Deviation) ज्ञात किया जा सकता है जिसकी गणना निम्न सूत्र से की जाती है :-

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{N_1(\partial_1^2 + D_1^2) + N_2(\partial_2^2 + D_2^2).......}{N_1 + N_2}}$$

σ_1, σ_2 ....= प्रत्येक श्रेणी / समूह के प्रमाप विचलन का वर्ग ।

N_1, N_2 ....= प्रत्येक श्रेणी में पदों की संख्या ।

D_1, D_2 ....= प्रत्येक श्रेणी के समान्तर माध्य का सामूहिक समान्तर माध्य से अन्तर ।

$\overline{x}^{12}$ =सामूहिक समान्तर माध्य ।

$$D_1 = (\overline{X_1} - \overline{X}_{12}) ; \qquad D_2 = \overline{X_2} - \overline{X}_{12}$$

4. किसी भी समंकमाला के समान्तर माध्य से परिकलित विचलन वर्गो का योग अन्य किसी भी माध्य से प्राप्त विचलन वर्गो के योग की तुलना में न्यूनतम होता है । इसी कारण प्रमाप विचलन की गणना समान्तर माध्य से की जाती है ।

5. क्रमिक प्राकृतिक अंकों का प्रमाप विचलन निम्न सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{12}(N^2 - 1)}$$

5. एक प्रसामान्य वक्र का क्षेत्रफल उसके समान्तर माध्य एवं प्रमाप विचलन से सम्बन्ध रखता है । इसके फलस्वरूप एक प्रसामान्य एवं असममित बंटन $\overline{X} \pm \sigma$ में 68-27%, $\overline{X} \pm 2\sigma$ में 95 .45% तथा $\overline{X} \pm 3\sigma$ में 99.73% मूल्यों का समावेश होता है ।

9.12.2 प्रमाप विचलन के गुण-दोष

प्रमाप विचलन अपकिरण का सर्वोत्तम माप माना जाता है क्योंकि इसमें एक अच्छे माप की सभी विशेषताएँ मौजूद हे । प्रमाप विचलन के निम्नलिखित गुण है :-

- यह समंक माला के सभी पद मूल्यों पर आधारित होता है ।
- इसमें विचलनों की गणना आदर्श माध्य ($\overline{X}$) से होने के कारण उच्चतर गणितीय रीतियों में इसका काफी प्रयोग किया जाता है ।
- इसका बीजगणितीय विवेचन किया जा सकता है ।
- प्रमाप विचलन प्रतिचयन उच्चावचनों से सबसे कम प्रभावित होता है ।
- यह एक स्पष्ट एवं निश्चित माप है ।
- प्रमाप विचलन दो समंकमालाओ में विचरणों की तुलना करने, प्रसामान्य वक्र के अधीनस्थ क्षेत्रफल ज्ञात करने, प्रतिदर्श में विभिन्न मापों की जांच करने आदि मे अधिक उपयोगी रहता है । इसीलिए यह आदर्श माप कहलाता है ।

उक्त गुणों के उपरान्त इसके कुछ दोष भी है जिनमें इसकी गणन क्रिया अन्य मापों की तुलना में जटिल होना एवं चरम मूल्यों को अधिक महत्व देना आदि है । इसलिए इसका अर्थशास्त्र एवं व्यापारिक क्षेत्र में सीमित प्रयोग होता है ।

9.13 लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve)

अपकिरण का बिन्दुरेखीय रीति द्वारा भी प्रदर्शन किया जा सकता है । इस रीति का सर्वप्रथम प्रयोग डॉ. मैक्स ओ लॉरेंज द्वारा किया गया था इसलिए इसे लॉरेंज वक्र कहते हैं । इस रीति का प्रयोग मुख्य रूप से आय एवं सम्पत्ति की विषमता को मापने के लिए किया गया था जो अब लाभ, मजदूरी एवं बिक्री आदि के अध्ययन के लिए भी प्रयोग किया जाता है । इस रीति का मुख्य दोष यह है कि दो बंटनों की विषमता को वक्र के माध्य से केवल प्रदर्शित किया जा सकता है लेकिन संख्यात्मक मापन इससे संभव नहीं है । इसकी बनाने की क्रिया कठिन है ।

लॉरेंज वक्र बनाने की विधि निम्न है :-

1. सर्वप्रथम मूल्यों या मध्य मूल्यों के संचयी योग ज्ञात किये जाते हैं एवं संचयी योग को संचयी प्रतिशत में बदल दिया जाता है ।
2. मूल्यों के समान ही आवृत्तियों को संचयी आवृत्ति एवं संचयी आवृत्ति प्रतिशत में बदल दिया जाता है ।
3. भुजाक्ष (X-axis) पर संचयी आवृत्तियों के प्रतिशत 100 से आरम्भ कर 0 तक दर्शाते हैं तथा कोटि अक्ष (Y-axis) पर संचयी मूल्य के प्रतिशत 0 से 100 तक दर्शाते हैं ।
4. भुजाक्ष पर 0 को कोटी अक्ष पर 100 से जोड़ती हुई एक सीधी रेखा खींचते हैं । इसके "समान वितरण रेखा" (Line of Equal Distribution) कहते हैं ।
5. प्रत्येक बंटन के सम्बन्धित संचयी आवृति प्रतिशत एवं संचयी मूल्यों के प्रतिशत रेखाचित्र पर अंकित कर विभिन्न बिन्दुओं को मिलाने से जो वक्र तैयार होगा वही लॉरेंज वक्र कहलाता है ।
6. लॉरेंज वक्र समान वितरण रेखा के जितना पास होगा, विचरण की मात्रा उतनी ही कम होगी और लॉरेंज वक्र समान वितरण रेखा में जितना दूर होगा विचरण की मात्रा उतनी ही अधिक होगी ।

उदाहरण - 20

दो कारखानों में मजदूरी वितरण की असमानताओं की तुलना करने के लिए एक लॉरेंज वक्र बनाइए ।

मजदूरी रू.		:	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150
मजदूरों की सं.	A	:	20	15	20	25	20
	B	:	150	100	125	75	50

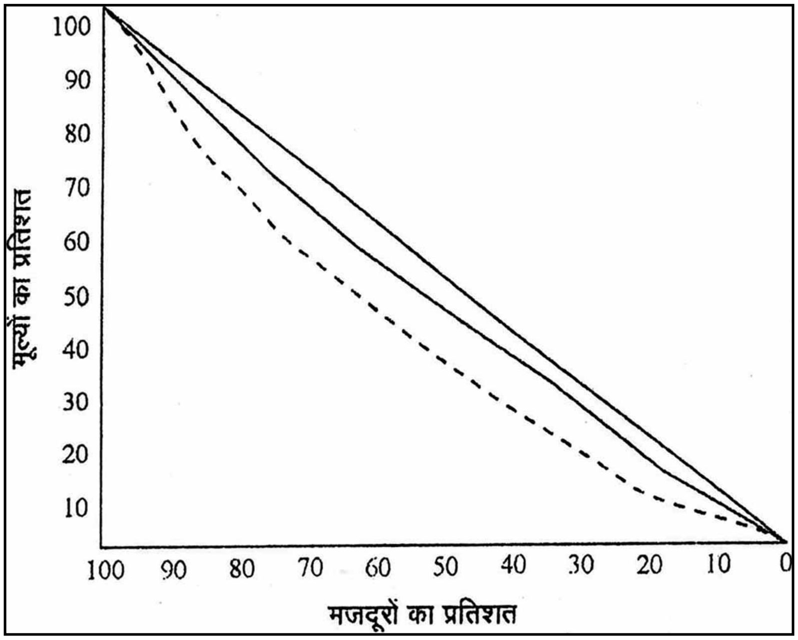
हल :

Calculation of Comulative Percentage of Values & Frequency

Wages Mid Value	Comulative Wages	Cum. %	Factory A			Factory B		
			No.of	Cum.	Cum.	No.of	Cum.	Cum.

			Workers	f	%	Workers	f	%
60	60	12	20	20	20	150	150	30
80	140	28	15	35	35	100	250	50
100	240	48	20	55	55	125	375	75
120	360	72	25	50	80	75	450	90
140	500	100	20	100	100	50	500	100

ऊपर वर्णित प्रक्रिया का अनुसरण करते हुए भुजाक्ष (X-axis) पर संचयी प्रतिशत आवृत्ति एक कोटि अक्ष (Y-axis) पर संचयी प्रतिशत मजदूरी को लेकर लॉरेंज वक्र बनायेंगे । चित्र -1 को देखें ।



चित्र -1

उपरोक्त चित्र को देखने से स्पष्ट है कि कारखाना - B का वक्र समान वितरण रेखा के कारखाना - A के वक्र की तुलना में अधिक दूर है । अत: कारखाना - B में विचरण अधिक है ।

9.14 विषमता का अर्थ (Meaning of Skewness)

एक समंकमाला की केन्द्रीय प्रवृति की जानकारी सांख्यिकीय माध्य से हो जाती है तथा समंक माला की बनावट की जानकारी विचरण के मापों से हो जाती है किन्तु इन दोनों मापों से ज्ञात नहीं हो पाता है कि समंकमाला का स्वरूप कैसा है अर्थात् वह सममित है या असममित है । आवृति बंटन के स्वरूप को जानने के लिए विषमता के मापों का प्रयोग किया जाता है ।

यदि एक आवृत्ति बंटन में आवृतियाँ उसके माध्य से समान दूरी पर समान रूप से स्थित हैं तो ऐसे बंटन को सममित बंटन कहते हैं । किसी भी समंकमाला में

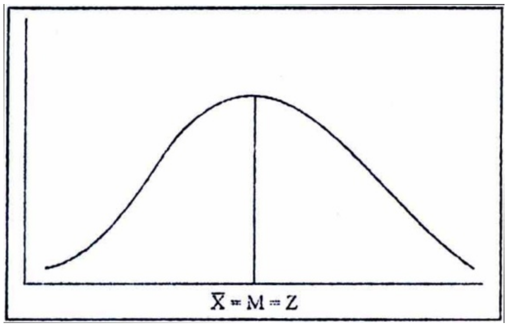
सममितता के अभाव को विषमता (Skewness) कहते हैं । विषमता का माप एक ऐसा संख्यात्मक माप होता है जो किसी समंक माला की असममितता की प्रकृति को स्पष्ट करता है । इस प्रकार विषमता के माप से हमें यह पता चलता है कि यदि आवृत्ति बंटन का वक्र बनाया जाए तो वह सममित होगा या असममित तथा असममित बंटन की दिशा क्या होगी ।

विषमता के अर्थ को ठीक रूप से समझने के लिए आवृत्ति बंटन के दोनों प्रकारों को समझना आवश्यक है । ये दो प्रकार के हो सकते हैं : (1) सममित बंटन (2) असममित बंटन ।

(1) **सममित बंटन :** सममित बंटन में आवृत्तियाँ एक निश्चित क्रम में बढ़ती हैं तथा अधिकतम होने के बाद उसी क्रम में आवृत्तियाँ घटती है । यदि आवृत्तियों को हम बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रदर्शित करें तो उनका वक्र घन्टी के आकार वाला (Bell Shaped) होगा जिसे प्रसामान्य वक्र (Normal Curve) कहते हैं । यदि आवृति वक्र के सर्वोच्च बिन्दु रो भुजाक्ष अक्षर पर एक रेखा खींची जाए तो यह रेखा वक्र को ठीक दो भागों में बांट देगी । ऐसा वक्रपूर्ण सममित होगा जिसमें विषमता का अभाव होता है । इसे निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है :-

Size	:	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75
F	:	4	8	15	26	15	8	4

उक्त बंटन में आवृतियों का जमाव देखने से स्पष्ट है कि आवृत्तियाँ जिस क्रम से बढ़ी है तथा अधिकतम आवृत्ति 26 के बाद उसी क्रम में घटी हैं । उक्त बंटन का यदि समान्तर माध्य मध्यका एवं बहुलक का परिकलन किया जाए तो समान = 40 होगा अर्थात $\overline{X}$ =Z=M=40 है । इस प्रकार के बंटन में विषमता नहीं होती ।



चित्र-2

(2) **असममित बंटन :** असममित बंटन में आवृत्तियों के बढ़ने व घटने से क्रम में कोई समान्ता नहीं होती है अर्थात आवृत्तियाँ जिस क्रम में बढ़ी हैं उसी कम में आवृत्तियाँ घटती नहीं है । ऐसे बंटन का वक्र घन्टीनुमा नहीं होता है यह शीर्ष से एक ओर अधिक झुका हुआ होता है । इसे निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है :-

Size : 5-15 15-25 25-35 35-45 45-55 55-65 65-75

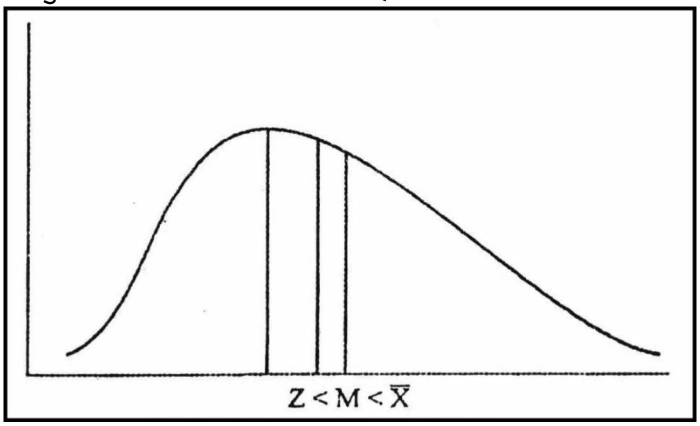
F_A	:	4	8	30	15	11	8	4

ऐसे बंटन में यदि समान्तर माध्य, मध्यका एवं बहुलक ज्ञात किये जाए तो तीनों समान नहीं आते हैं । ऐसे बंटन में विषमता पायी जाती है ।

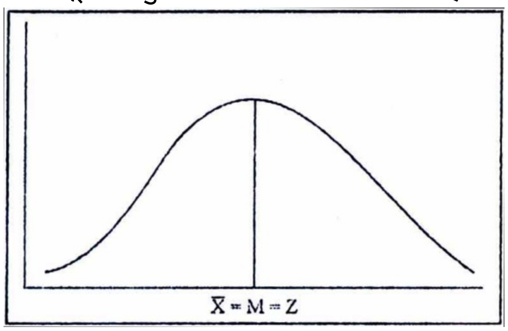
9.15 विषमता के प्रकार

विषमता दो प्रकार की होती है : धनात्मक विषमता एवं ऋणात्मक विषमता

1. धनात्मक विषमता (Positive Skewness) यदि असममित बंटन का वक्र केन्द्र से दाहिनी ओर अधिक झुका हो तो ऐसे बंटन में धनात्मक विषमता पायी जाती है । ऐसे बंटन के माध्यों में अन्तर होता है । समान्तर माध्य का मूल्य मध्यका से एवं मध्यका का मूल्य बहुलक से अधिक होता है अर्थात् $\overline{X} > M > Z$



2. ऋणात्मक विषमता (Negative Skewness) यदि असममित बंटन का वक्र केन्द्र से बायीं ओर अधिक झुका हुआ हो तो ऐसे बंटन में ऋणात्मक विषमता पायी जाती है । ऐसे बंटन के माध्यों में भी असमानता होती है । समानतर माध्य का मूल्य मध्यका से कम एवं मध्यका का मूल्य बहुलक से कम होता है अर्थात् $\overline{X} > M > Z$



चित्र-4

9.16 विषमता की जांच (Test of Skewness)

किसी समंकमाला में विषमता की जांच निम्न आधार पर की जा सकती है :-

1. **माध्यों का सम्बन्ध :** यदि बंटन में समान्तर माध्य, मध्यका एवं बहुलक एवं बहुलक का मूल्य समान नहीं हो तो बंटन में विषमता होती है । समान्तर माध्य एवं बहुलक में जितना अधिक अन्तर होता है विषमता की मात्रा उतनी अधिक होती है अर्थात् $\overline{X} \neq M$ या $\overline{X} \neq Z$

2. विचलनों का योग : यदि बंटन के मध्यका एवं बहुलक से निकाले गये विचलनों का बीजगणितीय योग शून्य न हो तो बंटन में विषमता होती है । विचलनों का योग शून्य तभी हो सकता है जब मध्यका एवं बहुलक का मूल्य समान्तर माध्य से बराबर हो ।

3. मध्यका से विभाजन मूल्यों की दूरी : यदि बंटन में दोनों चतुर्थकों की मध्यका से दूरी समान नहीं हो तो बंटन में विषमता पायी जाती है अर्थात् $(Q_3 - M) \neq (M - Q_1)$

4. बहुलक से दोनों ओर आवृत्ति : यदि बहुलक के दोनों ओर की आवृत्तियों का योग समान नहीं हो तो विषमता पायी जाती है ।

5. वक्र: यदि बंटन को बिन्दुरेखीय पत्र पर अंकित करने पर बनने वाला चित्र घन्टीनुमा न हो तो बंटन में विषमता पायी जाती है ।

9.17 विषमता के माप (Measures of Skewness)

किसी भी बंटन में विषमता की मात्रा एवं प्रकृति की जानकारी करने हेतु विषमता के माप का प्रयोग किया जाता है । विषमता के माप निरपेक्ष (Absolute) हो सकते हैं अथवा सापेक्ष (Relative) । विषमता के निरपेक्ष माप के बंटन में व्याप्त विषमता की कुल मात्रा एवं उसकी प्रकृति (धनात्मक एवं ऋणात्मक) ज्ञात होती है लेकिन दो समंकमालाओ के मध्य विषमता की तुलना निरपेक्ष माप के आधार पर नहीं की जा सकती है । अत: विषमता की तुलना हेतु सापेक्ष माप ज्ञात किये जाते है जिन्हें विषमता गुणांक (Co-efficient of Skewness) कहा जाता है विषमता के सापेक्ष माप की गणना, विषमता के निरपेक्ष माप को उपयुक्त आधार से भाग देकर की जाती है । विषमता गुणांक को संकेताक्षर J से व्यक्त किया जाता है ।

विषमता मापन की रीतियाँ निम्न है :

1. **विषमता का प्रथम माप :** यह माप समंकमाला के माध्यों की स्थिति पर आधारित है । अत: इस माप को 'माध्य स्थिति रीति (Position of Average Method) भी कहते है । एक असममित बंटन में समान्तर माध्य, मध्यका एवं बहुलक में अन्तर पाया जाता है । अत: इन माध्यों का अन्तर ही विषमता का प्रथम माप कहलाता है । विषमता गुणांक ज्ञात करने के लिए इस माप को प्रमाप विचलन से भाग दे दिया जाता है । कार्ल पिर्यसन का विषमता गुणांक सर्वश्रेष्ठ माना जाता है ।

कार्ल पिर्यसन का विषमता माप	**कार्ल पिर्यसन का विषमता गुणांक**
$SK = \overline{X} - Z$	$J = \dfrac{(\overline{X} - Z)}{\sigma}$

यहाँ S.K. = Skewness J = Coefficient of Skewness

वैकल्पिक सूत्र - यदि किसी बंटन मं बहुल का मूल्य अस्पष्ट हो अर्थात बहुलक निर्धारण संभव न हो तो माध्यों के सम्बन्ध के आधार पर विषमता मापन के निम्न वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग किया जाता है :

$$SK = 3(\overline{X} - M) \qquad J = \frac{3(\overline{X} - M)}{\sigma}$$

उक्त वैकल्पिक सूत्र इस मान्यता पर आधारित है कि थोडे विषम बंटन में बहुलक का मूल्य माध्यों के अर्न्तसम्बन्ध के आधार पर निम्न सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है :

$$Z = 3M - 2\overline{X}$$

विषमता माप की सीमाएँ गुणांक सदैव ± 1 के मध्य होता है लेकिन कार्ल पिर्यसन के वैकल्पिक सूत्र से परिकलित विषमता गुणांक की सीमा ± 3 होगी । यदि बंटन में विषमता गुणांक शून्य हो तो विषमता नहीं होगी ।

उदाहरण - 21

निम्न समंकों से अपकिरण गुणांक और विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए ।

मजदूरी (रू. मे)	:	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150
व्यक्तियों की संख्या	:	12	18	35	42	50	45	20	8

हल :

अपकिरण गुणांक एवं विषमता गुणांक का परिकलन करने पूर्व समान्तर माध्य ($\overline{X}$), बहुलक (Z), एवं प्रमाप विचलन (σ)की गणना की जाएगी।

Calculation of Mean and Standard Deviation

Wages (in Rs.)	Mid Value X	No.of Persons f	A=115(S-A) dx	i=10 dx÷i $d'\times$	$fd'\times$	$fd'^2\times$
70-80	75	12	-40	-4	-48	192
80-90	85	18	-30	-3	-54	162
90-100	95	35	-20	-2	-70	140
100-110	105	42	-10	-1	-42	42
110-120	115	50	0	0	0	0
120-130	125	45	10	1	45	45
130-140	135	20	20	2	40	80
140-150	145	8	30	3	24	72
		N=230			$\sum fd'\times$=(109-214) =-105	$\sum fd'^2\times$ =733

समान्तर माध्य

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd'\times}{N} \times i$$

$$= 115 + \frac{-105}{230} \times 10$$

प्रमाप विचलन

$$\sigma = i \times \sqrt{\frac{\sum fd'^2\times}{N} - \left[\frac{\sum fd'\times}{N}\right]^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{\frac{733}{230} - \left[\frac{-105}{230}\right]^2}$$

$\overline{X} = 110.43$

$= 10\sqrt{3.187 - 0.208}$

$\sigma = 17.26$

बहुलक

$$Z = Li + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

सर्वाधिक आवृति 50 है

अतः बहुलक वर्ग 110-120 होगा।

$\Delta_1 = |50 - 42| = 8$

$\Delta_2 = |50 - 45| = 5$

$Z = 110 + \frac{8}{8+5} \times 10$

=110+6.15

Z= 116.15

प्रमाप विचलन गुणांक

C of S.D. $= \frac{\partial}{\overline{X}} = \frac{17.26}{110.43}$ =0.156

विषमता गुणांक

$J = \frac{\overline{X} - Z}{\sigma} = \frac{110.43 - 116.15}{17.26}$

$= \frac{-5.72}{17.26}$ =-0331

2. **विषमता का द्वितीय माप :** यह माप किसी समंकमाला में उसकी मध्यका से दोनों चतुर्थकों की दूरी पर आधारित है । यदि मध्यका से प्रथम चतुर्थक एवं तृतीय चतुर्थक की दूरी समान नहीं है तो बंटन में विषमता होती है इस माप का सर्वप्रथम प्रयोग डॉ. बाउले द्वारा किया गया था । अतः इसे बाउले का विषमता गुणांक कहते है । इसे विषमता का चतुर्थक माप भी कहते हैं क्योंकि यह मध्यक एवं दोनों चतुर्थको की सापेक्षिक स्थिति पेर निर्भर करता है । बाउले का विषमता माप एवं गुणांक का सूत्र निम्न है ।

बाउले का विषमता माप

$$SKq = (Q_3 - M) - (M - Q_1)$$

$$= Q_3 + Q_1 - 2M$$

बाउले का विषमता गुणांक

$$J_Q = \frac{Q_3 + Q_{1-} 2M}{Q_3 - Q_1}$$

उदाहरण -22

निम्न आकड़ों से चतुर्थक विचलन गुणांक एवं विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए । (बाउले का सूत्र प्रयोग करें)

Marks	:	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30
No of Students	:	10	8	12	5	7	8

हल:

चतुर्थक विचलन गुणांक एवं विषमता गुणांक का परिकलन करने के लिए $Q_1 + Q_3$ एवं M की आवश्यकता होगी । अत: इनका परिकलन करेंगे । श्रेणी समावेशी है अत: इसे असमावेशी में परिवर्तित करेंगे

Calculation of coefficient of Dispersion & Bowley's Coefficient of Skewness

Marks	No.of Persons F	Cf
0.5-5.5	10	10
5.5-10.5	8	18
10.5-15.5	12	30
15.5-20.5	5	35
20.5-25.5	7	42
25.5-30.5	8	50

प्रथम चतुर्थक

$q_1 =$ Size of $\frac{N}{4}$ th item

$=$ Size of $\frac{50}{4}$ th item

$q_1 =$ Size of 12.5 th item

Q_1 Class = 5.5-10.5

$Q_1 = Li + \frac{i}{f}(q_1 - c)$

$= 5.5 + \frac{5}{8} \times (12.5 - 10)$

$= 5.5 \times \frac{2.5}{8}$

$Q_1 =$ 5.5+1.56

$Q_1 =$ 7.06

तृतीय चतुर्थक

$Q_3 =$ Size of $\frac{3N}{4}$ th item

= Size of $\frac{3 \times 50}{4}$ th item

$Q_3 =$ Size of 37.5 th item

Q_3 Class = 20.5-25.5

$Q_3 = Li + \frac{i}{f}(q_3 - c)$

$= 20.5 + \frac{5}{7} \times (37.5 - 35)$

$= 20.5 \times \frac{5 \times 2.5}{7}$

=20.5+1.786

$Q_1 =$22.286

मध्यका -

m= Size of $\frac{N}{2}$ th item या Size of $\frac{50}{2}$ th item

m = size of 25^{th} item

median Class = 10.5-15.5

$M = Li + \frac{i}{f}(m - c)$ या $10.5 + \frac{5}{12} \times (25 - 18)$

$= 10.5 + \frac{5 \times 7}{12}$ या 10.5+2.92 या 13.42

चतुर्थक विचलन गुणांक

C of Q.D. $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \dfrac{22.286 - 7.06}{22.286 - 7.06}$

$= \dfrac{15.226}{29.346}$ = 0.519

बाउले का विषमता गुणांक

J.Q. $= \dfrac{Q_3 + Q_{1-} 2M}{Q_3 - Q_1}$

$= \dfrac{22.286 + 7.06 - (2 \times 13.42)}{22.286 - 7.06}$

$= \dfrac{29.346 - 26.84}{15.226}$ = 0165

3. **विषमता का तृतीय माप :** इसी रीति के अनुसार विषमता का निरपेक्ष माप, तृतीय अपकिरण घात का घनमूल होता है । विषमता गुणांक ज्ञात करने के लिए तृतीय घात को प्रमाप विचलन से भाग दे दिया जाता है व्यवहार में इसका बहुत कम प्रयोग किया जाता है इसके सूत्र निम्न है :-

$SK._3 = 3\sqrt{\dfrac{\sum d_3}{N}}$ (व्यक्तिगत श्रेणी में)

$SK._3 = 3\sqrt{\dfrac{\sum fd_3}{N}}$ (खण्डित एवं अखण्डित श्रेणी में)

विषमता गुणांक $j_3 = \dfrac{SK_3}{\sigma}$

9.18 विचरण एवं विषमता में अन्तर

1. विचरण / अपकिरण के द्वारा श्रेणी के विभिन्न पद मूल्यों का फैलाव या बिखराव या बंटन की बनावट का ज्ञात होता है जबकि विषमता के माप से यह ज्ञात होता है कि आवृत्ति वक्र सममित हे या असममित । यदि वक्र असममित है तो विषमता धनात्मक है या ऋणात्मक ।
2. विचरण से पूरी समंकमाला के फैलाव या बिखराव का पता चलता है जबकि विषमता से माध्य के दोनों ओर के विचरणों की तुलना हो जाती है यह ज्ञात होता है कि विषमता धनात्मक है या ऋणात्मक है ।
3. विचरण के माप द्वितीय श्रेणी के माध्यों पर आधारित है जबकि विषमता के माप एवं विषमता गुणांक प्रथम श्रेणी एवं द्वितीय श्रेणी के माध्यमों पर आधारित है ।
4. विचरण के माप प्राय: धनात्मक होते हैं जबकि विषमता के माप धनात्मक या ऋणात्मक हो सकते है ।
5. विचरण का ज्ञात बिन्दुरेखीय चित्र से नहीं किया जा सकता जबकि विषमता की जानकारी बिन्दु रेखीय चित्र से हो सकती है ।

9.19 सारांश

विचरण समंकमाला के फैलाव या बिखराव को बताता है । इसका उपयोग माध्य से विभिन्न पद मूल्यों का औसत विचरण ज्ञात करने के लिए किया जाता है । विचरण का परिकलन माध्य की विश्वसनीयता का जांच करने के लिए भी किया जाता हैं । दो

या अधिक समंकमालाओं को तुलना विचरण के सापेक्ष माप अर्थात् गुणांक के आधार पर की जाती है । एक अच्छा विचरण माप सभी पद मूल्यों पर आधारित होना चाहिए तथा वह प्रतिचयन उच्चावनों से प्रभावित नहीं होना चाहिए एवं उसका बीजगणितीय विवेचन भी संभव होना चाहिए ।

विस्तार, अन्तर चतुर्थक विस्तार, शतमक विस्तार एवं चतुर्थक विचलन दो मूल्यों पर ही आधारित माप है । माध्य विचलन की गणना में गणितीय चिन्हों की उपेक्षा कर दी जाती है । अत: ये अच्छे माप नहीं माने जाते हैं । प्रमाप विचलन में उक्त दोष नहीं है तथा समान्तर माध्य पर आधारित होने के कारण विचलन वर्गों का योग न्यूनतम होता है । अत: प्रमाप विचलन एक आदर्श माप माना जाता है ।

विचरण के माप सम्पूर्ण समंक माला के विचरण पर प्रकाश डालते हैं । उनसे समक माला में आवृत्तियों के जमाव की जानकारी एवं केन्द्र से किस ओर बिखराव कम है एवं किस ओर अधिक है इसकी जानकारी नहीं मिलती है अत: विषमता के मापों का परिकलन किया जाता है जिनसे समंक माला में व्याप्त विषमता एवं उसकी प्रकृति की जानकारी हो जाती है ।

9.20 शब्दावली

विस्तार - किसी समंकमाला के सबसे बड़े व छोटे मूल्य का अन्तर ।

अंतर चतुर्थक विस्तार - विचरण का एक माप जो Q3-Q1 पर आधारित है ।

चतुर्थक विचलन - अन्तर चतुर्थक विस्तार का आधा ।

माध्य विचलन - अन्तर चतुर्थक विस्तार का आधा ।

माध्य विचलन - समान्तर माध्य, मध्यका या बहुलक से 'निरपेक्ष विचलनों का माध्य ।

प्रमाप विचलन - समान्तर माध्य से विचलन, वर्गों के माध्य का वर्गमूल ।

प्रसरण - प्रमाप विचलन का वर्ग ।

विचरण गुणांक - प्रमाप विचलन गुणांक की प्रतिशत अभिव्यक्ति ।

लॉरेंज वक्र - एक दोहरा संचयी प्रतिशतों का रेखाचित्र जिसका उपयोग दो समंकमालाओं में विचरण की जानकारी करने हेतु किया जाता है ।

सममित बंटन - ऐसा आवृत्ति बंटन जिसमें आवृत्तियों के बढ़ने एवं घटने का क्रम समान हो ।

विषमता - सममितता का अभाव ही विषमता कहलाता है ।

9.21 स्वपरख प्रश्न

1. विषमता का क्या अर्थ है?
2. विचरण के निरपेक्ष एवं सापेक्ष माप में अन्तर बताइए ।
3. चतुर्थक विचलन से क्या आशय है?
4. विस्तार एवं विस्तार गुणांक में अन्तर बताइए ।
5. अन्तर चतुर्थक विस्तार एवं चतुर्थक विचलन में अन्तर कीजिए ।

6. प्रमाप विचलन किसे कहते है? इसकी विशेषताएँ बताइए ।

7. विचरण गुणांक क्या है एवं यह प्रमाप विचलन से किस प्रकार भिन्न है ?

8. विषमता का अर्थ एवं इसकी प्रकृति को बताइए ।

9. अपकिरण एवं विषमता में क्या अन्तर है?

9.22 व्यावहारिक प्रश्न (Practical Question)

1. एक नगर में कुछ दिनों का तापक्रम सी.जी. (माप) में दिया गया है -

15, 20,-4, 8 16, 30, -10

विस्तार एवं उसका गुणांक ज्ञात कीजिए ।

(Ans. R=30 Cofficient of R=3)

2. एक समंकमाला का विस्तार गुणांक 0.85 है तथा अधिकतम मूल्य 760 हो तो न्यून्तम मूल्य बताइए ।

(Ans. 62)

3. निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन और उसका गुणांक ज्ञात कीजिए ।

ऊचाई :	150	151	152	153	154	155	156	157	158
छात्रों की सं.	15	20	32	35	33	22	20	12	10

(***Ans. $Q_{3=}$153 $Q_{3=}$155 Q.D.=15 and Cofficient of Q.D.=0.01)***

4. निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए ।

Marks	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
No. of Student	3	9	12	30	8	6	6	5

(Ans. Cofficient of Q.D.=0.342)

5. एक फैक्ट्री के 500 श्रमिकों की मजदूरी निम्न प्रकार है । चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए ।

Wages(In Rs.)	90-100	80-90	70-80	60-70	50-60	40-50
No. of Workers	185	120	92	60	30	13

(Ans. Cofficient of Q.D.=0.126)

6. चतुर्थक विचलन का प्रयोग करके यह बताइए कि A और B चर मूल्यों में से कौन सा अधिक विचरणीय है ?

A. Mid value	15	20	25	30	35	40	45	
Freq.	15	33	56	103	40	32	10	
B. Mid value	100	150	200	250	300	350	400	450
Freq.	340	492	890	1420	620	360	187	140

(Ans. Cofficient of Q.D.A.=0.155, B=0.208, B में विचरण अधिक है।)

7. विभिन्न दुकानों पर रेडियो सैट के एक मॉडल की कीमतें निम्न प्रकार है :

रू. 210, 220, 225, 225, 225, 235, 240, 250, 270, 280,

माध्य विचलन कीमत ज्ञात कीजिए ।

(Ans. δ m = 17)

8. एक सड़क पर दुर्घटनाओं की निम्न सूचना से समान्तर माध्य विचलन तथा उसका गुणांक ज्ञात कीजिए ।

No. of Accidents per Day	:	0	1	2	3	4	5
No.of Days	:	16	30	25	14	9	6

(Ans. $\overline{X}$ =1.88,M.D.=1.13 C.of m.d.=0.60)

9. निम्नलिखित समंकों से मध्यका से माध्य विचलन तथा उसका गुणांक ज्ञात कीजिए ।

Marks(More than)	:	0	10	20	30	40	50	60	70
No. of Student	:	100	90	75	50	20	10	5	0

(Ans. M = 30, δm=12 Coeff MD =0.4)

10. निम्न समंकों से प्रमाप विचलन और उसका गुणांक ज्ञात कीजिए ।

Income (Rs.) 3000, 4000, 4200, 4400, 4600, 4800, 5800

(Ans. $\overline{X}$ = 4400, σ =785.6 Coeff S.D =0.18)

11. एक कॉलर बनाने वाला नवयुवकों को आकर्षित करने के लिए नई शैली कॉलर उत्पादन करने का विचार करता है । किस्म नियन्त्रण के लिये 12-12 कॉलरों के 50 नमूनों की जांच की जाती है । निम्न सारणी 50 नमूनो के बंटन को, उनमें खराब कॉलरों की संख्या के अनुसार दर्शाती है ।

No. of Defective	:	0	1	2	3	4	5& more
No. of Samples	:	18	19	9	3	1	0

प्रति नमूने में खराब कालरों की माध्य संख्या तथा प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए ।

(Ans. $\overline{X}$ = 1, a = 0.98)

12. निम्न समंकों के माध्य, प्रमाप विचलन और गुणांक ज्ञात कीजिए ।

Age of year	No. of Persons	Age in Years	No. of persons
Under 10	15	under 50	100
Under 20	30	under 60	110
Under 30	53	under 70	110
Under 40	75	under 80	120

(Ans $\overline{X}$ =33. 92, 6=19.18, C. of S.D. =0.56)

13. निम्नलिखित सारणी में प्रमाप विलचन एवं विचरण गुणांक ज्ञात कीजिए ।

Profit (Rs.in '000)	No. of firms	Profit (Rs. in '000)	No. of Firms
-40 to -30	12	0 to 10	82
-30 to -20	26	10 to 20	52
-20 to -10	30	20 to 30	40
-10 to 0	40	40 to 50	8

(Ans. σ = 18.52, C.V. = 455.04%)

14. निम्न सारणी में एक स्कूल की दो कक्षाओं के विद्‌यार्थियों का वितरण भार के हिसाब से दिखाया गया है प्रत्येक समंकमाला का विचरण गुणांक निकालिये । बताइये कौनसी समंकमाला में विचरण अधिक है ।

Weight (in Kg.) :	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	Total
Class A	7	10	20	18	7	62
Class B	5	9	21	15	6	52

(Ans. C.V. of A=24.99, C.V. of B=23.54, A में विचरण अधिक है।)

15. निम्न समंकों से विचरण गुणांक और विषमता गुणांक ज्ञात कीम्मी ।

Year	:	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Price Indices	:	83	87	93	109	124	126	130	118	106	105

(Ans. $\overline{X}$ = 108, 1, M=107.5, σ = 15.71, C.V. 14.53%, J=0.115)

16. एक आवृत्ति बंटन में चतुर्थकों पर आधारित विषमता गुणांक 0.6 है । यदि उच्च चतुर्थक एवं निम्न चतुर्थक का योग 100 हो और मध्यका 38 हो तो दोनों चतुर्थकों का मान ज्ञात करो ।

(Ans Q_1 = 30, Q_3 70)

17. निम्न समंकों से कार्ल पिर्यसन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए :

Marks Above	:	0	10	20	30	40	50	60	70	80
No. of Students	:	150	140	100	80	80	70	30	14	0

(Ans. $\overline{X}$ = 39.27, M = 45, J = (-)0.75)

(संकेत बहु लक का मूल्य अस्पष्ट है अत: वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग करें ।)

9.23 उपयोगी पुस्तकें

1. कैलाशनाथ नागर : सांख्यिकी के मूल तत्व (मीनाक्षी प्रकाशन : मेरठ 2007) अध्याय - 9

2. S.P Gupta: Statistical Method (New Delhi: Sultan Chand & Sons, 2003) Chapter 8 & 9.

3. S.C. Gupta : Fundametal of Statistics (New Delhi: Himalaya Publising House, 1998), Chapter 6 & 7.

इकाई 10 - प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis)

इकाई की रूपरेखा :

10.0 उद्देश्य

10.1 प्रस्तावना

10.2 प्रतीपगमन का अर्थ

10.3 प्रतीपगमन विश्लेषण की उपयोगिता

10.4 सहसम्बन्ध एवं प्रतीपगमन विश्लेषण में अन्तर

10.5 प्रतीपगमन विश्लेषण के प्रकार

10.6 प्रतीपगमन रेखाएँ

10.7 प्रतीपगमन रेखाओं के कार्य.

10.8 प्रतीपगमन रेखाओं की रचना की रीतियाँ (उदाहरणों सहित)

10.9 अनुमान की प्रमाप त्रुटि

10.10 सारांश

10.11 तकनीकी शब्दावली

10.12 स्वपरख प्रश्न

10.13 सन्दर्भ ग्रन्थ

10.0 उद्देश्य

इस अध्याय को पढ्ने के पश्चात् आप समझ पायेंगे :-

- प्रतीपगमन विश्लेषण का आशय ।
- सहसम्बन्ध व प्रतीपगमन विश्लेषण में क्या अन्तर है?
- प्रतीपगमन रेखाओं के क्या कार्य है?
- प्रतीपगमन समीकरणों की रचना का आशय एवं महत्व ।
- प्रतीपगमन गुणांकों का आशय एवं महत्व ।
- अनुमान की प्रमाप त्रुटि की गणना किस प्रकार की जाती है?

10.1 प्रस्तावना

सहसम्बन्ध का सिद्धान्त यह स्पष्ट करता है कि दो सम्बन्धित श्रेणियों में सह सम्बन्ध है या नहीं । यदि दो श्रेणियों में सहसम्बन्ध है तो उसका क्या स्तर है तथा सम्बन्ध धनात्मक है । अथवा ऋणात्मक । यदि हम यह जानना चाहते है कि एक श्रेणी में किसी निश्चित मूल्य के आधार पर आश्रित श्रेणी के तत्संवादी मूल्य (Corresponding Value) का सर्वोत्तम अनुमान क्या होगा तो यह सह सम्बन्ध की सहायता से ज्ञात नहीं किया जा सकता है । इसके लिये प्रतीपमगन विश्लेषण का अध्ययन आवश्यक होगा ।

उदाहरणार्थ, खाद्यान्नों की उपज एवं वर्षा के आँकडों के आधार पर उनमें कितना सम्बन्ध है, सहसम्बन्ध गुणांक की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है, परन्तु यदि हम निश्चित उपज के लिए वर्षा की अनुमानित मात्रा ज्ञात करना चाहते हे या इसके विपरीत, तो हमें प्रतीपगमन विश्लेषण करना होगा । सांख्यिकीय विश्लेषण की वह विधि, जिसकी सहायता से किसी एक चर के ज्ञात मूल्य से सम्बन्धित दूसरे चर का अनुमानित मूल्य ज्ञात किया जा सकता है, प्रतीपगमन या समाश्रयण कहलाती है, इस विधि में एक चर की दूसरे चर (चरों) पर आपेक्षिक आश्रयता का अध्ययन किया जाता है ।

10.2 प्रतीपगमन का अर्थ (Meaning of Regression)

समाश्रयण या प्रतीपगमन शब्द का अर्थ है, वापिस लौटना । इस शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम सन् 1877 में सर फ्रांसिस गाल्टन (Sir Farancis Galton) नामक प्रसिद्ध वैज्ञानिक ने वंशानुगत विशेषताओं (Heriditary Characteristics) के अध्ययन के सम्बन्ध में अपने शोध लेख - पैतक उंचाई में मध्यमता की और प्रतीपगमन (Regression towards mediocrity in hereditary stature) में किया था ।

सर फ्रांसिस ने अपने शोध लेख के लिऐ लगभग एक हजार पिताओं और उनके पुत्रों के कदों का अध्ययन किया, जिससे वह इस निष्कर्ष पर पहुँचे कि ऊँचे कद के पिताओं के पुत्र भी ऊँचे कद वाले थे और ठिगने कद के पिताओं के पुत्र भी ठिगने कद वाले थे । परन्तु सामान्य माध्य से दोनों के विचलनों में अन्तर पाया गया । अर्थात् ऊँचे माता-पिताओं की औसत ऊँचाई उनके पुत्रों की औसत ऊँचाई से अधिक पाई गयी, जबकि छोटे कद या ठिगने माता-पिताओं के पुत्रों की औसत ऊँचाई उनके माता-पिताओं की औसत ऊँचाई से अधिक थी ।

दूसरे शब्दों में समस्त जाति की माध्य ऊँचाई से माता-पिताओं की ऊँचाई के विचलनों की अपेक्षा पुत्रों की ऊँचाई में विचलन कम था । पुत्रों की ऊँचाई के माध्य के निकट वापस जाने की प्रवृति को उन्होंने मध्यमता की ओर प्रतीपगमन (Regression towards the mean) कहा जाता है । अत: प्रतीपगमन दो चरों में औसत सम्बन्ध बतलाता है, जिससे कि अनुमान लगाये जा सके। ब्लेयर के अनुसार- मूल इकाईयों के रूप में, दो या दो से अधिक चरों के पारस्परिक औसत सस्कध का माप ही प्रतीपगमन कहलाता है ।

वालिस तथा रॉवर्ट्स के मतानुसार -"प्राय: यह ज्ञात करना अधिक महत्वपूर्ण होता है कि दो या दो से अधिक चरों में वास्तविक सम्बन्ध क्या है । जिससे एक चर-मूल्य (स्वतंत्र चर) के आधार पर दूसरे चर मूल्य (आश्रित चर) का अनुमान लगाया जा से, और इस प्रकार की स्थिति में प्रयोग की जाने वाली उपर्युक्त सांख्यिकीय रीति प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis) ही है ।"

तारो यामने के अनु२रार दो या दो से अधिक कार्य-कारण सम्बन्धों से सम्बन्धित चरों के मध्य सम्बन्ध ज्ञात करने के लिए जो रीति अर्थशास्त्र एवं व्यावसायिक शोध में अत्यधिक प्रयुक्त की जाती है । प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis) कहलाती है ।

10.3 प्रतीपगमन विश्लेषण की उपयोगिता (Utility of Regression Analysis)

वर्तमान समय में प्रतीपगमन विश्लेषण की अवधारणा केवल वंशागत विशेताओ के अध्ययन तक ही सीमित नहीं है, वरन् इसका प्रयोग उन सभी क्षेत्रों में किया जाता है, जहाँ दो या दो से अधिक श्रेणियों में विभिन्न पद मूल्यों के सामान्य माध्य की ओर वापस जाने वाली प्रवृत्ति पाई जाती है। इस विश्लेषण के आधार पर सामाजिक, आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्रों में विभिन्न घटनाओं के मध्य सम्बन्धों का विश्लेषण करके एक चर के ज्ञात मूल्य से सम्बन्धित दूसरा आश्रित (Dependent) चर मूल्य अनूमानित किया जा सकता है ।

उदाहरणार्थ - यदि दो चर-मूल्य एवं मांग आपस में सम्बन्धित है तो मूल्य के दिए हुए होने पर सम्बन्धित मांग की मात्रा एवं मांग के दिए हुए होने पर संभावित मूल्य को ज्ञात किया जा सकता है । प्रतीपगमन विश्लेषण का उपयोग प्राकृतिक एवं भौतिक विज्ञानों में भी किया जा सकता है । इसी प्रकार प्रतीपगमन विश्लेषण का उपयोग पूर्वानुमान, आन्तरगणन व बाह्यागणन के उपकरण के रूप में किया जा सकता है ।

इस तकनीक के आधार पर ज्ञात निष्कर्ष उतने ही अधिक विश्वसनीय होंगे, जितना अधिक घनिष्ठ सहसम्बन्ध दोनों चरों के मध्य होगा । प्रबंधकों द्वारा व्यवसाय के नियंत्रण उपकरण (Control Tool) के रूप में प्रतीपगमन विश्लेषण का प्रयोग किया जाता है ।

10.4 सहसम्बन्ध एवं प्रतीपगमन विश्लेषण में अन्तर (Difference between Correlation and Regression Analysis)

1. कारण एवं परिणाम सम्बन्ध (Cause and effect relationship) सहसम्बन्ध की तुलना में प्रतीपगमन कारण एवं परिणाम सम्बन्धों को अधिक स्पष्ट रूप से दर्शाता है। सहसम्बन्ध से यह ज्ञात नहीं होता है कि कौनसा चरण कारण है एवं कौन सा चर परिणाम है। इसके विपरीत प्रतीपगमन विश्लेषण में एक चर-स्वतंत्र माना जाता है और दूसरा आश्रित। स्वतंत्रता चर के मूल्य दिए होने पर आश्रित चर के मूल्यों का अनुमान लगाया जा सकता है, जिससे कारण एवं प्रभाव का पता चलता है, क्योंकि स्वतंत्र चर कारण एवं आश्रित चर परिणाम होता है ।
2. सम्बन्ध की मात्रा एवं प्रकृति (Degree and Nature of Relationship)- सहसम्बन्ध विश्लेषण दो या अधिक चरों के सह-परिवर्तन की घनिष्ठता की जाँच करता

है, जबकि प्रतीपगमन विश्लेषण इस सम्बन्ध की प्रकृति एवं मात्रा का मापन कर हमें मात्रा का मापन कर हमें भावी अनुमान की क्षमता प्रदान करता है।

3. मूल तथा अनुमाप (Origin and Scale) - सहसम्बन्ध गुणांक में मूल तथा अनुमान परिवर्तन का कोई प्रभाव नहीं पड़ता, किन्तु प्रतीपगमन गुणांक अनुमान परिवर्तन से प्रभावित हो जाता है, अर्थात गणना करते समय पद विचलन रीति का प्रयोग किया जाये तो भी सहसम्बन्ध गुणांक को ज्ञात करते समय इस वर्गान्तर को ध्यान में नहीं रखा जाता है, किन्तु प्रतीपगमन समीकरणों में दोनों श्रेणियों के वर्गान्तर को ध्यान में रखना होगा ।

10.5 प्रतीपगमन विश्लेषण के प्रकार (Types of Regression Analysis)

चरों में संबंध रेखीय (Linear) या वक्र-रेखीय (Curvilinear) हो सकता है। जब X तथा Yश्रेणी के स्वतंत्र एवं अनुमानित चर मूल्यों को बिन्दु रेखा पर अंकित करने से एक विपेक्ष चित्र बन जाता है तब विक्षेप चित्र के मध्य बिन्दुओं से होती हुई दो सर्वोपयुक्त रेखाएं खींची जाती है । जिन्हें प्रतीपगमन रेखाएं कहते हैं । यदि रेखाएं सरल (Striaght) होती है तो प्रतीपगमन रेखीय कहलाता है और यह रेखाएं सरलि वक्र (Smoothed) के रूप में होती है तो प्रतीपगमन वक्र-रेखीय कहलाता है।

दो चर मूल्यों के मध्य रेखीय प्रतीपगमन का अध्ययन सरल रेखीय प्रतीपगमन कहलाता है। दो चार मूल्यों (X एवं Y) में से वह चर स्वतंत्र माना जाता है जो अनुमान का आधार होता है तथा इसके विपरीत जिसका अनुमान लगाना होता है वह चार आश्रित माना जाता है प्रतीपगमन की इस रीति का प्रयोग दो से अधिक चरों के विश्लेषण में भी किया जा सकता है। तीन या तीन से अधिक चरों के विश्लेषण के लिए प्रयुक्त रेखीय प्रतीपगमन को बहु गुणी रेखीय प्रतीपगमन (Multipli Linear Regression) के नाम से सम्बोधित किया जाता है ।

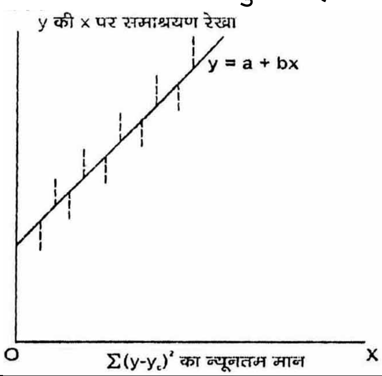
10.6 प्रतीपगमन रेखाएं (Regression Lines)

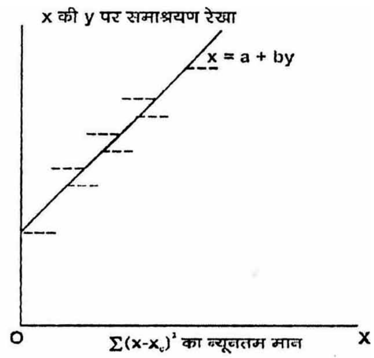
दो समंक श्रेणियों के विभिन्न मूल्यों के पारस्पारिक औसत सम्बन्ध (Average Relationship) को प्रकट करने के लिये जो सर्वोपयुक्त रेखाएं (Lines of the best fit) खींची जाती है, उन्हें प्रतीपगमन रेखायें (Regression Lines) कहा जाता है । ये रेखायें एक समंक श्रेणी के औसत मूल्यों से सम्बन्धित दूसरी श्रेणी के सर्वोत्तम मूल्यों (Mean Values) को व्यक्त करती है।

दो सम्बन्धित श्रेणियों के लिए दो प्रतीपगमन रेखाएं होती है। एक रेखा X का Y पर प्रतीपगमन (Regressions of X on Y) प्रकट करती है जो कि Y को स्वतंत्र चर मूल्य (Independent Variable) तथा X को आश्रित चर मूल्य (Dependent Variable) मानकर बनाई जाती है। इस रेखा से Y के दिये हुये मूल्य से संबंधित X के

सर्वोत्तम मूल्य का ज्ञान होता है। इसी प्रकार दूसरी रेखा Y का X पर प्रतीपगमन (Regression of Y on X) प्रकट करती है। X की स्वतंत्र चर मूल्य एवं Y को आश्रित चर मूल्य मानकर बनाया जाता है। यह रेखा X के दिये हुये मूल्य से संबंधित Y का सर्वोत्तम मूल्य बतलाती है।

प्रतीपगमन रेखाओं की रचना न्यूनतम वर्ग रीति (Least Squares Method) की मान्यताओं के आधार पर की जाती है । इस रीति के अनुसार खींची जाने वाली रेखायें ऐसी होनी चाहिए। जिससे विभिन्न बिन्दुओं के विचलनों के वर्गो का योग न्यूनतम हो। विभिन्न वास्तविक मूल्यों के बिन्दुओं से प्रतीपगमन , रेखा तक के विचलनों का माप दो प्रकार से किया जा सकता है: एक तो क्षैतिज रूप से (Horizontally) अर्थात भुजाक्ष के समान्तर (Parallel to X-axis)। तथा दूसरा लम्बवत् (Vertically) अर्थात कोटि अक्ष के समान्तर (Parallel to Y-axis)। अत: दोनों प्रकार के विचलनों के वर्गों के अलग अलग योग को न्यूनतम करने के लिए दो प्रतीपगमन रेखाओं का होना आवश्यक है । परन्तु जब दो समंक श्रेणियों में पूर्ण धनात्मक या ऋणात्मक सहसम्बन्ध (Perfect Positive or Negative Correlation) होता है तथा X को Y पर तथा Y की X पर एक ही प्रतीपगमन रेखा होगी, क्योंकि X एवं Y के पद युग्मों के आधार पर अंकित सभी बिन्दु एक ही रेखा पर पड़ेगे ।





10.7 प्रतीपगमन रेखाओं के कार्य (Functions of Regression Lines)

प्रतीपगमन रेखाओं के दो महत्वपूर्ण कार्य होते हैं :-

1. **सर्वोत्तम अनुमान (Best Estimate) :-** प्रतीपगमन रेखाओं से सर्वोपयुक्त अनुमान लगाए जा सकते है । X की Y पर प्रतीपगमन रेखा से X का तथा Y की X पर प्रतीपगमन रेखा से Y का अनुमान लगाया जा सकता है ।

2. **सहसम्बन्ध की मात्रा व दिशा का ज्ञान (Knoledge of Extent and Direction of Correlation) :** प्रतीपगमन रेखाओं की सहायता से निम्न नियमों के आधार पर सहसम्बन्ध की मात्रा एवं दिशा के बारे में जानकारी प्राप्त की जा सकती है :-

(i) **धनात्मक सह सम्बन्ध (Positive Correlation) :** जब दोनों प्रतीपगमन रेखाएं रेखाचित्र पर बाएँ निचले कोने से दाहिने ऊपर के कोने की तरफ बढ़ती है तो X और Y में धनात्मक सह सम्बन्ध पाया जाता है ।

(ii) **ऋणात्मक सहसम्बन्ध (Negative Correlation) :** जब दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ बाएँ ऊपरी कोने से नीचे दाएं कोने की तरफ जाती है तो X और Y में ऋणात्मक सहसम्बन्ध पाया जाता है।

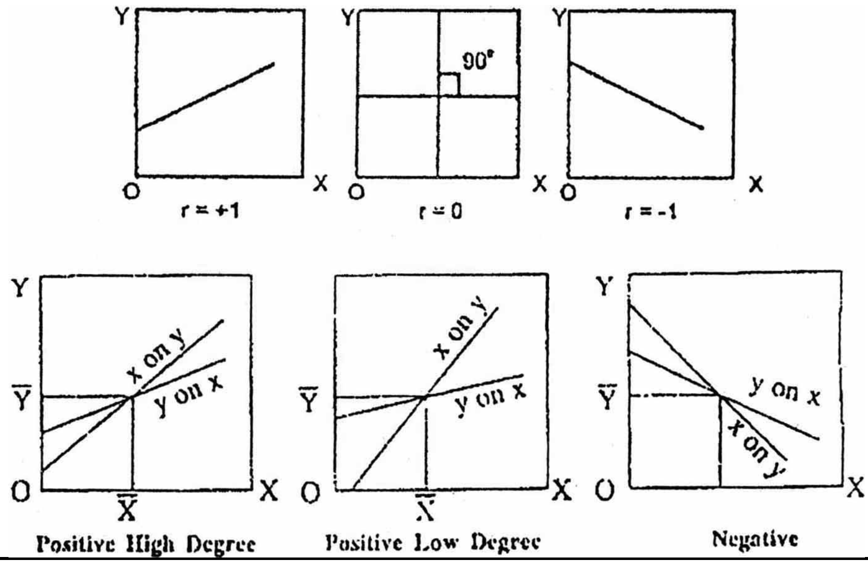
(iii) **पूर्ण सहसम्बन्ध : एक रेखा (Perfect Correlation : One Line)** जब दोनों प्रतीपगमन रेखायें एक-दूसरे को ढक लें अर्थात् एक ही सरल रेखा प्रतीत हो तो पूर्ण सहसम्बन्ध होता है । दूसरे शब्दों में X एवं Y में पूर्ण सहसम्बन्ध होने पर एक ही प्रतीपगमतन रेखा बनती है ।

(iv) **सहसम्बन्ध का अभाव (Lack of Correlation)** :- यदि दो प्रतीपगमन रेखायें एक-दूसरे को समकोण (Right Angle) अर्थात् 90° के कोण पर काटती हों तो X एवं Y में बिल्कुल सहसम्बन्ध नहीं होता है । ऐसी स्थिति में विक्षेप चित्र में विभिन्न बिन्दु चारों ओर बिखरे होते हैं तथा उनमें कोई सुनिश्चित प्रवृत्ति नहीं पायी जाती है ।

(v) **सीमित सहसम्बन्ध (Limited Degrees of Correlation) :-** दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ एक-दूसरें के जितनी निकट होगी, सहसम्बन्ध की मात्रा उतनी ही अधिक होगी। इसके विपरीत दोनों एक-दूसरे से जितनी अधिक की पर होगी, सहसम्बन्ध की मात्रा उतनी ही कम होगी।

3. माध्य मूल्य का निर्धारण (Determination of Mean Value) : प्रतीपगमन रेखाएं दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य के संयोग से प्राकित बिन्दु पर एक दूसरे को काटती है, अत: इनके सर्वनिष्ठ बिन्दु (Point of Intersection) से दोनों अक्षों यथा कोटि अक्ष तथा भुजाक्ष लम्ब डाला जाये तो X तथा Y के समान्तर माध्य ज्ञात हो जायेंगे ।

निम्न रेखाचित्रों से प्रतीपगमन रेखाओं के उपर्युका वर्णित नियमों को स्पष्ट किया जा सकता है :-



10.8 प्रतीपगमन रेखाओं की रचना की रीतियाँ उदाहरणों सहित (Methods of Drawing Regressions Lines with illustration)

(अ) **मुक्त हस्त रीति (Free hand Method) :-** इस रीति के अन्तर्गत विक्षेप चित्र में प्रांकित विभिन्न बिन्दुओं के मध्य से रेखाएं इस प्रकार खींची जाती है कि करीब आधे बिन्दु इन रेखाओं के ऊपर तथा आधे बिन्दु इन रेखाओं के नीचे रह जायें । किन्तु इस रीति द्वारा भिन्न भिन्न व्यक्तियों द्वारा भिन्न-भिन्न प्रकार की रेखा खींची जा सकती है । अत: यह रीति बहुत कम प्रयोग में लाई जाती है ।

(ब) **प्रतीपगमन समीकरण रीति (Regression Equation Method) :-** प्रतीपगमन समीकरण, प्रतीपगमन रेखाओ कें बीज गणितीय स्वरूप है । प्रतीपगमन रेखाओं की भाँति प्रतीपगमन समीकरण भी दो होते हैं अर्थात् दो प्रतीपगमन रेखाओं के लिए दो समीकरण बनाने होते है :-

(1) **X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण (Regression Equation of X on Y) -** X के Y पर प्रतीपगमन समीकरण को $X= a+by$के रूप में लिखा जाता है । इस समीकरण की सहायता से Y के दिये हुये मूल्य के तत्संवादी X का संभावित मूल्य ज्ञात किया जाता है । इस प्रकार से X के ज्ञात किये गये मूल्यों एवं Y के वास्तविक मूल्यों को रेखाचित्र पर अंकित करने से X की Y पर प्रतीपगमन रेखा प्राप्त होती है ।

(2) Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण (Regression Equation of Y on X) :- Y के X पर प्रतीपगमन समीकरण को, $Y= a+bX$ के रूप में लिखा जाता हैं इस समीकरण की सहायता से X के दिये हुए मूल्य से Y का संभावित मूल्य ज्ञात किया जाता है । इस प्रकार से Y के ज्ञात किये गये मूल्यों एवं X के वास्तविक

मूल्यों को रेखाचित्र पर अंकित करने से Y की X पर प्रतीपगमन रेखा प्राप्त की जाती है ।

प्रतीपगमन की सरल रेखा खींचने के लिए सभी बिन्दुओं को रेखाचित्र पर अंकित करना आवश्यक नहीं है, किहीं दो बिन्दुओं को रेखाचित्र पर अंकित करके यदि उनको मिला दिया जाये तो हमें सरल रेखा प्राप्त हो जायेगी । दोनों रेखाओं के समविच्छेद बिन्दु से यदि X-axis पर लम्ब डाला जाये तो हम ($\bar{\times}$श्रेणी का समान्तर माध्य) तथा Y पर लम्ब डाला जाये तो हमें $\bar{y}$ (Y श्रेणी का समान्तर माध्य) प्राप्त हो जाता है ।

समीकरण में प्रयुक्त 'a' व 'b' का निर्धारण :- उपयुक्त सीकरणों में दो अचर मूल्यों (Constants) 'a' व 'b' का प्रयोग किया गया है, जिसका निर्धारण निम्न प्रकार किया जाता है:-

(i) **अचर मूल्य 'a' का निर्धारण (Determining the Value of Constants 'a') :-** अचर मूल्य 'a' वह बिन्दु है जिस पर प्रतीपगमन रेखा कोटि अक्ष (Y-axis) को स्पर्श करती है वह मूल्य ('a') Y अन्त: खण्ड (Y intercept) भी कहलाता है । अन्त: खण्ड से अभिप्राय रेखाचित्र पर मूल बिन्दु (Point of origin) से कोटि अक्ष (Y-axis) पर प्रतीपगमन रेखा के स्पर्श बिन्दु के अन्तर से लगाया जाता है । जब 'a' का मूल्य धनात्मक (Positive or +) होता है तो प्रतीपगमन रेखा कोटि अक्ष (Y-axis) को मूल बिन्दु 'O' से उपर की ओर स्पर्श करती है तथा अचर 'a' का मूल्य ऋणात्मक (Negative or-) होने पर प्रतीपगमन रेखा को कोटि अक्ष (X-axis) पर स्पर्श बिन्दु 'o' मूल बिन्दु से नीचे की ओर होता है । अचर 'a' का मूल्य शून्य होने पर प्रतीपगमन रेखा मूल बिन्दु 'O' से ही प्रारम्भ होती है ।

अचर मूल्य 'a' का बीजगणितीय माप :

प्रथम समीकरण (X=a+bY) में : $\overline{X} - b\overline{Y} = a$

द्वितीय समीकरण (X=a+bX) में : $\overline{Y} - b\overline{X} = a$

(ii) **अचर मूल्य 'a' का निर्धारण (Determining the Value of Constant 'b') :-** अचर मूल्य 'b' प्रतीपगमन रेखा के ढाल (Slope of the Line) को निश्चित करता है । यदि 'b' का मूल्य धनात्मक (+) हो तो रेखा बाएँ से दाएँ ऊपर की ओर जायेगी और यदि 'b' का मूल्य ऋणात्मक (-) हो तो रेखा का ढलान ऊपर से नीचे दाएँ की ओर होगा । किन्तु 'b' का मूल्य शून्य नहीं हो सकता है । 'b' को प्रतीपगमन गुणांक (Regression Coefficient) के नाम से भी जाना जाता है ।

बीजगणितीय दृष्टि से अचर 'b' के मूल्य को निम्न प्रकार सूत्र रूप में व्यक्त किया जाता है :-

प्रथम समीकरण X on Y में $b_{xy} = r\frac{\sigma x}{\sigma y}$

द्वितीय समीकरण Y on X में $b_{yx} = r\frac{\sigma y}{\sigma x}$

उपर्युक्त विश्लेषण के आधार पर प्रतीपगमन समीकरणों को निम्न रूप से प्रस्तुत किया जा सकता है:-

अ) जब समान्तर माध्य, प्रमाप विचलन, सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात हों :-

(i) X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण

$X = a + by$

or $X = (\overline{X} - \overline{Y}b) + bY$

$\left[\therefore \overline{X} - b\overline{Y} = a\right]$

or $(\overline{X} - \overline{X}) = by - b\overline{Y}$

$\therefore X - \overline{X} = b(Y - \overline{Y})$

यहाँ (b से अभिप्राय b_{xy} से है)

$$(X - \overline{X}) = r\frac{\sigma x}{\sigma y}(Y - \overline{Y})$$

(ii) Y का X प्रतीपगमन समीकरण

$Y = a + bX$

or $Y = (\overline{Y} - b\overline{X}) + bX$

$\left[\therefore \overline{Y} - b\overline{X} = a\right]$

or $Y - \overline{Y} = bX - b\overline{X}$

$\therefore Y - \overline{Y} = bX - b\overline{X}$

यहाँ (b से अभिप्राय b_{xy} से है)

$$(Y - \overline{Y}) = r\frac{\sigma y}{\sigma x}(X - \overline{X})$$

यहाँ संकेताक्षर $\overline{X}$ एवं $\overline{Y}$ क्रमशः X और Y श्रेणियों के समानतर माध्य के लिऐ σx एवं σy क्रमशः X और Y श्रेणी के प्रमाप विचलनों के लिए तथा r दोनों श्रेणियों के सहसम्बन्ध गुणाक के लिए प्रयुक्त किए गए है ।

X का अनुमानित मूल्य X के Y पर प्रतीपगमन समीकरण से तथा Y का अनुमानित मूल्य Y के X पर प्रतीपगमन समीकरण से ज्ञात किया जा सकता है । जैसे निम्न उदाहरण रो स्पष्ट है :-

उदाहरण 1 :

X एवं Y दो चरों के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक 0.3 है । यदि X श्रेणी का प्रतीपगमन विचलन = 1.50, Y श्रेणी का प्रमाप विचलन =2.00, X में श्रेणी का समान्तर माध्य 10 तथा Y श्रेणी का समान्तर माध्य =20 हो, तो X की Y पर तथा Y की X पर प्रतीपगमन रेखायें ज्ञात कीजिए ।

The correlation Coefficient between two variables X & Y IS +0.3 $\sigma \times$=1.50, σy=2.00.

X = 19 and Y = 20 ; find the equation of the two regression lines for X on Y and Y on X .

Solution :

(i) X की Y पर प्रतीपगमन रेखा X=a+by अथवा $X-\overline{X}=r\,\frac{\sigma \times}{\sigma y}\quad (Y-\overline{Y})$

समीकरण में मूल्य प्रतिस्थापित करने पर

$(X-10)=\frac{0.3\times 1.5}{2}(Y-20)$ or

$X-10=\frac{.45}{2}(Y-20)$ or $X-10=.225(Y-20)$

or $X=10-4.5+0.225$ or

$X=5.5+0.225$ अत: यहाँ a = 5.5 तथा b = 0.225

Y की X पर प्रतीपगमन रेखा (y= a+bx) अथवा

(ii) $Y-\overline{Y}=r\frac{\sigma y}{\sigma \times}\;(X-\overline{X})$ समीकरण में मूल्य प्रतिस्थापित करने पर

$(Y-20)=\frac{0.3\times 2}{1.50}(X-10)$ or

$Y-20=\frac{0.6}{1.50}(X-10)$ or $Y-20=0.40(X-10)$ or

$(Y-20)=0.40\times -4$ or

$Y=-4+20+0.40x$

$y=16+0.40X$ अत: यहाँ a = 16 तथा b = 0.40 है।

उदाहरण 2:

निम्न मूल्यों से X का सम्भावित मूल्य ज्ञात कीजिए जबकि Y का मूल्य 20 हो तथा Y का संभावित मूल्य ज्ञात कीजिए, जबकि X का मूल्य 10 हो ।

X श्रेणी का समान्तर माध्य =25; Y श्रेणी का समान्तर माध्य =20; X श्रेणी का प्रमाप विचलन =4; Y श्रेणी का प्रमाप विचलन =5 ; सहसम्बन्ध गुणांक = .8

From the following values, find the expected value of X when the value of Y is 20 and find the expected value of Y when the value of X is 10.

$\overline{X}$ =25; $\overline{Y}$ =20; $\sigma\times$ =4; σy =5; r=8

हल :

X का सम्भावित मूल्य ज्ञात करने के लिए X का Y का प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करना होगा तथा Y का सम्भावित मूल्य ज्ञात करने के लिए Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करना होगा ।

Regression equation of X on Y

$X = a + bY$; ' a ' तथा ' b ' का मूल्य ज्ञात करने के लिए -

$$X - \overline{X} = r\frac{\sigma\times}{\sigma y}(Y - \overline{Y})$$

ज्ञात मूल्य समीकरण में रखने पर

$$(X - 25) = \frac{.8\times 4}{5}(Y - 20)$$

$$(X - 25) = .64(Y - 20)$$

$$(X - 25) = .64Y - 12.8$$

$X = 25 - 12.8 + .64Y$ or $X = 12.2 + .64Y$

X का संभावित मूल्य यदि Y = 20 हो,

$X = 12.2 + .64\times 20$ or $X = 12.2 + 12.8 + 25$

Regression Equation of Y on X-

Y = a+bX ; 'a' तथा 'b' का मूल्य ज्ञात करने के लिए -

$Y - \overline{Y} = r\frac{\sigma y}{\sigma\times}(X - \overline{X})$ समीकरण में ज्ञात मूल्य रखने पर -

$$(Y - 20) = \frac{.8\times 5}{4}(X - 25)$$

$$(Y - 20) = 1(X - 25)$$

$$Y - 20 + X - 25$$

$$Y = .5 + X;$$

Y= का संभावित मूल्य यदि X = 10 हो ।

Y= -5+10 = 5

अत: X का सम्भावित मूल्य 25 एवं Y का सम्भावित मूल्य 5 है ।

ब) **जब समान्तर माध्य से विचलन ज्ञात किये जाये -**

(i). X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण

$$(X-\overline{X})=\frac{\sum \times y}{N\sigma_{\times}\sigma_{y}} \times \frac{\sigma_{\times}}{\sigma_{y}} (Y-\overline{Y})$$

$$(X-\overline{X})=\frac{\sum \times y}{N\sigma^{2}{}_{y}} (Y-\overline{Y})$$

$$(X-\overline{X})=\frac{\sum \times y}{N\frac{\sum y^{2}}{N}} (Y-\overline{Y})$$

$$(X-\overline{X}) =\frac{\sum \times y}{\sum y^{2}} (Y-\overline{Y})$$

(ii). Y का एक्स पर प्रतीपगमन समीकरण

$$(Y-\overline{Y})=\frac{\sum \times y}{N\sigma_{\times}\sigma_{y}} \times \frac{\sigma_{y}}{\sigma_{\times}} (X-\overline{X})$$

$$(Y-\overline{Y})=\frac{\sum \times y}{N\sigma^{2}{}_{\times}} (X-\overline{X})$$

$$(Y-\overline{Y})=\frac{\sum \times y}{N\sigma_{\times}\sigma_{y}} \times \frac{\sigma_{y}}{\sigma_{\times}} (X-\overline{X})$$

$$(Y-\overline{Y})=\frac{\sum \times y}{N\sigma^{2}{}_{\times}} (X-\overline{X})$$

$$(Y-\overline{Y})=\frac{\sum \times y}{N\frac{\sum \times^{2}}{N}} (X-\overline{X})$$

यहाँ-

$\sum \times y$ = X और Y के समान्तर माध्यों से निकाले गये विचलनों के गुणाओं का योग (Sum of the product of deviations of of X and Y from their respective actual means)

$\sum \times^{2}$ व $\sum y^{2}$ = क्रमशः दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्यों से चर-मूल्यों के विचलनों के वर्गों का योग (Sum totals of squares of deviation of items from actual means of X and Y series respectively)

निम्न समकों से X एवं Y के समान्तर माध्यों से विचलन लेकर प्रतीपगमन समीकरणों को ज्ञात कीजिए:-

From the following data calculate Regression Equations by taking deviations of from means of X and Y

Series :

X	3	4	6	8	9
Y	5	8	7	6	9

हल

Calculation of Regression Equations

X	$(x-\overline{x})$ X	$\times^2$	Y	$(Y-\overline{Y})$ Y	Y^2	xy
3	-3	9	5	-2	4	6
4	-2	4	8	+1	1	-2
6	0	0	7	0	0	0
8	+2	4	6	-1	1	-2
9	+3	9	9	+2	4	6
30	0	26	35	0	10	8

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{30}{5} = 6$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{35}{5} = 7$$

Regression Equation of X on Y

$$(X-\overline{X}) = \frac{\sum \times y}{\sum y^2} \quad (Y-\overline{Y})$$

$$(X-6) = \frac{8}{10} \quad (Y-7)$$

$$(X-6) = .8\ (Y-7)$$

$$X = .8y - 5.6 + 6$$

$$X = .4 + 8y$$

Regression Equation of Y on X

$$(Y-\overline{Y}) = \frac{\sum \times y}{\sum \times^2} \quad (X-\overline{X})$$

$$(Y-7) = \frac{8}{26} \quad (X-6)$$

$$Y - 7 = .31\ (X-5)$$

$$Y = 7 + .31X - 1.55$$

$$Y = 5.45 + .31X$$

स) जब कल्पित माध्य से विचलन लिये गये हों -

जब X और Y श्रेणियों के समान्तर माध्य पूर्णांकों में नहीं आते है तो किसी कल्पित माध्य से विचलन लेकर प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात किये जाते हैं ।

(i). X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण

$$X - \overline{X} = b_{\times y}(Y - \overline{Y})$$

$$X - \overline{X} = r\frac{\sigma \times}{\sigma y} \quad (Y - \overline{Y})$$

r का सूत्र प्रतिस्थापित करने पर -

$$X - \overline{X} = \frac{\sum d \times dy - \frac{(\sum d\times)(\sum dy)}{N}}{N.\sigma_{\times}\sigma_{y}} \quad \frac{\sigma_y}{\sigma_{\times}} \quad (Y - \overline{Y})$$

$$X - \overline{X} = \frac{\sum d \times dy - \frac{(\sum d\times)(\sum dy)}{N}}{N \times .\sigma_{y} X \sigma_{y}} \quad (Y - \overline{Y})$$

$$X - \overline{X} = \frac{\sum d \times dy - \frac{(\sum d\times)(\sum dy)}{N}}{N \times \sigma_{y^2}} \quad (Y - \overline{Y})$$

हम जानते है कि :

$$\sigma y^2 = \frac{\sum dy^2}{N} - \left[\frac{\sum dy}{N}\right]^2$$

अतः σy का सूत्र प्रतिस्थापित करने पर -

$$X - \overline{X} = \frac{\sum dxdy - \frac{(\sum dx)(\sum dx)}{N}}{N\left[\frac{\sum dy^2}{N} - \left(\frac{\sum dy}{N}\right)\left(\frac{\sum dy}{N}\right)\right]} \quad = (Y - \overline{Y})$$

$$X - \overline{X} = \frac{\sum dxdy - \frac{(\sum dx)(\sum dy)}{N}}{N\left[\frac{\sum dy^2}{N} - \left(\frac{\sum dy}{N}\right)\left(\frac{\sum dy}{N}\right)\right]} \quad (Y - \overline{Y})$$

$$X - \overline{X} = \frac{\sum dxdy - \frac{(\sum dx)(\sum dy)}{N}}{\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N}} \quad (Y - \overline{Y})$$

(ii) Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण

$$Y - \overline{Y} = \quad b_{y\times}(X - \overline{X})$$

$$Y - \overline{Y} = \text{r} \quad -\frac{\sigma_y}{\sigma_{\times}} \quad (X - \overline{X})$$

r का सूत्र प्रतिस्थापित करने पर-

$$Y-\overline{Y}=\frac{\sum d\times dy-\frac{(\sum dx)(\sum dx)}{N}}{N.\sigma_{\times}.\sigma_{y}}\ \frac{\sigma_{y}}{\sigma_{\times}}\ (X-\overline{X})$$

सूत्र में σ_y से $\sigma_{\times}$ कट जाएगा तथा निम्न सूत्र शेष रहेगा -

$$Y-\overline{Y}=\frac{\sum d\times dy-\frac{(\sum dx)(\sum dy)}{N}}{N\times\sigma_{x}\times\sigma_{x}}\ (X-\overline{X})$$

$$Y-\overline{Y}=\frac{\sum dxdy-\frac{(\sum d\times)(\sum dy)}{N}}{N\times\sigma_{\times^2}}\ (X-\overline{X})$$

हम जानते हैं कि :

$$\sigma\times^{2}=\frac{\sum dy}{N}-\left[\frac{\sum d\times}{N}\right]^{2}$$

अत: σ का सूत्र प्रतिस्थापित करने पर -

$$Y-\overline{Y}=\frac{\sum dxdy-\frac{(\sum dx)(\sum dx)}{N}}{N\left[\frac{\sum dx^{2}}{N}-\left(\frac{\sum dx}{N}\right)^{2}\right]}\ (X-\overline{X})$$

$$Y-\overline{Y}=\frac{\sum dxdy-\frac{(\sum dx)(\sum dx)}{N}}{N\frac{\sum dx^{2}}{N}-(\frac{\sum dx}{N})^{2}}\ (X-\overline{X})$$

$$Y-\overline{Y}=\frac{\sum dxdy-\frac{(\sum dx)(\sum dx)}{N}}{N\left[\frac{\sum dx^{2}}{N}-\left(\frac{\sum dx}{N}\right)\left(\frac{\sum dx}{N}\right)\right]}\ (X-\overline{X})$$

$$Y-\overline{Y}=\frac{\sum dxdy-\frac{(\sum dx)(\sum dx)}{N}}{N\left[\frac{\sum dx^{2}}{N}-\left(\frac{\sum dx}{N}\right)\left(\frac{\sum dx}{N}\right)\right]}\ (X-\overline{X})$$

यहाँ :

$\sum dxdy =$ X व Y श्रेणी कल्पित माध्यों से विभिन्न चर मूल्यों के तत्संवादी विचलनों के गुणाकों का योग (Summation of the products of corresponding deviations of X and Y from their respective assumed means)

$\sum dx$ व $\sum dy$ = क्रमशः X व Y के मूल्यों के कल्पित माध्यों से ज्ञात विचलनों का योग (Totals of deviations of X and Y values from their assumed means)

$\sum d\times^2$ व $\sum dy^2$ = क्रमशः X व Y के मूल्यों के कल्पित माध्यों से ज्ञात किये गये विचलन वर्गों का योग (Totals of squared deviations of X and Y series from assumed means)

उदाहरण 4 :

निम्न आँकड़ों से दो प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिये ।

From the following data determine the two regression equations :

X Series	27	27	27	28	28	28	29	29	30	31
Y Series	18	18	19	20	21	21	22	23	24	25

हल :

Calculation of Regression Equations

X	Dx (A=28)	d$\times^2$	Y	Dy (A=21)	dY^2	dxdy
27	-1	1	18	-3	9	3
27	-1	1	18	-3	9	3
27	-1	1	19	-2	4	2
28	0	0	20	-1	1	0
28	0	0	21	0	0	0
28	0	0	21	0	0	0
29	+1	1	22	+1	1	1
29	+1	1	23	+2	4	2
30	+2	4	24	+3	9	6
31	+3	9	25	+4	16	12
	+4	18		+1	53	29

(i). $\overline{X} = A + \frac{\sum d\times}{N} = 28 + \frac{4}{10}$ = 28.4

$$b_{\times y} = \frac{\sum dXdy - \frac{\sum dx \times \sum dy}{N}}{\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N}}$$

$$= \frac{29 - \frac{4 \times 1}{10}}{53 - \frac{(1)^2}{10}} = \frac{28.6}{52.9} = 0.54$$

अत: X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण निम्न प्रकार होगा :-

$$(X - \overline{X}) = b_{\times y} \; (Y - \overline{Y})$$

$$(X - 28.4) = 0.54(Y - 21.1)$$

$$(X - 28.4) = 0.54Y - 11.39$$

$$X = -11.39 + 28.4 + .54Y$$

$$X = 17.01 + .54Y$$

(ii). $\overline{Y} = A + \frac{\sum dy}{N} = 21 + \frac{1}{10} =$ 21.1

$$b_{\times y} = \frac{\sum dxdy - \frac{\sum dx \times \sum dy}{N}}{\sum dx^2 - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$$

$$= \frac{29 - \frac{4 \times 1}{10}}{18 - \left(\frac{4}{10}\right)^2} = \frac{28.6}{16.4} = 1.74$$

$b_{y\times}$ ज्ञात करने के बाद Y का X पर प्रतीपगनम समीकरण निम्न प्रकार होगा :-

$$(Y - \overline{Y}) = \; b_{y\times} \; (X - \overline{X})$$

$$(Y - 21.1) = 1.74(X - 28.4)$$

$$(Y - 21.1) = 1.74X - 49.42$$

$$Y = 49.42 + 21.1 - 1.74X$$

$$Y = 28.32 + 1.74X$$

द) **जब पद विचलन रीति (Step deviation Method)** का प्रयोग किया जाये :- पद विचलन लिये जाने पर समीकरण निम्न प्रकार से होंगे :-

$$(X - \overline{X}) = \frac{\sum dxdy - \frac{\sum dx \times \sum dy}{N}}{\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N}} \times \frac{i_\times}{i_y} \; (Y - \overline{Y})$$

$$(Y-\overline{Y}) = \frac{\sum dxdy - \frac{\sum dx \times \sum dy}{N}}{\sum dx^2 - \frac{(\sum dx)^2}{N}} \times \frac{i_y}{i_\times} (X-\overline{X})$$

यहाँ

$i_\times$ = x चर का पद विचलन (Step deviation of X variable)

i_y = Y चर का मद विचलन (Step deviation of Y variable)

(य) **द्विचर वर्गित आवृति बंटन (Bivariate Grouped Frequency distribution)** में प्रतीपगमन समीकरण - द्विचर वर्गित आवृति बंटन में प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करने के लिए भी ऊपर वर्णित विधि का ही प्रयोग किया जाता है । अन्तर केवल इतना है कि आवृति का प्रयोग अतिरिक्त रूप से किया जाता है । इस हेतु निम्न सूत्र का प्रयोग किया जायेगा -

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण

$$(X-\overline{X}) = b_{\times y} (Y-\overline{Y})$$

$$X - \overline{X} = \frac{\sum fd \times dy - \frac{\sum fd \times \times \sum fdy}{N}}{\sum fdy^2 - \frac{(\sum fdy)^2}{N}} \times \frac{i_\times}{i_y} (Y-\overline{Y})$$

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण

$$(Y-\overline{Y}) = b_{y\times} (X-\overline{X})$$

$$(Y-\overline{Y}) = \frac{\sum fdxdy - \frac{\sum fdx \times \sum fdy}{N}}{\sum fd\times^2 - \frac{(\sum fdx)^2}{N}} \times \frac{i_y}{i_\times} (X-\overline{X})$$

उदाहरण 5.

निम्नलिखित तालिका में विद्यार्थियों की ऊँचाई एवं भार के समंक दिये गये है ।

The following table gives the number of students having different heights and weights :-

Heights (In inches)	Weights (In lbs)				
	80-90	90-100	100-110	110-120	Total
50-55	6	10	4	–	20
55-60	4	10	10	1	25
60-65	4	8	15	8	35

65-70	4	3	2	11	20
Total	18	31	31	20	100

उपरोक्त तथ्यों के आधार पर प्रतीपगमन समीकरणों की गणना कीजिए ।

Solution :

Calculation of Regression Equations

Height			Weight (Y)				f	fdx	fd^2x
			80-90	90-100	100-110	110-120			
			85	95	105	115			
		dx dy	-1	0	1	2			
50-55	52.5	-2	2 6 12	0 10 0	-2 4 -8	-4 - 0	20	-40	80
55-60	57.5	-1	1 4 4	0 10 0	-1 10 -10	-2 1 -2	25	-25	25
60-65	62.5	0	0 4 0	0 8 0	0 15 0	0 8 0	35	0	0
65-70	57.5	1	-1 4 -4	0 3 0	1 2 2	2 11 22	20	20	20
		f	18	31	31	20	100N	-45 Σfdx	125 fd^2x
		fdy	-18	0	31	40	53Σfdy		
		fdy^2	18	0	31	80	129 Σfd^2y		
		fdxdy	12	0	-16	20	16 Σfdxdy		

समान्तर माध्य (Mean)

$$\overline{X} = A_{\times} + \frac{\sum fd\times}{n} \times i = 62.5 + \frac{-45}{100} \times 5$$

= 62.5-2.25= 60.25

$$\overline{Y} = A_Y + \frac{\sum fdy}{N} \times i = 95 + \frac{53 \times 10}{100}$$

= 95+5.3 = 100.3

$$b_{\times y} = \frac{\sum fdxdy - \frac{\sum fdx \times \sum fdy}{N}}{\sum fdy^2 - \frac{(\sum fdy)^2}{N}} \times \frac{i_{\times}}{i_y}$$

$$= \frac{16 - \left[\frac{-45 \times 53}{100}\right]}{129 - \frac{(53)^2}{100}} \times \frac{5}{10}$$

$$= \frac{16 + 23.85}{129 - 28.9} \times \frac{5}{10} =$$

$$b_{\times y} = .197$$

$$b_{\times y} = \frac{\sum fdxdy - \frac{\sum fdx \times \sum fdy}{N}}{\sum fdx^2 - \frac{(\sum fdx)^2}{N}} \times \frac{i_y}{i_\times}$$

$$= \frac{16 - \left[\frac{-45 \times 53}{100}\right]}{125 - \frac{(-45)^2}{100}} \times \frac{10}{5}$$

$$= \frac{16 + 23.85}{125 - 20.25} \times \frac{10}{5} =$$

$$b_{\times y} = .761$$

प्रतीपगमन समीकरण (Regression Equation)

(ii) X on Y

$$X - \overline{X} = b_{\times y}\,(Y - \overline{Y})$$

= X-60.25= .197 (Y-100.3)

= X-60.25= .197Y - 19.76

X= 60.25-19.76+.197Y

X= 40.49+.197Y

(ii) Y on X

$$(Y - \overline{Y}) = b_{y\times}\,(X - \overline{X})$$

Y - 100.3 = 0.761(X-60.25)

Y - 100.3 = 0.761 X-45.85

Y = 100.3-42.85+0.761X

Y = 54.45 +0.761X

न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा प्रतीपगमन समीकरण (Method of Least Squares)

न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा न्यूनतम वर्ग मान्यता (Least squares assumption) के आधार पर प्रदत्त श्रेणी के लिये एक सर्वाधिक उपर्युक्त रेखा खींची जाती हैं इस रेखा

को खींचने के लिये गणितीय समीकरणों की सहायता ली जाती है । न्यूनतम वर्ग रीति से ज्ञात रेखा की निम्न विशेषताएं है :-

(i) $\sum(Y-Y_c)=0$ अर्थात् आश्रित चर के प्रदत्त मूल्यों (Y) और उसके अनुमानित मूल्यों (Y_c) के विचलनों का योग शून्य होता है ।

(ii) $\sum(Y-Y_c)=$ न्यूनतम अर्थात् इस रेखा से विभिन्न पद मूल्यों के विचलनों के वर्गों का योग अन्य किसी भी रेखा से लिये गये विचलन वर्गो के योग की तुलना में न्यूनतम होता है । इसीलिये यह रेखा सर्वोतम अनुमान देती है ।

न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात करने कें लिए ‘ a ’ तथा ‘ b ’ अचर मूल्यों को दो समीकरणों की सहायता से ज्ञात किया जाता है, जिन्हें प्रसामान्य समीकरण कहा जाता है। निम्न प्रकार से प्रतीपगमन समीरण के लिए ‘ a ’ तथा ‘ b ’ का मूल्य ज्ञात किया जाता है :-

Regression Equation X on Y

X= a + bY

Normal Equation

$\sum\times = Na + b\sum Y$ ....(i)

$\sum\times Y = a\sum Yb\sum\times^2$ ....(ii)

Regression Equation Y on X

Y= a + bX

Normal Equation

$\sum Y = Na + b\sum\times$ ....(i)

$\sum\times Y = a\sum\times + b\sum\times^2$ ....(ii)

यहाँ -

$\sum Y = y$ के प्रदत्त मूल्यों का योग, $\sum\times = \times$ के प्रदत्तत मूल्यों का योग,

$\times^2 = \times$ के प्रदत्त मूल्यों के वर्गो का योग, $y^2 = y$ के प्रदत्त मूल्यों के वर्गो का योग।

$\sum\times y = \times$ तथा y के प्रदत्त मूल्यों के गुणनफल का योग, $N = \times$ और y के युग्मों की संख्या।

उपर्युक्त समीकरणों को हल करने पर a एवं b अचर मूल्य ज्ञात हो जायेंगे, जिन्हें आधारभूत समीकरणों में रख, × चर के विभिन्न मूल्यों के लिये y चर के अनुमानित मूल्यों तथा y के विभिन्न मूल्यों के लिये × के अनुमानित मूल्यों को ज्ञात किया जा सकता है ।

उदाहरण .6

निम्न समंकों से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए -

From the following data, Calculate regression equations by least squares method :

X	1	2	3	4	5
Y	6	9	7	8	10

हल:

Calculation of Regression Equations

X	Y	$\times^2$	Y^2	XY
1	6	1	36	6
2	9	4	81	18
3	7	9	49	21
4	8	16	64	32
5	10	25	100	50
$\sum\times=15$	$\sum Y=40$	$\sum\times^2=55$	$\sum Y^2=330$	$\sum\times Y=127$

(i). Regression Equation X on Y

$\sum\times=Na+b\sum Y$

$\sum XY+a\sum Y+b\sum Y^2$

15 = 5a+ 40b........................ (i)

127 =40a+330b..................... (ii)

(ii) समीकरण को 8 से गुणा करके -

समीकरण (ii) में से घटाने पर -

127= 40a+330b

120= 40a+320b

7= 10b

$\therefore \quad b \quad \frac{7}{10} \quad =.7$

समीकरण (i) में b का मान रखने पर

$5a+40\times.7=15$

$5a=15-28=-13$

$\therefore \quad a- \quad \frac{13}{5} \quad =-2.6$

$\therefore\times=-2.6+.7Y$

(iii) Regression Equation Y on X

$\sum Y=Na+b\sum\times$

$\sum\times Y=a\sum\times+\sum\times^2$

$40 = 5a + 15b$ .... (i)

$127 = 15a + 55b$ .... (ii)

(i) समीकरण को 3 से गुणा करके -

समीकरण (ii) में से घटाने पर -

127 = 15a+ 55b

120= 15a+ 45b

7= 10b

$\therefore b \quad \frac{7}{10} \quad = .7$

(i) समीकरण में b का मान रखने पर -

$5a + 15 \times .7 = 40$

$5a = 40 - 10.5 = 29.5$

$\therefore a \frac{29.5}{5} = 5.9$

$\therefore Y = 5.9 + .7 \times$

प्रतीपगमन गुणांक (Regression Coefficient)

दो सम्बद्ध श्रेणियों X एवं Y का प्रतीपगमन विश्लेषण करते समय उनके दो प्रतीपगमन गुणांक (Regression Coefficient) (एक X पर Y का तथा दूसरा Y पर X का) ज्ञात किये जाते हैं। प्रतीपगमन गुणांक वह अनुपात है जो यह दर्शाता हे कि एक समंक श्रेणी के चर-मूल्यों में एक इकाई परिवर्तन (Unit Change) होने से सम्बन्द्ध दूसरी समंक श्रेणी के चर-मूल्यों में कितना परिवर्तन होगा । वास्तव में प्रतीपगमन गुणांक अचल मूल्य b' है जो कि प्रतीपगमन रेखा के ढलान चर-मूल्यों में कितना परिवर्तन होगा । वास्तव में प्रतीपगमन गुणांक अचल मूल्य 'b' है जो कि प्रतीपगमन रेखा के ढलान (Slope of the Regression Line) का बीजगणितीय माप है, अर्थात् यह प्रतीपगमन रेखा के ढाल को निश्चित करता है ।

X का Y प्रतीपगमन गुणांक (Regression Coefficient of X on Y) - यह गुणांक X की Y पर प्रतीपगमन रेखा के ढाल का माप है जो कि प्र में एक इकाई परिवर्तन होने पर X में होने वाले परिवर्तन को बताता हैं इसको संकेताक्षर b_1 या $b_{\times y}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है । इसे निम्न सूत्रों से ज्ञात किया जा सकता है :-

(i) $bxy = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ (ii) $bxy = \frac{\sum xy}{\sum y^2}$

$$bxy = \frac{\sum dxdy - \frac{\sum d \times \times \sum dy}{N}}{\sum dy^2 - \frac{\left(\sum dy\right)^2}{N}}$$

Or

(iv) $b_{y\times}=\dfrac{\sum fd\times dy-\dfrac{\sum fd\times\times\sum fdy}{N}}{\sum fdy^2-\dfrac{\left(\sum fdy\right)^2}{N}}\times\dfrac{i_\times}{i_y}$

(B) Y का X प्रतीपगमन गुणांक (Regression Coefficient of Y on X) - यह गुणांक Y की X पर प्रतीपगमन रेखा के ढाल का बीजगणितीय माप है जो कि X में एक इकाई परिवर्तन होने पर Y में होने वाले परिवर्तन को बतलाता हैं इसके संकेताक्षर b_2 या $b_{y\times}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है । सूत्र रूप में इसे निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है:-

(i) $byx=r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ Or (ii) $byx=\dfrac{\sum xy}{\sum x^2}$

(ii) $b\times y=\dfrac{\sum dxdy-\dfrac{\sum d\times\times\sum dy}{N}}{\sum d\times^2-\dfrac{\left(\sum d\times\right)^2}{N}}$

Or

(iv) $b_{yx}\dfrac{\sum fdxdy-\dfrac{\sum fdx\times\sum fdx}{N}}{\sum fdx^2-\dfrac{\left(\sum fdx\right)^2}{N}\times\dfrac{iy}{ix}}$

प्रतीपगमन गुणांकों से सहसम्बन्ध गुणांक का निर्धारण (determination of Coefficient of Correlation with the help of Regression Coefficients) दोनों प्रतीपगमन गुणांकों $b_{y\times}$ एवं $b_{\times y}$ की सहायता से X एवं Y श्रेणी के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक का निर्धारण किया जा सकता है, क्योंकि सहसम्बन्ध गुणांक, दोनों प्रतीपगमन गुणोंको का गुणोत्तर माध्य (geometric Mean) होता है अर्थात सहसम्बन्ध गुणांक दोनों प्रतीपगमन गुणांकों का वर्गमूल होता है । जैसा कि निम्नलिखित प्रक्रिया से स्पष्ट है :-

$r=\sqrt{b_{xy}\times b_{yx}}$

$bxy=r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$ and $byx=r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$;

$b_{xy}\times b_{yx}=r\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}\times r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}r^2$

$\therefore r=\sqrt{b_{xy}\times b_{yx}}$

प्रतीपगमन गुणांकों से सम्बन्ध में ध्यान रखने योग्य बिन्दु इस प्रकार हैं :-

(1) चूंकि $r^2 = b_{\times y} \times b_{y\times}$ तथा हम जानते है कि r का मान कभी भी 1 से अधिक नहीं हो सकता. अत: दोनों प्रतीपगमन गुणांक अलग अलग कभी 1 से अधिक मूल्य से नहीं हो सकते । यदि $b_{y\times}$ एवं $b_{\times y}$ दोनों का मान एक से अधिक है तो r^2 भी एक अधिक होगा तथा इसका वर्गमूल भी एक अधिक होगा, जो संभव नहीं है । यहाँ यह स्पष्ट कर देना आवश्यक है कि किसी एक प्रतीपगमन गुणांक का मूल्य एक से अधिक हो सकता है लेकिन ऐसी स्थिति में दूसरे गुणांक का मूल्य इतना कम होना चाहिए कि दोनों को आपस में गुणा करने से परिणाम अधिकतम 1 हों ।

(2) दोनों प्रतीपगमन गुणांकों के चिन्ह समान होंगे । यदि $b_{\times y}$ धनात्मक है तो $b_{y\times}$ भी धनात्मक होगा । ऐसा नहीं हो सकता कि एक गुणांक धनात्मक हो तथा दूसरा ऋणात्मक हो; क्योंकि किसी भी प्रतीपगमन गुणांक का चिन्ह सहसम्बन्ध गुणांक पर निर्भर करता हैं यदि सहसम्बन्ध गुणांक धनात्मक है तो दोनों प्रतीपगमन गुणांक धनात्मक होंगे और यदि सहसम्बन्ध गुणांक ऋणात्मक है तो दोनों प्रतीपगमन गुणांक ऋणात्मक होंगे । अर्थात् सहसंबंध गुणांक एवं प्रतीपगमन गुणांकों के चिन्ह हमेशा समान रहते हैं।

(3) चूँकि

$$byx = \quad r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} or b_{xy} = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

अत: इस समीकरणों में से कोई भी तीन राशि यदि ज्ञात है तो, हम चौथी राशि भी ज्ञात कर सकते हैं ।

(i). यदि $b_{\times y}$=0.9 व $b_{y\times}$=0.4 तो r का मान ज्ञात कीजिए ।

Calculation the value of r if $b_{\times y}$=0.9 and $b_{y\times}$ =0.4

(i) निम्न आँकडों से (अ) Y का प्रमाप विचलन (σ_y) व (ब) सह-सम्बन्ध गुणांक (r) का मान ज्ञात कीजिये

Calculate (a) the Standard deviation of Y. (σy); and (b) Correlation coefficient (r) from the following data:

$\times = .75; Y = .36\times; \sigma\times = 3$

हल :

(i) $r^2 = b\times y - b_{y\times}$

अत: $r^2 = 0.9\times.4 = .36$

$r^2 = \sqrt{0.36} = 0.6$

(ii). X की Y पर समाश्रयण रेखा X = 0.75y

यदि Y = 1 तब X = .75 अत: $b_{\times y}$ = 0.75

Y का X पर समाश्रयण समीकरण Y = 0.36

यदि X = 1 तब Y = 0.36

अब: $b_{y\times}$ = 0.36

$r^2 = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$ या $r = \sqrt{0.75 \times 0.36} = 0.52$

चूंकि $by\times = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ या $0.36 = 0.52\frac{\sigma_y}{3}$

अत: $\sigma_y = 0.36 = \frac{0.36 \times 3}{0.52} = 2.08$

प्रदत्त प्रतीपगमन समीकरणों से माध्य मूल्य व प्रमीपगमन गुणांकों की गणना (Calculation of Mean value and Regression Coefficient from the given Regression Equation)

यदि दोनों प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात हों तो उनकी सहायता' से X व Y श्रेणियों के माध्य मूल्य ($\bar{\times}$व $\bar{Y}$) ज्ञात किये जा सकते हैं । इसी प्रकार X पर Y के प्रतीपगमन समीकरण से $b_{\times y}$ का मूल्य तथा Y के X पर प्रतीपगमन समीकरण से $b_{y\times}$ का मूल्य भी ज्ञात किया जा सकता है । परन्तु कभी-कभी यह ज्ञात नहीं होता है कि कौन सा प्रतीपगमन समीकरण X on Y का है तथा कौन सा प्रतीपगमन समीकरण X on Y का है । ऐसी स्थिति में किसी एक प्रतीपगमन समीकरण को X on Y ओ का प्रतीपगमन समीकरण मानकर $b_{\times y}$ ज्ञात कर लिया जाता है । तथा इसी प्रकार दूसरे समीकरण के आधार पर $b_{y\times}$ का मान ज्ञात कर लिया जाता है । ज्ञात $b_{\times y}$ व $b_{y\times}$ से सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करते हैं, यदि 1 से अधिक सहसंबंध गुणांक आता है या चिन्ह असमान आते है तो यह इस बात को सिद्ध करता है कि हमारी मान्यता गलत थी, क्योंकि r1 से अधिक नहीं हो सकता है, अत: जिस समीकरण को y का x पर माना है उसे x का y पर मान लेना चाहिए तथा अन्य को y का x मान लेना चाहिए । अब $b_{y\times}$ तथा $b_{\times y}$ का गुणनफल 1 से अधिक नहीं होगा और परिणाम शुद्ध होगा ।

समान्तर माध्यों को ज्ञात करने के लिऐ दोनों समीकरणों से x तथा y का मूल्य ज्ञात कर लेना चाहिए । यही x तथा y के समान्तर माध्य होंगे ।

उदाहरण : 8

दो प्रतीपगमन रेखायें निम्न प्रकार है :

$4\times - 5Y = +20 = 0$ .... (i)

$20\times - 9Y = -100 = 0$ .... (ii)

ज्ञात कीजिये कि इनमें से कोनसी Y की X पर प्रतीपगमन रेखा है एवं कौनसी X की Y पर?

The two regression lines are given by the following equations

$4\times -5Y+20=0$ .... (i)

$20\times -9y-100=0$ .... (ii)

Which of these lines is the line of regression of y on x and which of x on y?

हल :

इस प्रश्न में यह ज्ञात नहीं है कि कोनसा समीकरण X on Y है तथा कौनसा Y on X है, अतः समीकरण $4\times -5Y+20=0$ को X on Y समीकरण मानने व दूसरे को Y on X मानने पर X on Y

$4\times -5Y+20=0$

$4\times =-20+5y$

$\times =\frac{-20}{4}+\frac{5}{4}y$

अतः $b\times y=\frac{5}{4}y$

Y on X

$20\times -9y=100=0$

$20\times -9y=100$

$-9y=100-20\times$

$y=-\frac{100}{9}+\frac{20}{9}x$

$y=a+bx$

अतः $b_{xy}=\frac{20}{9}$

$r=\sqrt{b_{\times y}-b_{y\times}}$

$r=\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{20}{9}}=1.67$

r का मूल्य 1 से अधिक आने का कारण प्रतीपगमन समीकरणों को विपरीत मान लिया जाता है। उनको बदलने पर अर्थात् दूसरे समीकरण को X on Y तथा प्रथम को Y on X मानने पर सही समीकरण ज्ञात हो जायेंगे -

X on Y Equation

20x-9y-100=0

$20\times =100+9y$

$\times =\frac{100}{20}+\frac{9}{20}y$

$b_{\times y} \frac{9}{20}$

Y on X Equation

$4\times -5y + 20 = 0$

$-5y = -20 - 4\times$

$y = \frac{20}{5} + \frac{4}{5}x$

$b_{\times y} = \frac{4}{5}$

$r = \sqrt{b_{xy} - b_{yx}}$

$r = \frac{9}{20} \times \frac{4}{5} = 0.6$

अत: $4\times -5y + 20 + 0,$ Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण एवं $20\times -9y - 100 = 0$ x का y पर प्रतीपगमन समीकरण है ।

उदाहरण :9

एक आशिक रूप से नष्ट प्रयोगशाला के अभिलेखों से निम्न परिणाम उपलब्ध है -

$8\times -10y + 66 = 0; \quad 40\times -18y = 214$

X श्रेणी का प्रसरण = 16

उपर्युक्त सूचनाओं के आधार पर निम्न मूल्य ज्ञात कीजिये-

(i) X व Y श्रेणियों के माध्य मूल्य,

(ii) X व Y श्रेणी का प्रतीपगमन गुणांक ।

(iii) X और Y श्रेणी के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक तथा

(iv) Y श्रेणी का प्रमाप विचलन ।

The following results are available from the record of a partially destroyed laboratory $8\times -10y + 66 = 0; \quad 40\times -18y = 214$

Variance of X =16

From the above information calculate the value of :

(i) Mean of X and Y series.

(ii) Regression coefficient of X and Y series

(iii) Coefficient of coefficient between X and Y, and

(iv) Standard deviation of Y series

हल:

(i) X व Y श्रेणियों के माध्य मूल्य

$8\times -10y = -66$ ....(i)

$40\times -18y = 214$ ....(ii)

समीकरण 1 को 5 से गुणा करके समीकरण (ii) में से घटाने पर

$$40\times-18y=214$$
$$40\times-50y=-330$$
$$\begin{array}{r} + \qquad + \\ \hline -\quad 32y=554 \\ \hline \end{array}$$

$$or Y=\frac{544}{32}=17; \qquad \therefore \overline{Y}=17$$

Y का मूल्य समीकरण (i) में रखने पर

$$8\times-10\times17=-66$$

$8\times=-66+170$ or $8\times=104$

Or $\times=\frac{104}{8}=13;$

$$\therefore \overline{\times}=13$$

(i) X व Y श्रेणी के प्रतीपगमन गुणांक

माना पहला समीकरण Y का X पर व दूसरा X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण है

अत: (i)40x=18y +214 or $\times=\frac{18}{40}Y+\frac{214}{40}$

$$\therefore b_{\times y}=\frac{18}{40}=\frac{9}{20}$$

(ii) $-10y=-8\times-66$ or $Y=\frac{8}{10}\times\frac{66}{10}$

$$\therefore=\frac{8}{10}\times\frac{4}{5}$$

टिप्पणी: यदि इस प्रश्न में पहले समीकरण 8x-10y+66 =0 को X का Y पर एवं दूसरे समीकरण 40X-18y-214=0 को y का X पर समाश्रयण समीकरण माना जाता तो $b_{\times y}$ एवं $b_{y\times}$ के क्रमश: निम्न मान प्राप्त होते -

$$b_{\times y}=\frac{10}{8} \text{ एवं } b_{y\times}=\frac{40}{8}$$

ये दोनों ही मान 1 से बड़े है, अत: इनका गुणनफल भी 1 से बड़ा होगा । इस प्रकार यह मान्यता सही नहीं होगी ।

(ii) X और Y श्रेणी के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक

$$r=\sqrt{b_{\times y}-b_{y\times}} \quad =\sqrt{\frac{9}{20}\times\frac{4}{5}} \quad =\sqrt{\frac{9}{25}} \quad =\frac{3}{5}=0.6$$

(iii) Y श्रेणी का प्रमाप विचलन

X का प्रसरण = 16 अत: $\sigma_{\times}=\sqrt{4}=$ 4

$$r = .6, \quad b_{y\times} = \frac{4}{5}$$

$$b_{y\times} = \frac{r \times \sigma_y}{\sigma_y}; \quad \frac{4}{5} \quad = \frac{.6 \times \sigma_y}{4}$$

Or $5 \times .6\sigma_y = 4 \times 4$

$$\sigma_y = \frac{4}{5} \times \frac{4}{.6} = 5.33$$

10.9 अनुमान की प्रमाप त्रुटि (Standard Error of Estimate)

समाश्रयण रेखाओं की सहायता से स्वतंत्र चर के दिये मानों के लिए आश्रित चर के मानों का सर्वोपयुक्त अनुमान लगाया, जाता है । यह पता लगाने के लिए कि हमारे अनुमान सत्य के कितने निकट है, अनुमान की प्रमाप त्रुटि ज्ञात की जाती है । आश्रित चर के वास्तविक मूल्यों व अगणित (Computed) मूल्यों के विचलन वर्गों के औसत का वर्गमूल ही अनुमान की प्रमाप त्रुटि कहलाती है । अर्थात यह अस्पष्ट या व्याख्या रहित विचलन मापक का वर्गमूल होता है । अस्पष्टीकृत प्रसरण y या x के कुल प्रसरण का वह भाग है जिसे स्वतंत्र चर के आधार पर स्पष्टीकृत नहीं किया जा सकता है ।

अनुमान की प्रमाप त्रुटि की गणना विधि ठीक प्रमाप विचलन के परिकलन विधि जैसी है। अन्तर केवल इतना है कि इसमें विचलन संगणित मूल्यों (Computed Values) से ज्ञात किये जाते है, जबकि प्रमाप विचलन के लिए विचलन ज्ञात करने हेतु समान्तर माध्य का प्रयोग किया जाता है ।

प्रतीपगमन रेखाओं के अनुमान की प्रमाप त्रुटियाँ निम्न सूत्रों से ज्ञात की जा सकती है -

X on Y

(i) $S_{\times y} = \sqrt{\frac{\sum (X - X_C)^2}{N}}$

(ii) $S_{\times y} = \sigma_\times \sqrt{1 - r^2}$

अत: $r = \sqrt{1 - \frac{Sxy^2}{\sigma x^2}}$

(iii) $S_{\times y} = \sqrt{\frac{\sum X^2 - a\sum \times - b\sum XY}{N}}$

Y on X

(i) $S_{y\times} = \sqrt{\frac{\sum (Y - Y_C)^2}{N}}$

(ii) $S_{y\times} = \sigma_y \sqrt{1 - r^2}$

अत: $r = \sqrt{1 - \frac{Syx^2}{\sigma y^2}}$

(i) $S_{y\times} = \sqrt{\frac{\sum Y^2 - a\sum \times - b\sum XY}{N}}$

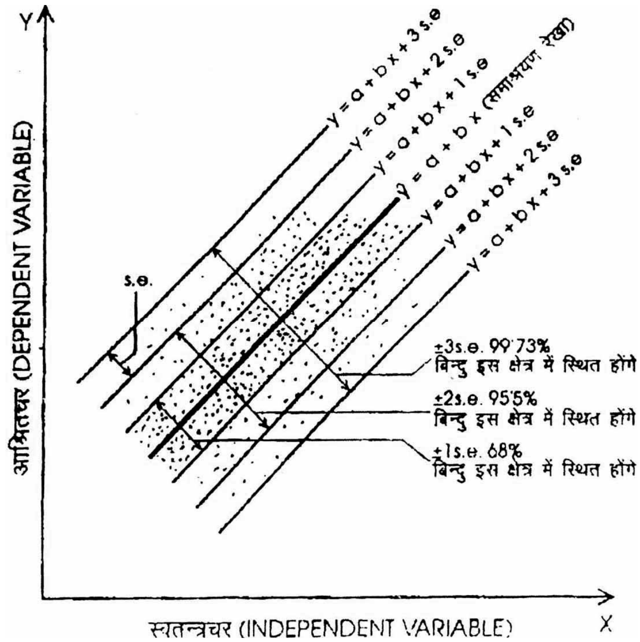
यहाँ :-

$S_{\times y}$ = X की Y पर अनुमान की प्रमाप त्रुटि (Standard Error of Estimate of X on Y)

$S_{y\times}$ Y की X पर अनुमान की प्रमाप त्रुटि (Standard Error of Estimate of Y on X)

X_C और Y_C क्रमश: X एवं Y के संगणित मूल्य (Computed Values of X and Y respectively)

टिप्पणी : अनुमान की प्रमाप त्रुटि का प्रतीपगमन रेखा से वही सम्बन्ध हे जो प्रमाप विचलन का समान्तर माध्य से है । यदि अनुमान की मान छोटा हैं तो इसका अर्थ है कि बिन्दु समाश्रयण रेखा के आस-पास अधिक नजदीक है । और इस प्रकार की रेखा से प्राप्त संगणित मूल्य वास्तविक मूल्यों के बहुत अच्छे अनुमान होंगे । यदि अनुमान की प्रमाप त्रुटि बड़ी है तो इसका अर्थ होगा कि बिन्दु समाश्रयण रेखा से दूर बिखरे हुए हैं और संगणित मूल्य वास्तविक मूल्यों के बहुत अच्छे अनुमान नहीं होंगे । यदि अनुमान की प्रमाप त्रुटि का मान शून्य है तो इसका अर्थ है बिन्दु समाश्रयण रेखा पर होंगे अर्थात् दोनो चर श्रेणियों में पूर्ण सह सम्बन्ध होगा व संगणित मूल्य वास्तविक मूल्यों के समान होंगे । यदि वितरण प्रसामान्य (Normal) हो तथा विश्लेषण दैव प्रतिचयन पर आधारित हो, तो प्रतीपगमन रेखा से विभिन्न बिन्दुओं की दूरी का निर्वचन प्रमाप विचलन के निर्वचन के समान ही किया जा सकता है । निम्न चित्र प्रतीपगमन रेखा से विभिन्न दूरी पर स्थित बिन्दुओं की स्थिति दर्शाता है ।



उदाहरण : 10

निम्न समंकों से प्रतीपगमन रेखाओं के अनुमान की प्रमाप त्रुटियां कीजिये -

Calculate Standard error of estimate of regression lines from the date given below ;-

हल :-

Calculation of Regression and Regression Equations

X	dx (X-2)	dx^2	Y	dy (Y-4)	dy^2	dxdy
1	-1	1	2	-2	4	2
2	0	0	5	+1	1	0
3	+1	1	3	-1	1	-1
4	+2	4	8	+4	16	8
5	+3	9	7	+3	9	9
Total	+5	15		+5	31	18

Means of X and Y

$$\overline{X} = A + \frac{\sum dx}{N} = 2 + \frac{5}{5} = 2 + 1 = 3$$

$$\overline{Y} = A + \frac{\sum dy}{N} = 4 + \frac{5}{5} = 4 + 1 = 5$$

Regression CofficientS

X on Y

$$b_{xy} = \frac{\sum dxdy - \frac{\sum dx \times dy}{N}}{\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N}} = \frac{18 - \frac{5\times5}{5}}{31 - \frac{(5)^2}{5}} = \frac{18-5}{31-5} = \frac{13}{26} = .5$$

$\therefore bxy = 5$

Y on X

$$b_{yx} = \frac{\sum dxdy - \frac{\sum dx \times dy}{N}}{\sum dx^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N}} = \frac{18 - \frac{5\times5}{5}}{15 - \frac{(5)^2}{5}} = \frac{18-5}{15-5} = \frac{13}{10} = 1.3$$

$\therefore bxy = 1.3$

Y on x

Regression Equations

X on Y

$(X - \overline{X}) = b_{xy} = (Y - \overline{Y})$

$(X - 3) = .5(Y - 5)$

$X = 3 + .5Y - .5\times5$

$X = 3 - 2.5 + .5Y$

$X = .5 + .5Y$

Y on X

$(Y - \overline{Y}) = b_{yx} = (X - \overline{X})$

$(Y - 5) = 1.3(X - 3)$

$Y = 5 + 1.3X - 1.3\times3$

$Y = 5 - 3.9 + 1.3X$

$Y = 1.1 + 1.3X$

Calculation of Standard Error of Estimate

X	X_C	$(X - X_C)$	$(X - X_C)^2$	Y	Y_C	$Y - Y_C$	$(Y - Y_C)^2$
1	1.5	-.5	.25	2	2.4	-.4	.16
2	3	-1	1	5	3.7	1.3	1.69
3	2	1	1	3	5	-2	4
4	4.5	-.5	.25	8	6.3	1.7	2.89
5	4	1	1	7	7.6	-.6	.36
Total			3.5				9.1

टिप्पणी :- X_C तथा Y_C के मूल्यों की गणना के लिए प्रतीपगमन समीकरण .5+.5Y में Y के ज्ञात मूल्यों को रखकर X_C ज्ञात किया गया तथा समीकरण 1.1+.1.3X में X के मूल्यों को रखकर Y_C ज्ञात किये गये हैं।

$$\sum(X-X_C)^2 = 3.5$$

$$S_{xy} = \sqrt{\frac{\sum(X-X_C)^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{3.5}{5}} = .836$$

$$\sum(y-y_C)^2 = 9.10$$

$$S_{yx} = \sqrt{\frac{\sum(y-y_C)^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{9.10}{5}} = 1.349$$

10.10 सारांश

उपरोक्त विवेचन से स्पष्ट है कि सहसंबंध दो श्रेणियों में सबंद्धता की संख्यात्मक अभिव्यक्ति हैं परन्तु एक चल के ज्ञात मूल्य के आधार पर दूसरे संबंधित चल के मूल्य का अनुमान लगाने के लिए प्रतीपगमन विश्लेषण करना आवश्यक होगा । प्रतीपगमन की गणना करते समय वह विश्लेषण करना आवश्यक होगा । प्रतीपगमन की गणना करते समय वह मूल्य जो ज्ञात है, स्वतंत्र चर तथा दूसरा अज्ञात मूल्य जिसकी गणना करनी है, अश्रित चर कहलाता है । दो संबंधित श्रेणियों (X तथा Y) के परस्पर औसत संबंध को प्रकट करने के लिए दो प्रतीपगमन रेखाओं की रचना की जाती है । जो क्रमशः X का Y पर प्रतीपगमन एवं Y का X न प्रतीपगमन को प्रकट करती हे । इन रेखाओं की रचना करने हेतु मुक्त हस्त वक्र रीति, प्रतीपगमन समीकरण रीति या न्यूनतम वर्ग रीति का प्रयोग किया जा सकता है । इन रेखाओं हेतु ज्ञात समाश्रयण गुणांकों की सहायता से सहसंबंध गुणांक का निर्धारण भी किया जा सकता है । प्रतीपगमन विश्लेषण आर्थिक व व्यावसायिक अनुसंधान के क्षेत्र' में पुर्वानुमान लगाने में विशेष रूप से उपयोगी है ।

10.11 तकनीकी शब्दावली (Technical Terms)

प्रतीपगमन	:	मूल इकाईयों के रूप में दो या दो से अधिक चरों के पारस्परिक औसत संबंध का माप ।
रेखीय प्रतीपगमन	:	विक्षेप चित्रों में अंकित बिन्दुओं से सरल रेखा प्राप्त होना ।
बहु गुणी प्रतीपगमन	:	दो से अधिक चलों में पारस्परिक संबंधों का समाश्रयण विश्लेषण।

‘ a ’ अचर मूल्य	:	वह बिन्दु जिस पर प्रतीपगमन रेखा कोटि अक्ष को स्पर्श करें. यह y अत: खण्ड y (intercept) है ।
‘ b ’ अचर मूल्य	:	प्रतीपगमन रेखा के ढलान को निश्चित करने वाला मूल्य।
प्रतीपगमन गुणांक	:	वह अनुपात जो एक समंक श्रेणी के चर मूल्यों में एक इकाई परिवर्तन होने पर संबद्ध दूसरी श्रेणी में चर मूल्यों मे होने वाले परिवर्तनों को स्पष्ट करें।
अनुमान की प्रमाप त्रुटि	:	आश्रित श्रेणी के वास्तविक मूल्यों एवं संगणित मूल्यों के विचलनों का माध्यक, माप ।

10.12 स्वपरख प्रश्न

1. प्रतीपगमन की परिभाषा दीजिये ।
2. प्रतीपगमन की रेखायें दो क्यों होती है ? किन परिस्थितियों में केवल एक ही प्रतीपगमन रेखा हो सकती है?
3. सहसंबंध तथा प्रतीपगमन में अन्तर बताइये ।
4. टिप्पणियां लिखिए :-

   (अ) प्रतीपगमन गुणांक

   (ब) अनुमान की प्रमाप त्रुटि
5. प्रतीपगमन समीकरण किस प्रकार निकाले जाते है, उदाहरण द्वारा समझाये
6. किसी परीक्षा में 500 परीक्षार्थियों के सांख्यिकी एवं अर्थशास्त्र विषयों में प्राप्तांक का विवरण निम्न प्रकार है :-

The detail of marks obtained by 500 candidates in an examination in Statistics and Economics are given blow :

	सांख्यिकी (Statistics)	अर्थशास्त्र (Economics)
माध्य प्राप्ताक (Mean Marks)	48	50
प्रमाप विचलन (Std. Deviation)	9	16

दोनों विषयों के सम्बन्धित माध्यों से निकाले गये प्राप्तांकों के विचलनों की गुणाओं का योग 38936; प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए । सांख्यिकी में 50 अंक प्राप्त करने वाले परीक्षार्थी के अर्थशास्त्र में प्राप्तांक भी अनुमानित कीजिए ।

Total product of deviation from the respective means of the subjects is 38936 fond out two regression equations. Also estimate the marks of a candidate in Economics whose marks in Statics are 50.

Ans.$\left[X = 0.304y + 32.8, Y = 0.96x + 3.92\right]$ **(ii) (52)**

1. निम्नलिखित समंक 1000 अधिकारियों की लम्बाई (X) तथा भार (Y) से सम्बन्धित है :-

The following data relates to the height (X) and weight (Y) of 1000 executives :

Mean Height $\left(\overline{X}\right)$= Mean Weight $\left(\overline{Y}\right)$ =160 lbs

Standard deviations (σ_x) of height =3.6 $''$ and that of weight (σ_y)=25 lbs and r=0.8

अनुमानित कीजिए (Estimate) :

(i) उस अधिकारी की लम्बाई जिसका भार 100 है । (The height of an exective whose weight is 100 lbs)

(ii) उस अधिकारी का भार जिसकी ऊंचाई 5 फीट है । (The weight of an exective whose height is 5 ft.)

Ans. (i) X on Y =0.136y +80.48, (ii) Y on X Y = 0.06 X + 64.6

8. निम्न आँकड़ों से Y का X पर तथा X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण बनाइए ।

Calculate the regression equations of Y on X and X on Y from the following data :

Sales	91	97	108	121	67	124	51	73	111	57
Purchases	71	75	69	97	70	91	39	61	80	47

Ans. (i) X on Y =0.136y +80.48, (ii) Y on X Y = 0.06 X + 64.6

9. 10 पिताओं और उनके पुत्रों की ऊंचाई के आँकड़े निम्न प्रकार हैं । उनके प्रतीपगमन समीकरणों को ज्ञात कीजिए ।

Following are the data of height of 100 father and their sons. Find out the regression equations from them.

Height of father in inches (X)	62	64	66	67	68	69	71	72	73
Height of son in inches (Y)	63	62	65	67	67	70	70	68	71

Ans. $\left[X = 5.02 + .94y; y = 19.4 + 0.7x\right]$

10. निम्नलिखित समंकों से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा प्रतीपगमन समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find out the regression equations by least squre method, from the following data :

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Ans. $\left[x = y - 7; y = X + 7\right]$

11. एक वितरण के निम्न माप दिये गये हैं :-

For a distribution the following measures are given : -

X श्रेणी का प्रसरण (Variance of X) = 25 तथा प्रतीपगमन समीकरण (Regression equations)

ज्ञात कीजिए (find out) :

(i) X और Y के मूल्य (Mean values of x and y)

(ii) X तथा Y के मध्य निश्चयन गुणांक तथा सह सम्बन्ध गुणांक (The Coefficient of determination and coefficient of correlation)

(iii) y श्रेणी का प्रमार विचलन (Standard deviation y)

Ans. $\left[(i)\overline{X}4, \overline{Y} = 7 (ii) r = -.5 (iii) \sigma_y = 14.97\right]$

12. निम्न समाश्रयण समीकरण दी गई है :

The following regression equations are given

(A) X+2Y =5; 2x+3y = 8,

(B) 2X-3Y = 0, 4y - 5x 8 = 0

ज्ञात कीजिए :

(i) X , एवं Y श्रेणी के माध्य

(ii) सह सम्बन्ध गुणांक

Find :

(i) Means of X and Y series.

(ii) Coefficient of Correlation between x and y.

Ans. a) $\overline{x} = 1, \overline{y} = 2r, 0.87$

b) $\overline{y} = 12, \overline{y} = 8r, 0.91$

10.13 संदर्भ ग्रन्थ

S.P. Gupta : Statistical Methods.

J.K. Sharma : Business Statistics.

D.R. Agarwal : Business Statistics.

Pinnai & Bhagwati : Statistics Methods.

K.N.Nagar : साख्यिकीय विधियाँ ।

Yadav, Jain, Mittal : साख्यिकीय विधियाँ ।

इकाई -11 : सह-सम्बन्ध

इकाई की रूपरेखा

11.0 उद्देश्य
11.1 प्रस्तावना
11.2 सहसम्बन्ध का अर्थ एवं परिभाषा
11.3 सहसम्बन्ध के प्रकार
11.4 सह-सम्बन्ध का परिमाण या मात्रा
11.5 सहसम्बन्ध ज्ञात करने की रीतियाँ
11.6 विलम्बना तथा अग्रगमन
11.7 सहसम्बन्ध गुणाक से सबधित अन्य माप निश्चयन गुणांक एव अनिश्चयन गुणांक
11.8 सारांश
11.9 तकनीकी शब्दावली
11.10 स्वपरख प्रश्न
11.11 सन्दर्भ ग्रन्थ

11.1 उद्देश्य (Objectives)

इस अध्याय को पढ़ने के पश्चात् आप समझ पायेंगे :-

- सहसंबंध से क्या आशय है ?
- सहसंबंध कितने प्रकार का होता है ?
- सहसंबंध गुणांक का निर्वचन किस प्रकार किया जाता है ?
- सहसंबंध गुणांक का माप करने की विभिन्न रीतियां कौन सी है ?
- सहसंबंध गुणांक की विश्वसनीयता की जांच किस प्रकार की जाती है ?
- विलम्बना या अग्रगमन होने पर गुणांक की गणना कैसे की जाती है ?

11.1 प्रस्तावना (Introduction)

पूर्व के अध्यायों में अब तक जिन सांख्यिकीय रीतियों का अध्ययन किया है, उनमें केवल एक चरीय आवृति वितरण उनकी रचना एवं बनावट का ही अध्ययन सम्मिलित है ।

व्यावहारिक जीवन में अनेक ऐसी स्थितियाँ पायी जाती है जब दो या अधिक चरों (Variables) के मध्य आन्तरिक सम्बन्ध पाया जाता है । अर्थात् एक या अनेक चरों के मान में कमी अथवा वृद्धि के कारण प्राय: किसी अन्य चर के मान में कमी अथवा वृद्धि होती है । अनेक दशाओं में घटनायें परस्पर एक दूसरे से प्रभावित होकर परिवर्तित होती रहती है । उदाहरणार्थ -यदि परिवार की आय तथा व्यय के समंक साथ-साथ रखकर देखें जाये तो यह स्पष्ट रूप से दिखाई देगा कि आय बढ़ने पर व्यय भी बढ़ा है

। और आय घटने पर व्यय में भी कमी आई है । इसके विपरीत यदि किसी वस्तु के मूल्य तथा माँग के समंकों का अवलोकन करें तो यह पाया जाएगा कि मूल्य बढ़ने पर माँग में कमी आई है, जबकि मूल्य घटने पर माँग में वृद्धि हो गई है । इस प्रकार के अनेक उदाहरण हम अपने दैनिक जीवन में देखते हैं ।

ऐसी दशा में समंक युग्म मापों के रूप में प्रस्तुत किये जाते हैं तो विश्लेषक को यह जानना जरूरी हो जाता है कि क्या इन युग्म मापों में कोई सहसम्बन्ध है अथवा नहीं।

11.2 सहसम्बन्ध का अर्थ एवं परिभाषा (Meaning & Definition of Correlation)

समंक विश्लेषण की यह विधि जो दो अथवा अधिक चरों के मध्य सम्बन्ध की प्रगाढ़ता का मापन एवं विश्लेषण करती है, सहसम्बन्ध कहलाती है ।

जब दो या अधिक चरों में परिवर्तन इस प्रकार होता है कि एक चर में परिवर्तन का सम्बन्ध दूसरे चर अथवा चरों से होता है, यह परिवर्तन उसी दिशा अथवा विपरीत दिशा में हो सकता है तो ऐसे चर सहसम्बन्धित कहलाते हैं ।

प्रो. बाऊले के अनुसार, “जब दो चर इस प्रकार सम्बन्धित हों कि एक चर में होने वाले परिवर्तन दूसरे चर में होने वाले परिवर्तन की सहानुभूति में हों, अर्थात् एक चर में कमी अथवा वृद्धि दूसरे चर में कमी या वृद्धि अथवा इसके विपरीत से सम्बन्धित हों, तो दोनों चर परस्पर सह-सम्बन्धित कहलाते हैं ।"

प्रो. बोडिंगटन के अनुसार “जब कभी दो या अधिक समूहों, वर्गों अथवा समंक-श्रेणियों में सुनिश्चित संयोग विद्यमान हो तो उनमें सहसम्बन्ध का होना कहा जाता है ।”

प्रो. किंग के मतानुसार दो श्रेणियों अथवा समूहों के मध्य कार्य कारण सम्बन्ध को ही सहसम्बन्ध कहते हैं । लिखा है कि “सहसम्बन्ध का अर्थ यह है कि दो समंक श्रेणियों अथवा तथ्य समूहों में कारण कार्य सम्बन्ध पाया पाता है ।" प्रो. किंग ने ही यह भी स्पष्ट किया है कि “यदि यह सत्य सिद्ध हो जाता है कि अधिकांश उदाहरणों में दो चर-मूल्य सदा एक दिशा में या विपरीत दिशा में घटने-बढ़ने की प्रवृत्ति रखते है तो ऐसी स्थितियों में हम यह समझते है कि उनमें एक सम्बन्ध पाया जाता है । यह सम्बन्ध भी सहसम्बन्ध कहलाता है ।”

डेवनपोर्ट ने लिखा है कि “सहसम्बन्ध का सम्पूर्ण विषय पृथक् विशेषताओं के मध्य पाये जाने वाले उस पारस्पारिक सम्बन्ध की ओर संकेत करता है जिसके अनुसार वे कुछ सीमा तक साथ-साथ परिवर्तित होने की प्रवृत्ति रखते हैं ।” इस प्रकार दो या दो से अधिक चरों के सह विचरणों के विश्लेषण को सहसम्बन्ध कहते हैं । सहसम्बन्ध विश्लेषण से हमें ज्ञात होता है कि दो चरों में किस प्रकार का एवं कितना सह सम्बन्ध है।

यहाँ यह स्पष्ट कर देना आवश्यक है कि सहसम्बन्ध की उपस्थिति के लिए कारण-कार्य सम्बन्ध का विद्यमान होना सदैव आवश्यक नहीं होता । अर्थात् सहसम्बन्ध सदैव

कारण- परिणाम से ही उत्पन्न नहीं होता है । लेकिन फिर भी कारण-कार्य सम्बन्ध होने पर सहसम्बन्ध विद्यमान होता है ।

कारण-कार्य सम्बन्ध तथा सहसम्बन्ध (Correlation and Causation)

जब एक श्रेणी के परिवर्तित होने से संबन्धित दूसरी श्रेणी में परिवर्तन होता हों तो एक से दूसरी श्रेणी में इस पारस्पारिक आश्रितता को ही सांख्यिकी में सहसम्बन्ध कहते हैं । इस प्रकार एक समंक माला में परिवर्तन कारण हो जिससे दूसरी समंक माला में परिवर्तन प्रभाव हों, तब ही सहसम्बन्ध सार्थक कहा जाता है अन्यथा नहीं । उदाहरणार्थ- आय में परिवर्तन कारण है जिसका प्रभाव व्यय में वृद्धि है; मूल्य वृद्धि कारण है जिससे माँग में कमी होना प्रभाव है, वाहनों की संख्या कारण तथा दुर्घटनाएं उनका प्रभाव, बेकारी कारण है और दोषियों की संख्या प्रभाव । इस प्रकार जब दो या अधिक श्रेणियों में इस प्रकार का कारण-कार्य सम्बन्ध हो तभी सहसम्बन्ध महत्वपूर्ण कहा जा सकता है।

सहसम्बन्ध गणना रीति द्वारा केवल सहसम्बन्ध की मात्र को मापा जाता है । उच्च स्तरीय सहसम्बन्ध होने पर भी यह जरूरी नहीं है कि उनमें सार्थक सहसम्बन्ध भी हो, क्योंकि साहचर्य (Association) तथा कारण-कार्य सम्बन्ध (Causation) में बहुत अन्तर है । इसी प्रकार दो चलों के मध्य साहचर्य होने पर भी यह आवश्यक नहीं कि उनमें कारण कार्य सम्बन्ध हो, किन्तु कारण - कार्य सम्बन्ध होने पर साहचर्य होना आवश्यक है । यहाँ यह जानना आवश्यक है । कि केवल साहचर्य के आधार पर सहसम्बन्ध का परिकलन भ्रामक निष्कर्षो को जन्म देता हैं जब ऐसे सहसम्बन्ध को भ्रामक सहसम्बन्ध (Spurious Correlation) या निरर्थक सहसम्बन्ध (None sense Correlation) कहते हैं । वे परिस्थितियाँ निम्नलिखित है :-

1 यदि दो चलों में उच्चस्तरीय सहसम्बन्ध हो, जबकि व्यवहारिक दृष्टि में उनके मध्य कोई सम्बन्ध न हो तो इस प्रकार के सहसम्बन्ध को भ्रामक सहसम्बन्ध कहते हैं । जैसे भारत सरकार के कर्मचारियों के वेतन तथा अमेरिका में शराब की कीमत के मध्य उच्चस्तरीय सहसम्बन्ध होने पर भी यह निरर्थक है; क्योंकि इन दोनों चलों में किसी प्रकार का कारण कार्य का सम्बन्ध नहीं है ।

2 कई बार संयोग से दो चलों में ऐसा सहसम्बन्ध उपस्थित हो सकता है । जो तार्किक दृष्टि से स्पष्टतया भ्रामक हो, जैसे पति-पत्नी की आयु में ऋणात्मक सहसम्बन्ध, मूल्य वृद्धि एवं मांग वृद्धि में धनात्मक सहसम्बन्ध होना आदि । अपर्याप्त न्यादर्श होने की दशा में सामान्यत: सहसम्बन्ध भ्रामक हो सकता है ।

3 कभी-कभी दो समंक श्रेणियों या चरों में सम्बन्ध हो होता है लेकिन इस बात का निश्चय करना कठिन होता है । कि कौन सा कारण तथा कौन सा उसका प्रभाव है । उदाहरणार्थ बैंक ऋणों तथा जमाओं में घनिष्ट सम्बन्ध होने पर भी यह कहना कठिन है कि ऋणों की सुविधा के कारण जमाओं में वृद्धि हुई है या जमाओं में वृद्धि के फलस्वरूप बैंक ऋणों में वृद्धि हुई है ।

4 जब दो चर स्वतंत्र हो लेकिन किसी अन्य कारण से दोनों चर समान रूप से प्रभावित होते हो तो उच्च सहसम्बन्ध होने पर भी निष्कर्ष भ्रामक एवं अर्थहीन ही होंगे । उदाहरणार्थ पिछले दस वर्षों में गेहूँ तथा मक्का के उत्पादन के मध्य उच्च सहसम्बन्ध होते हुए भी वे प्रत्यक्ष रूप से एक दूसरे से सम्बन्धित नहीं है । गेहूँ का उत्पादन में वृद्धि होने से मक्का के उत्पादन में परिवर्तन होना आवश्यक नहीं है । वास्तव में इन समंक श्रेणियों या चरों पर अन्य कारणों का समान रूप से प्रभाव रहा है, जैसे कृषि के आधुनिकीकरण से गेहूँ एवं मक्का दोनों के उत्पादन में वृद्धि हुई है ।

डॉ. बॉडिंगटन ने स्पष्ट किया है कि "यदि सारे प्रमाण यह संकेत करते है कि दो चरों के मध्य कुछ सहसम्बन्ध पाया जाता है या पाया जा सकता है, तो भी इन प्रमाणों की बड़ी सावधानी से जाँच करनी चाहिए ।" केवल सहसम्बन्ध की विद्यमानता सदैव सही परिणाम प्रस्तुत करें यह आवश्यक नहीं है सही परिणाम के आकलन हेतु गहन विश्लेषण एवं सतर्कता के साथ कारण-कार्य सम्बन्ध का विश्लेषण आवश्यक है ।

11.3 सहसम्बन्ध के प्रकार (types of Correlation)

सहसम्बन्ध के निम्न प्रकार हो सकते है :-

1. धनात्मक तथा ऋणात्मक सहसम्बन्ध

जब दोनों चरों में एक ही दिशा में परिवर्तन होते हो अर्थात् एक चर के मूल्यों में वृद्धि होने पर दूसरे चर के मूल्यों में भी वृद्धि होती है तथा एक चर के मूल्यों में कमी होने पर दूसरे चर के मूल्यों मे भी कमी होती है तो ऐसे सहसम्बन्ध को धनात्मक सहसम्बन्ध कहते है । जैसे पिता की आयु बढ़ने से पुत्र की आयु बढ़ना, मूल्य बढ़ने पर पूर्ति बढ़ना या मूल्य घटने पर पूर्ण घटना आदि । यहाँ यह बात ध्यान रखने योग्य है कि परिवर्तनों की दिशा महत्वपूर्ण है, मात्रा नहीं ।

दूसरी और, यदि एक चर के मूल्यों में वृद्धि होने पर दूसरे चर के मूल्यों में कमी होती है अर्थात दोनों चरों के परिवर्तन विपरीत दिशा में है तो इसे ऋणात्मक सहसम्बन्ध कहते है। उदाहरण के लिए किसी वस्तु के मूल्य में वृद्धि होने पर उसकी माँग में कमी आ जाती है, या मूल्य में कमी होने पर मांग में वृद्धि हो जाती है, यह ऋणात्मक सहसंबंध कहलाता है ।

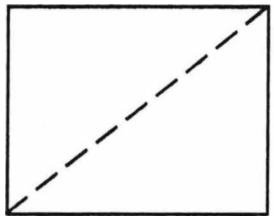
धनात्मक एवं ऋणात्मक सहसम्बन्ध निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है -

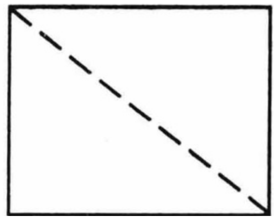
धनात्मक सहसम्बन्ध								ऋणात्मक सहसम्बन्ध							
पिता की आयु	A	:	20	25	28	30	35	मूल्य में वृद्धि	A	:	20	25	28	30	35
पुत्र की आयु	B	:	12	18	20	25	30	मांग में कमी	B	:	30	25	20	18	12
कीमत में कमी	A	:	40	30	25	20	15	लागत में कमी	A	:	40	30	25	20	15
पूर्ति में कमी	B	:	25	20	15	10	8	उत्पादन में वृद्धि	B	:	8	10	15	20	25

नीचे चित्रों में पूर्ण धनात्मक एवं पूर्ण ऋणात्मक सह-सम्बन्धों को प्रदर्शित किया गया है:-

पूर्ण धनात्मक सह- सम्बन्ध **पूर्ण ऋणात्मक सह-सम्बन्ध**

Perfect Positive Correlation Perfect Nagative Correlation



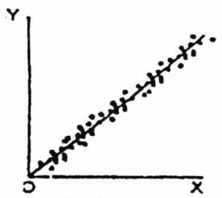


2 रेखीय तथा वक्र रेखीय सहसम्बन्ध :-

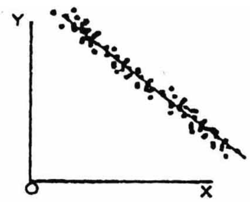
यदि दो चरों के मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों के मध्य दूरी स्थिर रहती है तो ऐसा संबंध रेखीय सहसम्बन्ध पाया जाता है । जैसे यदि आय में 20 रूपये की वृद्धि बचत में सदैव 8 रू. ही वृद्धि करती है तो आय और बचत में रेखीय सहसम्बन्ध माना जाता है । रेखीय सम्बन्ध वाले चल मूल्यों को रेखाचित्र पर अंकित करने से एक सरल रेखा बन जाती है, इसलिए इसे रेखीय सहसम्बन्ध कहते है । किन्तु ऐसा केवल प्राकृतिक विज्ञान में ही सम्भव है ।

दूसरी ओर, जब दोनो चलों में परिवर्तन का अन्तर बदलता रहता है अर्थात् अस्थिर होता है जैसे प्रत्येक बार आय में 20 रू. वृद्धि होने पर बचत में पहली बार 8 रू. की, दूसरी बार 4 रू. की और तीसरी बार 10 रू. की वृद्धि होती है तो दोनों चलों के मध्य पाये जाने वाले सम्बन्ध को वक्र रेखीय प्रकृति का कहा जाता है । ऐसे चल मूल्यों को रेखाचित्र पर अंकित करने से एक वक्र रेखा का निर्माण हो जाता है, इसलिए ऐसे सहसम्बन्ध को वक्र रेखीय सहसम्बन्ध कहते हैं । सामाजिक तथा आर्थिक क्षेत्रों से सम्बन्धित समंकों में प्राय: वक्र-रेखीय सहसम्बन्ध ही पाया जाता है ।

चित्र के माध्य से इसे निम्न प्रकार से स्पष्ट किया जा सकता है:-

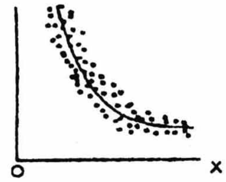


धनात्मक रेखीय सहसम्बन्ध



ऋणात्मक रेखीय सहसम्बन्ध

धनात्मक वक्र रेखीय सहसम्बन्ध



ऋणात्मक वक्र रेखीय सहसम्बन्ध

3 सरल, आंशिक व बहुगुणी सह-सम्बन्ध :-

जब सहसम्बन्ध दो चरों के मध्य ज्ञात किया जाता है तो इसे सरल सहसम्बन्ध कहते हैं। यदि चरों की संख्या अधिक हो तो उनके बीच सहसम्बन्ध बहुगुणी अथवा आंशिक हो सकता है । एक आश्रित चर पर दो या अधिक स्वतंत्र चरों के सम्मिलित प्रभाव का अध्ययन बहुगुणी सह सम्बन्ध कहलाता है । जबकि आंशिक सह सम्बन्ध (Practical Correlation) के अन्तर्गत दो से अधिक चरों के मध्य सम्बन्ध का अध्ययन किया जाता है, परन्तु अन्य चरों में परिवर्तन के प्रभाव को स्थिर मानते हुए केवल दो चरों के मध्य सम्बन्ध का ही मापन किया जाता है । उदाहरणार्थ विद्यार्थियों की आयु, ऊँचाई एवं भार में यदि आयु को स्थिर मानकर ऊँचाई एवं भार के बीच सहसम्बन्ध ज्ञात किया जाये तो यह आंशिक सह-सम्बन्ध कहलायेगा ।

4 सह-सम्बन्ध का परिमाण या मात्रा (Degree of Correlation) :-

सह सम्बन्ध के परिमाण को नापने के लिए सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जाता है । यह गुणांक धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है । किन्तु सह -सम्बन्ध गुणांक कभी भी +1 से एवं -1 से अधिक नहीं हो सकता है । सह सम्बन्ध के परिमाण को निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया जा सकता है ।

(1) पूर्ण सहसम्बन्ध (Perfect Correlation) - जब दो चर-मूल्यों के परिवर्तन समान अनुपात में हो तो उनमें पूर्ण सहसम्बन्ध होता है । समान अनुपात में जब परिवर्तन, एक ही दिशा में होता है, तब सहसम्बन्ध पूर्ण धनात्मक (Perfect Positive Correlation) होता है । इसके विपरीत जब समान अनुपात में परिवर्तन विपरीत दिशाओं में हो तो सहसम्बन्ध पूर्ण ऋणात्मक (Perfect Negative Correlation) होता है ।

(2) उच्च स्तरीय सहसम्बन्ध (High Degree of Correlation)- जब दो चर मूल्यों में सहसम्बन्ध पूर्ण (Perfect) तो न हो, पर काफी अधिक मात्रा में हो तो वहाँ उच्च-स्तर का सहसम्बन्ध होता है । उच्च स्तरीय सहसम्बन्ध की स्थिति में सहसम्बन्ध गुणांक 0.75 या इससे अधिक लेकिन 1 से कम होता है । सहसम्बन्ध गुणांक का चिन्ह धन (+) होने पर यह उच्च-स्तर का धनात्मक सहसम्बन्ध तथा चिन्ह ऋण (-) होने पर संबंध उच्च स्तरीय ऋणात्मक होता है ।

(3) मध्य स्तरीय सहसम्बन्ध (Moderate Degree of Correlation) - जब सहसम्बन्ध की मात्रा न तो बहुत उच्च हो तथा न बहुत निम्न हो वहाँ मध्य-स्तरीय सहसम्बन्ध विद्यमान होता है । इस स्थिति में सहसम्बन्ध गुणांक 0.25 से 0.75 के मध्य होता है । यह धनात्मक हो सकता है ।

(4) निम्न स्तरीय सहसम्बन्ध (Low Degree of Correlation) - जब दो चर मूल्यों में सहसम्बन्ध तो हो लेकिन बहुत ही कम मात्रा में हो तो वहीं निम्न-स्तरीय का सहसम्बन्ध होता हैं इस स्थिति में सहसम्बन्ध शून्य (0) से अधिक व 0.25 के मध्य होता है । यह भी धनात्मक तथा ऋणात्मक हो सकता है ।

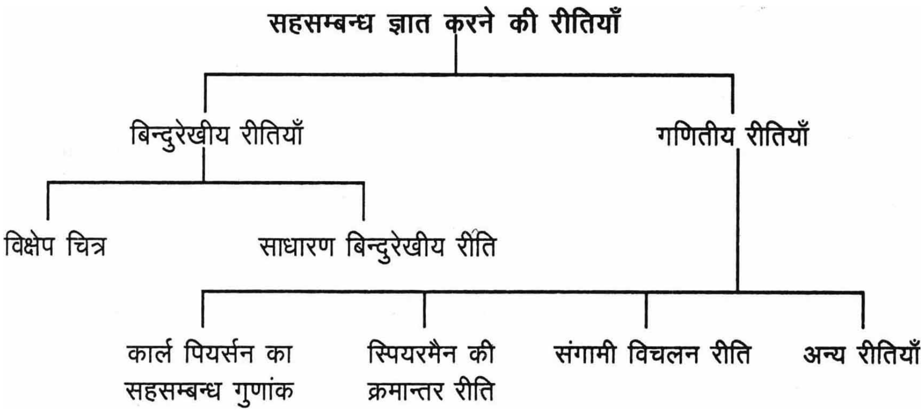
(5) सहसम्बन्ध की अनुपस्थिति (Absence of Correlation) - यदि दो चरों में आश्रितता बिल्कुल न पाई जाये अर्थात् उनके परिवर्तनों में सम्बन्ध न हो तो ऐसी स्थिति को सहसम्बन्ध का अभाव कहते हैं । सहसम्बन्ध के अभाव की स्थिति में सहसम्बन्ध गुणांक शून्य (0) होता है ।

सहसम्बन्ध की विभिन्न परिमाणों को निम्न तालिका से समझा जा सकता है :-

परिणाम	धनात्मक	ऋणात्मक
पूर्ण (Perfect)	+1	-1
उच्च (High)	+.75 और 1 के मध्य	-1 और -.75 के मध्य
सीमित मध्यम (Moderate)	+.25 और +.75 के मध्य	-.75 और -.25 के मध्य
निम्न (Low)	0 व +.25 के मध्य	-.25 व 0 के मध्य
अनुपस्थित (Absence)	0	0

11.5 सहसम्बन्ध ज्ञात करने की रीतियाँ (Methods of Determining Correlation)

सहसम्बन्ध ज्ञात करने की प्रमुख रीतियों को निम्न चार्ट से आसानी से समझा जा सकता है :-

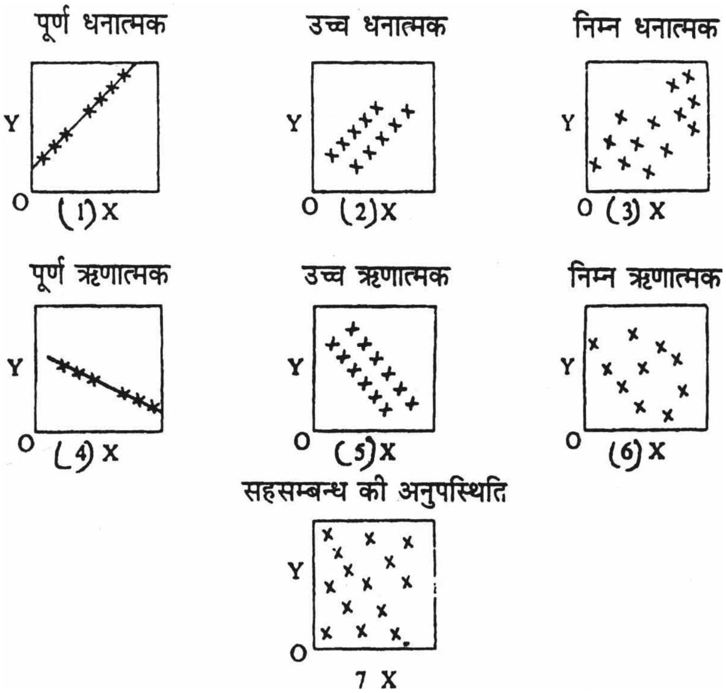


टिप्पणी : न्यूनतम वर्ग रीति व प्रतीपगमन गुणांकों द्वारा भी सहसंबंध ज्ञात किया जा सकता है, जिनका विस्तृत विवेचन प्रतीपगमन विश्लेषण नामक अध्याय में किया गया है।

प्रमुख रीतियों का वर्णन निम्नानुसार है :-

1. विक्षेप चित्र (Scatter Diagram)

दो समंक श्रेणियों में सहसम्बन्ध की दिशा तथा मात्रा का अनुमान विक्षेप चित्र के द्वारा ज्ञात किया जा सकता है । इस रीति के अनुसार स्वतंत्र चर-मूल्यों की ग्राफ के भुजाक्ष (X-axis) पर तथा तत्सम्बन्धी आश्रित चर मूल्यों को कोटि अक्ष (Y-axis) पर अंकित किया जाता है । X तथा Y दोनों समंक श्रेणियों के प्रत्येक पद-युग्म (Pairs of Items) या जोड़े के लिए एक-एक बिन्दु अंकित किया जाता है । इस प्रकार समंक श्रेणी में जितने पद-युग्म होंगे उतने ही बिन्दु ग्राफ पत्र पर अंकित किये जायेंगे । विक्षेप चित्र में अंकित विभिन्न बिन्दुओं को देखने पर चर-मूल्यों की एक निश्चित प्रवृति का आभास हो जाता है । यह प्रवृति ही सहसंबंध है । इसे निम्न चित्रों के द्वारा समझा जा सकता है:-



दोनों श्रेणियों के पदयुग्म जितने पास होंगे उतना ही अधिक सहसंबंध होगा । सहसंबंध की दिशा का ज्ञात करने के लिए पदयुग्म की बढ़ने की दिशा को देखा जाता है अर्थात् यदि युग्म नीचे बायें से ऊपर दायें बढ़ते हुये होते हैं तो धनात्मक संबंध ऊपर बायें से नीचे दायें गिरते हुये होने पर ऋणात्मक संबंध होगा । पद मूल्यों के बिखरे हुये होने पर सहसबंध की अनुपस्थिति मानी जाएगी ।

उपर्युक्त विक्षेप चित्र में चित्र (1) धनात्मक एवं चित्र 2 एवं 3 क्रमश: उच्च एवं निम्न धनात्मक, चित्र 4 ऋणात्मक एवं चित्र 7 सहसम्बन्ध की अनुपस्थिति को दर्शा रहा है ।

विक्षेप चित्र विधि की सीमा :- विक्षेप चित्र के माध्यम से सहसम्बन्ध की उपस्थिति एवं दिशा तो ज्ञात की जा सकती है लेकिन सहसम्बन्ध की मात्रा का अनुमान नहीं लगाया जा सकता है, अत: व्यवहार में इस रीति का अधिक उपयोग नहीं किया जाता है ।

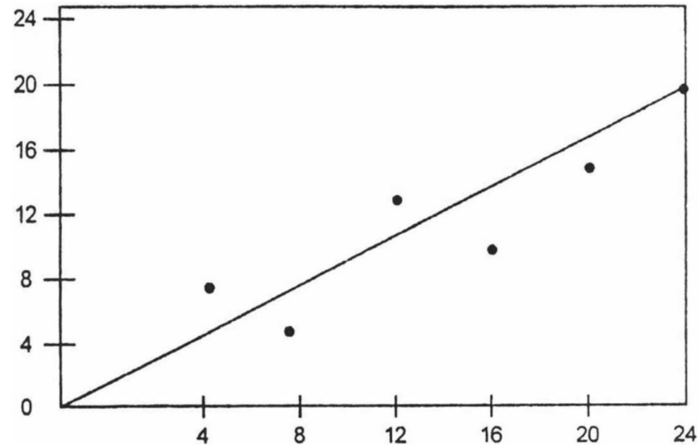
उदाहरण-1: नीचे दिये गये मूल्यों को विक्षेप चित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिये तथा बताइये क्या दोनों श्रेणियों में कोई सहसम्बन्ध है ।

Represent the following values by Scatter Diagram and Comment, whether there is any correlation between the two variables :-

A	4	8	12	16	20	24
B	8	6	14	10	16	22

A चर को X-axis पर तथा B चर को Y-axis पर लेकर विक्षेप चित्र का निरूपण निम्न प्रकार किया जायेगा :-

Scatter Diagram



अंकित बिन्दुओं के अध्ययन से ज्ञात होता है कि दोनों श्रेणियों में उच्च धनात्मक सहसम्बन्ध है।

2 **साधारण बिन्दुरेखीय रीति (Simple Graphic Method)**

सहसम्बन्ध का अनुमान साधारण बिन्दु रेखा चित्र के माध्य से भी लगाया जा सकता है। इस विधि में रेखा चित्र पर दोनों समंक श्रेणियों के विभिन्न मूल्यों को अंकित कर विभिन्न बिन्दुओं को एक दूसरे से क्रमानुसार मिला दिया जाता हैं इस प्रकार इससे दोनों चरों के दो वक्र (Curve) प्राप्त होंगे । यदि दोनों वक्र समान्तर है तथा नीचे बायीं ओर से ऊपर दायी ओर जाते हों तो उन दोनों चरों में धनात्मक सहसम्बन्ध होता है । यदि दोनों वक्र समान्तर है किन्तु ऊपर दांयी ओर से नीचे बाईं ओर जा रहें हो तो उनमें ऋणात्मक सहसम्बन्ध होता हैं दोनों वक्रों में उच्चावचन जितना कम होगा, सहसम्बन्ध उतना ही उच्च होता है । इसके विपरीत उच्चावचन जितना अधिक होगा, सहसम्बन्ध उतना ही कम होगा । यदि दोनों वक्रों में विपरीत दिशा में परिवर्तन होता है, तो यह स्थिति सहसम्बन्ध के अभाव को बताती है ।

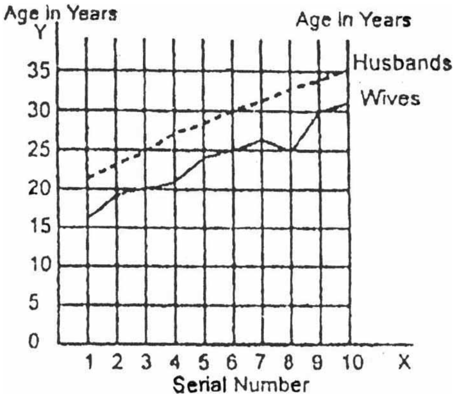
सहसम्बन्ध ग्राफ या रेखाचित्र में दोनों चरों में उभयनिष्ठ (Common) गुण जैसे क्रम संख्या, समय या स्थान इत्यादि को भुजाक्ष पर तथा दोनों चर-मूल्यों या समंक-श्रेणी के मूल्यों को कोटि-अक्ष पर दिखाते हैं । समंक माला के विभिन्न मूल्यों को रेखाचित्र पर अंकित किया जाता है एवं रेखाओं की प्रवृति के आधार पर सहसम्बन्ध की मात्रा का अनुमान लगाया जाता है । यह निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है:-

उदाहरण 2 : निम्न समंकों से बिन्दु रेखीय रीति से सहसम्बन्ध की मात्रा का अनुमान लगाइये :

Represent the following values on graph and estimate whether there is any correlation between the two variable :-

S.N.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Husband's Age	21	23	25	27	28	30	31	33	34	35
Wives Age	16	19	20	21	24	25	26	25	30	31

उपर्युक्त उदाहरण में क्रम संख्या दोनों चरों में उभयनिष्ठ है, अत: इसे भुजाक्ष पर तथा पतियों एवं पत्नियों की आयु को कोटि-अक्ष पर दर्शाया गया है ।



उपर्युक्त रेखाचित्र में पति एवं पत्नियों की आयु रेखा बाई ओर से दायी ओर ऊपर चढ़ती हुई है, अत: यह कहा जा सकता है कि पतियों की आयु एवं पत्नियों की आयु में उच्च धनात्मक सहसम्बन्ध है ।

विक्षेप चित्र की भांति ही इस विधि से भी सहसम्बन्ध की दिशा एवं उपस्थिति की ही जानकारी की जा सकती है, सही मात्रा का अनुमान नहीं लगाया जा सकता है।

3 कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

इस विधि का प्रतिपादन कार्ल पियर्सन नामक अंक शास्त्री ने किया था । इस विधि के अनुसार गणितीय सूत्र के आधार पर सहसम्बन्ध गुणांक का माप अंकों में होने से संतोषजनक उत्तर प्राप्त हो जाता है । यदि अंक मान धनात्मक हो, तो सहसम्बन्ध धनात्मक एवं इसके विपरीत अंक मान ऋणात्मक हो, तो सहसम्बन्ध ऋणात्मक होगा । अंक मान के अनुसार सहसम्बन्ध परिणाम की व्याख्या भी सरलतापूर्वक की जा सकती है।

सहसंबंध गुणांक की विशेषताएं (Properties of Correlation Coefficient)

1 गुणांक का मूल्य हमेशा -1 से +1 तक होता है ।

2 यह मूल बिन्दू (Origin) तथा अवलोकनों के अनुमाप (Scale) के परिवर्तन से प्रभावित नहीं होता है ।

3 यह केवल एक संख्या है, मापन की इकाई से इसका कोई संबंध नहीं होता है ।

कार्ल पियर्सन के सहसंबंध गुणांक की मान्यताएं (Assumptions of Karl Pearson's Coefficient of Correlation): यह गुणांक तीन मान्यताओं पर आधारित है :

(i) दोनों ही चल अनेक कारणों से प्रभावित होते हैं, अत: सामान्यता (Normality) से भी प्रभावित हैं ।

(ii) दोनों चलों में रेखीय सहसंबध (Linear Correlation) होता है ।

(iii) यदि कारण प्रभाव संबंध का अभाव हो तो चाहे दोनों चलों में उच्चस्तरीय संबंध हो, यह भ्रामक तथा निरर्थक (Sparious of Nonsense) सहसंबंध होगा ।

सहसम्बन्ध परिकलन के सूत्र-

कार्ल पियर्सन सहसम्बन्ध गुणांक का गणना व्यक्तिगत एवं सतत श्रेणी में निम्न सूत्रों के आधार पर की जा सकती है :-

(1) व्यक्तिगत श्रेणी में सूत्र :-

(i) प्रत्यक्ष रीति (Direct Method): कार्ल पियर्सन का गुणांक दोनों श्रेणियों के सहविचरण (Covariance) के आधार पर ज्ञात करते हैं, इस हेतु दोनों श्रेणियों के माध्य से विचलन ज्ञात करते हैं, तत्पश्चात् युग्म के संबंधित विचलनों का गुणा कर उनका योग ज्ञात करके निम्न सूत्र का प्रयोग करते है :

Covariance of x and y = $\frac{\sum xy}{N}$

जहां - X = X - $\overline{X}$, Y= Y - $\overline{Y}$

सह विचरण सहसंबंध का निरपेक्ष माप होता है । अत: सहसंबंध गुणांक ज्ञात करने के लिए इसमें दोनों श्रेणियों के प्रमाप विचलनों के गुणनफल का भाग दे देते है । व्यक्तिगत श्रेणियों में सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्रों का प्रयोग किया जा सकता है :-

$$r = \frac{\sum xy}{N \times \sigma x \times \sigma y} \quad \text{या} \quad r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum X^2 \times Y^2}}$$

$$r = \frac{Cov.(x.y)}{\sqrt{Var} \times \sqrt{\text{var } y}}$$

या

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{N}}{\sqrt{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}} \sqrt{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N}}}$$

जहाँ :-

r= कार्ल पीयर्सन का सहसम्बन्ध गुणाक (Karl Pearson's Coefficient of Correlation)

$\sum \times y$ = दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य से लिये गये विचलनों के गुणा का योग (Sum of the producs of respective deviations of X and Y series from their means)

$\sigma_{\times}\sigma_{y}$ = X तथा Y चलों के प्रमाप विचलन (Standard deviation of X and Y series respectively)

N = पद युग्मों की संख्या (Number Pairs observed)

$\sum \times^{2}$ = X श्रेणी के विचलनों का योग (Sum of squares deviations of X series)

$\sum y^{2}$ = Y श्रेणी के विचलनों के वर्ग का योग (Sum of squares of deviations of series Y)

प्रक्रिया :-

1. दोनों श्रेणियों का समान्तर माध्य ज्ञात किया जाता है ।
2. सम्बन्धित समान्तर माध्य से उनके व्यक्तिगत मूल्यों के विचलन ज्ञात कर X तथा Y चिन्हों से प्रदर्शित किये जाते हैं ।
3. दोनों श्रेणी के विचलनों के वर्ग का विचलन कर वर्गों के जोड़ $\sum X^{2}$ तथा $\sum Y^{2}$ प्राप्त किये जाते हैं ।
4. युग्मों के सम्बन्धित विचलनों को आपस में गुणा कर XY स्तम्भ में रखे जाते हैं ।
5. दोनों श्रेणीयों X तथा Y के प्रमाप विचलन (σ) ज्ञात किये जाते हैं (जैसे पूर्व अध्याय में अध्ययन किया है)
6. अन्त में सूत्र का उपयोग किया जाता है ।

इसे निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है :-

उदाहरण : 3

निम्न समंकों से कार्ल पीयर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिये -

Calculate Karl Pearson's Coefficient of Correlation from the following data:

पति की आयु (वर्ष) Ages of Husbands (Years)	23	27	28	28	29	30	31	33	35	36
पत्नी की आयु (वर्ष) Ages of wives (Years)	18	20	22	27	21	29	27	29	28	29

हल:

Computation of Coefficient of Correlation

X	X $(x-\overline{x})$	$\times^{2}$	Y	Y $(y-\overline{y})$	y^{2}	xy

	$\bar{x}=30$			$\bar{y}=25$		
23	-7	49	18	-7	49	+49
27	-3	9	20	-5	25	+15
28	-2	4	22	-3	9	+6
28	-2	4	27	+2	4	-4
29	-1	1	21	-4	16	+4
30	0	0	29	+4	16	0
31	+1	1	27	+2	4	+2
33	+3	9	29	+4	16	+12
35	+5	25	28	+3	9	+15
36	+6	36	29	+4	16	+24
$(\sum\times)=$ 300	0	$(\sum\times)=$ 138	$(\sum\times)=$ 250	0	$(\sum y^2)=$ 164	$(\sum\times)=$ 123

प्रथम सूत्र : सर्वप्रथम दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य ज्ञात करेंगे :-

$\overline{X}=\frac{\sum x}{N}$ or $\frac{300}{10}$ or 30 ; $\overline{Y}=\frac{\sum Y}{N}$ or $\frac{250}{10}$ or 25

सह सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिए दोनों श्रेणियों का प्रमाप-विचलन ज्ञात करना होगा ।

Standard Deviation of X series -

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} \text{ OR } \sqrt{\frac{138}{10}} = 3.7148$$

Standard Deviation of Y series -

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\sum y^2}{N}} \text{ or } \sqrt{\frac{164}{10}} = 4.0497$$

सहसम्बन्ध सूत्र का उपयोग :

$$r=\frac{\sum xy}{N\times\sigma x\times\sigma y}$$

$$r=\frac{123}{10\times 3.71\times 4.05} = +0.8176$$

द्‌वितीय सूत्र :

$$r=\frac{\sum xy}{\sqrt{\sum X^2\times\sum Y^2}}$$

$$r = \frac{123}{\sqrt{138 \times 164}} = 0.8176$$

दोनों श्रेणियों में उच्च स्तरीय धनात्मक सहसम्बन्ध है ।

लघुगणकों का प्रयोग (Use of Logarithms)

सहसम्बन्ध गुणांक के सूत्रों का प्रयोग करके गणन क्रिया और भी सरल की जा सकती है। यहाँ द्वितीय सूत्र में लघुगणकों का प्रयोग समझाया गया हैं इससे पूर्व की गणना क्रिया यथावत रहती है ।

उदाहरण 4. निम्न समंको से कार्ल पियर्सन का सहसंबंध गुणांक (Coefficient of Correlation) ज्ञात कीजिए ।

X-Series	10	12	15	18	25	35	45	50	55	65
Y-Series	5	7	13	15	20	21	29	30	36	44

हल:

Computation of Coefficient of Correlation

X	X $(x-\bar{x})$ $\bar{x}=33$	x^2	Y	Y $(y-\bar{y})$ $\bar{y}=22$	y^2	xy
10	-23	529	5	-17	289	391
12	-21	441	7	-15	225	315
15	-18	324	13	-9	81	162
18	-15	225	15	-7	49	105
25	-8	64	20	-2	4	16
35	+2	4	21	-1	1	-2
45	+12	144	29	+7	49	84
50	+17	289	30	+8	64	136
55	+22	484	36	+14	196	308
65	+32	1024	44	+22	484	704
$(\sum \times)=$ 330	0	$(\sum \times^2)=$ 3528	$(\sum y)=$ 220	0	$(\sum y^2)=$ 1442	$(\sum xy)=$ 2219

X-Series

$$\bar{x} = \frac{\sum \times}{N} = \frac{330}{10} = 33$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} = \sqrt{\frac{3528}{10}} = 18.78$$

Y-Series

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{220}{10} = 22$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{N}} = \sqrt{\frac{1442}{10}} = 12.01$$

मूल सूत्र से : $r = \dfrac{\sum xy}{N\sigma_x\sigma_y} = \dfrac{2219}{10 \times 18.78 \times 12.01}$ or $\dfrac{2219}{2255.48} = +.098$

द्वितीय सूत्र से $: r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}} = \frac{2219}{\sqrt{3528 \times 1442}} = \frac{2219}{\sqrt{5087376}}$

$= \frac{2219}{2255.88} =$ +0.98

लघुगणकों का प्रयोग करते हुए

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \sum y^2}} = \frac{2219}{\sqrt{3528 \times 1442}}$$

= Antilog $\left[\log of\, 2219 - \frac{1}{2}\log of\, 3528 + \log of\, 1442)\right]$

= Antilog $\left[3.3461 - \frac{1}{2}(3.5475 + 3.1590\right]$

= Antilog $[3.3461 - 3.3533]$ or Antilog $[\bar{1}.9928]$ =+ 0.98

अत: X तथा Y श्रेणियों के मध्य उच्च मात्रा का धनात्मक सहसम्बन्ध (High Degree of Positive Correlation) है।

उदाहरण 5 : निम्न सूचनाओं के आधार पर सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :-

X तथा Y चरों के पद -युग्मों की संख्या

(No. of pairs of X and Y) = 20

X चर का समान्तर माध्य

Mean of X = 25.0

X चर का प्रमाप विचलन

Standard deviation of X = 4

Y चर का समान्तर माध्य

Mean of Y = 18.0

Y चर का प्रमाप विचलन

Standard deviation of Y = 3.0

X तथा Y चरों के माध्य से लिये गये विचलनों के गुणनफलों का योग $(\sum xy)$

Sum of the products of the deviations of X and Y from their respective means

=+125

हल :

जब प्रश्न में दो चरों के प्रमाप विचलन दिये हुए हों तो कार्ल पियर्सन का मूल सूत्र प्रयोग में लाना चाहिए ।

अत:

$r = \frac{\sum xy}{N\sigma x\sigma y}$ or $r = \frac{+125}{20\times4\times3}$ $= \frac{+125}{240}$ = 0.5208

$r = \frac{+122}{136.35}$ = 0.89

अत: दोनों श्रेणियों के बीच मध्यम मात्रा का धनात्मक सहसम्बन्ध है ।

अज्ञात मूल्य ज्ञात करना एवं अशुद्धि संशोधन :-

यदि सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात हो, किन्तु अन्य कोई सूचना अज्ञात हो, तो r के सूत्रों का उपयोग कर अज्ञात मूल्य ज्ञात किया जा सकता है । इसी प्रकार यदि कुछ मूल्यों के प्रेक्षण में अशुद्धि रही है तो उस अशुद्धि का सुधार कर गुणांक की गणना की जाती है ।

उदाहरण 6 : कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक से सम्बन्धित निम्न सूचनाएँ उपलब्ध है :-

$Cov.(XY) = 70,\ \sigma y^2 = 65,\ r = +0.98$

ज्ञात कीजिए (find) $\sigma \times$

हल : हम जानते है कि -

$r = \frac{Cov.X.Y}{\sqrt{Var.XVar.Y}}$

$0.98 = \frac{70}{\sqrt{var.x}\sqrt{65}}$

$\sigma\times = \frac{70}{.98\times8.062}$ = 8.86

उदाहरण 7: 10 प्रेक्षणों से कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना करते समय निम्न मान प्राप्त हुए :-

$\sum X = 30,\ \sum Y = 5,\ \sum X^2 = 670,\ \sum Y^2 = 285,\ \sum XY = 334$

पुन: जाँच करने पर पाया गया कि एक प्रेक्षण $(X = 11] Y = 14)$ गलती से $(X = 10] Y = 14)$ के स्थान पर उतार लिया गया ।

सही सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया है :- $\sum X = 30,\ \sum Y = 5,\ \sum X^2 = 670,\ \sum Y^2 = 285,\ \sum XY = 334$

गलत मान				
X	Y	X^2	Y^2	XY
11	14	121	196	154

सही मान				
X	Y	X^2	Y^2	XY
10	14	100	196	140

सही मानों की गणना :

(दिया हुआ मान - गलत मूल्य + सही मूल्य)

$\sum X =$ 30-11+10 = 29

$\sum Y =$ 5-14+14 = 5

$\sum XY =$ 334-154+140+320

$\sum X^2 =$ 670-121+100 = 649

$\sum Y^2 =$ 285-196+196 = 285

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{N}}{\sqrt{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}} \sqrt{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N}}}$$

$$r = \frac{320 - \frac{29 \times 5}{10}}{\sqrt{649 - \frac{(29)^2}{10}} \sqrt{285 - \frac{(5)^2}{10}}}$$

$$r = \frac{320 - 14.5}{\sqrt{564.5} \times \sqrt{282.5}} \quad r = \frac{305.5}{23.77 \times 16.81} = .76$$

लघु रीति : सह सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की प्रत्यक्ष रीति में वास्तविक विचलन समान्तर माध्य से ज्ञात किये जाते हैं । सामान्यतया कई बार माध्यों का मान पूर्णांक में नहीं आता । ऐसी स्थिति में गणना क्रिया कठिन हो जाती है । लघु रीति में विचलन वास्तविक माध्य के स्थान पर कल्पित माध्य से ज्ञात किये जाते हैं और गुणांक का परिकलन सूचनाओं की उपलब्धता के अनुसार निम्न में से किसी एक सूत्र के उपयोग द्‌वारा कर लिया जाता है ।

प्रथम सूत्र :

$$r = \frac{\frac{\sum dxdy}{N} - \frac{\sum dx}{N} - \frac{\sum dy}{N}}{\sqrt{\frac{\sum d^2x}{N} - \frac{\sum dx^2}{N}} \sqrt{\frac{\sum d^2y}{N} - \frac{\sum dy^2}{N}}}$$

या द्‌वितीय सूत्र :

$$r = \frac{\sum dxdy - \frac{\sum dx \sum dy}{N}}{\sqrt{\sum d^2x - \frac{(\sum dx)^2}{N}} \sqrt{\sum d^2y - \frac{(\sum dy)^2}{N}}}$$

या तृतीय सूत्र :

$$r = \frac{N \sum dxdy - \sum dx \times \sum dy}{\sqrt{N \sum d^2x - (\sum dx)^2} \sqrt{N \sum d^2y - (\sum dy)^2}}$$

या चतुर्थ सूत्र :

$$r=\frac{\frac{\sum dxdy}{N}-\frac{\sum dx}{N}-\frac{\sum dy}{N}-B}{\sqrt{\frac{\sum d^2x}{N}-\left[\frac{\sum x}{N}-A\right]^2}\sqrt{\frac{\sum d^2y}{N}-\left[\frac{\sum y}{N}-B\right]^2}}$$

टिप्पणी : चतुर्थ सूत्र का उपयोग तब किया जाता है जब $\sum X, \sum Y,$ N एवं $\sum d^2\times,$ $\sum d^2y$ के मान तथा $\sum dxdy$ के मान दिये हों तथा A एवं B के मान दिये हो । सामान्यत: तृतीय सूत्र का उपयोग कर सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जाता है ।

परिकलन प्रक्रिया :-

1 X तथा Y श्रेणियों के उपयुक्त मूल्यों को कल्पित माध्य मानकर दोनों श्रेणियों के विचलन (dx, dy) ज्ञात कीजिये । X श्रेणी के विचलनों का योग $\sum dx$ तथा Y श्रेणी के विचलनों का योग $\sum dy$ होगा ।

2 इन विचलनों के वर्ग (Squares) निकालिये तथा उनका योग कीजिए, उनका योग क्रमश: $\sum d^2\times$ तथा $\sum d^2y$ होगें ।

3 सम्बन्धित विचलनों (dx तथा dy) को आपस में गुणा कर dxdy ज्ञात कीजिये तथा इनका योग करना है, तो $\sum dxdy$ होगा ।

4 सूत्र का प्रयोग कर सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए ।

उदाहरण 8 : निम्न समंकों के आधार पर कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए -

On the basis of following information, compute the coefficient of correlation -

Month	Jan	Feb	March	April	May	June	July	Aug	Sept	Oct
Price of ‘A	35	36	40	38	38	39	41	40	36	38
Price of ‘B’	65	72	78	77	76	77	80	79	76	75

Calculation of Coefficient of Correlation

Months	X Series Price of A	A=38 dx	dx^2	Y Series Price of B	A=75 dy	dy^2	dxdy
Jan	35	-3	9	65	-10	100	30
Feb	36	-2	4	72	-3	9	6
March	40	2	4	78	3	9	6
April	38	0	0	77	2	4	0
May	37	-1	1	76	1	1	-1
June	39	1	1	77	2	4	2
July	41	3	9	80	5	25	15
Aug	40	2	4	79	4	16	8
Sept	36	-2	4	76	1	1	-2
Oct	38	0	0	75	0	0	0
	N=10	$(\sum dx)$ 0	$(\sum dx^2)$ 36		$(\sum dy)$ +5	$(\sum dy^2)$ +169	$\sum dxdy$ 64

$$r = \frac{\sum dxdy \times N - (\sum dx.\sum dy)}{\sqrt{\sum dx^2.N - (\sum dx)^2}\sqrt{\sum dy^2.N - (\sum dy)^2}}$$

$$r = \frac{64 \times 10 - (0) \times (5)}{\sqrt{36 \times 10 - (0)^2}\sqrt{169 \times 10 - (5)^2}}$$

$$= \frac{640 - 0}{\sqrt{330}\sqrt{1665}} \quad = \frac{640}{774.21}$$

=+0.827

निष्कर्ष : दोनों श्रेणियों के मूल्यों में उच्च स्तरीय धनात्मक सहसम्बन्ध है ।

उदाहरण 9 : निम्नांकित समंकों से विद्‌यार्थियों की आयु तथा खेलने की आदत के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिये -

Age	14	15	16	17	18	19
No. of Students	250	200	150	120	100	80
No. of Regular Player	200	150	90	48	30	12

हल :

प्रत्येक आयु वर्ग में खिलाड़ियों की संख्या भिन्न-भिन्न होने के कारण प्रत्येक वर्ग में संख्या का प्रतिशत निम्नानुसार ज्ञात करेंगे -

$$= \frac{200}{250} \times 100 = 80 \quad \frac{150}{200} \times 100 = 75 \quad \frac{90}{150} \times 100 = 60 \quad \frac{48}{120} \times 100 = 40$$

इसी प्रकार $= \frac{30}{100} \times 100 = 30$ तथा $= \frac{12}{80} \times 100 = 15$ ज्ञात किये जायेंगे ।

Calculations of Coefficient of Correlation

Age	dx A=16	dx^2	%of Regular Players Y	A=50 dy	i= 5 dy	dy^2	dxdy
14	-2	4	80	30	6	36	12
15	-1	1	75	25	5	25	-5
16	0	0	60	10	2	4	0
17	1	1	40	-10	-2	4	-2
18	2	4	30	-20	-4	16	-8
19	3	9	15	-35	-7	49	-21
	+3 $(\sum dx)$	19 $(\sum dx^2)$			= 0 $(\sum dy)$	130 $(\sum dy^2)$	-48 $\sum dxdy$

$$r = \frac{\sum dxdy \times N - (\sum dx.\sum dy)}{\sqrt{\sum dx^2.N - (\sum dx)^2}\sqrt{\sum dy^2.N - (\sum dy)^2}}$$

$$r = \frac{-48 \times 6 - (3 \times 0)}{\sqrt{19 \times 6 - (3)^2}\sqrt{134 \times 6 - (0)^2}} \quad = \frac{-280 - 0}{\sqrt{114 - 9}\sqrt{804 - 0}}$$

$r = \dfrac{-228}{\sqrt{84420}} \quad = \dfrac{-288}{295}$ = -.976 आयु व खेलने की आदत में उच्च स्तरीय ऋणात्मक सहसम्बन्ध है ।

टिप्पणी : Y श्रेणी में i = 5 लेने पर भी सहसम्बन्ध गुणांक पर इसका असर नहीं पड़ता है ।

उदाहरण 10 : निम्न समंकों के आधार पर ज्ञात कीजिये कि क्या जनसंख्या के घनत्व और मृत्यु दर में कोई सहसम्बन्ध है?

From the following data find out if there is any relationship between of population and death rate ?

Zones	Area(Sq. Km.)	Population	No.of Deaths
A	200	40,000	480
B	150	75,000	1,200
C	120	72,000	1,080
D	80	20,000	280

हल :

प्रश्न को हल करने से पूर्व जनसंख्या का घनत्व तथा मृत्यु दर ज्ञात करनी होगी । मृत्यु दरें प्रति हजार ज्ञात की जाती है ।

जनसंख्या घनत्व = जनसंख्या / क्षेत्रफल

अतः घनत्व $=\frac{40000}{200}$ = 200, $=\frac{75000}{150}$ = 500, $=\frac{72000}{120}$ = 600, $=\frac{20000}{80}$ = 250 होगा।

मृत्यु दर = मृतकों की संख्या / जनसंख्या x 1000

जो क्रमशः $=\frac{480}{40000}\times 1000=12,\quad \frac{1200}{75000}\times 1000=16,\quad \frac{1080}{72000}\times 1000=15,$

एवं $\frac{280}{2000}\times 1000=14$ होगी ।

Computation of Coefficient of Correlation

Density X	dx A=400	Step (i=50)	dx^2	Death rate per 1000 Y	dy (A=14)	dy^2	dxdy
200	-200	-4	16	12	-2	4	8
500	+100	+2	4	16	+2	4	4
600	+200	+4	16	15	+1	1	4
250	-150	-3	9	14	0	0	0
Total		$\sum d\times -1$	$\sum dx^2$ =45		$\sum dy+1$	$\sum dy^2$ =9	$\sum dxdy$ = 16

$$r=\frac{\sum dxdy\times N-(\sum dx\times\times\sum dy)}{\sqrt{\left[\sum dx^2\times N-(\sum dx)^2\right]}\sqrt{\left[\sum dy^2\times N-(\sum dy)^2\right]}}$$

$$r=\frac{16\times 4-(-1\times 1)}{\sqrt{\left[45\times 4-(-1)^2\right]\left[9\times 4-(1)^2\right]}}$$

$$r=\frac{64+1}{\sqrt{[180-1][36-1]}}\quad=\frac{65}{\sqrt{179\times 35}}\quad=\frac{65}{\sqrt{6265}}$$

$$r=\frac{65}{79.15}\quad = +0.8212$$

निष्कर्ष : जनसंख्या के घनत्व एवं मृत्यु दर में उच्च स्तरीय धनात्मक सहसम्बन्ध है।

वर्गीकृत श्रेणी में सहसम्बन्ध ज्ञात करना (Correlation in Continuous Series)

वर्गीकृत श्रेणी में सहसम्बन्ध ज्ञात करने के लिए सहसम्बन्ध सारणी बनायी जाती है । इस हेतु दो खण्डित अथवा सतत् श्रेणी की कोष्ठ आवृतियाँ तथा कुल आवृतियाँ इस प्रकार प्रस्तुत की जाती है जिससे उनमें अन्र्तसम्बन्ध स्थापित हो सके । इस प्रकार

अन्तर्सम्बन्ध सारणी बनाकर सहसम्बन्ध गुणांक सूत्र में प्रयुक्त विभिन्न मूल्य ज्ञात किये जाते हैं तथा सूत्र का प्रयोग कर सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जाता है ।

प्रत्यक्ष रीति :- निम्न सूत्र का प्रयोग कर प्रत्यक्ष रीति से सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जाता है

$$r = \frac{\sum fxy}{N \times \sigma_x \times \sigma_y}$$

प्रक्रिया :-

1. इस विधि के अनुसार X तथा Y श्रेणी के वास्तविक माध्य ज्ञात किया जाता है ।
2. वास्तविक माध्य से सम्बंधित श्रेणी के विचलन ज्ञात किये जाते हैं ।
3. सम्बंधित विचलनों को गुणा कर तत्सम्बन्धित आवृति से गुणा किया जाता है तथा उनका योग किया जाता है ।
4. दोनों श्रेणियों के प्रमाप विचलन ज्ञात किये जाते हैं ।
5. उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग कर सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जाता है ।

प्रत्यक्ष रीति का प्रयोग इसलिये ज्यादा नहीं किया जाता है क्योंकि सामान्यत: समान्तर माध्य पूर्ण अंक में नहीं होता है, इस कारण गणना प्रक्रिया अत्यन्त जटिल हो जाती है । अत: इस हेतु लघु विधि का उपयोग किया जाता है ।

लघु रीति :- निम्न सूत्र द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात किया जाता है :-

$$r = \frac{\sum fdxdy - \frac{(\sum fdx) \times (\sum fdy)}{N}}{\sqrt{\sum fdx^2 - \frac{(\sum fdx)^2}{N}} \sqrt{\sum fdy^2 - \frac{(\sum fdy)^2}{N}}}$$

या

$$r = \frac{\sum fdxdy \times N - (\sum fdx \times \sum fdy)}{\sqrt{\sum fdx^2 \times N - (\sum fdx)^2} \sqrt{\sum fdy^2 \times N - (\sum fdy)^2}}$$

प्रक्रिया :-

1 सर्वप्रथम नों श्रेणियों के कल्पित माध्य मानकर कल्पित माध्य से विचलन (dx एवं dy) ज्ञात किये जाते हैं । तथा वर्गान्तर समान होने पर उभयनिष्ठ गुणक निकालकर पद विचलन ज्ञात कर लिये जाते हैं ।

2 दोनो श्रेणियों के विचलनों (dx एवं dy) को सम्बन्धित आवृत्तियों से गुणा करके गुणनफल सम्बन्धित खानों एवं पंक्तियों में लिखे जाते हैं । इन गुणनफलों का योग क्रमश: $\sum fdx$ एवं $\sum fdy$ होता है ।

3 fdx को सम्बन्धित dx से तथा fdy को सम्बन्धित dy से गुणा करके उन गुणाओं के योग $\sum fd^2x$ एवं $\sum fd^2y$ ज्ञात कर लिये जाते हैं।

4 द्वि-चर सारणी के जिन-जिन कोष्ठों (Cells) में आवृतियाँ होती हैं उनके तत्सम्बन्धी dx, dy व f (Cell frequency) को आपस में गुणा कर fdxdy ज्ञात कर लिये जाते

हं । यह गुणनफल तृतीय पंक्ति में लिखा जाता है । जिसका योग $\sum fdxdy$ होता है ।

उदाहरण 11 - पतियों एवं पत्नियों की आयु वर्ग से सम्बंधित निम्नलिखित समंकों से सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए ।

Age of Husbands (Y)	Age of Wives (x)					Total
	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	
25-35	6	3	-	-	-	9
35-45	3	16	10	-	-	29
45-55	-	10	15	7	-	32
55-65	-	-	7	10	4	21
65-75	-	-	-	4	5	9
Total	9	29	32	21	9	100

हल

Husband's Age (y)			Ages of Wives (X)					f	fdy	fd^2y	fdxdy
			20-30	30-40	40-50	50-60	60-70				
			25	35	45	55	65				
		dx / dy	-2	-1	0	+1	+2				
25-35	30	-2	4 6 24	2 3 6	-	-	-	9	-18	36	30
35-45	40	-1	2 3 +6	1 16 +16	0 10 0	-	-	29	-29	29	22
45-55	50	0	-	0 10 0	0 15 0	0 7 0	-	32	-	-	-
55-65	60	+1	-	-	0 7 0	1 10 10	2 4 8	21	21	21	18
65-75	70	+2	-	-	-	2 4 8	4 5 20	9	18	36	28
	F		9	29	32	21	9	100(N)	(-)8 Σfdy	122 Σfd^2y	98 $\Sigma fdxdy$
	fdx		-18	-29	0	21	18	(-)8 Σfdx			
	fd^2x		36	29	0	21	36	122 Σfdx^2			
	fdxdy		30	22	0	18	28	98 $\Sigma fdxdy$			

नोट- x श्रेणी में कल्पित माध्य 45 तथा y श्रेणी में 50 माना गया है । दोनों श्रेणियों में वर्गान्तर i = 10 है । अत: इस आधार पर पद विचलन ज्ञात किये गये हैं ।

$$r = \frac{\sum fdxdy \times N - (\sum fdx \times \sum fdy)}{\sqrt{\left[N \times \sum fd^2x - (\sum fdx)^2\right]\left[N \times \sum fd^2y - (\sum fdy)^2\right]}}$$

$$\gamma = \frac{98 \times 100 - (-8 \times -8)}{\sqrt{[100 \times 122 - (-8)^2][100 \times 122 - (-8)^2]}}$$

$$r = \frac{9800 - 64}{\sqrt{[12200 - 64][12200 - 64]}} \quad \frac{9736}{\sqrt{12136 \times 12136}} = +0.802$$

पति एवं पत्नियों की आयु में उच्च स्तर का धनात्मक सहसम्बन्ध है ।

उदाहरण 12 - एक शहर में आय एवं बचत के सम्बन्ध में निम्न आंकड़े प्राप्त हुए । आय एवं बचत में सहसम्बन्ध ज्ञात कीजिए ।

आय (रूपयों में) Income (Rs.)	बचत (रूपयों में) Saving (Rs.)				Total
	150	200	250	300	
1000	8	4	-	-	12
1400	-	12	24	6	42
1800	-	9	7	2	18
2200	-	-	10	5	15
2600	-	-	9	4	13
Total	8	25	50	17	100

हल :

Computation of Coefficient of Correlation

Income (Rs) X	Saving (Rs.)Y		150	200	250	300				
		dy (A= 200)	-50	0	+50	+100				
	dx (A=1800)	step i= 50 i= 400	-1	0	+1	+2	Total	fdx	fdx²	fdx. dy
1000	-800	-2	+2 8 +16	0 4 0	-	-	12	-24	48	+16
1400	-400	-1	-	0 12 0	-1 24 -24	-2 6 -12	42	-42	42	-36
1800	0	0	-	0 9 0	0 7 0	0 2 0	.18		0	0
2200	+400	+1	-		1 10 +10	2 5 +10	15	15	15	+20
2600	+800	+2	-		2 9 +18	4 4 +16	13	26	52	+34
		Total	8	25	50	17	100	-25	157	+34
		fdy	-8	0	50	34	76			
		fdy^2	8	0	50	68	126			
		fdx.dy	16	0	+4	+14	+34			

$$r = \frac{\sum fdxdy \times N - (\sum fdx \times \sum fdy)}{\sqrt{\sum fdx^2 \times N - (\sum fdx)^2}\sqrt{\sum fdy^2 \times N - (\sum fdy)^2}}$$

$$r = \frac{34 \times 100 - (-25 \times 76)}{\sqrt{157 \times 100 - (-25)^2}\sqrt{126 \times 100 - (76)^2}}$$

$$r = \frac{3400 + 1900}{\sqrt{15700 - 625}\sqrt{12600 - 5776}} = \frac{5300}{\sqrt{15075 \times 6824}}$$

$$r = \frac{5300}{122.78 \times 82.608} = \frac{5300}{10142.6}$$

$r = +0.5225$

आय एवं बचत में मध्यम स्तरीय सहसम्बंध हैं ।

नोट - दोनों श्रेणियों में पद विचलन अलग अलग मूल्य से लिये जाने पर भी सहसंबंध गुणांक पर कोई अंतर नहीं पड़ता है ।

सहसम्बन्ध गुणांक की विश्वसनीयता की जाँच (Test of Significance of Coefficient of Correlation)

अध्ययन या जाँच का क्षेत्र विस्तृत होने के कारण सामान्यत: आंकडे देव निदर्शन रीति से एकत्रित किये जाते हैं, इस कारण प्रतिदर्श के परिणाम तथा उसी समग्र के लिए गये अन्य प्रतिदर्शो से प्राप्त परिणामों या प्रतिदर्श से प्राप्त परिणाम एव समग्र से प्राप्त परिणामों में अन्तर स्वाभाविक होता है । यह अन्तर किस सीमा में हो यह ज्ञात करने के लिऐ विभ्रमों का उपयोग किया जाता है । कार्ल पियर्सन ने इस हेतु निम्न दो विभ्रमों का उपयोग करने की सलाह दी है -

सम्भाव्य विभ्रम (Probable Error) :- प्रो. होरेस सेक्राइस्ट के अनुसार - **कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध** गुणांक का संभाव्य विभ्रम वह राशि है जिसे यदि औसत सहसम्बंध गुणांक में क्रमश: जोड़ा तथा घटा दिया जाये तो ऐसी संख्याएं ज्ञात हो जाती हैं जिसके अन्तर्गत दैव प्रतिचयन के आधार पर छांटे गये मूल्यों के सहसम्बंध गुणांक के पाये जाने की समान संभावनाएँ होती है ।

संभाव्य विभ्रम ज्ञात करने के लिये निम्न सूत्र का उपयोग किया जाता है -

संभाव्य विभ्रम PE of r = .6745 $\frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$

r = सहसम्बन्ध गुणांक

n = प्रतिदर्श में मदों की संख्या

इस प्रकार सहसम्बन्ध गुणांक में सम्भाव्य विभ्रम के जोड़ने तथा घटाने (+,-) से प्राप्त सीमाओं के मध्य ही औसत या सामान्य सहसम्बन्ध गुणांक विद्यमान रहता है । इस प्रकार सह सम्बन्ध गुणांक की अधिकतम सीमा r+PE एवं न्यूनतम सीमा r - PE ही होगी ।

उदाहरण 13 - यदि सहसम्बन्ध गुणांक +0.90 तथा युग्मों की संख्या 20 हो तो विभ्रम ज्ञात कीजिए ।

Probable Error = $0.6745 \times \frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$ Or $0.6745 \times \frac{1-(0.90)^2}{\sqrt{20}}$

$= 0.6745 \times \frac{(1-1.81)}{4.47}$ $= \frac{0.6745 \times 0.19}{4.47}$ $= \frac{.1286}{4.47}$ = .029

परिकलन क्रिया को सरल बनाने के लिये + .6745 के स्थान पर $\frac{2}{3}$ का भी प्रयोग किया जा सकता है । इसमें परिणाम मे कोई विशेष अन्तर नही आयेगा । यदि दैव प्रतिदर्श के आधार पर सहसम्बन्ध ज्ञात किया गया है तो वह निम्न सीमाओं के भीतर होगा

अधिकतम सीमा : r+P.E. =0.90+ 0.029 = 0.929

न्यूनतम सीमा : r-P.E. = 0.90-0.029 = 0.871

सम्भाव्य विभ्रम का उपयोग उसी स्थिति में करना चाहिए जब प्रतिदर्श किसी समग्र से लिया गया हो तथा निदर्शन पक्षपात रहित हो ।

संभाव्य विभ्रम की उपयोगिता (Usefulness of Probable Error) : -

सम्भाव्य विभ्रम के मुख्य रूप से निम्न दो उपयोग है :-

1 सहसम्बन्ध गुणांक की सीमा का निर्धारण :- सम्भाव्य विभ्रम द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक की उन दो सीमाओ को निर्धारित किया जाता है जिनके मध्य उसी समग्र के किसी भी प्रतिदर्श अथवा सम्पूर्ण समग्र पर आधारित सहसम्बन्ध गुणांक के पाये जाने की 50 प्रतिशत संभावना होती है । इन सीमाओं के परिकलन के लिये सम्भाव्य विभ्रम को सहसम्बन्ध में एक बार जोड़ा जाता है और एक बार घटाया जाता है । इसे सूत्र के रूप में निम्न प्रकार लिखा जाता है :-

Coefficient of Correlation $\pm$ Probable Error

or r $\pm$ P.E.

2 सहसम्बन्ध गुणक का निर्वचन :- सम्भाव्य विभ्रम का प्रयोग सहसम्बन्ध गुणांक की सार्थकता सम्बन्धी निर्वचन करने के लिये भी किया जाता है इस हेतु निम्न बातों का विशेष ध्यान रखा जाता है:-

(i) यदि सम्भाव्य विभ्रम से सहसम्बन्ध गुणांक छः गुणा से भी अधिक है (r>6P.E.) तो दोनों चलों में सहसम्बन्ध होगा अर्थात् सहसम्बन्ध सार्थक होगा ।

(ii) यदि सम्भाव्य विभ्रम, सहसम्बन्ध गुणांक से अधिक है (P.E.>r) तो दोनों श्रेणियों मे सहसम्बन्ध की सार्थकता निश्चित नहीं की जा सकती है ।

(iii) यदि सम्भाव्य विभ्रम अपेक्षाकृत कम है किन्तु सहसम्बन्ध .3 से भी कम है । तो दोनों चलों में सहसम्बन्ध की मात्रा नगण्य मानी जायेंगी ।

(iv) यदि सम्भाव्य विभ्रम आपेक्षाकृत कम है और सहसम्बन्ध .3 से .5 के मध्य है तो यह साधारण सम्बन्ध का घोतक है किन्तु गुणांक यदि .5 से अधिक है तो महत्वपूर्ण सहसम्बन्ध माना जा सकता है ।

संभाव्य विभ्रम के प्रयोग की शर्त (Conditions for the use of Probable Error)

सम्भाव्य विभ्रम का प्रयोग निम्न शर्तो के पूर्ण होने पर ही किया जा सकता है -

1 पद युग्मों की संख्या पर्याप्त होनी चाहिये ।

2 गुणांक ज्ञात करने हेतु लिये गये मूल्य देव प्रतिचयन के आधार पर ज्ञात किये गये हों ।

3 आंकड़े एक प्रसामान्य वक्र की शर्तो के अनुसार होने चाहिए ।

आर्थिक व्यावसायिक व सामाजिक क्षेत्रों में सामान्यत: उपर्युक्त शर्ते पूरी नही हो पाती है साथ ही इसके माध्यम से सहसम्बन्ध गुणांक की 50 प्रतिशत उपस्थिति की संभावना ही निश्चित होती है । अत: संभाव्य विभ्रम द्वारा सहसम्बन्ध गुणक की सार्थकता का निर्णय नहीं किया जा सकता है । सहसम्बन्ध गुणक का निर्वचन जाँचकर्त्ता के अनुभव पर अधिक निर्भर करता है ।

2 **प्रमाप विभ्रम (Standard Error) :-** सम्भाव्य विभ्रम सहसम्बन्ध गुणांक की 50 प्रतिशत सम्भावना की सीमा ही निर्धारित करता है । इस कारण इसका प्रयोग उचित नहीं समझा जाता है, अत: सांख्यिकी में सम्भाव्य विभ्रम के स्थान पर प्रमाप का प्रयोग अधिक किया जाता है दैव न्यादर्श के आधार पर प्राप्त किसी सांख्यिकी में माप का प्रमाप उनके निदर्शन वितरण का प्रमाप विचलन होता है । प्रमाप विभ्रम सम्भाव्य विभ्रम का लगभग $\frac{3}{2}$ होता है ।

सूत्र

S.E. of r = $\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$ or P.E. of r = 0.6745 S.E. of r = $\frac{3}{2}$ of P.E.

प्रतिदर्श (Sample) के आधार पर प्राप्त सहसम्बन्ध गुणांक की सम्पूर्ण समग्र के लिए सीमायें निर्धारित करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता हैं -

$$r \pm 3S.E.$$

सामान्यतया बड़े प्रतिदर्श में सम्भाव्य विभ्रम एवं प्रमाप विभ्रम का प्रयोग उचित समझा जाता है ।

उदाहरण 14 : यदि r = .9 एवं n = 80 हो तो सहसम्बन्ध गुणांक की विश्वसनीयता की जाँच के लिए सीमाएँ ज्ञात करिए ।

हल :

S.E.= $\frac{1-r^2}{\sqrt{N}} = \frac{1-.81}{\sqrt{80}} = \frac{.19}{8.94}$ = .021

विश्वसनीयता सीमाएँ -

$= r \pm 3SE$ या

$= .9 \pm 3 \times .021$

अधिकतक सीमा : .9 .063 = .963

न्यून्तम सीमा : .9 - .063 = .837

4. **क्रमान्तर विधि (Rank Correlation) :-** उन परिस्थितियों में जहां तथ्यों का प्रत्यक्ष संख्यात्मक माप सम्भव न हो जैसे सुन्दरता, बुद्धिमता, सजीलापन, स्वास्थ्य आदि । ऐसे गुणात्मक तथ्यों को कोटि क्रमों में ही व्यक्त किया जा सकता है, इस हेतु सांख्यिकी विज्ञ चार्ल्स एडवर्ड स्पियरमैन ने कोटि अन्तर विधि से सहसम्बन्ध ज्ञात करने की विधि का प्रतिपादन किया है । इसे स्पियरमैन कोटि अंतर विधि के नाम से जाना जाता है ।

गणना विधि :- गणना विधि निम्न प्रकार है :-

1. X तथा Y श्रेणियों के पद मूल्य को अलग-अलग कोटि क्रम (Ranks) प्रदान किये जाते हैं । सबसे अधिक आकार मूल्य को 1, उससे कम वाले मूल्य को 2 तथा इसी प्रकार क्रम निश्चित किये जाते है । क्रम सबसे कम मूल्य से भी शुरू किये जा सकते हैं ।
2. यदि श्रेणी में दो या अधिक पद मूल्य समान आकार के ही तो उन्हें क्रमश: मिलने वाले कोटि क्रम का औसत ज्ञात किया जाता है और औसत कोटि क्रम (Average Rank or Mid- Rank) ही उन पद मूल्यों का कोटि-क्रम मान लिया जाता है । उदाहरणार्थ X श्रेणी में यदि सबसे अधिक आकार वाला मूल्य 90 हो तो उसका क्रम 1 होगा, उसके बाद यदि 80 उन श्रेणी में तीन बार आया हो तो इन्हें आगे के तीन क्रम 2,3 व 4 मिलने चाहिये, लेकिन एक ही मूल्य को अलग-अलग कोटि-क्रम नहीं दिया जा सकता है । अत: औसत कोटि क्रम $\frac{2+3+4}{3}$ अर्थात 3 दिया जायेगा । इसके बाद आने वाले मूल्य को 5 कोटि क्रम दिया जायेगा । इस क्रम आगे तक चलता रहेगा।
3. इसके पश्चात् कोटि अन्तर ज्ञात किया जायेगा । कोटि अन्तर (D) ज्ञात करने के लिये X के कोटि-क्रम में से Y के तत्सम्बंधी कोटि-क्रमों को घटायेंगे । इसे संकेताक्षर 'D' द्वारा प्रस्तुत किया जायेगा । ध्यान रहे कि इस क्रमान्तरों (D) का योग सदैव शून्य $(\sum D = 0)$ होना चाहिए ।
4. ज्ञात क्रमान्तरों का वर्ग ज्ञात कर उन्हें जोडा जायेगा ।$(\sum d^2)$
5. अन्त में सहसम्बंध ज्ञात करने हेतु निम्न सूत्र का उपयोग किया जायेगा -

   A) जब कोई कोटि-क्रम समान न हो -

$$r_R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}$$

B) जब कोटि-क्रम समान हो -

$$r_R = 1 - \frac{6\left\{\sum D^2 + \frac{1}{12}(m^2-m) + \frac{1}{12}(m^2-m) + ...\right\}}{N(N^2-1)}$$

यहां :- r = कोटि अन्तर सहसम्बन्ध गुणांक

$\sum D^2$ = क्रमान्तरों के वर्गों का योग

N = पद युग्मों की संख्या

m = उन पदों की संख्या जिनके क्रम समान है ।

उदाहरण 15. निम्नलिखित दिये गये समंकों से X तथा Y के मध्य क्रमान्तर सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिये :-

Calculate the Coefficient of Correlation from the following data by spearman's Method of Rank Differences.

X	115	130	100	108	90	135	150	120	95	110
Y	100	115	45	75	50	135	111	90	60	81

हल :

Calculation of Spearman's Coefficient of Correlation

Series X	Ranks R_1	Series Y	Ranks r_2	Rank Differences D	Squares of DD^2
115	5	100	4	+1	1
130	3	115	2	+1	1
100	8	45	10	-2	4
108	7	75	7	0	0
90	10	50	9	+1	1
135	2	135	1	+1	1
150	1	111	3	-2	4
120	4	90	5	-1	1
95	9	60	8	+1	1
110	6	81	6	0	0
N+10				$\sum D = 0$	$\sum D^2 = 14$

$r_R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}$ = $1 - \frac{6\times 14}{10(10^2-1)}$ $= -\frac{84}{990}$ =1- .0849 = 0.9151

श्रेणी X तथा Y में उच्च धनात्मक सहसम्बन्ध है ।

उदाहरण 16. निम्न समंकों से क्रमान्तर सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :-

X	115	109	112	87	95	95	120	100	95	118
Y	75	74	85	70	76	65	82	74	68	80

हल :

Calculation of Spearman's Coefficient of Correlation

X	Y	R_1	r_2	D	d^2
115	75	3	5	-2	4
109	74	5	6.5	-1.5	2.25
112	85	4	1	3	9
87	70	10	8	2	4
95	76	8	4	4	16
95	65	8	10	-2	4
120	82	1	2	-1	1
100	74	6	6.5	-.5	.25
95	68	8	9	-1	1
118	80	2	3	-1	1
N+10				$\sum D = 0$	$\sum D^2 = 42.5$

नोट : श्रेणी X में 95 पद मूल्य को समान क्रम देने के लिए उन्हें क्रमशः मिलने वाले क्रमों का औसत $\frac{7+8+9}{3} = 8$ ज्ञात किया गया है तथा उन्हें समान क्रम 8 दिया गया हैं इसी प्रकार श्रेणी Y में 74 पद मूल्य समान है उन्हें क्रमशः मिलने वाले क्रमों का औसत $\frac{6+7}{2} = 6.5$ दिया गया है । इस प्रकार सूत्र में 2 बार $+\frac{1}{12} = (m^3 - m)$ संशोधन करना होगा ।

$$r_R = 1 - \frac{6\left\{\sum D^2 + \frac{1}{12}(m^3 - m) + \frac{1}{12}(m^3 - m)\right\}}{N(N^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6\left\{42.5 + \frac{1}{12}(3^3 - 3) + \frac{1}{12}(2^3 - 2)\right\}}{10(10^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6\left\{42.5 + \frac{24}{12} + \frac{6}{12}\right\}}{990}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 45}{990} \quad = 1 - \frac{270}{990} \quad = \frac{720}{990} \;=\; .73$$

उदाहरण 17 : एक सुन्दरता प्रतियोगिता में 10 प्रतियोगियों को प्रदान किये गये कोटी क्रमान्तर निम्नानुसार है ।

Ten Competitors in a beauty contest are ranked by three judges in the following order.

First Judge	:	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
Second Judge	:	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
Third Judge	:	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

क्रमान्तर सहसम्बन्ध गुणांक के प्रयोग द्वारा ज्ञात कीजिये कि किन दो निर्णायकों की रूचि सामान्य अभिरूचियों के अधिक निकट है ।

Use the rank correlation coefficient to disucss which pair of judges has the nearest approach to common taste in beaty.

हल :

Calculation of Coefficient of Rank Correlation

R_1	R_2	R_3	Deviation between 1 & 2 Ranks		Deviation between 2 & 3 Ranks		Deviation between 1 & 3 Ranks	
			D	D^2	D	D^2	D	D^2
1	3	6	-2	4	-3	9	-5	25
6	5	4	+1	1	+1	1	+2	4
5	8	9	-3	9	-1	1	-4	16
10	4	8	+6	36	-4	-16	+2	4
3	7	1	-4	16	+6	36	+2	4
2	10	2	-8	64	+8	64	0	0
4	2	3	+2	4	-1	1	+1	1
9	1	10	+8	64	-9	81	-1	1
7	6	5	+1	1	+1	1	+2	4
8	9	7	-1	1	+2	4	+1	1
Total			0	200	0	214	0	60

1 and 2

$$r_R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 200}{10(10^2-1)} = 1 - \frac{1200}{990} = -\frac{210}{990} \text{ -.212}$$

2 and 3

$$r_R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 214}{10(10^2-1)} = 1 - \frac{1284}{990} = -\frac{294}{990} = -.2969$$

$$r_R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 60}{10(10^2-1)} = 1 - \frac{360}{990} = \frac{630}{990} = +.6363$$

निष्कर्ष : प्रथम व द्वितीय एवं द्वितीय व तृतीय निर्णायकों के निर्णयों में ऋणात्मक सहसम्बन्ध हैं प्रथम व तृतीय निर्णायकों में धनात्मक सहसम्बन्ध है, अत: प्रथम व तृतीय निर्णायकों की रूचि में अधिक निकटता प्रतीत होती है ।

क्रमानतर सहसम्बन्ध गुणाक के गुण एवं सीमायें (Merits and Limitations of Ranking Method)

गुण (Merits)

1. यह विधि समझने में तथा गणना करने में सरल है ।
2. गुणात्तक आँकड़े दिये हुए होते हैं तो सहसंबंध ज्ञात करने हेतु यह विधि उत्तम है ।
3. जब क्रम दिये हुए होते हैं, तब केवल इसी विधि का प्रयोग किया जा सकता है ।

परिसीमाएँ (Limitations)

1 इस विधि की सबसे महत्वपूर्ण सीमा यह है कि इसमें पद मूल्यों के निरपेक्ष मानों का उतना महत्व नहीं है जितना उनके सापेक्ष मूल्यों का है । उदाहरणार्थ यदि किसी श्रेणी के मूल्य को 240 के स्थान पर 340 कर दिया जाये और 18 के स्थान पर 8, तब भी क्रमान्तर सहसम्बन्ध गुणांक का कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा - क्योंकि क्रमों पर इस परिवर्तन का कोई प्रभाव नहीं पड़ रहा है ।

2 जब चलों में समान क्रम अधिक होते है तो इसकी गणना प्रक्रिया कुछ कठिनता में परिवर्तित हो जाती है।

3 जब मदों की संख्या अधिक होती है तो भी गणना कठिन हो जाती है । अत: इस विधि का प्रयोग तब किया जाना चाहिए जब मदों की संख्या कम हो (सामान्यत: 30 से कम)।

5 संगामी विचलन रीति (Concurrent Deviation Method)

कभी-कभी दो श्रेणियों के मध्य सहसम्बन्ध की केवल दिशा का ही ज्ञात करना होता है, अर्थात् सहसम्बन्ध धनात्मक है अथवा ऋणात्मक, सहसम्बन्ध की वास्तविक मात्रा जाने की आवश्यकता नहीं होती है तो संगामी विचलन रीति का प्रयोग किया जाता है । यह विधि बिन्दु रेखीय विधि पर आधारित है, जिसके अनुसार जब दोनों संबद्ध श्रेणियों के वक्र एक ही दिशा में गमन करते हों अर्थात् सगामी हो तो यह स्थिति धनात्मक सहसम्बन्ध की परिचायक हैं इसके विपरीत यदि वक्र एक दूसरे क विपरीत दिशाओं में गमन करें तो सहसम्बन्ध ऋणात्मक होता है । इसी प्रकार संगामी विचलन विधि में भी यदि श्रेणियों के विचलन अधिकांशत: संगामी हों तो उनमें धनात्मक सहसम्बन्ध और यदि विचलन प्रतिगामी हों तो ऋणात्मक सहसम्बन्ध होता है । इस विधि की निम्न तीन प्रमुख विशेषताएं है :-

1 इस विधि से केवल विचलन की दिशाओं (धनात्मक अथवा ऋणात्मक) पर ही विचार किया जाता है, उनकी मात्राओं पर नहीं ।

2 प्रत्येक मद के विचलन की गणना किसी काल्पनिक या वास्तविक माध्य से नहीं की जाकर, उससे पूर्व की मद से तुलना करके की जाती है ।

3 इस विधि में केवल अल्पकालीन परिवर्तनों के आधार पर ही अध्ययन किया जाता है, उपनति का ध्यान नहीं रखा जाता है ।

गणना प्रक्रिया :-

1 प्रत्येक श्रेणी के अगले मद की उससे ठीक पूर्व की मद सें तुलना कर आधिक्य को + तथा कमी को - चिन्हों द्वारा प्रकट किया जाता है । दोनों में अन्तर नहीं होने पर = का चिन्ह लगाया जाता हैं विचलन युग्मों की संख्या श्रेणियों के पद युग्मों की संख्या से एक कम होती है, क्योंकि चिन्ह दूसरी मद से ही प्रारम्भ होते है; अत: प्रथम मद की तुलना नहीं हो सकती ।

2 दोनों श्रेणियों के विचलन चिन्हों के आधार पर संगामी प्रवृत्ति ज्ञात की जाती है, जिन पद युग्मों में एक साथ वृद्धि, कमी या बराबरी रही है अर्थात् दोनों श्रेणियों के +, - तथा, दोनों = के चिन्हों का गुणा '+' चिन्ह के रूप में लिखा जाता है । इस चिन्ह के योग को संकेताक्षर 'C' द्वारा व्यक्त करते हैं ।

3 इसके बाद सहसम्बन्ध ज्ञात करने के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग करते है :-

$$r_c = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-N}{N}\right)}$$

जहाँ :

r_c = संगामी सहसम्बन्ध गुणक (Coefficient of Concurrent Deviations)

c = संगामी स्थिति अर्थात 'क्' चिन्हों की संख्या (Total number of Concurrent or pulsess)

N = तुलना किये गये मदों की संख्या जो कुल युग्म पदों से 1 कम होती है (Number of Concurrent or (total number of pairs - 1)

सूत्र में $\pm$ चिन्हों का महत्व : यदि $\left(\frac{2c-N}{N}\right)$ का मूल्य धनात्मक है तो दोनों स्थानों पर चिन्ह (+) का प्रयोग किया जायेगा इसके विपरीत मूल्य ऋणात्मक हो तो वर्गमूल चिन्ह के बाहर और अन्दर ऋण का चिन्ह (-) लगाना होगा । ऐसा करने से वर्गमूल निकालने से पूर्व संख्या धनात्मक हो जायेगी; किन्तु वर्गमूल का चिन्ह हटते ही यह संख्या वापस अपने मूल रूप में आ जाएगी ।

उदाहरण 18. निम्नलिखित पूर्ति एवं मूल्य सूचकांकों के समंकों से संगामी विचलन रीति से सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :-

From the following data relating to index number of supply and prices. Calculate coefficient of correlation by concurrent deviation method.

Year	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Index No.of Supply	108	120	125	115	115	118	124	124	128	130
Index of Prices	100	97	97	99	96	90	92	92	90	88

Solution

Calculation of Correlation by Concurrent Deviation

Index No.of Supply	Deviation signs	Index No of. Prices	Deviation signs	Product of Deviation signs
108		100		
120	+	97	-	-
125	+	97	=	=
115	-	99	+	-
115	=	96	-	-
118	+	90	-	-
124	+		+	+
124	=		=	+
128	+	90	-	-
130	+	88	-	-
	N=9			C=2

$r_c = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-N}{N}\right)} \quad = \sqrt{\pm\left(\frac{2\times2-9}{9}\right)} \quad = -\sqrt{\left(\frac{-5}{9}\right)} \quad = \sqrt{+0.5555}$ = -0.7453

अत: पूर्ति एवं मूल्य सूचकांकों में ऋणात्मक सहसम्बन्ध है ।

उदाहरण 19 : निम्न समंकों से संगामी विचलन विधि द्‌वारा सहसम्बन्ध गुणक ज्ञात कीजिये ।

S.No.	1	2	3	4	5	6	7
X Series	150	154	100	72	60	65	120
Y Series	100	80	70	60	50	80	92

हल

Calculation of Coefficient of Correlation

Sr. No.	X Series	Deviation Signs	Y Series	Deviation	Product of Signs

1	150	+	100	-	-
2	154	-	80	-	+
3	100	-	70	-	+
4	72	-	60	-	+
5	60	+	50	+	+
6	65	+	80	+	+
7	120		92		
		N-=6			C = 5

$$r_c = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-N}{N}\right)} = \sqrt{\pm\left(\frac{2\times5-6}{6}\right)} = \sqrt{\left(\frac{4}{6}\right)} = \sqrt{.6667} = -0.817$$

अत: X तथा Y श्रेणी में उच्च स्तरीय धनात्मक सहसम्बन्ध है ।

11.6 विलम्बना तथा अग्रगमन (Lag and Lead)

व्यापारिक एवं आर्थिक समंक मालाओं के अध्ययन करते समय प्राय: यह देखा जाता है कि स्वतंत्र श्रेणी (Independent or subject Series) में होने वाले परिवर्तनों का आश्रित श्रेणी पर प्रभाव कुछ समय बाद दिखाई पड़ता है । उदाहरण के लिऐ यदि किसी वस्तु की पूर्ति की मात्रा आज बढ़ाई जाये तो यह आवश्यक नहीं कि वस्तु के मूल्यों पर आज ही इसका प्रभाव दिखाई पड़े । यह असर कुछ समय बाद भी हो सकता है । इस प्रकार दोनों घटनाओं के कारण-प्रभाव का सम्बन्ध स्थापित होने के बीच कुछ समयान्तर रहता है । कारण और प्रभाव के बीच इस समयान्तर को ही काल विलम्बना (Time Lag) या अग्रगमन (lead) कहते हैं । परिणाम में देरी होने पर विलम्बना अथवा कारण पहले होने पर अग्रगमन कहा जाता है ।

सहसम्बन्ध का निर्धारण करते समय इस समयान्तर का ध्यान रखा जाना आवश्यक है । अन्यथा परिणाम भ्रामक होगा एवं वास्तविक स्थिति का ज्ञान नहीं हो पायेगा । ऐसी स्थिति में सहसम्बन्ध ज्ञात करने के लिए कारण से संबंधित समंकों को विलम्बित करने की आवश्यकता होगी, अर्थात् प्रभाव संबंधी समंकों कों आगे बढ़ाना पड़ेगा ।

उदाहरण 20 : क्या प्रचलन में मुद्रा की मात्रा और सामान्य मूल्य स्तर में कोई सहसम्बन्ध है, जबकि प्रचलित मुद्रा की मात्रा का थोक मूल्यों पर अगले वर्ष प्रभाव पड़ता है ?

Find if there is any correlation between money in circulation and general price level supoosing that the money in circulation affects the wholesale price in next year.

Year	1995	1996	1997	1998	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2005
IndexNo. (Money)	108	110	105	102	107	110	125	118	122	120	125

Index No. (wholesale prices)	112	110	115	108	115	110	100	112	125	126	122

हल :

Calculation of Coefficient of Correlation

Years	Index No.of Money in Circulation X	A= 115 dx	dx^2	Index No.of Wholesale Prices Y	A= 118 dy	dy^2	dxdy
1995	108	-7	49	110	-8	64	56
1996	110	-5	25	115	-3	9	15
1997	105	-10	100	108	-10	100	100
1998	102	-13	169	115	-3	9	39
1999	107	-8	64	110	-8	64	64
2000	110	-5	25	100	-18	324	90
2001	125	10	100	112	-6	36	-60
2002	118	3	9	125	7	49	21
2003	122	7	49	126	8	64	56
2004	120	5	25	122	4	16	20
		-23	615		-37	735	401

$$r = \frac{\sum dxdy - \left(\frac{\sum dx \times \sum dy}{N}\right)}{\sqrt{\sum dx^2 - \frac{(\sum dx)^2}{N}}\sqrt{\sum dy^2 - \frac{(\sum dy)^2}{N}}}$$

$$r = \frac{401 - \left(\frac{-23 \times 37}{10}\right)}{\sqrt{615 - \frac{(-23)^2}{10}}\sqrt{735 - \frac{(-37)^2}{10}}}$$

$$r = \frac{401 - 85.1}{\sqrt{615 - 52.9}\sqrt{735 - 136.9}}$$

$$r = \frac{315.9}{\sqrt{562.1}\sqrt{598.1}}$$

$$r = \frac{315.9}{23.71 \times 24.456}$$

$$r = \frac{315.9}{579.85} = .5448$$

टिपणी :- चूंकि प्रचलित मुद्रा की मात्रा का थोक मूल्यों पर प्रभाव अगले वर्ष पड़ता है, अत: सहसंबंध ज्ञात करने हेतु मुदा का सूचकांक 1995 वर्ष से शुरू किया है, जबकि थोक मूल्य सूचकांक एक वर्ष बाद से लिया गया है ।

11.7 सहसंबध गुणांक से संबंधित अन्य माप :-

निश्चयन गुणांक एवं अनिश्चत गुणांक (Other measures related to Coefficient of Correlation : Coefficient of determination & Coefficient of Non determination) आश्रित चर Y के मूल्यों में होने वाले परिर्वनों को दो भागों में विभाजित किया जा सकता है :-

(i) कुल परिवर्तन का वह भाग जिसे स्वतंत्र चर X में होने वाले परिवर्तनों के आधार पर स्पष्टीकृत मापा जा सकता है, स्पष्टीकृत प्रसरण (Explained variation) कहलाता है । यह संबंध की प्रगाढ़ता को स्पष्ट करता है ।

स्पष्टीकृत प्रसरण $\frac{1}{N}\sum(Y_c-\overline{Y})^2$

(ii) कुल परिवर्तन का वह भाग जिसे स्वतंत्र चर के आधार पर स्पष्टीकृत नहीं किया जा सकता अर्थात जिसे स्वतंत्र चर के आधार पर मापा नहीं जा सकता, अस्पष्टीकृत प्रसरण कहलाता है ।

अस्पष्टीकृत प्रसरण $=\frac{\sum(Y-Y_c)^2}{N}$

कुल प्रसरण स्पष्टीकृत और अस्पष्टीकृत प्रसरणों का योग होता है, सूत्र के रूप में इसे निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है -

$$\frac{\sum(Y-\overline{Y})^2}{N} = \frac{\sum(Y_c-\overline{Y})^2}{N} = \frac{\sum(Y-Y_c)^2}{N}$$

स्पष्टीकृत प्रसरण को कुल प्रसरण से विभाजित किया जाये तो प्राप्त मान निश्चयन गुणांक (Coefficient of Determination) कहलाता है, जिसे सूत्र रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते है :-

R(निश्चयन गुणांक) = $\frac{\text{स्पष्टीकृत प्रसरण}}{\text{कुल प्रसरण}}$ या $R=\frac{\sum(Y_c-\overline{Y})^2/N}{\sum(Y-Y_c)^2/N}$

यह सहसंबंध गुणांक के वर्ग के बराबर होता है अर्थात् $R=r^2$ किन्तु सहसंबंध गुणांक धनात्मक एवं ऋणात्मक दोनों हो सकता है, परन्तु निश्चयन गुणांक ऋणात्मक नहीं हो सकता है । निश्चयन गुणांक हमें यह बताता है कि स्वतंत्र चर X के परिवर्तनों के फलस्वरूप आश्रित चर Y के होने वाले परिवर्तन के कितने प्रतिशत भाग को स्पष्टीकृत किया जा सकता है अर्थात सहसंबंध के संबंध में निर्वचन करने के लिये निश्चयन गुणांक का प्रयोग किया जाता है । उदाहरण के लिए यदि मूल्य (X) और मांग (Y) में सह-संबंध गुणांक (R) = +.9 है तो निश्चयन गुणांक ($r^2=.81$) होगा,

जिसका अर्थ होगा कि माँग मे होने वाले 81 प्रतिशत परिवर्तन का मापन मूल्य के परिवर्तनों के आधार पर किया जा सकता है तथा मांग में 19 प्रतिशत उच्चावचन मूल्य के आधार पर स्पष्टीकृत नहीं किये जा सकते । स्पष्टीकृत या अनुमानित नहीं किये जा सकने वालें अंश को अनिश्चयन गुणांक (Coefficient of Non-determination) कहते है । अनिश्चयन गुणांक के लिए K^2 चिन्ह का प्रयोग होता है सूत्र में इसे हम निम्न प्रकार से लिख सकते है :-

$K^2 = \frac{\text{अस्पष्टीकृत प्रसरण}}{\text{कुल प्रसरण}}$ या $K^2 = 1 - r^2$

11.8 सारांश

पूर्व वर्णित विवेचन से स्पष्ट है कि दो भिन्न -भिन्न तथ्यों से संबंधित श्रेणियों में साथ-साथ परिवर्तन होने की प्रवृत्ति के गणितीय माप को ही सहसंबंध कहते हैं । सहसबंन्ध परिवर्तनों की दिशा के आधार पर धनात्मक या ऋणात्मक, परिवर्तनो के अनुपात के आधार पर रेखीय या बहु रेखीय एवं चरों की संख्या अर्थात् श्रेणियाँ जिनमें तुलना करनी है, के आधार पर सरल, बहु गुणी या आंशिक हो सकता है, यदि दो पदमालाओं में परस्पर निर्भरता नहीं पाई जाये तो वहां सहसंबंध का अभाव (0) होगा । सहसंबंध के परिमाण को मापने के लिए कार्ल पियर्सन की रीति, तथ्यों का प्रत्यक्ष संख्यात्मक माप संभव न होने अर्थात् क्रम प्रदान करने पर स्पियरमैन की कोटी क्रमान्तर रीति एवं केवल सहसंबंध की दिशा का ही ज्ञात करना हो तो संगामी विचलन रीति द्‌वारा सहसंबंध गुणांक की गणना की जाती है, सहसंबंध गुणांक -1 से +1 के मध्य ही स्थिति होता है । सहसम्बन्ध विश्लेषण भौतिक व समाज विज्ञान के अध्ययन में अर्थशास्त्र के क्षेत्र में व्यावसायिक पूर्वानुमान में बड़ा सहायक होता है । प्रतीपगमन व अनुपात विचरण की अवधारणाएँ भी सहसंबध के मापन पर ही आधारित है ।

11.9 तकनीकी शब्दावली

सहसंबंध	:	दो श्रेणियों में पारस्परिक आश्रितता का माप
धनात्मक सहसंबंध	:	दोनों चलों के मूल्यों में परिवर्तन समान दिशा में अर्थात् संगामी होना
ऋणात्मक सहसंबंध	:	दो चलों के मूल्यों में परिवर्तन की दिशा विपरीत अर्थात् प्रगामी होना
संभाव्य विभ्रम	:	वह मूल्य जिसे सहसंबंध गुणांक में एक बार जोड़ने व दूसरी बार घटाने पर प्राप्त सीमाओं के मध्य समग्र के अन्य प्रतिदर्श परिणामों के होने की संभावना होती है ।
सहसंबंध का निर्वचन	:	दो चरों के मध्य सहसंबंध गुणांक के कारण व प्रभाव की महता की जानकारी
विलम्बना या अग्रगमन	:	किसी एक श्रेणी के मूल्यों के परिवर्तन का प्रभाव दूसरी श्रेणी पर तत्कालीन न होकर कुछ समय बाद होना ।

11.10 स्वपरख प्रश्न

1 सहसंबध से क्या आशय है?

2 कारण व परिणाम सिद्धान्त को समझाइये ।

3 धनात्मक व ऋणात्मक सहसंबंध के मध्य अन्तर बताइये ।

4 कार्ल पियर्सन के सहसंबध गुणांक की मुख्य विशेषताएं लिखिये ।

5 विक्षेप चित्र बनाने की प्रक्रिया बतलाइये ।

6 रेखाचित्र विधि द्वारा सहसंबंध किस प्रकार ज्ञात किया जाता है?

7 संभाव्य विभ्रम क्यों आवश्यक है?

8 स्पियरमैन की क्रमान्तर विधि का प्रयोग कब व किस प्रकार किया जाता है?

9 समान क्रम हेतु संशोधन से क्या तात्पर्य है? इसका सूत्र भी लिखिये ।

10 संगामी सहसंबंध का निर्धारण किस प्रकार किया जाता है?

11 निम्न सूचनाओं कों विक्षेप चित्र द्वारा प्रस्तुत किजिये तथा परिणाम की व्याख्या कीजिये।

X	2	4	6	8	10	12
Y	4	3	7	5	8	10

12 रेखाचित्र विधि द्वारा सहसंबध ज्ञात कीजिये ।

Years	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Wages	100	101	102	101	100	99	97	98
Cost of Living	98	99	99	97	95	92	95	94

13 (i) यदि X तथा Y श्रेणी में सह विचरणाक +270 हो तथा X का विचरणांक 540 और

Y का विचरणांक 220 हो तो दोनों श्रेणियों में सहसंबंध ज्ञात कीजिये ।

If the Co- variance between X and Y variables is +270 and the variance of X and Y are 540 and 220 respectively, find a between the two variables.

(ii) X तथा Y दो विचलनों में सहसंबंध गुणांक 0.28 है, उनके बीच सह विचरण माप 7.6 है तथा X श्रेणी का विचरण माप 9 है, तो Y श्रेणी का प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिये ।

Coefficient of Correlation between two variables X and Y is 0.28, their co- variance is 7.6 and the variance is X is 9, find the standard deviations of Y series.

(iii) पदों की संख्या ज्ञात कीजिये यदि -

Find out the number of items if :

r = .5, $\sum \times y = 60, \sigma_y = 2$ and $\sum \times^2 = 90$

Ans $\left[(i)r=0.783(ii)\sigma_y=9.04(iii)N=40\right]$

14. निम्न समंकों के द्वारा सहसंबंध गुणक ज्ञात कीजिये -

Calculate Coefficient of Correlation from the following data :

X	20	40	60	80	100	120	140
Y	6	10	12	16	20	22	26

Ans r= 0.997

15. निम्न समंकों के द्वारा सहसंबंध गुणक ज्ञात कीजिए -

Calculate coefficient of Correlation from the data given below :

X	140	120	90	80	100	110	150	80
Y	150	140	80	60	90	110	120	40

Ans (r = 0.872)

16. पति और पत्नियों की आयु के मध्य सहसंबध गुणक ज्ञात कीजिये-

Calculate the coefficient of correlation between ages of husbands and wifes.

Ages of Wive is Years	Ages of Husband in years					Total
	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	
15-25	4	10	3	-	-	17
25-35	-	10	24	3	-	37
35-45	-	-	13	2	-	15
45-55	-	-	4	15	6	25
55-65	-	-	-	4	2	6
Total	4	20	44	24	8	100

Ans (r = 0.71)

17. निम्न सूचना के आधार पर आयु व अशिक्षितता के मध्य यदि कोई संबंध हो तो ज्ञात कीजिए-

On the basis of following information] find out if there is any relation between age illiteracy.

Age Group	Population(IN' 000)	Illterate Population(IN' 000)
10-20	120	96
20-30	100	75
30-40	80	60
40-50	50	35

50-60	25	20
60-70	15	09
70-80	5	5

Ans. (R=0.22)

18. एक सुन्दरता प्रतियोगिता में 10 प्रतियोगियों को दो निर्णायकों द्वारा कोटि क्रमान्तर प्रस्तुत किये । कोटि सहसम्बन्ध के आधार पर यह बताइये कि क्या ये दोनों निर्णायक एक ही रूचि के हैं ? संभाव्य विभ्रम की गणना की कीजिए ।

The ten competitors in a beauty contest are ranked by two judges in the following order :

First Judge	1	5	6	10	2	3	4	7	9	8
Second Judge	6	9	4	8	2	1	3	5	10	7

Use the rank correlation to discuss whether these judges are of the common taste ? Also calculate probable error.

Ans. (rR = 0.64)

19. X तथा Y के संगामी विचलन रीति द्वारा सहसंबंध गुणांक ज्ञात कीजिये-

Find out the coefficient of correlation between X and Y by the method of concurrent deviations :

X	50	55	57	54	62	62	66	69	73	70
Y	60	58	56	60	54	54	53	57	54	50

Ans. (rc=-0.58)

20. क्या यह सही है

$$r^2 = 1 - \frac{500}{400}$$

Ans.(No)

11.11 सन्दर्भ ग्रन्थ

1. S.P. Gupta : Statistical Methods
2. J.K. Sharma : Business Statistics
3. D.R. Agarwal : Business Statistics
4. Pinnai & Bhagwati : Statistics Methods
5. K.N.Nagar : साख्यिकीय विधियाँ ।
6. Yadav, Jain, Mittal : साख्यिकीय विधियाँ ।

इकाई -12 : कालश्रेणी विश्लेषण (Time Series Analysis)

इकाई की रूपरेखा -

12.0 उद्देश्य

12.1 प्रस्तावना

12.2 कालश्रेणी से तात्पर्य

12.3 कालश्रेणी विश्लेषण का महत्व

12.4 कालश्रेणी के संघटक

12.4.1 दीर्घकालीन उपनति का मापन

(अ) मुक्त हस्त वक्र रीति

(ब) अर्द्ध मध्यक रीति

(स) चल माध्य रीति

(द) न्यूनतम वर्ग रीति

12.4.2 अल्पकालीन उच्चावचनों का मापन

(अ) मौसमी विचरणों का मापन

(ब) चक्रीय उच्चावचन

12.4.3 अनियमित उच्चावचन

12.5 सारांश

12.6 शब्दावली

12.7 स्वपरख प्रश्न

12.8 व्यावहारिक प्रश्न

12.9 कुछ उपयोगी पुस्तकें

12.0 उद्देश्य (Objects)

इस इकाई के अध्ययन करने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- कालश्रेणी का अर्थ समझ सके ।
- कालश्रेणी विश्लेषण की महत्त्वता समझ सकें ।
- कालश्रेणी के विभिन्न संघटकों की जानकारी कर सकें ।
- विविध उदाहरणों से दीर्घकालीन, अल्पकालीन उपनतियो का मापन कर सकें ।
- सरल रेखा तथा द्वि-घातीय परवलयिक वक्र के आसंजन की गणितीय विधि की गणना न्यूनतम वर्ग विधि के अन्तर्गत किस प्रकार की जाती है, इसे सुगमतापूर्वक समझ सकें।

12.1 प्रस्तावना (Introduction)

काल श्रेणी विश्लेषण व्यावसायिक पूर्वानुमान की एक महत्वपूर्ण तकनीक है । इसके लिए भूतकालीन तथ्यों के आधार पर भविष्य के लिए ऐसे गणितीय प्रारूपो को तैयार किया जाता है, जिनसे भविष्य के लिए पूर्वानुमान लगाने में सुविधा रहती है । एक अर्थशास्त्री इनकी सहायता से सही नीति निर्धारण कर देश के विकास मे योगदान कर सकता है । अत: कालश्रेणी का मुख्य उद्देश्य आर्थिक तथ्यों में परिवर्तन को समझना, निर्वचन करना तथा उनका मूल्यांकन इस आशय से करना है जिससे भविष्य की घटनाओं का यथोचित पूर्वानुमान किया जा सके ।

12.2 कालश्रेणी से तात्पर्य (Meaning of A Time Series)

सामान्य अर्थ में, समय की किसी इकाई जैसे वर्ष, माह, सप्ताह, दिन अथवा घण्टे के आधार पर वर्गीकृत समंकों का व्यवस्थित क्रम ही कालश्रेणी कहलाता है । दूसरे शब्दों में, जिस श्रेणी के चर मूल्य (variables) समय के प्रभाव को प्रकट करते हैं उसे कालश्रेणी कहते हैं । स्पाइगेल के शब्दों में, "एक कालश्रेणी एक निश्चित कालान्तर पर किये गये अवलोकनों से प्राप्त अध्ययन-निष्कर्षो का समूह होती है ।" उदाहरणार्थ, उत्तर भारत में पिछले पाँच वर्षा में हुए बाजरे के उत्पादन को हम अग्रांकित प्रकार लिख सकते हैं -

वर्ष	2005	2006	2007	2008	2009
बाजरे का उत्पादन (टनों में)	950	1000	1050	1120	1180

उपर्युक्त कालश्रेणी में समंकों के वर्गीकरण का आधार 'वर्ष' हैं । इसी प्रकार एक फर्म द्वारा वर्ष के 12 महीनों में की गयी बिक्री मात्रा, अस्पताल में एक नर्स द्वारा प्रत्येक चार घण्टे के बाद लिया गया किसी रोगी का तापक्रम, एक कालेज में प्रत्येक वर्ष बी.कॉम. में प्रवेश लेने वाले छात्रों की संख्या आदि कालश्रेणी के अन्य उदाहरण हैं । अर्थशास्त्र में किसी भी आर्थिक-सामाजिक समस्या को बिना कालश्रेणी के विश्लेषित और निर्वाचित किया ही नहीं जा सकता । समाजशास्त्रियों, उपभोक्ताओं, सरकारों, डाक्टरों अथवा जीव वैज्ञानिकों आदि द्वारा भी अपने अनुसंधानों में व्यापक रूप से कालश्रेणियो का उपयोग किया जाता है । इस अध्याय में हम अपने अध्ययन को आर्थिक तथा व्यावसायिक समंकों को प्रस्तुत करने वाली कालश्रेणियो के विश्लेषण तक ही सीमित रखेंगे।

12.3 कालश्रेणी-विश्लेषण का महत्व (Importance of Analysis of Time Series)

कालश्रेणी-विश्लेषण का साँख्यिकी में व्यापक महत्व है जैसा कि निम्न विवरण से स्पष्ट है -

1. **विगत व्यवहार के अध्ययन में सहायता** (Helps in understanding past behaviour) - एक कालश्रेणी किसी भी आर्थिक अथवा व्यावसायिक समस्या से सम्बन्धित आँकड़े व्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करती है अत: उसका विश्लेषण करके भूतकालीन व्यवहार और स्थिति का विश्लेषण किया जा सकता है और उन भूतकालीन परिवर्तनों के अध्ययन से विभिन्न उपयोगी निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं ।

2. **वर्तमान परिस्थितियों को समझने में सहायता** (Helps in understanding the existing circumstances)- कालश्रेणियों के विश्लेषण द्वारा हम विभिन्न आर्थिक तथा व्यावसायिक क्षेत्रों में हो रहे परिवर्तनों की जानकारी प्राप्त कर सकते हैं । पहले से निर्धारित प्रमापों तथा वास्तव में सम्पन्न कार्यों या परिणामों से तुलना कर सकते हैं और यदि कोई विचलन हों तो उनके कारणों का पता लगा सकते हैं ।

3. **अन्तर मूल्यांकन में सहायता (Helps in Comparison)** - एक ही फर्म अपनी विभिन्न वर्षों या महीनों के आधार पर तैयार की गई बिक्री-मात्रा, उत्पादन लागत या लाभार्जन समंकों की कालश्रेणी की सहायता से अपने क्रिया-कलापों का मूल्यांकन कर सकती हैं और दो भिन्न-भिन्न अवधियों में किये गये कार्यों का अन्तर मूल्यांकन कर सकती है ।

4. **भावी नियोजन में सहायता (Helps in future planning)** - काल श्रेणियों के विश्लेषण से भावी नियोजन में भी बहुत सहायता मिलती है । भूतकालीन प्रवृत्ति के आधार पर भावी दीर्घकालीन प्रवृत्ति का अनुमान लगाया जा सकता है और तदानुसार भावी कार्यक्रम आयोजित किये जा सकते हैं । यदि कालश्रेणी ठीक से बनाई गई हो और किसी दीर्घकालीन प्रवृत्ति को भली प्रकार विश्लेषित कर लिया गया हो तो भावी विचरणो को संभावित सीमाओं के अन्दर पर्याप्त विश्वसनीयता के साथ प्रक्षेपित किया जा सकता है ।

5. **अन्य उपयोग (Other uses)** - अर्थशास्त्रियो एवं व्यवसायियों के अतिरिक्त समाजशास्त्रियों; उपभोक्ता, सरकार, डाक्टरों अथवा जीव वैज्ञानिकों आदि की समस्याओं का भी अध्ययन और विश्लेषण कालश्रेणियो की सहायता से किया जा सकता है । व्यापार में होने वाले आकस्मिक उच्चावचनों का अनुमान इनकी सहायता से भली प्रकार लगाया जा सकता है । विभिन्न कालश्रेणियो की परस्पर तुलना करके उनके कारण तथा प्रभाव का विश्लेषण किया जा सकता है ।

12.4 कालश्रेणी के संघटक (Components of Time Series)

कालश्रेणी के रूप में उपलब्ध होने वाले समंकों पर (चाहे वे किसी भी समस्या से सम्बन्धित क्यों न हों), विभिन्न कारकों का प्रभाव पड़ता है जिन्हें हम श्रेणी के संघटक कहते हैं । उनका भली प्रकार विश्लेषण करके भावी प्रवृत्तियों का अनुमान भली-भाँति लगाया जा सकता है । उदाहरण के लिये हम एक ऐसी कालश्रेणी को ले लें जिसमें गेहूँ के मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों को दिखाया गया हो । इन गेहूँ मूल्यों पर विभिन्न कारकों का प्रभाव होगा, जैसे, जनसंख्या में वृद्धि, उपभोक्ताओं की रूचियों में परिवर्तन, उपभोक्ता वर्ग की आय में परिवर्तन, सरकारी नीति, नियन्त्रण एवं राशन व्यवस्था, गेहूँ

की खेती और उत्पादकता में अन्तर, विभिन्न वर्षों में किया गया गेहूँ के आयात-निर्यात व्यापार की मात्रा आदि । इन सभी तत्वों को दीर्घकालीन तथा अल्पकालीन, नियमित या अनियमित उच्चावचन वाले कारकों आदि विभिन्न वर्गो में विभाजित किया जा सकता है। अत: कालश्रेणी के विश्लेषण की समस्या इन तत्वों को अलग-अलग करने और उनके प्रभाव का मूल्यांकन करने की है । किसी भी कालश्रेणी का विश्लेषण करते समय हमें निम्न तीन प्रकार के परिवर्तनों का अध्ययन करना पड़ता है -

(1) **दीर्घकालीन उपनति का अध्ययन** (Secular Trend)

(2) **अल्पकालीन अथवा नियमित उच्चावचनों का अध्ययन** (Short-term or regular Fluctuations)

(3) **दैव या अनियमित उच्चावचन** (Random or Irregular Fluctuations)

उपरोक्त तत्व ही एक कालश्रेणी के संघटक अथवा कारक कहलाते हैं । इन तत्वों को पहचान कर अलग-अलग करना और उनका अध्ययन करना ही कालश्रेणी का विश्लेषण है। यह बात ध्यान देने योग्य है कि एक समय में केवल एक ही प्रकार के परिवर्तनों का अध्ययन / विश्लेषण किया जाना चाहिये । यदि हमें दीर्घकालीन परिवर्तनों का अध्ययन करना हो तो श्रेणी में से अल्पकालीन उच्चावचनों को अलग करना होगा । इसके विपरीत, यदि हमें अल्पकालीन परिवर्तनों का अध्ययन करना हो तो उसमें से दीर्घकालीन परिवर्तनों को अलग करना होगा ।

अब हम दीर्घकालीन उपनति और अल्पकालीन उच्चावचनों के अध्ययन की तकनीकों और विधियों का पृथक-पृथक अध्ययन करेंगे।

i. दीर्घकालीन उपनति का मापन (Measurement of Secular Trend)

दीर्घकालीन उपनति से आशय (Meaning of Secular Trend) - दीर्घकाल में किसी भी तथ्य के घटने या बढ़ने या स्थिर रहने की प्रवृत्ति को 'दीर्घकालीन उपनति' (Secular Trend) कहते हैं । इस प्रकार

किसी भी कालश्रेणी में दीर्घकालीन तत्वों का प्रभाव दर्शाने वाले कारकों को दीर्घकालीन उपनति कहा जाता है । दीर्घकालीन उपनति का निर्धारण करते समय अल्पकालीन उच्चावचनों को या तो पृथक् कर दिया जाता है या उनकी उपेक्षा कर दी जाती है तथा एक औसत दीर्घकालीन प्रवृत्ति की गणना कर ली जाती है । किसी भी कालश्रेणी में दीर्घकालीन प्रवृत्ति को बतलाने वाली तीन प्रकार की परिस्थितियाँ हो सकती हैं - (i) ऊपर की ओर जाती हुई उपनति अर्थात् वृद्धि की दशा (upward trend) (ii) नीचे की ओर गिरती हुई उपनति अर्थात् ह्रासोन्मुख दशा (downward trend) अथवा (iii) स्थिरता की दशा (Constant trend) । उदाहरणार्थ, यदि हम गत 20 वर्षों में अनाज के मूल्यों में हुये उच्चावचनों की दीर्घकालीन उपनति की गणना करें तो यह वृद्धिशील उपनति दिखलायेगी । इसी प्रकार भारत में 20 वर्षो में हुई मुत्यु दर ह्रासोन्मुख दीर्घकालीन उपनति प्रदर्शित करती है । इसके विपरीत यदि हम किसी भी पहाड़ी स्थान पर गत 50 वर्षो में हुई वार्षिक वर्षा का औसत देखें तो वह 'स्थिर उपनति' को

दिखलायेगा । किसी भी कालश्रेणी में दीर्घकालीन उपनति ऐसे तथ्यों पर आधारित होती है जिनमें उच्चावचन एक लम्बे समय में होते हैं अर्थात् इन तथ्यों में परिवर्तन एक दीर्घकाल के पश्चात् दृष्टिगोचर होते हैं ।

दीर्घकालीन उपनति की गणना का महत्व (Importance of Measurement of Secular Trend) - किसी भी तथ्य सम्बन्धी कालश्रेणी में दीर्घकालीन प्रवृत्ति की गणना करने से दो प्रमुख लाभ होते हैं - उस तत्व में हो रही दीर्घकालीन प्रवृत्ति का पता लगाया जा सकता है । दूसरा लाभ यह है कि एक फर्म की दूसरी फर्म से तुलना दोनों की 'दीर्घकालीन' उपनति मूल्यों' की गणना करके सरलतापूर्वक की जा सकती है ।

दीर्घकालीन उपनति की गणना करने की रीतियाँ (Methods of Computing Secular Trend)

किसी भी दीर्घकालीन उपनति की गणना निम्न चार रीतियों से की जा सकती है-

(अ) मुक्त हस्त वक्र रीति,

(ब) अर्द्ध-मध्यक रीति,

(स) चल माध्य रीति; तथा

(द) न्यूनतम वर्ग रीति ।

(अ) **मुक्त हस्त वक्र रीति** (Freehand Curve Method) - यह दीर्घकालीन प्रवृत्ति निर्धारित करने की बिन्दुरेखीय विधि है जो एक सरल रीति है । इस रीति में हम कालश्रेणी के सभी पदों को एक ग्राफ पेपर पर अंकित कर लेते हैं और फिर इन बिन्दुओं के उतार-चढ़ाव को ध्यान में रखते हुए एक ऐसा वक्र खींचते हैं जो उन पदों की दीर्घकालीन, प्रवृत्ति को प्रकट करें । यह सीधी रेखा इस प्रकार खींची जाती है, जिससे यह प्रांकित बिन्दुओं के मध्य मार्ग से होकर जायें अर्थात् यह रेखा प्रत्येक बिन्दु से समीपतम हो । चूँकि पदों को देखकर ग्राफ पर एक सीधी रेखा खींची जाती है अत: इस रीति को 'निरीक्षण द्वारा दीर्घकालीन उपनति निश्चित करने की रीति' भी कहते हैं ।

मुक्तहस्त वक्र रीति के लाभ एवं दोष (Merits and Demerits of Freehand Curve Method)

इस रीति के निम्नलिखित लाभ हैं -

(1) यह एक सरल रीति है क्योंकि उचित पैमाना लेकर ग्राफ पेपर पर वक्र का बनाना काफी सरल कार्य होता है।

(2) इस रीति में गणितीय गणना नहीं करनी पड़ती है ।

(3) इस रीति में अत्यन्त शीघ्र ही दीर्घकालीन उपनति निश्चित की जा सकती है ।

(4) यह रीति एक लोचपूर्ण रीति है ।

इस रीति के मुख्य दोष निम्न प्रकार से हैं -

(5) यह रीति अत्यधिक व्यक्तिपरक है । यदि विश्लेषणकर्त्ता तनिक भी पक्षपात करेगा तो वह परिणाम को प्रभावित कर सकता है ।

(6) इस रीति द्वारा उपनति मूल्यों की गणना नहीं हो सकती और न औसत वृद्धि या कमी दर ही निश्चित की जा सकती है ।

(7) यह रीति पर्याप्त समय लेने के बाद भी दीर्घकालीन उपनति की केवल दिशा का अनुमान ही दे पाती है ।

(8) इसमें बिन्दुओं के आधार पर रेखा खींचने का कोई निश्चित आधार नहीं है अत: एक ही सांख्यिकीय सामग्री से दो या अधिक व्यक्ति भिन्न-भिन्न प्रकार के वक्र बनायेगें ।

(ब) अर्द्ध-मध्यक रीति (Method of Semi-averages) - इस रीति के अनुसार दी हुई कालश्रेणी को दो समान भागों में बाँट लिया जाता है और फिर उनके अलग-अलग समान्तर माध्य (Arithmetic mean) की गणना की जाती है । यदि कालश्रेणी में दिये गये वर्ष सम-संख्या (even number) में है तो उन्हें दो बराबर भागों में बाँटना कोई कठिन कार्य नहीं है । उदाहरणार्थ 8 वर्षों वाली कालश्रेणी को पहले चार तथा दूसरे चार वर्षों के दो वर्गो में विभाजित किया जा सकता है । लेकिन जब वर्ष विषम संख्या (odd numbers) में दिये हुए हों जैसे 9 वर्ष तो बीच वाले वर्ष को छोड़ देना चाहिये। श्रेणी को दो समान भागों में बाँट कर अलग-अलग माध्यों की गणना की जाती है जिसके लिए $\alpha = \frac{\sum m}{n}$ सूत्र का प्रयोग किया जाता है । इस प्रकार हमें दो अंक प्राप्त हो जाते हैं एक तो प्रथम आधे भाग का समान्तर माध्य और दूसरा दूसरे अर्ध-भाग का समान्तर माध्य । इन दोनों को ग्राफ पेपर पर अंकित करके उन्हें मिला दिया जाता है। यह सरल रेखा ही दीर्घकालीन प्रवृत्ति को प्रकट करती है । निम्न उदाहरण से यह प्रक्रिया स्पष्ट हो जायेगी -

उदाहरण (Illustration) 1.

निम्न आंकड़ों की सहायता से अर्द्ध मध्यक रीति द्वारा दीर्घकालीन प्रवृत्ति का अनुमान लगाइए :-

Year	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Production (in thousand mds)	80	80	92	83	85	93	92

Solution :

चूँकि सूचना सात वर्षो की दी गई है अत: वर्ष 2004 को छोडकर शेष को बराबर - बराबर बाँटेंगे :-

First Half		Second Half	
Year	Production	Year	Production

	(in 000' Quintals)		(in 000' Quintals)
2001	80	2005	85
2002	80	2006	93
2003	92	2007	92
	252		270

Arithmetic mean of the First Half $= \frac{252}{3}$ = 84

Arithmetic mean of the Second Half $= \frac{270}{3}$ = 90

इस प्रकार ग्राफ पेपर पर वर्ष 2002 में 84 तथा वर्ष 2006 में 90 पर उत्पादन स्तर अंकित करके उन्हें मिला दिया जाएगा ।

गुण (Merits)

अर्द्ध-माध्यों की रीति के मुख्य गुण निम्नलिखित हैं -

(1) यह रीति अन्य रीतियों की अपेक्षा सरल है ।

(2) इसमें न्यूनतम वर्ग रीति अथवा चल माध्य रीति की तुलना में गणना भी कम है ।

(3) यह एक उद्देश्यपूरक पद्धति है और इसके द्‌वारा निकाले गये निष्कर्ष सदा ही एक समान आते हैं ।

दोष (Demerits)

(1) चूँकि यह रीति समान्तर माध्य पर आधारित है अत: इसमें समान्तर माध्य के दोष पाये जाने स्वाभाविक हैं । यह बड़े मूल्यों से सहज ही प्रभावित हो जाता है अत: चक्रीय प्रभावों के कारण दोनों में से कोई भी माध्य बहुत बड़ा या छोटा हो सकता है ।

(2) यह रीति प्रांकित किये गये बिन्दुओं मे रेखीय सम्बन्ध मानकर चलती है जबकि वास्तव में ऐसा होना आवश्यक नहीं है ।

(3) पहली रीति की ही भाँति यह रीति भी दीर्घकालीन वृद्धि अथवा ह्रास या स्थिरता का कोई सन्तोषजनक माप प्रस्तुत नहीं करती ।

उपरोक्त दोषों के कारण ही इस रीति को अधिक प्रयोग में नहीं लाया जाता है ।

(स) **चल-माध्य रीति** (Method of Moving averages)

विधि के नाम के अनुसार ही इस विधि में विभिन्न वर्षों (दिन, घण्टे जैसा भी कालश्रेणी में समय की ईकाई हो) के लिये चल माध्य निकाले जाते हैं । यह चल-माध्य का समय कालश्रेणी में आये उच्चावचनों (fluctuations) के आधार पर तय किया जाता है । यदि श्रेणी में 3 अथवा 4 वर्ष का उच्चावचन काल है तब ऐसी दशा में 3 अथवा 4 वर्षीय चल-माध्य इन उच्चावचनो को श्रेणी से दूर कर देते हैं तथा प्राप्त संख्यायें श्रेणी की दीर्घकालीन उपनति (Secular Trend) को दर्शाते हैं । इस रीति के अनुसार यदि हमें 3 वर्षीय चल-माध्य निकालने हैं तब हम श्रेणी के प्रथम 3 वर्षों के

मूल्यों के योग को इनके मध्य अर्थात् दूसरे पद के सामने लिखते है । इसके पश्चात् दूसरे, तीसरे व चौथे पदों के योग को तीसरे के सामने लिखते हैं तथा इसी क्रिया को श्रेणी के सम्पूर्ण पदों के लिये क्रमश: दोहराते जाते हैं । तत्पश्चात् प्राप्त पदों के योगों को 3 से भाग देकर 3 वर्षीय चल-माध्य की गणना करते हैं जो श्रेणी की दीर्घकालीन उपनति को दर्शाते हैं । इस रीति के अनुसार हम किसी भी विषम संख्या (odd number) वाले चल-माध्य समय के लिये चल माध्यों की गणना कर सकते हैं ।

उदाहरण (Illustration) 2

निम्न समकों के आधार पर चल-माध्य रीति द्वारा तीन वर्षीय चल-माध्य मूल्य ज्ञात कीजिए ।

Year	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Population (millions)	412	438	446	454	470	483	490

Solution :

Table showing calculations of three yearly moving averages

Year (1)	Population Millions (2)	Three yearly Moving totals (3)	Three yearly moving averages (4)
2001	412		
2002	438 →	1296	1296/3=432
2003	446 →	1338	1338/3=446
2004	454 →	1370	1370/3=456.67
2005	470 →	1407	1407/3=469
2006	483 →	1443	1443/3=481
2007	490		

सम-संख्या वाले चल-माध्य समय के लिये चल-माध्यों की गणना करने में एक अतिरिक्त 2 वर्षीय चल-माध्य निकालना पड़ता है । उदाहरण के लिये यदि हम 4 वर्षीय चल-माध्य निकालना चाहें तब प्रथम चार श्रेणी मूल्यों के योग को दूसरे व तीसरे पद के मध्य रखते हैं, इसके बाद अगले चार पदों अर्थात्, दूसरे, तीसरे, चौथे व पाँचवें के योग को तीसरे व चौथे पदों के मध्य रखते हैं । इसी क्रिया को श्रेणी के सभी पदों के लिये दोहरा कर हमें 4 वर्षीय चल-योग प्राप्त होते हैं । इन योगों को 4 से भाग कर 4 वर्षीय चल-माध्य की गणना करते हैं । परन्तु ये चल-माध्य कालश्रेणी के पदों के ठीक सामने नहीं होते हैं अत: इनका केन्द्रीकरण आवश्यक हो जाता है जो इन प्राप्त 4 वर्षीय चल-माध्यो के 2 वर्षीय चल- माध्य गणना करने पर प्राप्त होता है । इस प्रकार सम संख्या वाले चल-माध्यों की गणना करने में केन्द्रीकरण (centred) करने

हेतु 2 वर्षीय चल-माध्य निकालने आवश्यक होते हैं । उपर्युक्त रीति निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट की गयी है -

उदाहरण (Illustration)

निम्न समंकों के आधार पर चार वर्षीय चल-माध्य रीति द्वारा औसत मूल्य ज्ञात कीजिए:-

Year	Tonnage of goods Carried	Year	Tonnage of goods Carried
1996	2204	2002	2904
1997	2500	2003	3098
1998	2360	2004	3172
1999	2680	2005	2952
2000	2424	2006	3248
2001	2634	2007	3172

Solution :

Total showing calculations of 4 yearly moving average :

Year (1)	Tonnage (2)	for yearly moving total (3)	Four yearly Moving total (4)=(3)÷4	2 yearly Moving total Of Column	For yearly Moving average Centered (5)
1996	2204	-	-	-	-
1997	2500	-	-	-	-
	→	9744	2436.0		
1998	2360		→	4927.0 →	2463.50
	→	9964	2491.0		
1999	2680		→	501505 →	2507.75
	→	10098	2524.5		
2000	2424		→	5185.0 →	2592.50
	→	10642	2660.5		
2001	2634		→	5425.5 →	2712.75
	→	11060	2765.0		
2002	2904		→	5717.0 →	2858.50

	→	11808	2952.0		
2003	3098		→	5983.5 →	1991.75
	→	12126	3031.5		
2004	3172		→	6149.0 →	3074.50
	→	12470	3117.5		
2005	2952		→	6253.5 →	3126.75
	→	12544	3136.0	-	-
2006	3248	-	-	-	-
2007	3172	-	-		

चल माध्य रीति के लाभ (गुण) (Merits of Moving Average Method) :

इस रीति के मुख्य गुण निम्नलिखित हैं -

(1) यह रीति एक सरल रीति है क्योंकि चल माध्यों की गणना करना कोई कठिन काम नहीं होता ।

(2) यह रीति मुक्तहस्त-वक्ररीति की अपेक्षा अधिक शुद्ध परिणाम देती है ।

(3) जब कालश्रेणी एक निश्चित और नियमित चक्रीय उच्चावचनों को प्रकट करती हो तो उस समय तो यह पद्धति ही सबसे अधिक उपयुक्त है ।

(4) चल माध्य निकालने के लिये आवश्यकतानुसार वर्षों का चुनाव किया जा सकता है ।

(5) यह एक लोचपूर्ण पद्धति भी है । यदि कुछ सांख्यिकीय सामग्री अगले वर्षों के लिये जोड़नी हो तो बिना पिछली गणना को प्रभावित किये ही नये वर्षों के उपनति मूल्य निकाले जा सकते हैं ।

(6) यह एक पक्षपात रहित और उद्देश्यपरक विधि है ।

(7) चल माध्य रीति के दोष या अवगुण (Demerits of Moving Average Method)

इस रीति में निम्न दोष भी हैं -

(1) चल माध्यों के मूल्य केवल केन्द्रीय प्रवृत्ति को ही दिखाते हैं और वक्र के उतार-चढ़ाव पर कोई प्रकाश नहीं डालते ।

(2) यदि श्रेणी में आवर्तिता स्पष्ट रूप से प्रतीत न हो तो इस रीति का निश्चिततापूर्वक प्रयोग नहीं किया जा सकता ।

(3) इसमें सभी वर्षों के लिये माध्य मूल्यों की गणना नहीं होती है जैसे 5 वर्षीय चल माध्य में पहले दो और अन्तिम दो वर्षों के चल माध्य नहीं निकाले जाते । इसी प्रकार 7 वर्षीय चल माध्य लेने पर पहले 3 और अन्तिम 3 वर्ष छूट जाते हैं ।

(4) आवर्तिता निश्चित करते समय सांख्यिक अपने निर्णय का प्रयोग करते है जिससे परिणाम में व्यक्तिगत विभ्रम उत्पन्न होने की पूरी सम्भावना बनी रहती है ।

(5) चल माध्य कितने वर्षों का लिया जाये, यह निश्चित करने का कोई निश्चित नियम न होने के कारण यह पद्धति अधिक विश्वसनीय प्रतीत नहीं होती ।

चल माध्य रीति की उपयुक्तता (Suitability of Moving Average Method)

चल माध्य रीति के लाभ-हानियों का तुलनात्मक विश्लेषण करने पर हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि यह रीति तभी उपयुक्त है जबकि - (1) कालश्रेणियों में अवधि आवर्तिता तथा पद-मूल्यों में उतार-चढाव स्पष्ट हों, (2) कालश्रेणी के मूल्य एक रेखीय प्रवृत्ति को स्पष्ट करते हों, (3) जब विश्लेषण का उद्देश्य वर्तमान प्रवृत्ति का विश्लेषण करना या भावी उपनति मूल्यों की गणना करना न हो तथा केवल दीर्घकालीन उपनति की दिशा ही ज्ञात करनी हो । यदि भावी मूल्यों की गणना करनी हो या औसत वार्षिक वृद्धि अथवा ह्रास दर ज्ञात करनी हो तो सांख्यिक को न्यूनतम वर्ग रीति का ही प्रयोग करना चाहिये क्योंकि वही एकमात्र ऐसी रीति है जो ऐसे मूल्य प्रदान करती है ।

(द) न्यूनतम वर्ग-रीति (Method of Least Squares)

दीर्घकालीन प्रवृत्ति की गणना करने की यह सबसे अधिक विश्वसनीय गणितीय विधि है। यह एक सरल रेखा (straight line) या परवलयिक वक्र (parabolic curve) हो सकती है । इस रेखा के मूल्य न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा निकाले जाते हैं । इस विधि में न्यूनतम वर्ग मूल्य दो रीतियों से ज्ञात किये जा सकते हैं । पहले हम सरल रेखा विधि का प्रयोग समझायेंगे तथा बाद में परवलयिक वक्र रीति का विश्लेषण करेंगे ।

(i) सरल रेखा के आसंजन की गणितीय विधि (Mathematical Method of fitting a linear line)

इस विधि के अनुसार हम कालश्रेणी में समय को t तथा संगत श्रेणी-मूल्यों को y से प्रदर्शित करते हैं । इसके पश्चात् कालश्रेणी में दीर्घकालीन उपनति को हम एक सुष्ठुतम आसंजन सरल रेखा (The straight line of best fit) जिसका स्वरूप -

$$y = a + bt \qquad .....(1)$$

के द्वारा प्रदर्शित करते हैं । सरल रेखा (1) में आये a तथा b अज्ञात प्राचलों का मान हम न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा प्राप्त निम्न युगपत समीकरणों को हल करने पर ज्ञात कर लेते है-

प्रसामान्य समीकरण -

$$\sum y = na + b\sum t \qquad ....(i)$$

$$\sum ty = a\sum t + b\sum t^2 \qquad .....(ii)$$

यहाँ श्रेणी n में पद मूल्यों की संख्या है तथा $\sum y, \sum t, \sum ty$ तथा $\sum t^2$ को कालश्रेणी के दिये मूल्यों द्वारा ज्ञात किया जा सकता है ।

यहाँ, इस विधि में, यह उल्लेखनीय है कि यदि हम उचित विचलनों द्वारा $\sum t$ के मूल्य को शून्य (0) कर सकें तब a तथा b का मान बहुत ही सरल विधि से निम्न सूत्रों से प्राप्त कर लेते हैं-

$a = \frac{\sum y}{n}$ तथा $b = \frac{\sum ty}{\sum t^2}$

अन्यथा ये मूल्य समीकरण (i) व (ii) को हल करने पर प्राप्त होते हैं । इस प्रकार दीर्घकालीन प्रवृति अथवा उपनति सरल रेखा y = a + bt द्‌वारा प्रदर्शित हो जाती है । अब विभिन्न दिये समय मूल्यों (t) के लिये हम दीर्घकालीन उपनति y की गणना कर लेते हैं । निम्न उदाहरणों में इसको स्पष्ट किया गया है-

उदाहरण (Illustration) 4

निम्न समंकों से न्यूनतम वर्ग रीति द्‌वारा उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए ।

Year	2003	2004	2005	2006	2007
Profits (in thousand Rs)	4	7	3	6	8

Solution :

Table showing calculations of trend values :

Years (t)	Profits (y)	Time deviation from 2005 (t)	t^2	ty	Trend values y = a + bt
2003	4	-2	4	-8	5.6+(+.7x-2)=4.2
2004	7	-1	1	-7	5.6+(+.7x-1)=4.9
2005	3	0	0	0	5.6+(+.7x0)=5.6
2006	6	1	1	6	5.6+(.7x1)=6.3
2007	8	2	4	16	5.6+(.7x2)=7.0
N = 5	$\sum y$ =28	$\sum t$ = 0	$\sum t^2$ = 10	$\sum ty$ = 7	$\sum y_c$ = 28

$a = \frac{\sum y}{n} = \frac{28}{5}$ = 5.6

(Annual growth rate) $b = \frac{\sum ty}{\sum t^2} = \frac{7}{10}$ = 0.7

उदाहरण (Illustration)

एक चीनी कम्पनी द्‌वारा गत सात वर्षों में किया गया उत्पादन निम्न हैं :

(1) इन समकों के आधार पर न्यूनतम वर्ग रीति द्‌वारा उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए ।

(2) कम्पनी द्‌वारा उत्पादन में मासिक वृद्धि क्या होगी ?

Year	2000	2002	2003	2004	2005	2006	2009
Production)in '000 mds)	77	88	94	85	91	98	90

Solution :

(i) इस प्रश्न में वर्ष समान रूप से नहीं दिये हुए हैं अत: कालिक विचलन लेने पर $\sum t =$ 0 नहीं आयेगा । अत: हमें यहाँ a तथा b का मान निकालने के लिये दूसरी विधि (normal equations method) व्यवहार में लानी पड़ेगी जो इस प्रकार हैं -

$\sum y = Na + b\sum t$ -----(i)

$\sum ty = a\sum t + b\sum t^2$ ----(ii)

अगली क्रिया से इनका स्पष्टीकरण हो जायेगा ।

Years	Production (y)	Time deviation From 2004 (t)	t^2	ty	Trend values y = a + bt
2000	77	-4	16	-308	83.283
2002	88	-2	4	-176	86.043
2003	94	-1	1	-94	87.423
2004	85	0	0	0	88.803
2005	91	1	1	91	93.183
2006	98	2	4	196	91.563
2009	90	5	25	450	95.703
n = 7	$\sum y =$ 623	$\sum t =$ 1	$\sum t^2 =$ 51	$\sum ty =$ 159	$\sum y_c =$ 623

a तथा b का मान निकालने के लिये हमें उपरोक्त दो समीकरणों को हल करना होगा ।

समीकरण (i) तथा (ii) में मान रखने पर,

623 = 7a + b … … (i)

159 = a + 51b … … (ii)

दूसरी समीकरण को 7 से गुणा करने पर

1113 = 7a + 357b … … (iii)

पहली समीकरण को तीसरी में से घटाने पर

490 = 356b

$\frac{490}{356} = b$

1.38 = b

पहली समीकरण में b का मूल्य रखने पर

623 = 7a + (1.38)

7a = 623 - 1.38

7a = 621.62

a = 88.803

(ii) The yearly increase in respective month in the production of sugar is-

$\frac{b}{12}$,i.e. $\frac{1.38}{12} = 0.115$ thousand mds.

(However, in adjascent month the increase will be b/144)

(ii) द्वि-धातीय परवलयिक वक्र के आसंजन की गणितीय विधि (Mathematical Method of fitting a second degree parabola)

इस विधि के अनुसार प्रस्तुत श्रेणी की दीर्घकालीन उपनति को द्विघातीय परवलय वक्र

$$y = a + bt + ct^2 \qquad \ldots \ldots (2)$$

के द्वारा प्रदर्शित करते हैं । यहाँ a, b तथा c प्राचलों के मान न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्राप्त निम्न प्रसामान्य समीकरणों के आधार पर ज्ञात करते हैं -

द्विघातीय परवलय वक्र के लिये प्रसामान्य समीकरणें -

$$\sum y = na + b\sum t + c\sum t^2 \qquad \ldots\ldots(i)$$

$$\sum ty = a\sum t + b\sum t^2 + c\sum t^3 \qquad \ldots \ldots (ii)$$

$$\sum t^2 y = a\sum t^2 + b\sum t^3 + c\sum t^4 \qquad \ldots \ldots (iii)$$

$\sum y, \sum t, \sum t^2, \sum t^3, \sum t^4, \sum ty,$ तथा $\sum t^2 y$ मूल्य कालश्रेणी के आधार पर निकाले जाते हैं ।

तत्पश्चात् आसंजित समीकरण (2) में t के दिये मूल्य रखकर दीर्घकालीन उपनति मूल्य (y) निकाल लिये जाते हैं । निम्न उदाहरण इस क्रिया को स्पष्ट करता है -

उदाहरण (Illustration) 6

निम्न समंकों के आधार पर एक द्विघात परवलय उपनति का आसंजन करिए तथा वर्ष 2009 के लिए उपनति का अनुमान भी लगाइए :

Year	2003	2004	2005	2006	2007
Profit (in 000, Rs)	10	12	13	10	8

Solution :

Table showing calculations

Year x	Profit y	Deviation from 2005 t = (x-2005)	t^2	t^3	t^4	ty	t^2y
2003	10	-2	4	-8	16	-20	40
2004	12	-1	1	-1	1	-12	12
2005	13	0	0	0	0	0	0
2006	10	1	1	+1	1	10	10
2007	08	2	4	+8	16	16	32

	53= $\sum y$	0 = $\sum t$	10= $\sum t^2$	$\sum t^3$ =0	34= $\sum t^4$	-6= $\sum ty$	94= $\sum t^2 y$

Now, the normal equations are -

$$\sum y = na + b\sum t + c\sum t^2$$
$$\sum ty = a\sum t + b\sum t^2 + c\sum t^3$$
$$\sum t^2 y = a\sum t^2 + b\sum t^3 + c\sum t^4$$

Putting the values from table, we get

53 = 5a + 0 + 10c ... ... (i)

-6 = 0 + 10b + 0 ... ... (ii)

94 = 10a + 0 + 34c ... ... (iii)

From (ii), $b = \frac{-6}{10}$ = -0.6

From (iii),Solving (i) and (iii), we have

a = 12.314

c = -0.857

Thus, the fitted second degree parabola is

y = 12.314 -.6t - 0.857t^2

The trend value for 2009 i.e., t = (2009-2005) = 4 is

y = 12.314 -.6 x 4 - 0.857 x 16

= -3.798 (thousand rupees)

Hence the loss will be Rs. 3798 for the year 2009.

न्यूनतम वर्ग रीति के गुण-दोष (Merits and Demerits of the Method of Least Squares)

न्यूनतम वर्ग रीति के मुख्य गुण निम्नलिखित हैं -

(1) यह दीर्घकालीन प्रवृत्ति मापन की एक श्रेष्ठ व सरल रीति है ।

(2) यह रीति व्यक्तिगत पक्षपात से मुक्त है और इसके आधार पर ज्ञात प्रवृत्ति मूल्य अधिक शुद्ध और उपयुक्त होते हैं ।

(3) इस रीति की सहायता से आगे के वर्षों के लिये भी सम्भावित मूल्य ज्ञात किये जा सकते हैं ।

लेकिन न्यूनतम वर्ग रीति में निम्नलिखित दोष भी हैं -

(1) यह रीति गणना करने में अपेक्षाकृत जटिल है ।

(2) इस रीति में लोच नहीं है । यदि मूल समंकों में एक भी मूल्य में परिवर्तन कर दिया जाये तो प्रवृत्ति समीकरण ही बदल जाता है ।

उपर्युक्त दोष होते हुए भी दीर्घकालीन उपनति ज्ञात करने के लिये न्यूनतम वर्ग रीति ही सबसे श्रेष्ठ और उपयुक्त रीति है । अत: इसी का प्रयोग व्यापक रूप में किया जाता है ।

II. अल्पकालीन उच्चावचनों का मापन (Measurement of Short Time Oscillations)

कालश्रेणियों पर दीर्घकालीन प्रवृत्ति और अल्पकालीन उच्चावचनों दोनों का ही सम्मिलित प्रभाव पड़ता है ।

अत: जहाँ हम दीर्घकालीन प्रवृत्ति का अध्ययन करते हैं वहीं हमें उसके अल्पकालीन उच्चावचनों का भी अध्ययन करना चाहिये । एक सांख्यिकीय कालश्रेणी में तीन प्रकार के अल्पकालीन उच्चावचनों का अध्ययन किया जाता है : आर्त्तव या मौसमी विचरण; चक्रीय उच्चावचन तथा दैव या अनियमित उच्चावचन । अब हम इन तीनों का क्रमश: अध्ययन करेंगे ।

(अ)मौसमी विचरणों का मापन (Measurement of Seasonal Variations)

दीर्घकालिक उपनति ऊपर अथवा नीचे की ओर जाने वाली प्रवृत्ति को दर्शाती है, परन्तु कालश्रेणी अल्पकालीन उच्चावचनों से भी प्रभावित होती है । आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्रों में बहुत से तत्व ऐसे होते हैं जिनके समंकों में काल-श्रेणी बनाये जाने पर वे मौसम विचरण प्रदर्शित करते हैं । ये मौसमी विचरण नियमित होते हैं तथा एक वर्ष के अन्दर ही इनमें उच्चावचन होता है । अत: व्यवसायी वर्ग के लिये दीर्घकालीन प्रवृत्ति का विश्लेषण ही नहीं अपितु इन मौसमी विचरणों का मापन भी महत्वपूर्ण होता है । इनके अध्ययन से वह अपनी व्यावसायिक क्रियाओं का श्रेष्ठ अल्पकालीन नियोजन कर सकता है । ऐसी परिस्थितियों में मौसमी परिवर्तनों का अध्ययन उपयोगी होता है ।

मौसमी विचरणों के माप की विधियाँ (Methods of studying seasonal variations) - मौसमी विचरणों के मापने की निम्नलिखित मुख्य रीतियाँ हैं -

(1) आर्त्तव माध्य रीति अथवा आर्त्तव विचरण निर्देशांक रीति

(2) चल माध्य अनुपात रीति

(3) श्रृंखला मूल्यानुपात रीति

(4) प्रवृत्ति अनुपात रीति

(1) आर्त्तव माध्य रीति अथवा आर्त्तव विचरण निर्देशांक (Seasonal Average Method or Seasonal Variation Index Method) - आर्त्तव या मौसमी विचरण मापने की यह सबसे सरल और उपयुक्त विधि है । इसमें सरल समान्तर माध्य की सहायता से मौसमी परिवर्तनों का अनुमान लगाया जाता है । यह रीति वहाँ के लिये अधिक उपयुक्त है जहाँ पर समंकों में कोई महत्वपूर्ण चक्रीय परिवर्तन (उच्चावचन) न हो रहा हो । इस रीति की विधि संक्षेप में निम्न प्रकार है -

(i) विभिन्न वर्षों में प्रत्येक माह के मूल्यों को एक पंक्ति में लिखकर इनका सरल माध्य निकालते हैं ।

(ii) फिर पूरे समय के लिये इन माध्यों का माध्य निकालते हैं ।

(iii) इस पूरे समय के लिये प्राप्त माध्य (grand average) आधार पर प्रत्येक माह के माध्य को प्रतिशत में बदलते हैं । अर्थात्

$$\frac{\text{विशिष्ट महीने का माध्य}}{\text{मासिक माध्यकों का माध्य}}$$

ये प्रतिशत ही आर्त्तव विचरण निर्देशांक होते हैं ।

अग्रांकित उदाहरण क्रियाओं को स्पष्ट करते हैं -

उदाहरण (Illustration) 7

निम्न खाद्यान्न उत्पादन आंकड़ों के आधार पर आवर्त विचरण की गणना कीजिए :

Problem						Solution		
	Years					Total for 5 years	5 yearly Average	Seasonal Indices
Month	2003	2004	2005	2006	2007			
Jan.	60	58	32	30	20	200	50	142.9
Feb.	70	65	18	12	15	180	36	128.6
March	60	50	10	35	15	160	32	114.3
April	50	45	35	25	15	170	34	121.4
May	40	36	30	12	22	140	28	100.0
June	35	15	30	20	10	110	22	78.6
July	20	16	24	27	13	100	20	71.4
Aug.	36	14	28	12	10	100	20	71.4
Sept.	45	10	25	26	14	120	24	85.7
Oct.	30	37	23	25	15	130	26	92.9
Nov.	66	14	30	28	12	150	30	107.1
Dec.	40	22	26	22	10	120	24	85.7
					Total	1680	360	1200
					Average	140	28	100

(3) चल माध्य अनुपात रीति (Ratio-to-Moving Average Method) - यह रीति भी पहली रीति के समान है लेकिन इसमें अन्तर केवल यह है कि इसमें सरल समान्तर माध्य के स्थान पर चल माध्यों की गणना की जाती है । ये चल माध्य 12 मासिक निकाले जाते हैं ।

इस रीति से आर्त्तव निर्देशांक बनाने की विधि निम्नलिखित हैं -

1. सर्वप्रथम, मूल्यों का 12 मासिक चल माध्य निकाला जाता है ।
2. प्रत्येक मूल्य को तत्सम्बन्धी चल माध्य की प्रतिशत में प्रदर्शित किया जाता है ।
3. इस प्रकार प्राप्त प्रतिशतों को विन्यसित कर प्रत्येक माह के लिये मासिक माध्य ज्ञात किया जाता है।
4. इन मासिक माध्यों का भी माध्य ज्ञात करते हैं ।

5. मासिक माध्यों अर्थात् तीसरे क्रम में प्राप्त माध्यों को चौथे क्रम में प्राप्त माध्य (मासिक माध्यों का माध्य) को आधार मानकर प्रतिशत अनुपात के रूप में रखते हैं । यही आर्वत निर्देशांक है ।

(1) श्रृंखला मूल्यानुपात रीति (Chain or Link Relatives Method) - मौसमी विचरण निकालने के लिये यह भी एक उत्तम रीति है । इसके अन्तर्गत निम्न प्रक्रिया पूरी करनी होती है -

1. सबसे पहले पिछले मास के अंकों के आधार पर प्रत्येक मास के मूल्यानुपात निकाल लिये जाते हैं । ये श्रृंखला मूल्यानुपात (Link Relatives) कहलाते हैं ।

2. इसके बाद इन मूल्यानुपातों का सरल समान्तर माध्य (a) निकालते हैं ।

3. प्रथम माह के समान्तर माध्य (a) को आधार $(base = p_0)$ मानकर इन माध्यों के श्रृंखलानुपात (chain relatives) निकालते हैं । इस विधि में पहले माह का निर्देशांक तो 100 मान लिया जायेगा और प्रत्येक चालू माह का श्रृंखला निर्देशांक अग्रांकित सूत्र से निश्चित किया जायेगा-

$$\frac{\text{चालू माह का श्रृंखला मूल्यानुपात} \times \text{पिछले माह का श्रृंखलानुपात}}{100}$$

4. इसके बाद अन्तिम माह श्रृंखलानुपात को 100 मानकर प्रथम माह के मूल्य के लिये भी श्रृंखलानुपात निकालेंगे । इस प्रक्रिया से निकाला हुआ श्रृंखलानुपात पहले माने गये निर्देशांक (अर्थात् 100) से भिन्न होगा । इस भिन्नता का कारण है दीर्घकालीन परिवर्तन । इसीलिये इसे संशोधित किया जायेगा । इसके संशोधन के लिये अन्तर को समयावधियों की संख्या से भाग देते हैं और भजनफल को 1 से गुणा करके द्वितीय समयावधि के श्रृंखलाबद्ध निर्देशांक में से, और 2 से गुणा करके तीसरी समयावधि के श्रृंखलाबद्ध निर्देशांक में से तथा 3 से गुणा करके चौथी समयावधि के श्रृंखलाबद्ध निर्देशांक में से घटा देते हैं । इस प्रकार संशोधित श्रृंखलाबद्ध निर्देशांक प्राप्त हो जाते हैं।

5. इसके बाद इन संशोधित निर्देशांकों का माध्य ज्ञात करते हैं और उस माध्य की तुलना में निर्देशांकों को आर्त्तव निर्देशांकों में बदल लेते हैं ।

निम्न उदाहरण से यह प्रक्रिया पूरी तरह स्पष्ट हो जायेगी -

उदाहरण (Illustration) 8

निम्न समंकों के आधार पर श्रृंखला मूल्यानुपातों की सहायता से आवर्त निर्देशाकों की गणना कीजिए:

Years	I Quarter	II Quarter	III Quarter	IV Quarter
2002	45	54	72	60
2003	48	56	63	56
2004	49	63	70	65
2005	52	65	75	72
2006	60	70	84	77

Solution :

Link Relatives

Years	I Quarter	II Quarter	III Quarter	IV Quarter
2002	-	120	133	83
2003	80	117	113	89
2004	88	129	111	92
2005	80	125	115	96
2006	83	117	120	79
Total of Link Relatives	331	608	592	439
Averages of Link Relatives	82.8	121.6	118.4	87.8
Chain Relatives	100	$\frac{100\times121.6}{100}$ =121.16	$\frac{121.6\times118.4}{100}$ =144.0	$\frac{144.0\times87.8}{100}$ =126.5
Corrected[1] Chain Relatives	100	121.6-1.2 =120.4	144.0-2.4 = 141.6	126.5-3.5 = 123.0
Seasonal Indices	82.5	99.4	116.8	101.4

टिप्पणी- (1) संशोधित श्रृंखला निर्देशांक निम्न रीति से ज्ञात किये गये हैं।

पहले त्रैमास का अनुपात अन्तिम त्रैमास के आधार पर =100 माना गया है किन्तु समंकों के ज्ञात करने पर $=\frac{126.5\times82.8}{100}$ = 104.7 है ।

$\therefore$ अन्तर = 104.7 - 100.0 = 4.7

अन्तर प्रति त्रैमास = $4.7\div4$ =1.2 Approx.

(2) आर्त्तव निर्देशांक ज्ञात करने के लिये प्रथम संशोधित श्रृंखलानुपातों का माध्य ज्ञात करना होता है

$$\frac{100+120.4+141.6+123.6}{4} = 121.25$$

इस माध्य से संशोधित श्रृंखलाबद्ध अनुपातों को भाग देकर भजनफल में 100 से गुणा कर आर्त्तव निर्देशांक ज्ञात होता है यथा पहले त्रैमास का

$$=\frac{100\times100}{121.25} = 82.5$$

इसी प्रकार, दूसरे त्रैमास के लिये $= \frac{120.4 \times 100}{121.25}$ = 99.4

इसी प्रकार, तीसरे त्रैमास के लिये $= \frac{141.6 \times 100}{121.25}$ = 116.8

इसी प्रकार, चौथे त्रैमास के लिये $= \frac{123 \times 100}{121.25}$ = 101.4

(2) **प्रवृत्ति अनुपात रीति (Ratio to Trend Method)** - यह रीति प्रवृत्ति को अधिक महत्व देती है । इसमें मौसमी विचरणों की गणना इस प्रकार की जाती है -

(i) न्यूनतम वर्ग आधार पर ऋतुकालिक समयावधि के लिए दीर्घकालीन उपनति ज्ञात की जाती है । इस कार्य के लिये प्रत्येक वर्ष के ऋतुकालिक समयावधि का समान्तर माध्य निकालकर वार्षिक-प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात करने के लिए समीकरण का प्रयोग कर वार्षिक वृद्धि पर निकाली जाती है । वार्षिक वृद्धि दर को ऋतु की संख्या से भाग देकर ऋतुकालिक वृद्धि दर निकालते हैं । अगर ऋतु संख्या युग्म हैं तो प्रथम वर्ष के प्रवृत्ति मूल्य में से ऋतुकालिक दर का आधा घटाकर व जोड़कर क्रमशः प्रथम वर्ष में मध्य से पूर्व और बाद की ऋतुओं के प्रवृत्ति मूल्य ज्ञात करते हैं तथा त्रैमासिक समंकों की अवस्था में त्रैमासिक वृद्धि दर का आधा घटाकर दूसरे त्रैमास के और जोड़कर तीसरे त्रैमास की उपनति मूल्य ज्ञात होगी । तत्पश्चात् इसी दर के आधार पर सभी अवधियों में प्रवृत्ति समंक प्राप्त किये जाते हैं ।

(ii) सभी समयावधियों के प्रत्येक मूल्य समंक को तत्सम्बन्धी ऋतु के प्रवृति मूल्य से भाग देकर तथा भजनफल को 100 से गुणा करके (O/T x 100) प्रवृत्ति अनुपात ज्ञात करते हैं ।

(iii) सभी वर्षों के प्रवृत्ति अनुपातों का प्रत्येक ऋतुकालिक अवधि के लिये समान्तर माध्य निकालते हैं ।

(iv) विभिन्न ऋतुओं के प्रवृत्ति अनुपातों को आर्त्तव निर्देशांकों में बदलते हैं । इस हेतु सभी ऋतुकालिक प्रवृत्ति अनुपात माध्यों को जोड़कर उनके समान्तर माध्य की तुलना में प्रवृत्ति अनुपातों को प्रतिशत में बदलते हैं । ये निर्देशांक ही आर्त्तव विचरण निर्देशांक होते हैं ।

(v) प्रत्येक ऋतु के प्रवृत्ति-अनुपातों में से तत्सम्बन्धी आर्त्तव विचरण निर्देशांकों को घटा देने से चक्रीय उच्चावचन और अनियमित उच्चावचन शेष रह जाते हैं ।

(ब) चक्रीय उच्चावचन (Cyclical Fluctuations)

चक्रीय उच्चावचन भी अल्पकालीन उच्चावचनों की एक महत्वपूर्ण किस्म है । प्रायः आर्थिक क्षेत्रों में ऐसे परिवर्तन (चक्रीय उच्चावचन) पाये जाते हैं इन उच्चावचनों का समय प्रायः 1 वर्ष से अधिक होता है । इनमें मौसमी परिवर्तनों की अपेक्षा अधिक नियमितता पायी जाती है । आर्थिक क्षेत्रों में होने वाले चक्रीय उच्चावचनों में हमें चार प्रकार के चक्र देखने को मिलते हैं, सर्वप्रथम समृद्धि, उसके बाद ह्रास, फिर अवसाद

और सबसे अन्त में पुनरोद्धार । प्राय: 5 या 7 वर्ष में और कुछ क्षेत्रों में 10-12 वर्षों में एक चक्र पूरा होता है ।

चक्रीय उच्चावचनों के मापन की रीतियाँ (Measurement of Cyclical Fluctuations)- क्राक्संटन एवं काउडेन ने चक्रीय उच्चावचनों को मापने की निम्न चार विधियों का वर्णन किया हैं -

(1) **प्रत्यक्ष रीति (Direct Method) -** इस रीति के जन्मदाता भी एम.ए. ब्रूमवाह (M.A. Brumbaugh) हैं । इसमें अंकों को ग्राफ पर अंकित करके वक्र की प्रत्येक रेखा की इसके पहले तथा बाद की रेखा से तुलना की जाती है । प्रत्येक महीने के समंक पिछले वर्ष के उसी महीने के प्रतिशत के रूप में लिखे जाते हैं । इस प्रकार इस रीति में मोटे ढंग पर आर्त्तव विचरण और दीर्घकालीन प्रवृत्ति के प्रभाव को दूर कर दिया जाता है, परन्तु यह सन्तोषजनक विधि नहीं हैं ।

(2) **अवशेष रीति (Residual Method) -** इस रीति में पहले मूल समंकों के प्रवृत्ति मूल्य और आर्त्तव विचरण निर्देशांक निकाले जाते हैं ओर फिर चल मूल्यों को आर्त्तव-वितरण निर्देशांकों से भाग देकर और 100 से गुणा करके श्रेणी में से आर्त्तव उच्चावचनों को अलग कर देते हैं । इस प्रकार श्रेणी में से दीर्घकालीन प्रवृति तथा मौसमी प्रभावों को अलग करके जो प्रभाव रह जाते हैं वे ही चक्रीय उच्चवचन होते हैं । चक्रीय उच्चावचनों के अध्ययन करने की यह सर्वश्रेष्ठ रीति है अत: इसी का प्रयोग अधिकांश विद्वान करते हैं ।

(3) **हरात्मक विश्लेषण रीति (Harmonic Analysis Method) -** इस विधि में पहले तो श्रेणी के अंकों की आवर्तिता (periodicity) तथा चक्रीय प्रवृत्ति ज्ञात की जाती है । फिर उनका एक आवर्तिता चित्र (periodogram) बनाकर ज्या -कोज्या (sine - cosine) या ऐसे ही किसी समान वक्र की सहायता से अनियमित प्रभावों को दूर किया जाता है । यह रीति उसी परिस्थिति में लागू हो सकती है जबकि चक्रीय परिवर्तनों की आवर्तिता (periodicity) समान और उनका विस्तार भी समान हो ।

(4) चक्रीय माध्य रीति (Cyclical Average Method) - इस रीति के अनुसार पहले तो मूल समंकों के चक्रीय माध्य निकाले जाते हैं । इसके बाद समंकों में से मौसमी प्रभावों को निकाल दिया जाता है और फिर निश्चित तथा सम्बन्धित चक्रों के समंकों द्वारा माध्यों की गणना की जाती है । ये माध्य ही उच्चावचनों को प्रकट करते हैं ।

III. अनियमित उच्चावचन (Random or Irregular Fluctuations)

कुछ आर्थिक क्षेत्रों में अनियमित परिवर्तन भी पाये जाते हैं । ये परिवर्तन बिना किसी क्रम या नियम के अनुसार होते हैं । इनकी अनियमितता के कारण इन परिवर्तनों की दिशा तथा मात्रा के बारे में अनुमान लगाना बिल्कुल ही असम्भव होता है । कब, किस दिशा में तथा किस मात्रा में परिवर्तन होगा यह पता चलाना बहुत कठिन है । जैसा कि इनके नाम से ही आभास होता है ये उच्चावचन अनियमित कारकों के कारण होते हैं उदाहरणत: भूकम्प, बाढ़, युद्ध आदि । अत: प्राय: इनका अध्ययन नहीं किया जाता,

लेकिन इसका अर्थ यह कदापि नहीं है कि ये महत्वहीन हैं । केवल कहने का अभिप्राय यही है कि उच्चावचनों की अनियमितता के कारण इनका वैज्ञानिक अध्ययन होना कठिन है ।

इनके अध्ययन की एक रीति यह है कि यदि अल्पकालीन उच्चावचनों में से आर्त्तव विचरण (seasonal variations) तथा नियमित उच्चावचनों को निकाल दिया जाये तो शेष बचे मूल्य अनियमित उच्चावचनों को प्रकट करेंगे ।

12.5 सारांश

जब समय पर आधारित तथ्यों को संख्यात्मक रूप में व्यवस्थित ढंग से प्रस्तुत किया जाता है तो उन्हें कालश्रेणी के नाम से जाना जाता है । इसमें एक चर समय से सम्बन्धित होता है, जिसे स्वतंत्र चर कहते है। यह समय की छोटी से छोटी इकाई से लेकर बड़ी इकाई तक हो सकता है। श्रेणी का दूसरा चर आश्रित चर होता है, जो कि अध्ययनकर्ता की आवश्यकतानुसार हो सकता है । इस प्रकार एक कालश्रेणी ऐसे सांख्यिकीय समंकों का समूह है, जिन्हें काल क्रमानुसार संग्रहित एवं अभिलेखित किया जाता है । कालश्रेणी का महत्व केवल अर्थशास्त्रियों अथवा व्यापारियों तक ही सीमित नहीं है, अपितु वैज्ञानिक, समाजशास्त्री, जीव विज्ञानवेत्ता के लिए भी है ।

12.6 शब्दावली

1. **कालश्रेणी** - सांख्यिकीय तथ्यों का कालक्रम में व्यवस्थित ढंग से प्रस्तुतीकरण ही कालश्रेणी कहलाता है।
2. **कालश्रेणी विश्लेषण** - सांख्यिकीय तथ्यों में परिवर्तन को समझना, निर्वचन करना तथा उनका मूल्यांकन इस आशय से करना है जिससे भविष्य की घटनाओं का यथोचित पूर्वानुमान किया जा सके ।
3. **दीर्घकालीन उपनति -** कालश्रेणी की दीर्घकालीन उपनति एक निष्कोण घटक है जो कि बढ़ी हुई समयावधि में कालश्रेणी में सामान्य दीर्घकालीन विकास या अवनति को प्रदर्शित करती है ।
4. **चक्रीय परिवर्तन के चार चरण -** (1) समृद्धि (2) प्रतिसार (3) अवसाद तथा (4) पुनरूत्थान।
5. **न्यूनतम वर्ग रीति** - इस रीति में वास्तविक मूल्यों (y) तथा उपनति मूल्यों (yc) के विचलनों का योग शून्य होता है ।

12.7 स्वपरख प्रश्न

1. कालश्रेणी क्या होती है ? उसका विश्लेषण क्यों किया जाता है ?
2. "काल-श्रेणियों का विश्लेषण किसी समय विशेष की अवधि से होने वाले विभिन्न परिवर्तनों के विवेचन तथा मापन को समाविष्ट करता है । "
   उपर्युक्त कथन की व्याख्या कीजिये तथा इन परिवर्तनों का वर्गीकरण कीजिये ।
3. एक कालश्रेणी में आप न्यूनतम वर्ग रीति का निर्धारण किस प्रकार करेंगें ?

4. कालश्रेणियों के विश्लेषण ' से आप क्या समझते हैं? इसके संघटक कौन-कौन से हैं ?

5. काल माला किसे कहते हैं ? उसमें कौन-कौन से प्रमुख संघटक होते हैं ?

6. उपनति ' से क्या आशय है ? किसी भी काल श्रेणी के दीर्घकालीन परिवर्तन में आर्त्तव से विचरण और चक्रीय परिवर्तनों का प्रभाव स्पष्ट करने की सांख्यिकीय रीतियाँ बताइये ।

7. एक काल-श्रेणी के आर्त्तव विचरणों से क्या आशय हैं? उन्हें मापने की विभिन्न रीतियों का वर्णन कीजिये ।

8. एक कालश्रेणी में होने वाले विभिन्न उच्चावचनों को समझाइये और उदाहरण देते हुए उनका महत्व बताइये ।

9. दीर्घकालीन उपनति, आर्त्तव विचरण और चक्रीय-उच्चावचनों में अन्तर स्पष्ट कीजिये ।

10. किसी काल श्रेणी में दीर्घकालीन उपनति कैसे मापी जाती है ?

निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिये -

(i) काल-श्रेणियों के संघटक,

(ii) दीर्घकालीन उपनति,

(iii) न्यूनतम वर्ग रीति,

(iv) श्रेष्ठतम उपयुक्तता रेखा ।

12.8 व्यावहारिक प्रश्न

1. निम्न समंकों की कालश्रेणी से चार वर्षीय चल माध्य ज्ञात कीजिए -

वर्ष	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
उत्पादन (टनों में)	30.1	45.4	39.3	41.4	42.2	46.4	46.6	49.2

(उत्तर - 40.6, 42.3, 43.2, 45.1)

2. निम्न सारणी से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए तथा 2009 के लिए उपनति मूल्य का अनुमान भी लगाइए :

वर्ष	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
मूल्य	380	400	650	720	690	600	870	930

(उत्तर - yc = 655+35.83x, Value for 2009 = 1049.13)

3. निम्न समंकों के आधार पर एक द्विघात परवलय उपनति का आसंजन करिए तथा वर्ष 2008 के लिए उत्पादन का अनुमान लगाइए -

वर्ष	2002	2003	2004	2005	2006
उत्पादन (000') (टनों में)	7	9	10	7	5

(उत्तर - yc = 9.314- .6t-.857t^2, Production for the year 2008 is not calculated, so the fit is not good)

4. निम्नलिखित समंकों से आवर्त माध्य रीति द्वारा आवर्त विचरण सूचकांक ज्ञात कीजिए ।

	Quarter			
Years	I	II	III	IV
2004	20	44	90	41
2005	35	56	130	70
2006	46	58	72	60
2007	50	100	70	80

(उत्तर - 59.1, 101, 41.7, 98.2)

5. सात वर्षीय उत्पादन के समंकों के आधार पर एक द्विघातीय उपनति के रूप में $y = a + b\times + c\times^2$ परिकलित कीजिए :

वर्ष	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
उत्पादन(टनों में)	10	11	12	9	10	13	11

(Ans. Y = 10.71 + 0.18x + 0.036x^2 where x = 0 for 2004)

12.9 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. Statistical Methods - Arora & Arora - S. Chand & Co.,New Delhi.

2. व्यावसायिक सांख्यिकी - शर्मा, जैन, पारीक, रमेश बुक डिपो, जयपुर ।

3. परिमाणात्मक प्रविधियाँ - अग्रवाल, रमेश बुक डिपो, जयपुर ।

4. उच्चतर व्यावसायिक सांख्यिकी - एन.पी. अग्रवाल, मयूर पेपरबैक्स, नोएडा ।

इकाई-13 : सूचकांक (Index Numbers)

इकाई की रूपरेखा -

13.0 उद्देश्य
13.1 प्रस्तावना
13.2 सूचकांक का अर्थ एवं परिभाषाएँ
13.3 सूचकांकों की प्रमुख विशेषताएँ
13.4 सूचकांकों के उपयोग तथा सीमाएँ
13.5 सूचकांको की रचना
13.6 उदाहरण द्वारा स्पष्टीकरण
13.7 भार चयन की समस्या
13.8 स्पष्ट भारवेशन और विविध सूत्रों द्वारा गणना
13.8.1 लैस्पियर का सूत्र
13.8.2 पाशे का सूत्र
13.8.3 ड्रोबिश और बाउले का सूत्र
13.8.4 फिशर का आदर्श सूचकांक
13.8.5 एजवर्थ और मार्शल का सूत्र
13.9 एक अच्छे सूचकांक के लक्षण
13.9.1 समय-प्रतिवर्त्यता परीक्षा
13.9.2 खण्ड-प्रतिवर्त्यता परीक्षा
13.9.3 चक्रीय परीक्षा
13.10 विविध समस्याऐं
13.11 सारांश
13.12 स्वपरख प्रश्न
13.13 शब्दावली
13.14 व्यावहारिक प्रश्न
13.15 कुछ उपयोगी पुस्तकें/ संदर्भ ग्रंथ

13.0 उद्देश्य (Objects)

इस इकाई के अध्ययन करने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- सूचकांक का अर्थ जान सकें ।
- सूचकांकों की प्रमुख विशेषताऐं समझ सकें ।
- सूचकांकों का महत्व एवं उपयोग समझ सकें ।
- सूचकांकों के निर्माण में किन-किन तथ्यों को ध्यान में रखा जाता है, उनका अध्ययन कर सकें।

- अस्पष्ट और स्पष्ट भारवेशन में अन्तर जान सकें ।
- सूचकांकों से सम्बन्धित विविध सूत्रों का अध्ययन कर सकें ।
- एक आदर्श सूचकांक किस प्रकार विभिन्न कसौटियों (परीक्षणों) पर खरा उतरता है, यह अध्ययन कर सकें ।

13.1 प्रस्तावना (Introduction)

सूचकांको का प्रयोग दो या दो से अधिक कालों अथवा स्थानों के मूल्यों (prices), उत्पादन, परिमाण, आयतन, तापक्रम आदि में प्रतिशत परिवर्तन को निर्धारित करने के लिए किया जाता है । इसके लिए किसी एक काल अथवा स्थान को आधार मान लिया जाता है और अन्य कालों व स्थानों के आंकड़ों को आधार के आँकडों के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है । उदाहरणार्थ, यदि 1990 में गेहूँ का भाव 400 रू. प्रति क्विंटल था और 2005 में 1700 रू. प्रति क्विंटल है, तो 1990 को आधार वर्ष मानकर 2005 में गेहूँ के दर का सूचकांक होगा $\frac{1700}{400}\times 100$ = 425 जिससे हमें यह ज्ञात होता है कि 2005 का भाव 1990 का कितने प्रतिशत गुणा है । सूचकांकों से हमें आँकडों में होने वाले परिवर्तन का ज्ञान सरलतापूर्वक हो जाता है । उपर्युक्त उदाहरण में हमने एक ही वस्तु - गेहूँ के मूल्यों का सूचकांक ज्ञात किया है । प्राय: हम एक से अधिक वस्तुओं के मूल्यों के सूचकांक ज्ञात करते हैं और फिर उन सब सूचकांकों का समान्तर माध्य अथवा गुणोत्तर माध्य ज्ञात करते हैं । यदि हम गणना करते समय वस्तुओं को पृथक्-पृथक् महत्त्व देना चाहें तो भारित (Weighted) समान्तर माध्य अथवा भारित गुणोत्तर माध्य का प्रयोगकर भारित सूचकांक (Weighted Index Number) ज्ञात कर सकते हैं ।

13.2 सूचकांक का अर्थ एवं परिभाषा (Meaning & Defination of Index number)

साधारण बोलचाल में सूचकांक का अभिप्राय उन अंकों से लगाया जाता है जो अर्थव्यवस्था के किसी क्षेत्र अथवा घटना में होने वाले परिवर्तन की प्रवृत्ति को प्रतिशत में व्यक्त करते हैं । विभिन्न विद्वानों ने सूचकांकों अथवा निर्देशाकों को इस प्रकार परिभाषित किया है-

क्रॉक्सटन एवं काउडन (Croxton and Cowden) के अनुसार, "सूचकांक परस्पर सम्बन्धित चर मूल्यों के किसी समूह की मात्रा में होने वाले परिवर्तनों के मापने की विधियां हैं ।" ये अन्तर कीमतों में उत्पादन में या किसी अन्य गतिविधि जैसे रोजगार, कार्यकुशलता, व्यापार, उत्पादकता आदि में हो सकते हैं । सूचकांक तुलनात्मक अंक होते हैं जो समय, स्थान या किसी श्रेणी के आधार पर तुलना करते हैं।

बॉडिंगटन (Boddington) के शब्दों में, "सूचकांक, जैसा कि उसके नाम से स्पष्ट है, संख्याओं के एक समूह की सामान्य प्रवृत्ति का सूचक है ।" हेरिस सेक्राइस्ट

(H..Secrist) ने सूचकांक अंकों की एक ऐसी श्रेणी दी है जिसके द्‌वारा किसी भी तथ्य की मात्रा में होने वाले परिवर्तनों को समय या स्थान के आधार पर मापा जा सकता है।"

वैसल, विलेट तथा साइमोन सूचकांक को एक विशिष्ट प्रकार का माध्य (A special type of average) मानते हैं जो समय अथवा स्थान के सापेक्ष परिवर्तनों को मापता है। क्लार्क एवं शकाडे (Clark and Schkade) ने इसे प्रतिशत अनुपात (Percentage relative) बताया है जबकि मेयर्स ने इसे प्रतिशत जैसी गणना (Percentage like computation) कहा है ।

13.3 सूचकांकों की प्रमुख विशेषताऐं (Characteristics of Index Numbers)

सूचकांकों की प्रमुख विशेषताएं इस प्रकार हैं -

(1) सूचंकाक एक सांख्यिकीय तकनीक है जिसका प्रयोग विभिन्न चरों में होने वाले परिवर्तनों को मापने के लिए किया जाता है ।

(2) सूचकांक प्रतिशत में व्यक्त किए जाते हैं ।

(3) ये तुलनात्मक अंक होते है जो किसी क्षेत्र में समय अथवा स्थान के आधार पर तथ्यों में होने वाले परिवर्तनों की प्रवृत्ति बताते हैं ।

(4) सूचकांक एक विशेष प्रकार का माध्य है । इसमें विभिन्न अनुपात ज्ञात करके उनका माध्य निकाला जाता है।

(5) सूचकांकों का प्रयोग विशेष प्रकार के तथ्यों (जीवन निर्वाह, स्तर, मूल्य स्तर आदि) के परिवर्तनों की माप के लिए किया जाता है, जिन्हें पृथक-पृथक मापना कठिन है ।

13.4 सूचकांकों के उपयोग तथा सीमाऐं (Uses and Limitations of Index Numbers)

कोई भी चर जिसमें समय एवं स्थान के अनुसार परिवर्तन होते हैं, उसे सूचकांकों के द्‌वारा मापा जा सकता है । आजकल इसका व्यापक रूप से प्रयोग होता है । इस तकनीक का उपयोग आर्थिक, सामाजिक, राजनैतिक, शैक्षणिक, मनोवैज्ञानिक आदि सभी क्षेत्रों में किया जाता है । सिम्सन एवं काफ्का के अनुसार, "इनका प्रयोग अर्थव्यवस्था की नाड़ी देखने में किया जाता है तथा ये स्फीतिक या अस्फीतिक प्रवृत्तियों के सूचकों के रूप में प्रयुक्त होते हैं ।" संक्षेप में सूचकांकों के प्रमुख उपयोग निम्नलिखित हैं -

(1) **परिवर्तनों का माप** - सूचकांक दो समयावधियों के मध्य होने वाले परिवर्तनों को मापते हैं।

(2) **तुलना सरल** - सूचकांक सम्बन्धित तथ्यों के समूहों के मध्य आसानी से तुलना करते हैं।

(3) **जटिल तथ्यों को सरल करना** - सूचकांक जटिल आंकड़ों की सारणियों को प्रतिशत के रूप में संक्षिप्त एवं सरल रूप प्रदान करने में सक्षम होते हैं ।

(4) **पूर्वानुमानों में मदद** - सूचकांकों का अध्ययन भावी नीतियों के निर्माण एवं पूर्वानुमान में सहायक होता है।

(5) **वास्तविक मूल्य ज्ञात करने में सहायक -** सूचकांकों की सहायता से मुद्रा का मूल्य वास्तविक आय एवं वास्तविक मजदूरी मापी जा सकती है ।

सूचकांकों की सीमाएं - यद्यपि सूचकांकों के विविध उपयोग हैं फिर भी इसकी कुछ सीमाएं भी है -

(1) **औसत रूप से सत्य -** सूचकांक केवल औसत रूप से ही सत्य होते हैं ।

(2) उद्देश्यों की भिन्नता

(3) **पर्याप्त शुद्धता का अभाव** - सूचकांक केवल परिवर्तन की प्रवृत्ति को दर्शाते है अत: इनमें शुद्धता की कमी होती है ।

(4) **अनुमानित मूल्य** - सूचकांक सापेक्षिक परिवर्तनों के अनुमानित मूल्य को ही बता पाते हैं।

(5) **गुणात्मक परिवर्तनों का मापना कठिन** - ये मात्रात्मक परिवर्तनों को ही स्पष्ट करते हैं, गुणात्मक परिवर्तनों अर्थात वस्तु की किस्म में होने वाले परिवर्तनों को नहीं बता पाते हैं।

(6) **भ्रमात्मक निष्कर्षों की सम्भावना** - सूचकांक बनाते समय जिन सावधानियों का ध्यान रखना अपेक्षित हैं (उपयुक्त आधार वर्ष का चुनाव, उपयुक्त माध्य का चुनाव, उपयुक्त वस्तुओं एवं कीमतों का चुनाव आदि), ध्यान में नहीं रखने पर भ्रमात्मक निष्कर्ष निकल सकते हैं ।

13.5 सूचकांकों की रचना (Construction of Index Numbers)

सूचकांकों की रचना - विधि उनके उद्देश्य पर निर्भर करती हैं । सबसे महत्वपूर्ण दो सूचकांक होते हैं : (1) किराना मूल्यों के सूचकांक, और (2) औद्योगिक उत्पादन के सूचकांक । पहली प्रकार के सूचकांकों से विदित होता है कि अधिकांश परिवारों द्वारा व्यवहृत होने वाली अधिकतर वस्तुओं के मूल्यों में समय-समय पर क्या परिवर्तन हो रहे हैं और दूसरी प्रकार के सूचकांकों से ज्ञात होता है कि उद्योग द्वारा उत्पादित वस्तुओं का परिमाण किस प्रकार घट या बढ़ रहा है । सूचकांकों के निम्नलिखित तथ्यों पर ध्यान दिया जाता है ।

1. **पदार्थो का चयन -** पदार्थों के चयन की समस्या इसलिए उत्पन्न होती है कि किसी सूचकांक के अन्तर्गत सभी वस्तुओं पर विचार करना बहुत जटिल हो जाता है । उदाहरणार्थ, यदि हम उपभोग-वस्तुओं (Consumer goods) के किराना अथवा फुटकर मूल्यों (retail prices) के सूचकांक ज्ञात करना चाहते हैं तो उन सभी पदार्थो के मूल्यों पर विचार करना लगभग असम्भव है, जो उपभोग-वस्तुओं के अन्तर्गत आते हैं । अत: कुछ प्रतिनिधि पदार्थो के मूल्यों को ही प्रयुक्त किया जाता है । स्पष्ट है कि सूचकांकों का यथेष्ट होना इस बात पर निर्भर होगा कि हमारे द्वारा प्रयुक्त पदार्थ उपभोग-वस्तुओं का कितना अच्छा प्रतिनिधित्व करते हैं । पदार्थो की संख्या के सम्बन्ध में कोई निश्चित नियम नहीं है । वस्तुत: जितनी अधिक पदार्थों की संख्या होगी, उतने ही सूचकांक यथेष्ट होंगे, किन्तु पदार्थों की संख्या के साथ-साथ गणानात्मक जटिलताएँ बढ़ती जाती हैं । अत: सूचकांकों की अभीष्ट यथेष्टता और गणना की सुगमता को ध्यान में रखते हुए पदार्थों की संख्या न बहुत अधिक होनी चाहिए, न ही बहुत कम ।

2. **पदार्थों का वर्गीकरण -** पदार्थों के चयन के पश्चात् प्राय: उनको विभिन्न वर्गों में विभाजित कर लिया जाता है, और प्रत्येक वर्ग के लिए पृथक सूचकांक ज्ञात किया जाता है । इसके उपरान्त इन सब सूचकांकों का माध्य लिया जाता है । इससे अलग-अलग वर्गों के अन्तर्गत वस्तुओं के मूल्यों में परिवर्तन का पृथक रीति से अध्ययन किया जा सकता है । इसके अतिरिक्त भारित सूचकांकों की दशा में पृथक्-पृथक वर्गों को उचित भार देने में भी सहायता मिलती है । उदाहरणार्थ, यदि देश में सामान्य मूल्यों का सूचकांक ज्ञात करना हो, तो विभिन्न वस्तुओं को इस प्रकार विभाजित किया जा सकता है :- (i) भोज्य पदार्थ, (ii) औद्योगिक कच्चा माल, (iii) अर्धनिर्मित पदार्थ, (iv) निर्मित पदार्थ, इत्यादि ।

3. **मूल्यों का उद्धरण** - स्पष्टत: सूचकांकों की रचना में मूल्यों का बहुत महत्व है । मूल्य जितने विश्वसनीय होंगे, सूचकांक उतने ही उपयुक्त होंगे । अत: मूल्यों का निर्धारण विश्वस्त सूत्रों द्वारा ही करना चाहिए । इसके लिए बाजार में प्रचलित वास्तविक मूल्यों को प्राप्त करना चाहिए अथवा विश्वसनीय पत्र-पत्रिकाओं में दिये गये मूल्य भी लिए जा सकते हैं । यदि विशेष रूप से फुटकर मूल्यों के सूचकांक ज्ञात न करने हों तो प्राय: थोक मूल्यों को प्रयुक्त किया जाता है । इसका कारण यह है कि थोक मूल्य अधिक विश्वसनीय होते हैं और किसी एक समय और एक स्थान पर प्राय: समान रहते हैं, जबकि फुटकर मूल्य एक स्थान और एक ही समय पर अलग-अलग हो सकते है । इसके अतिरिक्त थोक मूल्यों पर माँग और पूर्ति का प्रभाव शीघ्र पड़ता है और इस कारण ये मूल्य किसी स्थान और समय की स्थिति को भली भाँति प्रदर्शित करते हैं । प्राय: मूल्यों के विभिन्न उद्धरण लेकर उनके माध्य को प्रयुक्त करना श्रेयस्कर होता है।

4. **आधार का चयन** - सूचकांक किसी एक आधार-काल की तुलना में मूल्यों के परिवर्तन को प्रदर्शित करते हैं । अत: आधार का चयन एक महत्वपूर्ण प्रश्न है । आधार चुनने के लिए निम्नलिखित दो रीतियों का प्रयोग किया जाता है :-

   (i) **स्थिर आधार रीति (Fixed Base Method) -** इस रीति में विभिन्न कालों के मूल्यों की तुलना एक ही आधार काल के मूल्य से की जाती है । प्राय: एक सामान्य वर्ष को आधार वर्ष मान लिया जाता है । जैसे, युद्ध-कालीन मूल्यों कें परिवर्तन को ज्ञात करने

के लिए प्राय: युद्ध आरम्भ होने से पूर्व किसी वर्ष (जैसे 1989) को आधार वर्ष के रूप में लिया जा सकता है । कई बार, कई वर्षों को चुनकर उनके मूल्यों को आधार माना जाता है । उदाहरणार्थ, यदि हम 2001-2009 के समय में मूल्य-स्तर में उतार -चढ़ाव का अध्ययन करना चाहें, तो इन सब वर्षों के मूल्यों के माध्य को आधार लिया जा सकता है । ऐसा प्राय: तभी किया जाता है, जब सूचकांक भूतकाल से सम्बन्धित हों।

(ii) **श्रृंखला आधार रीति (Chain Base Method)** - इस रीति में कोई एक निश्चित आधार काल अथवा वर्ष नहीं होता, किन्तु सूचकांक ज्ञात करने के लिए प्रत्येक मूल्य की उससे पहले मूल्य से तुलना की जाती है । इस प्रकार 2008 के मूल्यों के लिए 2007 को आधार मान लिया जाता है, 2007 के लिए 2006 को, 2006 के लिए 2005 को, इत्यादि।

5. **माध्यों का चयन -** जब कई पदार्थों अथवा पदार्थ-वर्गों के मूल्यों से परिवर्तन का अध्ययन करना होता है, तो प्रत्येक पदार्थ अथवा वर्ग के लिए पृथक सूचकांक लेकर उनके माध्य को प्रयुक्त किया जाता है । अब प्रश्न यह है कि कौन सा माध्य लेना श्रेयस्कर है । गणना में सुगमता और उपयोगिता की दृष्टि से प्राय: समान्तर माध्य, मध्यका और गुणोत्तर माध्य - इन तीनों में से किसी एक का प्रयोग किया जाता है । बहुधा समान्तर माध्य का प्रयोग किया जाता है, क्योंकि यह गणना में सुगम होने के साथ-साथ इसको समझना भी सरल है । परन्तु यह चर मूल्यों से अधिक प्रभावित होता है और मूल्यों में होने वाले निरपेक्ष (Absolute) परिवर्तन का द्योतक होता है । इसके विपरीत गुणोत्तर माध्य मूल्यों के सापेक्ष परिवर्तन (Relative variation) को व्यक्त करता है, क्योंकि सूचकांक भी सापेक्ष परिवर्तन पर आधारित होते हैं अर्थात् यह व्यक्त करते हैं कि कोई मूल्य अन्य मूल्य से कितना-गुना है अत: सैद्धान्तिक रूप से गुणोत्तर माध्य लेना ही अधिक उपयुक्त है । मध्यका केवल गणना की दृष्टि से सुगम है, किन्तु यह सब मूल्यों पर आधारित नहीं होती, यह मूल्य-परिवर्तन का भली भाँति प्रदर्शन नहीं करती । लघुगणकों (Logarithms) का प्रयोग करने पर गुणोत्तर माध्य की गणना भी सरल हो जाती हैं ।

13.6 उदाहरण द्वारा स्पष्टीकरण

उदाहरण 1

कलकत्ता में पटसन (जूट) के वार्षिक औसत मूल्य प्रति 400 पौण्ड 2001 से 2007 तक निम्नलिखित है । प्रत्येक वर्ष के सूचकांक ज्ञात कीजिए :-

(a) 2001 को आधार वर्ष मानकर,

(b) श्रृंखला आधार रीति से,

(c) 2001 - 2007 के समान्तर माध्य को आधार मानकर,

(d) 2001 - 2007 के गुणोत्तर माध्य को आधार मानकर ।

वर्ष	रु.
2001	78

2002	54
2003	67
2004	56
2005	72
2006	102
2007	98

हल (Solution) :

(a), 2001 को आधार मानकर तथा (b) श्रृंखला आधार रीति द्वारा सूचकांकों की गणना,

वर्ष	मूल्य	सूचकांक (a)	सूचकांक (b)
2001	78	100	100
2002	54	$\frac{54}{78}\times 100 = 69.2$	$\frac{54}{78}\times 100 = 69.2$
2003	67	$\frac{67}{78}\times 100 = 86$	$\frac{67}{54}\times 100 = 124.1$
2004	56	$\frac{56}{78}\times 100 = 71.8$	$\frac{56}{67}\times 100 = 83.6$
2005	72	इसी प्रकार 92.3	इसी प्रकार 128.5
2006	102	इसी प्रकार 130.8	इसी प्रकार 141.7
2007	98	इसी प्रकार 125.6	इसी प्रकार 96.1

(c) समान्तर माध्य के आधार पर तथा, (d) गुणोत्तर माध्य के आधार पर सूचकांकों की गणना,

वर्ष	मूल्य(x)	Log x	सूचकांक (c)	सूचकांक (d)
2001	78	1.8921	103.6	106.4
2002	54	1.7324	71.7	73.7
2003	67	1.8261	89.0	91.4
2004	56	1.7482	74.4	76.4
2005	72	1.8573	95.6	98.2
2006	102	2.0086	135.5	139.2
2007	98	1.9912	130.1	133.8
कुल योग= 527		13.0559		

टिप्पणी :-

मूल्यों का समान्तर माध्य $= \frac{\sum \times}{n} = \frac{527}{7} = 75.3$

अत: सूचकांक (c) ज्ञात करने के लिए प्रत्येक वर्ष के मूल्य की तुलना 75.3 रू. से की जाती है; यथा -

2001 का सूचकांक $= \frac{78}{75.3} \times 100 = 103.6$

मूल्यों का गुणोत्तर माध्य $= anti\log\left(\frac{\sum \log\times}{n}\right) = anti\log\left(\frac{13.0559}{7}\right) = 73.3$

अत: सूचकांक ज्ञात करने के लिए मूल्यों की तुलना 73.3 से की जाती है ।

यथा - 2001 का सूचकांक $= \frac{78}{73.3} \times 100 = 106.4$

उदाहरण 2

निम्नलिखित तालिका द्वारा 2009 के लिए भोज्य पदार्थों के अभारित और भारित सूचकांक ज्ञात कीजिए

(a) समान्तर माध्य की सहायता से, (b) गुणोत्तर माध्य की सहायता से ।

भोज्य पदार्थ	भार	मूल्य प्रति किग्रा (रुपयों में)	
		1999 (आधार वर्ष)	2009
गेहूँ	40	8	48
चावल	20	12	60
चना	15	6	33
अरहर दाल	5	14	56
दूध	6	16	64
सरसों का तेल	10	30	48
चीनी	3	24	84
नमक	1	6	18
	100		

(a) यहाँ हम चालू वर्ष (2009) के लिये मूल्य आपेक्षिक अथवा अलग-अलग पदार्थों के सूचकांक निम्नलिखित रीति से ज्ञात करते हैं -

चालू वर्ष का मूल्य - आपेक्षिक

$= \frac{\text{चालू वर्ष का मूल्य}}{\text{आधार वर्ष का मूल्य}} \times 100$

इसके पश्चात् इन मूल्य आपेक्षिकों के अभारित अथवा भारित माध्य लिए जाते हैं ।

अत: अभारित समान्तर माध्य द्वारा सूचकांक

$$= \frac{\sum \times}{n} = \; = \frac{3260}{8} = 407.5$$

भारित समान्तर माध्य द्वारा सूचकांक

$$= \frac{\sum w \times}{\sum w} = \; = \frac{49600}{100} = 496$$

(b) गुणोत्तर माध्य की सहायता से सूचकांक की गणना निम्न प्रकार है :-

पदार्थ	मूल्य (1999)	मूल्य (2009)	मूल्य-आपेक्षिक (x)	भार (w)	wx
गेहूँ	8	48	600	40	24000
चावल	12	60	500	20	10000
चना	6	33	550	15	8250
अरहर दाल	14	56	400	5	2000
दूध	16	64	400	6	2400
सरसों का तेल	30	48	160	10	1600
चीनी	24	84	350	3	1050
नमक	6	18	300	1	300
			3260	100	49600

मूल्य-आपेक्षिक (x)	log x	भार (w)	W x logx
600	2.7782	40	111.1280
500	2.6990	20	53.9800
550	2.7404	15	41.1060
400	2.6021	5	13.0105
400	2.6021	6	15.6126
160	2.2041	10	22.0410
350	2.5441	3	7.6323
300	2.4771	1	2.4771
		100	266.9875
	20.6471		

अत: अभारित गुणोत्तर माध्य द्वारा सूचकांक

=antilog$\left(\frac{\sum \log x}{n}\right)$=antilog

= antilog 2.5809 =381

भारित गुणोत्तर माध्य द्वारा सूचकांक

$$=\text{antilog}\left(\frac{\sum \omega \log}{\sum \omega}\right) = \text{antilog } 2.6699$$

= 467.7

उदाहरण 3

गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करते हुए वाणिज्यिक गतिविधियों का सूचकांक ज्ञात कीजिए ।

मद	भार	सूचकांक
औद्योगिक उत्पादन	36	250
खनिज उत्पादन	7	135
आन्तरिक व्यापार	24	200
वित्तीय कार्यकलाप	20	135
आयात- निर्यात	7	325
जहाजी कार्यकलाप	6	300

हल:

गुणोत्तर माध्य की गणना के लिये लघुगणक का प्रयोग करेंगे ।

<u>वाणिज्य गातिविधियों का सूचकांक (गुणोत्तर माध्य का प्रयोग)</u>

मद	भार (ω)	सूचकांक (x)	log x	w x log x
औद्योगिक उत्पादन	36	250	2.3979	86.3244
खनिज उत्पादन	7	135	2.1303	14.9121
आन्तरिक व्यापार	24	200	2.3010	55.2240
वित्तीय कार्यकलाप	20	135	2.1303	42.6060
आयात-निर्यात	7	325	2.5119	17.5833
जहाजी कार्यकलाप	6	300	2.4771	14.8626
	$\sum \omega = 100$		$\sum \omega \log x = 231.5124$	

$$\text{सूचकांक} = \text{A.L.}\left(\frac{\sum \omega \log x}{\sum \omega}\right) = \text{A.L.}\left(\frac{331.5124}{100}\right)$$

=A.L. (2.315)=206.5

उदाहरण 4

निम्नलिखित सारणी की सहायता से वास्तविक प्रति व्यक्ति आय एवं उसके सूचकांक ज्ञात कीजिए

वर्ष	2000	2001	2002	2003	2004	2005
प्रति व्यक्ति आय	160	180	180	195	210	235
जीवन निर्वाह लागत सूचकांक	100	200	125	150	180	200

(2000=आधार वर्ष)						

हल :

वास्तविक प्रति व्यक्ति आय एवं सूचकांक

वर्ष	प्रति व्यक्ति आय वर्ष	सूचकांक 2000=100	वास्तविक प्रति व्यक्ति आय	वास्तविक प्रति व्यक्ति आय का सूचकांक
2000	100	100	160	100
2001	180	120	$\frac{180}{120}\times 100=150$	$\frac{150}{160}\times 100=93.75$
2002	180	125	$\frac{180}{125}\times 100=144$	$\frac{144}{160}\times 100=90$
2003	195	150	$\frac{195}{50}\times 100=130$	$\frac{130}{160}\times 100=81.25$
2004	210	180	$\frac{210}{180}\times 100=116.6$	$\frac{116.6}{160}\times 100=72.9$
2005	235	200	$\frac{235}{200}\times 100=117.5$	$\frac{117.5}{160}\times 100=73.4$

प्रयुक्त सूत्र -

(i) वास्तविक प्रति व्यक्ति आय = $\frac{\text{सम्बन्धित वर्ष की प्रति व्यक्ति आय}}{\text{सूचकांक}}\times 100$

(ii) वास्तविक प्रति व्यक्ति आय सूचकांक = $\frac{\text{वास्तविक प्रति व्यक्ति आय}}{\text{2000 कि वास्तविक आय}}\times 100$

13.7 भार चयन की समस्या (Problem of Selecting Weights)

अभारित सूचकांकों से भारित सूचकांक अधिक उपयोगी होते हैं, क्योंकि वे विभिन्न पदार्थो के सापेक्ष महत्त्व को ध्यान में रखकर बनाये जाते है । अब, भारित सूचकांक उतने ही अधिक उपयोगी हो सकते हैं, जितने कि विभिन्न पदार्थो के भार उनके महत्त्व के द्योतक होंगे । अत: यह आवश्यक है कि भार किसी युक्तिपूर्ण आधार पर चुने जाएँ । यह बात ध्यान देने योग्य है कि भारों का युक्तिपूर्ण अथवा युक्तिहीन होना हैं, वे ही औद्योगिक कच्चे माल के सूचकांकों के लिए अनुपयुक्त होंगे । इसके अतिरिक्त, क्योंकि समय के साथ-साथ वस्तुओं के सापेक्ष महत्त्व में परिवर्तन होता

रहता है, अत: एक बार लिए गये भारों को स्थिर नहीं समझना चाहिए, वरन् उन पर समय-समय पर पुनर्विचार कर लेना चाहिए ।

अस्पष्ट और स्पष्ट भारवेशन (Implicit and Explicit Weighting) — भार देने की अस्पष्ट रीति यह है कि वस्तुओं के महत्त्व के अनुसार उनके विभिन्न प्रकारों को सूचकांक-निर्माण में सम्मिलित किया जाता है, जैसे तीन प्रकार के गेहूँ दो प्रकार के चावल और एक प्रकार की चाय के मूल्यों का प्रयोग करना । इसके विपरीत स्पष्ट भारवेशन रीति के अनुसार एक ही प्रकार की सब वस्तुओं के मूल्य लिए जाते हैं और विभिन्न पदार्थो के सापेक्ष मूल्यों अथवा सूचकांकों को उनके संगत भारों से गुणा किया जाता है ।

13.8 स्पष्ट भारवेशन और विविध सूत्रों द्वारा गणना

यह स्पष्ट है कि विभिन्न वस्तुओं के महत्त्व और भार उनकी उपयोग-मात्रा पर निर्भर करते हैं । भारित सूचकांकों का एक सरल सूत्र है —

$$\text{चालू वर्ष का भारित सूचकांक} = \frac{\sum IV}{\sum V} \qquad (1)$$

जहाँ 1 चालू वर्ष का मूल्य आपेक्षिक है, और

V = आधार वर्ष का उपभोग मान

=(आधार वर्ष उपभोग मात्रा) X (आधार वर्ष का मूल्य)

उपर्युक्त सूत्र का एक अन्य रूप है :–

$$\text{चालू वर्ष का सूचकांक} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100, \qquad (2)$$

जहाँ $p_1 =$ चालू वर्ष का मूल्य (price),

$p_0 =$ आधार वर्ष का मूल्य

$q_0 =$ आधार वर्ष की उपभोग-मात्रा (quantity)

सूत्रों (1) और (2) की समानता नीचे प्रदर्शित की गई है :-

हम जानते हैं कि

$$I = \frac{p^1}{p^0} \times 100, \text{ और } V = p_0 q_0$$

$$\text{अतः } \frac{\sum IV}{\sum V} = \frac{\sum \left(\frac{p_1}{q_0} \times 100 \times p_0 q_0 \right)}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100,$$

जिसमें दोनों सूत्रों की समानता स्पष्ट है ।

अन्य सूत्र - ऊपर के दोनों सूत्रों में आधार वर्ष और चालू वर्ष दोनों के मूल्य और केवल आधार वर्ष की मात्रा प्रयुक्त होते हैं । यदि चालू वर्ष की मात्रा q_1 हो, तो p_0 , p_1 , q_0

, q_1 को विभिन्न प्रकार से प्रयुक्त करके सूचकांकों के लिए विभिन्न सूत्र दिए गए हैं, जिनका वर्णन नीचे दिया गया हैं निम्नलिखित सूत्रों में सूचकांक अनुपात के रूप में दिए गए हैं और उनको 100 से गुणा करने पर प्रतिशत के रूप में सूचकांक प्राप्त किए जा सकते हैं ।

13.8.1 लैस्पियर का सूत्र (Laspeyre's Formula)

इस सूत्र के अनुसार, यदि आधार वर्ष की तुलना में चालू वर्ष का सूचकांक p_{01} हो तो

$$p_{01} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

जहाँ विभिन्न संकेताक्षरों के अर्थ ऊपर दिए गए हैं ।

यह सूत्र ऊपर दिए गए दोनों सूत्रों के समान ही है । अन्तर केवल प्रतिशत और अनुपात का है ।

13.8.2 पाशे का सूत्र (Paasche's Formula)

इस सूत्र के अनुसार,

$$p_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}$$

13.8.3 ड्रोबिश और बाउले का सूत्र (Drobish and Bowley's Formula)

इस सूत्र में लैस्पियर और पाशे के सूत्रों द्वारा प्राप्त सूचकांकों का समान्तर माध्य लिया जाता है । अत:

$$p_{01} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} + \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}\right],$$

13.8.4 फिशर का आदर्श सूचकांक (Fisher's Ideal Index Numbers)

यदि पिछले सूत्र में समान्तर माध्य के स्थान पर गुणोत्तर माध्य लिया जाए तो फिशर का आदर्श सूचकांक प्राप्त होता है । इसके अनुसार,

$$p_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}$$

13.8.5 एजबर्थ और मार्शल का सूत्र (Edgeworth–Marshall Formula)

यह सूत्र फिशर के आदर्श सूचकांक की अपेक्षा गणना में सरल है । इसके अनुसार,

$$p_{01} = \frac{\sum (q_0 + q_1) p_1}{\sum (q_0 + q_1) p_0}$$

इस सूत्र में q_0 और q_1 के समान्तर माध्य को प्रयुक्त। किया गया है । इसके स्थान पर यदि गुणोत्तर माध्य को लिया जाए, तो इस सूत्र का एक रूपान्तर प्राप्त होता है -

$$p_{01} = \frac{\sum \sqrt{q_0 q_1 p_1}}{\sum \sqrt{q_0 q_1 p_0}}$$

13.9 एक अच्छे सूचकांक के लक्षण

जैसा कि हम जानते हैं, एक अच्छे सूचकांक को भारित होना चाहिए और भार परिवर्तनशील होना चाहिए । इसके अतिरिक्त फिशर ने प्रतिवर्त्यता-परीक्षाओं का उल्लेख किया है, जो एक अच्छे सूचकांक द्वारा सन्तुष्ट होनी चाहिए वे निम्नलिखित हैं:-

13.9.1 समय प्रतिवर्त्यता परीक्षा (Time Reversal Test)

एक अच्छे सूचकांक द्वारा प्राप्त अनुपात आधार और चालू वर्ष की अदला-बदली के उपरान्त एक-सा रहना चाहिए । इस परीक्षा के अनुसार, यदि p_{01} आधार वर्ष की तुलना में चालू वर्ष का और p_{01} चालू वर्ष की तुलना में आधार वर्ष का सूचकांक है, तो $p_{01} \times p_{10} = 1.$

13.9.2 खंड-प्रतिवर्त्यता परीक्षा (Factor Reversal Test)

इस परीक्षा के अनुसार यदि हम मूल्यों और मात्राओं को प्रतिस्थापित करें तो असंगत फल प्राप्त नहीं होना चाहिए । इसका अर्थ है कि यदि p_{01} आधार वर्ष की तुलना में चालू वर्ष में मूल्य परिवर्तन व्यक्त करता है और उसी प्रकार q_{01} मात्रा में परिवर्तन व्यक्त करता है, और p_0' p_1 ,आधार और चालू वर्ष के मूल्य और q_0, q_1 आधार और चालू वर्ष की मात्राएँ हैं, तो $p_{01} \times q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$ अर्थात् मूल्य-परिवर्तन और मात्रा-परिवर्तन को गुणा करने से कुल व्यय में परिवर्तन प्राप्त होना चाहिए ।

13.9.3 चक्रीय परीक्षा (Circular Test)

इस परीक्षा के अनुसार, यदि आधार वर्ष का सूचकांक किसी दूसरे आधार वर्ष की तुलना में दिया हो, तो इस दूसरे आधार वर्ष की तुलना में चालू वर्ष का सूचकांक ज्ञात करना सम्भव होना चाहिए और उससे कोई असंगत मान प्राप्त नहीं होना चाहिए, अर्थात् इस परीक्षा के अनुसार, $p_{01} \times p_{12} \times p_{20} = 1$

नीचे हम विभिन्न सूत्रों द्वारा प्राप्त सूचकांकों पर उपर्युक्त परीक्षाओं का प्रयोग करके देखेंगे ।

(i) **समय-प्रतिवर्त्यता परीक्षा -** वे सूचकांक जो गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करते हैं, इस परीक्षा को सन्तुष्ट करते हैं । उदाहरणार्थ, फिशर का आदर्श सूत्र इस परीक्षा पर खरा उतरता है, क्योंकि इस सूत्र द्वारा

$$p_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}$$

और

$$p_{10} = \sqrt{\frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_1 q_1} \times \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_1 q_0}}$$

अतः $p_{01} \times p_{10} = 1$

(ii) **खण्ड-प्रतिवर्त्यता परीक्षा -** फिशर का आदर्श सूत्र इस परीक्षा को भी सन्तुष्ट करता है, क्योंकि

$$p_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}$$

अत: p और q की अदला-बदली करने पर

$$q_{01} = \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}} = \sqrt{\frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_1 q_0}}$$

अत: $p_{01} \times q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$,

अन्य कोई सूत्र इस परीक्षा को सन्तुष्ट नहीं करता ।

(iii) चक्रीय परीक्षा उपर्युक्त सूत्रों में से कोई भी संतुष्ट नहीं करता । अत: केली ने निम्नलिखित सूत्र की प्रस्तावना की है -

केली का सूत्र (Kelly's Formula) - इस सूत्र के अनुसार

$$p_{01} = \frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q},$$

जहाँ q से किसी एक वर्ष की मात्रा का बोध होता है, जिसको आधार मान लिया गया है; यह आवश्यक नहीं है कि यह साधारण आधार-वर्ष अथवा चालू वर्ष में से एक हो, जैसा कि लैस्पियर अथवा पाशे के सूत्रों में होता है । इस सूत्र में आधार वर्ष और चालू वर्ष में परिवर्तन करने पर भार 'q' स्थिर रहता है अत: इसका स्थिर भार समुच्चय सूत्र (Fixed Weight Aggregate Formula) भी कहते हैं । स्पष्टत: यह सूत्र समय-प्रतिवर्त्यता और चक्रीय, दोनों परीक्षाओं को सन्तुष्ट करता है ।

इसी प्रकार अभारित समुच्चय सूत्र

$p_{01} = \frac{\sum p_1}{\sum p_0}$, द्वारा भी उपर्युक्त दोनों परीक्षाएँ संतुष्ट होती हैं ।

13.10 विविध समस्याएँ

अब हम सूचकांकों से सम्बन्धित कुछ विशेष समस्याओं का विवेचन करेंगे ।

(1) **सूचकांको का अस्फीतीकरण (Deflating the Index Numbers) -** इस विधि का सबसे अच्छा उदाहरण प्रति व्यक्ति आय के सूचकांक हैं । यदि निर्वाह व्यय सूचकांक में वृद्धि हो रही हो तो आय के सूचकांकों. को निर्वाह-व्यय की वृद्धि के व्युत्क्रमानुपात में कम कर दिया जाता है ।

(2) **आधार - परिवर्तन (Base -- Shifting) ---** यदि एक आधार वर्ष के स्थान पर दूसरा आधार वर्ष लेना अभीष्ट हो, तो नए आधार वर्ष के सूचकांक को 100 मान लिया जाता है और अन्य सूचकांकों में उसी अनुपात से परिवर्तन कर दिया जाता है ।

(3) **सूचकांको का संयोजन (Splicing of Index Numbers -** यदि सूचकांक की दो श्रेणियाँ दी गई हों , जो पृथक-पृथक आधार वर्षो पर आधारित हैं, तो उनको एक ही आधार वर्ष पर आधारित एक श्रेणी के रूप में व्यक्त करने को सूचकांकों का संयोजन कहते हैं । स्पष्ट है कि मूलत: यह समस्या आधार परिवर्तन की ही है ।

ये सभी विधियाँ निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट है ।

उदाहरण-5

निम्नलिखित आँकड़ो से विभिन्न सूत्रों के द्वारा सूचकांक ज्ञात कीजिए और उन पर विभिन्न प्रतिवर्त्यता परीक्षाओं का प्रयोग कीजिए

पदार्थ	आधार वर्ष मूल्य	आधार वर्ष मात्रा	चालू वर्ष मूल्य	चालू वर्ष मात्रा
A	6	50	10	56
B	2	100	120	120
C	4	60	60	60
D	10	30	24	24
E	8	40	26	26

ऊपर दी गई तालिका से हम निम्नलिखित तालिका का निर्माण करते हैं,

पदार्थ	p_0	q_0	p_1	q_1	$p_0\ q_0$	$p_0\ q_1$	$p_1\ q_0$	$p_1\ q_1$
A	6	50	10	56	300	336	500	560
B	2	100	2	120	200	240	200	240
C	4	60	6	60	240	240	360	360
D	10	30	12	24	300	240	288	288
E	8	40	12	26	320	208	312	312
				योग	1360	1264	1900	1760

अत: लैस्पियर के सूत्र द्वारा,

$$p_{01} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{1900}{1360} = 1.40$$

पाशे के सूत्र द्वारा,

$$p_{01} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} = \frac{1760}{1264} = 1.39$$

ड्रोबिश और बाउले के सूत्र द्वारा,

$$p_{01} = \frac{\text{लैस्पियर + पाशे}}{2}$$

फिशर के आदर्श सूत्र द्वारा , $p_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} = \sqrt{\frac{1900}{1360} \times \frac{1760}{1264}}$

$$p_{01} = \sqrt{1.40 \times 1.39} = 1.395$$

$$q_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_0q_1}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_1q_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{1264}{1360} \times \frac{1760}{1900}}$$

$$p_{01} \times p_{10} = 1$$

अतः

इस प्रकार , इस सूत्र द्वारा समय - प्रतिवर्त्यता परीक्षा सन्तुष्ट होती है।

$$q_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_0q_1}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_1q_0}}$$

पुनः $= \sqrt{\frac{1264}{1360} \times \frac{1760}{1900}}$

अतः $p_{01} \times q_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times \frac{\sum p_0q_1}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$

अतः $p_{01} \times q_{01} = \frac{1760}{1360}$

अतः खण्ड–प्रतिवर्त्यता परीक्षा भी सन्तुष्ट होती है।

एजवर्थ और . मार्शल के सूत्र द्वारा,

$$p_{01} = \frac{\sum (q_0 + q_1)p_1}{\sum (q_0 + q_1)p_0} = \frac{3660}{2624} = 1.395$$

मार्शल और एजवर्थ का सूत्र गुणोत्तर माध्य द्वारा निम्न प्रकार प्रयुक्त किया जा सकता हैं :—

p_0	q_0	p_1	q_1	$q_0\ q_1\ p_1$	$\sqrt{q_0q_1p_1}$	$q_0\ q_1\ p_0$	$\sqrt{q_0q_1p_0}$
6	50	**10**	56	28000	167.3	16800	129.6
2	100	**2**	120	24000	154.9	24000	154.9
4	60	**6**	60	21600	147.0	14400	120.0
10	30	**12**	24	8640	92.9	7200	84
8	40	**12**	26	12480	111.7	8320	91.2
30		**42**			673.8		580.5

$$p_{01} = \frac{\sum\sqrt{q_0q_1p_1}}{\sum\sqrt{q_0q_1p_0}} = \frac{673.8}{580.5} = 1.16$$

$$p_{01}\frac{\sum\sqrt{q_0q_1p_1}}{\sum\sqrt{q_0q_1p_1}} = \frac{673.8}{580.5}1.6$$

भारित समुच्चय सूत्र द्वारा, $p_{01} = \frac{\sum p_1}{\sum p_0} = \frac{42}{30} = 1.4$

साधारण गुणोत्तर माध्य द्वारा,

$$p_{01} = \left(\frac{10}{6}\times\frac{2}{2}\times\frac{6}{4}\times\frac{12}{10}\times\frac{12}{3}\right)^{\frac{1}{5}} (4.5)^{1/5} = 1.35$$

और, साधारण समान्तर माध्य द्वारा,

$$p_{01} = \left(\frac{10}{6}+\frac{2}{2}+\frac{6}{4}+\frac{12}{10}+\frac{12}{3}\right) = 1.37$$

उदाहरण 6

नीचे दिये गये आँकड़ो में, निर्वाह-व्यय में वृद्धि को ध्यान में रखकर प्रति व्यक्ति आय का अस्फीतीकरण कीजिए ।

वर्ष	आय प्रति व्यक्ति (रु.)	निर्वाह–व्यय सूचकांक
1990	205	100
1991	215	105
1992	230	120
1993	236	140
1994	252	165

हल :

वर्ष	आय	निर्वाह–व्यय सूं	अस्फीत अथवा वास्तविक आय
1990	205	100	रु. 205
1991	215	105	$215\times\frac{100}{105} =$ रु. 204.76
1992	230	120	

			$230 \times \frac{100}{120}$ = रु.191.66
1993	236	140	$236 \times \frac{100}{140}$ = रु. 168.57
1994	252	165	$252 \times \frac{100}{165}$ = रु.152.73

उदाहरण 7

1980 - 1990 के निर्वाह-व्यय सूचकांक निम्नलिखित हैं -

वर्ष	निर्वाह–व्यय सूचाकांक
1980	104
1981	104
1982	112
1983	110
1984	105
1985	125
1986	120
1987	115
1988	135
1989	130
1990	140

1980 से 1985 पर आधार-परिवर्तन कीजिए ।

हल :

आधार-परिवर्तन की विधि निम्न हैं

वर्ष	**सूचकांक (आधार 1980)**	**सूचकांक (आधार 1985)**
1980	100	$100 \times \frac{100}{125} = 80$
1981	104	$104 \times \frac{100}{125} = 83.2$
1982	112	$112 \times \frac{100}{125} = 89.6$
1983	110	$110 \times \frac{100}{125} = 88$

1984	105	$105 \times \frac{100}{125} = 84$
1985	125	आधार वर्ष = 100
1986	120	$120 \times \frac{100}{125} = 96$
1987	115	$115 \times \frac{100}{125} = 92$
1988	135	$135 \times \frac{100}{125} = 108$
1989	130	$130 \times \frac{100}{125} = 104$
1990	140	$140 \times \frac{100}{125} = 112$

उदाहरण 8

श्रमिकों के पारिवारिक बजट से दो नगरों A एवं B में खर्च का प्रतिशत निम्न है-

खर्च का मद	**नगर A**	**नगर B**
भोजन	64%	50%
अन्य	36%	50%

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक क्रमश: 279 एवं 265 थे यदि आधार वर्ष से दोनों नगरों में विभिन्न वस्तुओं की कीमतों में समान वृद्धि हुई हो तो भोजन व अन्य के सूचकांक ज्ञात कीजिए ।

हल :

नगर 4 के लिये दोनों मदों के भार होंगे 64 , 36 । नगर B के लिए दोनों मदों के भार होंगे 50,50 (भार का आधार खर्च का प्रतिशत है ।)

माना कि सूचकांक I_1 एवं I_2, हैं

तो नगर A के लिए

$$\frac{64I_1 + 36I_2}{64+36} = 279 \text{ एवं}$$

नगर B के लिए : $\frac{50I_1 + 50I_2}{50+50} = 265$

क्योंकि उपभोक्ता मूल्य सूचकांक $\frac{\text{भार X सूचकांक}}{\text{भार}}$

सरल करने पर

$64I_1 + 36I_2 = 279$ ...... (1)

$50I_1 + 50I_2 = 265$ ...... (2)

समीकरण (1) को 0.25 तथा (2) को 0.32 से गुणा करने पर

$16I_1 + 9I_2 = 279$ ...... (3)

$16I_1 + 16I_2 = 84.80$ ...... (4)

समीकरण (2) में से समीकरण (4) घटाने पर

$-7I_2 = -15.05 \qquad \therefore I_2 = 2.15$

समीकरण (3) में I_2 का मान रखने पर,

$$16I_1 + 9I_2 = 69.75$$

या $16I_1 + 9(2.15) = 69.75$

$$16I_1 = 50.40;\ I_1 = \frac{50.40}{16} = 3.15$$

अर्थात् भोजन का सूचकांक $(I_1) = 3.15$ है

एवं अन्य का सूचकांक $(I_2) = 2.15$ है

उदाहरण 9

निम्न समंकों से उपभोक्ता मूल्य सूचकांक ज्ञात कीजिये

वस्तुऐं	सूचकांक	भार
A	352	48
B	220	10
C	230	8
D	160	12
E	190	15

हल :

यहाँ वस्तुओं के सूचकांक व भार दिये गये हैं अत: दोनों का गुणनफल ज्ञात करते हैं:

वस्तु	सूचकांक I	भार W	गुणनफल IW
A	352	8	16896
B	220	10	2200
C	230	8	1840
D	160	12	1920
E	190	15	2850
	योग	$\sum W = 93$	$\sum IW = 25706$

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक $\frac{\sum IW}{\sum W} = \frac{25706}{93} = 276.41$

13.11 सारांश

सूचकांक एक विशेष प्रकार के माध्य है, जिनके द्वारा काल श्रेणी अथवा किसी स्थानिक श्रेणी में होने वाले सापेक्ष परिवर्तनों का माप किया जाता है । इन्हें सापेक्ष परिवर्तन इसलिए कहा गया है क्योंकि सूचकांक किसी समय विशेष (जैसे आधार वर्ष की तुलना में प्रचलित वर्ष (वर्तमान वर्ष) के मूल्य स्तर के प्रतिशत परिवर्तन को प्रकट करते हैं । इसी प्रकार एक स्थान की तुलना दूसरे स्थान से की जा सकती है । इस प्रकार सूचकांक द्वारा विभिन्न स्थानों में हुए आर्थिक परिवर्तनों का तुलनात्मक अध्ययन सम्भव हो जाता है । ऐसे परिवर्तन जीवन-निर्वाह व्यय, जीवन स्तर, राष्ट्रीय उत्पादन, राष्ट्रीय आय अथवा ऐसे ही किसी अन्य आर्थिक क्षेत्र से सम्बन्धित हो सकते हैं । इस प्रकार यह स्पष्ट है कि सूचकांकों का प्रयोग केवल आर्थिक जगत में ही नहीं होता अपितु दैनिक जीवन का कोई भी क्षेत्र इनके प्रभाव से अछूता नहीं रहा हैं।

13.12 शब्दावली

1. **सूचकांक (Index Number) -** सूचकांक विशेष प्रकार के माध्य है जी समय एवं स्थान के आधार पर किन्हीं घटनाओं में होने वाले परिवर्तनों को मापते हैं ।
2. **मूल्य सूचकांक (Price Index) -** मूल्य सूचकांकों में वस्तुओं के समूह की एक निश्चित समय पर मूल्यों की तुलना आधार वर्ष मूल्यों से की जाती है ।
3. **आधार वर्ष परिवर्तन (Base Shifting) -** आधार वर्ष बदलने का आशय एक सूचकांक श्रेणी का सन्दर्भ आधार को एक समयावधि से दूसरी में बदलकर उन्हें तुलना योग्य बनाना है ।
4. **शिरोबन्धन (Splicing) -** एक ऐसी क्रिया जिसमें नई सूचकांक माला को पुरानी श्रेणी से सम्बन्धित कर दिया जाए ।
5. **स्थिर आधार वर्ष रीति (Fixed Base method) -** इसमें एक सामान्य वर्ष को चुनकर प्रतिवर्ष मूल्य स्तर की तुलना उसी वर्ष से की जाती है ।
6. **श्रखला आधार रीति (Chain base method)** इस रीति में प्रतिवर्ष आधारवर्ष परिवर्तित कर देते हैं तथा सदैव तुलना पिछले वर्ष से की जाती है ।
7. **अपसिफति (Deflation) -** वर्तमान मूल्य या निर्वाह व्यय में होने वाली परिवर्तनों के अनुकूल वेतन, आय अथवा मौद्रिक मजदूरी आदि के सूचकांकों को संशोधन करने की क्रिया को अपस्फिति कहते हैं ।
8. **उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (consumer Price Index) -** किसी स्थान से सम्बन्धित वर्ग विशेष जैसे जयपुर के मजदूर वर्ग पर पड़ने वाले मूल्य परिवर्तनों के प्रभाव का माप करने के लिए बनाया गया सूचकांक ।

13.13 स्वपरख प्रश्न

1. सूचकांकों से क्या अभिप्राय है? ये किस प्रकार तैयार किये जाते हैं?
2. सूचकांकों को परिभाषित करते हुए स्पष्ट कीजिए कि सूचकांक एक विशेष प्रकार के माध्य होते हैं ।
3. एक अच्छे सूचकांक के प्रमुख लक्षण बताइए ।
4. फिशर का सूचकांक आदर्श सूचकांक किस प्रकार माना गया है? समझाइए ।
5. सूचकांकों की चार प्रमुख विशेषताऐं लिखिए ।
6. सूचकांक की रचना किस प्रकार की जाती है?
7. स्थिर आधार और श्रृंखला आधार सूचकांकों का अन्तर स्पष्ट कीजिए ।
8. समय और खण्ड प्रतिवर्त्यता परीक्षाओं का वर्णन कीजिए । क्या एक अच्छे सूचकांक द्वारा इन परीक्षाओं की सन्तुष्टि आवश्यक है और क्यों?

13.14 व्यावहारिक प्रश्न

1. समान्तर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करते हुए 2001 को आधार मानकर 2002 व 2003 के सूचकांक बनाओ -

वस्तु	2001	2002	2003
A	10	12	15
B	4	4.5	6
C	15	17.5	22.5
D	1	1.2	1.5
E	20	22	23

(उतर –– मूल्यानुपातों का समा. माध्य = 100,115.8,143

मुल्यानुपातों का गुणोत्तर माध्य = 100,115.9 142.2)

2. निम्न समंकों की सहायता से जीवन निर्वाह लागत सूचकांक बनाइये -

वर्ग	2007 का सूचकांक	खर्च
खाद्यान	550	46%
कपड़ा	215	10%
ईधन	220	7%
मकान	150	12%
विविध	275	25%

(संकेत : $\frac{\sum IW}{\sum W} = \frac{37665}{100} = 376.65$)

3. उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की रचना कीजिए ।

वर्ग	वर्ग भार	वर्ग सूचकांक
खाद्यान	61	155.4
कपड़ा	8.8	146.1
ईंधन	6.4	100
मकान	10.8	203
विविध	13	167.1

(उतर–157.8)

4. निम्नलिखित समंकों से फिशर के आदर्श सूचकांक की रचना कीजिए ।

वस्तु	आधार वर्ष		चालू वर्ष	
	कीमत	कुल व्यय	कीमत	कुल व्यय
A	2	40	5	75
B	4	16	8	40
C	1	10	2	24
D	5	25	10	60

(उत्तर–-219.1)

5. फिशर का आदर्श सूचकांक बनाइये –

वर्ष	चावल		गेहूं		मक्का	
	मूल्य	मात्रा	मूल्य	मात्रा	मूल्य	मात्रा
2000	4	50	3	10	2	5
2005	10	40	8	8	4	4

यह भी सिद्ध कीजिए कि यह सूत्र समय उत्क्राम्यता एवं तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण पूरा करता है । (उत्तर - 250)

6. निम्न सामग्री से 2003 का कीमत सूचकांक बनाइए -

(i) लास्पेयर रीति द्वारा, (ii) पाश रीति से, (iii) डोरबिश-बाउले रीति से.

(iv) मार्शल एजवर्थ सूत्र से ।

वस्तु	2000		2005	
	कीमत	मात्र	कीमत	मात्रा
A	8	50	20	40
B	6	10	18	2
C	4	5	8	2

(उत्तर–25.42, 250.6,252.4,252.7)

7. फिशर का आदर्श सूचकांक तैयार कीजिए एवं बताइये कि यह तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण को संतुष्ट करता

वस्तु	2000		2005	
	P_0	q_0	p_1	q_1
A	16	4	30	3.5
B	4	3	14	1.5
C	2	2	6	2.5

(उत्तर—213.9)

13.15 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. सांख्यिकी के सिद्धान्त - शुक्ल एवं सहाय, साहित्य भवन, आगरा ।

2. सांख्यिकी सिद्धान्त एवं व्यवहार - एस .पी.सिंह, एस. चाँद एण्ड कम्पनी, नई दिल्ली ।

3. सांख्यिकी के तत्व - सिन्हा एवं सिन्हा, नेशनल पब्लिशिंग हाउस, नई दिल्ली ।

4. प्रारम्भिक सांख्यिकी - कक्कड़ एवं बोहरा, टाटा मैक्यॉ हिल पब्लिशिंग कम्पनी लि., नई दिल्ली

5. Fundamentals of Statistics – Vol.2, Ed.6,AM. Goon, M.K. Gupta & B. Dasgupta, The World Press Pvt. Calcutta, 1986.

इकाई : 14 प्रायिकता एवं प्रायिकता नियम (Probability and Probability Rules)

इकाई की रूपरेखा

14.0 उद्देश्य

14.1 परिचय

14.2 उद्‌गम एवं विकास

14.3 प्रायिकता का महत्त्व एवं प्रयोग

14.4 परिभाषा

14.5 सीमाएँ

14.6 प्रायिकता की अवधारणाएँ

14.7 गणना की तकनीकें : क्रमचय एवं संचय

14.8 प्रायिकता का आकलन

14.9 प्रायिकता आकलन के नियम

14.10 संयोगानुपात

14.11 कम से कम. एक घटना घटने की प्रायिकता

14.12 सीमान्त प्रायिकता

14.13 संयुक्त प्रायिकता

14.14 सप्रतिबन्धित प्रायिकता

14.15 बेज़ प्रमेय - प्रतिलोम प्रायिकता

14.16 यादृच्छिक चर, प्रायिकता बंटन एवं प्रत्याशित मूल्य

14.17 सारांश

14.18 शब्दावली

14.19 स्वपरख प्रश्न / अभ्यास

14.20 आंकिक प्रश्न

14.21 उपयोगी पुस्तकें

14.0 उद्देश्य :

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि :-

- प्रायिकता का उद्‌गम एवं विकास, महत्व एवं प्रयोग, परिभाषा व सीमाऐं समझ सकें ।
- प्रायिकता की अवधारणाओं, गणना की तकनीकों व प्रायिकता आकलन के बारे में जानकारी प्राप्त कर सके ।
- प्रायिकता आकलन के नियमों की उदाहरणों सहित जानकारी प्राप्त कर सकें ।

- संयोगानुपात. सीमान्त एवं संयुक्त प्रायिकता, प्रतिलोभ प्रायिकता, यादृच्छिक चर व प्रत्याशित मूल्य के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकें ।
- प्रसामान्य वक्र से प्रायिकता ज्ञात कर सकें तथा प्रसामान्य वक्र आसंजन कर सकें ।

14.1 परिचय (Introduction)

अनिश्चितता मानव जीवन का अभित्र अंग है । दैनिक जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में अनिश्चितताओं के मध्य मनुष्य को अनेक निर्णय लेने पड़ते हैं जैसे - सिक्का उछालने पर उसके पट (Head) गिरने की संभावना 1/2 है, किसी राजनैतिक पार्टी विशेष द्वारा 2/3 बहुमत प्राप्त करने की संभावना, आगामी अन्तर्राष्ट्रीय ओलम्पिक खेल-कूद में भारत के हॉकी में स्वर्ण पदक जीतने की प्रायिकता, एक विशेष खिलाड़ी द्वारा विश्व टेस्ट मैच में शतक पूर्ण करने की संभावना इत्यादि ।

संभावना, सम्माविता अथवा प्रायिकता की अवधारणा जीवन के प्रत्येक पहलू से सम्बन्धित होने के कारण काफी लोकप्रिय हो गई है । सांख्यिकी अर्थ में प्रायिकता कोरा अटकल मात्र या कोई भावनाल्फ कथन नहीं है वरन् इस धारणा का एक वैज्ञानिक आधार है जिससे किसी घटना के घटित होने की संभावना का माप होता है ।

14.2 उद्गम एवं विकास (Origin and Development)

प्रायिकता सिद्धान्त की उत्पत्ति एवं विकास सत्रहवीं शताब्दी में यूरोप के सटोरियों एवं जुआरियों द्वारा की इगई, जिन्होंने भाग्यलक्ष्मी की चंचलता से निराश होकर उस समय के प्रसिद्ध गण्प्तिइग़े से सूत क्रीडा सम्बन्धी समस्याओं के समाधान के लिए परामर्श लेना शुरू किया । इन गणितज्ञों द्वारा ही प्रायिकता सिद्धान्त का प्रादुर्भाव हुआ । सर्वप्रथम जेरोम कार्डन (Jerome Cardan 1501–1576) नामक इटली के गणितज्ञ ने ('Book on Games of Chance') शीर्षक से एक पुस्तक की रचना की । इसके पश्चात् इटली के ही एक अन्य प्रसिद्ध गणितज्ञ-गैलिलियो (Galileo1564-1642) ने पासा फैंकने सम्बन्धी समस्याओं के समाधान हेतु प्रायिकता का अंकात्मक माप दिया । परन्तु प्रायिकता के गणितीय सिद्धान्त के सुव्यवस्थित और वैज्ञानिक आधार का प्रतिपादन सत्रहवीं शताब्दी के मध्य में फ्रांस के प्रसिद्ध गणितज्ञ ब्लैज पास्कल (Blaise pascal 1623–1662) एवं पियर डी फरमैट (pierre de fermat: 1601-1665) द्वारा किया गया । इसी दिशा में स्विट्जरलैण्ड के प्रसिद्ध गणितज्ञ जे. बर्नोली (j.Bernouli:1654-1705) ने अपनी पुस्तक 'Ars Conjectandi' में बर्नोली प्रमेय एवं उससे सम्बन्ध सिद्धान्तों का विवेचन किया जिनका आधुनिक प्रायिकता में महत्त्वपूर्ण स्थान है ।

अठारहवीं तथा उन्नीसवीं शताब्दी में अनेक विद्वानों द्वारा प्रायिकता सिद्धान्त के विभिन्न प्रमेयों और महत्त्वपूर्ण अवधारणाओं का विकास किया गया जैसे - टॉमस बेयज (Thomas Bayes:1702–1761) ने प्रतिलोम प्रायिकता (Inverse Probaility) जिसे बेयज प्रमेय (BayesTheorem) के नाम से जानते हैं, फ्रांसिसी

गणितज्ञ पियर साइमन डी लॉप्लेस (pierre-simpon De Laplace:1749-1827) ने प्रायिकता के चिर प्रतिष्ठित सिद्धान्त (Classical Theory of Probality) का प्रतिपादन, रॉनेल्ड ए. फिशर (R.A.Fisher) ने प्रतिदर्श समष्टि की अवधारणा का विकास किया । प्रायिकता के आधुनिक सिद्धान्त का प्रतिपादन रूसी गणितज्ञों - विशेषत: चेबिचेब (Chebychev: 1821-1894) ए. मार्कोव (A.Markov:1856-1922) तथा ए.एन. कॉल्मोगोरोव (A.N. Kolmogorov) द्वारा किया गया ।

14.3 प्रायिकता का महत्त्व एवं प्रयोग (Importance and Uses of Probability)

वर्तमान में प्रायिकता सिद्धान्त की उपयोगिता केवल ताश खेलने वालों, पासा फेंकने वालों, जुआरियों तथा सटोरियों तक ही सीमित नहीं है बल्कि उन सभी क्षेत्रों में प्रायिकता सिद्धान्त महत्त्वपूर्ण है जहाँ घटनाएँ अनिश्चित होती हैं और भविष्य के लिए अनुमान लगाने होते हैं ।

एमाइल बोरेले के अनुसार "प्रायिकता-सिद्धान्त केवल अपने जन्मदाताओं-ताश खेलने वालों व पासा फेंकने वालों के लिए ही रूचि का विषय नहीं रहा है । आपितु उन सभी कार्यशील व्यक्तियों, उद्योग के अध्यक्षों अथवा सेनाध्यक्षों के लिए महत्त्वपूर्ण है जिनकी सफलता उचित निर्णयों पर आश्रित होती है ।प्रायिकता केवल बीमा-सिद्धान्त व सांख्यिकी में ही नहीं अपितु भौतिक शास्त्र और प्राणिशास्त्र की अनेक शाखाओं में महत्त्वपूर्ण है । क्रॉजनडेन एवं काउडेन के अनुसार, फायिकतात्मक तर्क का प्रयोग जुआ, बीमा, सैद्धान्तिक भौतिकी, प्राणिशास्त्र, अर्थशास्त्र तथा ऐसे ही अनेक क्षेत्रों में किया जाता है । निष्कर्षत: हम कह सकते हैं कि अर्थशास्त्र, व्यवसाय प्रबन्धन, बीमा-व्यवसाय, प्राकृतिक व भौतिक विज्ञान, संयोग पर आधारित क्रीडाओं आदि से सम्बन्धित निर्णय प्रायिकता सिद्धान्त के आधार पर ही लिए जाते हैं ।

कौने व कीपिंग के अनुसार 'प्रायिकता सिद्धान्त आधुनिक गणित की अत्यन्त रोचक शाखाओं में से एक है और ज्ञान के अनेक क्षेत्रों में अनुप्रयोगों के लिए महत्त्वपूर्ण है ।

प्रयोग (Uses)

1. सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन के प्रयोग
2. संयोग के खेल व दाँव लगाने का आधार
3. दीर्घकालीन औसत
4. सांख्यिकी निर्वचन में अनुप्रयोग
5. निदर्शन सिद्धान्त का आधार
6. सांख्यिकी निर्णयन सिद्धान्त का आधार
7. प्रायिकता तुलनात्मक निर्णयन मे सहायक
8. आर्थिक एवं व्यवसायिक निर्णयों में प्रयोग

14.4 परिभाषा (Definitions)

साधारण शब्दों में 'प्रायिकता किसी अनिश्चित घटना के घटित होने या न होने के सम्बन्ध में हमारी प्रत्याशा का माप है । "

लाप्लेस के अनुसार 'प्रायिकता अनुकूल घटनाओं का समान सम्भावित वाली समस्त घटनाओं के साथ अनुपात है।“

यदि अनुकूल परिस्थितियों को P द्वारा, प्रतिकूल परिस्थितियों को q द्वारा एवं कुल परिस्थितियों को n द्वारा अभिव्यक्त करें तब, किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता $p(E)\frac{p}{n}$ या $\frac{p}{(p+q)}$ अथवा इसी प्रकार किसी घटना के न घटने की प्रायिकता अथवा $\frac{\text{अनुकूल परिस्थितियाँ}}{\text{कुल परिस्थितियाँ}}$ प्रकार किसी घटना के न घटने की प्रायिकता = $\frac{q}{n}$

> अनिशिचतता कि स्थिति में किसी घटना (E) के घटने के प्रायिकता O से 1 के मध्य होती हैं जबकि कोई घटना निशिचत रूप सें घटेगी तो उसकी प्रायिकता 1एवं यदि वह घटना निशिचत रूप सें नहीं घटेगी तब उसकी प्रायिकता O होगी।

14.5 सीमाएँ (Limitations)

1. पारभीषा में सम-प्रायिक (equally likely), समान सम्भाविता वाली या समान रूप से घटित होने वाली स्थितियाँ सदैव संभव नहीं होती ।
2. इस परिभाषा की उपयोगिता वहाँ समाप्त हो जाती है जहाँ संम्भाव्य स्थितियों की कुल संख्या ज्ञात करना अनिश्चित हो ।
3. यदि घटना के परिणाम अपरिमित और अनिश्चित हो तो उनकी गणना संभव नहीं है ।
4. जिन विषयों के सम्बन्ध निर्णय निशिचत रूप से लिए जा सकते हैं, उन विषयों मे प्रायिकता सिद्धान्त का प्रयोग भ्रामक निष्कर्ष देता है, जैसे - भारत में 15 से 25 वर्ष की आयु के लोगों में से आधे पुरूष हैं आधी स्त्रियाँ । एक व्यक्ति जिसकी आयु 20 वर्ष है का नाम x है । उसके स्त्री या पुरूष होने की संभावना क्या हे? प्रायिकता सिद्धान्त के अनुसार 1/2 है । परन्तु वास्तव में वह या तो पुरूष हो सकता है या स्त्री ।

14.6 प्रायिकता कि अवधारणाएँ (Approaches / Concepts of Probability)

प्रायिकता की निम्नलिखित अवधारणाऐं हैं

1. चिर प्रतिष्ठित अवधारणा अथवा गणितीय या पूर्ववर्ती प्रायिकता (Classical Approach of Probability or Mathematical or a priori Probability)
2. प्रयोगाश्रित या सापेक्ष आवृत्ति अवधारणा अथवा आनुभविक या सांख्यिकीय प्रायिकता

3. (Empirical or Relative Frequency approach or statistical Probability)

4. व्यक्तिपरक अवधारणा (Subjective Approach)

प्रायिकता की चिरप्रतिष्ठित अवधारणा (Classical Approach to Probability)

यह प्रायिकता की सबसे प्राचीन एवं सरल अवधारणा है । आज भी इस अवधारणा. का महत्त्व प्रायिकता के मूलभूत सिद्धान्तों को समझने में और परिकलन करने में ज्यों का त्यों बना हु आ है । इस विचारधारा के प्रणेता लाप्लेस के अनुसार "अनुकूल घटनाओं की संख्या का समान रूप से सम्भावित समस्त घटनाओं की कुल संख्या से अनुपात की प्रायिकता है" उदाहरण के लिए एक सिक्के को उछालने पर उसके चित्त गिरने की प्रायिकता । यहाँ चित्त या पट गिरने की समान संभावना है चित्त गिरने की प्रायिकता भी 1/2 है और पट गिरने की प्रायिकता भी 1/2 है । यह वास्तव मे समान रूप से संभाव्य वाली मान्यता के कारण हैं, क्योंकि सिक्का या तो चित्त गिर सकता है या पट। यह समान रूप से सम्भाव्य की विचारधारा दैव निदर्शन विधि पर आधारित है । इसमें प्रत्येक इकाई की प्रतिदर्श में चुने जाने की संभावना समान मानी जाती है ।

प्रायिकता की प्रयोगाश्रित अवधारणा (Subjective Approach to Probability)

प्रयोगाश्रित अवधारणा निगमनात्मक तर्क पर नहीं बल्कि आनुभविक संमकों तथा वर्तमान परीक्षणों पर आधारित है । इस अवधारणा को मानने वाले विद्‌वानों का मत है कि 'समान रूप से संभाव्य वाली मान्यता सदैव उचित नहीं होती है । अत: इस विचारधारा के अनुसार प्रायिकता का परिकलन प्रयोगाश्रित अवधारणा अर्थात् आनुभविक परिणामों द्‌वारा आनुपातिक आवृत्ति के आधार पर होना चाहिए ।

उदाहरण: किसी सिक्के के चित्त गिरने की प्रायिकता की गणना के लिए उसको कई बार उछालते हैं तथा बार-बार गिरने के परिणामों को लिख लेते हैं, अब यदि सिक्का 100 बार उछालने पर 60 बार चित्त आता है जो इस अवधारणा के अनुसार अगली 'उछाल में चित्त गिरने की प्रायिकता $\frac{60}{100} = 0.6$ होगी ।

प्रायिकता की व्यक्तिपरक अवधारणा (Subjective Approach to Probability)

यह अवधारणा उन परिस्थितियों में उपयुक्त होती है जहाँ प्रायिकता के अनुमान उपलब्ध न हो सकें अर्थात न तो पूर्व प्रायिकता सम्बन्धी निगमन तर्क के नियम लागू हों और न ही घटना के घटित होने के सम्बन्ध में अभिप्रयोग किए जा सकें । उदाहरणार्थ - अगले चुनावी में राम व श्याम में सें कौन जीतेगा तो यहाँ वस्तुपरक प्रायिकता के नियम लागू नहीं किए जा सकते क्योंकि उसके अनुसार तो राम के जीतने की प्रायिकता 1/2 एवं श्याम के जीतने की प्रायिकता 1/2 अर्थात बराबर है । दूसरी ओर प्रयोगाश्रित अवधारणा के अनुसार यह संभव नहीं है कि राम व श्याम दोनों को 50-100 बार चुनाव में खडे होकर जीतना-हारना होगा उसके बाद ही जीत की आवृत्ति निकाली जाए । इन्हीं वजहों से ऐसी परिस्थितियों में जब समान संभावना वाली

मान्यता लाग न हो एवं प्रयोग करना संभव न हो तब इस व्यक्तिपरक अवधारणा का प्रयोग करते हैं । इसमें व्यक्तिगत जानकारी व विचार के आधार पर प्रायिकता निकाली जाती है ।

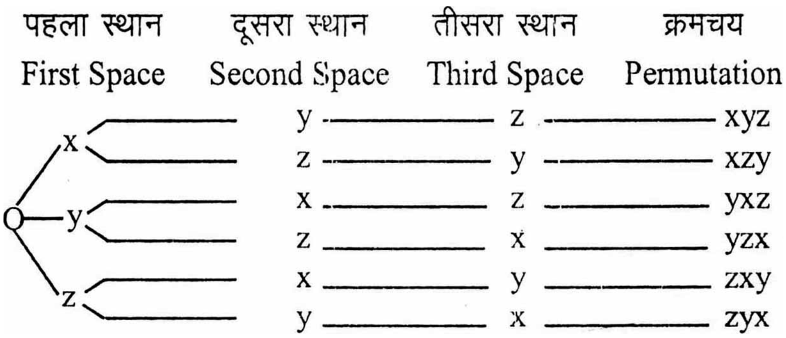
प्रायिकता की परिभाषा, अवधारणाऐं, महत्व हम अब तक जान चुके हैं । अब प्रायिकता की गणना कैसे की जाती है यह सीखेंगे ।

14.7 गणना की तकनीकें : क्रम एवं संचय (Counting Techniques: Permutation and Combination)

क्रमचय (Permutations)

दी गई निश्चित वस्तुओं का निश्चित क्रम में विन्यास (Arrangement) क्रमचय कहलाता है । 'क्रमचय' से तात्पर्य उन समस्त क्रमों से हैं जिनमें हम दी हुई वस्तुओं (n) में से कुछ (r) या सभी वस्तुओं को एक साथ लेकर विन्यासित (Arrange) कर सकते हैं । '

इस प्रकार जहाँ क्रम (Order), कोटि (Rank) ग्रेड (Grade) महत्त्वपूर्ण होते हैं, वहीं क्रमचय की गणना की जाती है । जैसे तीन पुरसकों x,y,z के क्रमचय इस प्रकार होंगे -



क्रमचय से सम्बन्धित प्रमुख सूत्र निम्नलिखित हैं -

विविध वस्तुओं n में से कुछ वस्तुओं (r) को एक बार में लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या सूत्र $^{n}p_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

n! पहली n संख्याओं का सतत् गुणनफल है जैसे n=6! हो तो

$6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$

0! = 1 होता है ।

(ii) n विविध वस्तुओं में से समस्त वस्तुओं को एक साथ लेकर बनने वाले क्रमचयों की संख्या $^{n}p_{n} = n!$ होगी ।

उदाहरण 1

सात स्थानों वाले एक रेल के डिब्बे में 5 यात्री घुसते हैं, वे कितने तरीकों से बैठ सकते हैं?

हल: n= 7, r = 5 : ${}^{n}p_{r} = {}^{7}p_{5} = \frac{7!}{2!} = 2520$ तरीके

उदाहरण : 2

शब्द TRIANGLE' के सभी अक्षरों में कितने क्रमचय बन सकते हैं । (अ) एक समय में सभी अक्षरों को लेकर (ब) एक समय में 3 अक्षरों को लेकर (स) एक समय में सभी अक्षर लेकर यदि T सदा आरम्भ में आये और E सदा अन्त में ।

हल: TRIANGLE' शब्द में 8 विभिन्न अक्षर हैं ।

(अ) सभी आठ अक्षरों को लेकर ${}^{8}p_{8} = 8!$ अर्थात 40320 क्रमचय बनेंगे ।

(ब) तीन अक्षर लेकर ${}^{8}p_{3} = \frac{8!}{5!}$ = 336 क्रमचय बनेंगे ।

(स) सभी आठ अक्षरों को लेकर लेकिन T से शुरू होकर और 8 पर समाप्त होने वाले क्रमचयों की संख्या इस प्रकार ज्ञात की जायेगी -

'T' सदा आरम्भ में और 'E' सदा अन्त में रहेगा ।

शेष 8 -2=6 अक्षरों के ${}^{6}p_{6} = 6!$=720 क्रमचय बनेंगे ।

उदाहरण : 3

2,3,6,0,8,4 अंकों से 6 अंकों वाली कुल कितनी संख्याऐं बनाई जा सकती हैं?

हल : 6 विभिन्न अंक दिये हुए हैं और उनसे 6,6 अंकों की संख्याऐं बनानी हैं । अत: 6 अंकों, वाली राशियों की संख्या $6_{p_6} = 6! = 720$ संख्याओं में ऐसी संख्याएं भी सम्मिलित हैं जो शून्य (0) में आरम्भ होती हैं और ऐसी संख्याऐ वास्तव में 5 अंकों की संख्याएं हैं । ये संख्याएं कुल ${}^{5}p_{5} = 5! = 120$ हैं जो कि 720 से सम्मिलित हैं अत: 6 अंकों वाली राशियों की वास्तविक संख्या ${}^{6}p_{6} = 600$ होगी ।

(iii) nवस्तुओं में से यदि I एक प्रकार की q दूसरे प्रकार की तथा r तीसरे प्रकार की हों तो कुल व्यवस्थाऐं अथवा क्रमचय होंगे । $\frac{n!}{p!q!r!}$

उदाहरण. 4

निम्नलिखित शब्दों के अक्षरों को कितने प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है ।

(i) STATISTICS (ii) COMMITTEE

हल:	(i) STATICS शब्द में कुल 10 अक्षर हैं जिनमें 3 'S' 3'T',2 'I' हैं और शेष अक्षर अलग-अलग हैं । अत: क्रमचयों की संख्या हैं -

$$\frac{n!}{p!q!r!} = \frac{10!}{3!3!2!} = 50,400$$

(ii) COMMITTEE शब्द में 2 'M' 2 'T', 2 'E' कुल तथा शेष अक्षर अलग-अलग हैं । अत: क्रमचयों की संख्या है

$$\frac{9!}{2!2!2!} = 45360$$

अब हम गणना की दूसरी तकनीक संचय' के बारे में पढ़ेंगे ।

संचय (Combination)

क्रम को ध्यान में न रखते हुए निश्चित वस्तुओं के वर्गो या चयनों को संचय कहते हैं । दूसरे शब्दों में, दी गई वस्तुओं में से कुछ अथवा सबको लेकर जितने विभिन्न चुनाव किए जा सकते हैं अथवा जितने विभिन्न समूह बन सकते है, वे संचय हैं । संचय के साथ समूह (Group), चयन (Selection) आदि शब्द जुड़े रहते हैं ।

ABऔर BA एक ही संचय हैं, क्योंकि इन दोनों में एक ही तत्व विद्यमान है, जबकि ये दो अलग-अलग क्रमचय हैं । इस प्रकार संचय में क्रम महत्वपूर्ण नहीं होता है ।

संचय संबंधी महत्त्वपूर्ण सूत्र इस प्रकार है -

(i) n असमान वस्तुओं में से त r वस्तुएँ लेकर बनने वाले कुल संचय (समूह)

$^{n}C_{r}$ .... अर्थात $\frac{n!}{(n-r)!r!} = 1$ 0! =1

(ii) n असमान वस्तुओं में से सभी n वस्तुओं को साथ लेकर बनने वाले संचय $^{n}C_{n}$

अर्थात् $\beta_2 = 3 + \frac{1}{m}$ $\frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{0!n!} = 1$

उदाहरण : 5

6 गणितज्ञों एवं 7 चिकित्सकों में से 2 गणितज्ञों एवं 3 चिकित्सकों की एक समिति बनानी है । यह समिति कितने प्रकार से बनाई जा सकती है?

हल:	6 गणितज्ञों में से 2 का चुनाव $^{6}C_{2}$ प्रकार से किया जा सकता हे एवं 7 चिकित्सकों में से 3 का चुनाव $^{7}C_{3}$ प्रकार से किया जा सकता हे, अत: गणितज्ञों एवं चिकित्सकों के चुनाव के कुल तरीके

$= {}^{6}C_{2} \times {}^{7}C_{3}$

$= \frac{6x5}{2x1} = \frac{7x6x5}{3x2x1}$

$= 15x35 = 525$

(iii) n असमान वस्तुओं में से r वस्तुओं को लेकर बनाये गये संचय जबकि x वस्तुएँ सदैव चुनी जायें ।

$${}^{n-x}C_{r-x}$$

उदाहरण : 6

15 क्रिकेट खिलाड़ियों में से एक 11 सदस्यी क्रिकेट टीम कितने तरीकों से छाँटी जा सकती है यदि (क) एक विशिष्ट खिलाड़ी को सदा शामिल करना हो (ख) एक विशिष्ट खिलाड़ी को टीम में कोई स्थान न देना हो?

नोट: एवं (and) के लिए गुणा (x) तथा (or) के लिए योग (+) करें ।

हल: (क) 15 खिलाड़ियों में से 11 चुनने हैं किन्तु एक व्यक्ति विशेष को अवश्य शामिल करना है । एक खिलाड़ी को टीम में लेने के बाद 14 में से 10 का ही चुनाव करना है जिसके कुल तरीके

$${}^{14}C_{10} = \frac{14!}{(14-10)!10!} = \frac{14x13x12x11}{4x3x2x1} = 1001$$

(ख) 15 खिलाड़ियों में से 1 विशेष खिलाड़ी को सदा छोड़ देना है । इस प्रकार 14 में से 11 छाँटने हैं जिसके कुल तरीके -

$${}^{14}C_{11} = \frac{14!}{(14-11)!11!} = \frac{14x13x12}{3x2x1} = 364$$

उदाहरण : 7

एक थैले में 5 काली, 3 सफेद ओर 2 लाल गेंदे हैं । बताइये कितने तरीकों से

(क) गेंदे निकाली जा सकती हैं ।

(ख) सफेद गेंदे निकाली जा सकती है ।

(ग) काली और 2 सफेद गेंदे निकाली जा सकती हैं ।

(घ) प्रत्येक रंग की एक-एक गेंद निकाली जा सकती है ।

हल : (क) कुल 5+3+2=10 गेंदों में से 3 गेंदे ${}^{10}C_3$ तरीकों अर्थात्

$\frac{10!}{(10-3)!3!} = \frac{10!}{7!3!} = 120$ तरीकों से निकाली जा सकती है ।

(ख) 2 सफेद गेंदें 3 सफेद गेदों में ${}^{3}C_2$ = 3 तरीकों से निकल सकती हैं ।

(ग) 3 काली गेंदें निकालने के तरीके = ${}^{5}C_3$

2 सफेद गेंदें निकालने के तरीके= ${}^{3}C_2$

3 काली और 2 सफेद गेंदें चुनने के तरीके $= {}^{5}C_3 \times {}^{3}C_2$

$$= 10 \times 3 = 30$$

(घ) तीनों रंग की एक-एक गेंद अर्थात् 1 काली, 1 सफेद और 1 लाल गेंद के निकाले जाने के तरीकों की संख्या -

$${}^{5}C_1 \times {}^{3}C_1 \times {}^{2}C_1$$

$= 5 \times 3 \times 2 = 30$

(iv) सभी सम्भाव्य संचयों की कुल संख्या $2^n - 1$ होती है । n वस्तुओं में से कुछ या सभी वस्तुओं को लेकर बनने वाले संचयों की संख्या इस प्रकार ज्ञात की जाती है । प्रत्येक वस्तु चुनने के दो तरीके हैं, या तो वह चुनी जा सकती है या छोड़ी जा सकती है और प्रत्येक वस्तु के 2 तरीकों से अन्य वस्तुओं के 2 तरीके सम्बद्ध हैं इस प्रकार प्र वस्तुओं को चुनने के तरीकों की कुल संख्या $2 \times 2 \times 2 .....n$ अर्थात् 2^n होगी, लेकिन इसमें एक ऐसी परिस्थिति भी शामिल है जिसमें प्रत्येक वस्तु को छोड़ दिया जाये, अत: कुल संचयों की संख्या $2^n - 1$ होगी ।

वैकल्पिक रीति ${}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + {}^nC_4 ..... + {}^nC_n = 2^n - 1$

उदाहरण : 7

एक व्यक्ति के 6 मित्र हैं । 6 मित्रों में से एक अथवा अधिक को भोज पर कितने तरीकों से बुलाया जा सकता है?

हल: ${}^6C_1 + {}^6C_2 + {}^6C_3 + {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6$

$= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$

वैकल्पिक विधि $= 2^n - 1$

$2^6 - 1 = 63$

(v) वस्तुओं में से जिनमें कुछ समान हो, कुछ को लेकर बनने वाले संचय एवं क्रमचयों की संख्या संचय $= {}^nC_r$

क्रमचय $= {}^np_r = {}^nC_r \times r!$

(vi) n असमान वस्तुओं में से r को एक साथ लेकर बने संचयों की संख्या जबकि p विशेष वस्तु किसी भी समूह में नहीं लेनी हों -

14.8 प्रायिकता का आकलन (Calculation of Probability)

प्रायिकता का आकलन हर प्रकार की घटनाओं के लिए अलग-अलग तरीकों से किया जाता है । घटनाऐं निम्नलिखित प्रकार की होती हैं :-

1. सरल एवं संयुक्त घटनाऐं (Simple and Compound Events)

2. स्वतंत्र एवं संयुक्त घटनाऐं (Independent and Dependent Events)

3. परस्पर अपवर्जी घटनाऐं (Mutually Exclusive Events)

4. जब घटनाएँ परस्पर अपवर्जी न हों (Not Mutually Exclusive Events)

5. समान रूप से घटने वाली घटनाऐं (Equally likely Events)

अब हम इन सभी घटनाओं को विस्तार से समझेंगे ।

1. सरल एवं संयुक्त घटनाऐं (Simple and Compound Events)

जब एक समय में केवल एक ही घटना के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात करनी हो तो वह सरल घटना कहलाती है । जैसे

ताश की गड्डी से एक बेगम निकालना $= \frac{4}{52}$

एक पासे को उछालने पर 3 आने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$

इसके विपरीत दो या दो से अधिक घटनाएँ एक साथ घटती हैं तो उनके संयुक्त रूप से घटित होने को संयुक्त घटना कहते हैं । जैसे - 2 सिक्के एक साथ उछालना, 3 पासे. एक साथ फेंकना।

2. **स्वतंत्र एवं आश्रित घटनाएँ (Independent and Dependent Events)**

संयुक्त घटनाऐं परस्पर स्वतंत्र हो सकती हैं या आश्रित । जब दो घटनाओं का प्रभाव एक दूसरे पर नहीं पड़ता है तो वे स्वतंत्र घटनाऐं कहलाती हैं ।

सांकेतिक रूप में, p (A and B) = p (A)×p (B)

जैसे : एक गड्डी में से एक लाल रंग का ताश निकालने की प्रायिकता $\frac{26}{52}$ है । इस पत्ते को गड्डी में रखकर इस बार काला पत्ता आने की प्रायिकता $\frac{26}{52}$ होगी । इस प्रकार दो बार पत्तों को निकालना स्वतंत्र घटनाऐं हैं, अर्थात् दोनों घटनाओं ने एक दूसरे की प्रायिकता को प्रभावित नहीं किया है ।

आश्रित घटनाएँ वे होती हैं, जिनमें से एक घटना घटने का प्रभाव दूसरी के घटित होने पर पड़ता है ओर प्रायिकता पूर्ववत नहीं रहती है ।

सांकेतिक रूप में, P (A and B) =p (A) x p (B/A*)

यहाँ (B/A) का आशय (Probability Of B given A है ।

(1) Probability of (A/B) अर्थात A given B $= \frac{p(AB)}{p(B)}$

(2) probability of (B/A) अर्थात् B given A $= \frac{p(AB)}{p(A)}$

जैसे. 52 पत्तों की ताश की गड्डी में से लाल पत्ता निकालने की प्रायिकता $\frac{26}{52}$ है, परन्तु लाल पत्ता निकालने के बाद उसे गड्डी में रखे बिना ही दूसरी बार एक पत्ता निकाला जाये तो अब पत्ता खींचे जाने की प्रायिकता $\frac{26}{51}$ हो जाएगी । इस प्रकार की संभावना को प्रतिबन्धित प्रायिकता (Condition Probabilty) भी कहते हैं ।

स्वतंत्र तथा आश्रित घटनाओं की मिश्रित्र प्रायिकता ज्ञात करने के लिए गुणन -प्रमेय का प्रयोग किया जाता है गुणन प्रमेय को आगे समझाया गया है।

उदाहरण : 8

52 पत्तों की ताश की गड्डी में एक पत्ता निकाला व उसका रंग देखकर वापिस मिला दिया, अब दुबारा एक पत्ता निकाला । दोनों पत्तों के चिड़ी के होने की प्रायिकता ज्ञात करें ।

हल: पहली बार में चिड़ी का पत्ता एवं दूसरी बार में चिड़ी का पत्ता आने की प्रायिकता ज्ञात कराई है, क्योंकि पत्ता वापस रख दिया जाता है, अत: यह प्रश्न स्वतंत्र घटनाओं का है ।

$$p = \frac{13}{52} x \frac{13}{52} = \frac{1}{16}$$

उदाहरण : 9

एक ढेर में 20 इकाइयाँ हैं जिनमें से 6 दूषित हैं । इस ढेर में से एक-एक करके बिना वापस रखे हुए 3 इकाइयाँ निकाली गई । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि सभी इकाइयाँ अदूषित थी ।

हल : कुल इकाइयाँ = 20

दूषित = 6

अदूषित = 14

पहली बार अदूषित इकाई चुनने की प्रायिकता $= \frac{14}{20}$

दूसरी बार अदूषित इकाई चुनने की प्रायिकता $= \frac{13}{19}$ (बिना वापस रखे)

तीसरी बार अदूषित इकाई चुनने की प्रायिकता $= \frac{12}{18}$ (बिना वापस रखे)

अत: वांछित प्रायिकता पहली, दूसरी एवं तीसरी बार अदूषित इकाई चुनने की

$$\frac{14}{20} x \frac{13}{19} x \frac{12}{18} = \frac{91}{285}$$

3. **परस्पर अपवर्जी घटनाएँ (Mutually Exclusive Events)**

जब दो घटनाऐं एक साथ नहीं घट सकती हैं तो परस्पर अपवर्जी कहा जाता है । इसमें से एक घटना का घटित होना दूसरी घटना को घटने से रोक देता है । जैसे - एक सिक्का उछालने पर वह या तो चित्त या पट । वह दोनों तरह से एक साथ नहीं गिर सकता है । अत: चित्त गिरना और पट गिरना परस्पर अपवर्जी घटनाऐं हैं ।

सांकेतिक रूप में, यदि A व B परस्पर अपवर्जी घटनाऐं हो तों

$$p(AorB) = p(A) + p(B)$$

परस्पर अपवर्जी घटनाओं में प्रायिकता योग प्रमेय* द्वारा परिकलित की जाती हैं
*योग प्रमेय को आगे समझाया गया हैं।

निम्न चित्र से परस्पर अपवर्जी घटनाओं का अर्थ स्पष्ट हो जायेगा ।

चित्र परस्पर अपवर्जी घटनाएँ - असंयुक्त समुच्चय

उदाहरण : 10

एक थैले में 8 गेंदें लाल रंग की, 5 गेंदे काले रंग की, 7 गेंदे नीले रंग की और 7 गेंदे सफेद रंग की हैं, यदि 1 गेंद को थैले से आँख बंद करके निकाला जाता है तो प्रायकिता बताइए-

अ. उस गेंद के काली होने की

ब. उस गेंद के नीला या लाल होने की

स. उस गेंद के सफेद न होने की

द. उस गेंद के लाल या काला या नीला या सफेद होने की

हल : अ. गेंद के काली होने की प्रायिकता $=\frac{5}{27}$

ब. गेंद के नीला या लाल होने की प्रायिकता

$$p\left(BorR\right)=p\left(Blue\right)+p\left(Red\right)$$

$$\frac{7}{27}+\frac{8}{27}=\frac{15}{27}=\frac{5}{9}$$

स. गेंद के सफेद न होने की प्रायिकता

$$1-p\left(W\right)=1-\frac{7}{27}=\frac{20}{27}$$

द. गेंद के लाल या नीला, या काला या सफेद होने की प्रायिकता

$$p\left(R\right)+P\left(B\right)+P\left(B\right)+P\left(W\right)$$

$$\frac{8}{27}+\frac{5}{27}+\frac{7}{27}+\frac{7}{27}+\frac{27}{27}=1$$

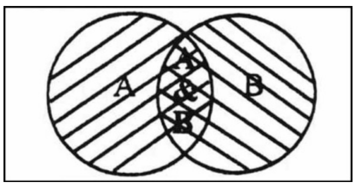
जब घटनाएँ परस्पर अपवर्जी न हों (Not Mutually Exclusive Events)

घटनाएँ परस्पर अपवर्जी तब नहीं कही जाती जब उनमें कोई समान अवयव (Commonelement) हों अर्थात् जब दो घटनाओं A व B में से या तो A या B दोनों घट सकती हैं तो वे पूर्ण रूप से अपवर्जी नहीं कहलाती हैं । इस स्थिति में प्रायिकता योग प्रमेय के संशोधित रूप से ज्ञात की जाती है । इसमें दोनों घटनाओं के समान अवयव को प्रायिकता के योग में से घटा दिया जाता है ।

P (A या B) =P (A)+p (B) - p (A and B)

समुच्चय सिद्धान्त (Set Theory) के संकेतों के रूप में -

$$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+p\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)$$



चित्र =p (A) +p (B) - p (A&B)

दो से अधिक ऐसी घटनाओं में जो कि परस्पर अपवर्जी न हो, में भी योग प्रमेय का संशोधित रूप लागू करके प्रायिकता ज्ञात की जाती है ।

P (A या B या C) =P (A) +P (B) +P (C) - P (A&B) - P (A&C)- P (B&C)+P (A&B&C) समुच्चय के रूप में

$$P(A\cup B\cup C)P(A)+p(B)+P(C)$$
$$-p(A\cap B)-p(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

उदाहरण :11

यदि दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं तो यह प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि अंकों का जोड़ न तो 7 है न 12

हल. 7 के जोड़ को A द्वारा तथा 12 के जोड़ को B संकेत द्वारा दर्शाया गया है ।

दो पासों के फेंकने पर संभावित कुल परिणाम 6X6=36 हैं ।

7 का जोड़ यानि A घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या = 6

(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)

12 का जोड़ यानि B घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या = 1

(6, 6)

7 का जोड़ आने की प्रायिकता = $p(A)=\frac{6}{36}$

12 का जोड़ आने की प्रायिकता $=p(B)=\frac{1}{36}$

7 का जोड़ व 12 का जोड़ न आने की प्रायिकता $=1-p(A\cap B)$

$$1-\{p(A)+p(B)\}$$
$$-1-\left[\frac{6}{36}+\frac{1}{36}\right]=\frac{29}{39}$$

उदाहरण. 12

एक लाटरी के 50 टिकटों पर 1 से 50 तक के अंक लिखे हुए हैं, एक टिकिट दैव विधि से चुना 4 गया । उस टिकिट के 5 या 6 से गुणित होने की क्या प्रायिकता है?

हल : 50 संख्याओं में से 5 से गुणित संख्याऐं (5,10,15,20,25,30,35,40,45,50) अर्थात् अनुकूल परिस्थितियाँ = 10 एवं कुल परिस्थितियाँ 50 अत: प्रायिकता = $=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$

6 से गुणित संख्याऐं (6,12,18,24,30,36,42,48,) अत: कुल अनुकूल परिस्थितियाँ 8

अत: प्रायिकता $=\frac{8}{50}$

लेकिन 1 से 50 तक संख्याओं में से 5 से गुणित या 6 से गुणित संख्या का होना परस्पर अपवर्जी घटनाएँ (MutuallyExclusive Events) नहीं हैं, क्योंकि इसमें 30

का अंक समान अवयव (Common Element) हैं जो 5 व 6 दोनों से ही गुणित है । अत: वांछित प्रायिकता - प्रायिकता (घटना अ या ब घटने की)

= (घटना अ की प्रायिकता + घटना की प्रायिकता - घटना अ ब की प्रायिकता)

$$=\frac{10}{50}+\frac{8}{50}-\frac{1}{50}=\frac{17}{50}$$

5. समान रूप से घटने वाली घटनाएँ (Equally Likely Events)

वे घटनाऐं जो दीर्घकालीन एवं बहु आवर्त अवसर में एक दूसरे के समान घटित हों, जैसे- एक अनभिनत (Unbiased) सिक्के अथवा पासे के फेंके जाने पर प्रत्येक पहलू (Face) दीर्घकालीन में समान रूप में आवृत्त होगा । सिक्का या पासा अभिनत (Baised) होने पर घटनाऐं समप्रायिक नहीं होगी ।

अब तक हम प्रायिकता के लिए विभिन्न प्रकार की घटनाओं को समझ चुके हैं, अब हम प्रायिकता के आकलन के लिए विभिन्न नियमों को समझेंगे ।

14.9 प्रायिकता आकलन के नियम

प्रायिकता के आकलन के लिए मुख्य रूप से निम्नलिखित नियमों का प्रयोग होता है ।

1. गणितीय प्रमेय (Mathematical Theorem)

2. योग प्रमेय (Additive Theorem)

3. गुणन प्रमेय (Multiplicative Theorem)

4. बर्नोली प्रमेय (Bernoulli's Theorem)

1. गणितीय प्रमेय (Mathematical Theorem)

इस नियम के अनुसार किसी घटना के घटित होने की अनुकूल स्थितियों की संख्या m प्रतिकूल स्थितियों की संख्या n तथा कुल सम्भाव्य स्थितियों की संख्या m+n मानी जाती है । किसी घटना के घटित होने या न घटित होने की सभी ढंग सम्प्रायिक (equally likely) होने पर घटना के घटित होने की प्रायिकता $(p)=\frac{m}{m+n}$

घटना के घटित न होने की प्रायिकता $=(q)=\frac{m}{m+n}$

इस नियम का प्रमेय सरल घटनाओं (Simple Events) व की प्रायिकता निकालने में किया जाता हैं।

2. योग प्रमेय (Additive Theorem)

जब दो अथवा दो से अधिक घटनाओं में या तो अ घटे या ब घटे या स घटे तो ऐसे स्थिति में प्रश्न योगात्मक प्रमेय के प्रश्न कहलाते हैं । इसमें घटनाओं की अलग-अलग प्रायिकताओ को जोड़ा जाता है ।

योगात्मक प्रमेय का दो स्थितियों में प्रयोग किया जाता है ।

1. जब घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हों 2. जब घटनाएँ परस्पर अपवर्जी न हों ।

1. जब दो या दो से अधिक परस्पर अपवर्जी घटनाऐं हों तो उनके घटित होने की' प्रायिकता योग प्रमेय से ज्ञात की जाती है । '

   दो घटनाऐं घटित होने पर P (A or B)=P (A) + P (B)

   दो से अधिक घटनाऐं घटित होने पर P (A or B or C)=P (A) +P (B) +P(C)+......

2. जब घटनाएँ परस्पर अपवर्जी न हों -

   घटनाएँ परस्पर अपवर्जी तब नहीं कही जाती जबकि उनमें कोई समान अवयव हो। जैसे - चिड़ी का पत्ता या इक्का । इसमें एक पत्ता चिड़ी का इक्का है जो दोनों में सम्मिलित है

$$P\left(AorB\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AandB\right)$$

$$P\left(AorBorC\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)+P\left(C\right)-P\left(AB\right)-P\left(BC\right)-P\left(AC\right)+P(ABC)$$

उदाहरण : 13

यदि ताश की गड्डी में से एक पत्ता यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है तो क्या प्रायिकता है कि वह 'ईट की बेगम या चिड़ी का बादशाह होगा?

हल : ईट की बेगम आना और चिड़ी का बादशाह आना परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं ।

ईट की बेगम निकलने की प्रायिकता $=\frac{1}{52}$

चिड़ी के बादशाह निकलने की प्रायिकता $=\frac{1}{52}$

अत: ईट की बेगम अथवा चिड़ी का बादशाह निकलने की प्रायि

$$=\frac{1}{52}+\frac{1}{52}=\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$$

उदाहरण : 14

ताश की गड्डी में से एक पत्ता यादृच्छिक रूप से निकाला गया, उसके एक चिड़ी का पत्ता या बादशाह होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए?

हल : 52 पत्तों की गड्डी में से चिड़ी का पत्ता निकलाने की प्रायिकता $=\frac{13}{52}$

एक बादशाह निकाले जाने की प्रायिकता $=\frac{4}{52}$

लेकिन बादशाहों में एक चिड़ी का बादशाह भी शामिल है ।

चिड़ी का बादशाह निकाले जाने की प्रायिकता (जो दोनों में शामिल है) $=\frac{1}{52}$

अत: चिड़ी का पत्ता या बादशाह निकाले जाने की प्रायिकता

P (चिड़ी या बादशाह) = P (चिड़ी) P (बादशाह) -P (चिड़ी का बादशाह)

$$=\frac{13}{52}+\frac{4}{52}-\frac{1}{52}$$

$= \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

3. गुणन प्रमेय (Multiplicative Theorem)

दी गई सभी घटनाओं के साथ-साथ घटने की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए गुणन प्रमेय का प्रयोग किया जाता है । गुणन प्रमेय दो या दो से अधिक घटनाओं के एक साथ घटने की प्रायिकता उनके अलग-अलग घटित होने की व्यक्तिगत प्रायिकताओं का गुणनफल है।

गुणन प्रमेय तब लाग होता है जब घटना A एवं घटना B के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात करनी हो अर्थात् जहाँ घटनाओं के मध्य 'और (and) शब्द होता है ।

दो स्वतंत्र घटनाएँ होने पर -

$$P(AandBandC) = P(A) \times P(B)$$

तीन स्वतंत्र घटनाएँ होने पर -

$$P(AandBandC) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

उदाहरण : 15

एक पासा दो बार फेंका जाता है । पहली फेंक में '4' बिन्दु आने की तथा दूसरी फेंक में एक विषम संख्या आने की क्या प्रायिकता है?

हल: पासे को दो बार फेंकना स्वतंत्र घटनाएँ हैं ।

प्रथम बार फेंकने से '4' आने की प्रायिकता $= \frac{1}{6}$

दूसरी बार फेंकने से विषम संख्या (1, 3 या 5) आने की प्रायिकता $= \frac{3}{6}$

पहली बार '4' और दूसरी बार में विषम संख्या आने की संयुक्त प्रायिकता $= \frac{1}{6} x$

$\frac{3}{6} = \frac{1}{12}$

4. बर्नोली प्रमेय (Bernoulli ’ s Theorem)

किसी घटना के एक परीक्षण में घटित होने (सफलता) की प्रायिकता ज्ञात होने पर, कुल n परीक्षणों में से उसके निश्चित रूप से r बार (exactly times) घटित होने की प्रायिकता जेम्स बर्नोलीं के निम्नलिखित सूत्र से निकाली जा सकती है ।

$$P(r) = {}^{n}C_{r} p^{r} q^{n-r}$$

P = घटना होने की प्रायिकता अर्थात् सफलता

q = घटना न घटने की प्रायिकता

r = घटना होने (सफलता) की स्थितियों की संख्या

${}^{n}C_{r} = n$ में से r वस्तुओं के संयोगों की संख्या

उदाहरण : 16

पाँच सिक्कों को उछालने पर 4 पट आने की प्रायिकता बताइए ।

हल : सिक्कों (प्रयासों) की संख्या n = 5

सफलता (Tail) की आवृति r = 4

असफलता (Head) की आवृत्ति n-1=5-4=1

$$p=\frac{1}{2};q=\frac{1}{2}$$

$$^{n}C_{r}^{1}p^{r},q^{n-r}$$

$$^{5}C_{4}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{4},\left(\frac{1}{2}\right)^{1}=\frac{5!}{1!4!}\times\frac{1}{32}=\frac{5}{32}$$

उदाहरण : 17

आठ सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं । निम्नलिखित परिणामों की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

(अ) एक चित्त आने की (ब) 8 चित्त आने की (स) कम से कम 6 चित्त आने की (द) कोई चित्त न आने की (य) सभी सिक्कों के चित्त आने की ।

हल : (अ) एक चित्त आने की प्रायिकता -

$$n=8,r=1,P=\frac{1}{2},q=\frac{1}{2}$$

$$^{n}C_{r}^{\;1}p^{r},q^{n-r=8}C_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{8-1}$$

$$\frac{8!}{7!1!}x\frac{1}{256}=\frac{8}{256}=\frac{1}{32}$$

(ब) 6 चित्त आने की प्रायिकता

$$n=8,r=6,p=q=\frac{1}{2}$$

$$^{8}C_{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$\frac{8!}{6!2!}x\frac{1}{256}=\frac{28}{256}=\frac{7}{64}$$

(स) कम से कम 8 चित्त आने अर्थात् 6 चित्त आना, 7 चित्त आना या 8 चित्त आना । अत: इन तीनों स्थितियों की अलग-अलग प्रायिकता निकाल कर जोड़ ज्ञात कर लिया जायेगा ।

$$n=8,r=6,7,8,p=\frac{1}{2},q=\frac{1}{2}$$

$$p(r=6,7,8)=^{8}C_{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+^{8}C_{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}+^{8}C_{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$$

$$28\times\frac{1}{256}+8\times\frac{1}{256}+1\times\frac{1}{256}=\frac{27}{156}$$

(द) 8 सिक्के उछालने पर कोई भी चित्त न आने की प्रायिकता -

$$n=8, r=0\ , p=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$$

$$^{8}C_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}$$

$$1\times\frac{1}{256}=\frac{1}{256}$$

(य) सभी चित्त अर्थात् आठों चित्त आने की प्रायिकता -

$$n=8, r=8,\ p=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$$

$$^{8}C_{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$$

$$1\times\frac{1}{256}=\frac{1}{256}$$

14.10 संयोगानुपात (Odds)

किसी घटना के पक्ष (in favour) या विपक्ष (Against) प्रायिकता को संयोगानुपात के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है । पक्ष में संयोगानुपात में पहला अंक pऔर दूसरा q के अनुरूप होता है । विपक्ष में संयोगानुपात में पहला अंक q और दूसरा अंक p के अनुरूप होता है ।

(i) पक्ष में संयोगानुपात $\left(p:q\right)=p=\frac{p}{p+q}$

(ii) विपक्ष में संयोगानुपात $\left(q:p\right)=q=\frac{q}{p+q}$

उदाहरण : 18

किसी दौड़ में 4 घोड़ों w,x,y व z के पक्ष में संयोगानुपात (Odds in fevour) क्रमश: 1:4, 1:3,1:6, 1:5 हैं । यह मानते हुए कि दो या अधिक घोड़े एक साथ नहीं जीत सकते, यह संभावना ज्ञात कीजिए कि उनमें से एक घोड़ा दौड़ में जीतेगा ।

हल : w के पक्ष में संयोगानुपात = 1:4 अत: उसके जीतने की प्रायिकता $=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$

x के पक्ष में संयोगानुपात =1:3 अतः उसके जीतने की प्रायिकता $=\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$

yके पक्ष में संयोगानुपात = 1:6 अत: उसके जीतने की प्रायिकता $= \frac{1}{1+6} = \frac{1}{7}$

zके पक्ष में संयोगानुपात = 1:5 अत: उसके जीतने की प्रायिकता $= \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$

क्योंकि केवल एक ही घोड़ा जीत सकता है, दो या अधिक एक साथ नहीं जीत सकते, अतएव ये परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं ।

W,x,yया z के जीतने की संभाविता = $= \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} = \frac{319}{420}$

उदाहरण : 19

घटना के घटने की निम्नलिखित प्रायिकताओं के पक्ष एवं विपक्ष में संयोगानुपात क्या होंगे

(अ) $\frac{5}{12}$ (ब) 0.70 (स) 0.40

हल : (अ) पक्ष संयोगानुपात = पक्ष में अनुपात : विपक्ष में अनुपात

अतः $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ अर्थात् पक्ष में संयोगानुपात 5:7 एवं विपक्ष में संयोगानुपात 7:5

(ब) 1-0.70 = 0.30 अत: 0.7:0.3 या 7:3 तथा विपक्ष में संयोगानुपात 3:7

(स) 1-0.4 = 0.6 अत: 0.4 : 0.6 या 4:6 अथवा 2:3 एवं विपक्ष में संयोगानुपात 3:2

14.11 कम से कम एक घटना घटने की प्रायिकता (Probability of At Least One Event)

जब अनेक स्वतंत्र घटनाओं में से कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात करनी हो तो इसके लिए सर्वप्रथम सभी घटनाओं के न घटने की संयुक्त प्रायिकता ज्ञात करली जाती है । तत्पश्चात् इसे 1 में से घटा दिया जाता है ।

सूत्रः यदि पहली, दूसरी, तीसरी .... घटना के घटने की प्रायिकताएँ $\phi e \lambda p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ हो तो उनके न घटने की प्रायिकताएँ

क्रमशः $(1-p_1),(1-p_2),(1-p_3).......(1-p_n)$ होगी ।

सभी घटनाओं में से किसी के न घटने की मिश्रित प्रायिकता -

$(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3).......(1-p_n)$

अतः कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता -

$$1-\{(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3).......(1-p_n)$$

उदाहरण : 20

दो पासे एक बार फेंके जाते हैं । कम से कम एक '5' प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?

हल : '5' बिन्दु वाले पक्ष के आने की प्रायिकता $=\frac{1}{6}$

पहले पाले '5' न आने की प्रायिकता $=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ आवृतियाँ

दूसरे पासे पर '5' न आने की प्रायिकता $=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

पहले और दूसरे दोनो पासों पर '5' न आने की प्रायिकता $=\frac{5}{12}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$

कम से कम एक पासे पर '5' न आने की प्रायिकता $=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$

वैकल्पिक विधि

पहले पासे पर '5' आने (और दूसरे पर कोई अन्य बिन्दु आने) की प्रायिकता $=\frac{5}{36}$

[(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6)]

दूसरे पर '5' आने, पहले पर कोई अन्य बिन्दु आने की प्रायिकता $=\frac{5}{36}$

दोनों पासों पर 5 (5,5) आने की प्रायिकता $=\frac{1}{36}$

अत: कम से कम एक बार '5' आने की प्रायिकता $=\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$

14.12 सीमान्त प्रायिकता (Marginal Probability)

जब किसी घटना (जैसे हA) के घटित होने की प्रायिकता अन्य किसी घटना (जैसे B) के बारे में कोई विचार नहीं करते हुए ज्ञात की जाती है तो इसे सीमान्त प्रायिकता कहते हैं।

$$P(A)\quad \frac{N(A)}{N(S)}\quad P(B)\quad \frac{N(B)}{N(S)}$$

14.13 संयुक्त प्रायिकता (Joint Probability)

जब दो या दो से अधिक घटनाओं (जैसे A और B) के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात की जाती है तो उसे संयुक्त प्रायिकता कहते हैं ।

P (A and B)

14.14 सप्रतिवन्धित प्रायिकता (Conditional Probability)

इस बात की संभावना कि एक बार एक घटना घटित होने पर दूसरी घटना घटेगी, सप्रतिबन्धित प्रायिकता कहलाती है । अर्थात् किसी घटना (जैसे A) के घटित होने की प्रायिकता किसी अन्य घटना (जैसे A) को घटित मान लेने पर उस घटना की प्रतिबन्धित प्रायिकता कहलाती है ।

यदि A और B दो आश्रित घटनाएँ हों तो उनके एक साथ घटने की प्रायिकता पहली घटना के होने की प्रायिकता और दूसरी घटना के उस स्थिति में होने की प्रायिकता जबकि पहली हो चुकी है - इन दोनों का गुणनफल है ।

जैसे:

बार काला रंग के पत्ते निकल आने की प्रायिकता पहली बार के परिणाम पर निर्भर होगी। यदि पहली बार पत्ता निकलने की प्रायिकता $\frac{25}{51}$ होगी । यदि पहली बार लाल पत्ता निकलता है और उसे वापस नहीं रखा जाता है तो दूसरी बार काला रंग के पत्ते निकलने की प्रायिकता $\frac{26}{51}$ होगी । अत: दोनों स्थितियों में दूसरी बार की घटना पहली बार के परिणाम पर आश्रित है ।

सूत्र: P (A तथा B) $= p\left(A\right)\times p\left(B/A\right)$

$$p\left(AB\right)=P\left(B\right)\times P\left(A/B\right)$$

जहाँ I P(B / A) की सप्रतिबन्धित प्रायिकता है । अर्थात् B की प्रायिकता जबकि A पहले ही घटित हो चुकी है और P (A/B) की प्रतिबन्धित प्रायिकता है । जिनमें B पहले ही घटित हो चुकी है ।

14.15 बेज़ प्रमेय-प्रतिलोम प्रायिकता (Baye's Theorem - Inverse Probability)

सामान्यतया 'कारणं' के आधार पर 'प्रभाव' ज्ञात किया जाता है, लेकिन कभी-कभी 'प्रभाव के आधार पर कारण जानने की चेष्टा करें तो इसे प्रतिलोम सम्बन्ध कहते हैं । प्रतिलोम प्रायिकता को बेज़ प्रमेय (Baye's Theorem) व नाम से भी जाना जाता है । इसमें पूर्व प्रायिकता ज्ञात करने के पश्चात् घटना से सम्बन्धित नयी सूचना मिलने पर उसके आधार पर पूर्व प्रायिकता में संशोधन कर लिया जाता है और इस संशोधित प्रायिकता को ही उत्तरवर्ती प्रायिकता या प्रतिलोम प्रायिकता (Revised or Posterior or Inverse Probability) कहते हैं ।

इसे निम्न प्रकार समझ सकते हैं -

पूर्व प्रायिकता $\rightarrow$ नई सूचना $\rightarrow$ संशोधन $\rightarrow$ पश्च प्रायिकता

प्रतिलोम प्रायिकता से घटना से सम्बन्धित नवीन सूचना उपलब्ध होने पर पूर्व प्रायिकता में आवश्यक सुधार करके विवेकपूर्ण निर्णय लेने में जोखिम के तत्त्व को कम

किया जा सकता है । प्रतिलोम प्रायिकता वास्तव में एक प्रकार की प्रतिबन्धित प्रायिकता ही है । उदाहरण के लिए माना दो कलशों - कलश I और कलश II में किसी वस्तु की दोषपूर्ण और दोष रहित इकाइयाँ हैं । किसी एक कलश में से एक इकाई याद्दच्छिक रूप से निकाली गई और वह दोषपूर्ण पाई गई । अब हम यह जानना चाहते हैं कि इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह दोषपूर्ण इकाई कलश -I से निकाली गई है । इस प्रकार एक अवलोकित घटना के कारण की प्रायिकता ज्ञात करना ही प्रतिलोम प्रायिकता है जिसका परिकलन बेज़ प्रमेय के आधार पर किया जाता है।

उदाहरण: 21

तीन व्यक्तियों - एक राजनीतिज्ञ, एक सेवानिवृत्त आर .ए.एस. अधिकारी और एक प्रोफेसर - में से किसी एक के किसी विश्वविद्यालय के कुलपति नियुक्त किये जाने की प्रायिकता क्रमशः 40% 30% और 30% है । इनके द्वारा विश्वविद्यालय में नियुक्त होने पर उच्चस्तरीय शोधकार्य के प्रोत्साहन और संवर्द्धन की संभावना क्रमशः 0.3,0.7,0.9 है । क्या प्रायिकता है कि नए कुलपति द्वारा शोधकार्य का संवर्द्धन किया जाएगा?

हल : एक राजनीतिज्ञ, एक सेवानिवृत्त आर .ए .एस. अधिकारी और एक प्रोफेसर के कुलपति नियुक्त होने की (घटना) प्रायिकताओ की क्रमशः A_1 , A_2 ,व A_3 संकेतों द्वारा तथा शोधकार्य संवर्द्धन (घटना) को B द्वारा दर्शाया गया है ।

दिया गया है - $p(A_1) = .40, P(A_2) = .30, \times p(A_3) = .30$

सप्रतिबन्ध प्रायिकताऐ तथा संयुक्त प्रायिकताएँ निम्नलिखित सारणी में परिकलित की जाएँगी ।

सारणी (Table)

सप्रतिबन्ध एवं संयुक्त प्रायिकताएँ

(Conditional and jointProbabilities)

(i)	(ii)	(iii)	(iv)
घटना (Event)	पूर्व प्रायिकता (Prior Probability)	सप्रतिबन्ध प्रायिकता (Conditional Probability Of B given A)	संयुक्त प्रायिकता JointProbability P (A) xP(B/A)
Ai	P(A_1)	P(B/Ai)	$P(Ai \cap B)$
A_1	0.40	0.3	0.120
A_2	0.30	0.7	0.210
A_3	0.30	0.9	0.270
योग	1.00	1	P(B)=0.600

सप्रतिबन्ध प्रायिकताएँ — $-p(B/A_1) = 0.3; P(B/A_2) = 0.7; P(B/A_3) = 0.9$

शोध प्रोत्साहन निम्नलिखित परस्पर अपवर्जी तरीकों से हो सकता है :-

(अ) राजनीतिज्ञ नियुक्त हो और वह शोध प्रोत्साहित करें – $(A_1 \cap B)$

$$P(A_1 \cap B) = P(A_1) \times P(B / A_1)$$

(ब) सेवानिवृत्त आर. ए. एस. नियुक्त हो और वह शोध प्रोत्साहित करें — $(A_2 \cap B)$

$$P(A_2 \cap B) = P(A_2) \times P(B / A_2)$$

(स) प्रोफेसर नियुक्त हो ओर वह शोध प्रोत्साहित करें — $P(A_3 \cap B)$

$$P(A_3 \cap B) = P(A_3) \times P(B / A_3)$$

अत: नए कुलपति द्वारा शोधकार्य प्रोत्साहित करने की प्रायिकता

$$= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$

$$= P(A_1) \times P(B / A_1) + P(A_2) \times P(B / A_2) + P(A_3) \times P(B / A_3)$$

$$= 0.120 + 0.210 + 0.270$$

$$= (0.40 \times .30) + (0.30 \times 70) + (0.30 \times .9) = 0.6$$

14.16 यादृच्छिक चर, प्रायिकता बंटन एवं प्रत्याशित मूल्य (Random Variable Probability Distribution and Expected Value)

यादृच्छिक चर - एक प्रतिदर्श समष्टि के प्रतिदर्श बिन्दु एक यादृच्छिक चर का प्रतिनिधित्व करते हैं । यादृच्छिक चर उस चर को कहते हैं जिसका मूल्य किसी यादृच्छिक अभिप्रयोग के परिणाम द्वारा निर्धारित होता है ।

उदाहरणार्थ - एक सिक्का पाँच बार उछालने पर चित्त का आना (0,1,2,3,4 या 5) यादृच्छिक वर है। परन्तु सिक्का उछालने के बाद यदि हमें 2 चित (और 3 पट) प्राप्त होते हैं तो यह यादृच्छिक चर नहीं होगा ।

यादृच्छिक चर खंडित हो सकता है या अखंडित । सामान्यतया गणना - योग्य चर खण्डित होता है और माफीय चर अखण्डित ।

प्रायिकता बंटन

किसी विचर-मान X की प्रायिकता को दर्शाने वाला Xका फलन प्रायिकता बंटन कहलाता है ।

संकेताक्षरों के रूप में -

एक विचर X के खण्डित मूल्य $X_1, X_2, X_3, ...X_n$ की उसकी प्रायिकताओ $P_1, P_2, P_3, ...P_n$ के बंटन को खण्डित प्रायिकता बंटन कहते हैं । एक प्रायिकता बंटन में विचर के मानों की तत्सवादी प्रायिकताओं का जोड़ 1 होता है । जैसे

मूल्य	$X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad \dots \dots \dots X_n$	योग
प्रायिकता (Px)	$P_X \quad P_X \quad P_X \quad .... \quad P_X$	$\Sigma \quad P = 1$

गणितीय प्रत्याशा---

किसी याद्दच्छिक चर का प्रत्याशित मूल्य (या गणितीय प्रत्याशा) उस चर का भारित माध्य है जबकि प्रयुक्त भार चर के विभिन्न मूल्यों की तत्संवादी प्रायिकताऐं हैं । गणितीय प्रत्याशा किसी याद्दच्छिक चर के मूल्य तथा उसकी प्रायिकता के गुणनफल का योग है ।

गणितीय प्रत्याश को प्रत्याशित मूल्य, विचर का वास्तविक माध्य मान, प्रत्याशित मान अथवा प्रत्याशा भी कहा जाता है ।

सूत्र रूप में , $E(X) = X_1.P(X_1) + X_2.P(X_2) + X_3.p(X_3)......X_n.p(X_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_1.P(X_i)$$

उदाहरण : 22

एक सिक्का 3 बार उछालने पर चित्त आने का प्रत्याशा मूल्य क्या होगा?

हल : एक सिक्का 3 बार उछालने पर चित्त 0,1,2 या 3 बार आ सकता है । सधी निश्शेष परिणाम निम्न प्रकार हैं -

TTT , TTH , THT , HTT , THH , HTH , HHT , HHH

चित्त की संख्या	0	1	2	3	
प्रायिकता	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\left[\sum P(X) = 1\right]$
प्रत्याशित मूल्य E(x)	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{8}$	$= \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

$$E(X) = PX_1 + PX_2 + PX_3........P_nX_n$$

$$= \left(0 \times \frac{1}{8}\right) + \left(1 \times \frac{3}{8}\right) + \left(2 \times \frac{3}{8}\right) + \left(3 \times \frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5$$

उदाहरण : 23

अंशुमान एक सिक्का 4 बार उछालता है । यदि चारों बार चित आता है तो उसे 1600 रू. का इनाम मिलता है । खेल का प्रवेश शुल्क 64 रू. है । अंशुमान की गणितीय प्रत्याशा क्या है?

हल: इनाम लाभ है एवं प्रवेश शुल्क हानि है । अंशुमान के जीतने की प्रायिकता (अर्थात चारों बार चित आना)

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16};$$

हारने की प्रायिकता $= q = 1 - p = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

अत: अंशुमान की गणितीय प्रत्याशा -

$$E(X) = ap + (-bq) = ap - bq$$

$$= \left(1600 \times \frac{1}{16}\right) - \left(64 \times \frac{15}{16}\right) = 100 - 60 = Rs.40$$

खेल अंशुमान के पक्ष में अभिनत है । यदि वह दीर्घकाल तक यह खेल खेलता रहता है तो औसत रूप से उसे 40 रू. प्रति खेल का लाभ होगा ।

14.17 सारांश (Summary)

प्रायिकता सिद्धान्त की उत्पत्ति सत्रहवीं शताब्दी में यूरोप में हुई किन्तु वैज्ञानिक एवं गणितीय आधार फ्रांस के गणितज्ञ पास्कल (1823-1662) तथा पियर डी फरमैट (1601 — 1665) द्वारा प्रदान किया गया । ने बर्नोली (1654 – 1705) ने बर्नोली प्रमेय, बेयज (1702-1761) ने प्रतिलोम प्रायिकता, लाप्लेस (1749-1827) ने चिर प्रतिष्ठित सिद्धान्त, फिशर ने प्रतिदर्श समष्टि की अवधारणा का विकास किया । चेबिचेव ए. मार्क्रोन ए. एन. कॉल्मोगोरोव आदि ने प्रायिकता के आधुनिक सिद्धान्त का प्रतिपादन किया । प्रायिकता सिद्धान्त ज्ञान के अनेक क्षेत्रों में अनुप्रयोग के लिए महत्त्वपूर्ण है । प्रायिकता किसी अनिश्चित घटना के घटित होने या न होने के सम्बन्ध में हमारी प्रत्याशा का माप है । प्रायिकता हेतु आवश्यक समप्रायिक स्थितियाँ सदैव संभव नहीं होती संभाव्य स्थितियाँ अनिश्चित होने व परिणाम अपरिमित होने पर इसकी गणना संभव नहीं है । प्रायिकता की अवधारणाओं में चिर प्रतिष्ठित अवधारणा, प्रयोगाश्रित तथा व्यक्तिपरक अवधारणा शामिल है । प्रायिकता की गणना हेतु क्रमचय एवं संचय का प्रयोग किया जाता है ।

अलग-अलग घटनाओं हेतु प्रायिकता आकलन अलग-अलग तरीकों से किया जाता है । घटनाऐं सरल एवं संयुक्त।, स्वतंत्र एवं आश्रित, परस्पर अपवर्जी, परस्पर अपवर्जी नहीं, समान रूप से घटने वाली घटनाऐं हो सकती हैं । प्रायिकता का आकलन गणितीय प्रमेय, योग, प्रमेय, गुणन प्रमेय, बर्नोली प्रमेय के आधार पर किया जाता है ।

14.18 शब्दावली (Glossary)

प्रायिकता : अनुकूल घटनाओं का समान सम्भाविता वाली समस्त घटनाओं के साथ अनुपात

क्रमचय: दी गई निश्चित वस्तुओं का निश्चित क्रम में विन्यास

संचय : क्रम को ध्यान में न रखते हुए निश्चित वस्तुओं के वर्गो या चयनों को संचय कहते हैं ।

सरल घटना: जब एक समय में केवल एक ही घटना घटित होने की प्रायिकता ज्ञात करनी हो ।

संयुक्त घटना: दो या दो से अधिक घटनाऐं जब एक साथ घटित होती हैं ।

स्वतंत्र घटना: जब दो घटनाओं का प्रभाव एक दूसरे पर नहीं पड़ता है ।

आश्रित घटना: एक घटना घटने का प्रभाव दूसरी के घटित होने पर पड़ता हो ।

परस्पर अपबर्जी घटनाऐं : जब एक घटना का घटित होना दूसरी घटना को घटने से रोक देता हो

गणितीय प्रमेय: इसमें अनुकूल स्थितियों की संख्या m प्रतिकूल स्थितियों की संख्या n तथा कुछ संभाव्य स्थितियों की संख्या. m+n मानी जाती हैं । सभी ढंग समप्रायिक (Equally Likely) होने पर घटना के

घटित होने की प्रायिकता इस प्रमेयानुसार $P = \frac{m}{m+n}$ होगी ।

योग प्रमेय: जब दो या दो से अधिक घटनाओं में से या तो 'अ घटे, 'ब' घटे या 'स' घटे तो ऐसी स्थिति योग प्रमेय होती है ।

गुणन प्रमेय: गुणन प्रमेय दो या दो से अधिक घटनाओं के एक साथ घटने की प्रायिकता उनके अलग-अलग घटित होने की व्यक्तिगत प्रायिकताओं का गुणनफल है ।

बर्नोली प्रमेय: किसी घटना के एक परीक्षण में घटित होने की प्रायिकता ज्ञात होने पर कुल n परीक्षणों में से उसके निश्चित रूप से r बार घटित होने की प्रायिकता निम्नांकित सूत्र से निकाली जा सकती है:

$$P(r) = {}^{n}C_{r}, p^{r}.q^{n-r}$$

सीमान्त प्रायिकता: जब किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता अन्य किसी घटना के बारे में कोई विचार नहीं करते हुए ज्ञात की जाती है तो वह सीमान्त प्रायिकता कहलाती है ।

सप्रतिबन्ध प्रायिकता: इस बात की संभावना कि एक बार एक घटना घटित होने पर दूसरी घटना घटेगी, सप्रतिबन्ध प्रायिकता कहलाती है ।

प्रतिलोम प्रायिकता: प्रभाव के आधार पर कारण जानने की चेष्टा प्रतिलोम प्रायिकता के अन्तर्गत ज्ञात की जाती है ।

14.19 स्वपरख / अभ्यास (Self Assessment Questions Exercise)

1. प्रायिकता को परिभाषित करते हुए इसकी अवधारओं का वर्णन कीजिए ।
2. प्रायिकता के योग व गुणन प्रमेयों को स्पष्ट कीजिए ।
3. क्रमचयों तथा संचयों को उदाहरणों की सहायता से समझाइए ।
4. प्रायिकता आकलन में प्रयुक्त घटनाओं का विस्तारे से वर्णन कीजिए ।

14.20 आंकिक प्रश्न (Numerical Questions)

1. एक क्लब में 15 सदस्य हैं । उनमें से अध्यक्ष, उपाध्यक्ष तथा सचिय पदों को कितने प्रकार से भरा जा सकता है, यदि एक व्यक्ति एक से अधिक पद नहीं रख सके । (उत्तर:2730)

2. PRODUCT शब्द के अक्षरों से कितने विन्यास कियें जा सकते है जबकि (i) शब्द में स्वरों के स्थान में परिवर्तन न किया जाये, (ii) प्रत्येक विन्यास 'p' से प्रारम्भ हो (iii) स्वर कभी पृथक न हो । (उत्तर: (i)120 (ii) 720 (iii) 1440)
3. PROBABILITY शब्द के अक्षरों से कितने विन्यास बनाये जा सकते हैं? (उत्तर 99,79,200)
4. 12 वस्तुओं को चार व्यक्तियों में सें बराबर-बराबर कितने तरीकों से बाँटा जा सकता हे? (उत्तर 3,69600)
5. 4 स्वरों एवं 7 व्यंजनों में से 3 स्वर एवं 3 व्यंजन लेकर कुल कितने शब्द बनाये जा सकते हैं? (उत्तर: 100800)
6. 7 रूसी व 4 भारतीयों में से 4 सदस्यों की समिति कितने प्रकार से बनाई जा सकती है जबकि इसमें (i)2 रूसी व 2 भारतीय हों (ii) कम से कम 2 भारतीय हों । (उत्तर: (i)126 (ii)155)
7. कॉलेज का प्रतिनिधित्व करने के लिए भेजी जाने वाली 5 छात्रों की टीम कुल 12 योग्य छात्रों में से कितनी प्रकार से चुनी जा सकती है । (उत्तर : 792)
8. अंग्रेजी की किसी पुस्तक में से यादृच्छिक रूप से छींटे गये एक अक्षर के स्वर होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । (उत्तर: $\frac{5}{26}$)
9. 52 पत्ते की ताश की गड्डी से एक पत्ता निकाला जाता है । उसके एक बादशाह अथवा एक बेगम निकलने की क्या प्रायिकता है? (उत्तर :$\frac{2}{13}$)
10. ताश की एक गड्डी में से एक ईट का पत्ता या एक इक्का निकाले जाने की क्या प्रायिकता है? (उत्तर : $\frac{4}{13}$)
11. एक थैले में 11 व लाल व 14 सफेद गेंदें हैं उसमें से 2 गेंदें निकाली जाती हैं । दोनों एक ही रंग की होने की क्या प्रायिकता है? (उत्तर. $\frac{73}{150}$-)
12. एक थैले में 5 लाल व 4 हरी गेंदे हैं । 3-3 गेंदों को दो बार निकाला गया । दूसरी बार निकालने से पूर्व उन्हें थैले में वापस रख दिया गया । पहली बार तीनों की लाल तथा दूसरी बार में तीनों ही हरी गेंदे आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । (उत्तर: $\frac{5_{c_3}}{9_{c_3}}\times\frac{4_{c_3}}{9_{c_3}}=\frac{5}{882}$)
13. एक हवाई जहाज से बम गिराने पर किसी निश्चित लक्ष्य पर प्रहार करने की प्रायिकता 1/5 है । यदि 6 बम गिराए जायें तो (i)4 के लक्ष्य पर प्रहार करने की तथा (ii) किसी के भी लक्ष्य पर प्रहार न करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । (उत्तर: (i)48/3125 (ii) 4096/15625

14. एक प्रश्न को हल करने के संदर्भ में A ,B तथा.C के विपक्ष में संयोगानुपात 2:3, 1:3 तथा 3:2 हैं । तीनों द्वारा प्रश्न हल करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । (उत्तर: 9/50)
15. एक जीवन बीमा कम्पनी यह पाती है कि एक शहर में एक पुरूष जो 50 वर्ष का है, के 80 वर्ष की आयु तक जीवित रहने के पक्ष में संयोगानुपात 6:8 तथा एक स्त्री जो 45 वर्ष की है के 75 वर्ष की आयु तक जीवित रहने के विपक्ष में संयोगानुपात 3:5 है। इन दोनों में कम से कम एक के 3० वर्ष पश्चात् तक जीवित रहने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । (उत्तर : $\frac{11}{14}$)
16. गौरव एक पुस्तक के 80% प्रश्न हल कर सकता है तथा सौरभ 70% हल कर सकता है । इस बात की क्या प्रायिकता है कि उनमें से कम से कम एक दैव प्रतिचयन द्वारा चुने गए किसी प्रश्न को हल कर सकेगा? (उत्तर : 94%)
17. यदि कोई लीप-वर्ष दैव प्रतिचयन द्वारा चुना जाता है तो (अ) 53 ररिवार (ब) या तो 53 रविवार या 53 सोमवार (स) या तो 53 रविवार या 53 शुक्रवार आने की प्रायिकता बताइये ।

   (उत्तर : (अ) $\frac{2}{7}$ (ब) $\frac{3}{7}$ (स) $\frac{4}{7}$
18. तीन कलश हैं । पहले में 3 लाल ओर 7 हरी गोलियाँ हैं । दूसरे में 5 लाल व 3 हरी तथा तीसरे में 8 लाल व 4 हरी गोलियाँ हैं । एक कलश में से एक गोली निकाली जाती है, प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह (अ) पहले कलश से (ब) तीसरे कलश से निकली हैं ।

   (उत्तर : (अ) $\frac{36}{191}$ (ब) $\frac{80}{191}$
19. यदि वर्षा होती है तो एक वर्षाती कोट विक्रेता प्रतिदिन 500 रू. कमाता है, यदि दिन सामान्य (वर्षा रहित) होता है तो उसे 100 रू. प्रतिदिन की हानि होती है । यदि वर्षा की प्रायिकता 0.4 हो तो उसकी प्रत्याशा क्या होगी? (उत्तर: 140 रू.)
20. तीन पासों के एक बार फेंकने में ठीक 10 फेंकने की क्या प्रायिकता है? (उत्तर : $\frac{1}{8}$)

14.21 उपयोगी पुस्तकें (Further Readings)

1. Arora P.N. and Arora S.Statistice , S.Chand &Sons , New Delhi .
2. Gupta, S.P., Statiscal Methods, Sultan Chand &Sons, New Delhi .
3. Sancheti, D.C. and Kapoor, V.K., Statistics (Theorem , Methods and Application), Sultan Chand &Sons, New Delhi.
4. नागर, कैलाशनाथ, सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मीनाक्षी प्रकाशन, मेरठ
5. शर्मा, जैन, पारीक, सांख्यिकी, रमेश बुक डिपो, जयपुर ।

इकाई : 15 प्रायिकता बंटन (Probability Distribution)

इकाई की रूपरेखा

15.1 उद्देश्य
15.1 प्रस्तावना
15.2 सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन का अर्थ
15.3 सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन की उपयोगिता एवं महत्व
15.4 सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन के प्रकार
15.5 द्विपद बंटन
15.6 द्विपद बंटन की विशेषताऐं
15.7 प्वॉयसन बंटन
15.8 प्वॉयसन बंटन की विशेषताऐं
15.9 प्रसामान्य बंटन
15.10 प्रसामान्य वक्र की विशेषताएँ
15.11 मानक प्रसामान्य वक्र
15.12 प्रसामान्य वक्र से प्रायिकता ज्ञात करना ।
15.13 प्रसामान्य वक्र आंसजन
15.14 सारांश
15.15 शब्दावली
15.16 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास
15.17 आंकिक /प्रश्न
15.18 उपयोगी पुस्तकें

15.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि :-

- सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन का अर्थ, उपयोगिता एवं महत्व जान सकें
- सैद्धान्तिक आवृति बंटन कितने प्रकार के हैं की जानकारी प्राप्त कर सकें ।
- द्विपद बंटन,प्वॉयसन बंटन तथा प्रसामान्य बंटन का अर्थ एवं विशेषताएँ समझ सकें ।
- विभिन्न बटनों की गणन क्रिया उदाहरणों सहित समझ सकें एवं हल कर सकें ।
- प्रसामान्य वक्र से प्रायिकता ज्ञात कर सकें तथा प्रसामान्य वक्र आसंजन कर सकें ।

15.1 प्रस्तावना

अभी तक हम ऐसे आवृत्ति-बटनों के बारे में जान चुके हैं जिनकी रचना सांख्यिकीय अनुसंधानों से उपलब्ध वास्तविक या अवलोकित समंकों के संकलन, वर्गीकरण तथा सारणीयण के आधार पर की जाती है । जब एक आवृत्ति बंटन की आवृत्तियाँ

वास्तविक अवलोकनों पर आधारित हो तो उसे अवलोकित आवृत्ति बंटन (Observed frequency distribution) कहते हैं । जैसे - किसी फैक्ट्री में काम करने वाले 100 कर्मचारियों की आय एवं उनके द्वारा किया गया व्यय ज्ञात करके दो अवलोकित आवृत्ति-बंटन

बनाये जा सकते हैं-

अवलोकित आवृत्ति बंटन

आय (रु)	**कर्मचारियों की संख्या (आवृत्ति)**	**व्यय (रु)**	**आवृत्ति**
10000 — 12000	25	4000 — 6000	40
12000 — 14000	20	6000 — 8000	20
14000 — 16000	25	8000 — 1000	15
16000 — 18000	15	1000 — 12000	15
18000 — 20000	15	12000 — 14000	10
योग	100	योग	100

लेकिन कई परिस्थितियाँ ऐसी होती हैं जहाँ वास्तविक आवृत्ति बंटन प्राप्त करना अधिक खर्चीला या असंभव होता है ऐसी स्थिति में सैद्धान्तिक आवृति बंटन उनके स्थानापत्र का कार्य करते हैं ।

अब हम जान जायेंगे कि सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन क्या होता है?

15.2 सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन का अर्थ

ऐसे आवृत्ति बंटन जिन्हे वास्तविक अवलोकनों या प्रयोगों द्वारा प्राप्त न करके कुछ निश्चित पूर्व कल्पनाओं या मान्यताओं के आधार पर गणितीय रूप में अनुमानित किया जाता है, सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन कहलाते है । इन्हें प्रत्याशित या आदर्श आवृत्ति बंटन भी कहते हैं । उदाहरणार्थ: यदि 4 सुडौल सिक्के 128 बार उछाले जायें, चित्त (Head) आने को सफलता माना जाये तो 'द्विपद प्रायिकता सिद्धान्त पर निम्न सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन ज्ञात किया जा सकता है :-

सफलताओं की संख्या (चित्त)	प्रायिकता	प्रत्याशित आवृत्ति
0	1 /16	8
1	4 /16	32
सै 2	6 /16	48
द्धा 3	4 /16	32
न्ति 4	1 /16	8
क	योग: 1	योग : 128

सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन भी वास्तविक आवृत्ति बंटन की तरह खण्डित एवं सतत् होते हैं। जब किसी दैव चर के परिणाम निश्चित अंतर पर ही प्राप्त हो सकते हों तो

ऐसा दैव चर खण्डित दैव चर कहलाता है । जैसे - कक्षा में प्रथम श्रेणी में पास विद्यार्थियों की संख्या, टेलीफोन कॉल की संख्या आदि 0,1,2,3.......हो सकती है, 1.2,2.6 आदि नहीं, लेकन ऐसा दैव चर जो कि निश्चित सीमाओं के अन्दर कुछ भी हो सकता है जैसे - लम्बाई, तोल, माप आदि उसे सतत् चर कहेंगे ।

15.3 सैद्धान्तिक आवृत्ति बटन की उपयोगिता एव महत्त्व

सैद्धान्तिक बंटन आधुनिक सांख्यिकी का आधार स्तम्भ है, ये सांख्यिकीय सिद्धान्त में अनेक महत्त्वपूर्ण भूमिकाऐं निभाते हैं जैसे -

1. सैद्धान्तिक बंटन अवलोकित बटनों के स्थानापत्र होते हैं, इन्हें वास्तविक आवृत्ति बटनों के स्थान पर प्रयुक्त किया जा सकता है, विशेषकर उस परिस्थिति में जबकि वास्तविक बंटन प्राप्त करना अधिक खर्चीला या असंभव हो ।

2. इनसे यह पता लगा सकते हैं कि निश्चित मान्यताओं के अन्तर्गत समंकों की प्रवृत्ति क्या होगी ।

3. इनकी सहायता से भावी पूर्वानुमान लगाये जा सकते हैं ।

4. सैद्धान्तिक बटनों से प्राप्त भावी संमक निर्णय लेने का आधार प्रदान करते हैं ।

5. प्रत्याशित समंकों की वास्तविक समंको से $\left(x^{\square}\right)$ जाँच द्वारा तुलना करके दोनों के अंतर का निष्कर्ष निकाला जा सकता है ।

6. इन बटनों से वास्तविक अनुसंधान में लगने वाले धन, श्रम व समय का पूर्वानुमान लगाया जा सकता है । इस प्रकार सैद्धान्तिक बंटन विभिन्न परिस्थितियों में उपयोगी होते हैं ।

मेरिल एवं फॉक्स के अनुसार वे ऐसे मानदण्डों का कार्य करते हैं जिसमें अवलोकित बटनों की तुलना की जा सके और जहाँ वास्तविक बंटन प्राप्त करना अधिक खर्चीला या असंभव हो वहाँ वे उनके स्थानापत्र होते हैं । निर्णय लेने में निर्णायकों को वे एक तर्कपूर्ण आधार प्रस्तुत करते हैं और सीमित सूचना या सैद्धान्तिक कारकों के आधार पर पूर्वानुमान लगाने में उपयोगी होते हैं ।

15.4 सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन के प्रकार

व्यवहार में निम्नलिखित तीन सैद्धान्तिक बटनों का सर्वाधिक प्रयोग होने से सांख्यिकी में इनका महत्त्व सर्वोपरि है ।

प्रस्तुत अध्याय में इन तीन बटनों का सविस्तार वर्णन किया गया है -

1. खण्डित प्रायिकता बंटन
   - i. द्विपद बंटन (Binomial Distribution)
   - ii. प्यॉयसन बंटन (Poisson Distribution)
2. सतत् प्रायिकता बंटन
   - i. प्रसामान्य बंटन (Normal Distribution)

15.5 द्विपद बंटन

द्विपद बंटन एक खण्डित प्रायिकता बंटन है, इसकी रचना का श्रेय सत्रहवीं शताब्दी के जेम्स बर्नोली को है । इस बंटन को उनके नाम पर बर्नोली बंटन भी कहा जाता है ।

द्वपद बंटन द्वन्दात्मक विकल्पों -- सफलता (P) तथा असफलता (q) के एक समूह की प्रायिकता को प्रस्तुत करता है जैसे – एक सुडौल सिवक्को को उछाला जाये तो यह चित्त गिर 'सकता है या पट । चित्त गिरने को सफलता यानि P तथा पट गिरने को असफलता यानि q माना जा सकता है ।

द्विपद बंटन की मान्यताएँ (Assumptions of Binomial Distribution)

1. एक अभिप्रयोग n बार किया जाता है तथा अभिप्रयोगों n की संख्या स्थिर पर परिमित होती है तथा सामान्यतया $n \le 20$ हो ।
2. प्रत्येक अभिप्रयोग के दो परस्पर अपवर्जी परिणाम होते हैं सफलता (P) तथा असफलता $(q = 1 - p)$
3. प्रत्येक अभिप्रयोग के परिणाम आपस में स्वतंत्र होते हैं अर्थात् एक परीक्षण दूसरे परीक्षण के परिणामों को प्रभावित नहीं करता है ।
4. सभी अभिप्रयोगों में p और q के स्थिर मान होते हैं अर्थात घटना घटने की प्रायिकता p प्रत्येक परीक्षण में स्थिर रहती है ।

   सिक्का उछालने और पासा फेंकने के अभिप्रयोगों में उपर्युक्त चारों मान्यताएँ पूरी होती हैं। यदि बंटन की मान्यताएँ पूरी हों तो n अभिप्रयोगों में r सफलता प्राप्त करने का सूत्र $= p(X = r) = {}^nC_r, P^r, q^{n-r}$

P का मान 0 से 1 के मध्य है ।

द्विपद बंटन का विस्तार (Binomial Expansion)

आरोही क्रम में $-(q+p)^n$

अवरोही क्रम में $-(p+q)^n$

1,2,3,4 n अभिप्रयोगो के लिए द्विपद बंटन इस प्रकार बनाया जा सकता है । जैसे -

$$n = 1 - (p+q)1 = p + q$$

$$n = 2 - (p+q)^2 = p^2 2pq + q^2$$

$$n = 3 - (p+q)^3 = p^3 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$

$$n = 4 - (p+q)^4 = p^4 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4$$

$$n = 5 - (p+q)^5 = p^5 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^2 + 5pq^4 + q^5$$

इस प्रकार द्विपद विस्तार का स्वरूप इस प्रकार होगा -

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q^1 + \frac{n(n-1)}{2\times1}p^{n-2}q^2 + \frac{n(n-1)(n-1)}{3\times2\times1}p^{n-3}q^3 + ... + q^n$$

द्विपद विस्तार को बर्नोली प्रमेय के $C_r P^r q^{n-r}$ द्वारा ज्ञात किया जा सकता है ।

पास्कल त्रिभुज (Pascal's Triangle)

द्विपद बंटन के विभिन्न पदों के संख्यात्मक गुणांक पास्कल त्रिभुज से भी देखे जा सकते हैं ।

पास्कल त्रिभुज (Pascal's Triangle)

$(p+q)^n$ के विस्तार गुणांक

घात Power	द्विपद गुणांक (Binomial Cofficient)											योग $2n$
n												
1	1	1										2
2	1	2	1									4
3	1	3	3	1								8
4	1	4	6	4	1							16
5	1	5	10	10	5	1						32
6	1	6	15	20	15	6	1					64
7	1	7	21	35	36	21	7	1				128
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			256
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		512
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	1024

द्विपद बंटन के प्राचल (Parameters)

मध्य $(\mu) = np$

प्रमाप विचलन $(\sigma)\sqrt{npq}$

विचरण $(\delta^2)npq$

परिघात (Moments)

प्रथम परिघात $(\mu_1) = 0$

द्वितीय परिघात $(\mu_2) = \sigma^2 \quad npq$

तृतीय परिघात $(\mu_3) = npq(q-p)$

चतुर्थ परिघात $(\mu_4) = 3n^2p^2q^2 + npq(1-6pq)$

विषमता का परिघात गुणांक

$$\beta_1 = \frac{\mu\frac{2}{3}}{\mu\frac{3}{2}} = \frac{n^2p^2q^2(p-q)}{n^3p^3q^3}$$

पृथुशीर्षत्व $\beta_2 = \dfrac{\mu 4}{\mu\frac{2}{2}} = 3 + \dfrac{1-6pq}{npq}$

उदाहरण : 1

एक सिक्का 6 बार उछाला जाता है, 4 या 4 से अधिक चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए?

हल: एक यादृच्छिक सिक्के को उछालने पर चित (सफलता) और पट (असफलता) गिरने की प्रायिकता $= p = q = \frac{1}{2}$

4 या अधिक चित गिरने की प्रायिकता =

4 चित गिरने की प्रायिकता + 5 चित गिरने की प्रायिकता +6 चित गिरने की प्रायिकता

$\therefore$ 4 चित गिरने की प्रायिकता $= {}^6C_4\left[\frac{1}{2}\right]^4\left[\frac{1}{2}\right]^{6-4}$

$$15\left[\frac{1}{2}\right]^4\left[\frac{1}{2}\right]^2 = 0.234$$

5 चित्त गिरने की प्रायिकता $= {}^6C_5\left[\frac{1}{2}\right]^5\left[\frac{1}{2}\right]^{6-5} = 0.094$

6 चित्त गिरने की प्रायिकता $= {}^6C_6\left[\frac{1}{2}\right]^6\left[\frac{1}{2}\right]^{6-6} = 0.016$

$\therefore$ इसलिए 4 या अधिक चित्त गिरने की प्रायिकता = 0.234+0.094+0.016=0.344

उदाहरण: 2

एक द्विपद बंटन में अभिप्रयोगों की संख्या = 6, तथा अभिप्रयोग में सफलता की प्रायिकता 20% है, तो बंटन का समान्तर माध्य, प्रमाप विचलन तथा विचरण ज्ञात कीजिए?

हल: $n = 6, p = 20\% = 0.2, q = 1 - 0.2 = 0.8$

समान्तर माध्य $(\mu) = np = 6 \times 0.2 = 1.2$

प्रमाप विचलन $(\sigma) = \sqrt{npq} = \sqrt{6 \times 0.2 \times 0.8} = 0.98$

विचरण $(\delta^2) = npq = 6 \times 0.2 \times 0.8 = 0.96$

उदाहरण: 3

आठ सिक्के एक साथ 256 बार उछाले गए । उछाल में आने वाले 'चित का अवलोकन किया और निम्नलिखित परिणाम प्राप्त किये गए । प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात कीजिए । सैद्धान्तिक बंटन के माध्य व प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए ।

चित सिक्कों की संख्या	0	1	2	3	4	5	6	7	8
आवृत्ति	2	6	30	52	67	56	32	10	1

हल: $N = 256, n = 8$ चित आने (सफलता की प्रायिकता) $= \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$

चित की संख्या x	प्रायिकता बंटन $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]^8 = p_X$	प्रातिशित आवृत्ति $fe = N.{}^nC_r p^r q^{n-r}$

0	${}^8C_0\left[\frac{1}{2}\right]^0\left[\frac{1}{2}\right]^8=\frac{1}{256}$	1
1	${}^8C_1\left[\frac{1}{2}\right]^1\left[\frac{1}{2}\right]^7=\frac{8}{256}$	8
2	${}^8C_2\left[\frac{1}{2}\right]^2\left[\frac{1}{2}\right]^6=\frac{28}{256}$	28
3	${}^8C_3\left[\frac{1}{2}\right]^3\left[\frac{1}{2}\right]^5=\frac{56}{256}$	56
4	${}^8C_4\left[\frac{1}{2}\right]^4\left[\frac{1}{2}\right]^4=\frac{70}{256}$	70
5	${}^8C_5\left[\frac{1}{2}\right]^5\left[\frac{1}{2}\right]^3=\frac{56}{256}$	56
6	${}^8C_6\left[\frac{1}{2}\right]^6\left[\frac{1}{2}\right]^2=\frac{28}{256}$	28
7	${}^8C_7\left[\frac{1}{2}\right]^7\left[\frac{1}{2}\right]^1=\frac{8}{256}$	8
8	${}^8C_8\left[\frac{1}{2}\right]^8\left[\frac{1}{2}\right]^0=\frac{1}{256}$	1
योग	$\sum p_x = 1$	$\sum f_e = N = 256$

उदाहरण: 4

12 पासे 4096 बार फेंके जाते हैं । प्रत्येक फेंक में 4 ,5 व 6 का बिन्दु आने को सफलता तथा 1 , 2 व 3 का बिन्दु आने को असफलता माना जाता है । 0,1,2,3 ..... 12 सफलताओं के लिए सैद्धान्तिक आवृत्तियाँ ज्ञात कीजिए ।

हल: 4,5,6 को सफल्ता माना जाता है अत: $p=\frac{1}{2}$

1,2,3 को असफल्ता माना जाता है अत: $q=\frac{1}{2}$

$n=12, N=4096$

$4096\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]^{12}$ के द्विपद विस्तार से 0,1, 2 ..... 12 सफलताओं की सैद्धान्तिक आवृत्तियाँ प्राप्त होंगी ।

$$4096\left[\frac{1}{4096}+\frac{12}{4096}+\frac{66}{4096}+\frac{220}{4096}+\frac{495}{4096}+\frac{792}{4096}+\frac{495}{4096}+\frac{220}{4096}+\frac{66}{4096}+\frac{12}{4096}+\frac{1}{4096}\right]$$

सफलता की संख्या X	सैद्धान्तिक आवृत्ति fe	सफलता की संख्या X	सैद्धान्तिक आवृत्ति fe
0	1	7	792
1	12	8	492
2	66	9	220
3	220	10	66

4	495	11	12
5	792	12	1
6	924		

नोट: वास्तविक आवृत्तियों की संख्या टुकड़ों (Fractions) में नहीं हो सकती जबकि सैद्धान्तिक आवृत्तयो की संख्या टुकड़ों में आ सकती है, ऐसी स्थिति में उन्हें निकटतम अंक तक पूर्ण बनाऐंगे ।

उदाहरण: 5

किसी उद्योग में काम करने वाले श्रमिकों में से 20% के किसी व्यावसायिक रोग से पीड़ित होने की संभावना है । अगर 10 श्रमिकों का याद्दच्छिक रूप से चयन किया जाता है तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए । (i) ठीक 2 श्रमिकों के रोग ग्रस्त होने की (ii) अधिकतम 2 व्यक्तियों के रोग ग्रस्त होने की ।

हल: एक श्रमिक के रोग्रस्त होने की प्रायिकता $(p)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$

$$q=1-p=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

2 दो श्रमिकों के रोगग्रस्त होने की प्रायिकता ${}^{10}C_2\left[\frac{1}{5}\right]^2\left[\frac{4}{5}\right]^8=0.302$

(ii) अधिकतम 2 श्रमिकों के रोगग्रस्त होने की प्रायिकता $=p(0)+p(2)$

$${}^{10}C_0\left[\frac{1}{5}\right]^0\left[\frac{4}{5}\right]^{10}+{}^{10}C_1,\left[\frac{1}{5}\right]^1\left[\frac{4}{5}\right]^9+{}^{10}C_2\left[\frac{1}{5}\right]^2\left[\frac{4}{5}\right]^8=0.678$$

उदाहरण: 6

एक द्विपद बंटन के माप दिये गए हैं$(\overline{X})=20, \sigma=4, n, p, q$ तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए? हल: दिया गया$(\overline{X})=np=20, \sigma=\sqrt{npq}=4$

15.6 द्विपद बंटन की विशेषताएँ:

1. यह एक सैद्धान्तिक बंटन है जो बर्नोली प्रमेय पर आधारित है । इस प्रायिकता बंटन को कुल संख्या(N) से गुणा करके प्रत्याशित अहवृत्तियाँ ज्ञात की जाती हैं।

2. यह एक खण्डित बंटन है जिसमें सफलताओं की संख्या 1, 2,3,nहोती है ।

3. इसको रेखाचित्र पर एक आवृत्ति बहुभुत (Frequency Polygon) के रूप में दर्शाया जा सकता है ।

4. इस बंटन का स्वरूप p, q तथा n पर आधारित होता है । यदि p = q तो बंटन पूर्ण सममित (perfectly Symmetrical तथा $p \neq q$ तो असममित (Asymmetrical) p और q असमान होने पर यदि घातांक (n) का मूल्य अत्यधिक हो तो असममिति की मात्रा कम होती जाएगी अर्थात् जैसे-जैसे n में वृद्धि होगी बंटन सममिति की ओर प्रवृत्त होगा ।

5. इस बंटन के अचर मूल्य इस प्रकार ज्ञात कर सकते हैं ।

समान्तर माध्य $\left(\overline{X}\right)=np$

प्रमाप विचलन $\sigma=\sqrt{npq}$

परिघात - प्रथम $(\mu)=0$; द्‌वितीय $(\mu)=npq$

तृतीय $(\mu)=npq(q-p)$; चतुर्थ $(\mu)=3n^2p^2q^2+npq(1-6pq)$

विषमता का परिघात गुणांक $(\beta_1)=\dfrac{(q-p)^2}{npq}$

पृथुशीर्षत्व का माप $(\beta_2)=3+\dfrac{1-6pq}{npq}$

6. व्यावहारिक जीवन में दैव निदर्शन पर आधारित द्‌वन्दात्मक घटनाऐं जैसे सिक्का उछालने पर चित्त या पट आना, जनसंख्या का स्त्री पुरूष में वितरण आदि में इस बंटन का प्रयोग किया जाता है ।

15.7 प्वॉयसन बंटन

फ्रांसीसी गणितज्ञ साइमन डेनिस प्वॉयसन ने 1837 में खण्डित प्रायिकता बंटन का सूत्रपात किया, उन्हीं ' के नाम पर इसे प्वॉयसन बंटन भी कहते हैं । यह बंटन प्रयोग तब किया जाता है जबकि किसी घटना के अल्प समयावधि मे घटने की प्रायिकता (p) बहुत ही कम (शून्य के लगभग) तथा घटना के न घटने की प्रायिकता (q) बहुत अधिक लगभग 1 होती है । दूसरे शब्दों में, यह बंटन ऐसी दशाओं में ही लागू होता है, जो असामान्य और दुर्लभ (rare events) होते हैं

निम्नलिखित उदाहरण ऐसी घटनाओं के हैं जहाँ प्वॉयसन बंटन लाग होता है -

(1) एक बूंद स्वच्छ पानी में कीटाणुओं की संख्या

(2)

(3) एक फुटबाल मैच में एक टीम द्‌वारा प्रति 5 मिनट में किए गए गोलों की संख्या

(4) एक चौराहे पर होने 'वाली दुर्घटनाओं की संख्या

(5) किसी शहर में एक वर्ष में किसी महामारी से मरने वालों की संख्या

सूत्र: r सफलता हेतु निम्नलिखित सूत्र से प्रायिकता ज्ञात करते हैं -

$$p(r)=\frac{e^{-m}.m^r}{r!}$$

गणन प्रक्रिया: यह एक खण्डित बंटन है इसमें 0,1,2,3,4 ....n सफलताओं की उपर्लिखित सूत्र द्‌वारा प्रायिकता करने के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया अपनायी जाती है ।

(i) सर्वप्रथम समान्तर माध्य 'm' ज्ञात करते हैं ।

('m' प्वॉयसन बंटन का एक मात्र प्राचल है, यदि. नहीं दिया गया है, तब m=np द्‌वारा ज्ञात किया जा सकता है)

(ii) e^{-m} का मान निकाला जाता है ।

e= गणितीय अचर मूल्य जिसका मान लगभग 2.7183 होता है ।

$$e^{-m} = \frac{1}{e^m} = \frac{1}{(2.7183)^m} = \frac{1}{anti\log(\log 2.7183xm)}$$

$$= \frac{1}{AL(0.4343xm)} = \mathrm{Re}\,ciprocal\left[Anti\log(0.4343xm)\right]$$

$$e^{-m} = \mathrm{Re}\,ciprocal\left[A.L(0.4343 \times m)\right]$$

(iii) फिर 0,1,2. 3' ..... n सफलताओं के लिए सूत्र की सहायता से प्रायिकताऐं ज्ञात करली जाती हैं ।

(iv) सभी पदों को N से गुणा करके इस बंटन की प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात कर लेते हैं।

15.8 प्वॉयसन बंटन की विशेषताएँ

(1) यह भी द्विपद बंटन की भांति एक खण्डित बंटन है ।

(2) यह उन स्थितियों में ही प्रयोग होता है जबकि घटनाओं के घटने की प्रायिकता (p) बहुत कम होती है और n अधिक होता है।

(3) समान्तर मध्य (m=np) ही इसका प्रमुख प्राचल है ।

(4) इसका स्वरूप असममित होता है तथा समान्तर माध्य (m) का मूल्य बढ़ने से यह बंटन दाहिनी ओर प्रवृत्त होता है ।

प्वॉयसन बंटन द्विपद बंटन का सीमान्त रूप - निम्न दशाओं में द्विपद बंटन की प्रायिकता को प्वॉयसन बंटन के आधार पर ज्ञात करेंगे -

(i) जब अभिप्रयोगों की संख्या n अपरिमित रूप से अधिक होती है $n \to \infty$

(ii) जब सफलता की प्रायिकता 'p' बहुत कम अर्थात् शून्य के निकट होती है ।

(iii) जब np=m परिमित होता है ।

अचर मूल्य - प्वॉयसन बंटन के निम्नलिखित अचर मूल्य हैं ।

(i) माध्य =m=np

(ii) प्रमापविचलन $(\sigma) = \sqrt{m}$

(iii) परिघात - प्रथम $(\mu_{\square}) = 0$ द्वितीय $(\mu_{\square}) = m$

तृतीय $(\mu_{\square}) = m$ चतुर्थ $(\mu_{\square}) = m(3m+1)$

(iv) $\beta_1 = \frac{1}{m}$

(v) $\beta_2 = 3 + \frac{1}{m}$

उदाहरण: 7

एक शहर में किसी एक वर्ष में ऑटो ड्राईवरों द्वारा होने वाली दुर्घटनाओं की संख्या का प्वॉयसन बंटन है । बंटन का माध्य 3 है । 1000 ऑटो ड्राईवरों में उनकी संख्या ज्ञात कीजिए-

(i) जिनसे वर्ष भर में एक भी दुर्घटना न घटी हो (ii)जिनसे वर्ष में 3 से अधिक दुर्घटनाएँ घटी हो ।

हल: प्वॉसन बंटन में प्रायिकता ज्ञात करने हेतु सर्वप्रथम समान्तर माध्य (m) की आवश्यकता होती है, प्रश्न में m =3 दिया गया है अब 0, 1, 2, 3 या अधिक दुर्घटनाओं की प्रायिकता शात करने के लिए प्वॉयसन बंटन निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात करेंगे -

(i) $p(r)=\dfrac{e^{-m}m^{r}}{r!}$

(ii) $p(0)=\dfrac{e^{-3}.3^{0}}{0!}=e^{-m}=0.0498$

अतः 1000 ऑटो ड्राईवरों में ऐसी संख्या जिनसे एक भी दुर्घटना न घटी हो =0.0498 x 1000 =49.8 =50 ड्राईवर

(iii) $p(1)=p(0)\times\dfrac{m}{1}=0.0498\times\dfrac{3}{1}=.1494$

$p(2)=p(1)x\dfrac{m}{2}=1.494x\dfrac{3}{2}=.2241$

$p(3)=p(2)x\dfrac{m}{3}=0.2241x\dfrac{3}{3}=.2241$

$p(r\geq 3)=1-p(r\leq 3)=1-\left[p(0)+p(1)+p(2)+p(3)\right]$

$p(r\geq 3)=1-(.0498+0.1494+0.2241+0.2241)$

= 1-0.6474 = 0.3526

अतः 1000 ड्राईवरों में से ऐसे ड्राईवरों की संख्या 3 से अधिक दुर्घटनाऐ घटी हों =100x0.3526 =352.6 $\approx 353m$

उदाहरण : 8

एक टाईपिस्ट 330 पृष्ठों को टाइप करने में निम्नलिखित त्रुटियाँ प्रति पृष्ठ करता है । प्वॉयसन बंटन का प्रयोग करते हुए सैद्धान्तिक आवृत्तियाँ ज्ञात कीजिए । (दिया गया है $e-^{0.439}=0.6447$)

त्रुटियाँ प्रतिपृष्ठ :	0	1	2	3	4
पृष्ठों की संख्या :	214	92	20	3	1

हल : $\overline{X}=\dfrac{\sum fX}{N}=\dfrac{145}{330}=0.439$

$$p(0)=e^{-m}=e-^{0.439}=0.439$$
$$N(p_0)=N\times P(O)=330\times 0.6447=212.75$$
$$N(p_1)=N(po)\times m=212.75\times 0.439=93.4$$
$$N(p_2)=N(p_1)\times\frac{m}{2}=93.4\times\frac{0.439}{22}=20.5$$
$$N(p_3)=N(p_2)\times\frac{m}{3}=20.5\times\frac{0.439}{3}=3.0$$
$$N(p_4)=N(p_3)\times\frac{m}{3}=3.0\times\frac{0.439}{4}=0.33$$

अत: सैद्धान्तिक आवृत्तियाँ इस प्रकार होंगी -

त्रुटियाँ प्रतिपृष्ठ. 0 1 2 3 4

पृष्ठों की संख्या : 212.75 93.40 20.5 3.0 0.33

उदाहरण : 9

किसी प्वॉयसन बंटन का माध्य 2.56 है । बंटन के अन्य अचर मूल्य ज्ञात कीजिए?

हल: दिया गया है - माध्य (Mean)m = 256

अत: प्रमाप विचलन $(\sigma)=\sqrt{2.56}=1.6$

परिघात: प्रथम परिघात $(\mu_{\square})=0$ द्वितीय परिघात $(\mu_{\square})=\sigma^2=2.56$

तृतीय परिघात $(\mu_{\square})=m(m=2.56)$

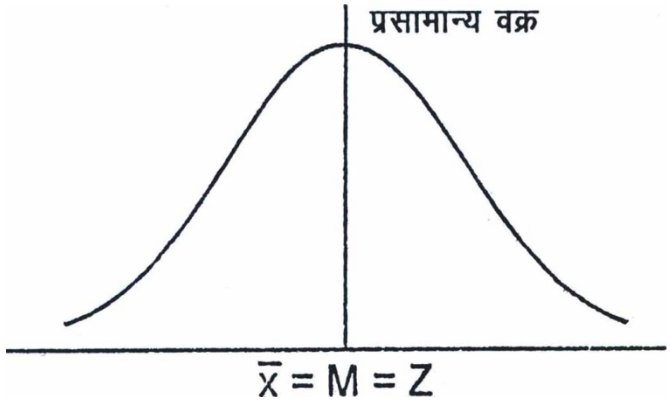
चतुर्थ परिघात $(\mu_{\square})=m(3m+1)=2.56(7.68+1)=22.221$

$$\beta_1=\frac{1}{m}=\frac{1}{2.56}=0.3906$$

$$\beta_2=3+\frac{1}{m}=3+\frac{1}{2.56}=3.3906$$

15.9 प्रसामान्य बंटन

प्रसामान्य बंटन एक अखण्डित बटन है । यह वह सरल सममित वक्र है जो द्विपद बंटन $(p+q)^n$ के विस्तार से प्राप्त होता है । यदि द्विपद बंटन $(p+q)^n$ में n (घातांक) का मान अनन्त हो तो बिन्दु रेखापत्र पर सभी बिन्दुओं को अंकित करने से एक पूर्ण सममित वक्र बनेगा । यही अखण्डित सममित वक्र द्विपद बंटन का सीमान्त रूप है जबकि n का मान अनन्त तथा p व q में से कोई भी बहुत कम न हो । प्रसामान्य बंटन के वक्र का आधार घंटीनुमा होता है । यह बंटन सैद्धान्तिक आवृत्ति बटनों में सबसे अधिक उपयोगी व महत्त्वपूर्ण बंटन है । यह आधुनिक सांख्यिकी की आधारशिला है । इस बंटन को विकसित करने में 18वीं शताब्दी के गणितज्ञ कार्ल गॉस का महत्वपूर्ण योगदान है अत: इस बंटन को गॉथ्सयन बंटन भी कहते हैं ।



उदाहरण : यदि 12 सिक्के उछाले जाये और $p = q = \frac{1}{2}$ हो तो द्विपद बंटन के आधार पर एक बारह भुजाओं वाला आवृत्ति बहुभुज बनेगा । परन्तु यदि 50,000 सिक्के एक साथ उछाले जाये व परिणाम को रेखाचित्र पर अंकित किया जाये तो यह एक पूर्ण सरल सममित वक्र बनेगा, जो प्रसामान्य बंटन का वक्र होगा ।

15.10 प्रसामान्य वक्र की विशेषताएँ

1. यह एक पूर्ण सममित वक्र है, इसकी आकृति घंटाकार होती है । इस बंटन में दोनों सिरों पर आवृत्तियाँ कम व केन्द्र में अधिक होती हैं ।

2. प्रसामान्य बंटन एक सतत / अखण्डित चर मूल्यों का बंटन होता है ।

3. इस वक्र का एक ही शीर्ष बिन्दु होता है अत: यह एक-बहुलकीय (Unimodel) वक्र है।

4. इस वक्र के दोनों सिरे आधार रेखा के निकट होते हैं किन्तु कभी नहीं छूते । सैद्धान्तिक रूप से यह दोनों दिशाओं में अनन्त की ओर (Infinity∞) अग्रसर होता है।

5. इस वक्र में समान्तर माध्य, बहुलक और मध्यका $\left(\overline{X} = M = Z\right)$ तीनों बराबर होते हैं ।

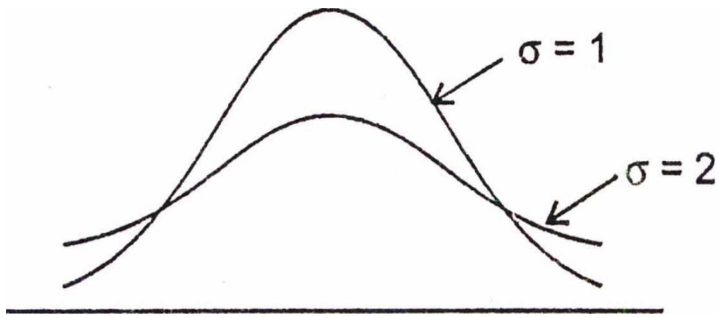
6. इसमें प्रथम और तृतीय चतुर्थकों का मध्यका से अन्तर समान होता है । $\left(Q_3 - M\right) = \left(m - Q_1\right)$

7. प्रसामान्य वक्र का माध्य ऋणात्मक, धनात्मक अथवा शून्य कोई भी संख्या हो सकती है।

8. यह एक पूर्ण सममित वक्र है इसमें विषमता नहीं होती है ।

9. इस बंटन के समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन दो प्राचल हैं, जिनकी सहायता से पूरा बंटन लिखा जा सकता है ।

10. प्रमाप विचलन इस चक्र की चौड़ाई को निर्धारित करता है । यदि प्रमाप विचलन कम है तो वक्र की चौड़ाई कम तथा प्रमाप विचलन अधिक है तो वक्र की चौड़ाई अधिक होगी



11. इसका चतुर्थक विचलन या अर्ध अन्तर चतुर्थक विस्तार सम्भाव्य विभ्रम के बराबर होता है । जो प्रमाप विचलन का लगभग 2/3 होता है ।

    $Q.D. = 0.6745\sigma$

12. इसके प्रमाप विचलन, माध्य विचलन तथा चतुर्थक में निम्नलिखित सम्बन्ध है-

    $4\sigma = 5\delta = 6Q.D$

13. यह एक सतत प्रायिकता बंटन है अत: इसका कुल क्षेत्रफल 1 होता है । क्षेत्रफल की प्रायिकता है, इसके माध्य के दोनों ओर बायीं व दांयी ओर का क्षेत्रफल बराबर यानि 05 , 0.5 होता है ।
14. प्रसामान्य वक्र पूर्ण सममित वक्र होता है, अत: इसके सभी विषम परिघात शून्य होते हें, विषमता भी शून्य होती हैं और पृथुशीर्षत्व (Kurtosis) का मान 3 होता है तथा ये मध्य शीर्ष वाले (Mesokurtic) होते हैं ।
15. एक प्रसामान्य वक्र को मानक प्रसामान्य वक्र में रूपान्तरित कर सकते हैं, प्रसामान्य वक्र का चर X, समान्तर माध्य μ तथा प्रमाप विचलन σ को मानक प्रसामान्य वक्रम में रूपान्तरित करने के बाद मानक प्रसामान्य वक्र के चर Z समान्तर माध्य μ=4 तथा प्रमाप विचलन σ=1 हो जाता है ।
16. प्रसामान्य दैव चर के लिए प्रायिकता क्षेत्रफल के आधार पर ज्ञात की जा सकती है अर्थात् क्षेत्रफल ही प्रायिकता होती है ।,

    (i) $\mu \pm 1\sigma$ के अन्तर्गत प्रसामान्य वक्र का 68.26%क्षेत्रफल आ जाता है ।

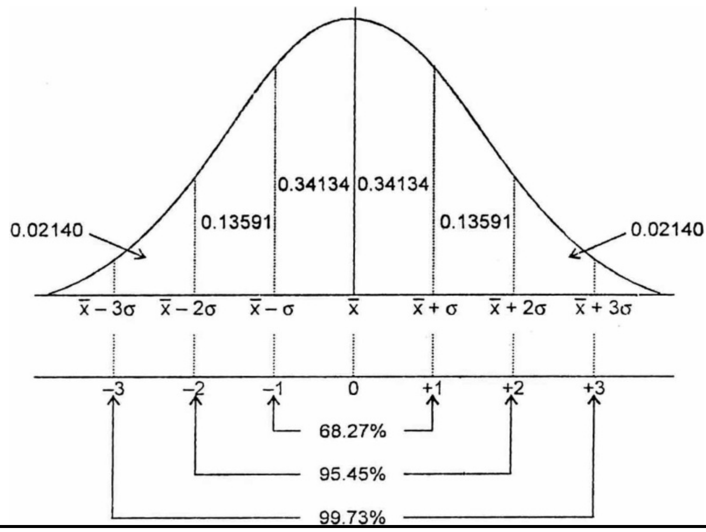
    (ii) $\mu \pm 2\sigma$ के अन्तर्गत प्रसामान्य वक्र का 95.44% क्षेत्रफल आ जाता है ।

    (iii) $\mu \pm 3\sigma$ के अन्तर्गत प्रसामान्य वक्र का 99.72% क्षेत्रफल आ जाता है ।

प्रसामान्य वक्र के अधीन क्षेत्र (Area under the normal curve)

माध्य कोटि से दूरी(प्रमाप विचलन इकाईयों में)	बांई ओर के क्षेत्रफल का अनुपात	दाहिनी ओर के क्षेत्रफल का अनुपात	माध्य-कोटि से दोनों ओर के क्षेत्रफल का सम्पूर्ण क्षेत्रफल से अनुपात व
$\left[z = \frac{X - X}{\delta}\right]$	$\left(\bar{x} - \sigma\right)$	$\left(\bar{x} + \sigma\right)$	प्रतिशत $\bar{x} \pm \sigma$
0.5	.19146	.19146	.38292 या 38.29%
0.6745	.25000	.25000	.5000 या 50%
1.0	.34134	.34134	.68268 या 68.27 %
1.96	.47500	.47500	.95000या95%
2.0	.47725	.47725	.95450 या 95.45%
2.5758	.49500	.49500	.99000 या 99%
3.0	.49865	.49865	.99730 या 99.73%

प्रसामान्य बंटन के अधीनस्थ क्षेत्रफल



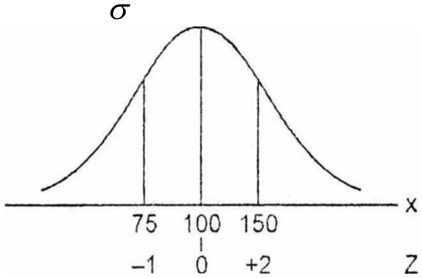
15.11 मानक प्रसामान्य वक्र (The Standard Normal Curve)

प्रसामान्य बंटन हेतु दो प्राचल $\bar{x}$ व σ आवश्यक हैं जिनसे पूरा बंटन प्रस्तुत कर सकते हैं । प्रसामान्य वक्र के अधीनस्थ विभिन्न क्षेत्र सारणी रो ज्ञात किये जा सकते हैं, लेकिन प्रत्येक माध्य व प्रमाप विचलन के लिए पृथक प्रसामान्य वक्र आसंजन करना होगा अर्थात् हर बार नई रचना करनी होगी, अन्यथा प्रायिकता का परिकलन नहीं किया जा सकता । इस कठिनाई को दूर करने के लिए सभी प्रकार के प्रसामान्य वक्रों को मानक प्रसामान्य वक्र में रूपान्तरित कर दिया जाता है । तत्पश्चात् केवल एक ही वक्र के आधार पर प्रायिकता (क्षेत्रफल) निर्धारित करना सरल होता है ।

मानक प्रसामान्य वक्र का माध्य शून्य (0) तथा प्रमाप विचलन 1 होता है । इसका शीर्ष बिन्दु शून्य पर स्थित होता है क्योंकि इसके बहुलक = मध्यका = माध्य = 0 होते हैं । इसका चर Z कहलाता है तथा अन्य सभी विशेषताएँ प्रसामान्य वक्र की भाँति ही होती हैं।

मानक प्रसामान्य चर में परिवर्तित करना -

Z का रूपान्तरण सूत्र $z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma}$



Z = -1 या -2 अर्थात Negative भी हो सकता है । Z के ऋणात्मक मूल्य का अर्थ होता है माध्य के बांयी होर जबकि Z के धनात्मक मूल्य का अर्थ होता माध्य के दांयी ओर । लेकिन Z के ऋणात्मक मूल्य के कारण प्रायिकता को ऋणात्मक नहीं कर दे, क्योंकि क्षेत्रफल (प्रायिकता) कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकता ।

15.12 प्रसामान्य वक्र से प्रायिकता ज्ञात करना

1. सर्वप्रथम एक रफ चित्र बनाकर मध्य में समान्तर माध्य लिख लें ।

2. अब x के मूल्यों को सूत्र की सहायता से Z में रूपान्तरित करें ।

3. फिर (आगे Z table) दी गई सारणी में मानक प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे । यह क्षेत्रफल ही प्रायिकता है ।

उदाहरण : 10

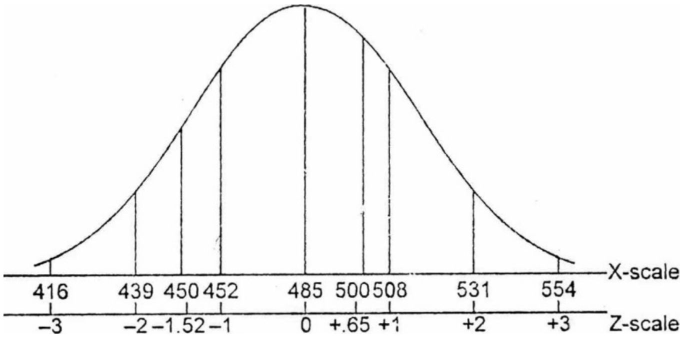
x सतत् यादृच्छिक चर है ओर उसका बंटन प्रसामान्य है जिसका माध्य 485 है और प्रमाप विचलन 23 है । कितनी प्रतिशत इकाइयाँ निम्नलिखित के मध्य स्थित होंगी -

(i) 450 और 485 के मध्य (ii) 450 और 500 के बीच

(iii) 450 से कम (iv) 500 और 531 के बीच

(v) 531 से अधिक

हल :



दिया गया है $\overline{X} = 485; \sigma = 23$

(i) 450 और 485 के मध्य मूल्यों का प्रतिशत

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{6}; \frac{450 - 485}{23} = -1.52$$

$$Z_2 = \frac{485 - 485}{23} = 0$$

1.52 और 0 के मध्य का क्षेत्रफल =0.4357 या 43.57 %

450 और 465 के मध्य 43.57% मूल्य स्थित है ।

(ii) 450 ओर 500 के बीच के मूल्यों का प्रतिशत -

$$Z_1 = \frac{450 - 485}{23} = -1.52; Z_2 = \frac{500 - 485}{23} = 0.65$$

1.52 से माध्य कोटि यानि '0' का क्षेत्र = 0.4357

0 से 065 तक का क्षेत्रफल = 0.2422

अत: कुल क्षेत्रफल = 0.4357+0.2422=0.6779

450 से 500 के बीच 67.79% मूल्य है ।

(iii) 450 से कम मूल्यों का प्रतिशत - 23

$$Z_1 = \frac{450 - 485}{23} = -1.52$$

माध्य कोटि '0' से -1.52 तक का क्षेत्र = 0.4357

दूसरे अर्थ भाग का क्षेत्रफल =0.5000

$\therefore$ 1.52 से पूर्व बांयी ओर का क्षेत्रफल =0.5000 - 0.4357 = 0.0643

अत: 450 से कम मूल्यों का प्रतिशत =6.43%

(iv) 500 और 531 के बीच के मूल्य का प्रतिशत -

$$Z_1 = \frac{500 - 485}{23} = +0.65$$ का क्षेत्रफल 0.2422

$$Z_1 = \frac{500 - 485}{23} = +2.0$$ का क्षेत्रफल 0.4772

0.65 से + 2 के बीच का क्षेत्रफल = 0.4772-.2422=2350

अत: 500 से 531 के बीच मूल्यों का प्रतिशत = 23.50%

(v) 531 से अधिक मूल्यों का प्रतिशत –

$$Z = \frac{531 - 485}{23} = 2$$

$Z = +2$ तक का क्षेत्रफल =0.4772

दाहिने अर्ध भाग का क्षेत्रफल = 0.5000

Z=2 से अधिक वाले भाग का क्षेत्रफल = .5000-.4772 =0.228

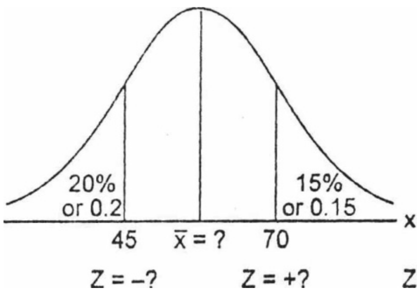
531 से अधिक 2.28% मूल्य है ।

उदाहरण : 11

एक प्रसामान्य बंटन जिसके कि 20% मूल्य 45 से कम है तथा 150% मूल्य 70 से अधिक है, इस बंटन का समान्तर माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए?

हल : $\sigma^2 = ?, X = ?$

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma}$$



$$Z\left(p = 0.35\right) = +1.04; \quad Z\left(p = 0.30\right) = -0.84$$

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma} \Rightarrow +1.04 = \frac{70 - \overline{X}}{\sigma} \Rightarrow \overline{X} + 1.04\sigma = 70 \qquad (1)$$

$$-0.84 = \frac{45 - \overline{X}}{\sigma} \Rightarrow \overline{X} - 0.84\sigma = 45 \qquad (2)$$

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर 1.88σ =45

σ=13.30

σ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\overline{x} + 13.83 = 70$$
$$\overline{x} = 56.17$$

अत: प्रसरण $\left(\sigma^2\right) = \left(13.3\right)^2 = 176.89$

माध्य = 56.17

15.13 प्रसामान्य-वक्र आसंजन (Fitting of Normal Curve)

प्रसामान्य-वक्र के आसजंन का आशय है दिए गए वक्र को प्रसामान्य मानने पर प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात करना । इसकी निम्नलिखित दो विधियाँ हैं -

(1) कोटि - अक्ष विधि (Method of ordinates)

(2) क्षेत्रफल विधि (Method of Areas)

(1) कोटि - अक्ष विधि

(i) सर्वप्रथम मध्य बिन्दु ज्ञात करें (ii) फिर मध्य बिन्दु हेतु $Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma}$ ज्ञात करें।

(iii) $f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Z^2/2}$ निकालें $\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0 - 3989 \right]$ होता है ।

(iv) $f(Z) = \frac{Ni}{\sigma}$ सें गुणा करके आवृत्तियाँ ज्ञात करें ।

(2) क्षेत्रफल विधि

प्रसामान्य वक्र के अन्तर्गत क्षेत्रफल सम्बन्धों का प्रयोग करके भी प्रसामान्य बंटन आसंजन किया जा सकता है ।

(i) इसमें सर्वप्रथम क्षेत्रफल (प्रायिकता) करते हैं ।

(ii) फिर क्षेत्रफल (प्रायिकता) को कुल आवृत्ति (N) से गुणा करके 'प्रत्याशित आवृतियाँ ज्ञात करली जाती हैं ।

15.14 सारांश (Summary)

जब वास्तविक आवृत्ति बंटन प्राप्त करना अधिक खर्चीला या असंभव हो तो सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन उनके स्थानापत्र का कार्य करते हैं । सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन में आवृत्ति बंटन को मान्यताओं के आधार पर गणितीय रूप में अनुमानित किया जाता है । इन मान्यताओं के अन्तर्गत समंकों की प्रवृत्ति तथा भावी पूर्वानुमान की सहायता से निर्णय लेने में सरलता रहती है । खण्डित प्रायिकता बंटन में द्विपद बंटन तथा प्वॉयसन बंटन तथा सतत प्रायिकता बंटन में प्रसामान्य बंटन को शामिल करते हैं । द्विपद बंटन द्वन्दात्मक विकल्पों के एक समूह की प्रायिकता को प्रस्तुत करता है । इसमें अभिप्रयोगों n की संख्या परिमित (सामान्यतया $n \le 20$) होती है । प्रत्येक अभिप्रयोग के दो परस्पर अपवर्जी परिणाम होते है जो आपस में स्वतंत्र होते हैं । यदि इस बंटन की मान्यताएँ पूरी हों तो, n अभिप्रयोगो में,r सफलता प्राप्त करने का सूत्र हैं $p(\times = r) = {}^n C_r p^r q^{n-r}$

p का मान 0 से 1 के मध्य है ।

द्विपद बंटन के विभिन्न पदों के संख्यात्मक गुणांक पास्कल त्रिभुत से भी देखे जा सकते हैं ।

प्वॉयसन बंटन ऐसी स्थिति में लागू होता है जहाँ घटनाऐं असामान्य तथा दुर्लभ हों । इसका स्वरूप असममित होता है तथा प्रमुख प्राचल समान्तर माध्य है । इसमें r सफलता हेतु निम्नांकित सूत्र से प्रायिकता ज्ञात करते हैं ।

$$p(r)=\frac{e^{-m}.m^{r}}{r!}$$

$$e^{-m}=\mathrm{Re}\,c.\left[A.L.(.4343\times m)\right]$$

प्रसामान्य बंटन आधुनिक सांख्यिकी की आधारशिला है जो एक अखण्डित बंटन है । यह वह सरल सममित वक्र है जो द्विपद बंटन $(p+q)^{n}$ के विस्तार से प्राप्त होता है । इस वक्र में समान्तर माध्य, बहुलक तथा मध्यका तीनों बराबर होते हैं । यह दोनों दिशाओं में अनंत की ओर अग्रसर घण्टाकार रूप में होता है । समान्तर माध्य तथा प्रमाप विचलन इसके दो प्रमुख प्राचल हैं । एक प्रसामान्य वक्र को मानक प्रसामान्य वक्र में रूपान्तरित कर सकते हैं । मानक प्रसामान्य वक्र का माध्य शून्य तथा प्रमाप विचलन 1 होता है । इसका शीर्ष बिन्दु 0 पर स्थित होता है । इसका चर Z कहलाता है, जो ऋणात्मक भी हो सकता है । प्रसामान्य वक्र आसंजन की दो विधियाँ हैं । (i) कोटि अक्ष विधि (ii) क्षेत्रफल विधि

15.15 शब्दावली (Glossary)

अवलोकित आवृत्ति बंटन : जब एक आवृत्ति बंटन की आवृत्तियाँ वास्तविक अवलोकनों पर आधारित हों तो उसे अवलोकित आवृत्ति बंटन कहते हैं ।

सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन ऐसे आवृत्ति बंटन जिन्हें वास्तविक अवलोकनों या प्रयोगों द्वारा प्राप्त न करके कुछ पूर्व निश्चित मान्यताओं के आधार पर गणितीय रूप में अनुमानित किया जाता है ।

खण्डित दैव चर : जब किसी दैव चर के परिणाम निश्चित अंतर पर ही प्राप्त हों ।

सतत् चर : ऐसा दैव चर जो कि निश्चित सीमाओं के अंदर कुछ भी हो सकता है ।

द्विपद बंटन : ऐसा खण्डित प्रायिकता बंटन जो द्वन्द्वात्मक विकल्पों के एक समूह की प्रायिकता प्रस्तुत करता है ।

प्वॉयसन बंटन : ऐसा बंटन जो किसी घटना के अल्प समयावधि में घटने की प्रायिकता (p) बहुत कम (शून्य के लगभग) एवं न घटने की प्रायिकता (q) बहुत अधिक (लगभग 1) होने पर प्रयुक्त होता है ।

प्रसामान्य बंटन : एक अखण्डित बंटन जो सरल सममित वक्र है तथा द्विपद बंटन $(p+q)^{n}$ के विस्तार से प्राप्त होता है, जिसका आकार घण्टीनुमा होता है ।

प्रसामान्य वक्र : आसंजन: इसका अभिप्राय दिए गए वक्र को प्रसामान्य मानने पर प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात करना है ।

15.16 स्वपरख प्रश्न अभ्यास (Self-Assessment Questions Exercise)

1. .प्रायिकता बंटन से आपका क्या तात्पर्य है?
2. द्विपद बंटन की मान्यताओं का उल्लेख कीजिए?
3. प्वांयसन बंटन की प्रमुख विशेषताओं का उल्लेख कीजिए?
4. मानक प्रसामान्य वक्र को समझाइये ।
5. प्रसामान्य बंटन का अर्थ स्पष्ट करते हुए इसकी विशेषताओं का उल्लेख कीजिए ।
6. प्रसामान्य बंटन के उस क्षेत्र को बताइये जो कि $\bar{\times} \pm 2\sigma$ को आच्छादित करता है ।
7. प्वॉयसन बंटन को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए । इसकी गणन प्रक्रिया एवं प्वॉयसन बंटन-द्विपद बंटन का सीमांत रूप को समझाइये ।

15.17 आंकिक प्रश्न (Numerical Questions)

1. छः पासे 729 बार फेंके जाते हैं । कितनी बार कम से कम तीन पासों पर पाँच या छः आने की प्रत्याशा है? (उत्तर. 233)
2. द्विपद बंटन का माध्य 20 तथा प्रमाप विचलन 4 है । n , p तथा q की गणना कीजिए?

   (उत्तर: n=100 , p = 0.2 , 9 = 0.8)
3. वह द्विपद बंटन ज्ञात कीजिए जिसका माध्य 12 तथा प्रमाप विचलन 3 है ।

   (उत्तर : n=48 , p=1/4)
4. वह द्विपद बंटन ज्ञात कीजिए जिसका माध्य 9 एवं प्रसरण 2.25 है ।

   (उत्तर : n= 12 , $p = {}^{3}\!/_{4}$)
5. एक ऐसे द्विपद बंटन के लिये जिनमें $p = {}^{7}\!/_{10}$ तथा n = 60 है, निम्नांकित माप निकालिये

   (क) माध्य (ख) प्रमाप विचलन (ग) विषमता का परिघात गुणांक (घ) शीर्षत्व माप ।

   (उत्तर : (क) 42 (ख) 3. 55 (ग) –1127 (घ) 2.9794)
6. छः सिक्के 6400 बार उछाले जाते हैं । प्वॉयसन बंटन का प्रयोग करके यह ज्ञात कीजिए कि छः चित्त X बार प्राप्त करने की सम्भाविता क्या है? (उत्तर : $m = 100, \frac{e^{-100}.100^{\times}}{\times 1}$)
7. निम्नांकित अवलोकनों के समुच्य पर प्वॉयसन बंटन का अन्वायोजन करते हुए सैद्धान्तिक आवृत्तियों का परिकलन कीजिए $-\left(e^{-5} = 0.6065\right)$

मृत्यु	0	1	2	3	4
आवृत्ति	122	60	15	2	1

(उत्तर 121, 61 , 15 , 3 , 0)

8. यदि किसी कम्पनी द्‌वारा निर्मित बिजली के बल्बों में 2 प्रतिशत दोषपूर्ण होते हैं, तो 200 बल्बों के प्रतिदर्श में (क) 2 से कम बल्बों, तथा (ख) 3 से अधिक बलों के दोषपूर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । (प्रदत्त $e^{-4} = 0.0183$)

   (उत्तर m=4 (क) $p(\times < 2) = 0.0915$ (ख) $p(x>3) = 1\{p_0 + p_1 + p_2 + p_3) = 0.5669$)

9. एक प्रसामान्य बंटन में ठीक 70% वस्तुएँ 35 के नीचे तथा 89% वस्तुएँ 63 के नीचे हैं । बंटन का माध्य तथा प्रमाप विचलन क्या होगा?

   (उत्तर: $\overline{X} = 50.29, \sigma = 10.36$)

10. सिपाहियों की औसत ऊँचाई 68.22" है और प्रसरण 10.8" है । 1000 सिपाहियों के दल में कितने सिपाहियों को आप 72" से अधिक लम्बा होने की प्रत्याशा करते हैं ।

    (उत्तर : 125)

15.18 उपयोगी पुस्तकें : (Further Readings)

1. Arora , P.N. and Arora S. Statistics, S. Chand & Sons, New Delhi .
2. Gupta, S.P., Statistical Methods, Sultan Chand &Sons, New Delhi
3. Sancheti , D.C. and Kapoor , V.K.Statistics (Theory , Methods and Application), Sultan Chand & Sons , New Delhi .
4. नागर, कैलाशनाथ, सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मीनाक्षी प्रकाशन, मेरठ ।
5. शर्मा, जैन. पारीक, सांख्यिकी, रमेश बुक डिपो, जयपुर ।

इकाई : 16 परिकल्पना परीक्षण I (t,Z)(Test of Hypothesis) I (t, Z)

इकाई की रूपरेखा

16.0 उद्देश्य
16.1 प्रस्तावना
162 स्टूडेण्ट की टी-परीक्षण
16.3 t-बंटन की विशेषताएँ
16.4 t-परीक्षण की मान्यताएँ
16.5 स्वातंत्र्य कोटियाँ
16.6 t बंटन के प्रयोग
16.7 फिशर का Z परीक्षण
16.8 Z-परीक्षण के प्रयोग
16.9 सारांश
16.10 शब्दावली
16.11 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास
16.12 आंकिक प्रश्न
16.13 उपयोगी पुस्तकें

16.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि :-

- छोटे प्रतिदर्शो हेतु परिकल्पना परीक्षण का परिचय प्राप्त कर सकें ।
- स्टूडेण्ट के टी-परीक्षण का अर्थ, विशेषताएँ एवं मान्यताएँ समझ सकें ।
- स्वातंत्र्य कोटियाँ एवं t बंटन के प्रयोग उदाहरण सहित समझ सकें ।
- फिशर के Z परीक्षण का अर्थ एवं प्रयोग समझ सकें ।

16.1 प्रस्तावना

छोटे प्रतिदर्शो (n>30) व का प्रतिचयन बंटन प्रसामान्य नहीं होता है और छोटे प्रतिदर्शो के माध्य और प्रमाप विचलन को समग्र के माध्य और प्रमाप विचलन के सर्वोत्तम आकल के रूप में प्रयुक्त नहीं किया जा सकता है । अत: छोटे प्रतिदर्शो के लिए अलग विधियों का प्रयोग किया जाता है । लघु प्रतिदर्श विश्लेषण में हमारा प्रधान उद्देश्य प्राचल मूल्य का अनुमान लगाना नहीं होता वरन् केवल यह मालूम करना होता है कि प्रतिचयन के अवलोकित मूल्य और प्राचल मूल्य का अन्तर प्रतिचयन उच्चावचनों के कारण उत्पन्न हुआ है अथवा नहीं । छोटे प्रतिदर्शो में सार्थकता परीक्षण इस मान्यता पर आधारित है कि वह समग्र जिसमें से प्रतिदर्श का चयन किया गया हे,

वह प्रसामान्य हो। यदि मूल समग्र प्रसामान्य बंटन से कुछ भिन्न भी है तो लघु प्रतिदर्श की सार्थकता परीक्षाऐं यथोचित रूप से लागू होती हैं । परन्तु मूल समग्र के अत्यधिक असममित -U या J का आकार का होने पर छोटे प्रतिदर्शो में सार्थकता परीक्षण की विधियों को विश्वसनीय नहीं माना जा सकता ।

हम यहाँ छोटे प्रतिदर्शो में सार्थकता परीक्षण हेतु प्रमुख निम्नलिखित दो परीक्षणों को समझेंगे -

1. स्टूडेण्ट का टी-परीक्षण 2. फिशर का जेड-परीक्षण

16.2 स्टूडेण्ट का टी-परीक्षण (Student's t-distribution)

t - बंटन छोटे आकार के प्रतिदर्शो की सार्थकता परीक्षण हेतु प्रयोग में लिया जाता है । t- बंटन के प्रतिपादन का श्रेय डबलिन की एक प्रसिद्ध मद्‌य निर्माण शिला गिनीस के सांख्यिकी सलाहकार-विलियम सीली गौसेट (W.S. Gosset) को है । जिन्होंने अपने उपनाम 'स्टूडेण्ट' से इसे प्रकाशित कराया ।

t - परीक्षण निम्नलिखित परिस्थितियों में काम में लाया जाता है -

(i) जब प्रतिदर्श का आकार 3० या 3० से कम हो । ($n \leq 30$)

(ii) जब समग्र का प्रमाप विचलन ज्ञात न हों ।

(iii) जब समग्र का बंटन एक प्रसामान्य बंटन हो ।

16.3 t- बंटन की विशेषताएँ (Characteristics of t-distribution)

1. प्रत्येक 't' बंटन एक सममित बंटन होता है]ग़ैर उसका माध्य भी शून्य होता है तथा प्रमाप विचलन 1 होता है ।
2. t- बंटन का विस्तार भी $-\infty$ से $+\infty$ तक होता है ।
3. प्रत्येक प्रतिदर्श आकार (n) के लिए एक पृथक 't' बंटन होता है । इसका भी प्रसामान्य बंटन की भाँति एक परिवार है । अत: एक मानक 't' व बंटन ज्ञात करते हैं ।
4. t बंटन केन्द्र में अधिक सपाट या चपटे शीर्ष वाला होता है और उसके दोनों सिरे अधिक ऊँचे होते हैं ।
5. प्रत्येक 't' बंटन एक प्रायिकता बटन है अत: इसका कुल क्षेत्रफल 1 होता है ।
6. इसमें जैसे-जैसे n का मान बढ़ता जाता हे, यह भी प्रसामान्य वक्र का आकार लेने लगता है, जैसे-जैसे n का मान 30 से बड़ा होता जाता है, t वक्र तथा प्रसामान्य बंटन में अंतर समाप्त होता जाता है ।
7. वक्र का उच्चतम बिन्दु $t = 0$ अर्थात् माध्य पर स्थित होता है ।
8. t- बंटन में प्रसरण प्रमापित प्रसामान्य बंटन की अपेक्षा अधिक होता है ।

16.4 t- परीक्षण की मान्यताएँ (Assumptions of t-test)

1. प्रतिदर्श का चयन याद्दच्छिक रूप से किया गया है ।
2. मूल समग्र जिसमें से छोटे प्रतिदर्श का चयन किया गया है प्रसामान्य है ।

3. समग्र का प्रमाप विचलन ज्ञात नहीं है ।

16.5 स्वातंत्र्य कोटियाँ (Degrees of Freedom)

t-स्वातंत्र्य कोटियों पर आधारित है । छोटे प्रतिदर्शी में स्वातंत्र्य कोटियों के परिकलन की आवश्यकता होती है । इन कोटियों से आशय समंक श्रेणी के ऐसे वर्गो से है जिनकी आवृत्तियाँ स्वतन्त्र रूप से ज्ञात की जा सकती हैं ।

स्वातंत्र्य कोटियाँ (d.f.)= n-1

एक सारणी में स्वातंत्र्य कोटियाँ (d.f)=(r-1) (C-1)

r= पंक्तियों की संख्या

C= स्तम्भों की संख्या

16.6 t - बंटन के प्रयोग (Application of the t-Distribution)

t - परीक्षण में हम अब निम्नलिखित परीक्षण समझेंगे -

1. लघु प्रतिदर्श के माध्य की सार्थकता जाँच

2. दो लघु प्रतिदर्शों के माध्यों के अंतर का सार्थकता-परीक्षण

3. अन्तर परीक्षण

4. सह सम्बन्ध गुणांक की सार्थकता परीक्षण

1. लघु प्रतिदर्श के माध्य की सार्थकता जाँच (Testing the significance of the mean in small sample)

छोटे प्रतिदर्श के समान्तर माध्य की सार्थकता जाँच हेतु भी बड़े प्रतिदर्शों में अपनायी प्रक्रिया ही अपनायी जाती है, केवल अन्तर यह है कि छोटे प्रतिदर्शों में Z - आमाप के स्थान पर t - मूल्य का प्रयोग किया जाता है । संक्षेप में t - परीक्षण प्रक्रिया इस प्रकार है :-

सर्वप्रथम,

(i) शून्य परिकल्पना $= H_a; \bar{x} = \mu$

अर्थात $\bar{x}$ और μ में कोई सार्थक अन्तर नहीं है ।

वैकल्पिक परिकल्पना = $H_a;\ \bar{x} = \mu \neq 0$ (द्विपुच्छ परीक्षण)

$H_a;\ \mu > \mu_0$

या (एक पुच्छ परीक्षण)

$\mu < \mu_0$

(ii) फिर सार्थकता स्तर का निर्धारण करते हैं, सामान्यतया 5%या 1%स्तर पर परीक्षण किया जाता है ।

(iii) छोटे प्रतिदर्शों में समग्र का प्रमाप विचलन ज्ञात नहीं होता है अत: प्रतिदर्श के प्रमाप विचलन S के आधार पर आकलन करते हैं ।

$$S=\sqrt{\frac{\sum d^2}{n-1}}\ ¿\ \text{या}\ S=\sqrt{\frac{\sum\left(x-\bar{x}\right)^2}{n-1}}\ \ (d=\bar{x}\ \text{से विचलन})$$

(iv) t - परीक्षण

$$t=\frac{\bar{x}-\mu}{S}\sqrt{n}$$

यदि प्रतिदर्श के प्रमाप विचलन ज्ञात करने में हर (n - 1) का प्रयोग न किया गया हों, बल्कि n का ही प्रयोग किया हो तो

$$t=\frac{\bar{x}-\mu}{S}\sqrt{n-1}$$

(v) t का सारणी मूल्य (क्रान्तिक मान) -

t = सारणी से स्वातंत्र्य कोटियों की सहायता से (V=n-1) एक निश्चित सार्थकता स्तर (सामान्यतः 5% व या 1%) पर क्रान्तिक मान ज्ञात किया जाता है । (t= सारणी आगे दी गई है।)

(vi) निर्णय लेना -

(a) यदि t का परिगणित मूल्य, >t के सारणी मूल्य है तो प्रतिदर्श माध्य व समष्टि माध्य में अंतर सार्थक है तथा शून्य परिकल्पना असत्य सिद्ध होती है ।

(b) t का परिगणित मूल्य <t का सारणी मूल्य है तो अन्तर अर्थहीन तथा शून्य परिकल्पना सत्य सिद्ध हो जाती है ।

समग्र माध्य की विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात करना

एक यादृच्छिक रूप से चुने गए लघु प्रतिदर्श के समान्तर माध्य की सहायता से समग्र के समान्तर माध्य (प्राचल) की 95% तथा 99% स्तर पर विश्वास्यता सीमाएँ इस सूत्र से ज्ञात की जाती हैं -

95% विश्वास्यता सीमाएँ

$$\bar{x}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}xt_{.05}$$

99% विश्वास्यता सीमाएँ

$$\bar{x}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}xt_{.01}$$

उदाहरण, : 1

एक कारखाने के 10 श्रमिकों के एक प्रतिदर्श से उनके द्वारा किए गए उत्पादन (संख्या में) के निम्न परिणाम प्राप्त हुए -

किए गए उत्पादन की माध्य संख्या 490

उत्पादन संख्या का प्रमाप विचलन 9

यह परीक्षण कीजिए कि फैक्ट्री के उत्पादन अर्थात समष्टि जिससे कि 10 श्रमिकों का यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया गया है का समान्तर माध्य 500 है, से लिया -गया है ।

स्वातंत्र्य संख्या	t का मूल्य	
	0.05	0.01
8	2.306	3.355
9	2.262	3.250
10	2.228	3.169

हल : दिया गया : $n=10, \bar{x}=490, \mu=500, \sigma=9$

सार्थकता स्तर. $\alpha=0.05, \alpha=0.01$

परिकल्पना. $H_0 : \bar{x}-\mu=0$

$H_a : \bar{x}-\mu \neq 0$

t का परिगणन

$$t=\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n-1}$$

$$\frac{1490-5001}{9}\sqrt{10-1}=\frac{10\times 3}{9}3.33$$

t का मान S ज्ञात करके भी निकाल सकते हैं:

$$S=\sqrt{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\sigma 2}}=\sqrt{\frac{10}{9}\times 81=\sqrt{90}}=9.486$$

$$\frac{\bar{x}-\mu}{S}\sqrt{n}=\frac{490-500}{9.49}\times\sqrt{10}$$

$$\frac{10\times 3.162}{9.49}=3.33$$

निर्णय: 5% सार्थकता स्तर पर 9.d.f (n-1) के लिए

t का परिगणित मूल्य = 3.33 > t का सारणी मूल्य 2.262

1% सार्थकता स्तर

t का परिगणित मूल्य 3.33>t_0 का सारणी मूल्य 3.250

अत: प्रतिदर्श माध्य व समष्टि माध्य में अंतर सार्थक है और शून्य परिकल्पना असत्य सिद्ध होती है।

उदाहरण : 2

एक कम्पनी के एक माह के विभिन्न दिनों में शेयरों की कीमत इस प्रकार थी -

66,65,69,70, 71, 70,63,64,68

इन समंकों के आधार पर क्या यह कहना उचित है कि कम्पनी में शेयरों की माध्य कीमत 65 है।

हल: समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन का परिकलन

x	विचलन Dx=(x-A) (A=70)	विचलनों का वर्ग Dx^2
66	-4	16
65	-5	25
69	-1	1
70	0	0
69	-1	1
71	1	1
70	0	0
63	-7	49
46	-6	36
68	-2	4
	$\sum dx = -25$	$\sum d2 = 133$

समान्तर माध्य $\bar{x} = A + \frac{\sum dx}{n} = 70 + \left(\frac{-25}{10}\right) = 67.5$

प्रमाप विचलन. $(S) = \sqrt{\left\{\frac{\sum d^2}{n}\left(\frac{\sum d^2}{n}\right)\right\}} = \sqrt{\left\{\frac{133}{10} - \left(\frac{-25}{10}\right)^2\right\}}$

$$= \left\{13.3 - (-2.5)^2\right\} = \sqrt{7.05} = 2.65$$

शून्य परिकल्पना : $H_0 : \mu = 65$

वैकल्पिक परिकर्ल्पना : $H_1 : \mu \neq 65$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{S^2 / n - 1}} = \frac{67.5 - 65}{\sqrt{7.05 / 9}} = \frac{2.5}{0.885} = 2.825$$

5% सार्थकता स्तर पर 9 d.f. हेतु सारणी मूल्य 2.262

अत: 2.825 > 2.262

अत: शून्य परिकल्पना अस्वीकृत होती है तथा उस माह की शेयर की कीमत 65 नहीं है।

2. दो लघु-प्रतिदर्शों के माध्यों के अंतर का सार्थकता-परीक्षण

दो लघु प्रतिदर्शों के माध्यों के अंतर की सार्थकता-परीक्षण का उद्देश्य यह जानना होता है कि दोनों प्रतिदर्शों माध्यों में अंतर सार्थक है या नहीं अथवा दोनों प्रतिदर्श एक ही मूल समग्र से चुने गये हैं या नहीं । इनकी प्रक्रिया इस प्रकार है -

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad \text{या} \quad \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \sum(x_2 - \bar{x}_2)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}} \text{ या } S = \sqrt{\frac{\sum d_1^2 + \sum d_2^2}{(n_1 + n_2) - 2}}$$

$\bar{x}_1$ और $\bar{x}_2$ दोनों प्रतिदर्शों के समान्तर माध्य हैं,

n_1 और n_2 दोनों प्रतिदर्शों की इकाइयों की संख्याएँ हैं ।

अगर दोनों प्रतिदर्शों के प्रमाप विचलन दिये हों तो उनकी सहायता से, S निम्न सूत्र से निकालेंगे

जब n का प्रयोग हो जब(n-1) का प्रयोग हो

$$S = \sqrt{\frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \quad S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

अगर विचलन कल्पित माध्यों से लिये गये हो तो सामूहिक S का मान इस प्रकार ज्ञात करेंगे-

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_1 - A_1)^2 + \sum (x_2 - A_2)^2 - n_1(\bar{x}_1 - A_1)^2 - n_2(\bar{x}_2 - A_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$$d.f = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2$$

उदाहरण : 3

10 व 17 आकारों के दो यादृच्छिक प्रतिदर्शों के समान्तर माध्य क्रमशः रू. 6200 तथा रू. 5600 हैं तथा प्रमाप विचलन रू. 690 तथा रू. 600 हैं । क्या उक्त प्रतिदर्श एक ही प्रसामान्य समष्टि से चुने गये माने जा सकते हैं?

:	24	25	26	27
t 5% सार्थकता स्तर पर :	2.064	2.060	2.056	2.052

हल : शून्य परिकल्पना: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

वैकल्पिक परिकल्पना: $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$

सार्थकता स्तर - a = 0.05

$$(d.f) = n_1 + n_2 - 2 = 10 + 17 - 2 = 25$$

परीक्षण प्रतिदर्शज $-t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{S^2\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$

जबकि $S^2 = \dfrac{n_1\sigma_2^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

$= \dfrac{10\times(690)^2 + 17\times(600)^2}{10+17-2} 434240$

t= $\dfrac{6200 - 5600}{\sqrt{435240\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{17}\right)}}$

$\therefore$ t=

$\dfrac{600}{\sqrt{69126.34}} = \dfrac{600}{262.92} = 2.28$

निर्णय: 5% सार्थकता स्तर पर 25 d.f के लिए सारणी मूल्य 2.06 t का परिकलित मूल्य 2.28 >t का सारणी मूल्य 2.06 अत: अन्तर सार्थक है । अत: शून्य परिकल्पना असत्य सिद्ध होती है ।

उदाहरण : 4

10 कुत्तों के एक याद्दच्छिक प्रतिदर्श को खाद्य A दिया गया तथा एक निश्चित अवधि में उनके भार में निम्नलिखित वृद्धि (किग्रा.) हुई।

10, 6,16,17,13,12,8,14,15,9

12 कुत्तों के दूसरे याद्दच्छक प्रतिदर्श को खाद्य B दिया गया तथा उसी अवधि में निम्नलिखित वृद्धि (किग्रा.) हुई।

7,13,22,15,12,14, 18, 8, 6,21,23,10,17

खाद्य A 'तथा खाद्य B पर रखे गये कुत्तों के भारों में वृद्धि में अंतर की सार्थकता की जाँच कीजिए । 5% सार्थकता स्तर पर 20 स्वातंत्र्य संख्या हेतु t का सारणीमान 2.09 है ।)

हल: परिकल्पना: $H_0 : \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0$

$H_a : \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \neq 0$

सार्थकता स्तर - 5%: V = 20 कें लिए $t_{.05}$ सारणी मूल्य 2.09 है ।

प्रतिदर्शों के समान्तर माध्य और समष्टि के प्रमाप विचलन का परिकलन

खाद्य A

$$\bar{x}_1 = \frac{\Sigma x_1}{n_1} = \frac{120}{10} = 12$$

खाद्य B

$$\bar{x}_2 = \frac{\Sigma x_2}{n_2} = \frac{180}{10} = 15$$

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma\left(x_1 - \bar{x}_2\right)^2 + \Sigma\left(x_2 - \bar{x}_2\right)^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{120+314}{10+12-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{434}{20}} = \sqrt{21.7} = 4.658$$

खाद्य A			खाद्य B		
भारवृद्धि X_1	$d_1 = \left(x_1 - \bar{x}_2\right)$	$d_1 2 = \left(x_1 - \bar{x}_2\right)^2$	भारवृद्धि X_2	$d_1 = \left(x_1 \bar{x}_2\right)$	$d_1 2 = \left(x_1 - \bar{x}_2\right)^2$
10	-2	4	7	-8	64
6	-6	36	13	-2	4
16	+4	16	22	+7	49
17	+5	25	15	0	0
13	+1	1	12	-3	9
12	0	0	14	-1	1
8	-4	16	18	+3	9
14	+2	4	8	-7	49
15	+3	9	21	+6	36
$\left(x_2 - \bar{x}_2\right)^2$ 9	-3	9	23	+8	64
			10	-5	25
			17	+2	4
120 Σ X 1		120 $\Sigma\left(x_1 - \bar{x}1\right)^2$	180 Σ X 2		314 $\left(x_2 - \bar{x}_2\right)^2$

परीक्षण प्रतिदर्शज (t) $= \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_2}{S}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$

$$= \frac{|12-15|}{4.658} \times \sqrt{\frac{10 \times 12}{10+12}} = \frac{3}{4.658} \times \sqrt{\frac{120}{22}} = \frac{3 \times 2.335}{4.658} = 1.504$$

df. = n_1 +n_2 - 2 = 10 + 12 - 2 = 20

निर्णय: 5% सार्थकता स्तर पर 20df के लिए t का सारणी मूल्य 20.9 है ।

t का परिकलित मूल्य, 1.504 < t का सारणी मूल्य 2.09

अत: अन्तर अर्थहीन है । शून्य परिकल्पना सत्य सिद्ध होती है । खाद्य A व खाद्य B के भार बढ़ाने की क्षमता में कोई अंतर नहीं है ।

3. अंतर परीक्षण - आश्रित प्रतिदर्शों के माध्यों में अंतर (The ' Difference between mean of dependent samples)

अन्तर परीक्षण जाँच का प्रयोग उस स्थिति में किया जाता है जब स्वतंत्र प्रतिदर्शों के स्थान पर आश्रित प्रतिदर्श होते हैं । आश्रित प्रतिदर्श से आशय जब समान इकाइयों पर किसी घटना का प्रभाव देना हो । जैसे-5 विद्यार्थियों की सांख्यिकी की परीक्षा ली गई तथा अंक प्रदान किए गये इसके पश्चात् एक महीने के ट्यूशन के बाद उनकी दोबारा परीक्षा ली गई और प्राप्तांक ज्ञात कर लिये गये । व्यक्तिगत प्राप्तांकों के अन्तर की जाँच करके यह निकाला जा सकता है कि ट्यूशन से विद्यार्थियों का स्तर बढ़ा है या नहीं ।

अन्तर परीक्षा की प्रक्रिया इस प्रकार है:-

(i) अन्तर परीक्षण के लिए सबसे पहले दोनों समंकों से अंतर की ' मात्रा (वृद्धि +, कमी) निकाल ली जाती है ।

(ii) अन्तरों का समान्तर माध्य $\overline{D} = \frac{\Sigma D}{n}$ ज्ञात करते हैं ।

(iii) अन्तरों के माध्य से उनके विचलन निकालकर विचलन वर्गों का जोड़ प्राप्त करते हैं।

$$\Sigma d^2 = \Sigma\left(D - \overline{D}\right)^2$$

(iv) फिर S ज्ञात करते हैं

$$S = \frac{\Sigma\left(D - \overline{D}\right)^2}{n-1}$$

(v) फिर t प्रतिदर्शज का परिकलन करते हैं । इसमें वास्तविक अन्तर शून्य मानते हैं ।

$$t = \frac{\overline{D} - 0}{S}\sqrt{n}$$

(vi) अब (n - 1)स्वातंत्र्य संख्या में लिए 5% सार्थकता स्तर पर t का सारणी मूल्य ज्ञात करते हैं । यदि परिगणित t> सारणी t तो अंतर सार्थक माना जाता है । अर्थात् घटना का प्रभाव पड़ा है । यदि परिगणित t < सारणी t तो अंतर अर्थहीन है और घटना का कोई प्रभाव नहीं पड़ा है ।

उदाहरण : 5

आपको सांख्यिकी में 10 विद्यार्थियों के दो परीक्षाओं में एक विशेष शिक्षण से पूर्व और दूसरी उसके पश्चात् - प्राप्तांक दिये हुए हैं । क्या इन प्राप्तांकों से यह आभास होता है कि विशेष शिक्षण से विद्यार्थियों का लाभ हुआ है?

विद्यार्थी संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
परीक्षा I (शिक्षण से पूर्व)	9	8	7	9	6	8	7	10	5	8
परीक्षा II (शिक्षोपरान्त)	10	9	6	10	8	7	9	9	7	5

हल: अन्तर और अन्तरों के प्रमाप विचलन का परिकलन

विद्यार्थी	**प्राप्तांक (परीक्षा I)**	**प्राप्तांक (परीक्षाII)**	**अंतर D**	**विचलन** $\left(D-\overline{D}\right)$	**विचलन वर्ग** $\left(D-\overline{D}\right)^2$
1	9	10	+1	+.5	.25
2	8	9	+1	+.5	.25
3	7	6	-1	-1.5	2.25
4	9	10	+1	+.5	.25
5	6	8	+2	+1.5	2.25
6	8	7	-1	-1.5	2.25
7	7	9	+2	+1.5	2.25
8	10	9	-1	-1.5	2.25
9	5	7	+2	+1.5	2.25
10	6	5	-1	-1.5	2.25
120			5		16.5

$$\overline{D} = \frac{\Sigma D}{n} = \frac{5}{10} = 0.5$$

$$S = \sqrt{\Sigma\frac{\left(D-\overline{D}\right)^2}{n-1}}\sqrt{\frac{16.5}{10-1}} = \sqrt{1.833} = 1.354$$

हल: परिकल्पना: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ माध्य प्राप्तांक एक समान हैं ।

$H_a : \mu_1 < \mu_2$ या $\mu_1 > \mu_2$ प्राप्तांकों में अंतर आया है ।

परिगणन $(t)\dfrac{\overline{D}-O}{D}\sqrt{n}$

$$= \frac{0.5-0}{1.354}\sqrt{10} = \frac{0.5\times\sqrt{10}}{1.354}$$

निर्णय. t का 5% सार्थकता स्तर पर 9 d..f के लिए सारणी मूल्य 1.83t का परिगणित मूल्य 1.1168 < t का सारणी मूल्य अत: शून्य परिकल्पना अस्वीकृत होती है अर्थात् अतिरिक्त शिक्षण से कोई प्रभाव नहीं पड़ा है ।

4. छोटे प्रतिदर्शों में अवलोकित सहसंबंध गुणांक की सार्थकता का t परीक्षण (testing the significance of observed correlation coefficient in small samples t-test)

n युग्मित समंकों के याद्दच्छिक प्रतिदर्श जो कि प्रसामान्य समग्र से चुना गया हो, के सहसम्बन्ध गुणांक की सार्थकता परीक्षण हेतु भी t - परीक्षण का प्रयोग किया जाता है ।

t - परीक्षण द्वारा हम परिकल्पना की जाँच करते है कि समग्र का सहसबन्ध गुणांक शून्य है । सहसम्बन्ध गुणांक के t - परीक्षण की विधि पूर्व के समान ही है लेकिन स्वातंत्र्य कोटियों की संख्या इस प्रकार निकालते हैं :

$$d.f. = n-2$$

t का परिगणन

$$t - \frac{r}{\sqrt{1-r}} \times \sqrt{n-2}$$

उदाहरण : 6

एक प्रसामान्य समग्र बंटन में से याद्दच्छिक रूप से निकाले गये 11 युग्मों के बीच सहसम्बन्ध गुणांक 0.5 है, तो t - परीक्षण द्वारा जाँच कीजिए कि क्या इसे 0.05 सार्थकता स्तर पर सार्थक माना जा सकता है?

हल : दिया गया : $r = 0.5, n = 11$

सार्थकता स्तर 0.05 पर V = 11-2=9 $d.f.$ के लिए सारणी मान = 2.262

परीक्षण प्रतिदर्शज - t का परिगणन

$$t = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \times \sqrt{N-2}$$

$$= \frac{0.5}{\sqrt{1-(0.5)^2}} \times \sqrt{11-2}$$

$$= \frac{0.5}{\sqrt{0.75}} \sqrt{9} = \frac{0.5 \times 3}{\sqrt{0.866}} = 1.732$$

निर्णय: t का परिगणित मूल्य 1.732 < t का सारणी मूल्य 2.262 है । अत: सहसम्बन्ध गुणांक सार्थक नहीं है ।

16.7 फिशर का Z परीक्षण (fisher's Z - test)'

हालांकि छोटे प्रतिदर्शो में सहसम्बन्ध-गुणांक की सार्थकता का परीक्षण हम t - परीक्षण में पढ़ चुके हैं । लेकिन श्री रौलेन्ड फिशर ने इसके लिए एक विशेष प्रविधि का प्रयोग किया है । फिशर के अनुसार इस विधि में सहसम्बन्ध गुणांक, r को z प्रतिदर्शज में रूपान्तरित कर लिया जाता है। इसलिए इस विधि को फिशर का Z - परीक्षण Fisher ' Z-test या Z रूपान्तरण (Z -transformation) कहते हैं ।

r को Z प्रतिदर्शज में बदलने का निम्नलिखित सूत् है

$$Z = \frac{1}{2} = \log_e \left(\frac{1+r}{1-r}\right) \text{ या } Z = 1.1513 \log_{10} \left(\frac{1+r}{1-r}\right) \left(\because \log_e = \log_{10} 2.3026\right)$$

Z प्रतिदर्शज का बंटन प्रसामान्य वंटन के समान ही होता है ।

16.8 Z परीक्षण के प्रयोग (Uses of Z-test)

Z - परीक्षण के मुख्यत: दो प्रयोग हैं -

(i) दो प्रतिदर्शों के सहसम्बन्ध गुणांकों (r_1 व r_2) में अंतर सार्थक है या नहीं ।

(ii) r के अवलोकित मूल्य व उसके परिकलित मूल्य में अंतर सार्थक है या नहीं ।

(हालांकि यह परीक्षण करना कि अवलोकित rशून्य से सार्थक रूप से भिन्न है यी नहीं, t परीक्षण को ही ज्यादा श्रेष्ठ मानते हैं ।)

(1) दो प्रतिदर्शों के सहसम्बन्ध गुणांकों में सार्थकता परीक्षण प्रक्रिया

(i) इसके लिए सबसे पहले दोनों प्रतिदर्शों को Z में निम्नलिखित सूत्र द्वारा बदल लिया जाता है ।

(Z_1 व Z_2)

$$Z = 1.1513 \log_{10}\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

(ii) तत्पश्चात् निम्न सूत्र की सहायता से दोनों के अंतर की प्रमाप त्रुटि निकाली जाती है:

$$\sigma z_1 - z_2 \sqrt{\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2} = \sqrt{\frac{1}{n_1 = 3} + \frac{1}{n_1 = 3}}$$

(iii) अन्त में, सार्थकता अनुपात $\dfrac{Z_1 - Z_2}{\sigma z_1 - z_2}$ की तुलना एक निश्चित सार्थकता स्तर पर, (जोकि सामान्य 5% या 1% होती है) प्रसामान्य बंटन के क्रांतिक मूल्य से करते हैं। यदि परिकलित सार्थकता अनुपात > क्रान्तिक मान है तो अन्तर सार्थक है अन्यथा अर्थहीन ।

उदाहरण:7

दो प्रतिदर्श 23 व 19 आकार के तथा जिनका सहसम्बन्ध गुणांक क्रमश: 0.40,0.65 है का फिशर के Z परीक्षण द्वारा 5% सार्थकता स्तर पर दोनों r के मानों के अन्तर की सार्थकता परीक्षण कीजिए?

हल: परिकल्पना: $H_o : r_1 = r_2$

$H_a : r_1 \neq r_2$

Z_1 का परिकलन

दिया गया, $n_1 = 23, r_1 0.40$

$$Z_1 = 1.1513 \log \frac{1+0.4}{1-0.4}$$

$$= 1.1513 \times \log 2.333$$

$$= 1.1513 \times 0.368 = 0.424$$

Z_2 का परिकलन

दिया गया, $n_2 = 19, r_2 0.65$

$$= 1.1513 \log \frac{1+0.65}{1-0.65}$$

$$= 1.1513 \times \log 4.714$$

$$= 1.1513 \times 0.6734 = 0.775$$

अंतर की प्रमाप त्रुटि

$$\sigma z_1 - z_2 = \sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}} = \sqrt{\frac{1}{23-3} + \frac{1}{19-3}} = \sqrt{0.05 + 0.0625}$$

$$= \sqrt{0.01125} = 0.335$$

सार्थकता अनुपात $\frac{|Z_1 - Z_2|}{\sigma z_1 - z_2} = \frac{|0.424 - 0.775|}{0.335} = \frac{0.351}{0.335} = 1.048$

निर्णय: सार्थकता अनुपात 1.048 < 1.965 अत: 5% सार्थकता स्तर पर शून्य परिकल्पना को स्वीकार किया जाता है और यह सिद्ध होता है कि दोनों प्रतिदर्श एक ही समग्र से चुने गए हैं दोनों सहसम्बन्ध गुणांकों में अंतर सार्थक नहीं है ।

(2) r के अवलोकित मूल्य व परिकल्पित मूल्य में अंतर में सार्थकता परीक्षण प्रक्रिया,

(i) सर्वप्रथम r के अवलोकित परिकलित मूल्य अथवा समष्टि मूल्य (P) को Z में निम्नलिखित सूत्र द्वारा परिवर्तित करेंगे ।

r का Z_1 में परिकलन

$$Z_s = 1.1513 \log_{10} - \frac{1+r}{n-3}$$

समष्टि मूल्य P का Z_2 में परिकलन

$$Z_p = 1.1513 \log_{10} - \frac{1+P}{1-P}$$

(ii) फिर निम्न सूत्र द्वारा z की प्रमाप त्रुटि ज्ञात करेंगे -

$$\sigma z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

(iii) सार्थकता अनुपात का निर्धारण -

$$\frac{|Z_s - Z_p|}{\sigma z}$$

(iv) अन्त में, एक निश्चित सार्थकता स्तर (5 % या 1 %) पर प्राप्त क्रान्तिक मान की तुलना सार्थकता अनुपात से की जाती है, और नीचे दिये गये निष्कर्ष निकाले जाते हैं - z

यदि $\frac{Z_s - Z_p}{\sigma z} > 2.58$ तो अंतर 5% स्तर पर सार्थक है अन्यथा नहीं

यदि $\frac{Z_s - Z_p}{\sigma z} > 1.96$ तो अन्तर 5% स्तर पर सार्थक है ।

यदि $\frac{Z_s - Z_p}{\sigma z} > 3,$ तो अन्तर 0.27% स्तर पर सार्थक है ।

उदाहरण : 8

29 पद-युग्मों का सहसम्बन्ध गुणांक 0.72 है । Z परीक्षण द्वारा यह ज्ञात कीजिए कि क्या यह गुणांक समष्टि के सहसंबंध गुणांक 0.8 से सार्थक रूप से भिन्न है?

हल : दिया गया है r_s =0,72, P=0.80, n=29

$$Z_s = 1.1513 \log_{10} - \frac{1+0.72}{1-0.72} \quad Z_p = 1.1513 \log_{10} - \frac{1+0.80}{1-0.80}$$

$$= 1.1513 \log \ \frac{1.72}{0.28} \quad = 1.1513 \log \ \frac{1.8}{0.2}$$

$$= 1.1513 \times \log \ 6.143 \quad = 1.1513 \times \log \ 9$$

$$= 1.1513 \times 0.7884 \quad = 1.1513 \times 0.9542$$

$$= 0.9077 \quad = 1.0986$$

नोट: दिये गए t के मूल्यों t में रूपान्तरण फिशर की Z प्रतिदर्शज सारणी से भी कर सकते हैं ।

σz (Z की प्रमाप त्रुटि) $\frac{1}{\sqrt{n \ -3}} = \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{1}{5.099}$

$$\sigma = 0.1961$$

$$\frac{|Z_s - Z_p| = |0.9077 - 1.986|}{0.1961} = \frac{0.1909}{0.1961} = 0.973 < 1.96$$

निर्णय : अत: 5% स्तर पर अन्तर सार्थक नहीं है ।

16.9 सारांश (Summary)

छोटे प्रतिदर्शों (n>30) के माध्य और प्रमाप विचलन को समग्र के माध्य और प्रमाप विचलन के सर्वोत्तम आकलन के रूप में प्रयुक्त नहीं किया जा सकता । लघु प्रतिदर्श विश्लेषण में प्रमुख उद्देश्य यह पता लगाना होता है कि प्रतिचयन के अवलोकित मूल्य और प्राचल मूल्य का अन्तर प्रतिचयन उच्चावचनों के कारण उत्पन्न हुआ है या नहीं । छोटे प्रतिदर्शों में सार्थकता परीक्षण की विधियों में t परीक्षण प्रतिदर्श का आकार 30 का 30 से कम होने पर, समग्र का प्रमाप विचलन ज्ञात न होने तथा समग्र का बंटन एक प्रसामान्य बंटन होने पर काम में लाया जाता है ।

t बंटन सममित बंटन होता है जिसका माध्य शून्य प्रमाप विचलन 1 होता है । केन्द्र में अधिक सपाट या चपटे शीर्षक वाले इस प्रायिकता बंटन का कुल क्षेत्रफल 1.0 होता है । t परीक्षण में प्रतिचयन का चयन यादृच्छिक रूप से किया जाता है । t परीक्षण का उपयोग लघु प्रतिदर्श के माध्य की सार्थकता जाँच, दो लघु प्रतिदर्शों के माध्यों के अंतर का सार्थकता - परीक्षण, अंतर परीक्षण तथा सह-सम्बन्ध गुणांक की सार्थकता परीक्षण में किया जाता है ।

फिशर के अनुसार Z परीक्षण में सह-सम्बन्ध गुणांक r को z प्रतिदर्शज में रूपान्तरित कर लिया जाता है । z परीक्षण दो प्रतिदर्शों के सह-सम्बन्ध गुणांकों में अंतर सार्थक है या नहीं तथा r के अवलोकित मूल्य तथा उसके परिकलित मूल्य में अंतर सार्थक है या नहीं हेतु प्रयोग में लिया जाता है ।

16.10 शब्दावली (Glossary)

परिकल्पना: किसी यादृच्छिक चर के बंटन से सम्बद्ध सांख्यिकीय परिकल्पनाएँ किसी प्राचल के संख्यात्मक मान के बारे में होती है ।

टी (t) परीक्षण: प्रसामान्य समष्टि से प्राप्त प्रतिदर्श (X_1 x_2.... x_n) के आधार पर इस परिकल्पना का सार्थकता परीक्षण की समष्टि माध्य μ है ।

स्वातंत्र्य कोटियों: समंक श्रेणी के ऐसे वर्ग जिनकी आकृतियाँ स्वतंत्र रूप से ज्ञात की जा सकती हैं।

क्रांतिक मान: वे स्थिरांक जिनसे प्रमाप त्रुटि को गुणा करके निश्चित विश्वास्यता सीमाऐं ज्ञात की जाती हैं । जैसे 1.96,2.5758,3 आदि क्रांतिक मान हैं ।

अन्तर परीक्षण: जब युग्मित समंक दिए हों तथा एक समान इकाइयों पर किसी घटना का प्रभाव देखना हो तो अन्तर परीक्षण का प्रयोग किया जाता है ।

Z परीक्षण: इसमें सहसम्बन्ध r को Z प्रतिदर्शज में रूपान्तरित कर लिया जाता है ।

16.11 स्वपरख प्रश्न / अभ्यास (Self-Assessment questions / Exercise)

1. t परीक्षण किन स्थितियों में प्रमुक्त किया जाना चाहिए?
2. दो प्रतिदर्श माध्यों के बीच के अंतर की सार्थकता की जाँच के लिए टी-परीक्षण की व्यवस्था कीजिए । निहित मान्यताओं को स्पष्ट कीजिए ।
3. स्टूडेण्ट का t बंटन निम्नांकित स्थितियों में किस प्रकार प्रयुक्त किया जा सकता है:
   (अ) **द्विचर -** प्रसामान्य समष्टि से निकाले एक प्रतिदर्श में प्रतिदर्श - सहसम्बन्ध गुणांक की सार्थकता का परीक्षण करने हेतु;
   (ब) **एक कृषि** - प्रयोग में किन्हीं दो किस्मों की माध्य उपजों के अंतर की साक्षरता की जांच हेतु ।
4. सहसम्बन्ध गुणांक के फिशर रूपान्तरण की व्याख्या कीजिए और सार्थकता परीक्षणों में इसकी उपयोगिता समझाइए ।
5. यह मानते हुए कि प्रतिदर्श छोटा (≤ 30) है । निम्नांकित परिस्थितियों में कौन सा परीक्षण किया जायेगा । परीक्षण प्रक्रिया एवं सूत्र लिखिए:-
   (अ) दो प्रतिदर्शों के सहसम्बन्ध गुणांकों में अंतर सार्थक है या नहीं ।
   (ब) किसी कारखाने के एक विभाग में कार्यरत श्रमिकों की उत्पादन क्षमता में चार माह गहन प्रशिक्षण देने के बाद सार्थक वृद्धि है या नहीं ।

16.12 आंकिक प्रश्न (Numerical Questions)

1. 16 आकार के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श में माध्य 53 हैं और माध्य से निकाले गए विचलन वर्गो का जोड़ 150 है । क्या यह प्रतिदर्श एक ऐसे समग्र से चुना गया माना जा सकता है

जिसका माध्य 56 हो? समष्टि माध्य की 95% तथा 99% विश्वास्यता सीमाएँ भी ज्ञात कीजिए।

(संकेत: df=15, t.01=2.947 and t.05 = 2.131 उत्तर: 3.795 Ho अस्वीकृत can not be regarded 95% limits 51 .32 and 54.68 , 99% limits 50.67 and 55.33)

2. दो नगरों में एक वस्तु की कीमत की तुलना हेतु प्रत्येक नगर में 10 दुकानें यदृच्छया छाँटी गयी । उन दुकानों पर निम्नांकित कीमतें पाई गयी । परीक्षण द्वारा बताइये कि दोनों नगरों में माध्य कीमत समान हो सकती है:

नगर (क) 61 63 56 63 56 62 59 50 44 61

नगर (ख) 55 54 47 59 51 61 57 54 64 58

उत्तर. $t = \frac{57.5-56}{5.62}\sqrt{5} = 0.597 < 2.101$ यहाँ दोनों नगरों में समान

3. 12 छात्रों को गहन अध्यापन कराया गया और एक माह में उनकी पाँच बार परीक्षा ली गयी। पहली और पाँचवी परीक्षा के परिणाम यही दिये जा रहे हैं । यह बताइये कि क्या छात्रो की पहली परीक्षा के परिणामों की तुलना में पाँचवी परीक्षा के परिणामों में सुधार पाया जाता है?

($t_{.05}$ for d . f. 11 is 2.201)

Marks in test	50	42	15	26	35	42	60	41	70	55	62	38
Marks in V test	62	40	61	35	30	52	68	51	84	63	72	50

(उत्तर: t = 4.885 > t.05 हाँ यहाँ सार्थक सुधार हुआ है ।

4. एक विशेष विक्रय-संवर्द्धन अभियान रो पहले और बाद में छ: दुकानों में एक वस्तु के विक्रय-समंक निम्नांकित हैं । क्या अभियान सफल कहा जा सकता है? 50% सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए ।

दुकान	A	B	C	D	E	F
अभियान से पूर्व	53	28	31	48	50	42
अभियान के पश्चात्	58	29	30	55	56	45

(उत्तर: $t = \frac{3.5}{3.082} \times \sqrt{6} = 2.782 > 2.571 Ho$ अस्वीकृत ही, सफल)

5. किसी प्रसामान्य समग्र में से लिए गए 13 युग्मों में यादृच्छिक प्रतिदर्श में सहसम्बन्ध गुणांक + .6 था । क्या यह मान समग्र में सहसम्बन्ध के अस्तित्व का सार्थक द्योतक है? t परीक्षण का प्रयोग कीजिए ।

(उत्तर: t = 2.487 > .05 = 2.201 सार्थक अन्तर)

6. एक प्रसामान्य समग्र के लिए गए 30 पद युग्मों के प्रतिदर्श में सहसम्बंध गुणांक +.75 है । क्या यह इस परिकल्पना के अनुरूप है कि समष्टि में r = 0.55 है? Z परीक्षण द्वारा जाँच कीजिए ।

(उत्तर: $Z_1 = 0.973, Z_2 = 0.618 S.E = 0.192, \frac{0.355}{0.192} = 1.849 < 1.96$ हाँ)

7. 20 लड़कों के एक समूह की आयु और ऊँचाई में सहसम्बंध गुणांक 0.42 है और 25 लड़कियों के समूहों में यह 0.75 है । दोनों सहसम्बन्ध गुणांकों में अंतर की सार्थकता का परीक्षण कीजिए Z रूपान्तरण द्वारा ।

(उत्तर $Z_1Z_2/\sigma Z_1Z_2$=1.63 अर्थहीन (Not Significant)

16.13 उपयोगी पुस्तकें (Further Readings)

1. Arora, P.N and Arora S. Statistics, S. Chand & Sons, New Delhi.

2. Gupta, S.P Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, New Delhi.

3. Sancheti, D.C and Kapoor, V.K.,Statistics (theory, Methods and Application),Sultan Chand & Sons, New Delhi

4. नागर, कैलाशनाथ, सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मीनाक्षी प्रकाशन मेरठ

5. शर्मा, जैन, पारीक, सांख्यिकी, रमेश बुक डिपो, जयपुर

इकाई -17 : परिकल्पना परीक्षण-II (काई - वर्ग परीक्षण ,F-बंटन) (Test of Hypothesis -II,(χ^2 Test , F-Distribution)

इकाई की रूपरेखा

17.0 उद्देश्य
17.1 χ^2 परीक्षण का परिचय एवं अर्थ
17.2 χ^2 परीक्षण की सामान्य विशेषताएँ
17.3 χ^2 परीक्षण हेतु आवश्यक शर्ते
17.4 χ^2 परीक्षण के विशेष गुण
17.5 χ^2 परीक्षण के उपयोग
17.6 F परीक्षण : प्रसरण - अनुपात परीक्षण
17.7 F बंटन की विशेषताएँ
17.8 F परीक्षण की प्रक्रियाँ
17.9 परीक्षण की मान्यताएँ
17.10 सारांश
17.11 शब्दावली
17.12 स्वपरख प्रश्न / अभ्यास
17.13 आंकिक प्रश्न
17.14 उपयोगी पुस्तकें

17.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- χ^2 परीक्षण का अर्थ एवं सामान्य विशेषताएँ समझ सकें ।
- χ^2 परीक्षण हेतु आवश्यक शर्तों की जानकारी प्राप्त कर सकें ।
- χ^2 परीक्षण के विशेष गुण तथा उपयोग जान सकें ।
- F परीक्षण बंटन का अर्थ एवं विशेषताएँ जान सकें ।
- F परीक्षण की प्रक्रिया एवं मान्यताएँ समझ सकें ।

17.1 χ^2 परीक्षण का परिचय एवं अर्थ (Introduction and Meaning of χ^2 test)

काई वर्ग परीक्षण एक अत्यन्त महत्वपूर्ण एवं लोकप्रिय अप्राचलिक सांख्यिकींय विधि है। χ^2 परीक्षण की खोज सर्वप्रथम 1863 ई. में आबे (Abbe) और 1875 ई. में हेलमर्ट (Helmert) ने की,परन्तु इसके बाद सन् 1900 में कार्ल पियर्सन (Karl

Pearson) ने इसकी पुन: खोजकर व्यापक उपयोग किया । χ^2 (Chi- काई) ग्रीक भाषा का अक्षर है । वर्तमान में सामाजिक एवं वैज्ञानिक अनुसंधानों में भी इसका प्रयोग होता है।

काई वर्ग परीक्षण में अवलोकित आवृत्तियों और प्रत्याशित आवृत्तियों के मध्य अन्तर की सार्थकता का परीक्षण किया है । अवलोकित आवृत्तियों (f_o) और प्रत्याशित आवृतियों (f_e) के अन्तरों के वर्गो के प्रत्याशित आवृत्तियों पर अनुपातों का योग ही χ^2 कहलाता है । अवलोकित और प्रत्याशित आवृत्तियों के मध्य अन्तर शून्य होने पर χ^2 का मान शून्य होता है तथा अधिक अंतर होने पर काई वर्ग का मान बढ़ता जाता है, χ^2 का मान 0 से अनन्त (0 to infinite) तक हो सकता है तथा इसका मान सदैव धनात्मक होता है ।

काई वर्ग बंटन एक प्रायिकता बंटन है, जो केवल स्वातंत्र्य कोटियों (d.f.) पर निर्भर करता है तथा काई वर्ग परीक्षण से हमें यह ज्ञात होता है कि अवलोकित और प्रत्याशित आवृत्तियों के मध्य अन्तर केवल संयोगवश है या हमारी शून्य परिकल्पना (H_o) के गलत होने के कारण है ।

17.2 χ^2 परीक्षण की सामान्य विशेषताएँ (General Characteristics of χ^2 test)

(1) अप्राचलिक परीक्षण : (Non - parametric test)

χ^2 परीक्षण किसी बंटन के प्राचलों पर निर्भर नहीं होता है । इसमें समष्टि के प्राचल के मान के सम्बन्ध में कोई परिकल्पना नहीं की जाती है ।

(2) सतत् बंटन. (Continuous distribution)

बडे प्रतिदर्शों के लिए χ^2 बंटन एक सतत् वक्र का आकार ग्रहण करता है ।

(3) स्वातंत्र्य कोटियों पर आधारित : (Based on degree of freedom)

प्रत्येक स्वातंत्र्य कोटि के लिए अलग χ^2 बंटन होता है अर्थात χ^2 बंटन स्वातंत्र्य कोटियों की संख्या' पर आधारित होता है । संख्या कम होने पर यह बंटन दाहिनी ओर को असममित होता है परन्तु स्वातंत्र्य कोटियों की संख्या बढ़ने पर इसके बंटन का आकार सममित होता जाता है ।

(4) बंटन निरपेक्ष विधि: (Distribution free method)

χ^2 परीक्षण किसी सैद्धान्तिक बंटन के गणितीय स्वरूप की किसी विशिष्ट परिकल्पना पर आधारित नहीं है । इसलिए इसे बंटन-निरपेक्ष विधि कहते हैं ।

(5) परिकल्पना जाँच के लिए उपयोगी : (Useful in hypothesis testing)

इस विधि का उपयोग अनुमान लगाने के लिए तो नहीं होता है लेकिन शून्य परिकल्पना की जाँच के लिए यह एक महत्वपूर्ण विधि हैं ।

17.3 χ^2 परीक्षण हेतु आवश्यक शर्तें (Necessary Conditions for χ^2)

(i) प्रतिदर्श यादृच्छिक रूप से चुना हुआ होना चाहिए ।

(ii) समग्र की इकाईयों की संख्या (N) उचित रूप में अधिक होनी चाहिए व्यवहार में N-50 से अधिक होना चाहिए । अगर संख्या कम होती है तो अवलोकित व प्रत्याशित आवृत्तियों के अन्तर (f_o-f_o) का बंटन प्रसामान्य नहीं होगा ।

(iii) कोई भी प्रत्याशित कोष्ठ - आवृत्ति 5 से कम नहीं होनी चाहिए । यदि कोई आवृत्ति 5 से कम है तो येट संशोधन करना चाहिए ।

(iv) कोष्ठ आवृत्तियों के अवरोध रेखीय होने चाहिए ।

उपरोक्त शर्तो के उपरान्त भी χ^2 परीक्षण गुणस्वातंत्र्य जाँच तथा अन्वायोजन-उत्कृष्टता की जाँच हेतु उपयोगी सांख्यिकी माप है ।

17.4 χ^2 परीक्षण के विशेष गुण (Special Properties of χ^2 test)

(i) χ^2 का संचायात्मक या संयोगात्मक गुण (Additive property of χ^2 test)

χ^2 का एक बहुत उपयोगी गुण यह है कि यदि किसी समष्टि से अनेक यादृच्छिक प्रतिदर्श लेकर उनका अध्ययन किया जाए तो विभिन्न प्रतिदर्शों के अलग-अलग काई-वर्गो के मान जोड़कर पूरे समष्टि के बारे में अधिक विश्वसनीय निष्कर्ष निकाल सकते हैं उदाहरणार्थ - यदि राज्य के 8 जिलों (प्रतिदर्शों) का अध्ययन करके χ^2 के अलग-अलग मान तथा उनकी स्वातंत्र्य संख्याऐं ज्ञात कर ली जायें तो χ^2 के आठों मूल्यों को जोड़कर एक सामूहित मूल्य तथा इसी प्रकार आठों स्वातंत्र्य संख्याओं को जोड़ कर एक कुल स्वातन्त्र्यांश मान ज्ञात कर सकते हैं तथा इस सामूहिक χ^2 के आधार पर कुल स्वातंत्र्य मान ज्ञात कर सकते हैं तथा इस सामूहिक χ^2 के आधार पर कुल स्वातन्त्र्यांश की सहायता से आठों प्रतिदर्शों के योग के बारे में निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं जो कि समष्टि परिणामों के ज्यादा निकट होंगे ।

लेकिन प्रतिदर्शों के काई-वर्गो का योग करते समय यह ध्यान रखा जाये कि प्रतिदर्श स्वतंत्र हों तथा येट्स संशोधन न किया जाये ।

(ii) χ^2 बंटन का स्वरूप तथा स्वातन्त्र्यांश (From of χ^2 distribution and degree of freedom)

χ^2 बंटन का स्वातंत्र्य संख्याओं पर निर्भर होता है । प्रत्येक स्वातंत्र्य संख्या का एक अलग χ^2 वर्ग बनता है ।स्वातंत्र्य संख्या बहुत कम होने पर इसका स्वरूप धनात्मक विषमता यानि दाहिनी ओर को असममित होता है । जैसे-जैसे स्वातंत्र्य संख्या बढ़ती जाती है, वह सममिति की ओर अग्रसर होता है अर्थात् असममिति कम होती जाती है

। स्वातंत्र्य संख्या 30 से अधिक होने पर यह प्रसामान्य बंटन (Normal distribution) के अनुरूप हो जाता है । यह एक अत्यन्त उपयोगी गुण है क्योंकि 30 से अधिक d.f वाले χ^2 का निर्वचन करने के लिए प्रसामान्य बंटन की क्षेत्रफल सारणी का प्रयोग कर सकते हैं ।

17.5 χ^2 परीक्षण के उपयोग (Use of χ^2 test)

χ^2 परीक्षण का आधुनिक सांख्यिकी में बहुत व्यापक उपयोग है यह शोध कार्य हेतु महत्वपूर्ण उपकरण है जिसके निम्नलिखित परीक्षणों में उपयोग है '

1. स्वातंत्र्य की जाँच (Test of Independence)

χ^2 द्वारा दो गुणों में साहचर्य का परीक्षण किया जाता है । उदाहरणार्थ; पिता और उनके पुत्रों के आँखों के रंग में साहचर्य है या नहीं धूम्रपान और फेफड़ों के कैन्सर में गुण सम्बन्ध है या नहीं टीका लगवाना चेचक से प्रतिरक्षक करने में प्रभावोत्पादक है या नहीं। स्वतंत्रता जाँच के लिए पहले दोनों गुणों का स्वतंत्र मान लेते हैं, फिर इस आधार पर प्रत्याशित आवृतियाँ ज्ञात की जाती हैं फिर अवलोकित आवृत्तियों से अन्तर ज्ञात करके χ^2 का मापन करते हैं । अन्त में एक निश्चित सार्थकता स्तर पर (सामान्यतया 5%) स्वातंत्र्य संख्या (d.f) के अनुसार χ^2 का सारणी मूल्य पढ़ते हैं, यदि χ^2 का परिगणित मूल्य > सारणी मूल्य है तो शून्य परिकल्पना असत्य हो जाती है अर्थात् दोनों गुण स्वतंत्र नहीं है अपितु उनमें साहचर्य है । इसकी विपरीत परिस्थिति में शून्य परिकल्पना सत्य मानी जाती है ।

2. अन्वायोजन-उत्कृष्टता की जाँच (Test of Goodness of Fit)

χ^2 का प्रयोग सैद्धान्तिक आवृत्ति बंटन (यथा द्विपद, प्वॉयसन या प्रसामान्य) और अवलोकित आवृत्ति बंटन के अन्तर जाँच के लिए भी किया जाता है । इस जाँच से यह ज्ञात होता है कि दोनों बटनों में अन्तर सार्थक है या अर्थहीन । यदि परिकलित χ^2 सारणी मूल्य से अधिक है तो अन्यायोजन उत्तम नहीं है । इसके विपरीत स्थिति जब परिकलित χ^2 सारणी मूल्य से कम है तो प्रत्याशित य अवलोकित आवृत्तियो का अन्तर अर्थहीन होता है ।

3. समग्र के प्रसरण की जाँच (Test of Population Variance)

χ^2 परीक्षण से समग्र के प्रसरण तथा प्रतिदर्श के प्रसरण में अंतर की सार्थकता जाँच की जाती है तथा इसके द्वारा समग्र के प्रसरण की विश्वास्यता सीमाएँ निर्धारित की जाती हैं ।

4. सजातीयता की जाँच (Test of Homogeneity)

χ^2 के प्रयोग द्वारा इस तथ्य की भी जाँच की जाती है कि विभिन्न प्रतिदर्श एक ही समग्र से लिए गये हैं या नहीं ।

अब हम इन सभी उपयोगों को विस्तृत रूप से समझेंगे -

χ^2 द्वारा दो गुणों में स्वातंत्र्य की जाँच की निम्नलिखित विधि है -

(i) शून्य परिकल्पना (Null hypothesis)

सर्वप्रथम, हम यह परिकल्पना करेंगे कि दोनों गुण पूर्णत: स्वतंत्र हैं अर्थात् उनकी वास्तविक एवं प्रत्याशित आवृत्तियों में अंतर शून्य है ।

संकेताक्षर : $H_0 = f_o = f_e$

(ii) की परिगणना (Calculation of χ^2)

फिर ज्ञात आवृत्तियों (f_o) की सहायता से प्रत्याशित आवृत्तियों (f_e) निकालकर निम्नलिखित सूत्र की सहायता से χ^2 का मूल्य ज्ञात करते हैं -

$$\chi^2 = \Sigma\left\{\frac{(f_o - f)^2}{f_e}\right\}$$

(iii) स्वातंत्र्य (degree of freedom)

यदि न्यूनतम आवृतियाँ ज्ञात हों तो शेष आवृत्तियाँ इनके आधार पर ज्ञात करते हैं । स्वतंत्र आवृत्तियों की संख्या के ही स्वातंत्र्य संख्या कहते हैं ।

d.f. (c-1) (r-1)

c = स्तम्भों की संख्या

r = पंक्तियों की संख्या

(iv) काई-वर्ग तालिका (Chi - square Table)

अब χ^2 तालिका में से एक निश्चित सार्थकता स्तर पर तथा स्वातन्त्र्यांश से काई वर्ग (मूल्य χ^2 value) देख लिया जाता है ।

नोट: काई वर्ग तालिका में विभिन्न सार्थकता स्तरों पर विभिन्न स्वातन्त्र्यांश के लिए मूल्य दे रखे होते हैं, लेकिन व्यवहार में अधिकांश रूप से 5% सार्थकता स्तर पर सम्बद्ध मूल्य ही देखे जाते हैं ।

(v) परीक्षण (Test)

निष्कर्ष की दृष्टि से

अगर χ^2 का परिगणित मूल्य $> \chi^2$ का सारणी मूल्य है तो शून्य परिकल्पना गलत हो जाती है अर्थात् दोनों गुण स्वतन्त्र न होकर परस्पर आश्रित या सम्बन्धित होते हैं । लेकिन χ^2 का परिगणित मूल्य $< \chi^2$ का सारणी मूल्य है तो शून्य परिकल्पना सही होती है अर्थात् दोनों गुण स्वतंत्र हैं अर्थात् उनमें साहचर्य नहीं है ।

उदाहरण : 1

नीचे दी गई सूचना 250 रोगग्रस्त मरीजों के उपचार के बारे में है, बताइये कि क्या नया उपचार, परम्परागत उपचार की तुलना में अपेक्षाकृत श्रेष्ठ है?

उपचार	मरीजों की संख्या		
	पक्ष में प्रभाव	कोई प्रभाव नहीं	कुल
नया	140	30	170
परम्परागत	60	20	80

कुल	200	50	250

आपके अनुमान के लिए 5% सार्थकता स्तर पर 1 स्वातंत्र्य संख्या के लिए χ^2 का सारणी मूल्य 3.84 है, उपयोग कीजिए ।

हल: परिकल्पना. $:H_1 := f_o = f_e$ (अर्थात् नया उपचार परम्परागत उपचार से श्रेष्ठ नहीं है ।)

$$H_1 := f_o \neq f_e$$

$$a = 0.05 \chi^2 = 3.84; d.f. = 1$$

χ^2 का परिकलन

f_o	f_e	$f_o - f_e$	$(f_o - f)^2$	$\frac{(f_o - f)^2}{f_e}$
140	$\frac{200 \times 170}{250} = 136$	4	16	0.118
60	$\frac{200 \times 80}{250} = 64$	-4	16	0.250
30	$\frac{50 \times 170}{250} = 34$	-4	16	0.471
20	$\frac{50 \times 80}{250} = 16$	4	16	1.000
				χ^2 =1.839

$d.f. = (c-1)(r-1)$ या $(2-1)(2-1) = 1$

5% सार्थकता स्तर 1 स्वातन्त्र्यांश के χ^2 का सारणी मूल्य 3।84 है ।

χ^2 का परिगणित मूल्य 1.839 $< \chi^2$ का सारणी मूल्य 3.84 है अत: शून्य परिकल्पना सही है अर्थात् नया उपचार व परम्परागत उपचार में कोई अंतर नहीं है ।

येट का संशोधन (Yate's Correction)

χ^2 प्रयोग की यह एक आवश्यक शर्त है कि कोई भी 'कोष्ठ आवृत्ति 5 से कम नहीं होनी चाहिए अन्यथा χ^2 का मान भ्रमात्मक निकलेगा; ऐसी परिस्थिति में येट संशोधन किया जाता है । इस संशोधन में, 2×2 सारणी में दी हुई सबसे छोटी आवृत्ति में 1/2 या 0.5 जोड़ दिया जाता है तथा बाकी की तीनों आवृत्तियों को इस ढंग से समायोजित किया जाता है कि सीमान्त योग पूर्ववत रहे।

आवृत्तियों का समूहन (Pooling of frequencies)

अगर प्रत्याशित आवृत्तियाँ कम हो (विशेषकर 5 से कम) तब f_o व f_e का अन्तर ज्ञात करने से पहले, ऐसी दो या दो से अधिक आवृत्तियों को जोड़ दिया जाता है । ऐसी स्थिति में, स्वातंत्र्य संख्या का निर्धारण (d.f) इस समूहन क्रिया के बाद प्राप्त वर्गो की संख्या के आधार पर ही किया जाता है । जैसे यदि 10 वर्गो में से 3 वर्गो की आवृति

5 से कम है तो इन तीनों का एक वर्ग बनाने पर कुल वर्गो की संख्या 8 होगी और स्वातंत्रांश 8-1 = 7 होगी ।

उदाहरण 2

किसी रोग से गायों के प्रतिरक्षण से सम्बद्ध प्रयोग से निम्न परिणाम प्राप्त हुए । टीके की प्रभावोत्पादकता के सम्बन्ध में अपना निष्कर्ष निकालिए

	रोग से मृत	अन्तर जीवित	योग
टीका लगा	2	10	12
टीका नहीं लगा	6	6	12
	8	16	24

येट्स संशोधन के सहित χ^2 का परिकलन कीजिए ।

हल: येट्स संशोधन के सहित

अवलोकित आवृत्तियाँ (f_o) प्रत्याशित आवृत्तियाँ (f_e)

2.5	9.5	12
5.5	6.5	12
8	16	24

4	8	12
4	8	12
8	16	24

f_o	f_e	$f_o - f_e$	$(f_o - f)^2$	$\frac{(f_o - f)^2}{f_e}$
2.5	4	2.25	0.118	$\frac{2.25}{4} = 0.56250$
9.5	8	2.25	0.250	$\frac{2.25}{8} = 0.28125$
5.5	4	2.25	0.471	$\frac{2.25}{4} = 0.56250$
6.5	8	2.25	1.000	$\frac{2.25}{8} = 0.28125$
				χ^2 =1.68750

निष्कर्ष: येट्स संशोधन के बाद χ^2 का परिगणित मूल्य 1.6875 सारणी मूल्य से कम है अत: दोनों गुणों में सहचर्य नहीं अर्थात् टीका प्रभावी नहीं है ।

6. अन्वायोजन - उत्कृष्टता की जाँच (Test of goodness of Fit)

χ^2 जाँच की सहायता से अन्वायायेजन की उत्तमता की जाँच की जाती है । अन्वायोजन उत्कृष्टता की जाँच सैद्धान्तिक और प्रतिदर्श बंटन की अनुरूपता या संगति का परीक्षण है । यदि χ^2 का परिकलित मूल्य χ^2 का सारणी मूल्य है तो अन्वायोजन उत्तम (fit is good) माना जाता है अर्थात् अवलोकित और

प्रत्याशित आवृतियो के वक्र लगभग एक दूसरे के अनुरूप है, उनमें अन्तर अर्थहीन है ।

लेकिन χ^2 का परिकलित मूल्य, $> \chi^2$ का सारणी मूल्य, तो वक्र अन्वायोजन उत्तम नहीं है अर्थात् उनमें अन्तर सार्थक है ।

उदाहरण : 3

मटर-प्रजनन (Pea breeding) पर किए गए प्रयोगों से ग्रेगोर मेण्डल ने बीजों की निम्न आवृत्तियाँ प्राप्त की

315 गोले व पीले, 101 झुर्रीदार व पीले

108 गोले व हरे, 32 झुर्रीदार व हरे. योग 556

सिद्धान्त के अनुसार आवृत्तियाँ 9:3:3:1 के अनुपात में होनी चाहिए । सिद्धान्त एवं प्रयोग में सामंजस्य की जाँच कीजिए । (5% सार्थकता स्तर पर स्वातंत्र्य कोटि 4 और 3 के लिए χ^2 का सारणी मूल्य क्रमशः9.488 व 7.875 है ।)

हल: $H_o : f_o : f_e$ अवलोकित तथा प्रत्याशित बंटन समान है;

$H_o : f_o \neq f_e$ अवलोकित तथा प्रत्याशित बंटन समान नहीं है;

अन्तर सार्थक है ।

a = 0.05, d.f.= 4-1 =3, χ^2 7.815

χ^2' का परिकलन

f_o	f_e (9:3:3:1)	$f_o - f_e$	$(f_o - f_e)^2$	$\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$
315	$\frac{556 \times 9}{16} = 313$	+2	4	0.0128
101	$\frac{556 \times 3}{16} = 104$	-3	9	0.0865
108	$\frac{556 \times 3}{16} = 104$	+4	16	0.1538
32	$\frac{556 \times 1}{16} = 35$	-3	9	2.2571
$\Sigma f_{o=} 556$	$\Sigma f_{e=} 556$	0		$\chi^2 = 0.5102$

χ^2 का सारणी मूल्य = 7.815

χ^2 का परिकलित मूल्य = 0.5102 है जो कि सारणी मूल्य से बहुत कम है, अत: अन्वायोजन उत्कृष्ट है (The fit is good) दूसरे शब्दों में, सिद्धान्त व प्रयोग में काफी मात्रा में सम्बन्ध या सामंजस्य है ।

उदाहरण : 4

एक शहर मे एक माह मे 4000 शिशुओ का जन्म हुआ, जिनमें से 2200 लड़के तथा 1800 लड़कियाँ थी । χ^2 का प्रयोग करके यह ज्ञात कीजिए कि नवजात शिशुओ मे लड़के-लड़कियों का अनुपात 1:1 होता है, सही है अथवा नही ।

हल : $H_o : f_o : f_e$: शून्य परिकल्पना यहमानकर चलते हैं कि लड़के एवं लड़कियों का अनुपात बराबर है ।

$H_o = f_o \neq f_e; a = 0.5; d.f. = 1; \chi^2 = 3.841$,

χ^2 का परिकलन

f_o	f_e	$f_o - f_e$	$(f_o - f_e)^2$	$\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$
2200	$4000 \times \frac{1}{2} = 2000$	+200	40,000	20
1800	$4000 \times \frac{1}{2} = 2000$	-200	40,000	20
$\Sigma f_{o=} 4000$	$\Sigma f_{e=} 4000$	0		$\chi^2 = 40$

χ^2 का सारणी मूल्य $1 d.f.(2-1)$ पर तथा 5% सार्थकता स्तर पर 3.841 है । परिकलित मूल्य =40. χ^2 का परिकलित मूल्य 4०> χ^2 का सारणी मूल्य 3.841 χ^2 है अर्थात् अन्तर सार्थक है। शून्य परिकल्पना अस्वीकृत की जाती है ।

7. समग्र के प्रसारण की χ^2 जाँच (χ^2 test for Population Variance)

χ^2 बंटन का के आधार पर समग्र के प्रसरण की विश्वास्यता सीमाएँ ज्ञात की जा सकती हैं तथा समग्र के प्रसरण सम्बन्धी किसी दावे को स्वीकार अथवा अस्वीकार किया जा सकता है ।

यह जाँच निम्नलिखित दो मान्यताओं पर आधारित है:

(i) यादृच्छिक प्रतिदर्श एक ऐसे प्रसामान्य समग्र से लिया गया है जिसका माध्य 'µ' (म्यू) तथा प्रसरण विशिष्ट σ_p^2 है; तथा

(ii) प्रस्तुत प्रतिदर्श का प्रमाण विचलन (S) एक काई वर्ग बंटन के अनुरूप वितरित है जिसका स्वातंत्र्य कोटियाँ (n-1) हैं ।

समग्र प्रसरण की χ^2 जांच की प्रक्रिया है -

(i) **शून्य परिकल्पना (H_0),** सर्वप्रथम यह माना जाता है कि प्रतिदर्श प्रसरण (S^2) तथा समग्र प्रसरण (σP^2) में कोई अर्थपूर्ण अंतर नहीं है अर्थात प्रतिदर्श उसी समग्र से लिया गया है ।

(ii) σP^2 का परिकलन

$$\chi^2 \frac{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)^2}{\sigma_P^2} \text{ या } \frac{ns^2}{\sigma_P^2}$$

जहाँ n = यादृच्छिक प्रतिदर्श का आकार

s^2 = प्रतिदर्श का प्रसरण

σ_P^2 =समष्टि प्रसरण

(iii) स्वातंत्र्य कोटियाँ = प्रतिदर्श आकार के लिए स्वातंत्र्य कोटियाँ (n- 1) होती हैं ।

(iv) फिर 5% सार्थकता स्तर पर (n- 1) स्वातन्त्र्यांश के लिए χ^2 का सारणी मूल्य देखते हैं ।

(v) निर्णय: यदि χ^2 का परिगणित मूल्य $>\chi^2$ का सारणी मूल्य है तो शून्य परिकल्पना अस्वीकार की जाती है । लेकिन यदि χ^2 का परिगणित मूल्य $<\chi^2$ का सारणी मूल्य है तो शून्य परिकल्पना स्वीकार की जाती हैं ।

उदाहरण: 5

एक प्रसामान्य समग्र के लिये गए 20 आकार के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य 42 और प्रतिदर्श प्रसरण 36 है । इस परिकल्पना की जाँच कीजिए कि समग्र प्रसरण 81 है।

दिया गया है: χ^2 का मान (0.05), 19d.f=30.144,20 d.f =31.410,21d.f= 36.671 है

हल (i) प्रदत्त n=20, $\bar{x}$=42 समग्र प्रसरण σ82'प्रतिदर्श प्रसरण s^2=36

(ii) शून्य परिकल्पना H_o; समग्र प्रसरण तथा समष्टि प्रसरण में कोई सार्थक अंतर नहीं है।

(iii) χ^2 का परिकलन $\chi^2 = \dfrac{ns^2}{\sigma^2} = \dfrac{20 \times 36}{81} = 8.889$

(iv) स्वातंत्र्य कोटियाँ d.f = n-1 = 20-1=19

19 d.f के लिए χ^2 का सारणी मूल्य =30.144

(v) निर्णय: χ^2 का परिकलित मूल्य 8।889 < χ^2 का सारणी मूल्य 30.144 है, अत: शून्य परिकल्पना सत्य है तथा प्रतिदर्श प्रसरण एवं समग्र प्रसरण में कोई सार्थक अंतर नहीं है ।

उदाहरण. 6

10 विद्यार्थियों का भार (किग्रा. में) निम्नांकित है - क्या हम यह निश्चित रूप से कह सकते हैं कि जिन विद्यार्थियों के समग्र से उक्त 10 विद्यार्थियों का प्रतिदर्श लिया गया है, उनके भार का प्रमाप विचलन 5 किग्रा. है ।

काई वर्ग के आधार पर 5% सार्थकता स्तर पर परिकलन कीजिए?

हल: 10 विद्यार्थियों के भार क्रमश: 45,35,30,41,32,60,48,31, 42 तथा 36 किग्रा. है।

प्रतिदर्श प्रसरण का परिकलन

क्र.सं.	भार(किग्रा.)	विचलन	विचलन वर्ग

		$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$
1.	45	+5	25
2.	35	-5	25
3.	30	-10	100
4.	41	+1	1
5.	32	-8	64
6.	60	+20	400
7.	48	+8	64
8.	31	-9	81
9.	42	+2	4
10.	36	-4	16
	400	Σd=0	780

प्रतिदर्श माध्य $(\bar{x}) = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{400}{10} = 40$

प्रतिदर्श माध्य $(s^2) = \frac{\Sigma d^2}{n} = \frac{780}{10} = 78$

समग्र प्रसरण $\sigma p^2 = s^2 = 25$

χ^2 का परिकलन

$$\chi^2 = \frac{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)^2}{n}$$

$$= \frac{780}{10} = 3.12$$

वैकल्पिक रूप से

$$\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2}$$

$$= \frac{10 \times 78}{25} = 31.2$$

स्वातन्त्र्यांश d.f=(n-1) =10 -1 =9

निर्वचन: 5% सार्थकता स्तर पर 9 स्वातन्त्र्यांश के लिए $\chi^2_{0.05}$ का सारणी मूल्य = 16.92 है ।

χ^2 का परिकलित मूल्य 31.2> χ^2 का सारणी मूल्य 16.92 है, अत: शून्य परिकल्पना अस्वीकार की जाती है, अंतर सार्थक है ।

17.6 एक-परीक्षण : प्रसरण - अनुपात परीक्षण (F- test Variance Ratio Test)

जब हम यह परीक्षण करना चाहते हैं कि समष्टि के प्रसरण के दो स्वतंत्र आकल S_1^2 तथा S_2^2 सार्थक रूप से भिन्न हैं अथवा दोनों प्रतिदर्श समान समग्र प्रसरण $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ वाले प्रसामान्य समग्र से लिये गए हैं अथवा नहीं तब दो प्रसारणों में अंतर की सार्थकता - परीक्षण के लिए प्रसरण अनुपात परीक्षण का प्रयोग किया जाता है । इस

विधि को प्रतिपादित करने का श्रेय प्रो. रॉनेल्ड ए. फिशर (Prof. R.A. Fisher) और जॉर्ज सनेडैकोर (George W. Snedecor) को प्राप्त है । प्रसरण अनुपात जाँच का नाम फिशर के नाम के प्रथम अक्षर 'एफ' के आधार पर, एफ-परीक्षण (F-test) रखा गया है ।

F- बंटन समान प्रसरण वाली समष्टियों हेतु दो प्रतिदर्श प्रसरणों के अनुपात का बंटन है ।प्रसरण विश्लेषण एवं प्रयोग अभिकल्पना विश्लेषण हेतु यह एक उपयोगी व महत्त्वपूर्ण बंटन है ।

17.7 बंटन की विशेषताएँ (Characteristics of F-Distribution)

इस बंटन की महत्वपूर्ण विशेषताएँ इस प्रकार हैं :-

(i) बंटन t बंटन व χ^2 बंटन से भिन्न होता है क्योंकि t व χ^2 बंटन में एक ही स्वातंत्र्य कोटि होती है जबकि F बंटन मे सभी संख्या दो (V_1 वV_2) होती है । एक प्रसरण अनुपात के अंश वाले प्रसरण व दूसरी अनुपात के हर वाले प्रसरण से सम्बन्धित होती है ।

(ii) F बंटन का वक्र दाहिनी ओर को धनात्मक रूप से असममित होता है तथा स्वातंत्र्य कोटियों की संख्या बढ़ने पर इस वक्र की असममिति कम होती जाती है । स्वातंत्र्य कोटियो की संख्या अधिक जैसे (50, 50) होने पर यह प्रसामान्य वक्र का रूप ले लेता है । '

(iii) अलग-अलग स्वातंत्र्य कोटियों के लिए अलग-अलग F- बंटन होते हैं । इस प्रकार F- बटनों का एक समुच्चय होता है ।

(iv) F का मूल्य सदैव धनात्मक होता है क्योंकि S^2 हमेशा शून्य से अधिक होता है ।

(v) F बंटन की सारणी, t सारणी χ^2 सारणी से बिल्कुल भिन्न व जटिल होती है । इस सारणी में स्वातंत्र्य कोटियों के युग्मों के अनुसार क्रांतिक मूल्य दिये होते हैं ।

(vi) जब अंश और हर की स्वातंत्र्य कोटियों को परस्पर अन्तरपरिवर्तित कर दिया जाता है तो बंटन में बाँई ओर का क्षेत्रफल उसके दाहिनी ओर के F मूल्य के व्युत्क्रम के बराबर होता है । ।

$$F_{1-a}\left(V_1V_2\right) = \frac{1}{F_{a'}\left(V_1V_2\right)}$$

17.8 F परीक्षण की प्रक्रिया (Procedure of F- test)

(i). सर्वप्रथम दोनों प्रतिदर्शों के प्रसरण नीचे दिये गये सूत्रों से ज्ञात करेंगे -

$$S_1^2 = \frac{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)^2}{n_1-1} \; ; \; S_2^2 = \frac{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)^2}{n_2-1}$$

(ii) फिर प्रसरण अनुपात निकालेंगे -.

$$= \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad \text{जबकि } S_1^2 > S_2^2$$

प्रसरण अनुपात(F) $= \frac{\text{वृहतर प्रसरण आकलन}}{\text{लघुउतर प्रसरण आकलन}}$

(iii) दोनों प्रतिदर्शों की स्वातंत्र्य कोटियों की संख्या ज्ञात करेंगे ।

V_1 = अधिक प्रसरण वाले प्रतिदर्श में स्वातंत्र्य कोटि

V_2=लघुतर प्रसरण वाले प्रतिदर्श में स्वातंत्र्य कोटि

(iv) अब F सारणी से 5% सार्थकता स्तर पर V_1 और V_2 के लिए मूल्य देखेंगे । सारणी में बड़े प्रसरण वाले प्रतिदर्श का स्वातन्त्र्यांश बांये से दांये (horizontally) और छोटे प्रसरण से सम्बन्धित स्वातन्त्र्यांश पहले खाने में देखकर दोनों के संयोग वाली संख्या ही $F_{.05}$ का सारणी मूल्य होगा ।

(1% सार्थकता स्तर हेतु भी F- सारणी उपलब्ध है, परन्तु सामान्यतया 5% सार्थकता स्तर का ही प्रयोग किया जाता है ।)

(v) **निष्कर्ष:** अन्त में इस प्रकार निर्णय लेंगे -

यदि F का परिकलित मूल्य तत्सम्बन्धी सारणी मूल्य से अधिक है तो अन्तर निश्चित सार्थकता स्तर पर सार्थक माना जाता है अर्थात दोनों प्रतिदर्श-प्रसरण, समष्टि प्रसरण के सर्वोत्तम आकलन नहीं हैं । अर्थात् दोनों प्रतिदर्श एक हो मूल समग्र से नहीं लिए गये हैं।

लेकिन यदि F का परिकलित मूल्य तत्सम्बन्धी सारणी मूल्य से कम है तो प्रसरण अनुपात अर्थहीन है तथा हम कह सकते हैं कि दोनों प्रतिदर्श एक समान प्रसरण वाले मूल समग्र से ही लिए गये हैं ।

17.9 F परीक्षण की मान्यताएँ (Assumptions of F- test)

(i) समग्र का बंटन प्रसामान्य है ।

(ii) प्रतिदर्श इकाइयाँ स्वतंत्र होनी चाहिए अर्थात् इकाइयों का चयन सरल यादृच्छिक रूप से किया होना चाहिए ।

(iii) प्रसरण अनुपात 1 से अधिक होना चाहिए ।

(iv) प्रसरण के विभिन्न स्त्रोतों का सम्पूर्ण प्रसरण के प्रति योगदान योगात्मक होना चाहिए ।

उदाहरण : 7

10 गायों के एक दैव प्रतिदर्श को खाद्य A दिया गया तथा उनके वजन में वृद्धि निम्न प्रकार हुई

10,6,16,17,13,12,8,14,15,9 किग्रा

12 गायों के एक दूसरे प्रतिदर्श के जो खाद्य B पर रखे गये, उतने ही समय पश्चात् भार में वृद्धि निम्न प्रकार हुई -

7,13,22,15,12,14,18,8 21,23,10,17 किग्रा.

सिद्ध कीजिए कि इन दोनों प्रतिदर्शो पर आधारित समग्र के प्रसरण के आकलों में अंतर सार्थक नहीं है । (V_1,=11,V_2=9 के लिए F का 5% का मान 3.112 है ।)

हल: परिकल्पना - $H_o : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_o : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

दिया गया है - a =0.05

V_1=11, V_2 = 9 के लिए F का सारणीमान 3.112 है ।

खाद्य A			**खाद्य B**		
x	$x-\bar{x}$	$x-\bar{x}^2$	x	$x-\bar{x}$	$\left(x-\bar{x}\right)^2$
10	-2	4	7	-8	64
6	-6	36	13	-2	4
16	4	16	22	7	49
17	5	25	15	0	0
13	1	1	12	-3	9
12	0	0	14	-1	1
8	-4	16	18	3	9
14	2	4	8	-7	49
15	3	9	21	6	36
9	-3	9	23	8	64
			10	-5	25
			17	2	4
120		**120**	**180**		**314**

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{120}{10} = 12$ $\qquad$ $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{180}{12} = 15$

$S^2 = \frac{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)^2}{n-1} = \frac{120}{10-1} = 13.33$ $\qquad$ $S^2 = \frac{\Sigma\left(x-\bar{x}\right)^2}{n-1} = \frac{314}{12-1} = 28.55$

प्रसरण अनुपात F=$\frac{\text{वृहतर प्रसरण}}{\text{लघुउत्तर प्रसरण}}$

$V_1 = 11, V_2 = 9$ $\qquad$ $= \frac{28.55}{13.33} = 2.142$

निर्णय: F का परिकलित मूल्य 2.142<F का सारणी मूल्य 3.112 है, अत: यह सिद्ध होता है कि दोनों प्रतिदर्शो से निकाले गये समग्र प्रसरण के आकल सार्थक रूप से भिन्न नहीं हैं । H_o स्वीकार की जाती है, दोनों प्रतिदर्श समान प्रसरण वाले समग्रों से चुने गए हैं ।

17.10 सारांश (Summary)

काई वर्ग परीक्षण में अवलोकित आवृत्तियों और प्रत्याशित आवृत्तियों के मध्य अंतर की सार्थकता का परीक्षण किया जाता है । χ^2 का मान शून्य से अनन्त तक हो

सकता है तथा सदैव धनात्मक होता है । इसमें समष्टि के प्राचल के मान के सम्बन्ध में कोई परिकल्पना नहीं की जाती है तथा χ^2 बंटन स्वातंत्र्य कोटियों की संख्या पर आधारित होता है । परीक्षण हेतु प्रतिदर्श यादृच्छिक रूप से चुना हुआ तथा N-50 से अधिक होना चाहिए । कोष्ठ आवृत्ति 5 से कम होने पर येट-संशोधन करना चाहिए । χ^2 का विशिष्ट गुण यह है कि यदि किसी समष्टि से अनेक यादृच्छिक प्रतिदर्श लेकर उनका अध्ययन किया जाये तो विभिन्न प्रतिदर्शों के अलग-अलग काई-वर्गों के मान जोडकर पूरे समष्टि के बारे में अधिक विश्वसनीय निष्कर्ष निकाल सकते हैं । स्वतंत्रता की जांच, अन्वायोजन उत्कृष्टता की जाँच, समग्र के प्रसरण की जाँच तथा सजातीयता की जाँच में χ^2 परीक्षण उपयोगी है ।

दो प्रसरणों में अंतर की सार्थकता परीक्षण हेतु प्रसरण अनुपात परीक्षण (F-test) किया जाता है । F- बंटन समान प्रसरण वाली समष्टियो हेतु दो प्रतिदर्श प्रसरणों के अनुपात का बंटन है ।

F- बंटन में स्वातंत्र्य कोटि की संख्या (V_1 व V_2) होती है । इसमें स्वातंत्र्य कोटियों की संख्या अधिक होने पर यह प्रसामान्य वक्र का रूप ले लेता है । F का मूल्य सदैव धनात्मक होता है । I परीक्षण हुए प्रसरण अनुपात 1 से अधिक होना चाहिए । प्रसरण के विभिन्न स्रोतों का सम्पूर्ण प्रसरण के प्रति योगदान योगात्मक होना चाहिए ।

17.11 शब्दावली (Glossary)

काई परीक्षण अवलोकित आवृत्तियों (f_o) और प्रत्याशित आवृत्तियों (f_e) के अन्तरों के वर्गों के प्रत्याशित आवृत्तियों पर अनुपातों का योग ।

येट का संशोधन कोष्ठ आवृत्ति 5 से कम होने पर 2×2 सारिणी में दी गई सबसे छोटी आवृत्ति में 0.5 जोड़ दिया जाता है तथा बाकी तीनों आवृत्तियों को इस ढंग से समायोजित किया जाता है कि सीमान्त योग पूर्ववत् रहे ।

F -बंटन : दो स्वतंत्र काई-वर्ग विचरों के अनुपात के एग गुणज का बंटन ।

सजातीयता समष्टियों का या उनके किसी प्राचल का अभिन्न होना ।

17.12 स्वपरख प्रश्न/ अभ्यास (Self-Assessment Questions / Exercise)

1. काई-वर्ग परीक्षण से आपका तात्पर्य है? उसके विभिन्न अनुप्रयोग कौन-कौनसे हैं? उदाहरण सहित समझाइये ।
2. काई-वर्ग बंटन के विशेष गुणों की उदाहरण सहित व्याख्या कीजिए । काई-वर्ग जांच के प्रयोग की आवश्यक शर्तों का भी वर्णन कीजिए ।
3. χ^2 परीक्षण के गुण स्वातंत्र्य की आवश्यक शर्त बताइये ।
4. काई वर्ग अन्य काई वर्ग मूल्यों के साथ संचयात्मक गुण रखता है । इस कथन की व्याख्या कीजिए ।

5. टिप्पणियाँ लिखिए

(i) स्वातंत्र्य संख्या (ii) येट का संशोधन (iii) अन्वायोजन-उत्कृष्टता की जाँच

17.13 आंकिक प्रश्न (Numerical Questions)

1. सारणियों के एक समूह में से 300 अंक यादृच्छिक रूप से चुने गए । उनकी आवृत्तियाँ इस प्रकार दी गई हैं । χ^2 के प्रयोग द्वारा इस परिकल्पना की यथार्थता का मूल्यांकन कीजिए कि उन सारणियों में अंक समान रूप से वितरित थे ।

Digit	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
Frequency	28	29	33	31	26	35	32	30	31	25	300

(उत्तर : χ^2 = 2.864 हो समान रूप से वितरित)

2. भारत के एक नगर में खाद्य सम्बन्धी सर्वेक्षण से निम्नांकित परिणाम प्राप्त हुए । इस तथ्य का परीक्षण कीजिए कि क्या चाय पीने की आदत के सम्बन्ध में दोनों समुदायों में कोई सार्थक अंतर है? (प्रदत्त: स्वातंत्र्य कोटि 1 के लिए $\chi^2_{.05}$ 3841)

परिवारों की संख्या	हिन्दू	मुस्लिम
चाय पीने वाले	1236	164
चाय न पीने वाले	564	36

(उत्तर χ^2=15.24, H_o असत्य है; दोनों धर्मावलम्बियों की चाय पीने की आदत में अंतर सार्थक है ।)

3. निम्नांकित समंक दिए गए हैं । क्या ये संख्याऐं इस परिकल्पना का समर्थन करती हैं कि बुद्धिमान पिताओं के बुद्धिमान पुत्र हैं । (5% सार्थकता स्तर पर χ^2 का मूल्य 1d.f हेतु 3.841 है ।)

	बुद्धिमान पुत्र	मन्दबुद्धि पुत्र
बुद्धिमान पिता	24	12
मन्द बुद्धि पिता	32	32

(उत्तर χ^2 = 2.597 नहीं)

4. एक कारखाने का प्रबन्धक दावा करता है कि उसके यहाँ कार्यरत श्रमिकों की मजदूरी में 90 रू. का प्रसरण है । उसके कारखाने में कार्यरत 10 श्रमिकों के दैव प्रतिदर्श में मजदूरी में 120 रू. का प्रसरण पाया गया । क्या प्रबन्धक का दावा सही है जबकि 1% सार्थकता स्तर पर 9 स्वातंत्र्य कोटियों के लिए χ^2 का मान 21.7 है।

(उत्तर: χ^2 का परिकलित मूल्य $= \frac{10 \times 120}{90} = 13.33 < 21.7 H_o$ स्वीकृत अंतर सार्थक नहीं)

5. निम्न सारणी में A और B दो मजदूरों द्वारा प्रतिदिन उत्पादित इकाइयों की संख्या दी गई । F- परीक्षण का प्रयोग करते हुए यह बताइये कि क्या A अधिक स्थिर मजदूर हैं। $F_{.05}\left(V_1 V_2\right) = 3.97$

A	35	25	33	36	33	30	-	-
B	34	33	36	28	27	34	35	29

(उत्तर: F = 1.33 < 3.97 (F.05)नहीं)

17.14 उपयोगी पुस्तकें (Further Readings)

1. Arora P.N and Arora S. Statistics, S. Chand & Sons ,New Delhi
2. Gupta, S.P., Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, New Delhi
3. Sancheti, D.C and Kapoor, V.K., Statistics (Theory, Methods and Application),
4. Sultan Chand & Sons, New Delhi
5. नागर, कैलाशनाथ, सांख्यिकी के मूल तत्व, मीनाक्षी प्रकाशन, मेरठ
6. शर्मा, जैन, पारीका सांख्यिकी, रमेश बुक डिपो, जयपुर ।

इकाई - 18 : प्रसरण विश्लेषण [Analysis of Variance (ANOVA)]

इकाई की रूपरेखा

18.0 उद्देश्य

18.1 परिचय

18.2 प्रसरण विश्लेषण की परिभाषाएँ

18.3 मान्यताएँ

18.4 प्रसरण विश्लेषण के प्रयोग

18.5 प्रसरण विश्लेषण की विधियाँ

18.6 सारांश

18.7 शब्दावली

18.8 स्वपरख प्रश्न / अभ्यास

18.9 आंकिक प्रश्न

18.10 उपयोगी पुस्तकें

18.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- प्रसरण विश्लेषण की परिभाषा एवं मान्यताएँ समझ सके ।
- प्रसरण विश्लेषण के प्रयोग जान सकें ।
- प्रसरण विश्लेषण की विधियों को उदाहरणों के माध्यम से हल करके समझ सकें ।

18.1 परिचय (Introduction)

दो प्रतिदर्श माध्यों में अंतर की सार्थकता की जाँच करने के लिए बड़े प्रतिदर्शों की विधियाँ जैसे - t - test, z - test आदि का प्रयोग करते हैं लेकिन दो से अधिक प्रतिदर्श माध्यों के अंतरों की सार्थकता जांच इन विधियों से नहीं की जा सकती है जैसे - हमें 5 विभिन्न प्रकार की खादों का गेहूँ की उपज पर प्रभाव देखना है, प्रत्येक प्रकार की खाद पॉच-पाँच खेतों में डाली जाती है । इस प्रकार कुल 25 खेतों में पाँच प्रकार की खादों का प्रयोग किया जाता है । अब हम अगर एक ही जाँच द्वारा यह जानना चाहते हैं पाँचों माध्य समान व सजातीय हैं या उनमें अंतर सार्थक है । ऐसी परिस्थिति में t- जांच द्वारा पांचों माध्यों के अन्तर की सार्थकता कुल मिलाकर एक साथ नहीं की जा सकती है । इस स्थिति में प्रसरण विश्लेषण की प्रविधि प्रयोग में ली जाती है ।
प्रसरण विश्लेषण द्वारा दो से अधिक प्रतिदर्श माध्यों के अंतरों की सार्थकता की जाँच की जाती है । प्रसरण विश्लेषण की सहायता से एक ही परीक्षण द्वारा अनेक माध्यों की सजातीयता की जाँच की जाती है । 1923 में सर रॉनैल्ड ए. फिशर ने प्रसरण

विश्लेषण विधि का प्रतिपादन किया तथा बाद स्नेडेकॉर व अन्य विद्वानों ने इस विधि के विकास में अपना योगदान दिया ।

18.2 प्रसरण विश्लेषण की परिभाषाएँ (Definitions of Analysis of Variance)

(1) सर रॉनैल्ड ए. फिशर के अनुसार "कारणों के एक द्वारा अभिनिर्धारित प्रसरण का अन्य वर्गो से उत्पन्न होने वाले प्रसरण से पृथक्करण प्रसरण विश्लेषण कहलाता है ।"

(2) यूल एवं केन्डाल के अनुसार 'प्रसरण विश्लेषण, विभिन्न समंक समूहों में पाये जाने वाले अंतरों की सार्थकता का परीक्षण करने की प्रक्रिया है जिससे समूहों की सजातीयता का अध्ययन किया जाता है ।"

इस प्रकार यह एक ऐसी विधि है जिसके द्वारा कुल प्रसरण को विभिन्न कारणों से होने वाले प्रसरण संघटकों में बांटकर उनकी तुलना द्वारा विभिन्न प्रतिदर्श माध्यों की सजातीयता की जाँच की जाती है । प्रारम्भ में इस विधि का प्रयोग कृषि एवं प्राणी विज्ञान में किया जाता है परन्तु आजकल अनेक क्षेत्रों के अनुसंधानों में इसका प्रयोग होता है ।

18.3 मान्यताएं (Assumptions)

प्रसरण विश्लेषण विधि निम्नलिखित मान्यताओं पर आधारित है -

(1) स्वतंत्रता (Independence)

प्रतिदर्श की इकाईयों का चयन स्वतंत्र एवं यादृच्छिक रूप से होना चाहिए । अगर चयन स्वतंत्र नहीं है तो प्रसरण विश्लेषण परीक्षण की उपयोगिता कम रहती है ।

(2) सजातीयता (Homogeneity)

मूल समष्टि एवं प्रतिदर्श दोनों के माध्य एवं प्रसरण सजातीयता होने चाहिए उनमें अंतर सार्थक नहीं होना चाहिए ।

(3) प्रसामान्यता (Normality)

जिस समष्टि से प्रतिदर्श का चयन किया गया है उसका बंटन प्रसामान्य होना चाहिए । मूल समष्टि में मानक प्रसामान्य वक्र की सभी मौलिक विशेषताएँ विद्यमान होनी चाहिए।

(4) संयोज्यता (Additiveness)

विभिन्न संघटक-प्रसरणों का योग कुल प्रसरण के बराबर होना चाहिए । अगर ये सभी मान्यताएँ पूरी नहीं होती हैं तो प्रसरण विश्लेषण परीक्षण की उपादेयता कुछ कम हो जाती है ।

18.4 प्रसरण विश्लेषण के प्रयोग : (Uses of ANOVA)

प्रसरण विश्लेषण विधि का अनेक क्षेत्रों के अनुसंधानों में प्रयोग होता है, जिनमें से कुछ प्रमुख

निम्नलिखित हैं -

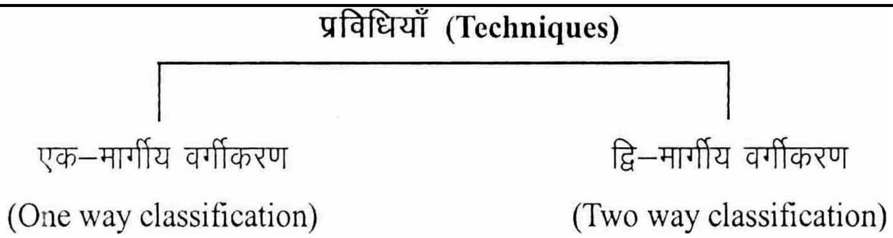
(i) **अनेक माध्यों में अन्तरों की सार्थकता जाँच** :दो प्रतिदर्शों के माध्यों के अंतरों की सार्थकता की जाँच Z- परीक्षण अथवा t परीक्षण द्वारा की जाती है । लेकिन दो से अधिक अंतरों की जाँच हेतु प्रसरण विश्लेषण विधि का प्रयोग किया जाता है । इसके प्रयोग से यह जाँच की जाती है कि सभी प्रतिदर्श एक ही मूल समष्टि से चुने गये हैं और उनके माध्यों में अंतर केवल प्रतिचयन के कारण हैं अथवा अन्य कारणों से हैं ।

(ii) **प्रसरणों के अंतर की सार्थकता जाँच:** इसमें f- गुणांक (f-Coefficient) का प्रयोग करके विन्त्रि प्रतिदर्शों के प्रसरणों के अंतरों की सार्थकता जाँच की की जाती है ।

(iii) **द्वि-मार्गीय वर्गीकरण में उपयोग:** जब दो आधारों पर समंकों का वर्गीकरण करते हैं । तब भी इस विधि के प्रयोग से सजातीयता की जाँच की जाती है । जैसे - एक कृषक द्वारा आलू की 4 विभिन्न किस्में उगायी जाती हैं ओर उनके लिए 4 विभिन्न प्रकार की उर्वरकों का प्रयोग किया जाता है । द्विमार्गीय विश्लेषण द्वारा वह कृषक यह ज्ञात कर सकता है कि उपज के सम्बन्ध में विभिन्न प्रकार के आलू में समानता है या नहीं और विभिन्न उर्वरकों के प्रयोग से उपज में समानता है अथवा अन्तर सार्थक है ।

(iv) **सह-सम्बन्ध एवं प्रतीपगमन की जाँच:** प्रसरण विश्लेषण विधि की सहायता से सहसम्बन्ध अनुपात एवं बहुगुणी सहसम्बन्ध गुणांक की सार्थकता जाँच तथा प्रतीपगमन की रैखिकता की जाँच की जाती है ।

18.5 प्रसरण विश्लेषण की विधियाँ (Techniques of Analysis of Variance)



(i). एक मार्गीय वर्गीकरण: जब एक ही घटक के आधार पर प्रेक्षणों का वर्गीकरण किया जाता है तब उसे एक साधन वर्गीकरण, एक मार्गीय वर्गीकरण कहते हैं । जैसे - अगर गेहूँ की उपज पर चार विभिन्न प्रकार की उर्वरकों का प्रभाव देखना हो तो अन्य कारक जैसे - बीज की किस्म, सिंचाई व्यवस्था, मिट्टी की उर्वरकता आदि को छोड़ देते हैं तो ऐसी स्थिति में एक साधन वर्गीकरण में प्रसरण विश्लेषण का प्रयोग करेंगे ।

प्रसरण विश्लेषण की इस प्रविधि में तीन विधियाँ अपनाते हैं -

(I). प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)

प्रत्यक्ष रीति की प्रक्रिया

1. परिकल्पना

शून्य परिकल्पना : $H_0 : \mu_1 := \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 ...... = \mu_x$

यह परिकल्पना की जाती है कि जो प्रतिदर्श यादृच्छिक रूप से चयन किए गए उनके समान्तर माध्य एक समान हैं तथा उनमें कोई अंतर सार्थक नहीं है ।

वैकल्पिक परिकल्पना: $H_1 = \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4 ...... \neq \mu_k$

2. प्रतिदर्शों के 'बीच' प्रसरण (Variance ' Between 'the Samples)

(a) सबसे पहले प्रत्येक प्रतिदर्श का अलग-अलग समान्तर माध्य निकालेंगे - $\bar{x}_1, \bar{x}_2 .... \bar{x}$

(b) फिर सभी प्रतिदर्श माध्यों का एक वृहत माध्य (Grand mean). ज्ञात करेंगे

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4 ..... \bar{x}_k}{k}$$ (जबकि प्रतिदर्शों के आकार समान हों)

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_1 + \Sigma x_2 + \Sigma x_3 + \Sigma x_4 ..... \Sigma x_k}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 .... nk}$$ (जबकि प्रतिदर्शों के आकार असमान हों)

संकेत, K प्रतिदर्शों की संख्या

$\bar{\bar{x}}$ प्रतिदर्श माध्यों का वृहत माध्य

(c) अब $= SSB^* = n_1 \left(\bar{x}_1 - \bar{\bar{x}}\right)^2 + n_2 \left(\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}\right)^2 + ... n_k \left(\bar{x}_k - \bar{\bar{x}}\right)^2$

SSB* = Sum of squares between samples

3. प्रतिदर्शों के 'अन्तर्गत. प्रसरण (Variance 'within the samples)

(a) सर्वप्रथम प्रत्येक प्रतिदर्श का माध्य ज्ञात किया जाता है - $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 ..... \bar{x}_k$

(b) प्रत्येक प्रतिदर्श की इकाईयों का प्रतिदर्श माध्य से विचलन $\left(x_1 - \bar{x}_1\right)$......... लेते हैं तथा इन विचलनों का वर्ग$\left(x_1 - \bar{x}_1\right)^2$ का जोड़ प्राप्त करेंगे ।

$$SSW = \Sigma\left(x_1 - \bar{x}_1\right)^2 + ... \Sigma\left(x_2 - \bar{x}_2\right)^2 ..... \Sigma\left(x_k - \bar{x}_k\right)^2$$

(c) अब, विचलन वर्गों के जोड़ (SSW) को उसकी स्वातंत्र्य संख्या से भाग देकर प्रतिदर्शों के अन्तर्गत प्रसरण का परिगणन करते हैं ।

स्वातंत्र्य (df) या $V_2 = N - k = \left(n_1 - 1\right) + \left(n_2 - 1\right) + \left(n_3 - 1\right) + ... \left(N_k - 1\right)$

N= सभी प्रतिदर्शों की कुल इकाई संख्या

K = प्रतिदर्शों की संख्या

n = प्रत्येक प्रतिदर्श में इकाईयों की संख्या

(d) MSW = SSW÷(N-K)

4. प्रसरण विश्लेषण सारणी (ANOVA Table)

विचलन वर्ग, प्रसरण स्त्रोत, स्वातंत्र्य संख्या, प्रसरण तथा प्रसरण अनुपात को एक विश्लेषणात्मक सारणी के रूप में प्रदर्शित करते हैं, जो इस प्रकार हैं -

प्रसरण विश्लेषण सारणी (ANOVA Table - One Way Classification)

प्रसरण स्रोत (Source of Variance)	वर्गों का जोड़ (Sum of Square SS.)	स्वातंत्र्य कोटियाँ (degree of freedom d.f)	प्रसरण या माध्य वर्ग (Mean of freedom d.f)	प्रसरण अनुपात (Var.Ratio f)
प्रतिदर्शों के बीच (between Samples प्रतिदर्श के अंतर्गत (Within samples)	$\sum\left[n\left(\bar{x}-\bar{\bar{x}}\right)^2\right]$ (SSB) $\Sigma\left(x_k-\bar{x}_k\right)^2$ (SSW)	k-1 N-k	$\sum\left[n\left(\bar{x}-\bar{\bar{x}}\right)^2\right]\div(k-1)$ (MSB) $\Sigma\left(x_k-\bar{x}_k\right)^2+(N-k)$ (MSW)	$\frac{MSB}{MSW}$
कुल योग (Total)	$\sum\left(\bar{x}-\bar{\bar{x}}\right)^2$ (SST)	N-1		

5. प्रसरण अनुपात :

$$F=\frac{\text{प्रतिदर्शों के 'बीच' प्रसरण}}{\text{प्रतिदर्शों के 'अन्तर्गत' प्रसरण}} \quad \text{या } F=\frac{\text{वृहत्तर प्रसरण}}{\text{लघुत्तर प्रसरण}}$$

6. F का सारणी मूल्य (Table value of F)

F सारणी में, 5% सार्थकता स्तर पर f का सारणी मूल्य देखेंगे । इसके लिए (V_1) वाले खाने में नीचे की ओर लघुत्तर प्रसरण से सम्बन्धित V_2 वाली पंक्ति में सामने जो संख्या दी है वही $F_{.05}$ का सारणीमूल्य है । अन्य सार्थकता स्तरों के लिए भी सारणी मूल्य (f-table) दिये होते हैं ।

7. F का अर्थ निर्वाचन (Interpretation of F)

(a) अगर F का परिकलित मान > उसका सारणीमान है तो प्रतिदर्श माध्यों में अंतर सार्थक है तथा वह प्रतिचयन उच्चावनों के कारण उत्पन्न नहीं हुआ है अर्थात सभी प्रतिदर्श एक मूल्य समष्टि से नहीं लिये गये हैं । ऐसी स्थिति में H_o अस्वीकृत की जाती है तथा H_1 को सत्य मानते हैं ।

(b) अगर F का परिकलितमान < उसका सारणीमान है तो विभिन्न माध्यो में अंतर अर्थहीन है और सभी प्रतिदर्श एक ही समष्टि से चुने गये हैं । ऐसी स्थिति में H_o का स्वीकार करेंगे । तथा H_a को अस्वीकृत

उदाहरण : 1

निम्नलिखित समंक उर्वरक की तीन जिस्मों X_1, X_2, X_3, के उपयोग से 9 खेतों में पैदावार (हजार टनों में) से सम्बन्धित है -

किस्म

Plots	**X_1**	**X_2**	**X_3**
y_1	10	13	4

y_2	16	19	7
y_3	19	22	13

क्या विभिन्न किस्मों से उत्पादन में अंतर सार्थक है?

हल: (i) सर्वप्रथम तीनों किस्म का माध्य ज्ञात करेंगे ।

$$\bar{x}_1 = \frac{10+6+19}{3} = 15$$

$$\bar{x}_2 = \frac{13+19+22}{3} = 18$$

$$\bar{x}_3 = \frac{4+7+13}{3} = 8$$

(ii). अब माध्यों का माध्य ज्ञात करें $\left(\bar{\bar{x}}\right)$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3}{k}$$

K = प्रतिदर्शों की: संख्या = 3

$$\bar{\bar{x}} = \frac{15+18+8}{3} = 13.67$$

(iii). प्रतिदर्शों के बीचे प्रसरण

$$O^{\Delta 2} = \frac{n_1\left(\bar{x}_1 - \bar{\bar{x}}\right)^2 + n_2\left(\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}\right)^2 + n_3\left(\bar{x}_3 - \bar{\bar{x}}\right)^2}{k-1}$$

$$\frac{3(15-13.67)^2 + 3(18-13.67)^2 + 3(8-13.67)^2}{3-1}$$

$$\frac{5.33+56.33+96.34}{2} = \frac{158}{2} = 79$$

(iv). किस्मों के अन्तर्गत प्रसरण

x_1	$\left(x_1 - \bar{x}_1\right)^2$	x_2	$\left(x_2 - \bar{x}_2\right)^2$	x_3	$\left(x_3 - \bar{x}_3\right)^2$
10	25	13	25	4	16
16	1	19	1	7	1
19	16	22	16	13	25
1	42	1	42	1	42

$$\frac{O^{\Delta 2} Within \sum + \left(x_1 - \bar{x}_1\right)^2 \sum + \left(x_2 - \bar{x}_2\right)^2 \sum + \left(x_3 - \bar{x}_3\right)^2}{(N-k)}$$

$$= \frac{42+42+42}{(9-3)} = \frac{126}{6} = 21$$

$$H_o : \mu_A := \mu_B = \mu_C$$

$H_a : \mu(A, BandC)$ समान नहीं है ।

सार्थकता स्तर 0,5

क्रान्तिक मान F =(2, 6, 0.5) = 5.14

$$F = \frac{\text{प्रतिदर्शों के 'बीच' प्रसरण}}{\text{प्रतिदर्शों के अंतर्गत प्रसरण}} = \frac{79}{21} = 3.76$$

F का सारणी मान = 5.14

F का परिकलित मान 3.76 सारणी मान 5.14 से कम है, अत: 5% सार्थकता सार्थक नहीं है, अर्थात सभी किस्मों में उत्पादन समान है ।

(II). लघु रीति (Short Cut Method)

यदि समान्तर माध्य पूर्णांक में न हो तो प्रत्यक्ष विधि द्वारा प्रसरण विश्लेषण अधिक कठिन होता है प्रत्यक्ष विधि की गणन प्रक्रिया अधिक कठिन व समय लेने वाली होती है अत: व्यवहार में लघु रीति का प्रयोग किया जाता है ।

लघु रीति द्वारा प्रसरण विश्लेषण की प्रक्रिया निम्नलिखित है.

(i) सर्वप्रथम संशोधन कारक ज्ञात करेंगे -

$$CorrectionFactor(C.F) = \frac{T^2}{N}$$

$$T_2 = \left(\sum X_1 + \sum X_2 + \sum X_3 + ...\sum X_k\right)2.$$

N= कुल इकाइयों की संख्या

(ii) प्रतिदर्श मूल्यों का योग और मूल्य वर्गों का योग ज्ञात करें

प्रतिदर्श इकाइयों का योग $= \sum X_1 + \sum X_2 + \sum X_3 + ...\sum X_k$

मूल्य वर्गों का योग $= \left[\sum X_1^{\ 2} + \sum X_2^{\ 2} + \sum X_3^{\ 2} .....\sum X_k^{\ 2}\right]$

(iii) वर्गों का कुल जोड़ (Total sum of square -SST)

$$= \left[\sum X_1^{\ 2} + \sum X_2^{\ 2} + \sum X_3^{\ 2}\right] - C.F$$

(iv) प्रतिदर्शों के बीच वर्गों का योग (Sum of squares between Samples) - SSB

$$S.S.B = \left[\frac{\left(\sum X_1\right)^2}{n_1} + \frac{\left(\sum X_2\right)^2}{n_2} + \frac{\left(\sum X_3\right)^2}{n_3} + \right] - C.F$$

(v) प्रतिदर्शों के अन्तर्गत वर्गो का जोड़ (Sum of Squares 'Within' samples - SSW)

S.S.W = SST - SSB

(vi) विश्लेषण सारणी और अर्थ निर्वचन (ANOVA Table and Interpretation) शेष प्रक्रिया प्रत्यक्ष रीति के ही समान है ।

उदाहरण : 2

उदाहरण (1) को लघु रीति द्वारा कीजिए ।

हल : **किस्में**

Plats	X_1	X_1^2	X_2	X_2^2	X_3	X_3^2
Y_1	10	100	13	169	4	16
Y_2	16	256	19	361	7	49
Y_3	19	361	22	484	13	169
	45	**717**	**54**	**1014**	**24**	**234**

संशोधन कारक ज्ञात करेंगे -

$$C.F = \frac{T^2}{N} = \frac{45+54+24}{9} = \frac{(123)^2}{9} = 1681$$

$$SST = \left(\Sigma X_1^2 + \Sigma X_2^2 + \Sigma X_3^2\right) - C.F$$

$$= (717 + 1014 + 234) - 1681 = 284$$

$$SSB = \left(\frac{\Sigma X_1}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{\Sigma X_2}{n_2}\right)^2 + \left(\frac{\Sigma X_3}{n_3}\right)^2 - C.F$$

$$= \frac{45^2}{3} + \frac{54^2}{3} + \frac{24^2}{3} - 1681$$

= 657 + 972 + 192 - 1681 = 158

SSW = SST - SSB

284 - 158 = 126

ANOVA Table

प्रसरण स्रोत	वर्गो का जोड़	स्वातंत्र्य कोटियाँ	माध्य वर्ग	प्रसरण अनुपात
(i) प्रतिदर्शों के बीच	SSB = 158	(k-1)=3-1=2	$\frac{158}{2} = 79$	$F = \frac{79}{21}$
(ii) प्रतिदर्श के अन्तर्गत	SSW=126 SST =284	(N-k)=9-3=6 N-1=9-1=8	$\frac{126}{6} = 21$	=3.76

परिकलित मूल्य = 3.76

सारणी मूल्य = (2,6,0.05)= (5.14)

परिकलित मूल्य F (3.76) < सारणी मूल्य (5.14)

H_0 स्वीकार की जाती है, अंतर सार्थक नहीं है ।

(III). मूल बिन्दु परिवर्तन विधि (Cooling Method)

जब प्रसरण विश्लेषण किया जाता है तब F गुणांक एक अनुपात के रूप में होता है और वह विमाहीन (Dimensionless) होता है अर्थात् परिकलन (Calculations) को आसान बनाने के लिए मूल समंकों में कोई स्थिरांक जोड़ा, घटाया, गुणा या भाग कर दिया जाये तो उसके मान पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है । मूल समंकों में परिवर्तन कर देने से प्रसरण-अनुपात पूर्ववत ही रहता है । मूल समंकों में से एक निश्चित संख्या जोड़ने, घटाने, गुणा या उससे भाग देने से गणन क्रिया आसान हो जाती है तथा F-गुणांक की शुद्धता पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है । जैसे 2050,1980,2025,1999 आदि मूल्यों में से 2000 घटाकर 50, - 25,25, - 1 में बदल लेंगे । शेष गणना प्रक्रिया लघु रीति के समान ही होगी ।

उदाहरण : 3

किसी शहर के विद्यालयों में से प्रत्येक की पाँचवीं कक्षा के 5-5 विद्यार्थी यादृच्छिक रूप से चुने गए और उनकी एक परीक्षा ली गई । प्राप्तांक नीचे दिये गये हैं । चारो विद्यालयों के माध्य
प्राप्तांकों में अंतर की सार्थकता जाँच करने के लिए प्रसरण विश्लेषण कीजिए ।

विद्यालय

A	B	C	D
8	12	18	13
10	11	12	9
12	9	16	12
8	14	6	16
7	4	8	15

हल: परिकल्पना $H_o : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

$$H_1 = \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4$$

परिकलन : सर्वप्रथम मूल समंकों में से 10 घटाने पर निम्न समंक सारणी बनेगी ।

A (X_1)	**B** (X_2)	**C** (X_3)	**D** (X_4)
-2	+2	+8	+3
0	+1	+2	-1
+2	-1	+6	+2
-2	+4	-4	+6
-3	-6	-2	+5
$\Sigma x_1 = 5$	$\Sigma x_2 = 0$	$\Sigma x_3 = 10$	$\Sigma x_4 = 15$
$\bar{x}_1 - 1$	$\bar{x}_2 = 0$	$\bar{x}_3 = 2$	$\bar{x}_4 = 3$

$\bar{\bar{x}}$ or Grand Mean $\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3+\bar{x}_4}{4}=\frac{-1+0+2+3}{4}=1$

$T=\Sigma X_1+\Sigma X_2+\Sigma X_3+\Sigma X_4$

$=-5+0+10+15=20$

संशोधन कारक$=\frac{T^2}{N}=\frac{20+20}{20}=20$

कुल विचलन वर्गों का जोड़ (SST)

वर्ग (Squares)

SST = (21+58+124+75)-20

=278-20 =258

$$SSB=\left[\frac{(\Sigma x_1)^2}{n_1}+\frac{(\Sigma x_2)^2}{n_2}+\frac{(\Sigma x_3)^2}{n_3}\right]-C.F$$

$$=\left[\frac{(-5)^2}{5}+\frac{(0)^2}{5}+\frac{(10)^2}{5}\frac{(15)^2}{5}\right]-20$$

= [5+0+20+45] -20=50

SSW = SST - SSB = 258-50=208

स्वातंत्र्य कोटियों की संख्या

प्रतिदर्शों के बीच = k -1 =4-1=3

प्रतिदर्शों के अन्दर =N-k=20-4=16

कुल ,प्रसरण के लिए = N-1=20-1=19

A	**B**	**C**	**D**
4	4	64	9
0	1	4	1
4	1	36	4
4	16	16	36
9	36	4	25
$\Sigma X_1^2=21$	$\Sigma X_2^2=58$	$\Sigma X_3^2=124$	$\Sigma X_4^2=75$

प्रसरण विश्लेषण सारणी

प्रसरण स्त्रोत	वर्गों का जोड़	स्वातंत्र्य कोटियाँ	प्रसरण	प्रसरणानुपात

(i) प्रतिदर्शों के बीच (ii) प्रतिदर्शों के बीच	SSB=50 SSW = 208	3 16	16.67 13.00	$F = \frac{16.67}{13}$ $F = 1.28$
योग	SST = 258	19		

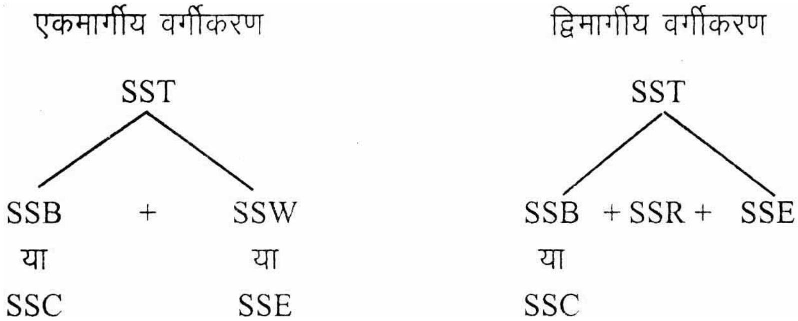
$V_1 = 3$ व $V_2 = 16$ के लिए $F_{0.05=5.29}$

F का परिकलित मान 1.28 सारणीमान 5.29 से कम है, अत: अन्तर सार्थक नहीं है ।

द्विमार्गी वर्गीकरण में प्रसरण विश्लेषण (Two way classification in Analysis of Variance)

कभी-कभी हम एक से अधिक शून्य परिकल्पना की स्वीकृति अथवा अस्वीकृति करना चाहते हैं जैसे - एक चाय कम्पनी अपने विक्रय का विश्लेषण (1) चार विक्रेताओं - A, B, C, D, तथा तीनों मौसमों सर्दी, गर्मी, बरसात के आधार पर कर सकती है तब इसे हम द्विमार्गीय परीक्षण कहेंगे । द्विमार्गीय परीक्षण में समंकों को दो तत्वों या दो कारकों के आधार पर वर्गीकृत करते हैं।

द्विमार्गीय वर्गीकरण तथा एकमार्गीय वर्गीकरण में अंतर को हम इस प्रकार समझ सकते हैं:



एक मार्गीय वर्गीकरण में कुल विचलन वर्गों (SST) को दो भागों में बाँटा जा सकता है जबकि द्विमार्गीय । वर्गीकरण में तीन भागों में बाँटा जा सकता है । द्विमार्गीय वर्गीकरण में संशोधन कारक (C.F.), SST तथा । SSB (SSC) तो एकमार्गीय वर्गीकरण के अनुसार ही निकाला जाता है । SSR तथा SSE इस प्रकार ज्ञात करेंगे :,

पंक्तियों के विचलन वर्गों का योग (Sum of Squares between rows -SSR)

$$SSR = \frac{(\Sigma y_1)^2}{k_1} + \frac{(\Sigma y_2)^2}{k_2} + \frac{(\Sigma y_3)^2}{k_3} - C.F$$

अवशेष अथवा त्रुटि के कारण विचलन वर्गों का योग

(Residual of sum of Squares due to Errors)

SSE = SST - (SSC + SSR)

स्वातंत्र्य कोटियों की संख्या

पदों की कुल संख्या = Cr

कुल वर्ग योग से सम्बन्ध स्वातन्त्रय कोटियाँ = Cr - 1

अन्त: स्तम्भ वर्ग-योग के लिए स्वातन्त्र्यांश = Cr -1

अन्त: पंक्ति वर्ग-योग के लिए स्वातन्त्र्यांश = r-1

अवशिष्ट वर्ग का योग के लिए स्वातन्त्र्यांश = (C-1) (r-1)

प्रसरण सारणी (ANOVA Table)

प्रसरण स्रोत	वर्ग योग	स्वातंत्र्य	प्रसरण	प्रसरणानुपात
(i) प्रतिदर्शों के बीच (Between Samples)	SSC	(C-1)	$MSC = \frac{SSC}{(C-1)}$	$\frac{MSC}{MSE}$
(ii) पंक्तियों के बीच (Between rows)	SSR	(r-1)	$MSR = \frac{SSR}{(r-1)}$	$\frac{MSR}{MSE}$
(iii) अवशेष	SSE	(C-1) (r-1)	$MSE = \frac{SSE}{(r-1)(C-1)}$	
योग	SST	(Cr-1)		

उदाहरण. 4

एक समान आकार के भूमि के पाँच खण्डों पर प्रत्येक पर चार प्रकार के आलू बोये गये और प्रत्येक पर पाँच विभिन्न उर्वरकों का उपचार किया गया । आलू की उपज (क्विंटल में) निम्न प्रकार है -

आलू के प्रकार	उर्वरक				
1	19	22	26	18	21
2	25	19	23	26	22
3	17	19	22	20	21
4	21	18	25	23	24

प्रसरण विश्लेषण द्वारा वह ज्ञात कीजिए कि क्या (क) उर्वरकों के प्रभाय में कोई सार्थक अन्तर है? (ख) आलू के प्रकार की उपज में कोई सार्थक अंतर है?

हल : परिकल्पना

H_0: (i) उर्वरकों के प्रभाव में अंतर नहीं है,

(ii) आलू के प्रकारों में अंतर नहीं है ।

कूट समंक (मूल बिन्दु परिवर्तन) Codded Data- X= 20 को मूल बिन्दु मानकर सभी समंकों में से 20 घटाने पर तथा उनके वर्गों की सारणियाँ निम्न प्रकार हैं -

मूल बिन्दु X=20

प्रकार	**उर्वरक**					**योग**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum yr$
1	-1	+2	+6	-2	+1	+6

2	+5	-1	+3	+6	+2	+15
3	-3	-1	+2	0	+1	-1
4	+1	-2	+5	+3	+4	+11
	+2	-2	+16	+7	+8	31T

वर्ग

प्रकार	**उर्वरक**					**योग**
	1	2	3	4	5	
1	1	4	36	4	1	26
2	25	1	9	36	4	75
3	9	1	4	0	1	15
4	1	4	25	9	16	55
	36	10	74	49	22	191

संशोधन कारक (C.F.) $= \frac{T^2}{N} = \frac{31 \times 31}{20} = 48.05 [N = Cr]$

कुल वर्ग-योग (SST) $= \Sigma\left(X_1^2 + X_2^2 .... X_a^2\right) = \frac{T^2}{N}$

$=191 - 48.05 = 142.95$

अन्त: स्तम्भ वर्ग-योग (SSC)

$$= \sum \left\{ \frac{\left(\sum x_c\right)^2}{nc} \right\} - \frac{T^2}{N}$$

$$= \left[\frac{(2)^2 + (-2)^2 + (16)^2 + (7)^2 + (8)^2}{4} \right] = 48.05$$

$$= \frac{377}{4} = 48.05 = 94.25 - 48.05 = 46.20$$

स्वातंत्र संख्या (dfc) $= C - 1 = 5 - 1 = 4$

अन्त: पंक्ति वर्ग-योग (SSR) $= \left\{ \frac{\left(\sum x_r\right)^2}{nr} \right\} - \frac{T^2}{N}$

$$= \left[\frac{(6)^2 + (15)^2 + (-1)^2 + (11)^2}{5} \right] - 48.05$$

$$= 76.60 - 48.05 = 28.55$$

स्वातंत्र संख्या (dfr) = (r-1)=4-1=3

अवशिष्ट वर्ग-योग (Residual S.S.-SSE)

=SST-(SSC+SSR)

=149.95-(46.20+28.55)=68.20

स्वातंत्र संख्या (df) = (C-1) (r-1) = (5-1) (4-I)= 12

प्रसरण विश्लेषण सारणी (ANOVA Table)

प्रसरण स्रोत (Source)	वर्ग योग (S.S)	स्वातंत्र्य संख्या (df)	प्रसरण (MSS)	प्रसरणानुपाती (F)
(i)अन्त: स्तम्भ (Between fertilizers)	SSC=46.20	(C-1) =4	MSC=11.55	$F=\frac{11.55}{5.68}$ =2.033
(ii) अन्त: पंक्ति (Between Varieties)	SSR28.55	(r-1) =3	MSR=9.52	$F=\frac{9.52}{5.68}$ 1.676
(iii) अवशिस्ट (RESIDUAL)	SSE=68.20	(C-1)(r-1)=12	MSE=5.68	
कुल योग(Total)	SST=142.95	(r-1)=19		

निर्णय :

(i). अंत: स्तम्भ प्रसरण (खादों के बीच)

परिकलित F=2.033, सारणीमान F.05(For V1=4,V2=12)= 3.2592

परिकलित F< सारणी F.05 अत: खादों के प्रभाव में कोई सार्थक अन्तर नहीं है । H_o स्वीकार की जाती है ।

(ii). अन्त: पंक्ति प्रसरण (प्रकारों के बीच) -

परिकलित F=1.676, सारणीमान (For V_1=3,V_2=12)=3.4903

परिकलित F< सारणी F.05 अत: प्रकारों की उपजों में कोई सार्थक अंतर नहीं है ।H_o स्वीकार की जाती है ।

18.6 सारांश (Summary)

प्रसरण विश्लेषण दो से अधिक प्रतिदर्श माध्यों के अंतरों की सार्थकता की जाँच हेतु प्रयुक्त किया जाता है । इसके द्वारा एक ही परीक्षण द्वारा अनेक माध्यों की सजातीयता की जाँच की जाती है। प्रसरण विश्लेषण हेतु प्रतिदर्श की इकाईयों का चयन स्वतंत्र एवं यादृच्छिक होना चाहिए । मूल समष्टि एवं प्रतिदर्श दानों के माध्य एवं प्रसरण सजातीय हों तथा विभिन्न संघटक प्रसरणों का योग कुल प्रसरण के बराबर होना चाहिए । मूल समष्टि में मानक प्रसामान्य वक्र की सभी मौलिक विशेषताएँ विद्यमान होनी चाहिए । अनेक माध्यों में अंतरों की सार्थकता जाँच प्रसरणों के अंतर की सार्थकता जाँच, द्विमार्गीय वर्गीकरण का सह सम्बन्ध एवं प्रतीपगमन की जाँच आदि प्रसरण विश्लेषण का प्रयोग किया जाता है । प्रसरण विश्लेषण की प्रविधियों में एक मार्गीय वर्गीकरण तथा द्विमार्गीय वर्गीकरण को शामिल किया जाता।

18.7 शब्दावली (Glossary)

प्रसरण विश्लेषण: ऐसी विधि जिसके द्वारा कुल प्रसरण को विभिन्न कारणों से होने वाले प्रसरण संघटकों में बाँटकर उनकी तुलना द्वारा विभिन्न प्रतिदर्श माध्यों की सजातीयता की जाँच की जाती है।

एक मार्गीय वर्गीकरण: जब एक ही घटक के आधार पर प्रेक्षणों का वर्गीकरण किया जाता है तब उसे एकमार्गीय वर्गीकरण कहते हैं ।

द्विमार्गीय वर्गीकरण. समंकों को दो तत्वों के आधार पर वर्गीकृत करना ।

18.8 स्वपरख प्रश्न /अभ्यास : (Self-Assessment Questions / Exercise)

1. प्रसरण विश्लेषण को परिभाषित कीजिए ।

2. प्रसरण विश्लेषण की आधारभूत मान्यताओं की व्याख्या कीजिए ।

3. प्रसरण विश्लेषण के क्या प्रयोग हैं?

4. एक मार्गीय वर्गीकरण में प्रसरण-विश्लेषण की प्रविधि की स्पष्ट व्याख्या कीजिए ।

5. द्वि-साधन वर्गीकरण के लिए प्रसरण-विश्लेषण की प्रविधि की व्याख्या कीजिए ।

18.9 आंकिक प्रश्न :(Numerical Questions)

अग्रांकित समंकों से एक प्रसरण विश्लेषण सारणी की रचना कीजिए तथा यह ज्ञात कीजिए कि चारों प्रतिदर्शों की माध्यों में परस्पर सार्थक अंतर है अथवा नहीं । प्रत्यक्ष रीति द्वारा हल कीजिए।

	प्रतिदर्श					योग
I	7	9	11	7	6	40
II	11	10	8	13	3	45
III	17	11	15	5	7	55
IV	12	8	11	15	14	60

(प्रदत्त (Given -$F_{.05}$(3.16)=3.239,$F_{.01}$ (316)=5.292

(उत्तर: F =1.282<F.05 and also F.01 अत: दोनों स्तर पर H_0 स्वीकार किया जाता है। अंतर सार्थक नहीं है ।

2. निम्नांकित आँकडे 12 भूखण्ड़ों में तीन प्रकार के चने की उपज से सम्बन्धित हैं । एक प्रसरण सारणी बनाइये तथा ज्ञात कीजिए कि क्या उपज में चने की तीनों प्रकारों में विशिष्ट अन्तर है?

किस्म	भूखण्डो की उपज क्विंटल में			
	I	II	III	IV
क	10	16	20	18
ख				

ग	12 18	8 12	12 12	16 14

प्रदत्त $F_{.05}$ =4.26

(उत्तर. परिकलित F =1.286 H_0 स्वीकृत)

3. एक कम्पनी इस तथ्य की जाँच करना चाहती है कि उसके तीन विक्रेता राम, हरी, गोपाल - एक ही आकार की बिक्री करते हैं या विक्रय के औसत आकार के आधार पर तीनों की विक्रय क्षमता में अंतर है । गत सप्ताह बिक्री के लिए 14 आव्हान किए गए। राम ने 5, हरी ने 4 तथा गोपाल ने 5 । तीनों विक्रेताओं के साप्ताहिक विक्रय लेखे निम्नानुसार हैं । प्रसरण विश्लेषण की सहायता से यह ज्ञात कीजिए कि तीनों विक्रेता क्या आदेश प्राप्त करने में एक समान हैं -

राम रू.	600	800	600	1000	1000
हरी रू.	1200	600	600	800	-
गोपाल रू.	1400	600	800	1200	1000

(उत्तर: Divide each figure by 200 and proceed F=1.833<$F_{.05}$ for V_1=2, V_2=11 i.e. 3.982 H_0 स्वीकृत तीनों विक्रेताओं की विक्रय क्षमता में अंतर नहीं है ।)

4. एक चाय कम्पनी ने A,B,C तथा D चार विक्रेताओं को नियुक्त किया और तीन ऋतुओं - ग्रीष्म, मानसून व शरद में उनके द्वारा की गई बिक्री ज्ञात की। विक्रय समंक (लाखों में) इस प्रकार है । प्रसरण विश्लेषण ज्ञात कीजिए और अपने निष्कर्ष निकालिए -

Season	**Salesman**				
	A	B	C	D	Total
Summer	36	36	21	35	128
Monsoon	26	28	29	29	112
Winter	28	29	31	32	120
Total	**90**	**93**	**81**	**96**	**360**

(उत्तर. F, between salesman=1.62>F.05, between season=1.41<F.05 विक्रेता तथा मौसम में सजातीयता (Homogeneous) है ।

5. एक फसल की तीन किस्मों - A, B तथा C का यादृच्छिक ब्लॉक अभिकल्पना में चार पुनरावृत्तियों सहित परीक्षण किया गया । प्लाटों से प्राप्त उत्पादन (किग्रा में) अग्रांकित तालिका में दिया गया है । इनका विश्लेषण कीजिए तथा 5% सार्थकता स्तर पर अपना निष्कर्ष लिखिए-

I Lot II Lot III Lot IV Lot

A6	C5	A8	B9
C8	A4	B6	C9
B6	B7	C10	A6

तालिका मूल्य इस प्रकार है

For d.f.(2,6) स्वातंत्र कोटि पर 5.143

(3,6) स्वातंत्र कोटि पर 4.757

(उत्तर: 1.परिकलित F(2.2)<F.05 (4.757) अत: शून्य परिकल्पना सत्य है। भूखण्डों के मध्य प्रसरण विभ्रम के कारण उत्पन्न प्रसरण से सार्थक रूप से भित्र नहीं है ।

2. परिकलित? F(1.6)<F.05 (5.143) अत: शून्य परिकल्पना सत्य है । किस्मों के मध्य प्रसरण विभ्रम जनित प्रसरण से सार्थक रूप से भिन्न नहीं है ।

18.10 उपयोगी पुस्तकें (Further Reading)

1. Arora, P.N. and Arora S.Statistics,S. Chand & Sons, New Delhi.

2. Gupta, S.P.,Statistical Methods, Sultan Chand & Sons,New Delhi

3. Sancheti, D.C. and Kapoor, Statistics (Theory, Methods and Application),Sultan Chand & Sons, New Delhi.

4. नागर, कैलाशनाथ, सांख्यिकी के मूल तत्व, मीनाक्षी प्रकाशन, मेरठ

5. शर्मा, जैन, पारीक, सांख्यिकी, रमेश बुक डिपो, जयपुर ।

इकाई- 19 : शोध कार्य की रिपोर्ट तैयार करना (Preparing of the Research Report)

इकाई की रूपरेखा -

19.0 उद्देश्य

19.1 प्रस्तावना

19.2 रिपोर्ट तैयार करने का उद्देश्य

19.3 रिपोर्ट तैयार करते समय उत्पत्र होने वाली समस्याएँ

19.4 रिपोर्ट में सम्मिलित करने वाली मदें

19.5 रिपोर्ट की विशेषताएँ

19.6 रिपोर्ट का महत्त्व

19.7 सारांश

19.8 शब्दावली

19.9 स्वपरख प्रश्न

19.1 संदर्भ ग्रन्थ

19.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप ये समझ सकेंगे कि रिपोर्ट कैसे तैयार की जाती है । रिपोर्ट में किन-किन बिन्दुओं को सम्मिलित किया जाता है ।

19.1 प्रस्तावना

किसी भी शोधकर्त्ता के द्‌वारा किया गया शोध कार्य तब तक सार्थक नहीं हो सकता जब तक कि इनके आधार पर तथ्यों का विश्लेषण व व्यांख्या करके कुछ वैज्ञानिक निष्कर्षों को न निकाला जाए । यदि इन सभी निष्कर्षों को शोधकर्त्ता अपने पास ही रखें तो उससे न तो समाज का, न विज्ञान का और न ही किसी का कोई भला हो सकता है । इसके लिए यह आवश्यक है कि सम्पूर्ण सर्वेक्षण व शोध कार्य के उद्देश्य, क्षेत्र, प्रयुक्त पद्धति व प्रविधियों, संकलित तथ्यों का विवरण, विश्लेषण व व्याख्या तथा निष्कर्षों व सुझावों को एक लिखित रूप दिया जाए । जिससे कि यह शोध कार्य वर्तमान व भावी पीढ़ी के लिए, विज्ञान के लिए एक धरोहर बन सके तथा भविष्य में भी उसी विषय पर सामाजिक योजना व सुधार की रूपरेखा तैयार की जा सके । इन्हीं उद्देश्यों की पूर्ति के लिए सम्पूर्ण शोध कार्य का एक लिखित विवरण तैयार करते हैं । यही सर्वेक्षण या शोध की रिपोर्ट कहलाती है ।

19.2 रिपोर्ट तैयार करने का उद्देश्य

शोध-प्रक्रिया वैज्ञानिक के लिए बड़ी ही रोचक तथा आकर्षक होती है । कभी-न-कभी एक ऐसी स्थिति आती है जबकि शोधकर्त्ता को रिपोर्ट तैयार करना आवश्यक हो जाता है ।

किसी भी प्रकार के अध्ययन में एक स्थिति ऐसी आती ही है जबकि उसके पश्चात् अध्ययन-कार्य को चालू रखना अनुपयोगी एवं संकलित तथ्यों का और अधिक विश्लेषण व व्याख्या अनावश्यक प्रतीत होने लगती है । कभी-कभी ऐसा भी होता है कि किन्हीं पूर्व शर्तों के अनुसार एक वैज्ञानिक या विद्यार्थी के लिए यह अनिवार्य हो जाता है कि वह एक निर्धारित समय के अन्दर शोध-कार्य को समाप्त कर उसके निष्कर्षों को प्रस्तुत करे। साथ ही शोध या सर्वेक्षण के दौरान प्राप्त सामग्री एवं नवीन तथ्य इतने रुचिकर होते हैं कि अनुसन्धानकर्त्ता उसके परिणामों को अन्य लोगों तक पहुँचाने के लिए स्वयं उत्सुक रहता है । अन्त में, जिन-जिन लोगों ने अध्ययन-कार्य में आर्थिक तथा अन्य सहयोग दिया है, वे यह जानने के लिए उत्सुक रहते हैं कि उनके सहयोग या सहायता का क्या परिणाम निकला? इन सब आवश्यकताओं व माँगों की पूर्ति करने के उद्देश्य से ही सर्वेक्षण के अन्तिम चरण में एक रिपोर्ट तैयार की जाती है?

इस प्रकार, रिपोर्ट तैयार करना शोध-कार्य का अन्तिम चरण है जिसका कि उद्देश्य 'अमेरिकन मार्केटिंग सोसाइटी' (American Marketing Society) के अनुसार, "अध्ययन के सम्पूर्ण परिणामों को रुचि रखने वाले व्यक्तियों (interested persons) के समक्ष पर्याप्त विस्तार में प्रस्तुत करना और उन परिणामों को इस प्रकार व्यवस्थित करना कि प्रत्येक पाठक तथ्यों को समझने और निष्कर्षों की वैधता स्वयं निर्धारित करने में समर्थ हो सके ।.

गुड़े व हॉट के अनुसार, 'प्रतिवेदन लिखना शोध का अन्तिम चरण है और इसका उद्देश्य इच्छा रखने वाले पाठक तक शोध परिणाम पहुँचाना है । पाठक जिन्हें पढ़कर समझ सके । इस तरह से संशोधन को व्यवस्थित एवं विस्तार प्रस्तुत करना । इसे पढ़कर पाठक तथ्य समझ सकें और स्वयं संशोधन निष्कर्षों की प्रामाणिकता की जाँच करने योग्य हो सके । '

गुड़े एवं हॉट के परिभाषा से प्रतिध्वनित अर्थ प्रतिवेदन में सम्पूर्ण अध्ययन का विवरण देता है । समस्या- समाधान से संशोधन के अन्तिम परिणाम प्रस्तुत करता है । समय महत्वपूर्ण घटक है । इसलिये 'प्रबन्ध प्रस्तुत करने का दिन एवं तारीख पूर्व-निश्चित होती है । "

प्रतिवेदन लिखने के लिये कितना समय, धन और श्रम खर्च करना पड़ेगा यह अध्ययन के स्वरूप, व्याप्ति और उद्देश्यों पर निर्भर करता है । प्रतिवेदन सैद्धान्तिक हो या व्यावहारिक, गहन हो अथवा केवल किसी एक समस्या से सम्बन्धित, परीक्षणात्मक हो या क्षेत्रीय, उनके प्रतिवेदन अपनी-अपनी विशेषता लिये रहते हैं । अलग-अलग विशेषता होने पर भी सभी प्रतिवेदनों को प्रस्तुत करने के लिये वैज्ञानिक पद्धति निर्धारित की गयी है । "

उपर्युक्त विवेचन के आधार पर हम यह कह सकते हैं कि एक सर्वेक्षण या शोध की रिपोर्ट तैयार करने के प्रमुख उद्देश्य निम्नलिखित हैं :-

(1) **शोध का एक प्रलेख प्रस्तुत करना (To present a Document of Research) -** प्रत्येक सर्वेक्षण या शोध-कार्य का निष्कर्ष निश्चय ही किसी-न-किसी प्रकार के शोध का स्रोत होता है। इसमें पर्याप्त समय, धन तथा 'परिश्रम भी लग जाता है । इसके बाद भी अगर अध्ययन से प्राप्त शोध को शोधकर्त्ता केवल अपने ही दिमाग में रख लें तो उस शोध की वास्तविक उपयोगिता स्वत: ही' नष्ट हो जाएगी और दूसरों को उससे कोई लाभ नहीं होगा । अत: उसे एक क्रमबद्ध लिखित रूप प्रदान करना परमांवश्यक है जिससे कि वह शोध का एक लिखित प्रलेख (document) बन जाए और विज्ञान की एक धरोहर के रूप में उसे सुरक्षित रखना सरल हो जाए । इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए सर्वेक्षण या शोध की एक रिपोर्ट अवश्य ही तैयार की जाती है ।

(2) **शोध के विस्तार के लिए (For the extension of Research) -** रिपोर्ट तैयार करने का यह भी कम महत्त्वपूर्ण उद्देश्य नहीं है । तथ्यों के विश्लेषण व व्याख्या से न केवल अध्ययन-विषय का ही स्पष्टीकरण होता है और न केवल उस विषय से सम्बन्धित ही कुछ निष्कर्ष निकलते हैं, अपितु इस बात की भी खोज हो जाती है कि उस विषय से सम्बन्धित अन्य कौन-कौन सी समस्याएँ हैं जिनके विषय में आगे और गहन अध्ययन किया जा सकता है । जब अपने शोध-कार्य तथा उसके निष्कर्षों को अनुसंधानकर्ता एक लिखित रूप देने बैठता है तो वह स्वत: ही अन्य ऐसी अनेक नई समस्याओं, नए प्रश्नों तथा विषयों की ओर भी संकेत करता है जो कि शोध या सर्वेक्षण का विषय बन सकते हैं । इस दृष्टिकोण से रिपोर्ट का एक उद्देश्य अनुसंधान के नए क्षेत्रों (avenues) से हमें परिचित करवाकर शोध के विस्तार की निरन्तरता को बनाए रखना है ।

(3) **अनुसन्धान के परिणामों को दूसरों के सूचनार्थ प्रस्तुत करना (To present the Result of the Investigation for others' information) -** शोधकर्त्ता के लिए अपने अनुसंधान के परिणामों को प्रदर्शित करना कई कारणों से आवश्यक हो जाता है । प्रथम शोध-कार्य से प्राप्त निष्कर्षों या परिणामों को सम्बन्धित लोगों अथवा शोध में रुचि रखने वाले व्यक्तियों के सामने प्रकट करना अनुसंधानकर्त्ता का कर्तव्य हो जाता है । उदाहरणार्थ, यदि अनुसंधान का विषय सार्वजनिक महत्व का है तो उसके परिणामों से लोगों को अवगत कराना आवश्यक हो जाता है । द्वितीय: यदि सर्वेक्षण की रिपोर्ट के आधार पर ही कोई सरकारी अथवा गैर-सरकारी कार्यवाही होनी है तो भी यह काम रिपोर्ट तैयार न होने तक रुका रहता है । तृतीय : कभी-कभी सरकार किसी विशेष विषय पर सर्वेक्षण इसलिए करवाती है कि उससे सम्बन्धित कोई योजना उसे बनानी होती है । इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए भी रिपोर्ट तैयार करनी जरूरी हो जाती है । चतुर्थ : जिन लोगों ने सर्वेक्षण-कार्य में अपना धन, परामर्श, सहायता व समय देकर सहयोग प्रदान किया है, उन सभी के मन में सर्वेक्षण के परिणामों को जानने की स्वाभाविक इच्छा होती है । उनकी सन्तुष्टि के लिए भी रिपोर्ट को तैयार किया जाता है । इसके अतिरिक्त, जब अनुसंधान-कार्य किसी डिग्री या डिप्लोमा प्राप्त करने के

लिए किया जाता है तो उस उद्देश्य की पूर्ति तब तक नहीं हो सकती जब तक कि रिपोर्ट प्रस्तुत न की जाए । इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए भी रिपोर्ट तैयार की जाती है । अन्त में, प्राय: सर्वेक्षण द्वारा प्राप्त नवीन तथ्य इतने रोचक व रुचिकर प्रतीत होते हैं कि स्वयं अनुसंधानकर्ता उनके परिणामों को अन्य लोगों को भी दिखाने व आत्मगौरव प्राप्त करने के लिए उत्सुक रहता है । अनुसंधान की एक व्यवस्थित रिपोर्ट तैयार हो जाने से इन सभी उद्देश्यों की पूर्ति हो जाती है ।

(4) **विषयों में अन्तर्निहित वास्तविक स्थिति को समझाना (To explain the actual conditions involved) -** रिपोर्ट का उद्देश्य केवल अनुसंधान के निष्कर्षों या परिणामों को व्यक्त करना ही नहीं अपितु उन्हें इस व्यवस्थित वैज्ञानिक ढंग से प्रस्तुत करना है कि अध्ययन-विषय के विभिन्न पक्षों की वास्तविकताएँ स्वत: ही प्रगट हो जाएँ और उस रिपोर्ट को पढ़ने वाला प्रत्येक व्यक्ति उनमें अन्तर्निहित वास्तविक स्थिति तथा अन्तःसम्बन्धों को स्पष्ट रूप में समझ सके । सर्वेक्षण या शोध की सार्थकता विषय को केवल स्वयं समझ लेने में नहीं अपितु दूसरों को भी समझाने में है । इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए भी रिपोर्ट इस ढंग से तैयार की जाती है कि विषय में रुचि रखने वाले सभी व्यक्ति उसे पढ़कर लाभ उठा सकें तथा अनुसंधान से प्राप्त नवीन तथ्यों व उनके सामाजिक परिणामों को समझ सकें ।

(5) **वैधता की जाँच (Test of Validity)-** जब तक शोध या सर्वेक्षण-रिपोर्ट को तैयार नहीं किया जाएगा, तब तक इस बात की जाँच नहीं की जा सकती कि वह अध्ययन प्रामाणिक व प्रयोगसिद्ध है अथवा नहीं । रिपोर्ट की जाँच करके ही यह बताया जाता है कि अनुसन्धान में शुद्ध तथा यथार्थ सामग्री के आधार पर निष्कर्ष निकाले गए हैं अथवा केवल अनुमान और संदेहात्मक सूचना ही अध्ययन का आधार है । रिपोर्ट में वर्णित तथ्य व निष्कर्ष सार्वजनिक रूप से प्रकाशित एक विषय बन जाता है (यदि रिपोर्ट को सरकार के द्वारा गुप्त न रखा जाए) । अत: यदि किसी को भी अध्ययन की वैधता के सम्बन्ध में सन्देह होता है तो वह स्वयं फिर से अनुसन्धान कर उसके निष्कर्षों की परीक्षा व पुनर्परीक्षा कर सकता है । इस प्रकार की परीक्षा व पुनर्परीक्षा 'से या तो पहले वाले अध्ययन की वैधता सिद्ध होती है अथवा उसके निष्कर्षो को तथ्य पूर्ण रूप से गलत प्रमाणित किया जाता है । दोनों ही दशाओं में विज्ञान की प्रतिष्ठा बढ़ती है । इसलिए यह कहा जाता है कि परीक्षा व पुनर्परीक्षा के योग्य होना वैज्ञानिक अध्ययन का सबसे उल्लेखनीय गुण है । अत: इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए भी रिपोर्ट तैयार करना आवश्यक हो जाता है ।

19.3 रिपोर्ट तैयार करते समय उत्पन्न होने वाली समस्याएँ (Problems of preparing the Report)

सर्वश्री गुडे तथा हीट (Goode and Hatt) ने उचित ही लिखा है कि “स्पष्टतया यह प्रतीत होता है कि एक रिपोर्ट को लिखना एक सरल कार्य ही होगा क्योंकि यह तो केवल मात्र पूछे गए प्रश्नों का उत्तर प्राप्त करने के लिए प्रयुक्त प्रविधियों तथा

अन्तिम रूप से विकसित उत्तरों का एक विवरण मात्र है । वास्तव में, यह काम शायद ही सरल हो । दूसरे शब्दों में, शोध या सर्वेक्षण-रिपोर्ट तैयार करना उतना सरल कार्य नहीं है जितना कि ऊपरी तौर पर हम उसे समझते हैं । वास्तविक रूप में जब शोधकर्त्ता रिपोट लिखने बैठता है तो उसे एकाधिक समस्याओं का सामना करना ही पड़ता है जिनमें से कुछ प्रमुख निम्नलिखित हैं -

(1) **भाषा की समस्या (Problems of Language) -** रिपोर्ट तैयार करने में सबसे बड़ी समस्या भाषा की समस्या है । यह समस्या इसलिए उत्पन्न होती है कि यदि भाषा को अत्यन्त सरल बना दिया जाए तो रिपोर्ट का स्तर गिर जाता है और उसमें एक ओछापन-सा दिखाई पड़ने लगता है । पर यदि उस रिपोर्ट में वैज्ञानिक शब्दों का अत्यधिक प्रयोग करके रिपोर्ट के स्तर को ऊँचा उठाने का प्रयत्न किया जाता है तो रिपोर्ट अधिकांश लोगों के लिए अत्यधिक क्लिष्ट तथा पारिभाषिक (technical) हो जाती है । ऐसी परिस्थिति में समस्या यह जान पड़ती है कि किस भाषा में रिपोर्ट को प्रस्तुत किया जाए क्योंकि साधारण बोल-चाल की भाषा रिपोर्ट के स्तर को गिरा देती है जबकि पारिभाषिक भाषा उसे लोकप्रिय होने से रोकती है । वास्तविक तथ्य यह है कि शोध या सर्वेक्षण की सम्पूर्ण प्रक्रिया है, जिसमें कि रिपोर्ट का प्रस्तुतीकरण भी सम्मिलित है, स्वयं ही एक टेक्निकल प्रक्रिया है इसलिए उसने एक निर्धारित सीमा के बाद सरल नहीं बनाया जा सकता । यह नहीं हो सकता है कि रिपोर्ट में पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग न किया जाए और पारिभाषिक शब्दों का प्रयोग करते हुए रिपोर्ट को क्लिष्ट होने से पूर्णतया रोकना भी असम्भव है । इतना ही नहीं, रिपोर्ट को लिखते समय भाषा सम्बन्धी एक और समस्या इस रूप में प्रगट होती है कि रिपोर्ट में ऐसे किसी भी शब्द या वाक्य का प्रयोग न किया जाए जिसके कि अर्थ दो या अधिक सन्देहजनक हों । ऐसा होने पर रिपोर्ट के किन्हीं पक्षों के सम्बन्ध में गलत धारणा पनपने की सम्भावना होती है । पर सम्पूर्ण अध्ययन में, भाषा के सम्बन्ध में इतना अधिक सचेत रहना सम्भव नहीं होता है और इसीलिए भाषा की समस्या किसी-न-किसी रूप में बनी ही रहती है ।

(2) **पारिभाषिक शब्दों की समस्या (Problems of Technical Words) -** प्राकृतिक विज्ञानी में पारिभाषिक शब्दो को विकसित करने की दिशा में उल्लेखनीय प्रगति हुई है और इन विज्ञानों में इसलिए ऐसे विशेष शब्दों तथा वाक्यों की प्रचुरता है जिनका कि अर्थ बिना किसी अपवाद के सभी के लिए और सभी स्थानों पर एक-समान ही होता है या समझा जाता है । परन्तु सामाजिक विज्ञानों में यह कमी अत्यधिक अनुभव की जाती है क्योंकि सामाजिक विज्ञानों में प्रामाणिक पारिभाषिक शब्दावली का लगाव प्रत्येक लेखक को बहुत अधिक खटकता है । इतना ही नहीं, पारिभाषिक शब्दावली सम्बन्धी सैद्धान्तिक मतभेद भी सामाजिक विज्ञानों के क्षेत्र में कम उल्लेखनीय विषय नहीं है और अलग-अलग लेखक इस शब्दावली के प्रति किसी विशिष्ट आग्रह अथवा दुराग्रह से अपने को दूर रखने में शायद ही सफल हो सके । जैसा कि ऊपर कहा जा

चुका है रिपोर्ट का प्रस्तुतीकरण भी एक टेक्निकल विषय है और प्रामाणिक पारिभाषिक शब्दावली के बिना इसका काम नहीं चल सकता, इसलिए समाज-विज्ञानों में इन्हीं शब्दावलियों की कमी एक बहुत बड़ी कमी बन जाती है जिसके कारण रिपोर्ट में कही हुई बातें सन्देहास्पद तथा दो अर्थ वाली बन जाती है जबकि शोधकर्त्ता का वास्तविक उद्देश्य ऐसा करना नहीं होता है । सामाजिक विज्ञानों में जब तक पारिभाषिक शब्दावली का पर्याप्त विकास नहीं हो जाएगा तब तक इससे सम्बन्धित समस्या रिपोर्ट को तैयार करने में बनी ही रहेगी ।

(3) **जनता के ज्ञान के स्तर की समस्या (Problem of Intellectual level of General mass) -** रिपोर्ट को लिखते समय जनता के ज्ञान के स्तर से सम्बन्धित एक और समस्या उत्पन्न हो जाती है, विशेषकर उस अवस्था में जबकि देश में शिक्षित लोगों का प्रतिशत बहुत कम है । अक्सर यह तर्क प्रस्तुत किया जाता है कि शोध या सर्वेक्षण-कार्य एक गम्भीर विषय है इसलिए सर्वेक्षण-रिपोर्ट आम जनता के लिए नहीं होती है । आज तक इस तर्क को बहुत-से विद्वान अस्वीकार करते हैं । उनका कथन है कि कोई भी वैज्ञानिक खोज, चाहे वह प्राकृतिक दुनिया से सम्बन्धित हो अथवा सामाजिक दुनिया से, तब तक सार्थक नहीं हो सकती है जब तक उस खोज के परिणाम जन-जीवन का एक अंग नहीं बन जाते क्योंकि कभी-कभी एक साधारण व्यक्ति द्वारा प्रस्तुत समालोचना या व्याख्या (layman's interpretation) भी वैज्ञानिक के लिए अत्यन्त उपयोगी सिद्ध होती है । कभी-कभी तो रिपोर्ट जनसाधारण के हित से सम्बन्धित होती है और उसमें सम्बन्धित सभी लोग रुचि लेते हैं । अत: समस्या यह होती है कि रिपोर्ट लिखने वाले को सम्बन्धित व्यक्तियों के ज्ञान के स्तर को सर्वप्रथम जानना होता है और यह सरल काम नहीं है । पर अगर इस सम्बन्ध में कोई त्रुटि रह गई तो रिपोर्ट की सार्थकता कम हो जाती है । उदाहरणार्थ, यदि कोई सर्वेक्षण श्रमिक वर्ग से सम्बन्धित है और उसकी रिपोर्ट से श्रमिकों का हित होने की सम्भावना है, पर यदि उस रिपोर्ट को लिखते समय उन्हीं श्रमिकों के ज्ञान के स्तर को ध्यान में नहीं रखा गया है तो अनेक श्रमिक रिपोर्ट की वास्तविक सिफारिशों को ठीक से समझ न सकने के कारण उनसे वास्तविक लाभ नहीं उठा पायेंगे । पर ज्ञान के इस स्तर को ठीक-ठीक मापना समस्या एक समस्या बन जाती है ।

(4) **गम्भीरता की समस्या (Problem of Seriousness) -** प्रत्येक शोधकर्त्ता की यह आन्तरिक अभिलाषा होती है कि उसकी अनुसधान की रिपोर्ट का स्तर यथासम्भव आया हो ताकि उच्च श्रेणी के पाठकों और विद्वानों में वह प्रख्यात हो सके । पर यदि इस अभिलाषा को वह एक सन्तुलित स्तर पर बनाए रखने में सफल नहीं होता तो उसकी रिपोर्ट अनावश्यक तौर पर गम्भीर रूप धारण कर लेती है । अनावश्यक रूप में पारिभाषिक शब्दों से बोझिल रिपोर्ट न केवल अपनी स्वाभाविकता को खो बैठती है अपितु अत्यधिक क्लिष्ट होने के कारण अनेक तत्व अस्पष्ट बने रहते हैं । वास्तव में

विचारों की गम्भीरता तथा भाषा की सरलता - इन दोनों विरोधी तत्वों के बीच सन्तुलन स्थापित करते हुए रिपोर्ट को तैयार करना एक बहुत बड़ी समस्या बन जाती है ।

(5) **अवधारणाओं की समस्या (Problem of Concepts) -** तथ्य युक्त रिपोर्ट प्रस्तुत करने की एक और समस्या अवधारणाओं से सम्बन्धित है । यदि वास्तविक रूप में देखा जाये तो समाजशास्त्रीय साहित्य में अवधारणाओं की अत्यधिक कमी है । जो कुछ भी हमें आज प्राप्त है वह वास्तव में अवधारणा नहीं बल्कि विभिन्न परिस्थितियों का वर्णन है । अवधारणाओं की सहायता से सम्पूर्ण परिस्थिति को कुछ ही शब्दों द्वारा अभिव्यक्त करना सम्भव होता है और इसमें सन्देह व अस्पष्टता का तत्व बहुत कम होता है; पर चूँकि इस प्रकार की अवधारणाओं का पर्याप्त विकास अब भी सामाजिक विज्ञानों में नहीं हो पाया है, इस कारण साधारण-से-साधारण परिस्थिति को समझने के लिए अनावश्यक विस्तृत विवरण प्रस्तुत करना पड़ता है जिसमें पर्याप्त समय व परिश्रम ऐसे ही नष्ट हो जाता है ।

(6) **वस्तुनिष्ठता की समस्या (Problem of Objectivity) -** रिपोर्ट को तैयार करने में यह भी एक उल्लेखनीय समस्या है । चूँकि अनुसंधानकर्ता उसी बृहत्तर समाज की एक इकाई है जिसके कि किसी एक अंग के पक्ष का वह अध्ययन कर रहा है इसीलिए वह अध्ययन-विषय के सम्बन्ध में जो कुछ भी कहता है उसमें उसका अपना विचार, आदर्श, मूल्य और मनोवृति किसी-न-किसी प्रकार से अपना कुछ-न-कुछ स्थान कर ही लेते हैं । वे घटनाओं की व्याख्या व विवरण वास्तविक तथ्यों के आधार पर पूर्णतया न देकर उसमें अपने विचारों तथा भावनाओं का भी रंग चढ़ा लेते हैं । इससे घटनाओं की वास्तविकता विकृत हो जाती है । इसके अतिरिक्त शोधकर्त्ता का अपना पक्षपात तथा मिथ्या-झुकाव कुछ-न-कुछ उसके द्वारा प्रस्तुत उसके व्याख्या तथा विवरण को प्रभावित करता ही है और इन दोनों, से पूर्णतया छुटकारा पाना बहुत ही कम शोधकर्त्ताओं के लिए सम्भव होता है । इन सब तत्वों के रिपोर्ट में प्रवेश कर जाने से वस्तुनिष्ठता की समस्या स्वत: ही उत्पन्न हो जाती है ।

(7) **सत्य को प्रगट करने की समस्या (Problem of expressing the Truth)** -कभी-कभी सर्वेक्षण ऐसे विषयों के सम्बन्ध में होता है जिनके संबंध में यदि सच सच सब कुछ कहा जाए तो वह किसी एक पक्ष के हित के या सम्मान के विपरीत होता है । ऐसी दशा में रिपोर्ट में सत्य को प्रगट करने की समस्या अपने-आप उत्पन्न हो जाती है; उदाहरणार्थ, यदि सरकारी उच्च अधिकारियों में व्याप्त घूसखोरी व भ्रष्टाचार के विषय में खोज की जाए तो वास्तविक तथ्य या स्थिति मालूम हो जाने पर भी शोधकर्त्ता अपनी रिपोर्ट में सब कुछ सच-सच कहने से घबड़ाता है क्योंकि उसे इन उच्च अधिकारियों द्वारा बदला लिए जाने का डर या सरकारी कार्यवाही का भय कुछ-न-कुछ रहता ही है । अत: वास्तविकता को कुछ तोड़-मरोड़ कर ही वह अपनी रिपोर्ट में प्रस्तुत करता है । कभी-कभी तो स्वयं सरकार द्वारा कराए गए शोध या सर्वेक्षण की रिपोर्ट को इसलिए गुम कर दिया जाता है कि यदि रिपोर्ट में वर्णित तथ्य सत्य प्रगट

हो गया तो सरकार की बदनामी होगी । इसी प्रकार अनेक स्थितियों में सत्य को वास्तविक रूप में प्रगट करने की समस्या किसी-न-किसी रूप में बनी रहती है ।

19.4 रिपोर्ट में सम्मिलित करने वाली मदें (Content of Report)

रिपोर्ट की अन्तर्वस्तु से तात्पर्य उन विषयों से है जिनका विवरण व व्याख्या हमें एक सन्तुलित रिपोर्ट में देखने को मिलती है । यद्‌यपि इस अन्तर्वस्तु के सम्बन्ध में सभी विद्‌वान एकमत नहीं हैं, फिर भी कुछ ऐसे सामान्य विषयों का उल्लेख यहाँ किया जा सकता है जिन्हें कि साधारणतया सभी रिपोर्टो में अपना स्थान मिल ही जाता है । वे विषय इस प्रकार हैं -

(1) **प्रस्तावना (Introduction) -** सभी रिपोर्टों में सर्वप्रथम प्रस्तावना लिखी जाती है । प्रस्तावना वास्तव में पाठकों का विषय से परिचय करवाती है और इसमें सम्बन्धित शोध या सर्वेक्षण के विचार का उदय, योजना, महत्व तथा संगठन आदि विषयों पर संक्षिप्त प्रकाश डाला जाता है । इसी प्रकार सर्वेक्षण करने वाली संस्था या विभाग आदि का परिचय, सर्वेक्षण का संचालन करने वाले व्यक्ति या संगठन का परिचय कार्यकर्त्ताओं के चुनाव व प्रशिक्षण का विवरण, सर्वेक्षण में निरीक्षण तथा प्राप्त तथ्यों व सूचनाओं की शुद्धता, वैधता व विश्वसनीयता का आधार यदि प्रारम्भिक परिचयात्मक सूचनाओं का उल्लेख भी प्रस्तावना में किया जाता है । प्रस्तावना में ही सर्वेक्षण के समय तथा व्यय आदि का भी विवरण प्रस्तुत किया जाता है । सर्वेक्षण या शोध-कार्य के दौरान उत्पन्न प्रमुख कठिनाइयों का उल्लेख तथा उनका निराकरण करने के लिए प्रयुक्त तरीकों का संक्षिप्त वर्णन भी प्रस्तावना में किया जाता है । रिपोर्ट में किस क्रम से किस विषय के सम्बन्ध में विवरण प्रस्तुत किया गया है उसका भी संकेत प्रस्तावना में किया जाता है । अन्त में जिन व्यक्तियों, संस्थाओं व समितियों तथा सरकारी विभागों से सर्वेक्षण-कार्य में किसी भी प्रकार की सहायता या परामर्श प्राप्त हुआ है, उनको धन्यवाद ज्ञापन करने के कर्तव्य का भी इसी प्रस्तावना के माध्यम से पालन किया हुआ है ।

(2) **समस्या का विवरण (Description of the Problem) -**सबसे पहले रिपोर्ट में सर्वेक्षण या शोध के विषय या समस्या का परिचय दिया जाता है । समस्या की पृष्ठ-भूमि तथा उसके विषय में अनुसन्धान का वर्णन करना रिपोर्ट के आरम्भिक अंश का सर्वप्रथम भाग है । समस्या का चुनाव किन आधारों पर किया गया है और तात्कालिक परिस्थितियों में समस्या के अध्ययन में कौन-कौन से सैद्धान्तिक तथा व्यावहारिक लाभ की आशा है इसके विषय में भी रिपोर्ट के इस अंश में कह दिया जाता है । अध्ययन-विषय से सम्बन्धित अन्य कोई अध्ययन हुआ है अथवा नहीं और अगर हुआ है तो प्रस्तुत अध्ययन का उससे क्या सम्बन्ध है, आदि बातों का भी स्पष्टीकरण कर दिया जाता है । इन सबका उद्देश्य अध्ययन-विषय या समस्या की वास्तविक प्रकृति और सीमाओं को स्पष्ट करना होता है ।

(3) **सर्वेक्षण या शोध का उद्देश्य (Purpose of study) -** सर्वेक्षण या शोध का उद्देश्य या तो ज्ञान का विस्तार करना अथवा किसी व्यावहारिक लाभ को प्राप्त करना होता है । इसीलिए प्रत्येक रिपोर्ट में इस बात का उल्लेख किया जाता है कि सर्वेक्षण का उद्देश्य नवीन ज्ञान को प्राप्त करना अथवा किसी विघमान सिद्धान्त की परीक्षा करना या उस पर नया प्रकाश डालना अथवा कोई व्यावहारिक लाभ प्राप्त करना है । इस सम्बन्ध में यह स्मरणीय है कि यदि सर्वेक्षण या शोध-कार्य किसी व्यापारिक संस्था या सरकार के निर्देशानुसार आयोजित किया गया है तो अनुसंधानकर्त्ता को उस संस्था या सरकार द्वारा सर्वेक्षण का उद्देश्य पहले ही बता दिया जाता है और उसी के अनुसार सर्वेक्षण की सीमाओं को भी निर्धारित किया जाता है । पर ऐसी स्थिति में सर्वेक्षण का उद्देश्य कोई-न-कोई व्यावहारिक लाभ प्राप्त करना होता है । कुछ भी हो, सर्वेक्षण के उद्देश्यों का स्पष्ट रूप में आरम्भ में ही. रिपोर्ट में उल्लेख कर दिया जाता है । (39०)

(4) **अध्ययन क्षेत्र (Scope or Area Study)-** समस्या तथा उद्देश्य का स्पष्टीकरण करने के पश्चात् अध्ययन-क्षेत्र के विषय में भी रिपोर्ट में उल्लेख किया जाता है । इसके अन्तर्गत भौगोलिक प्रदेश, सामाजिक वर्ग अथवा निश्चित समुदाय का परिचय प्रस्तुत किया जाता है । यहीं पर इस बात का उल्लेख किया जाता है कि उस समुदाय, समूह या वर्ग के जीवन के किन पक्षों, अथवा समस्या के किन पक्षों का अध्ययन किया गया है । रिपोर्ट के इसी अंश में उस समुदाय, समूह या वर्ग की प्राकृतिक, सामाजिक, जनसंख्यात्मक तथा आर्थिक विशेषताओं का परिचय देते हुए इस बात का स्पष्टीकरण किया जाता है कि अध्ययन के क्षेत्र का निर्धारण उसी रूप में क्यों किया गया है । अर्थात अध्ययन-क्षेत्र को एक निश्चित रूप में सीमित करने से किन सुविधाओं या लाभों की आशा की जाती है, इस बात का स्पष्टीकरण भी कर दिया जाता है ।

(5) **प्रयुक्त अध्ययन पद्धतियाँ (Methods Employed) -** सर्वेक्षण अथवा शोध के सभी निष्कर्ष वास्तविक तथ्यों या सूचनाओं पर आधारित होते हैं । इन तथ्यों तथा सूचनाओं को एकत्रित किया जाना है । रिपोर्ट में इस बात का भी उल्लेख रहता है कि अध्ययन-विषयों से सम्बन्धित वास्तविक तथ्यों तथा सूचनाओं को किन पद्धतियों या प्रविधियों की सहायता से एकत्रित किया गया है । रिपोर्ट लिखने वाला इस बात का भी उल्लेख कर सकता है कि अध्ययन में विषय या समस्या को किस दृष्टिकोण से देखा गया है और उस दृष्टिकोण से अमुक-अमुक पद्धति व प्रविधियाँ क्यों सबसे उपयुक्त समझी गईं । साथ ही प्राथमिक तथा द्वैतीयक तथ्यों के स्रोतों का संक्षिप्त परिचय देते हुए रिपोर्ट में इस बात का भी उल्लेख किया जाता है कि उन स्रोतों से सूचना प्राप्त करने के लिए किन प्रविधियों को काम में लिया गया है । यदि प्रश्नावली अथवा अनुसूची का उपयोग किया गया है तो. उसकी मोटी-मोटी बातें रिपोर्ट में उल्लेखित कर दी जाती हैं । यदि साक्षात्कार-प्रविधि को अपनाया गया है तो किन सिद्धान्तों को ध्यान में रखते हुए साक्षात्कार किया गया है और साक्षात्कार-निर्देशिका (Interview Guide)का उपयोग

किया गया है. अथवा नहीं, इन सब बातों का उल्लेख भी रिपोर्ट में कर दिया जाता है । उसी प्रकार यदि मापक पैमानों का उपयोग किया गया है तो उसका वर्णन भी कर दिया जाता है ।

(6) **निदर्शन-चुनाव का तरीका (Method of Selecting Samples) -** अनुसंधानकर्त्ता अपनी रिपोर्ट में उस प्रणाली या विधि का भी उल्लेख करता है जिसके द्वारा निदर्शनों का चुनाव प्रस्तुत अध्ययन में किया गया हो । साथ ही, इस बात का भी स्पष्टीकरण किया जाता है कि विषय की प्रकृति को देखते हुए उसी प्रणाली को उपयुक्त क्यों समझा गया । अर्थात् जिस निदर्शन-प्रणाली को अपनाया गया है उसे अपनाने के कारणों का भी संक्षेप में उल्लेख रिपोर्ट में किया जाता है । इसी सन्दर्भ में यह भी लिखा जाता है कि जितनी संख्या में निदर्शनों को चुना गया है वह संख्या सम्पूर्ण समुदाय का उचित प्रतिनिधित्व करने के लिए पर्याप्त है । पर यदि निदर्शनों का चुनाव न करके क्षेत्र की सम्पूर्ण जनसंख्या का जनगणना-पद्धति (census method) द्वारा अध्ययन किया गया है तो उसका भी उल्लेख स्पष्ट रूप से रिपोर्ट में कर दिया जाता है ।

(7) **सर्वेक्षण का संगठन (Organization of Survey) -** सर्वेक्षण-कार्य को किस ढंग से व्यवस्थित और संगठित किया गया है, इस बात का विवरण कुछ रिपोर्टों में प्रस्तावना में न देकर अलग तौर पर दिया जाता है । यदि अध्ययन-स्थल निरीक्षण पद्धति अपनाई गई है तो स्थल अथवा घटना का चुनाव कैसे किया गया, कार्यकर्त्ताओं को प्रशिक्षित करने के पश्चात् उनमें श्रम-विभाजन किस ढंग से किया गया, उनके कार्यो का निरीक्षण करने की क्या व्यवस्था की गई, प्रश्नावलियों को किस प्रकार एकत्रित किया गया, रोज कितने घंटे काम किया गया, एकत्रित सूचनाओं की शुद्धता की जाँच किस प्रकार की गई, तथ्यों के सम्पादन व संकेतीकरण (codification) की क्या व्यवस्था थी, आदि बातों का स्पष्टीकरण रिपोर्ट के इस अंश में किया जाता है । इसका उद्देश्य सर्वेक्षण के संगठन के बारे में लोगों को अनुमान लगाने के मामले में सहायता करना होता है । (391)

(8) **विश्लेषण अथवा व्याख्या (Analysis and Interpretations) -** उपरोक्त सभी बातों का उल्लेख करने के पश्चात् रिपोर्ट सबसे महत्वपूर्ण स्तर पर आ पहुँचती है । इस स्तर पर एकत्रित सूचनाओं तथा तथ्यों को एक व्यवस्थित ढंग से प्रस्तुत किया जाता है । वर्गीकरण व सारणीयन का वास्तविक लाभ रिपोर्ट के इस अंश को तैयार करने में प्राप्त होता है क्योंकि यहीं पर प्राप्त सूचनाओं, तथ्यों तथा आँकडो को व्यवस्थित करके एक आकर्षक एवं सार्थक स्वरूप देकर सारणियों, चार्टों, चित्रों, रेखाचित्रों आदि के माध्यम से प्रगट किया जाता है । पर तथ्यों को व्यवस्थित ढंग से केवल प्रस्तुत ही नहीं किया जाता अपितु उनका आवश्यक विश्लेषण व वर्णनात्मक व्याख्या भी दी जाती है । तथ्यों के विश्लेषण में मुख्यत: कार्य-कारण सम्बन्धों को स्पष्ट किया जाता है, जबकि वर्णनात्मक व्याख्या में उसके परिणामों व निष्कर्षो को प्रस्तुत किया जाता है ।

अध्ययन के परिणामों या निष्कर्षो को सदैव तथ्ययुक्त रूप में तार्किक ढंग से प्रस्तुत किया जाता है और यह भी बताया जाता है कि उन निष्कर्षो या परिणामों का क्या आधार है । रिपोर्ट को और अधिक सजीव, बोधगम्य तथा सांख्यिकीय विवेचना के उपयुक्त बनाने के लिए आवश्यकतानुसार फोटो, रेखाचित्र आदि भी संलग्न कर दिये जातें हैं । यदि द्वैतीयक सामग्री का उपयोग किया गया है तो पृष्ठतल-टिपणियों (footnotes) की सहायता से उनके स्रोतों का संक्षिप्त परिचय दे दिया जाता है ।

(9) **तथ्यों की उल्लेखनीय विशेषता (Highlights of Data) -** रिपोर्ट को अधिक रुचिकर तथा बोधगम्य बनाने के लिए विश्लेषण तथा व्याख्या के पश्चात् एक पृथक अध्याय में सर्वेक्षण या शोध में एकत्रित तथ्यो की उल्लेखनीय विशेषताओं तथा उनके आधार पर प्राप्त प्रमुख परिणामों व निष्कर्षो को एक क्रम से प्रस्तुत किया जाता है ताकि एक ही स्थान पर अध्ययन के परिणामों का निष्कर्ष पाठकों के लिए उपलब्ध हो । दूसरे शब्दों में रिपोर्ट के इस अध्याय में, मुख्य निष्कर्षो के सार का उल्लेख होता है जो अनुसन्धान-परिणामों को संक्षेप में स्पष्ट कर देता है ।

(10) **सुझाव (Suggestions) -** यदि अनुसंधान केवल ज्ञान-प्राप्ति के उद्देश्य से नहीं किया गया है और किसी सामाजिक समस्या अथवा व्यावहारिक जीवन से सम्बन्धित है तो रिपोर्ट के अन्त में रचनात्मक सुझाव अवश्य ही दिए जाते हैं । इन सुझावों में एक समस्या को किस प्रकार व्यावहारिक ढंग से हल किया जाए, अथवा एक अवस्था-विशेष को किस रचनात्मक रूप में उन्नत किया या सुधारा जाए, इनके सम्बन्ध में सुझाव अवश्य दिए जाते हैं । किसी संख्या या सरकारी विभाग द्वारा किसी रचनात्मक या सुधारात्मक कार्य के लिये यदि सर्वेक्षण कराया गया है तब तो सुझावों की रिपोर्ट में होना नितान्त आवश्यक हो जाता है । अनुसंधानकर्ता अपने सुझावों को प्रस्तुत करते हुए धरती पर स्वर्गलोक के निर्माण का सपना नहीं देखता अर्थात् इस प्रकार के सुझावों को प्रस्तुत नहीं करता जो कि उपलब्ध साधनों व व्यावहारिकता से परे हों । उसका सुझाव रचनात्मक व व्यावहारिक इस अर्थ में होता है कि वह, वर्तमान दशाओं में देश या एक संस्था-विशेष के लिए उपलब्ध साधनों के अन्तर्गत ही किस प्रकार अधिकतम सुधार सम्भव है, इस बात की ओर स्पष्ट संकेत करता है । उदाहरणार्थ, यदि वह यह सुझाव देता है कि राज्य-कर्मचारियों का परिस्थितियों में एक राज्य-सरकार इस अतिरिक्त व्यय-भार को उठाने में समर्थ है भी या नहीं । यदि नहीं तो किस सीमा तक मँहगाई-भत्ता बढ़ाना वास्तव में व्यवहारिक होगा और कर्मचारियों के भी हितों की अधिकतम रक्षा सम्भव होगी । संक्षेप में हम कह सकते हैं कि सुझाव उपयोगी और व्यावहारिक लाभ की दृष्टि से उपयुक्त हो और साथ ही तर्क पर आधारित व रचनात्मक हो इस बात का अधिक-से-अधिक ध्यान अनुसंधानकर्ता रखता है और उसे रखना भी चाहिए । ये सुझाव दो प्रकार के हो सकते हैं - एक तो वे सुझाव जो अध्ययन के दौरान में स्वयं सूचनादाताओं द्वारा दिए जाते हैं । ये सुझाव अत्यन्त महत्वपूर्ण होते हैं, क्योंकि एक विशेष क्षेत्र या समुदाय में काफी समय से

रहने वाले लोग (सूचनादाता) सैद्धान्तिक ज्ञान न रखते हुए भी भुक्तभोगी होने के कारण समस्या को व्यावहारिक दृष्टि से समझते हैं और इसीलिए अपने अनुभव के आधार पर इस योग्य होते हैं कि अवस्था को उन्नत करने या सुधारने के लिए उपयोगी सुझाव दे सकें । इसीलिए ऐसे सुझावों को रिपोर्ट में अवश्य स्थान दिया जाता है । दूसरे वे सुझाव होते हैं जो कि स्वयं अनुसंधानकर्ता अपने अध्ययन के आधार पर प्रस्तुत करता है । इस प्रकार के सुझावों की उपयोगिता सर्वेक्षणकर्त्ता के ज्ञान, अनुभव, सूझ-बूझ तथा दूरदृष्टि पर निर्भर करती है।

(11) **संलग्न-पत्र (Appendices)** - सुझावों के साथ ही मूल रिपोर्ट की इति हो जाती है । किन्तु कुछ ऐसे पत्र, प्रलेख, तालिका, चार्ट, विवरण आदि होते हैं जो कि अध्ययन की प्रामाणिकता को सिद्ध करने में सहायक होते हैं, और इसीलिए उन्हें पाठकों के समक्ष रखना उचित समझा जाता है । ऐसे पत्रकों को रिपोर्ट के अन्त में लगा दिया जाता है । इनमें क्षेत्रीय मानचित्र, पुस्तक सूची (Bibliography), अनुसूची, प्रश्नावली आदि अध्ययन-उपकरणों की एक-एक प्रति (copy), कुछ महत्वपूर्ण सारणी आदि को सम्मिलित किया जाता है ।

19.5 रिपोर्ट की विशेषताएँ (Characteristic of a Report)

एक अच्छी रिपोर्ट की विशेषताओं के सम्बन्ध मे विद्वानों में मतभेद हो सकता है क्योंकि 'अच्छे-बुरे की अवधारणा सबके लिए समान नहीं होती । फिर भी सर्वेक्षण की प्रक्रिया और रिपोर्ट को तैयार करना एक टेक्निकल काम होने के कारण एक अच्छी रिपोर्ट की कुछ आधारभूत विशेषताओं का उल्लेख किया जा सकता है । वे विशेषताएँ इस प्रकार हैं -

(1) एक अच्छी रिपोर्ट का ऊपरी आवरण स्वच्छ तथा आकर्षक होता है । सफेद रंग के अच्छे किस्म के कागज पर स्पष्ट तथा सुन्दर ढंग के टाइप से रिपोर्ट को छपवाया जाता है । साथ ही, उसे अधिक आकर्षक बनाने के लिए आकर्षक शीर्षकों, चित्रों, फोटो आदि का प्रयोग भी आवश्यकतानुसार किया जाता है ।

(2) रिपोर्ट की भाषा अत्यधिक सन्तुलित होती है । पारिभाषिक शब्दावली का प्रयोग आवश्यकतानुसार अवश्य ही करना पड़ता है । पर इस सम्बन्ध में यह सुझाव है कि विषय का स्पष्टीकरण लेखक का उद्देश्य होता है और इसकी सिद्धि के लिए पारिभाषिक शब्दावली-सम्बन्धी सैद्धान्तिक मतभेदों के प्रति लेखक किसी भी प्रकार के विशिष्ट आग्रह अथवा दुराग्रह को नहीं अपनाता । साथ ही, इस बात का भी ध्यान रखा जाता है कि पारिभाषिक शब्दावली के अत्यधिक प्रयोग से रिपोर्ट कहीं इतनी बोझल और क्लिष्ट न हो जाए कि उसे समझने के लिए विशेषज्ञों की सहायता लेनी पड़े' दूसरी ओर, रिपोर्ट की भाषा में आलंकारिक तथा साहित्यिक शैली भी का प्रयोग अत्यधिक नहीं किया जावे जिससे कि तथ्यों की वास्तविकता पर विपरीत प्रभाव पड़े या तथ्यों को बढ़ा चढ़ाकर कहने से सत्यता प्रगट न हो सके । अत: भाषा तथा शैली के सौन्दर्य की

ओर झुककर रिपोर्ट को अतिशयोक्तिपूर्ण तथा अस्त्राभाविक बना देने की प्रवृत्ति से दूर रहकर ही सन्तुलित भाषा में रिपोर्ट को तैयार किया जाता है ।

(3) एक अच्छी रिपोर्ट में एक ही प्रकार के तथ्यों को बार-बार दोहराया नहीं जाता क्योंकि ऐसा करने से रिपोर्ट को पढ़ते समय पाठक ऊब जाते हैं । तथ्यों में तार्किक क्रम अवश्य रहता है अर्थात् स्वतन्त्र रूप से समझे जाने वाले तथ्य पहले आ जाते हैं और वे तथ्य बाद में प्रदर्शित किए जाते हैं जिनको समझने के लिए दूसरे तथ्यों की आवश्यकता पड़ती है ।

(4) एक अच्छी रिपोर्ट में तथ्यों का विश्लेषण व व्याख्या वैज्ञानिक तौर पर और सुस्पष्ट रूप में होती है ताकि रिपोर्ट को पढ़कर ही लोगों को यह विश्वास हो जाए कि रिपोर्ट में जो कुछ कहा गया है वह काल्पनिक नहीं है अपितु तथ्ययुक्त तथा प्रयोग-सिद्ध है । इसके लिए सूचनाओं के स्रोतों का उल्लेख रिपोर्ट में पृष्ठतल-टिप्पणियों आदि (footnotes and reference) के रूप में प्रत्येक अध्ययन में दे दिया जाता है ।

(5) एक अच्छी रिपोर्ट में जो भी निष्कर्ष निकाले जाते हैं वे सभी प्रामाणिक, विश्वसनीय तथा वैज्ञानिक विकास के उपयुक्त होते हैं । इसका तात्पर्य यही है कि रिपोर्ट में प्रत्येक निष्कर्ष को तथ्ययुक्त रूप में प्रमाण-सहित प्रस्तुत किया जाता है अर्थात् उन कारणों का भी उल्लेख किया जाता है जिन पर कि वह निष्कर्ष आधारित है । (393)

(6) एक अच्छी रिपोर्ट में व्यावहारिकता का तत्व भी स्पष्ट होता है । अर्थात् उच्च स्तरीय रिपोर्ट इस प्रकार की होती है कि उसे पढ़कर अधिक-से-अधिक लोग लाभ उठा सके । इस प्रकार की रिपोर्ट से केवल ज्ञान की ही वृद्धि नहीं अपितु कुछ व्यावहारिक लाभ भी होता है । अच्छी रिपोर्ट सामाजिक प्रगति व समाज-सुधार से सम्बन्धित भविष्य-योजनाओं के निर्माण में अपना महत्वपूर्ण योगदान करती है ।

(7) एक अच्छी रिपोर्ट में अध्ययन-पद्धति व प्रविधियों, अध्ययन क्षेत्र, निदर्शन आदि के सम्बन्ध में स्पष्ट तथा विस्तृत विवरण होता है और साथ ही सूचना के सभी स्रोतों का उल्लेख किया जाता है । ऐसा करने का उद्देश्य यह होता है कि यदि किसी भी व्यक्ति को अध्ययन के निष्कर्षों के सम्बन्ध में सन्देह हो तो वह रिपोर्ट में उल्लेखित प्रविधियों आदि की सहायता से उन निष्कर्षों की वैधता की जाँच कर सकता है ।

(8) एक अच्छी रिपोर्ट में अध्ययन में आई कठिनाइयों तथा सर्वेक्षण की सीमाओं (limitation) का भी स्पष्ट रूप से उल्लेख होता है । दूसरे शब्दों में, कमियों को छिपाकर अध्ययन के पूर्णतया यथार्थ होने का दावा नहीं किया जाता है । ऐसा न करने का उद्देश्य यह है कि अध्ययन की कठिनाइयों व कमियों को ईमानदारी से स्वीकार करने पर भविष्य के अध्ययनों में अन्य सर्वेक्षणकर्त्ताओं द्वारा पहले से ही उनके सम्बन्ध में सचेत रहने तथा उन्हें दूर करने के लिए आवश्यक कदम उठाने का अवसर मिलता है ।

(9) एक उच्चस्तरीय रिपोर्ट में महत्वपूर्ण अवधारणाओं (concept) तथा सिद्धान्त (theory) को विकसित करने का प्रयत्न किया जाता है । और साथ ही, अन्य अनेक ऐसी

समस्याओं, विषयों तथा प्रश्नों की ओर संकेत किया जाता है जिनके विषय में और आगे शोध या सर्वेक्षण-कार्य करने की आवश्यकता है । रिपोर्ट प्रस्तुत करने वाले प्रत्येक अनुसंधानकर्ता द्वारा इस प्रकार का संकेत अत्यन्त महत्वपूर्ण होता है ।

19.6 रिपोर्ट का महत्व (Important of Report)

रिपोर्ट सम्पूर्ण अध्ययन की सार-कथा होती है और इसीलिए इसके महत्व को सभी विद्वान स्वीकार करते हैं । संक्षेप में हम भी उसका उल्लेख यहाँ कर सकते हैं -

(1) ज्ञान का प्रसार करने में शोध या सर्वेक्षण-रिपोर्ट सहायक सिद्ध होती है । रिपोर्ट में अध्ययन-विषय से सम्बन्धित प्राप्त ज्ञान का समावेश होता है और उस रिपोर्ट को पढ़कर दूसरे लोग भी ज्ञान प्राप्त कर सकते हैं । रिपोर्ट में केवल अध्ययन-विषय के सम्बन्ध में ही नहीं अपितु अन्य सम्बन्धित विषयों का भी संकेत रहता है जो कि ज्ञान के प्रसार में और भी सहायक होता है ।

(2) रिपोर्ट नए अध्ययनों के लिए आवश्यक प्राककल्पना का आधार बन सकती है क्योंकि सर्वेक्षण की रिपोर्ट का अध्ययन करने पर अनेक नए विचार उत्पन्न हो सकते हैं और साथ ही उन प्रश्नों या समस्याओं का भी आभास होता है जिनके सम्बन्ध में आगे शोध कार्य किया जा सकता है ।

(3) रिपोर्ट से एक विषय के सम्बन्ध में हुए प्राय: सभी अध्ययन-कार्यों का परिचय प्राप्त हो जाता है क्योंकि रिपोर्ट में पूर्व अध्ययनों का उल्लेख होता है ।

(4) रिपोर्ट में अनुसंधान में प्रयुक्त पद्धति व प्रविधियों का उल्लेख रहता है । इसके आधार पर भावी शोधकर्त्ताओं को अपने शोध-कार्य के लिए पद्धति व प्रविधियों को चुनने में मदद मिलती है और साथ ही नवीन अनुसंधान-प्रणालियों का आविष्कार भी सम्भव होता है' ।

(5) रिपोर्ट मेहनतकश जनता के लिए भी उपयोगी सिद्ध हो सकती है । सरकार या निजी संस्थाओं द्वारा कर्मचारियों के वेतन आदि में वृद्धि करने या उनके कार्य की दशाओं को सुधारने के लिये सर्वेक्षण करवाए जाते हैं और रिपोर्ट के आधार पर वेतन, महंगाई भत्ता आदि में वृद्धि कर दी जाती है । जनता से सम्बन्धित अनेक अवांछित अवस्थाओं के निराकरण के लिये भी रिपोर्ट में सुझाव दिए जाते हैं और उसी के अनुसार व्याधिकीय अवस्थाओं को सुधारने के लिये आवश्यक कदम उठाए जाते हैं ।

इस प्रकार एक शोध या सर्वेक्षण-रिपोर्ट शोध के प्रसार में सहायक होती है, नवीन विचारों को उभारती है, भावी शोध-कार्य का पथ प्रशस्त करती है, जन-जीवन से सम्बन्धित अनेक व्याधिकीय (pathological) समस्याओं के निराकरण के लिए रचनात्मक सुझाव प्रस्तुत करती है तथा योजना की सिद्धि व जनता की समृद्धि का आधार बन सकती है । अनुसंधानकर्त्ता के समस्त ज्ञान, लगन व परिश्रम का रिपोर्ट' ही एक सार्थक रूप होती है।

19.7 सारांश

शोधकर्ता द्वारा किये गये कार्य की सार्थकता तभी हो सकती है जब इन निष्कर्षों को समाज तक, सरकार तक, उद्योगपतियों के पास उचित रिपोर्ट के द्वारा जिसमें संकलित तथ्यों का विवरण, विश्लेषण व व्याख्या तथा निष्कर्षों व सुझावों को एक लिखित रूप में दिया जावे जिससे कि यह शोध कार्य वर्तमान व भावी पीढ़ी के लिए एक धरोहर बन सके।

19.8 शब्दावली

1. रिपोर्ट (Report): शोध के निष्कर्ष व सुझावों की व्याख्या ।

2. संलग्न पत्र (Appendices): कुछ ऐसे पत्र, प्रलेख, तालिका, चार्ट विवरण जो रिपोर्ट के अन्त में लगाये जाते हैं ।

19.9 अभ्यासार्थ प्रश्न

1. शोध कार्य की रिपोर्ट से क्या आशय है?

2. रिपोर्ट तैयार करने के क्या उद्देश्य होते हैं?

3. रिपोर्ट तैयार करते समय किन-किन बातों का ध्यान रखना चाहिए?

4. रिपोर्ट तैयार करते समय किस प्रकार की समस्याएँ उत्पन्न होती हैं?

5. एक अच्छी रिपोर्ट की विशेषताओं का उल्लेख कीजिए ।

6. एक सामान्य एवं विशिष्ट व्यक्ति के लिए रिपोर्ट का क्या महत्व है?

19.10 संदर्भ ग्रन्थ

1. शोध प्रणाली, प्रो. शर्मा, जैन, पारीक, रमेश बुक डिपो, जयपुर ।
2. Research Methodology, Techniques and Trends, V.V.Khanzode,Daryaganj, New Delhi.

इकाई-20 : ग्रन्थ सूची एवं सन्दर्भिका (Bibliography & Referencing)

इकाई की रूपरेखा

20.0 उद्देश्य

20.1 प्रस्तावना

20.2 सन्दर्भिका

20.3 ग्रन्थ सूची एवं सन्दर्भिका के लाभ

20.4 सन्दर्भिका वर्ग

20.5 अनुसूची का प्रारूप

20.6 प्रश्नावली

20.7 ग्रन्थ सूची एवं सन्दर्भिका का नमूना

20.8 सारांश

20.9 शब्दावली

20.10 स्वपरख प्रश्न

20.11 संदर्भ ग्रन्थ

20.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप ये समझ सकेंगे कि ग्रन्थ सूची से क्या आशय है? शोध कर्त्ता के शोध करने के पश्चात् शोध के साथ-साथ ग्रन्थ सूची एवं सन्दर्भिका को किस प्रकार दिखाना चाहिए । गा

20.1 प्रस्तावना

इसके अन्तर्गत शोध के कार्य में सभी प्रयुक्त की गई पुस्तकों को एक जगह संकलन करने की प्रक्रिया को ग्रन्थ सूची कहते हैं । इसमें सर्वप्रथम पुस्तक का नाम, पुस्तक के लेखक का नाम, प्रकाशक का नाम व पता तथा मुद्रित होने वाले वर्ष को दर्शाया जाता है। इसका नमूना आगे समझाया गया है ।

20.2 सन्दर्भिका

शोध कार्य में उपयोग में ली गई पुस्तक का नाम, लेखक का नाम, प्रकाशक का नाम, पता तथा छपने वाले वर्ष को दर्शाया जाता है । सन्दर्भ में यह आवश्यक नहीं है कि कोई पुस्तक ही हो, किसी भी रिपोर्ट, आर्टिकल, या समाचार पत्रों से ली गई सूचनाओं को भी सन्दर्भ के रूप में दे सकते हैं । लेकिन ली गई सूचनाओं की जानकारी सम्बन्धित जगह सन्दर्भ के में लेखक व प्रकाशक के नाम, पता एवं मुद्रित वर्ष के साथ सम्बन्धित पेज संख्या भी देनी चाहिए । कि निम्न उदाहरण में समझाया गया है ।

उदाहरण

शोध करते समय शोधकर्त्ता ने निम्न पैराग्राफ लिखा जिसमें कि 'एक सम्बन्धित पुस्तक से सन्दर्भ के रूप में लिया गया था । शोधकर्त्ता ने उस पुस्तक का नाम, लेखक का नाम संस्करण व पेज संख्या का उल्लेख किया जिसे निम्न उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है :-

यदि अन्तिम खातों को ठीक-ठीक तैयार करना है तो यह आवश्यक होगा कि उस अवधि के तमाम सौदे बनियों में दर्ज किये जायें । किसी व्यापार के वास्तविक लेन-देन तो वर्ष-पर्यन्त बहियों में उन तिथियों (396)पर लिखे जाते हैं, जिनके वे होते हैं, परन्तु अन्तिम खाते बनाने से पहले यह पता लगाना आवश्यक है कि अवधि से सम्बन्धित कोई ऐसे सौदे तो नहीं आये, जिनको या तो बहियों में बिल्कुल ही दर्ज नहीं किया गया है या जिनके सम्बन्ध में अपूर्ण कार्यवाही हुई है अथवा जिनको गलत लिखा गया है । व्यवहार में यह देखने में आया है कि ऐसे कई सौदे होते हैं । इनके सम्बन्ध में उचित कार्यवाही करनी चाहिए, तब ही अन्तिम खाते सही बन सकेंगे । इन व्यवहारों का बहियों में लिखना ही समायोजन कहलाता है । दूसरे शब्दों में समायोजन से यह अभिप्राय है कि उस सौदे का अभी लेखा नहीं किया गया है या अपूर्ण अथवा गलत लेखा किया गया है, सही-सही दर्ज किया जाय ।'

---

6. माध्यमिक बहिखाता जैन खण्डेलवाल, पारीक, 15वॉ संस्करण, दी स्टूडेन्ट बुक कं., चौड़ा रास्ता, जयपुर, 1980, पृ. स 178

उक्त सन्दर्भ नं. 6 नं. से यह आशय हुआ कि शोधकर्त्ता ने 5 अन्य किताबें पूर्व में सन्दर्भ के रूप में देख चुका है जिनका उल्लेख सम्बन्धित जगह कर चुका है । यहाँ पर उसने छठी किताब देखी है जिसका उसने उल्लेख किया है । यह सन्दर्भ पुस्तक के रूप में जाना जाएगा ।

20.3 ग्रन्थ सूची एवं सन्दर्भिका के लाभ

ग्रन्थ सूची को बनाने से किसी भी व्यक्ति को यह जानकारी मिल जाती है कि शोधकर्त्ता ने शोध के दौरान किन-किन किताबों का प्रयोग किया है । किन-किन सन्दर्भों को शोधकर्त्ता ने देखा है । यदि कोई भी व्यक्ति इन सन्दर्भों को देखना चाहे जो कि शोधकर्त्ता ने सम्बन्धित किताब या लेखों को प्रयोग किया है तो वह व्यक्ति उस किताब के सम्बन्धित पेज नम्बर पर जाकर देख सकता है तथा अपनी सन्तुष्टि के लिए मिलान भी कर सकता है ।

20.4 सन्दर्भिका वर्ग

प्रतिवेदन का यह प्रमुख विभाग है । इरा विभाग को निम्न तीन उपविभागों में विभाजित किया गया है -

(अ) ग्रन्थ सूची (Bibliography)

(ब) परिशिष्ट (Appendix)

(स) सूची-पत्र (Index)

(अ) ग्रन्थ सूची -

संशोधक ने जिन-जिन लिखित स्रोतों से तथ्य-सामग्री संशोधन के लिये संकलित की है उनका संक्षिप्त विवरण ग्रन्थ सूची में देता है । यह विवरण देते समय वह वर्णक्रम पद्धति का उपयोग करता है ।

ग्रन्थ सूची को भी निम्न विभागों में विभाजित किया गया है -

(i) ग्रन्थ और पुस्तकें

(ii) शोध पत्रिकाएँ

(iii) पत्र-पत्रिकाएँ

(iv) प्रतिवेदन

(v) दस्तावेज

(vi) अप्रकाशित स्रोत

(i). **ग्रन्थ और पुस्तकें -** जिन ग्रन्थों में से और पुस्तकों में से लिखित सामग्री का संशोधन में उपयोग हो रहा है उन सभी के लेखकों की अथवा सम्पादकों की अकार विल्लानुसार (alphabetical) सूची बनानी चाहिये । उसमें लेखकों अथवा सम्पादकों के नाम के सामने उनकी लिखी हुई पुस्तकों अथवा सम्पादित किये हुए गन्थों के शीर्षक तथा उनके सामने प्रकाशक का नाम, स्थान, वर्ष और आवृत्ति लिखना चाहिये । इस व्यवस्थित रूप में लिखने से स्वत: ही उदाहरण के रूप में दी हुई प्रस्तुत सारणी का आकृतिवन्द, ग्रन्थ और पुस्तकों का विवरण प्राप्त होगा ।

अनु. क्रमांक	**लेखक अथवा सम्पादक का नाम**	**ग्रन्थ अथवा पुस्तक का नाम**	**प्रकाशक का नाम और स्थान**	**प्रकाशन वर्ष और आवर्ती**
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

(ii). **शोध पत्रिका -** शोध पत्रिका शोध संस्थाओं के द्वारा अथवा विश्वविद्यालयों द्वारा प्रकाशित की जाती है और उसमें नये शोध के सन्दर्भ में और संशोधन के लिये उपयोग में आई हुई नयी पद्धति और प्रविधि के सन्दर्भ में सम्पूर्ण जानकारी दी रहती है । इसीलिए संशोधन विषय से सम्बन्धित जिन-जिन संशोधन-पत्रिकाओं का उपयोग शोधकर्ता ने अपने शोध में किया है उनका विवरण निम्नप्रकार से देना चाहिए -

अनु. क्रमांक	सम्पादक का नाम	संशोधन पत्रिका का शीर्षक	प्रकाशक अंक	वर्ष
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

(iii). **नियतकालिक रत पत्र-पत्रिकायें (Periodical)** - शोध पत्रिकाओं का उपयोग करते समय अधिक सावधानी रखनी आवश्यक है क्योंकि प्रत्येक पत्रिका विश्वसनीय और प्रामाणिक नहीं होती अत: संशोधक का प्रामाणिक और विश्वसनीय पत्रिकाओं का ही उपयोग करना चाहिए । उदाहरण - भारत में 'इण्डियन एक्सप्रेस-, टाईम्स ऑफ इण्डिया', 'दि हिन्दू और 'अमृत बाजार-पत्रिका ये दैनिक समाचार पत्र अन्तर्राष्ट्रीय स्तर के माने गये हैं । इसलिये इनसे प्राप्त जानकारी विश्वसनीय रहती है । पत्र-पत्रिकाओं को लिखते समय उनकी प्रकाशन अवधि को आधार मानकर वर्गीकृत कर लिखना चाहिए । अर्थात प्रथम दैनिक, साप्ताहिक, मासिक, त्रैमासिक एवं वार्षिक अंक आदि ।

सारणी

अनु. क्रमांक	(नियतकालिक) पत्र-पत्रिकाएँ	सम्पादक	प्रकाशक	तारीख-माह-वर्ष और अंक
1				
2				
3				
4				
5				

6 7 8 9 10				

(iv). **रिपोर्ट्स -** शासकीय, अशासकीय अथवा संशोधन संस्थाएँ समय-समय पर रिपोर्ट्स प्रकाशित करती हैं । प्रतिवेदन / रिपोर्ट्स में दी गयी जानकारी सांख्यिकीय, विश्वसनीय और प्रामाणिक रहती है इसलिए इसका वैसे का वैसा उद्धरण शोध में दे सकते हैं । प्रतिवेदन के सन्दर्भ में विवरण इस प्रकार देना चाहिए ।

अनु. क्रमांक	प्रतिवेदन का शीर्षक	लेखक अथवा प्रकाशक	प्रकाशन संस्था	तारीख-माह-वर्ष
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10				

(v). **दस्तावेज -** ऐसे शासकीय ओर अशासकीय दस्तावेज जिनका उपयोग शोधकर्ता ने अपने शोध में किया गया है उनको इस प्रकार प्रस्तुत करना चाहिए -

अनु क्रमांक	दस्तावेज़ का शीर्षक अथवा क्रमांक	संस्था	तारीख-माह-वर्ष
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.			

(vi). **अप्रकाशित स्रोत -** जिन-जिन अप्रकाशित स्रोतों में से शोध के लिए जानकारी प्राप्त की गयी है उन स्रोतों का जिनका विवरण दे सकें उतना देना चाहिए। यदि सम्भव हो तो पर्याप्त विवरण सारणी में देना चाहिए ।

(ब) परिशिष्ट (Appendix)

जिस लिखित सामग्री का उपयोग उसी रूप में शोध मे किया गया है उन सभी की सत्य प्रतिलिपियों का विवरण परिशिष्ट में अकार विल्हा पद्धति से देने के बाद उन सत्य प्रतिलिपियों को क्रमवार संलग्न करना चाहिये ।

(स) सूची-पत्र

सूची-पत्र विषयानुसार या लेखकानुसार बनाना पड़ता है । विषयानुसार बनाये गये सूची-पत्र में शोध प्रतिवेदन में आयी महत्वपूर्ण संकल्पना, संज्ञा, शब्द और घटना कौन-कौन से पन्ने (पेज) पर है इसकी जानकारी दी जाती है । इसमें संकल्पना, संज्ञा, शब्द और घटनाओं को वर्णाक्षरानुसार क्रमबद्ध किया जाता है।लेखकानुसार बनाये गये सूची-पत्र में लेखकों को वर्णाक्षरानुसार क्रमबद्ध करके उनका उल्लेख किस पन्ने (पेज) पर किया गया है । इस सन्दर्भ में जानकारी दी जाती है ।

(द) तलटिप (Foot-Notes)

तलटिप पन्ने के नीचे अथवा प्रकरण के अन्त में दी जाती है । प्रत्येक पेज पर तलटिप देते समय उस पेज की पहली तलटिप जहाँ वाक्य समाप्त होता है वहाँ पर एक अंक लिखकर सूचित की जाती है और उसके बाद आने वाली तलटिपों को अनुक्रमानुसार क्रमबद्ध किया जाता है ।

एक ही पेज पर एक ही पुतकर में से दो अथवा अधिक उदाहरण देने हों तो प्रथम उदाहरण के सन्दर्भ में विवरण देकर बाद में आने वाले उदाहरणों के लिये 'इड का उपयोग करना चाहिये । इबिड (Ibid) का अर्थ होता है "उपरोक्त के अनुसार । " यदि एक ही पुस्तक से उदाहरणों का फिर से उपयोग करना हो तो बाद के पन्ने पर उदाहरण के लिए 'ऑप-सिट' (Op.cit) का प्रयोग करना चाहिये । 'ऑप-सिट' का लेटिन शब्द का अर्थ होता है .'पीछे आ चुका है' । तलटिप उदाहरण- 1. जैन, खण्डेलवाल, पारीक, पृष्ठ क्र. 167

20.5 अनुसूची का प्रारूप

शोधकर्ता द्वारा प्रयोग में ली गई प्रश्नावली व अनुसूची को भी ग्रन्थ सूची के अन्त में दिखाना चाहिये । उदाहरणार्थ यहाँ प्रस्तुत किया जा रहा है -

अनुसूची का प्रारूप (Form of A Schedule)

एक ग्रामीण क्षेत्र में हरिजनों की आर्थिक व सामाजिक समस्याओं के सम्बन्ध में अनुसूची का प्रारूप निम्न प्रकार का हो सकता है

ग्रामीण क्षेत्र में हरिजनों की आर्थिक-सामाजिक समस्याएँ

1. उत्तरदाता का नाम व पता ....

2. जाति ....

3. आयु ....

4. पेशा ....

5. शिक्षा ....

6. गाँव का नाम ....

7. पिता का व्यवसाय ....

8. परिवार का स्वरूप : संयुक्त / एकाकी / मिश्रित

9. वैवाहिक स्थिति : विवाहित /अविवाहित /विधुर

10. परिवार के अन्य सदस्यों की संख्या :

11. क्या आप अपने बच्चों को स्कूल भेजना अच्छा समझते हैं? हाँ/नहीं । यदि हाँ तो आपके परिवार में 4 से 15 वर्ष तक की आयु के कितने बच्चे स्कूल में शिक्षा ग्रहण करने के लिए जाते हैं?

12. यदि आप बच्चों को स्कूल भेजना अच्छा नहीं समझते तो इसका क्या कारण है?

13. परिवार में स्त्रियों की स्थिति कैसी है? पूर्णतया पुरुषों के अधीन/पुरूषों के समान /पुरूषों से अधिक स्वतन्त्र /पूर्णतया स्वेच्छाचारी ।

14. आरक्षण के तहत आपके परिवार में विभिन्न सदस्यों को निम्नांकित में से कौन-कौन से लाभ प्राप्त हु ए?

    सरकारी नौकर /बच्चों को निःशुल्क शिक्षा / शिक्षा के लिए छात्रवृत्तिा किसी प्रतियोगी परीक्षा मे चयन किसी चुनाव में निर्वाचन ।

15. निम्नांकित पदाधिकारियों का आपकी बस्ती तथा आपके समुदाय. के प्रति व्यवहार कैसा रहता है?

    (क) हरिजन कल्याण अधिकारी - सहयोग पूर्ण 'सामान्य /उदासीन

    (ख) खण्ड विकास अधिकारी

    (ग) पटवारी

    (घ) ग्राम सेवक

    (ङ) स्थानीय नेता

    (च) निर्वाचित जनप्रतिनिधि

16. क्या आप पर कुछ ऋण है हाँ / नहीं

    यदि हाँ तो यह ऋण आपको कहाँ से प्राप्त हु आ? महाजन से / रिश्तेदारों से / किसी सरकारी संस्था से / बैंक से ।

17. आप अपने वर्तमान व्यवसाय से किस सीमा तक सन्तुष्ट हैं? पूर्णतया सन्तुष्ट / सामान्य सन्तुष्ट साधारण असन्तुष्ट अधिक सन्तुष्ट ।

18. निम्नांकित दशाओं में कौन-सी दशाएँ आपको सबसे अधिक कठिनाई पूर्ण प्रतीत होती हैं। प्राथमिकता क्रम में तीन का नाम बताइये ।

विवाह के समय दहेज / उच्च जातियों से दूरी / व्यवसाय का बहुत अरुचिपूर्ण होना / सवर्ण बस्तियों में रहने की अयोग्यता / सवर्णों द्वारा उत्पीड़न / निर्धनता अधिकारियों का दुर्व्यवहार ।

19. क्या आप यह समझते हैं कि उच्च जातियाँ आज भी हरिजनों का शोषण करने का प्रयत्न करती हैं? हाँ / नहीं । यदि हाँ तो इसके लिए कौन-कौन से कारण उत्तरदायी हैं? हरिजनों में नेतृत्व का अभाव निर्धनता / उच्च जातियों में अधिक संगठन कानूनों में दोष ।

20. एक दशक में आपके परिवार के कितने पुरुष सदस्य अपनी बस्ती अथवा गाँव छोडकर किसी दूसरे गाँव अथवा शहर में चले गये?

21. जो सदस्य दूसरे स्थान पर चले गये हैं उन्हें किन कारणों से स्थान परिवर्तन की प्रेरणा मिली? नयी नौकरी / वर्तमान व्यवसाय से घृणा / शहर का आकर्षण / शिक्षा में रुचि / गाँव में झगड़ा / धर्म परिवर्तन ।

22. परिवार के जो सदस्य नये स्थानों पर जाकर बस गये हैं; पहले की तुलना में अब उनकी सामाजिक व आर्थिक स्थिति कैसी है?

    बहुत अच्छी / साधारणतया अच्छी / पहले की ही तरह /पहलू से भी बुरी ।

23. अपने जीवन से सम्बन्धित विभिन्न क्षेत्रों को प्रगतिशील बनाने के लिए आप क्या सुझाव देना चाहेंगे?

    (क) शिक्षा सम्बन्धी सुझाव;

    (ख) व्यवसाय सम्बन्धी सुझाव;

    (ग) जातिगत संगठन सम्बन्धी सुझाव;

    (घ) सामाजिक जीवन से सम्बन्धित सुझाव;

    दी गयी सूचनाएँ नितान्त गोपनीय रखी जायेंगी ।

स्थान .... हस्ताक्षर

दिनांक.................... (अवलोकनकर्ता का नाम)

20.6 प्रश्नावली

'किसी भी शोध की प्रमाणिकता शोधार्थी द्वारा तैयार प्रश्नावली एवं उनके आधार पर उत्तरदाताओं से प्राप्त प्रश्नों के उत्तरों- को प्रश्नावली में अंकित किया जाता है। शोध में प्रश्नावली को अनुसूची के बाद में दिखाना चाहिये । उदाहरणार्थ यहाँ प्रस्तुत किया जा रहा है

प्रश्नावली का प्रारूप - 1 (Form of A Questionnaire)

भारतीय समाज में परिवार-नियोजन के अध्ययन हेतु प्रश्नावली का प्रारूप

सहमति वाले प्रश्नों पर (✓) का निशान लगाइये तथा आवश्यक उत्तरों पर (X) का निशान लगाइये । रिक्त स्थानों की पूर्ति करें :

उत्तरदाता का नाम .... (स्त्री पुरूष)

आयु. .... वर्ष............................ स्थायी पता
....

व्यवसाय .... पद ....

शैक्षणिक स्तर. .... वैवाहिक स्तर (अविवाहित / विवाहित) ....

आय (प्रतिमास रु.) .... धर्म (हिन्दू /मुस्लिम /इसाई / अन्य)

परिवार में सदस्यों की संख्या. ....

पुरुष.. .... / स्त्रियाँ ..../ बच्चे (पुत्र .... / पुत्रियाँ...............)

नोट केवल 15 वर्ष तक के सदस्यों को बच्चे' माना जाना चाहिए ।

1. विवाह के समय आपकी कितनी आयु थी? .... वर्ष

2. सबसे बड़े बच्चे का विवरण (पुत्र / पुत्री) ; आयु. .... वर्ष

3. सबसे छोटे बच्चे का विवरण (पुत्र / पुत्री), आयु .... वर्ष

4. आपके कितने बच्चे तीन वर्ष से अधिक बड़े हैं ?

5. वे किन-किन कक्षाओं में शिक्षा प्राप्त कर रहे हैं?

बड़े से छोटे क्रमानुसार लिखें

पुत्र		पुत्रियाँ	
(1)	....	(1)	....
(2)	....	(2)	....
(3)	....	(3)	....
(4)	....	(4)	....

6. क्या आप बच्चों का जन्म ईश्वर की देन मानते हैं जिसे नियंत्रित नहीं किया जा सकता? हाँ / नहीं

7. क्या आपके विचार में दो से अधिक बच्चे परिवार के लिए हितकर हैं? हाँ / नहीं

8. यदि नहीं, तो क्या आपने उनका जन्म नियोजित तथा नियंत्रित करने का प्रयास किया? हाँ / नहीं

9. क्या आप छोटे परिवार को अच्छा समझते हैं? हाँ / नहीं

10. क्या आप परिवार-नियोजन कार्यक्रम में विश्वास रखते हैं? हाँ / नहीं

11. आपके प्रति / पत्नी का परिवार-नियोजन की ओर क्या रुख है? पक्ष में / तटस्थ / विपक्ष में

12. क्या आपने किसी परिवार-नियोजन केन्द्र से अपना सम्पर्क स्थापित किया है? हाँ /नहीं

13. क्या आपने किसी डॉक्टर से भी परिवार-नियोजन के सम्बन्ध में सलाह ली है? हाँ/ नहीं

स्थान ....

दिनांक .... उत्तरदाता के हस्ताक्षर

नोट. सूचनाएँ अत्यन्त गोपनीय रखी जायेंगी ।

प्रश्नावली का प्रारूप - II(Specimen of Questionnaire)

(महाविद्यालय में अध्ययन करने वाले छात्रों की आय-व्यय की जाँच के सम्बन्ध में प्रश्नावली)

.... महाविद्यालय में छात्रों की आय-व्यय जाँच

A. परिचय

1. महाविद्यालय का नाम ....

2. महाविद्यालय सरकारी है या निजी ....

3. छात्र का नाम ....

4. लिंग ....

5. आयु ....

6. कक्षा ....

7. पता 1. स्थायी ....

2. स्थानीय ....

8. विद्यार्थी कहाँ रहता है -

(क) छात्रावास ....

(ख) सम्बन्धियों के साथ ....

(ग) निजी रूप से कमरा लेकर ....

(घ) अन्य ....

B. आय के साधन **(रूपये)**

1. पिताजी से प्राप्त मासिक राशि ....

2. छात्रवृति ....

3. ऋण ....

4. ट्यूशन ....

5. अन्य स्रोतों से ....

कुल
आय.......................

C. व्यय के मद : विविध मदों पर मासिक व्यय :

1. महाविघालय शुल्क

2. पुस्तकें और स्टेशनरी

3. भोजन आदि

4. कपड़े, धुलाई आदि

5. किराया एव प्रकाशन

6. आमोद-प्रमोद

7. विविध

कुल योग......................

कमी / बचत

D. बचत यदि हों तो कहाँ जमा कराते हैं? ....

हस्ताक्षर(सूचक)

20.7 ग्रन्थ सूची एवं सन्दर्भिका का नमूना

सन्दर्भिका का नमूना-1

BOOKS-

Ammer, Dean S. : Materials Management,D.B.Taraporevals Sons and Co.Pvt.Ltd., Bombay, 1992.

Aljian, George W. : Purchasing Handbook,ed.MGH Co.,Inc.,New York,1958.

AnanthaKrishnanand,B : Store-Keeping,NCP Publication,New Delhi,1972.

Anyon,G.jay : Managing an Integrated Purchasing Process Holt,Rinehort and Winston,Inc.,New York-1963

Bagade,S.D. : Production and Material Management Himalayan Publishing House,Mumbai,1997.

Broom,H.N. : production Management,D.B.Taraporavale Sons & Co. Private Ltd., Bombay ed. 1967.

Buffa,Elwood S. : Modern Production Operations Management, Wiley Eastern Ltd.,New Delhi,ed. 1984.

Chadha, H.L. : Industrial Purchasing and Materials Management, Jaico Publishing House,Bombay,1975.

Choudhary,B.K.Roy : Management of Material,S.Chand and Sons, New Delhi,1979.

Crowing G.R. & Gorman Keneeth A. : Cost accounting,Principal and ManagementApplication,Houghton Mifflin Company,Boston,1974.

Dewitt K.K. : Modern Economic Theory,Shyam Lal Charitable Trust,Ram Nagar, New

Delhi,2002

Emory C.William : Business Research Methods.

Hasija & Sood : Ever More Banking,Sachin Publications,indore,2004.

Kapoor V.K. : Operations Research,Sultan Chand & Sons,Educational Publishers,New Delhi,2007.

MacMillan : The Encyclopedia of Social Science.

Muranjan S.K. : Modern Banking in India,Hinds Kitab Limited.

Reed Edward W. : Commercial Bank Management,Harpir & Row,New York.

Salliz Caire & others : Research Method in Social Science,1992.

Seth M.L. : Money banking International Trade & Public Finance,Laxmi Narayan Aggarwal,Educational Publisher,Agra.

Shrinivasan R. & Chunawlla S.A. : Personal Management B.S. Shah Prakashan, Ahmedabad,2005.

Shrivastava R.M. : management of Indian Financial Institution Himalaya Punlishing House,2006.

Trevedi R.N.& SkuklaDr.D.P. : Research Methodology

Vaish M.C. : Money Banking & International Trade,Vikas Publication House Pvt.Ltd.,New Delhi.

Varshney P.N. : Banking Law & Practice,Sultan Chand & Sons New Delhi,2003.

ARTICLE & REPORTS-

- Banking Regulation Act,1949.
- Chug Dr.A.C.Laurels of the Past,SBBJ, Staff Traning Centre, jaipur.
- Brochure issued by SBBJ's Head Office, Jaipur.
- Memorandum of Association of SBBJ.
- Indian Banking Companies Act.
- Brochure "General terms & conditions of Effective Banking",SBBJ, 1st june,2007.

- Printed Paper on “Our Various Schemes” SBBJ,P&S Banking Deptt., Head Office,Jaipur.
- Website of SBBJ.htt//www.sbbjbank.com
- Planning Newsletter Published by Planning Deptt.Head Office,jaipur.
- “Know Your Bank” Published by HRD,Head Office.
- Memorandum of Settlements Published by IBA,Mumbai.
- Organisation of the Material Management Function by Wahi,A.K.Vol.xiv,No.5, August1980,pp. 15-20 in the Lok Udyog.
- Materials Management and its Contribution to Productivity by Datta,Anil K.july-September 1974,pp. 160-169 in the Management in Government.
- Budgeting and Materials Management,Vol.116,No.2981, june 1968,p.15 in Commerce.
- Material Mangment in Public Undertakings by Rajan,N.,Vol.III,No.6,September 1969,p.607 in the Lok Udyog.
- Principles of Inventory Management by Shyder,Arthur,Financial Executive, XXXII,April 1964.
- Valuation of Inventories,A supplement issued by the ICAI,New Delhi,vol.XXIX,No.2,June 1981,A.52 in the Chartered Accountant.
- Control and Management of Surples Inventory by M.K.Ganesan,The Management Accountant, January 2,1975.
- 40th Report on Materials Management, Parliamentary Committee on Public Undertakings,3rd lok Sobha,1968.
- Tariff Commission Report : 1953, 1958, 1961, 1974.
- Lavraj Kumar Committee Report, 1978.
- Working Group of the VII Plan Report, 1985.

MAGAZINES, JOURNALS, NEWAPAPER & OTHER PUBLICATIONS-

- The Advanced Learnes’s Directory of Current English Oxford,2007.
- Microsoft Ecarta Encyclopedia,2000.
- Pratiyogiata Darpan.
- Rajasthan Patrika,Jaipur.
- Dainik Bhaskar, Jaipur.
- Economic Times, New Delhi.
- IBA Bulletin Published by Indian Bank Association, Mumbai.

- Sathi, the in house publication of SBBJ.
- Upwan, A Magazine SBBJ.
- Samajik Seva Banking,Quality Newsletter of SBBJ.
- The Journal of Banking Studies,New Delhi.
- The Times of India,Jaipur.
- Yojana,New Delhi.
- Bank-o-Voice,Newsletter.
- Financial Express,Bombay.
- Trends & Progress of Banking in India,Reserve Bank of India.
- SBI Monthly Review.
- Personal Management in India (Bombay Indian Institute of Persoanl Management).

ANNUAL REPORTS-

- Annual Report of SBBJ 1997-98
- Annual Report of SBBJ 1998-99
- Annual Report of SBBJ 1999-00
- Annual Report of SBBJ 2000-01
- Annual Report of SBBJ 2001-02
- Annual Report of SBBJ 2002-03
- Annual Report of SBBJ 2003-04
- Annual Report of SBBJ 2004-05
- Annual Report of SBBJ 2005-06
- Annual Report of SBBJ 2006-07
- Annual Report of SBBJ 2007-08

WEBSITE -

- www.hmtindia.com
- www.hmti.com

सन्दर्भित का नमूना-2

पुस्तकें -

- डॉ. एम.सी. खण्डेलवाल, उच्चतर लेखांकन, 1990
- ओ.आर कृष्णास्वामी, सहकारी लेखांकन, 1998
- डी. एस.एम. शुक्ल, बहीखाता तथा लेखाशास्त्र, 1995
- डी. बी.एस. माथुर, सहकारिता, 1985
- रूपराम गुप्ता एवं विद्‌याशरण गुप्ता, बहीखाता, 1980

- चतुर्वेदी एवं अग्रवाल, बहीखाता, 1978
- डी.के. बनर्जी, सहकारी लेखांकन, 1990
- आई.सी गुप्ता, महाजनी बहीखाता, 1999
- तिवाड़ी, चौधरी एवं चौधरी, राजस्थान. में सहकारी कानून
- एमसी. खण्डेलवाल एवं तिवाड़ी, सहकारी अंकेक्षण, 199०
- गुप्ता एवं गुप्ता, एडवांस एकाउन्टटेन्सी, 1992
- जे.एन. वैश्य, आधुनिक बहीखाता, 1995
- चक्रवर्तीराय, एडवांस एकाउन्टटेन्सी, 1998
- ग्राम सेवा सहकारी समितियों की
- मामोरिया एवं सक्सेना, भारत में सहकारिता
- आर.डी बेदी, सहकारिता के सिद्धान्त, इतिहास एवं व्यवहार
- डी. एस.आर. भंसाली, कॉमेन्टरी ऑन दी राजस्थान को-आपरेटिव सोसायटीज एक्ट, 1965
- आर.बी सेठी, बैंकिंग रेग्यूलेशन एक्ट 1949

प्रतिवेदन -

- सांख्यिकीय प्रतिवेदन, 1991-92 1992-93 सहकारी विभाग, राजस्थान, जयपुर
- प्रगति विवरण, 1993-94 सहकारी विभाग, राजस्थान, जयपुर ।
- क्रेफिफार्ड प्रतिवेदन, 1981, शिवरमन कमेटी ।
- सांख्यिकीय प्रतिवेदन - राष्ट्रीय कृषि एवं ग्रामीण विकास बैंक ।
- प्राथमिक कृषि ऋणदात्री सहकारी समितियों के कार्यों पर अध्ययन प्रतिवेदन राजस्थान राज्य सहकारी संघ, जयपुर ।
- सहकारी विभाग का प्रगति विवरण, वर्ष 1993-94 सहकारी विभाग, राजस्थान, जयपुर

पत्रिकाएँ एवं समाचार पत्र -

- राजस्थान सहकार ज्योति, राजस्थान राज्य सहकारी संघ ।
- नाबार्ड न्यूज रिव्यू - राष्ट्रीय कृषि एवं ग्रामीण विकास बैंक ।
- इण्डियन को-आपरेटिव रिव्यू - भारतीय राष्ट्रीय सहकारी संघ. नई दिल्ली ।
- को-ओपरेशन - तमिलनाडू स्टेट को-आपरेटिव बैंक लि. ।
- को-आपरेटरस बुलेटिन - जम्मू एवं कश्मीर को-आपरेटिव यूनियन, जम्बू ।
- को-आपरेटिव न्यूज डाइजेस्ट - भारतीय रिजर्व बैंक ।
- एन.सी.डी.सी. बुलेटिन - राष्ट्रीय सहकारी विकास निगम ।
- सहकार पथ - भारतीय राष्ट्रीय सहकारी संघ, नई दिल्ली ।
- सहकारी संकलन, सहकारी विभाग, राजस्थान, जयपुर ।
- दी को-आपरेटर - राष्ट्रीय भारतीय सहकारी संघ, नई दिल्ली ।
- सहकार दर्शक (साप्ताहिक), राजस्थान राज्य सहकारी-संघ, जयपुर ।

अन्य -

- जयपुर जिले की प्राथमिक कृषि ऋणदात्री सहकारी समितियाँ ।

29.8 सारांश

ग्रन्थ सूची का आशय शोधकर्ता द्वारा प्रयुक्त की गई पुस्तकों को एक जगह संकलन करने से किसी भी व्यक्ति को यह जानकारी मिल जाती है कि शोधकर्ता ने किन-किन किताबों का प्रयोग किया है । प्रयोग में ली गई किताब के सम्बन्धित पेज नम्बर तथा प्रकाशक का पता देखकर अपनी संतुष्टि के लिए मिलान कर सकता है ।

20.9 शब्दावली

1. संदर्भिका : शोध कार्य में उपयोग में ली गई पुस्तक ।
2. ग्रन्थ सूची : शोध कार्य में ली गई पुस्तकों / पत्रिकाओं की सूची ।
3. परिशिष्ट : प्रयोग में ली गई सत्य प्रतिलिपियों का विवरण ।

20.10 अभ्यासार्थ प्रश्न

1. ग्रन्थ सूची से क्या आशय है?
2. ग्रन्थ सूची बनाने के क्या उद्देश्य हैं?
3. ग्रन्थ सूची एवं सन्दर्भिका के लाभों को बताइये ।
4. एक उपयुक्त ग्रन्थ सूची का नमूना दीजिए ।

20.11 संदर्भ ग्रन्थ

1. शोध प्रणाली, प्रो. शर्मा, जैन, पारीक, रमेश बुक डिपो, जयपुर ।
2. Research Methodology, Techniques and Trends, V.V. Khanzode, Daryaganj, New Delhi.

I
LOGARITHMS

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	.8	9
10		0000	0043	0056	0128	0170						5	9	13	17	21	26	30	34	38
							0212	.0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11		0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	16	20	23	27	31	35
							0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	18	22	26	29	33
12		0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
							0969	1004	1038	1072	1186	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13		1139	1173	1206	1239	1271						3	6	10	13	16	19	23	26	29
							1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14'		1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
							1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	14	17	20	23	26
15		1761	1790	1818	1847	1875						3	6	9	11	14	17	20	23	26
							1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	25
16		2041	2068	2095	2122	2148						3	6	8	11	14	16	19	22	24
							2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17		2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
							2430	2455	2180	2504	2529	3	5	8	10	12	15	17	20	22
18		2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	17	19	21
							2672	2695	2718	2742	2765	2	4	7	9	11	14	16	18	21
19		2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
							2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20		3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21		3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22		3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23		3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24		3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25		3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26		4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27		4314	4330	4347	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28		4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29		4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30		4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31		4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32		5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33		5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34		5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35		5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36		5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37		5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38		5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39		5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40		6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41		6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42		6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43		6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6495	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44		6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45		6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46		6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47		6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48		6812	6821	6830	6839	6848	6857	6566	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49		6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

Contd..

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7452	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7906	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	9116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8505	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8513	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8999	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9360	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	1	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9789	1	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	1	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9563	9566	9571	9576	9581	9586	1	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	1	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	1	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	1	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	1	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	1	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	1	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9878	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	1	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9937	9939	9943	9948	9952	1	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9960	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	1	1	1	2	2	3	3	3	4

ANTI-LOGARITHMS

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00		1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01		1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02		1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03		1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04		1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05		1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06		1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07		1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08		1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09		1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10		1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11		1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12		1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13		1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14		1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15		1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16		1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17		1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18		1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19		1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20		1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21		1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22		1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23		1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24		1738	1742	1746	1750	1754	1753	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25		1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26		1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27		1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28		1605	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29		1650	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30		1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31		2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32		2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33		2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34		2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35		2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36		2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37		2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38		2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39		2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40		2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41		2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42		2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43		2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44		2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45		2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46		2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47		2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48		3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49		3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

Contd...

ANTI-LOGARITHMS

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50		3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51		3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52		3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53		3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54		3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55		3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56		3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57		3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58		3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59		3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60		3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61		4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62		4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63		4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64		4365	7375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65		4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66		4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67		4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68		4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69		4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70		5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71		5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72		5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73		5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74		5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75		5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76		5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77		5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78		6026	6039	6053	6067	6081	6095	6100	6121	6138	6150	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79		6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80		6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81		6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82		6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83		6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84		6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85		7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86		7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87		7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88		7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89		7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90		7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91		8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92		8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93		8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94		8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95		8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96		9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97		9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98		9550	9572	9594	9616	9638	9601	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99		9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

III

RECIPROCALS OF NUMBERS From 1 to 10

[Numbers in different columns to be subtracted, not added]

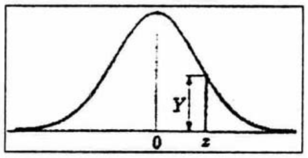
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean difference								
												1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0		.1000	9901	9804	9709	9615	9524	9434	9346	9259	9174									
1.1		.9091	9009	8929	8850	8772	8696	8621	8547	8475	8403									
1.2		.8333	8264	8197	8130	8065	8000	7937	7874	7813	7752									
1.3		.7692	7634	7576	7519	7463	7407	7353	7299	7246	7194									
1.4		.7143	7092	7042	6993	6944	6897	6849	6803	6757	6711	5	10	14	19	24	29	33	38	43
1.5		.6667	6623	6579	6536	6494	6452	6410	6369	6329	6289	4	8	13	17	21	25	29	33	38
1.6		.6250	6211	6173	6135	6098	6061	6024	5988	5952	5917	4	7	11	15	18	22	26	29	33
1.7		.5882	5848	5814	5780	5747	5714	5682	5650	5618	5587	3	6	10	13	16	20	23	26	29
1.8		.5556	5525	5495	5464	5435	5405	5376	5348	5319	5291	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1.9		.5263	5236	5208	5181	5155	5128	5102	5076	5051	5025	3	5	8	11	13	16	18	21	24
2.0		.5000	4975	4950	4926	4902	4878	4854	4831	4808	4785	2	5	7	10	12	14	17	19	21
2.1		.4762	4739	4717	4695	4673	4651	4630	4608	4587	4566	2	4	7	9	11	13	15	17	20
2.2		.4545	4525	4505	4484	4464	4444	4425	4405	4386	4367	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.3		.4348	4329	4310	4292	4274	4255	4237	4219	4202	4184	2	4	5	7	9	11	13	14	16
2.4		.4167	4149	4132	4115	4098	4082	4065	4049	4032	4016	2	3	5	7	8	10	12	13	15
2.5		.4000	3984	3968	3953	3937	3922	3906	3891	3876	3861	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2.6		.3846	3831	3817	3802	3788	3774	3759	3745	3731	3717	1	3	4	6	7	8	10	11	13
2.7		.3704	3690	3676	3663	3650	3636	3623	3610	3597	3584	1	3	4	5	7	8	9	11	12
2.8		.3571	3559	3546	3534	3521	3509	3497	3484	3472	3460	1	2	4	5	6	7	9	10	11
2.9		.3448	3436	3425	3413	3401	3390	3378	3367	3356	3344	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.0		.3333	3322	3311	3300	3289	3279	3268	3257	3247	3236	1	2	3	4	5	6	7	9	10
3.1		.3226	3215	3205	3195	3185	3175	3165	3155	3145	3135	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3.2		.3125	3115	3106	3096	3086	3077	3067	3058	3049	3040	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3.3		.3030	3021	3012	3003	2994	2985	2976	2967	2959	2950	1	2	3	4	4	5	6	7	8
3.4		.2941	2933	2924	2915	2907	2899	2890	2882	2874	2865	1	2	3	3	4	5	6	7	8
3.5		.2857	2849	2841	2833	2825	2817	2809	2801	2793	2786	1	2	2	3	4	5	6	6	7
3.6		.2778	2770	2762	2755	2747	2740	2732	2725	2717	2710	1	1	2	3	4	5	5	6	7
3.7		.2703	2695	2688	2681	2674	2667	2660	2653	2646	2639	1	1	2	3	4	4	5	6	6
3.8		.2632	2625	2618	2611	2604	2597	2591	2584	2577	2571	1	1	2	3	3	4	5	5	6
3.9		.2564	2558	2551	2545	2538	2532	2525	2519	2513	2506	1	1	2	3	3	4	4	5	6
4.0		.2500	2494	2488	2481	2475	2469	2463	2457	2451	2445	1	1	2	2	3	4	4	5	5
4.1		.2439	2433	2427	2421	2415	2410	2404	2398	2392	2387	1	1	2	2	3	3	4	5	5
4.2		.2381	2375	2370	2364	2358	2353	2347	2342	2336	2331	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4.3		.2326	2320	2315	2309	2304	2299	2294	2288	2283	2278	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4.4		.2273	2268	2262	2257	2252	2247	2242	2237	2232	2227	1	1	2	2	3	3	4	4	5
4.5		.2222	2217	2212	2208	2203	2198	2193	2188	2183	2179	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4.6		.2174	2169	2165	2160	2155	2151	2146	2141	2137	2132	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4.7		.2128	2123	2119	2114	2110	2105	2101	2096	2092	2088	0	1	1	2	2	3	3	4	4
4.8		.2083	2079	2075	2070	2066	2062	2058	2053	2049	2045	0	1	1	2	2	3	3	3	4
4.9		.2041	2037	2033	2028	2024	2020	2016	2012	2008	2004	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5.0		.2000	1996	1992	1988	1984	1980	1976	1972	1969	1965	0	1	1	2	2	2	3	3	4
5.1		.1961	1957	1953	1949	1946	1942	1938	1934	1931	1927	0	1	1	2	2	2	3	3	3
5.2		.1923	1919	1916	1912	1908	1905	1901	1898	1894	1890	0	1	1	1	2	2	3	3	3
5.3		.1887	1883	1880	1876	1873	1869	1866	1862	4859	1855	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5.4		.1852	1848	1845	1842	1838	1835	1832	1828	1825	1821	0	1	1	1	2	2	2	3	3

Contd...

RECIPROCALS OF NUMBERS (Contd..)

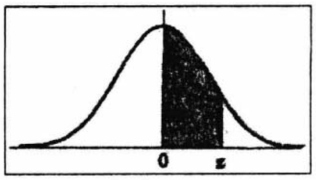
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean difference								
												1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5		.1818	1815	1812	1808	1805	1802	1799	1795	1792	1789	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5.6		.1786	1783	1779	1776	1773	1770	1767	1764	1761	1757	0	1	1	1	2	2	2	3	3
5.7		.1754	1751	1748	1745	1742	1739	1736	1733	1730	1727	0	1	1	1	1	2	2	2	3
5.8		.1724	1721	1718	1715	1712	1709	1706	1704	1701	1698	0	1	1	1	1	2	2	2	3
5.9		.1695	1692	1689	1686	1684	1681	1678	1675	1672	1669	0	1	1	1	1	2	2	2	3
6.0		.1667	1664	1661	1658	1656	1653	1650	1647	1645	1642	0	1	1	1	1	2	2	2	3
6.1		.1639	1637	1634	1631	1629	1626	1623	1621	1618	1616	0	1	1	1	1	2	2	2	2
6.2		.1623	1610	1608	1605	1603	1600	1597	1595	1592	1590	0	1	1	1	1	2	2	2	2
6.3		.1587	1585	1582	1580	1577	1575	1572	1570	1567	1565	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6.4		.1562	1560	1558	1555	1553	1550	1548	1546	1543	1541	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6.5		.1538	1536	1534	1531	1529	1527	1524	1522	1520	1517	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6.6		.1515	1513	1511	1508	1506	1504	1502	1499	1497	1495	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6.7		.1493	1490	1488	1486	1484	1481	1479	1477	1475	1473	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6.8		.1471	1468	1466	1464	1462	1460	1458	1456	1453	1451	0	0	1	1	1	1	2	2	2
6.9		.1449	1447	1445	1443	1441	1439	1437	1435	1433	1431	0	0	1	1	1	1	2	2	2
7.0		.1429	1427	1425	1422	1420	1418	1416	1414	1412	1410	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7.1		.1408	1406	1404	1403	1401	1399	1397	1395	1393	1391	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7.2		.1389	1387	1385	1383	1381	1379	1377	1376	1374	1372	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7.3		.1370	1368	1366	1364	1362	1361	1359	1357	1355	1353	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7.4		.1351	1350	1348	1346	1344	1342	1340	1339	1337	1335	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.5		.1333	1332	1330	1328	1326	1325	1323	1321	1319	1318	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.6		.1316	1314	1312	1311	1309	1307	1305	1304	1302	1300	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.7		.1299	1397	1295	1294	1292	1290	1289	1287	1285	1284	0	0	0	1	1	1	1	1	1
7.8		.1282	1280	1279	1277	1276	1274	1272	1271	1269	1267	0	0	0	1	1	1	1	1	1
7.9		.1266	1264	1263	1261	1259	1258	1256	1255	1253	1252	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.0		.1250	1248	1247	1245	1244	1242	1241	1239	1238	1236	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.1		.1235	1233	1232	1230	1229	1227	1225	1224	1212	1221	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.2		.1220	1218	1217	1215	1214	1212	1211	1209	1208	1206	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.3		.1205	1203	1202	1200	1199	1198	1196	1195	1193	1192	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.4		.1190	1189	1188	1186	1185	1183	1182	1181	1179	1178	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.5		.1170	1175	1174	1172	1171	1170	1168	1167	1166	1164	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.6		.1163	1161	1160	1159	1157	1156	1155	1153	1152	1151	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.7		.1149	1148	1147	1145	1144	1143	1142	1140	1139	1138	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.8		.1136	1135	1134	1133	1131	1130	1129	1127	1126	1125	0	0	0	1	1	1	1	1	1
8.9		.1124	1122	1121	1120	1119	1117	1116	1115	1114	1112	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.0		.1111	1110	1109	1107	1106	1105	1104	1103	1101	1100	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.1		.1099	1098	1096	1095	1094	1093	1092	1090	1089	1088	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.2		.1087	1086	1085	1083	1082	1081	1080	1079	1078	1076	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.3		.1075	1074	1073	1072	1071	1070	1068	1067	1066	1065	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.4		.1064	1063	1062	1060	1059	1058	1057	1056	1055	1054	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.5		.1053	1052	1050	1049	1048	1047	1046	1045	1044	1043	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.6		.1042	1041	1039	1038	1037	1036	1035	1034	1033	1032	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.7		.1031	1030	1029	1028	1027	1026	1025	1024	1022	1021	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.8		.1020	1019	1018	1017	1016	1015	1014	1013	1012	1011	0	0	0	0	1	1	1	1	1
9.9		.1010	1009	1008	1007	1006	1005	1004	1003	1002	1001	0	0	0	0	0	1	1	1	1

V
ORDINATES (Y) OF THE STANDARD NORMAL CURVE AT z



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0581	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004
3.7	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001

VI
AREAS UNDER THE STANDARD NORMAL CURVE FROM 0 TO z



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.3980	.0438	.4780	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4750	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

VII
BINOMIAL COEFFICIENTS

n	${}^nC_0$	${}^nC_1$	${}^nC_2$	${}^nC_3$	${}^nC_4$	${}^nC_5$	${}^nC_6$	${}^nC_7$	${}^nC_8$	${}^nC_9$	${}^nC_{10}$
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

VIII

VALUES OF e^{-m}

(0<m<1)

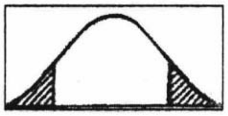
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.0000	0.9900	0.9802	0.9704	0.9608	0.9512	0.9418	0.9324	0.9231	0.9139
0.1	0.9048	0.8958	0.8869	0.8781	0.8694	0.8607	0.8521	0.8437	0.8353	0.8270
0.2	0.8187	0.8106	0.8025	0.7945	0.7866	0.7788	0.7711	0.7634	0.7558	0.7483
0.3	0.7408	0.7334	0.7261	0.7189	0.7118	0.7047	0.6977	0.6907	0.6839	0.6771
0.4	0.6703	0.6636	0.6570	0.6505	0.6440	0.6376	0.6313	0.6250	0.6188	0.6126
0.5	0.6065	0.6005	0.5945	0.5886	0.5827	0.5770	0.5712	0.5655	0.5599	0.5543
0.6	0.5488	0.5434	0.5379	0.5326	0.5273	0.5220	0.5169	0.5117	0.5066	0.5016
0.7	0.4966	0.4916	0.4868	0.4819	0.4771	0.4724	0.4677	0.4630	0.4584	0.4538
0.8	0.4493	0.4449	0.4404	0.4360	0.4317	0.4274	0.4232	0.4190	0.4148	0.4107
0.9	0.4066	0.4025	0.3985	0.3946	0.3906	0.3867	0.3829	0.3791	0.3753	0.3716

(m=1, 2, 3, ..., 10)

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e^{-m}	0.36788	0.13534	0.04979	0.01832	0.006738	0.002479	0.000912	0.000335	0.000123	0.000045

Note : To obtain values of e^{-m} for other values of m, use the laws of exponents.

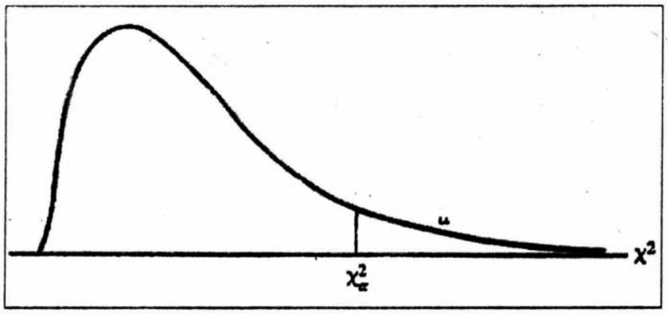
Example : $e^{-4.50} = (e^{-4.00})(e^{-0.50})$=(0.01832)(0.6065)=0.011111.



IX
TABLE OF "STUDENT'S" DISTRIBUTION
VALUE OF t

Degree of freedom	Probability												
	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.001
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.357	636.619
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

X
CHI-SQUARE DISTRIBUTION



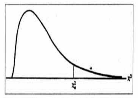
The following table provides the values of χ^2_α that correspond to a given upper-tail area α and a specified number of degrees of freedom.

Degrees of Freedom	Upper-Tail Area α					
	.20	.10	.05	.02	.01	.001
1	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.827
2	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13.815
3	4.642	6.251	7.815	9.837	11.345	16.268
4	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277	18.465
5	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086	20.517
6	8.558	10.645	12.592	15,033	16.812	22.457
7	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24.322
8	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26.125
9	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877
10	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588
11	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264
12	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217	32.909
13	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688	34.528
14	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	36.123
15	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	37.697
16	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000	39.252
17	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409	40.790
18	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	42.312
19	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191	43.820
20	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566	45.315
21	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	46.797
22	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	48.268
23	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638	49.728
24	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	51.179
25	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314	52.620
26	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	54.052
27	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	55.476
28	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	56.893
29	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	58.302
30	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892	59.703

XI

F-DISTRIBUTION

Upper 5% points ($\alpha = 0.05$)



V_2 \ V_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.20	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.63	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

XI

F-DISTRIBUTION

Upper 1% points ($\alpha = 0.01$)

V_2 \ V_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	9947.00	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.61	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.11	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.97	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.78	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.90	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.36	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.90	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.61	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.32	4.64	4.50	4.30	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.10	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.05	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.38	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00