EC-5

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

परिमाणात्मक विधियाँ

EC-5

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय

परिमाणात्मक विधियाँ

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

अध्यक्ष

प्रो. (डॉ.) नरेश दाधीच

कुलपति

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय कोटा

संयोजक/समन्वयक/सदस्य

संयोजक

प्रो. (डॉ.) एम.के. घड़ोलिया

विभागाध्यक्ष, अर्थशास्त्र विभाग

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय

कोटा(राज.)

प्रो. (डॉ.) सुरजीत सिंह

विकास अध्ययन संस्थान (आई.डी.एस.)

झालाना डूंगरी, जयपुर (राज.)

प्रो.(डॉ.) के. डी. स्वामी

सेवानिवृत्त विभागाध्यक्ष, अर्थशास्त्र विभाग

जयनारायन व्यास विश्वविद्यालय,

जोधपुर (राज.)

डॉ. जे. के. शर्मा

सह-आचार्य, अर्थशास्त्र

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय,

कोटा (राज.)

सम्पादन एवं पाठ लेखन

सम्पादक

प्रो. (डॉ.) एम.के. घड़ोलिया

आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा(राज.)

कोटा(राज.)

लेखक	इकाई संख्या
डॉ. मधुसूदन मिश्रा, रीडर, अर्थशास्त्र विभाग, बी-41 टीचर्स फ्लेट्स, महात्मा गांधी काशी विद्यापीठ, वाराणसी(यू.पी.)	1
डॉ. मनीष गुप्ता, रीडर, अर्थशास्त्र विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी(यू.पी.)	2
प्रो. (डॉ.) एम.के. घड़ोलिया आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा(राज.)	3,11,12,13 14 व 17
डॉ. गोविन्द गुप्ता 4/50, राजा कॉलोनी नई धान मण्डी रोड, दौसा	4,5
डॉ. प्रहलाद कुमार अर्थशास्त्र विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यलय, इलाहाबाद (यू.पी.)	6,7
डॉ. नन्दिता अग्रवाल रीडर, अर्थशास्त्र विभाग, इलाहाबाद डिग्री कॉलेज(महिला संकाय) इलाहाबाद (यू.पी.)	8,9
डॉ. राजेन्द्र जोशी व्याख्याता, अर्थशास्त्र विभाग जे.डी.बी. महिला महाविद्यालय कोटा (राज.)	10
डॉ. एन.के. दशोरा 167,हिरन मगरी, सेक्टर-3, पार्क के पास, उदयपुर (राज.)	15,16

अकादमिक एवं प्रशासनिक व्यवस्था

प्रो. नरेश दाधीच	**प्रो. अनाम जेटली**	**योगेन्द्र गोयल**
कुलपति	निदेशक, अकादमिक	प्रभारी (पा.सा.उ.एवं वि. विभाग)
वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा (राज.)	**वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा (राज.)**	**वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा (राज.)**

पाठ्यक्रम उत्पादन

योगेन्द्र गोयल

सहायक उत्पादन अधिकारी

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा (राज.)

पुनः उत्पादन फरवरी 2011 ISBN - 13/978-81-8496-124-9

निदेशक, अकादमिक व. म. खु. वि., कोटा(राज.) द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

तृतीय वर्ष कला/विज्ञान अर्थशास्त्र प्रश्नपत्र प्रथम

परिमाणात्मक विधियाँ

पाठ्यक्रम परिचय

अपने विकास के प्रारम्भिक कल के विद्वानों द्वारा प्रतिपादित सिद्धांतों के लिए वैज्ञानिक विधि का ज्ञान एवं समान्य तर्कशक्ति ही पर्याप्त थी। बाद में समझने के लिए अर्थशास्त्र में आरेखों एवं ज्यामिति का प्रयोग प्रारम्भ हु आ। कालान्तर में कुछ जटिल संबंधो की व्याख्या करने के लिए अर्थशास्त्र में सांख्यिकी एवं गणित का उपयोग बढ़ा। दोनों का विकास अलग- अलग विद्वानों द्वारा किया गया एवं बाद आधुनिक अर्थशास्त्रियों ने दोनों को मिलकर अर्थ मिति (Econometrics) के नाम से नई शाखा को जन्म दिया। स्नातक स्तर पर हमारा उद्देश्य आपको प्रारम्भिक सांख्यिकीय विधियों का ज्ञान करना है। आज सामान्य रूप से आर्थिक क्षेत्र में सांख्यिकी का व्यापक प्रयोग होने लगा है। शोधकर्ता सांख्यिकी एवं गणितीय विधियों का व्यापक प्रयोग करते हैं। देश में योजना निर्माता, नीति निर्माता, विकास के लिए जटिल आर्थिक मॉडलों का निर्माण कर रहे है। वस्तुत: कम्प्युटर के व्यापक प्रयोग से गणनाएं करना अत्यधिक आसान कार्य हो गया है। नि: सन्देह अर्थशास्त्र के विद्यार्थियों गणित एवं सांख्यिकीय का प्रयोग करके इसको परमशुद्ध विज्ञान का दर्जा दिलाने का प्रयास कर रहे है। लेकिन इसके यह आवश्यक है कि उपयोगकर्ताओं को सांख्यिकीय विधियो का पूर्ण ज्ञान हो क्योंकि अधूरा ज्ञान स्वयं उपयोगकर्ताओं के लिए हानिकारक है।

सांख्यिकीय अर्थशास्त्र के सिद्धांतों एवं यथार्थ के बीच सेतु का कार्य करती है। प्रचालित सिद्धांतों के सत्यापन के लिए सांख्यिकीय का उपयोग आवश्यक है। आज के युग में कोई भी अर्थशास्त्री सांख्यिकीय विधियों के ज्ञान के बिना आगे नहीं बढ़ सकता। मार्शल ने ठीक ही कहा है "सांख्यिकीय वे तृण है जिनसे मुझे अन्य अर्थशास्त्रियों कि भांति ईटे बनानी है।" क्राक्सटन एवं काउडन ने लिखा है "सांख्यिकीय विधियों के पर्याप्त ज्ञान के बिना सामाजिक विज्ञान का अनुसंधानकर्ता एक अंधे व्यक्ति के समान है, जो कि एक अंधेरे कमरे में एक काली बिल्ली को जो कि वहाँ नहीं ढूंढने क प्रयास करता है।" इस प्रकार यह स्पष्ट है कि आज के युग में सांख्यिकीय के ज्ञान के बिना अध्ययन पूरा नहीं होता।

प्रस्तुत पुस्तक में सांख्यिकीय विधियो से आपका परिचय कराया जाएगा। इकाइयों कि संरचना दूरस्थ शिक्षा पद्धति के अनुसार स्वाध्याय के लिए सरलतम रूप से कि गई है। इकाइयों में यथा स्थान बोध प्रश्न, उदाहरण, अभ्यासार्थ प्रश्न देकर स्वाध्याय के लिए सरलतम रूप से कि गई है, फिर भी कुछ विद्यार्थियों के लिए एक कठिन पाठ्यक्रम हो सकता है। अत: हम यह अपेक्षा करते हैं कि आप इकाई के अंत में दिये गए प्रश्नों के अलावा और भी किताबों से अभ्यास करे क्योंकि परीक्षक परीक्षा के लिए कोई भी सवाल पुछ सकता है। यह आवश्यक नहीं है कि वह सवाल आपकी इस पुस्तक में हों। मैंने पुस्तक कि भाषा शैली में प्रवाह का पूरा- पूरा ध्यान रखा गया है। आशा है गणित एवं सांख्यिकीय जैसा विषय भी इस अध्ययन सामाग्री के माध्यम से आपको सरल एवं बोधगम्य लगेगा। पुस्तक को पढ़कर आप अपने सुझावों से मुझे अवगत कराएं।

सम्पादक

इकाई - 01

सांख्यिकी का अर्थ, प्रकृति एवं उपयोग, समंकों की विशेषताएं एवं सांख्यिकी की सीमाएं

(Meaning, Nature and uses of Statistics, Characteristics of Data and Limitations of Statistics)

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य (Objectives)

सांख्यिकी के प्रयोग की परम्परा भारत में भी अत्यन्त प्राचीन है। मनु स्मृति में शासन व्यवस्था के लिए आँकड़े एकत्र करने की रीति का उल्लेख मिलता है। चन्द्रगुप्त मोर्य के शासनकाल में आय-व्यय, जन्म-मरण, सेना, भूमि लगान सम्बन्धी आँकड़े एकत्रित किए जाते थे। कोटिल्य के अर्थशास्त्र में कई प्रकार के समंक (Data) मिलते हैं। गुप्त काल एवं मुगलकाल में भी आँकड़े एकत्रित किए जाते थे। इस प्रकार सांख्यिकी काफी प्राचीन विषय है। आज यह एक जनो योगी विज्ञान हो गया है। **टिप्पेट ने सत्य ही लिखा है "सांख्यिकी प्रत्येक व्यक्ति को प्रभावित करतीं है एवं जीवन के बहुत से बिन्दुओं को स्पर्श करती है।"**

सांख्यिकी दो अर्थो में प्रयोग में आती है एक बहुवचन एवं दूसरे एकवचन के रूप में। इस इकाई को पढ़ने के उपरान्त आप :

- समझ सकेंगे कि सांख्यिकी से क्या आशय है?
- सांख्यिकी की बहुवचन एवं एकवचन के रूप में परिभाषाओं का अध्ययन कर सकेंगे;
- सांख्यिकी विज्ञान है अथवा कला इन दोनों रूपों के लिए दिए गए तर्कों को समझकर सांख्यिकी की प्रकृति के बारे में सही निर्णय ले सकेंगे;
- सांख्यिकी मे महत्व अथवा उपयोगों के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे;
- समकों की विशेषताओं एवं सांख्यिकी की सीमाओं से भी परिचित हो जाएंगे ।

1.1 प्रस्तावना (Introduction)

सांख्यिकी का सबसे पहले प्रयोग ज्योतिषशास्त्रियों ने प्रारम्भ किया । वे तारों नक्षत्रों की गति के बारे में आँकड़े इकट्ठे करने व ग्रहण आदि के बारे में पूर्वानुमान लगाते थे । सत्रहवीं शताब्दी के समय इस विज्ञान का प्रयोग राजनीतिक अंकगणित के रूप में प्रारम्भ हुआ । अट्ठारहवीं शताब्दी में इसका व्यापक उपयोग होने लगा । अपराधशास्त्र में अपराधों के आँकड़े इकट्ठे कर उनमें कमी लाने के उपायों पर चर्चा होने लगी । अंकों को एकत्रित कर इनका विश्लेषण व निर्वचन करने के ढंगों पर चर्चा कर उन्हें वैज्ञानिक व सरल बनाया गया । इसी समय सांख्यिकी एवं गणित के समन्वय से सम्भावना सिद्धान्त (Theory of Probability) का विकास हुआ । प्रोफेसर जेम्स बरनौली ने **"बडी संख्याओं का नियम बनाया"** । इस शताब्दी में कई नये सिद्धान्तों विकसित हुए । सन् 1782 में ला प्लास नामक प्रसिद्ध वैज्ञानिक ने सम्भावना सिद्धान्त पर पुस्तक लिखी । आधुनिक सांख्यिकी सिद्धान्त (Modern Theory of Statistics) क्बेट्लेट द्वारा लिखी गई । इस युग में बहुत से महान गणितज्ञों - नैप, सर फ्रन्सिस गाल्टन, गास चार्लियर, कार्ल पियर्सन आदि ने सांख्यिकी की उन्नति व विकास में महत्वपूर्ण योगदान दिया। यह विज्ञान आज बीसवीं शताब्दी में बहुत विकसित हो गया है । आधुनिक युग में इसका प्रयोग ज्ञान विज्ञान की सभी शाखाओं में होने लग गया है । इसका प्रयोग नवीन सिद्धान्तों का प्रतिपादन व प्राचीन सिद्धान्तों के पुष्टिकरण के लिए किया जाता है । सांख्यिकी के प्रयोग में निरन्तर वृद्धि का कारण उसकी बढ़ती हुई मांग है । आज के युग में जो देश विश्वसनीय एवं पर्याप्त आँकड़े इकट्ठे नहीं करते वे पिछड़े हुए हैं ।**अनातोल फ्रान्स** ने कहा है कि, "यदि वे गणना नहीं करते तो (विश्व में) उनकी भी गणना नहीं होगी ।"

सांख्यिकी विज्ञान को महत्वपूर्ण बनाने का श्रेय अनेक महान विद्वानों को है । इस इकाई में सांख्यिकी का अर्थ, प्रकृति एवं महत्व की चर्चा करने के उपरान्त आपको समकों की विशेषताओं एवं उनकी सीमाओं से भी परिचित कराया जाएगा। इकाई के अन्त में सारांश, शब्दावली, संदर्भ ग्रन्थों की सूची एवं अभ्यासार्थ प्रश्न दिए गए हैं ।

1.2 सांख्यिकी का अर्थ (Meaning of Statistics)

मानवीय ज्ञान के क्षेत्र में संख्याओं का बहुत अधिक महत्व होता है । किसी भी क्षेत्र में संख्यात्मक माप के बिना हमारा ज्ञान अधूरा रह जाता है । लार्ड केल्विन ने इस सम्बन्ध में कहा है कि, "जिस विषय की बात आप कह रहे हैं, यदि उसे आप माप सकते हैं तथा संख्या द्वारा प्रकट कर सकते हैं तो आप उसके विषय में कुछ जानते हैं, जब आप उसे माप नहीं सकते, जब माप संख्या

1. “If they don’t count, they won’t count” Anatole France

द्वारा प्रकट नहीं कर सकते तो आप का ज्ञान अल्प तथा अपर्याप्त है ।"

यही कारण है कि आज के आधुनिक युग को सांख्यिकी का युग कहा जाता है क्यों कि ज्ञान-विज्ञान के प्रत्येक क्षेत्र में संख्याओं का प्रयोग किया जा रहा है ।

इतिहास में सांख्यिकीय प्रयोग का कोई निश्चित प्रमाण नहीं मिलता है लेकिन यह कहा जा सकता है कि सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग अति प्राचीन है, क्यों कि 16 वीं शताब्दी में राजकीय कार्यों में सांख्यिकी का प्रयोग किया जाता था। अति प्राचीन काल में सांख्यिकीय का रूप बहु त छोटा था, लेकिन ज्यों-ज्यों सामाजिक और आर्थिक विकास हु आ सांख्यिकीय के क्षेत्र में भी वृद्धि हु ई । सांख्यिकीय विकास के क्रम को देखा जाय तो इससे स्पष्ट होता है कि यह राजकीय साधन न रहकर अर्थ-व्यवस्था के प्रत्येक क्षेत्र में फैल गया है । यही कारण है कि प्रत्येक क्षेत्र में सांख्यिकीय दिमाग की स्थापना हो गई है ।

1.2.1 सांख्यिक का परिभाषा (बहु वचन के रूप में)

प्राचीनकाल में यह शब्द बहुवचन के रूप में प्रयुक्त होता था एवं इसका अभिप्राय आँकडों अथवा समकों से था । बहुवचन के अर्थ में आज भी इस शब्द का प्रयोग होता है । बहुवचन के रूप में सामान्य व्यक्ति के लिए समंक संख्याएं मात्र हैं, परन्तु वस्तुत: समस्त संख्याएं सांख्यिकी नहीं होती । वास्तव में, विशेष गुणों से युक्त संख्याओं को ही समंक कहा जाता है । समंको की कुछ विद्वानों द्वारा दी गई परिभाषाएं इस प्रकार है -

ए.एल. बाउले "समंक अनुसन्धान के किसी दिमाग में तथ्यों के संख्यात्मक विवरण हैं जिन्हें एक दूसरे से सम्बन्धित रूप में प्रस्तुत किया जाता है ।"

यूल एवं केण्डाल के अनुसार "समंकों से तात्पर्य उन आँकडों से है जो पर्याप्त सीमा तक अनेक प्रकार के कारणों से प्रभावित होते है ।"

होरेस सेक्राइस्ट के अनुसार "समंक से हमारा अभिप्राय तथ्यों के उन समूहों से है जो अगणित कारणों से पर्याप्त सीमा तक प्रभावित होते हैं, जो संख्याओं में व्यक्त किए जाते हैं, एक उचित मात्रा की शुद्धता के अनुसार गिने या अनुमानित किए जाते हैं, किसी पूर्ण निश्चित उद्देश्य के लिए एक व्यवस्थित का से एकत्रित किए जाते हैं और जिन्हें एक दूसरे से सम्बन्धित रूप में प्रस्तुत किया जाता है ।"

1.2.2 सांख्यिकी कीं परिभाषा (एकवचन के रूप में)

प्राचीन काल में सांख्यिकी का प्रयोग जब राजकीय कार्यों में किया जाता था तो इसे "राज विज्ञान" की संज्ञा दी गई थी, लेकिन सांख्यिकीय विकास के साथ-साथ इसकी परिभाषा भी अनेकानेक हो गई । यहाँ सांख्यिकी का ठीक-ठाक परिभाषा देना कठिन है क्यों कि जितने विद्वान हैं, उतनी ही परिभाषायें दी हैं । 1889 में क्यूटले महोदय ने सांख्यिकी की 108 परिभाषाओं की सूची तैयार की थी । उन सभी परिभाषाओं को यहाँ देना न तो आवश्यक है और न ही उपयोगी, लेकिन

कुछ मुख्य परिभाषाएं इस प्रकार हैं -

केण्डाल के अनुसार "सांख्यिकी वैज्ञानिक पद्धति की वह शाखा है जो प्राकृतिक साधनों की विशेषताओं को सामूहिक रूप में माप कर या गिनकर प्राप्त सामग्री से सम्बन्धित है ।"

प्रो0 यूल तथा प्रो0 केण्डाल के अनुसार "समंको से तात्पर्य उन आँकडों से है जो पर्याप्त सीमा तक अनेक प्रकार के कारणों से प्रभावित होते हैं ।"

सेलिग्मैन के अनुसार "सांख्यिकी वह विज्ञान है जो किसी जाँच के लिए एकत्रित आँकड़ों के संकलन, वर्गीकरण, सारणीयन, विश्लेषण और व्याख्या की पद्धतियों की विवेचना करता है ।"

उपर्युक्त सभी परिभाषाओं का अध्ययन करने से यह स्पष्ट होता है कि कोई भी परिभाषा पूर्ण नहीं है क्यों कि अलग-अलग विद्वानों ने सांख्यिकी को अलग-अलग परिभाषित किया है । कोई विद्‌वान समंकों के रूप में तथा किसी ने सिद्धान्तों और पद्धतियों, किसी ने विज्ञान व कला आदि बताया है । इसलिए सांख्यिकी के महत्व को देखते हुए इस प्रकार कहा जा सकता है कि, "सांख्यिकी तथ्यों का बह आंकिक विवरण है जो विश्लेषण व व्यख्या के योग्य है तथा सांख्यिकी विज्ञान उन सिद्धान्तों व पद्धतियों का अध्ययन है जिनका प्रयोग किसी जाँच से सम्बन्धित आँकड़ों के संकलन, वर्गीकरण, सारणीयन, विश्लेषण व व्यख्या के लिए होता है ।"

बोध प्रश्न

1. बहु वचन के रूप में सांख्यिकीय का क्या आशय है?
2. एक वचन के रूप में सांख्यिकीय का क्या आशय है?
3. सांख्यिकीय की होरेस सीक्रेस्ट की परिभाषा दीजिए।

1.3 सांख्यिकी की प्रकृति (Nature of Statistics)

1.3.1 सांख्यिकी विज्ञान है (Statistics is a Science)

विभिन्न विद्‌वानों की उपर्युक्त परिभाषाओं से यह स्पष्ट होता है कि सांख्यिकी विज्ञान और कला दोनों है क्यों कि कुछ विद्‌वानों ने इसे विज्ञान तो कुछ ने इसे कला माना है । ऐसी विवादास्पद स्थिति में यह स्पष्ट कर पाना कठिन है कि सांख्यिकी विज्ञान है या कला या दोनों ही है । इसका हल एक ही है कि सांख्यिकी के कार्य क्षेत्र और उपयोग का विस्तृत अध्ययन किया जाय ।

सांख्यिकी के अन्तर्गत तथ्यों का अध्ययन व्यवस्थित व पूर्व नियोजित विधि से किया जाता है । जिस प्रकार भौतिक विज्ञान में सुनिश्चित और सभी स्थानों पर समान रूप से लागू होने वाले सिद्धान्त होते हैं उसी प्रकार सांख्यिकी के नियम और सिद्धान्त होते हैं । इन परिस्थितियों में सांख्यिकी को अगर विज्ञान कहा जाय तो कोई अतिश्योक्ति नहीं होगी ।

सांख्यिकी विधियों के अन्तर्गत संकलित तथ्यों के आधार पर निष्कर्ष निकालने के लिए समंकों का वर्गीकरण, सारणीयन, ग्राफ व रेखाचित्र का उपयोग किया जाता है । इसे व्यवस्थित व सुन्दर ढंग से किया जाता है । इन सभी कार्यों के लिए हमें एक कलाकार की आवश्यकता पडती है, वह अपनी कला के माध्यम से सभी कार्य करता है । यही कलाकार शोधकर्ता या अनुसंधानकर्ता होता है । इस दृष्टि से सांख्यिकी को हम कला भी कह सकते हैं । इसलिए "पर्सन व हर्लोज" की यह परिभाषा सत्य हो जाती है कि "सांख्यिकी विज्ञान तथा कला दोनों है" ।

उपर्युक्त विवेचन से स्पष्ट है कि सांख्यिकी विज्ञान तथा कला दोनों हैं । इसके सैद्धान्तिक तथा व्यवहारिक दोनों पहलू हैं । इसका प्रयोग केवल ज्ञान प्राप्त करने के उद्देश्य से ही नहीं होता बल्कि

तथ्यों को समझने तथा उनसे महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकालने के उद्देश्य से भी किया जाता है जो भविष्य में आर्थिक तथा सामाजिक उन्नति का पथ प्रशस्त करते है ।

यहाँ "टिपेट" ने ठीक ही कहा है कि "सांख्यिकी विज्ञान तथा कला दोनों हैं । यह विज्ञान इसलिए है कि इसकी रीतियाँ मौलिक रूप से क्रमबद्ध हैं और उनका सर्वत्र प्रयोग होता है और कला इसलिए है कि इसकी रीतियों का सफल प्रयोग पर्याप्त सीमा तक सांख्यिकी की योग्यता व विशेष अनुभव तथा उसके प्रयोग, क्षेत्र जैसे अर्थशास्त्र के ज्ञान पर निर्भर करता है।"

1.3.2 सांख्यिकी का अर्थशास्त्र से सम्बन्ध (Relation of Statistics with Economics)

प्राचीन काल में सांख्यिकी और अर्थशास्त्र का कोई सम्बन्ध नहीं था, क्यों कि न तो अर्थशास्त्र ही तथा न ही सांख्यिकी इतना अधिक विकसित हुई थी । लेकिन सांख्यिकीय आँकड़ों का प्रयोग राजनीतिक दृष्टिकोण से अवश्य किया जाता था। ज्यों-ज्यों आर्थिक क्रियाओं से सम्बन्धित अध्ययन का विकास हुआ त्यों-त्यों अर्थशास्त्र में समंकों के संग्रहण एवं सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग बढ़ने लगा । वर्तमान समय में किसी भी आर्थिक तथ्य को स्पष्ट करने के लिए जो आँकड़ो प्रस्तुत किये जाते हैं उनका विश्लेषण सांख्यिकी विधियों से ही किया जाता है । आज अर्थशास्त्र के स्पष्टीकरण के लिए सांख्यिकी का प्रयोग अनिवार्य सा हो गया है । इसलिए कहा गया है कि, "आज बिना सांख्यिकी की सहायता के अर्थशास्त्र का ज्ञान अधूरा है ।"

प्रो. मार्शल ने उपरोक्त कथन की सत्यता को बताते हुए कहा है कि "समंक दे तृण है जिनसे प्रत्येक अर्थशास्त्री की भाँति मुझे भी ईंट बनानी पड़ती है ।" अर्थात् आर्थिक नियम रूपी ईंटें तैयार करने के लिए सांख्यिकी रूपी तृण आवश्यक है। अर्थशास्त्र के लगभग सभी क्षेत्रों में सांख्यिकी का प्रयोग अधिकाधिक बढ़ता जा रहा है । आर्थिक नीतियों का क्या प्रभाव पड़ता है इसकी जाँच के लिए सांख्यिकी ही उपयुक्त साधन है ।

अर्थशास्त्र के अध्ययन की आगमन प्रणाली, उत्पादन की दर, जनसंख्या का घनत्व, प्रतिव्यक्ति आय, उपयोगिता ह्रास नियम, माल्थस का जनसंख्या सिद्धान्त आदि सभी नियमों की पुष्टि के लिए तथा इनके स्पष्टीकरण के लिए सांख्यिकी का प्रयोग अनिवार्य है । इसलिए सिद्धान्त तथा व्यवहार दोनों पक्षों के लिए अर्थशास्त्री को सांख्यिकी की सहायता लेना आवश्यक है ।

अर्थशास्त्र में सांख्यिकी का प्रयोग सर्वप्रथम "ग्रेगोरी किंग" ने सत्रहवीं शताब्दी में किया । इन्होंने वस्तुओं के मूल्य व पूर्ति का सम्बन्ध निश्चित करने के लिए इसका प्रयोग किया । इसके पश्चात उन्नीसवीं शताब्दी में "जेवन्स", "हिन्हव्रेण्ड" "लेस्ली" आदि अर्थशास्त्रियों ने तथा बीसवीं शताब्दी में मार्शल, कीन्स, पेरेटो आदि ने किया । प्रसिद्ध अर्थशास्त्री "जेवन्स" ने सांख्यिकी की अर्थशास्त्र में उपयोगिता बताते हुए कहा है कि "मैं यह नहीं जानता कि हम कब पूर्ण सांख्यिकी अवस्था को प्राप्त कर सकेगें परन्तु उसकी कमी ही अर्थशास्त्र को पूर्ण विज्ञान बनाने में एक मात्र अजेय बाधा है ।"

प्रसिद्ध संख्याशास्त्री टिपेट ने तो यहाँ तक कहा है कि **"एक दिन ऐसा हो सकता है कि विश्वविद्यालयों के अर्थशास्त्र विभाग कोरे सिद्धान्तवादियों के प्रभुत्व में न रहकर सांख्यिकी प्रयोगशालाओं के प्रभाव में उसी प्रकार आ जायेगें जिस प्रकार भौतिक तथा रसायनशास्त्र विभाग प्रयोगशालाओं के प्रभाव में है ।"** अर्थशास्त्र में नवीन सिद्धान्तों के प्रतिपादन के आधार नवीन प्राप्त समंक तो होते ही हैं लेकिन माल्थस का जनसंख्या सिद्धान्त अर्थशास्त्र में सांख्यिकी के प्रयोग का एक

ज्वलंत उदाहरण है । माल्थस ने अपने समय में इग्लैण्ड की बुरी आर्थिक दशा का अध्ययन किया और जनसंख्या की दृष्टि की ज्यामिती दर तथा खाद्यान्न दृष्टि की गणितीय दर का प्रतिपादन किया । इसके अतिरिक्त माँग का नियम, मुद्रा परिमाण सिद्धान्त आदि अर्थशास्त्र में सांख्यिकी के प्रयोग के उदाहरण हैं ।

अर्थशास्त्र के अन्तर्गत ही पश्चिमी देशों में एक नये विषय अर्थमिती का उदय हुआ । इसके अन्तर्गत आर्थिक नियमों की पुष्टि सांख्यिकी के द्वारा किया जाता है, इस विषय का मुख्य उद्देश्य यह हे कि सांख्यिकी को अर्थशास्त्र के क्षेत्र में अधिक व्यावहारिक व उपादेय बनाया जाय । आर्थिक क्रियाओं का मापन व पूर्वानुमान करने में इस विषय के अन्तर्गत विकास प्रतिरूपों, समीकरणों एवं फलनों का सहारा लिया जाता है । आस्कर लांगे ने स्पष्ट किया है कि, "अर्थमिती वह विज्ञान है जो आर्थिक जीवन में घटित होने वाले ठोस नियमों के सांख्यिकीय विधियों द्वारा निर्धारण सम्बन्ध रखता है ।"

इस प्रकार सांख्यिकी और अर्थशास्त्र का बहुत घनिष्ठ सबक है । वर्तमान समय में प्रत्येक अर्थव्यवस्था के आर्थिक विकास के लिए जो भी योजनायें बनाई जाती है उसमें सांख्यिकीय विधियों का अवश्य प्रयोग किया जाता है । निष्कर्ष यह निकलता है कि जिन अर्थव्यवस्थाओं में आर्थिक क्रियाओं के अध्ययन में सांख्यिकीय पद्धतियों का अधिकाधिक प्रयोग किया जायेगा व अर्थव्यवस्था उतनी ही अधिक विकसित मानी जायेगी ।

इसके अतिरिक्त सांख्यिकी का सम्बन्ध गणित से भी है क्यों कि सांख्यिकी में माध्य, सूचकांक, रेखाचित्र, सहसम्बन्ध, आन्तरगणन एवं बाह्यगणन आदि गणित के सिद्धान्तों पर ही आधारित हैं । गणितीय सूत्रों से सांख्यिकीय नियमितता नियम, महांक जड़ता नियम, प्राथमिकता सिद्धान्त आदि सांख्यिकी के महत्वपूर्ण नियमों को सिद्ध किया जाता है ।

सांख्यिकी का केवल अर्थशास्त्र एवं गणित से ही समाज न होकर बल्कि अन्य सामाजिक विज्ञानों से भी जैसे समाजशास्त्र, राजनीतिशास्त्र, मनोविज्ञान और शिक्षाशास्त्र आदि । सामाजिक विज्ञान के इन विषयों में नियमों और सिद्धान्तों के प्रतिपादन और पुष्टिकरण के लिए सांख्यिकी का प्रयोग किया जाता है । मुख्य रूप से अर्थव्यवस्था में आर्थिक समस्याओं के अतिरिक्त कुछ सामाजिक समस्यायें भी होती हैं जैसे निरक्षरता, बेकारी, अपराधप्रवृति जातिगत व पारिवारिक सम्बन्ध, सामाजिक विघटन आदि के विवेचन व समाधान में सांख्यिकीय रीतियाँ अनिवार्य रूप से प्रयोग की जाती हैं । सांख्यिकी के द्वारा नवीन समंको का संकलन किया जाता है और अर्थशास्त्रियों की भाँति समाजशास्त्री सामाजिक नियमों की जाँच करके उसमें आवश्यक संशोधन भी करते है । वास्तविकता तो यह है कि सामाजिक विज्ञानों के अनुसंधानकर्ता के लिए सांख्यिकीय विधियाँ उपयोगी है ।

1.4 सांख्यिकी के कार्य (Functions of Statistics)

सांख्यिकी का कार्य किसी भी क्षेत्र में समंक संकलन से लेकर निष्कर्ष प्राप्ति तक होता है । रोड्स (Rhodes) ने सांख्यिकी के कार्य को स्पष्ट किया है कि सांख्यिकी के कार्य को उचित ढंग से तीन भागों में बाँटा जा सकता है, प्रथम- सांख्यिकीय समंको को एकत्र करने से, द्वितीय-उनके विश्लेषण करने से तथा तृतीय- ऐसे विश्लेषण द्वारा प्राप्त फलों से निर्वचन करने से सम्बन्ध रखता है ।" समंकों के संकलन का कार्य तो सांख्यिकी का है लेकिन इसे करने वाला सांख्यिक (Statistician) कहलाता है । यह सांख्यिक संकलित समंकों का सम्पादन, वर्गीकरण सारणीयन, विश्लेषण इत्यादि करके अन्त

में निष्कर्ष देता है । इसे स्पष्ट करते हुए **"नीस्वैनर ने कहा है कि "सांख्यिक का कर्तव्य समंको का संकलन करने तथा गणनाएं करने से कहीं अधिक आगे हैं । समंक स्वंय कुछ नही बोलते और सांख्यिक ही वह व्यक्ति है जिसे उनके अर्थो को खोज करने के लिए सांख्यिकीय परिणामों का निर्वचन करना होता है ।"** सांख्यिक के लिए यह आवश्यक है कि सांख्यिकीय ज्ञान के साथ-साथ गणित का भी अच्छा ज्ञान होना चाहिए । सांख्यिकीय के कार्यो के सन्दर्भ में "रावर्ट डब्लू. वर्गेस" का कथन है कि, सांख्यिक का मौलिक सिद्धान्त अज्ञानता, पूर्वधारणा, निरंकुश सत्ता, निराधार व अपीरपक्व निर्णय, परम्पराओं व रूढिवादी सिद्धान्तों के क्षेत्र को हटाकर ऐसे क्षेत्र की वृद्धि करना है जहाँ विश्लेषण किये गये परिमाणात्मक तथ्यों के आधार पर निर्णय लिये जाते है और सिद्धान्त प्रतिपादित किये जाते हैं ।

विभिन्न नियमों से सम्बन्धित तथा इसकी उपयोगिता को देखते हुए यह कहा जा सकता है कि सांख्यिकी का कार्य प्रत्येक क्षेत्रों में बहुत अधिक बढ़ गया है । इसलिए महत्वपूर्ण कार्यों को निम्नलिखित भागों में बाँटा जा सकता हैं -

(1) सांख्यिकी तुलना व सम्बन्ध निर्माण की सुविधा प्रदान करती है

विभिन्न तथ्यों के मध्य तुलना करके उनकी उपयोगिता ज्ञात करने में सांख्यिकीय विधियाँ अत्यधिक सहायक हैं ।

इसके अतिरिक्त सांख्यिकी तथ्यों के मध्य सम्बन्ध निर्माण में भी सहायक होती है, इसके लिए सह-सम्बन्ध सांख्यिकी पद्धति महत्वपूर्ण है ।

(2) सांख्यिकी तथ्यों की सीमायें स्पष्ट करती है

सांख्यिकी के द्वारा तथ्यों के कार्य क्षेत्र एवं उनकी सीमायें तथा उनका विस्तार निर्धारित कर सकते हैं । इस प्रकार यदि तथ्य अंकों के रूप में हैं तो उनकी गम्भीरता का पता सांख्यिकी से अवश्य लगाया जा सकता है ।

(3) **सांख्यिकी सिद्धान्त प्रतिपादन व नीति निर्धारण में सहायक है**

सांख्यिकी का अन्य विषयों या विज्ञानों से सम्बन्ध होने के कारण जब कहीं नीति निर्धारण या सिद्धान्त की आवश्यकता पड़ती है तो सांख्यिकीय तथ्यों या विधियों का पूर्ण उपयोग किया जाता है । जब देश में मूल्य नीति, व्यापारिक नीति, लाइसेन्स नीति आदि का निर्धारण करना होता है तो इन्हीं सांख्यिकीय विधियों का उपयोग किया जाता है ।

(4) वैज्ञानिक नियमों को प्रतिपादित करना

सांख्यिकी जहाँ एक और सिद्धान्त और नियम बनाने में सहायक है बही यह इन नियमों को प्रमाणित करने में भी सहायक है । अर्थात् कोई नियम सही है या गलत इसे सांख्यिकी द्वारा प्रमाणित किया जा सकता है ।

(5) सांख्यिकी तथ्यों को संख्यात्मक रूप में स्पष्ट करती है

संकलित तथ्य मुख्य रूप से दो प्रकार के होते हैं, प्रथम वे तथ्य जो संख्यात्मक रूप प्रकट करते हैं, द्वितीय वे जो संख्यात्मक रूप प्रकट नहीं करते हैं । सांख्यिकी के द्वारा जो तथ्य संख्यात्मक रूप प्रकट नहीं करते हैं उन्हें संख्यात्मक रूप दिया जाता है । इस प्रकार तथ्यों के गुणात्मक होने पर भी इनका संख्यात्मक रूप सांख्यिकी के द्वारा दिया जा सकता है।

(6) सांख्यिकी समस्याओं को निश्चयात्मकता प्रदान करती है

किसी भी विवादित विषय में पर्याप्त तथ्यों को प्राप्त करके सांख्यिकीय विधियों के द्वारा उस विवाद को हल करके निश्चय ही निष्कर्ष प्राप्त किया जा सकता है । यहाँ डॉ० वाउले का कथन स्पष्ट है कि, सांख्यिकीय अनुमान आकस्मिक दृष्टा के अनुमान से अधिक शुद्ध होता है भले ही बुरा या अशुद्ध क्यों न हों ।

(7) जटिल तथ्यों को सांख्यिकी सरल तथा ग्राह्य बनाती है

बिखरे हुए तथा जटिल तथ्य उन पत्थर के टुकड़ों के समान हैं जिसका कोई उपयोग नहीं है लेकिन सांख्यिकी उन बिखरे हुए तथ्य रूपी पत्थरों को विभिन्न पद्धतियों का प्रयोग करके एक मकान का रूप देती है जिसे देख कर एक सामान्य व्यक्ति भी किसी तथ्य की प्रवृत्ति ज्ञात कर सकता है।

(8) व्यक्तिगत ज्ञान व अनुभव में वृद्धि

सांख्यिकीय कार्यो में तथ्य संकलन से लेकर विश्लेषण तक के सभी कार्यों में संख्याविद को बहुत से कार्य करने पड़ते हैं । इसलिए प्रत्येक क्षेत्रों का ज्ञान होना आवश्यक है । इस प्रकार विषय का निष्कर्ष ज्ञात करने के लिए अनेक विषयों का सहारा लेना पड़ता है । इससे व्यक्ति का ज्ञान बढ़ता है तथा अनुभव में वृद्धि होती है ।

उपरोक्त कार्यो से स्पष्ट होता है कि सांख्यिकी का हमारे जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में आवश्यकता पड़ती है यहाँ तक कि किसी भी क्षेत्र का वह व्यक्ति हो बिना सांख्यिकी के सम्पूर्ण अध्ययन संभव नही हैं । इससे यह स्पष्ट होता है कि विज्ञान से लेकर अन्य विषयों का पूर्ण अध्ययन सांख्यिकी के बिना अधूरा है । इसी कारण सांख्यिकी का महत्व भी बहुत अधिक बढ़ गया है ।

बोध प्रश्न-02

1. क्या सांख्यिकी विज्ञान है? स्पष्ट कीजिए।
2. क्या सांख्यिकी कला है? स्पष्ट कीजिए।
3. सांख्यिकी का अर्थशास्त्र से क्या सम्बन्ध है? समझाइए।
4. सांख्यिकी के किन्हीं तीन कार्यों की सूची बनाइये।

1.5 सांख्यिकी का महत्व या सांख्यिकी की उपयोगिता (Importance of Statistics or Utility of Statistics)

प्राचीन काल में सांख्यिकी का प्रयोग राजकीय कार्यों के लिए होता था, इसलिए इसे राजविज्ञान या राजनीति गणित कहा जाता है । जैसे-जैसे सभ्यता का विकास हुआ सांख्यिकी के प्रयोग का क्षेत्र भी बढ़ता गया । आज सभी क्षेत्रों में समंकों का प्रयोग होता है क्यों कि यहाँ मानव कल्याण का उद्देश्य छिपा रहता है ।ऐसी स्थिति में आधुनिक युग की दृष्टि से सांख्यिकी के "मानव कल्याण का अंकगणित" (Arithmetic of Human Welfare) कहा जाय तो यह उचित होगा । इस दृष्टि से सांख्यिकी का महत्व बहुत अधिक बढ़ गया है । वालिस तथा रावर्ट्स का कथन सत्य है कि "सांख्यिकी एक ऐसा अस्त्र है जो प्रयोगसिद्ध अनुसंधान के लगभग प्रत्येक क्षेत्र में उत्पन्न होने वाली समस्याओं पर आक्रमण (समाधान) करने में प्रयोग किया जा सकता है ।"

इस प्रकार सांख्यिकी का महत्व उसकी सरलता, ग्राह्यता, तर्क तथा निष्कर्ष प्रदान करने की क्षमता, तुलना की योग्यता व सम्बन्ध ज्ञात करने की सरलता के कारण हैं । वर्तमान समय में सांख्यिकी

का महत्व प्रत्येक विषय के लिए अलग-अलग है इसलिए प्रत्येक क्षेत्र के लिए विशेष महल को देखना आवश्यक हो जाता है जो इस प्रकार है -

(1) अर्थशास्त्र में महत्व

सम्पूर्ण आर्थिक समस्याओं का अध्ययन् हम सांख्यिकी के द्वारा ही करते हैं । अर्थशास्त्र के प्रत्येक क्षेत्र में महत्वपूर्ण तथ्यों के स्पष्टीकरण तुलना व्याख्या व सम्बन्धों को ज्ञात करने के लिए सांख्यिकी की आवश्यकता पडती है । सांख्यिकी के माध्यम से ही यह ज्ञात करते हैं कि व्यक्तियों के व्यय का क्या तरीका है तथा अपनी आवश्यकताओं की पूर्ति के लिए किस प्रकार अवस्था करते हैं । सांख्यिकी देश में उत्पादन की मात्रा, सांख्यिकी देश में उपभोग की मात्रा, सांख्यिकी देश के लाभ को बस्तियों में वितरित करने आदि को स्पष्ट करती है ।

(2) आर्थिक नियोजन में सांख्यिकी का महत्व

आधुनिक युग में प्रत्येक राष्ट्र योजनाबद्ध आर्थिक विकास में लगा हुआ है चाहे वह विकसित या विकासशील हो । आर्थिक विकास हेतु नियोजन के उद्देश्यों की पूर्ति और नीति तथा प्रशासन सम्बन्धी निर्णय लेने के लिए निरन्तर अधिकाधिक मात्रा में आँकड़ों की आवश्यकता पड़ती है । इस प्रकार नियोजन आज का व्यवस्थित क्रम है तथा सांख्यिकी के बिना नियोजन अर्थहीन है ।" इसलिए सांख्यिकी के महत्व को इस प्रकार भी कह सकते हैं कि "समंको के बिना आर्थिक नियोजन बिना पतवार और दिशासूचक यंत्र रहित जहाज की तरह ही है ।"

किसी भी देश के नियोजित आर्थिक विकास के लिए यह आवश्यक है कि वहाँ के उपलब्ध साधन एवं आवश्यकताओं तथा मुख्य समस्याओं की पूर्ण जानकारी है । यह सांख्यिकी के द्वारा ही हो सकती है । भारत में पंचवर्षीय योजनाओं की असफलता का मुख्य कारण सांख्यिकीय सूचनाओं की कमी है । इसके विपरीत विघटन पूर्व रूस में पर्याप्त सांख्यिकीय सूचनाओं के कारण बहुत थोड़े समय में इतना विशाल देश विश्वस्तर पर आर्थिक नियोजन के कारण महत्वपूर्ण स्थान बना पाया । भले ही आज कस कई भागों में विभक्त हो गया है । इसलिए यह आवश्यक है कि जो सांख्यिकीय सूचनाऐं प्राप्त हो वह सही और विश्वसनीय हो तथा उनका प्रयोग उचित रीति से किया जाय ।

(3) व्यापार और वाणिज्य में सांख्यिकी

वास्तव में आज के व्यवसायी की सफलता उसके व्यापारिक पूर्वानुमानों पर ही निर्भर करती है । व्यापार की सफलता या असफलता उस व्यक्ति के द्वारा किये गये पूर्वानुमानों पर निर्भर करती है । व्यवसाय की प्रकृति माँग, मूल्य, पूर्ति, उत्पादन, उपभोग आदि सभी क्षेत्रों से प्राप्त सूचनाओं के आधार पर व्यवसायी अपने व्यवसाय के लिए पूर्वानुमान लगाता हैं और वह वर्ष भर व्यापार करता है, यदि उसके पूर्वानुमान सही रहते हैं तो उसे लाभ प्राप्त होता है और यदि पूर्वानुमान गलत है तो हानि उठानी पडती है । व्यापार चक्र के आधार पर उत्पादन की मात्रा निर्धारित होती है । ये सभी कार्य सांख्यिकी के माध्यम से किये जाते हैं ।

इसी प्रकार व्यापार के संगठन व प्रशासन से सम्बन्धित समस्याओं के हल करने के लिए, क्रय व विक्रय नीति निर्धारण के लिए, मूल्य निर्धारण के सम्बन्ध में सांख्यिकीय विधियों की आवश्यकता होती है । लागत लेखांकन भी सांख्यिकीय आँकडों पर निर्भर होता है, इसलिए सांख्यिकीय विज्ञान का महत्व व्यापार व वाणिज्य में अधिक है । डा. वांडिगटन ने यहाँ तक महा है कि, "वर्तमान समय में किसी व्यवसाय में सफलता प्राप्त करने के लिए व्यवसायी को माल के उत्पादन, क्रय व विक्रय तथा

आयात व निर्यात सम्बन्धित सभी समस्याओं का अध्ययन आवश्यक है जिसका वह व्यवसाय करता है ।" सांख्यिकी ही वह माध्यम है जिससे व्यापारिक अनिश्चितताओं की मात्रा ज्ञात की जा सकती है तथा उनके अनुसार तथ्यों के प्रयोग के महत्व को स्पष्ट करते हुए इस प्रकार कहा गया है कि, "यदि सभी समाचार पत्रों, पत्रिकाओं, रेडियों व तार द्वारा दी जाने वाली मूल्य सम्बन्धी सूचनाओं को एक दिन के लिए हटा दिया जाय तो व्यवसायिक जगत शक्तिहीन हो जायेगा । यदि वर्तमान समय में उपलब्ध सभी सूचनायें एक वर्ष के लिए हटा दी जाये तो परिणाम स्वरूप विश्व में विनाश व आर्थिक अव्यवस्था का साम्राज्य हो जायेगा ।" इस का जितना अधिक वर्णन किया जाय उतना ही अपर्याप्त है ।

(4) वैंकर्स, दलाल, बीमा कम्पनिंयों, स्कन्ध विनिमय विपणियों, परिकल्पकों, विनियोजकों आदि के लिए सांख्यिकी का महत्व

एक बैंकर को अपने ग्राहकों द्वारा मुद्रा की, दी जाने वाली माँग का अनुमान लगाना होता है । ऐसी स्थिति में व्यापार चक्र का सांख्यिकी अध्ययन आवश्यक होता है । इन तथ्यों के अध्ययन के पश्चात् ही एक बैंकर पूँजी संग्रह की मात्रा निर्धारित करते हैं बैंकर्स की भाँति सांख्यिकी का प्रयोग स्कन्ध विनिमय-विपणि (Stock Exchange), दलाल (Brokers), परिकल्पको (Speculators) तथा विनियोजकों (Investors) द्वारा भी किया जाता हैं । इन्हें विभिन्न स्थानों व क्षेत्रों में मुद्रा की उपयोगिता व उसके दर का ज्ञान रखना होता है ।

यहाँ तक कि परिकल्पक भविष्य का लाभ देखकर ही स्कन्ध- विनिमय-विपणि में कार्य करता है । इसी प्रकार विनियोजक लाभप्रद संस्थाओं में ही पूँजी विनियोग का प्रयत्न करता है । स्कन्ध-विनिमय-विपणि के दलाल सदा ही लाभदायक प्रतिभूतियों में व्यवसाय करने के पक्ष में होते हैं । बीमा कम्पनियाँ सांख्यिकीय आँकड़ो के अभाव में अपना व्यवसाय नहीं चला सकती है' । इनके व्यापार के लिए जीवन सारिणियाँ, जीवन प्रत्याशा, प्रायिकता सिद्धान्त तथा जनसंख्या सम्बन्धी आँकडों का सहारा लेना पड़ता है जिनका पूर्ण सम्बन्ध सांख्यिकी से है । इस प्रकार प्रत्येक व्यवसाय चाहे वह किसी भी प्रकार का हो बिना सांख्यिकीय आकड़ों के नहीं चल सकता है ।

(5) व्यवसाय प्रशासन में उपयोगिता

आधुनिक युग में यह संभव हो गया है कि प्रबन्धकीय व प्रशासनिक समस्याओं के समाधान के लिए भी सांख्यिकीय आँकडों का प्रयोग किया जाय । आज के प्रशासन की मूल समस्या अनिश्चितता में निर्णय लेने की है । यह अनिश्चितता सांख्यिकीय सिद्धान्तों के प्रयोग द्वारा समाप्त होगी । प्रशासन का सम्बन्ध पूर्ण व्यवसाय से होता है अर्थात् उसे बाजार, उत्पादन, विनियोग, किस्म नियंत्रण, लागत, कर्मचारियों की नियुक्ति, आर्थिक पूर्वानुमान, अंकेक्षण, साख आदि पर ध्यान देना होता है ।

(6) राज्यों व सरकार के लिए सांख्यिकी का महत्व

किसी भी नीति निर्धारण के पूर्व कोई राज्य या सरकार उसे विभिन्न पहलुओं से परखती है और जब यह नीति जनहित में होती है तो उसे लाग करती है यह सभी कार्य सांख्यिकी के माध्यम से किया जाता है । समाज में बुरी आदतों की समाप्ति के लिए पहले पर्याप्त सूचनायें प्राप्त होनी चाहिए, तब उसके लिए नीति निर्धारण की जाती है । आर्थिक विकास का अनुमान वहाँ की आर्थिक नीति और राष्ट्रीय आय से लगाया जाता है जो सांख्यिकीय समंकों द्वारा ही प्राप्त होता है । यही कारण है कि प्रत्येक राजकीय कार्य में सांख्यिकीय तथ्यों के एकीकरण का कार्य होता है ।

(7) शोध कार्यो में सांख्यिकी का महत्व

आधुनिक युग में लगभग प्रत्येक क्षेत्रों के शोध कार्यों में सांख्यिकी आवश्यक हो गई है । जैसे उपज के सम्बन्ध में जानवरों की नस्ल सुधार में, नवीन औषधि के आविष्कार में, व्यापार व वाणिज्य में, वस्तुओं के गुणों व किस्मों के सुधार आदि में सांख्यिकी का प्रयोग करते हैं । इससे यह सिद्व होता है कि एक शोधकर्ता के लिए जिसका शोध कार्य किसी भी रूप में अंकों से सम्बन्धित है, सांख्यिकीय विधियों का अध्ययन न केवल उपयोगी है वरन् आवश्यक भी है ।

(8) सांख्यिकी का सार्वभौमिक महत्व

सांख्यिकी का प्रयोग आधुनिक युग में बहु त अधिक बढ़ गया है, सामान्य जीवन की प्रत्येक अवस्था में सांख्यिकी का प्रयोग अनिवार्य सा हो गया है । सांख्यिकी नियोजन, पूर्वानुमान, संगठन, प्रशासन, नीति निर्धारण, निर्णय करने के लिए तथा शोध कार्यों में पर्याप्त मात्रा में उपयोगी है । इस प्रकार सांख्यिकी के महल को स्पष्ट करने के लिए उसकी सार्वभौमिक उपयोगिता स्पष्ट कर देना आवश्यक है । इस सार्वभौमिकता को स्पष्ट करते हु ए टिपेट ने कहा है कि"सांख्यिकी प्रत्येक को प्रभावित करती है और अनेकानेक बिन्दु पर जीवन को स्पर्श करती है"। डा0 वाउले का कथन है कि "सांख्यिकीय ज्ञान विदेशी भाषा के ज्ञान या बीजगणित के ज्ञान की तरह है । उपयोगिता की दृष्टि से इसे किसी भी समय किसी भी परिस्थिति में प्रमाणित किया जा सकता हैं" । इस प्रकार किसी भी व्यक्ति के लिए किसी भी परिस्थितियों में इसका ज्ञान बहु त सहायक होता हैं ।

1.6 समंको की विशेषतायें (Characteristics of Data)

समंको की विशेषता अर्थव्यवस्था में बहु त अधिक है क्यों कि किसी भी क्षेत्र में शोध करने हेतु समंको की आवश्यकता पडती है इसी आधार पर समंको की विशेषतायें निम्नलिखित बताई गई है

(1) समंको के संकलन करने का उद्देश्य पूर्व निश्चित होना चाहिए, क्यों कि बिना उद्देश्य के समंक संकलन का कोई अर्थ नहीं होता है । उदाहरण स्वरूप किसी उद्योग में लगे श्रमिकों की मजदूरी के आँकड़े एकत्र करना है तो इसका उद्देश्य पूर्व निश्चित होना चाहिए कि इन आँकड़ों से उनके जीवन स्तर का अनुमान लगाना है, उनकी मजदूरी वृद्धि पर विचार करना है या तुलनात्मक विश्लेषण करना है ।

(2) समंको के संकलन में शुद्वता की मात्रा होनी आवश्यक है । शुद्वता विभिन्न परिस्थितियों में भिन्न होती है क्यों कि यह शुद्वता अनुसंधान के उद्देश्य, प्रकृति, आकार व उपलब्ध साधनों पर निर्भर होती है ।

(3) समंकों का संकलन गणना या अनुमान दोनों प्रकार से किया जा सकता है जब अनुसंधान का क्षेत्र सीमित होता है तो गणना को आधार माना जाता है जब अनुसंधान का क्षेत्र विस्तृत हो जाता है तो यहाँ अनुमान ही समंक संकलन का आधार होता है ।

(4) क्यों को मुख्य रूप से दो रूपों में वक्त किया जाता है एक तो गुणात्मक रूप तथा दूसरा संख्यात्मक रूप । लेकिन संख्यात्मक रूप में जो तथ्य प्रस्तुत किये जाते हैं यही समंक कहलाते हैं ।

(5) अर्थव्यवस्था में बहुत से ऐसे कारण होते हैं जिससे समंक प्रभावित होते हैं ऐसी स्थिति में समंको का सांख्यिकीय विश्लेषण आवश्यक हो जाता है । जैसे कृषि उत्पादन में जलवायु, वर्षा, सिंचाई, भूमि, खाद आदि अनेक कारणों का पड़ता है ।

(6) समंक का प्रस्तुतीकरण इस प्रकार होना चाहिए कि वह आपस में तुलना योग्य हो और तुलना के लिए समंकों में सजातीयता या एकरूपता होना आवश्यक है ।

(7) किसी एक तथ्य से सम्बन्धित अंक समंक नहीं कहलाता क्यों कि उससे कोई निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता है । लेकिन अनेक तथ्यों के अंक समंक होते हैं उनकी परस्पर तुलना की जा सकती है और उनसे समुचित निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं ।

1.7 सांख्यिकी की सीमायें (Limitations of Statistics)

सांख्यिकी के महत्व को देखकर यह नहीं समझ लेना चाहिए कि इसमें कोई कमी नहीं है क्योंकि न्यूजहोम ने कहा है कि, "सांख्यिकी को अनुसंधान का एक महत्वपूर्ण साधन समझना चाहिए किन्तु इसकी सीमाएँ हैं जिन्हें हटाया जाना समूह नहीं है और इसीलिए इन पर हमें सावधानी से विचार करना चाहिए ।" वास्तव में सांख्यिकी की सीमायें निम्नलिखित हैं -

(1) सांख्यिकी गुणात्मक तथ्यों का अध्ययन नहीं करती

मुख्य रूप से तथ्य दो प्रकार के होते हैं संख्यात्मक और गुणात्मक, तो सांख्यिकी केवल संख्यात्मक तथ्यों तक ही सीमित है । गुणात्मक तथ्यों को भी विभिन्न रूपों में संख्यात्मक बनाकर अध्ययन किया जा सकता है । जैसे अमीरी या गरीबी का अध्ययन करने के लिए व्यक्तियों के आय व रहन-सहन के स्तर का अध्ययन करना आवश्यक होता है । इसी प्रकार किसी वस्तु की उपयोगिता का अध्ययन करने के लिए हमें उपभोक्ताओं की रूचि, माँग व पूर्ति का अध्ययन करना होता है । इससे यह स्पष्ट होता है कि प्रत्यक्ष रूप से गुणात्मक तथ्यों का अध्ययन सांख्यिकी से करना संभवन नहीं है ।

(2) किसी समस्या के अध्ययन के लिए सांख्यिकीय विधि एक मात्र विधि नहीं है

देश की कई ऐसी समस्यायें होती हैं जो सांख्यिकी की सीमा से बाहर होती हैं क्योंकि देश के रीति-रिवाज, मनोविज्ञान या धर्म का अध्ययन हम सांख्यिकी से नहीं कर सकते हैं, इसलिए यह स्पष्ट होता है कि समस्याओं के अध्ययन के लिए सांख्यिकी ही एक मात्र नहीं है ।

(3) सांख्यिकीय नियम केवल औसत रूप से सत्य होते हैं

अन्य विज्ञानों की तरह सांख्यिकी पूर्ण सत्य नहीं होती है क्योंकि यह प्रत्येक स्तर पर औसत रूप से सत्य होती है इसका मुख्य कारण यह है कि जो तथ्य संकलित किये जाते हैं वे किन्ही न किन्हीं कारणों से प्रभावित होते हैं, तो प्रत्येक कारण का अध्ययन करना संभव नहीं है । इसलिए औसत को प्राथमिकता दी जाती है । सांख्यिकीय निष्कर्ष हमेशा संभावनाओं द्वारा व्यक्त किये जाते हैं, वे पूर्ण सत्य नहीं होते । यही कारण है कि एक ही विषय के एक समय के सांख्यिकीय निष्कर्ष दूसरे समय में गलत सिद्ध हो जाते हैं ।

(4) सांख्यिकी व्यक्तिगत इकाइयों को महत्व नहीं देती

सांख्यिकीय तथ्यों का अध्ययन सामूहिक होता है न कि व्यक्तिगत, क्योंकि यहाँ व्यक्तिगत दृष्टिकोण महत्वहीन होते हैं । तथ्यों की निजी विशेषताओं पर कोई ध्यान नहीं दिया जाता है उसका

जो कुछ सामूहिक प्रभाव होता है वही औसत के रूप में ज्ञात किया जाता है इसलिए यह स्पष्ट होता है कि सांख्यिकीय तथ्यों में व्यक्तिगत इकाई का कोई महत्व नहीं है।

(5) सांख्यिकी विजातीय तथ्यों के अध्ययन की सुविधा प्रदान नहीं करती

सांख्यिकी केवल सजातीय तथ्यों का अध्ययन करती है । विजातीय तथ्यों के अध्ययन के लिए सांख्यिकीय विधियाँ सहायक नहीं होती हैं । जैसे उपज की गणना के लिए विभिन्न स्थानों के उपज के ही समंक एकत्रित किये जाए, न कि एक स्थान से उपज की मात्रा तथा दूसरे स्थान के पशु समंक एकत्रित किये जाए तो ऐसी स्थिति में अध्ययन व तुलना की दृष्टि से समंक व्यर्थ होते हैं ।

(6) सांख्यिकीय तथ्यों का दुरूपयोग किया जा सकता है

सांख्यिकीय तथ्यों का दुरूपयोग उस समय होता है जब पहले से ही यह ज्ञात हो कि अमुक क्षेत्र में लाभ की संभावनायें अधिक हैं तो इसका परिणाम यह होगा कि इस विशेष क्षेत्र में विनियोजक विनियोग की मात्रा बढ़ा देंगे । प्रत्येक- व्यक्ति सांख्यिकीय तथ्यों का सार्थक उपयोग नहीं कर सकता है । सांख्यिकीय तथ्यों के उपयोग के सम्बन्ध में यूल और केण्डाल ने कहा है कि "अयोग्य व्यक्तियों के हाथों में सांख्यिकीय विधियाँ अत्यन्त खतरनाक औजार है ।" इसी प्रकार बाउले ने स्पष्ट किया है कि, "सांख्यिकीय तथ्य मात्र आवश्यक लेकिन अपूर्ण औजार प्रस्तुत करते हैं, जो उन व्यक्तियों के हाथों में खतरनाक है, जो उनकी उपयोगिता व कमियों से अपरिचित हैं ।"

उपर्युक्त सीमाओं से स्पष्ट होता है कि सांख्यिकी रीतियों का प्रयोग करते समय उसकी सीमाओं को ध्यान में रखना आवश्यक है अन्यथा समंकों से भ्रमपूर्ण निष्कर्ष निकल सकते हैं । ये ही भ्रमपूर्ण निष्कर्ष आगे चलकर सांख्यिकी विज्ञान पर संदेह के कारण होते हैं । इन सीमाओं के होते हुए भी आधुनिक युग में सांख्यिकी का बहुत अधिक उपयोग बढ़ा है।

बोध प्रश्न - 03

1. समंको की किन्हीं तीन विशेषताओं का उल्लेख कीजिए ।
2. सांख्यिकी को सीमाएं क्या है?
3. राज्य सरकारों के लिए सांख्यिकी के क्या उपयोग है?
4. शोधकर्ताओं को सांख्यिकी से क्या लाभ है?

1.8 सारांश (Summary)

इस इकाई में सांख्यिकी का बहुवचन के रूप में (समंक) एवं एकवचन के रूप में (सांख्यिकी विज्ञान) सांख्यिकी की परिभाषाएं देकर सांख्यिकी का अर्थ स्पष्ट किया गया है । समंकों की परिभाषा के साथ ही समंकों की प्रमुख विशेषताओं की चर्चा भी की गई है । समंकों की निम्नलिखित विशेषताएँ हैं -

- समंक तथ्यों के समूह हैं, समंक संख्या में व्यक्त किए जाते हैं ।
- समंक कई कारणों से प्रभावित होते है उनकी गणना या अनुमान लगाया जाता है ।
- समंक व्यवस्थित रूप से संकलित किए जाते हैं एवं उन्हें एक दूसरे से सम्बन्धित रूप में रखा जाता है ।

  सांख्यिकी की विज्ञान के रूप में भी परिभाषा की गई है । सांख्यिकी का महत्व एवं सांख्यिकी की प्रकृति की चर्चा भी इस इकाई में की गई है । सांख्यिकी एक विज्ञान ही नहीं वैज्ञानिक

विधि भी है । सांख्यिकी कला भी है । इसके सैद्धान्तिक व व्यवहारिक दोनों पक्ष है । अन्त में सांख्यिकी की सीमाओं का भी वर्णन किया गया है ।

1.9 शब्दावली (Glossary)

सांख्यिकी	–	Statistics
समंक	–	Data
अर्थमिति	–	Econometrics
सांख्यिकी नियीमतता का नियम	–	Law of Statistical Regularity
महांक जड़ता का नियम	–	Law of Inertia of Large Numbers
गुणात्मक तथ्य	–	Qualitative Data
संख्यात्मक तथ्य	–	Quantitative Data
सम्भावना सिद्धान्त	–	Theory of Probability

1.10 संदर्भ ग्रन्थ (References)

Statistical Methods, S.P. Gupta, Sultan Chand & Sons, New Delhi.

Statistics fir Economists, D.R. Agrawal, Vindra publications (p) Ltd., New Delhi.

Mathematics and Statistics for Economics, G.S. Monga, Vikas Publishing House (p) Ltd., New Delhi.

सांख्यिकी, वी0 एन0 गुप्ता, साहित्य मदन, आगरा ।

1.11 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Questions)

1. सांख्यिकी की परिभाषा दीजिए और उसके क्षेत्र तथा सीमाओं का वर्णन कीजिए ।
2. सांख्यिकी की परिभाषा दीजिए उसके कार्य एवं महत्व का वर्णन कीजिए ।
3. आधुनिक समय में सांख्यिकी के महत्व की विवेचना कीजिए ।
4. सांख्यिकीय समंकों की प्रमुख विशेषताये बताइये ।
5. "सांख्यिकी एक विज्ञान तथा एक कला दोनों कही जाती है ।" क्या आप इससे सहमत हैं ।

इकाई - 02

समंकों के प्रकार एवं संग्रहण की विधियाँ-प्रश्नावली, अनुसूची, अच्छी प्रश्नावली के गुण, प्रारूप

(Types of Statistical Data and Methods of Collection of Statistical Data-Questionnaire and Schedule, Essentials of a Good Questionnaire, Structure)

इकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य (Objectives)

सांख्यिकी का महत्व आज के जीवन में दिन-प्रतिदिन बढ़ता जा रहा है । सभ्यता के विकास के साथ आज इसका क्षेत्र व्यापक हो गया है । जैसे - सामाजिक, आर्थिक, व्यक्तिगत आदि । सांख्यिकी की महत्ता उस बात पर निर्भर करती है कि उसमें समंको का आधार क्या है? वह किसके द्वारा एकत्रित किये गए हैं तथा क्या वह विश्वसनीय है? समंकों के विभिन्न प्रकार तथा संकलन की विधियों के द्वारा ही हम आर्थिक नियोजन, व्यवसाय तथा पूँजी बाजार में स्थित स्कन्ध विपणी के बारें सही अनुमान लगा पाते हैं ।

प्रस्तुत इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे कि :

- समंकों के कितने प्रकार हैं?
- समंको के संग्रहण की कौन-कौन सी विधियाँ है?
- प्रश्नावली और अनुसूची में क्या अंतर है, और अच्छी प्रश्नावली के क्या गुण होते हैं?
- प्रश्नावली किस प्रकार तैयार की जाती है?

2.1 प्रस्तावना (Introduction)

प्रस्तुत इकाई में सांख्यिकी के महत्वपूर्ण अंग समंकों के विषय में विस्तार से बताया जा रहा है । सांख्यिकी अनुसंधान समंकों के आधार पर किया जाता है । यहाँ समंकों के प्रकार संग्रहण की विधि, उनके स्रोतों तथा उनकी वैधता एवं शुद्धता की किस प्रकार जाँच की जाए आदि के बारे में विस्तार से चर्चा करेंगे ।

इस इकाई के खण्ड 2.2 में समंकों के प्रकार की तथा 2.3 में संग्रहण की विधियों की चर्चा की जा रही है । खण्ड 2.4 में प्रश्नावली तथा अनुसूची के अन्तर को बताया गया है तथा खण्ड 2.5 में अच्छी प्रश्नावली के गुणों की चर्चा की जा रही है । इसके पश्चात् खण्ड 2.6 में प्रश्नावली का प्रारूप को बताया गया है । इकाई के अन्त में सारांश, शब्दावली, सन्दर्भ ग्रन्थ, तथा अभ्यासार्थ प्रश्न दिए गए हैं ।

2.2 समंकों के प्रकार (Types of Statistical Data)

समंक दो प्रकार के होते हैं.

(क) प्राथमिक समंक, तथा

(ख) द्वितीयक समंक

(क) प्राथमिक समंक (Primary Data)

वे समंक, जो किसी सांख्यिकीय अनुसंधान के लिए, किसी अनुसन्धानकर्ता या एजेन्सी द्वारा मौलिक रूप से पहली बार एकत्र किये जाते हैं, प्राथमिक समंक कहलाते हैं । प्राथमिक समंकों को अनुसन्धानकर्ता अपने प्रयोग हेतु पहली बार एकत्रित करता अथवा करवाता है । पहले किसी अनुसन्धानकर्ता ने यदि आँकड़े इकट्ठे भी कर रखे हैं तब भी वह उन्हें प्रयोग में नही लाता है । होरेस सेक्राइस्ट के अनुसार "प्राथमिक समंकों से यह आशय है कि वे मौलिक हैं अर्थात् जिनका समूहीकरण बहुत ही कम या नहीं हुआ है घटनाओं का अंकन या गणन उसी प्रकार किया गया है जैसा पाया गया है । मुख्य रूप से वे कच्चे पदार्थ होते हैं" । ("By Primary Data are meant those which are original, that is, those in which, little or no grouping has been made, the instance being recorded or itemized as encountered. They are essentially raw material." Horace Secrist)

(ख) द्वितीक समंक (Secondary Data)

ब्लेयर के शब्दों में "द्वितीयक समंक वे समंक है जो पहले से अस्तित्व में है । और जो वर्तमान प्रश्नों के उत्तर में नहीं बल्कि किसी दूसरे उद्देश्य के लिए एकत्रित किए गए हैं ।" ("Secondary Data or those already in existence and which have been collected for some other purpose than the answering of question at hand" M.M. Blair)

सरकारी विभाग एवं कार्यालयों में अपने कार्य संचालन के लिए कई प्रकार के आँकड़े की आवश्यकता होती है । वे आँकड़े इकट्ठे करते है, उनका विश्लेषण करते है एवं कभी-कभी पत्र पत्रिकाओं में भी प्रकाशित करते है । यह आँकड़े व्यक्ति अपने अनुसन्धान हेतु प्रयोग में लाता है तो उन्हें द्वितीयक समंक कहा जाता है । अर्थात् द्वितीयक समंक दे हैं जो पहले से अन्य व्यक्तियों या संस्थाओं द्वारा

किसी विशेष उद्देश्य के लिये एकत्रित किये जा चुके होते हैं, और अनुसन्धानकर्त्ता केवल उनका प्रयोग करता है ।

- **प्राथमिक तथा द्वितीयक समंकों में अन्तर**

प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों में अंतर केवल अवस्था (Degree) या सापेक्षता (Retativily) का है, प्रकृति का नहीं । प्राथमिक तथा द्वितीयक समंको के बीच निम्नलिखित अन्तर है :

- प्राथमिक समंक मौलिक होने के नाते सांख्यिकीय विधियों के लिए कच्चे माल की भाँति होता है । इसके विपरीत द्वितीयक समंक मौलिक नहीं होतें क्योंकि उन पर सांख्यिकीय यन्त्रों का एक बार प्रयोग हो चुका होता है । इसलिये वे निर्मित माल (Finished goods) की भाँति होते हैं ।
- प्राथमिक समंक अनुसन्धान के उद्देश्य के सवर्था अनुकूल होते हैं और उनमें अधिक छान-बीन या संशोधन करने की आवश्यकता नहीं होती; जबकि द्वितीयक समंको का प्रयोग करने से पूर्व उनकी शुद्धता की पूरी जाँच-पड़ताल करने पड़ते हैं ।
- प्राथमिक समंक के लिए परिश्रम, धन व अधिक समय की आवश्यकता होती है । इसके विपरीत द्वितीयक समंक के लिए पत्र-पत्रिकाओं सरकारी व गैर सरकारी प्रकाशनों से सिर्फ उद्धत (Borrow) कर लिया जाता है । इसलिये उन पर धन, समय व परिश्रम की बहुत कम आवश्यकता होती है ।

2.3 समंकों के संकलन कीं रीतियाँ (Methods of Data Collection)

(क) प्राथमिक समंक संकलन की रीतियाँ (Methods of collecting primary Data)

प्राथमिक समंकों का संकलन करने के लिए मुख्यत: निम्नलिखित रीतियाँ प्रयोग में लाई जाती है :

(i) **प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसन्धान (Direct Personal Investigation)** इस रीति के अन्तर्गत अनुसन्धानकर्त्ता क्षेत्र में जाकर सम्बद्ध लोगों अर्थात् सूचना देने वालों (Informats) से प्रत्यक्ष रूप से, व्यक्तिगत सम्पर्क स्थापित करके सूचना प्राप्त करता है ।

(ii) **अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसन्धान (Indirect Oral Investigation)** इस रीति के अन्तर्गत, समस्या से प्रत्यक्ष रूप से सम्बन्ध रखनें वाले व्यक्तियों से सूचना प्राप्त नहीं की जाती बल्कि समस्या से अप्रत्यक्ष रूप सम्बन्धित व्यक्तियों से मौखिक पूछताछ करके सूचना एकत्रित की जाती है ।

(iii) **स्थानीय स्रोतों या संवाददाताओं से सूचना प्राप्त करना (Information through Local sources or Correspondent)** - इस रीति के अन्तर्गत, अनुसन्धानकर्त्ता द्वारा विभिन्न स्थानों पर, स्थानीय व्यक्ति या संवाददाता नियुक्त कर दिये जाते हैं जो समय-समय पर अनुभवों के आधार पर अनुमानतः: सूचनायें भेजते हैं।

(iv) **सूचकों द्वारा प्रश्नावली भरवाकर सूचना प्राप्त करना (Information through questionnaire of be filled in informants)** - इस रीति को "डाक-प्रश्नावली प्रणाली" (Mailed Questionnaire Method) भी कहतें हैं । इस रीति के अन्तर्गत सर्वप्रथम

अनुसन्धानकर्त्ता प्रश्नों की एक सूची (प्रश्नावली) तैयार करता है । फिर, एक-एक प्रति सूचकों के पास डाक से भिजवा दी जाती है जो उनके उत्तर भरकर निश्चित तिथि तक वापस लौटा देते हैं । प्रश्नावली के साथ एक अनुरोध-पत्र भी लगाया जाता है, जिसमें सूचना एकत्र करने का उद्देश्य बताने के साथ-साथ सूचक को यह भी आश्वासन दिया जाता है कि उसके द्वारा दी गई सूचनायें पूर्णतया गुप्त रखी जायेंगी।

(ख) द्वितीयक समंकों के संकलन की रीतियाँ (Methods of collecting Secondary Data) द्वितीय समंक वे हैं जो पहले से ही अस्तित्व में हैं और जो वर्तमान प्रश्नों के उत्तर के लिए न होकर, बल्कि किसी दूसरे उद्देश्य के लिए एकत्र किये गये हैं । इस प्रकार स्पष्ट है कि द्वितीयक सामग्री का संकलन नहीं किया जाता बल्कि उसको उद्धृत (Borrow) करके उसका केवल अपने उद्देश्य हेतु प्रयोग किया जाता है ।

द्वितीयक समंक के निम्न दो स्रोत हो सकते हैं

(अ) प्रकाशित स्रोत (Published Sources)

(ब) अप्रकाशित स्रोत (Unpublished Sources)

(अ) प्रकाशित स्रोत (Published Sources) प्राय: देखने में आता है कि विभिन्न विषयों पर सरकारी एवं गैर सरकारी संस्थाएँ अथवा व्यक्ति, प्राथमिक अनुसन्धान द्वारा प्राप्त समंकों को समय-समय पर प्रकाशित करते रहते हैं जिनका प्रयोग प्राय: लोगों द्वारा द्वितीयक सामग्री के रूप में किया जाता है ।

- **प्रकाशित समंकों के स्रोत इस प्रकार है**

(1) अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन विदेशी सरकारों तथा अन्तरराष्ट्रीय संस्थाओं द्वारा प्रकाशित समंक जैसे U.N. Statistical Year Book, Demographics Year Book, Annual report of I.M.F, I.L.O., I.B.R.D. etc.

(2) सरकारी प्रकाशन केन्द्रीय तथा राज्य सरकारों द्वारा भी विभिन्न विषयों से सम्बन्धित समंकों का प्रकाशन किया जाता है और इन समंकों में विश्वसनीयता की मात्रा भी अधिक रहती है। उदाहरणार्थ, Five Year Plans(Draft and Progress Reports), R.B.I. Bulletin, Economic Survey (Annual), Census Reports etc.

(3) अर्द्ध-सरकारी प्रकाशन अर्द्ध-सरकारी संस्थाएँ जैसे नगर-निगम, नगर पालिकाएँ जिला परिषदें, पंचायतों आदि के द्वारा भी विभिन्न समस्याओं (जन्म-मरण व स्वास्थ्य आदि) सम्बन्धी समंकों का प्रकाशन किया जाता है ।

(4) आयोगों एवं समितियों का प्रतिवेदन सरकार द्वारा समय-समय पर नियुक्त किये गये आयोगों एवं समितियों की रिपोर्टों का भी प्रकाशन किया जाता है । उदाहरणार्थ - वित्त-आयोग, एकाधिकार आयोग आदि ।

(5) अनुसन्धान एवं शोध संस्थाओं के प्रकाशन अनेक शोध संस्थाएँ समय-समय पर अपनें शोध परिणामों को प्रकाशित करती रहती है । उदाहरणार्थ भारतीय सांख्यिकीय संस्थान (I.S.I), राष्ट्रीय प्रतदर्श जाँच संगठन (N.S.S.O), व्यवहारिक आदि ।

(6) व्यापारिक व वित्तीय संस्थाओं के प्रकाशन व्यापारिक-वित्तीय सस्थाएँ तथा व्यवसायिक परिषदों (जैसे - FICCi, Trade Unions) कुछ महत्वपूर्ण विषयों पर समंक प्रकाशित करती है ।

(7) समाचार पत्र तथा पत्रिकाएँ इसके अलावा समाचार-पत्र, सामयिक पत्रिकाएँ, मैगजीन्स जैसे Economic Times, Annual Survey of Industries, Report on Currency and Finance आदि द्वारा भी वर्तमान आर्थिक-सामाजिक विषयों पर समंक प्रकाशित किये जाते हैं ।

(ब) अप्रकाशित स्रोत (Unpublished Sources) कुछ ऐसी सांख्यिकीय सामग्री भी होती है जिसका विधिवत प्रकाशन तो नहीं हो पाता परन्तु फिर भी वह काफी उपयोगी होती है और उसका द्वितीयक सामग्री के रूप में प्रयोग किया जाता है । जैसे प्राध्यापकों द्वारा किये गए शोध-कार्य, कॉलेजों का रिकार्ड आदि ।

बोध प्रश्न - 1
1. समंक कितने प्रकार के होते हैं?
2. प्राथमिक समंक किसे कहते हैं?
3. द्वितीयक समंक किसे कहते हैं?
4. प्राथमिक समंक किन रीतियों से एकत्रित किये जाते हैं ।
5. द्वितीयक समंको को किन-किन स्रोतों से प्राप्त किया जा सकता है ।

- **द्वितीयक समंकों का प्रयोग करते समय सावधानियां**

  (Precautions in the use of secondary Data)

द्वितीयक समंकों की मुख्य समस्या उनके संकलन की न होकर, उनके सही और संशोधित रूप में प्रयोग करने की होती है । हमें यह कभी नहीं भूलना चाहिये कि दूसरे लोगों द्वारा संकलित समंकों में त्रुटियाँ एवं सीमाएँ हो सकती है । अत: द्वितीयक समंको का प्रयोग करने से पूर्व अनुसन्धानकर्ता को इस बात की पूरी जाँच कर लेनी चाहिये कि उपलब्ध समंक वर्तमान उद्देश्य के लिये (i) विश्वसनीयता, (ii) अनुकूलता, तथा (iii) पर्याप्तता का गुण रखते हैं अथवा नहीं ।

- **सावधानियाँ (Precautions)** द्वितीयक समंकों का प्रयोग करने से पूर्व उनके बारे में निम्न तथ्यों की जाँच-पड़ताल कर लेनी चाहिये :

(1) पिछले अनुसन्धानकर्ता को योग्यता सर्वप्रथम यह पता लगाना चाहिए कि सामग्री का संकलनकर्त्ता क्या अनुभवी, योग्य, ईमानदार व निष्पक्ष व्यक्ति था । यदि उत्तर हीं में है तो उसका प्रयोग करना चाहिए अन्यथा नहीं ।

(2) उद्देश्य व क्षेत्र दूसरा उन समंकों के अनुसन्धान का उद्देश्य व क्षेत्र क्या था? यदि वर्तमान और पिछले अनुसन्धान के उद्देश्य व क्षेत्र में काफी हद तक समानता है तो समंकों का प्रयोग करना चाहिये अन्यथा नहीं ।

(3) समंक संकलन की रीति इस बात की जाँच करना कि समंक संकलन की जो रीति पहले अपनाई गयी थी, वह कहीं तक उपयुक्त थी, और वर्तमान प्रयोग के लिये कहीं तक उपयुक्त तथा विश्वनीय है ।

(4) अनुसन्धान का समय व परिस्थितियाँ इस बात की भी जाँच कर लेनी चाहिए कि उपलब्ध समंक किस काल व समय में और 'किन' परिस्थितियों में संकलित किए गये थे । स्मरण रहे, मन्दीं काल में समंक तेजी काल के लिये, और युद्धकाल के समंक शान्ति काल के लिए उपयुक्त नहीं समझें जाते ।

इस प्रकार हमें द्वितीयक समंकों का प्रयोग करने से पूर्व काफी जाँच-पड़ताल करनीं होगी । प्रो0 ए0 एल0 बाउले ने ठीक ही कहा कि "प्रकाशित समंकों को ऊपर से ही देखकर अर्थात् उनके बाह्य मूल्य के आधार पर स्वीकार कर लेना कभी सुरक्षित नहीं है जब तक कि उनका अर्थ व उनकी सीमाएँ अच्छी तरह ज्ञात न हो जाये, और यह सदैव आवश्यक है कि उन तर्कों की आलोचनात्मक समीक्षा की जाये जो उन पर आधारित हैं ।"

2.4 प्रश्नावली तथा अनुसूची (Schedule and Questionnaire)

प्रश्नावली, प्रश्नों की एक ऐसी सूची होती है जिसमें प्रश्नों के उत्तर सूचक स्वयं देता है और स्वयं ही प्रश्नावली को भरता है । इसके विपरीत अनुसूची एक ऐसा प्रपत्र (form) है जिसकी पूर्ति प्रगणक करता है किन्तु प्रश्नों के उत्तर सूचक से ही पूछ-ताछ कर मरे जाते हैं । प्रश्नावली और अनुसूची में एक महत्वपूर्ण अंतर यह भी है कि प्रश्नावली में उत्तरों के लिये रिक्त स्थान छोड़ा जाता है किन्तु अनुसूची में ऐसा होना आवश्यक नहीं है । प्रगणकों को अलग-अलग क्षेत्र में बाँट दिया जाता है । प्रगणक अपने-अपने क्षेत्रों में जाकर सूचना देने वालों से सम्पर्क स्थापित करते हैं और उनसे पूछ पूछ कर अनुसूचियाँ मरते है । प्रगणकों को इस कार्य हेतु विशेष रूप से प्रशिक्षित किया जाता है । इस रीति की सफलता प्रगणकों पर निर्भर है । प्रगणकों का चतुर व्यवहारकुशल एवं परिश्रमी होना आवश्यक है । उनमें इतनी योग्यता होनी चाहिए कि वे प्रश्नों के सही-सही उत्तर उनसे निकलवा सके जहाँ तक सम्भव हों प्रगणकों को स्थानीय भाषा का पूरा-पूरा ज्ञान होना चाहिए जिससे दे सूचना देने वालों के साथ घुलमिल कर सही सही सूचनाएं प्राप्त कर सके ।

- **अनुसूची विधि के गुण**
  - विस्तृत क्षेत्र के लिए उपयुक्त
  - उच्च स्तर की शुद्धता की आशा
  - अशिक्षित उत्तरदाताओं से भी उत्तर प्राप्त किए जा सकते हैं ।
  - व्यक्तिगत सम्पर्क का लाभ
  - परस्पर विरोधी उत्तरों की सम्भावना न्यूनतम रहती है ।
- **अनुसूची खाद के दोष**
  - यह विधि अधिक खर्चीली है क्योंकि प्रगणकों को वेतन आदि देना पड़ता है ।
  - अधिक समय लगता है ।
  - पक्षपात की सम्भावना ।
  - उचित देखरेख न होने पर प्रगणक झुठे आँकड़े देकर शोध को गुमराह कर सकते हैं ।

- **अनुसूची विधि में सावधानियाँ**
  - प्रगणक बुद्धिमान, ईमानदार परिश्रमी व व्यवहारकुशल होना चाहिए ।
  - प्रगणकों को सही सूचना प्राप्त करने हेतु समय-समय पर बार-बार प्रशिक्षण दिया जाय ।
  - प्रश्न सरल, कम एवं स्पष्ट हों ।
  - उत्तरों की पुष्टि हेतु जाँच के प्रश्न होने चाहिए ।
  - प्रगणकों का पूरा निरीक्षण भी आवश्यक है ।

यह पद्धति अत्यधिक खर्चीली है इसलिए सामान्यत: व्यक्तिगत अनुसन्धान के लिए अनुपयोगी है । सामान्यत: संस्थागत व सरकारी अनुसंधान के लिए यह अत्यन्त उपयोगी विधि है । अनुसूची एवं प्रश्नावली विधि मे से आप किसका चयन करेगें यह अध्ययन के उद्देश्य, क्षेत्र, उत्तरदाता की प्रकृति उपलब्ध संसाधन, समय आदि बातों पर निर्भर होता है ।

2.5 उत्तम प्रश्नावली के गुण (Essentials of Good Questionnair)

सांख्यिकीय अनुसन्धान की सफलता मुख्य रूप से प्रश्नावली की उत्तमता पर निर्भर करती है । एक प्रश्नावली की रचना करते समय निम्न बातों को विशेष रूप से ध्यान में रखना चाहिये -

(1) कम प्रश्न (Less questions) जहाँ तक संभव हो सके प्रश्नों की संख्या कम रखनी चाहिये । प्रश्नों की आदर्श संख्या 15 से 20 मानी जाती है । ही प्रश्नों की संख्या इतनी कम भी नहीं होनी चाहिए कि पर्याप्त सूचना ही न प्राप्त हो सके और उनकी संख्या इतनी अधिक भी नहीं हो कि सूचक को घबराहट महसूस हो ।

(2) उचित क्रम (Logical Sequence) प्रश्नों को उनकें महत्व या प्राथमिकता के क्रम में रखना चाहिये । उदाहरणार्थ - किसी व्यक्ति से उसकी वैवाहिक स्थिति की जानकारी के बिना उसके बच्चों की संख्या पूछना मूर्खतापूर्ण होगा।

(3) सरलता एवं स्पष्टता (Simplicity and Clarity) प्रश्न सरल व स्पष्ट होने चाहिएँ और वे लम्बें, जटिल तथा दो अर्थों बाले नही होने चाहिए । फिर, अनिश्चितता उत्पन्न करने वाले शब्द जैसे 'शायद' 'अक्सर 'कभी-कभी आदि का प्रयोग नहीं करना चाहिये ।

(4) संक्षिप्तता (Conciseness or Concision) प्रश्न ऐसे होने चाहिएँ जिनका उत्तर 'हाँ' या 'नहीं' में दिया जा सके।

(5) आपत्तिजनक या वर्जित प्रश्न (Undesirable questions) ऐसे प्रश्न कभी नहीं पूछने चाहिये जो सूचकों के आत्मसम्मान और उनकी धार्मिक व सामाजिक भावनाओं को ठेस पहुँचाते हों अथवा उनसे सूचना देने वालों के मन में शंका उत्तेजना या विरोध उत्पन्न होता हो ।

(6) प्रश्नों के स्वरूप (Types of Questions) रावर्ट पैलेस एवं एडवर्ड विलेट के अनुसार प्रश्नों का स्वरूप निम्न
हो सकता है -

(अ) बन्द प्रश्न (Closed-ended Questions) ऐसे प्रश्नों के सम्भाव्य उत्तर, अनुसन्धानकर्त्ता द्‌वारा स्वयं सुझायें जाते हैं और सूचक को उनमें से केवल एक को टिक (√) करना होता है ।

(ब) खुले प्रश्न (Open Questions) ये प्रश्न ऐसे होते हैं जिनका उत्तर सूचक को स्वंय अपने शब्दों में देना होता है । इन प्रश्नों का उद्देश्य सूचक के व्यक्तिगत विचार जानना है और इसलिये उसे उत्तर के रूप में कोई विकल्प नहीं बताया जाता ।

(स) विशिष्ट सूचना देने वाले प्रश्न (Specific Informations Questions) ये वह प्रश्न होते हैं जिनका उद्देश्य सूचकों से विशिष्ट जानकारी प्राप्त करना है । उदाहरणार्थ, आपकी आय कितनी है? आपका शैक्षिक स्तर क्या है? आपके बच्चे कितने हैं?

(7) क्रास-जाँच (Cross Check) शुद्धता को उच्च स्तर बनाये रखने की दृष्टि से, प्रश्नावली में कुछ ऐसे प्रश्नों का भी समावेश होना चाहिये जिनसे उत्तरों की सत्यता की परस्पर जाँच की जा सके । उदाहरणार्थ, एक सामाजिक अनुसन्धान में माताओं की आयु के बारें में पूछे गए इस प्रश्न "आपकी आयु कितनी है ?" के साथ-साथ कुछ अन्य प्रश्न भी जोड़े जा सकते हैं जैसे, "आपकी जन्म तिथि क्या है? या "आपके बड़े बच्चे की आयु कितनी है ? "

(8) पूर्व परीक्षण व संशोधन (Pre-Testing and Rectification) जब प्रश्नावली तैयार हो जाये तो अनुसन्धान कार्य प्रारम्भ करने से पूर्व उसका कुछ लोगों पर परीक्षण कर लेना चाहिये। प्रश्नावली का पूर्व-परीक्षण एक लाभप्रद क्रिया है क्योंकि इससे प्रश्नावली के दोष और प्रश्नों सम्बन्धी कठिनाइयों का पहले से ही ज्ञान हो जाता है ।

बोध प्रश्न - 2

1. प्रश्नावली किसे कहते है?
2. अनुसूची किसे कहते है?
3. अनुसूची एवं प्रश्नावली में क्या अन्तर है?
4. अनुसूची विधि कहीं उपयोगी होती हैं
5. एक अच्छी प्रश्नावली में क्या-क्या गुण होते हैं ।

2.6 प्रश्नावली का प्रारूप या नमूना (Model of Questionnaire)

हमें प्रश्नावली को तैयार करते समय उपर्युक्त सभी बातों का ध्यान रखना चाहिये । इसे अधिक स्पष्ट करने के लिए हम सुपर बाजार से वस्तुओं को खरीदने सम्बन्धी "ग्राहकों की पसन्द का सर्वेक्षण करने के लिये एक उपयुक्त प्रश्नावली का उदाहरण ले रहे हैं"

सुपर बाजार सम्बन्धी ग्राहकों की पसन्द

नोट - कृपया नीचे दिये वर्ग में आवश्यक सूचनायें भरिये और अपने उत्तर को 'सहीं' (√) का निशान लगाकर प्रकट कीजिए।

(I) सामान्य

1. नाम ....   2. पता ....

3. आयु ....   4. लिंग .... स्त्री ☐ पुरुष ☐

5. व्यवसाय .... नौकरी ☐ व्यापार ☐ अन्य ☐

6. मासिक आय

100 से 500 तक ☐

500 से 1000 तक ☐

1000 से ऊपर ☐

7. परिवार की सदस्य संख्या

1 से 3 तक ☐

4 से 6 तक ☐

7 से ऊपर ☐

(II) विशिष्ट

1. आप सुपर बाजार क्यों जाते हैं?

(i) घर के निकट है हाँ ☐ नहीं ☐

(ii) घर के रास्ते में पड़ता है हाँ ☐ नहीं ☐

2. सुपर बाजार को प्राथमिकता देने का क्या कारण है?

(i) सभी वस्तुओं की एक स्थान पूर्ति होना हाँ ☐ नहीं ☐

(ii) माल की अच्छी किस्म हाँ ☐ नहीं ☐

(iii) अधिक अच्छे डिजाइन हाँ ☐ नहीं ☐

(iv) उचित व निश्चित मूल्य हाँ ☐ नहीं ☐

3. क्या आप सभी वस्तुऐं सुपर बाजार से खरीदतें हैं? हाँ ☐ नहीं ☐

4. आप एक महीनें में कितनी बार सुपर बाजार जाते हैं?

1 से 6 दिन ☐ 6 से 10-दिन ☐ 10 से ऊपर ☐

5. वहाँ के 'सेल्समैन' का व्यवहार आप को कैसा लगता है?

(i) विनम्र ☐ रूखापन ☐

(ii) सहायताशील ☐ असहयोगी ☐

(iii) कुशल ☐ अकुशल ☐

6. वस्तुयें प्राप्त करने में कोई कठिनाई तो नहीं होती? हाँ ☐ नहीं ☐

7. क्या आप पुरूष सेल्समैन की बजाये महिला सेल्समैन पसन्द करते हैं?

हाँ ☐ नहीं ☐

2.7 सारांश (Summary)

इस प्रकार स्पष्ट है कि किसी अनुसन्धान के लिए अनुसन्धानकर्ता को न सिर्फ समंक (Data) के प्रकृति (Nature) के विषय में बल्कि उन्हें किस प्रकार से प्राथमिक व द्वितीयक स्रोतों (Primary & Secondary Sources) से संग्रह (Collect) करेगें इसके विषय में ज्ञान रखना अति आवश्यक है, अन्यथा शोध कार्य निरर्थक साबित होगा और शोधकर्त्ता अपने लक्ष्य तक कभी नही पहुँच सकता।

2.8 शब्दावली (Glossary)

समंक Data

प्राथमिक समंक	Primary Data
द्वितीयक समंक	Secondary Data
अनुसूची	Schedule
प्रश्नावली	Questionnaire
समंकों का संग्रह	Collection of Data
बन्द प्रश्न	Close ended Question
खुला प्रश्न	Open ended Question

2.9 सन्दर्भ ग्रन्थ (References)

Singh, S.P. "Statistics : Theory and Practice" S.Chand Publication, New Delhi, 2007

Gupta & Kapoor, "Statistics Hand Book"

Elhance, D.N. "Fundamentals of Statistics". Kitab Mahal Publication, Allahabad

SCHAUM'S Outlines "Statistics Third Edition".

2.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Questions)

1. प्राथमिक समंकों से क्या अभिप्राय है? इन्हें संग्रहीत करने की विभिन्न विधियाँ स्पष्ट कीजिए और उन परिस्थितियों को बताएँ जिसमें इनका प्रयोग किया जाता है ।
2. प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों में अन्तर बताएँ । प्राथमिक समंकों को संकलित करने की विभिन्न रीतियों को स्पष्ट कीजिए और उनके तुलनात्मक गुण-दोष बताएँ ।
3. सांख्यिकीय सामग्री के संकलन की विभिन्न रीतियों को समझाइए । इनमें से कौन सबसे अधिक विश्वसनीय है और क्यों? कारण सहित स्पष्ट कीजिए ।
4. "सावधानी से जाँच किये बिना द्वितीयक समंकों को कभी भी स्वीकार नहीं करना चाहिये"। समीक्षा कीजिए।

इकाई -03

समंकों का चित्रमय एवं रेखीय प्रदर्शन

(Diagrammatic and Graphics Presentation of Data)

इकाई की रूपरेखा

3.10 सारांश

3.11 शब्दावली

3.12 सन्दर्भ ग्रन्थ

3.13 अभ्यासार्थ प्रश्न

3.0 उद्देश्य (Objectives)

सांख्यिकी जटिल समंकों को इस प्रकार प्रस्तुत करता है कि बह सरल एवं बोधगम्य हो जाय । एक सामान्य व्यक्ति की जटिल आँकड़ों के समूह में रूचि नहीं होती, परन्तु चित्र देखकर बह विषय सामग्री को शीघ्र समझ जाता है । चित्रमय प्रदर्शन में सांख्यिकीय समंकों को रोचक एवं आकर्षक आकृतियाँ बनाकर प्रस्तुत किया जाता है जबकि रेखीय अथवा बिन्दु रेखीय प्रदर्शन मुख्य रूप से कालश्रेणियों के प्रदर्शन के लिए उपयोगी है । रेखीय प्रदर्शन के लिए ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं का अंकन कर रचना की जाती है । इस इकाई को पढ्ने के बाद आप:

- जान सकेंगे कि चित्रमय एवं रेखीय प्रदर्शन की उपयोगिता एवं लाभ क्या है?
- चित्रमय एवं रेखीय प्रदर्शन की सीमाएं क्या है?
- समझ सकेगे कि चित्रमय एवं रेखीय प्रदर्शन के क्या नियम है?
- चित्रों के विभिन्न प्रकारों से परिचित हो जाएंगे ।

3.1 प्रस्तावना (Introduction)

एक सामान्य व्यक्ति जो समंकों को समझने में असमर्थ हो उस तक प्रभावी एवं आकर्षक तरीके से जानकारी पहुँचाने का सबसे सशक्त माध्यम चित्रमय एवं बिन्दु रेखीय प्रदर्शन है । आजकल इनका उपयोग बढ़ता जा रहा है । पत्र-पत्रिकाओं, समाचार पत्रों में तथ्यों को रोचक बनाने के उद्देश्य से नित्य नए-नए एवं आकर्षक डिजायन के चित्र देखने का मिलते हैं । इस इकाई में आपको चित्रों की उपयोगिता लाभ एवं सीमाओं से परिचित कराया जाएगा । चित्र एवं रेखीय प्रदर्शन के नियम भी बताए जाएंगे । इकाई के अन्त में सारांश, शब्दावली एवं सन्दर्भ ग्रन्थों की सूची दी गई है ।

3.2 चित्रमय निरूपण की उपयोगिता, लाभ एवं सीमाएं (Utility, Advantages and Limitations of Diagrams)

इसमें कोई संदेह नहीं कि चित्रमय निरूपण देखने में सरल एवं बोधगम्य होता है मस्तिष्क में चित्र की छाप शीघ्र बैठ जाती है ब लम्बे समय तक बनी रहती है । परन्तु इनकी कुछ सीमाएं भी है । सांख्यिकी के विद्यार्थी के लिए यह आवश्यक है कि बह इसकी उपयोगिता, लाभ एवं सीमाओं से पूरी तरह परिचित हो । सर्वप्रथम हम चित्रों की उपयोगिता एवं लाभों का अध्ययन करेंगे ।

1. चित्र समंकों को सरल एवं बोधगम्य बनाते हैं ।
2. अंकों को लम्बे समय तक याद रखना कठिन है जबकि चित्र अधिक समय तक मस्तिष्क में अंकित रहते हैं।
3. चित्रों को समझने के लिए विशेष शिक्षा या ज्ञान की आवश्यकता नहीं होती है ।
4. चित्रों की सहायता से निष्कर्ष निकालने में समय एवं श्रम की बचत होती है ।

5. चित्रों का रंगपूर्ण संसार देखने बाले को आकर्षित करता है एवं हम बड़ी आसानी से अपनी बात उन्हें समझा सकते सूचना के साथ-साथ मनोरंजन होता है जिसके अध्ययन के बाद थकावट अनुभव नहीं होती है ।
6. चित्रों की उपयोगिता एवं लाभ यह भी है कि इसकी सहायता से विभिन्न सूचनाओं की तुलना करना आसान हो जाता है । अत: तुलनात्मक अध्ययनों में इन्हें नहीं भुलाया जा सकता ।

3.3 चित्रमय प्रदर्शन की सीमाएं

एम.जे. मोरेनो ने कहा है कि "किसी चित्र का अध्ययन करने के लिए पर्याप्त चौकन्ना रहना आवश्यक है । वह इतना सरल, स्पष्ट तथा मनभावी होता है कि असावधान व्यक्ति बड़ी आसानी से मूर्ख बन जाता है ।" इस तकनीक का प्रयोग करते समय बडी सावधानी की आवश्यकता होती है । चित्रों की सीमाएं निम्नलिखित हैं :

1. तुलना करने से पूर्व यह देखना जरूरी है कि जिन समंकों की तुलना की जा रही है वे गुण एवं स्वभाव में समान हो यदि गुण समान नहीं होंगे तो तुलना भ्रम में डाल देगी ।
2. केवल तुलनात्मक अध्ययन में चित्रों की कुछ उपयोगिता है, अकेले चित्र का कोई विशेष महत्व नहीं होता ।
3. यदि आँकडों में अति सूक्ष्म अन्तर हो तो तुलना नहीं हो सकती एवं अनुसंधानकर्ता अपनी बात को स्पष्ट नहीं कर पाता है ।
4. चित्रों की सहायता से हम बहुमुखी सूचनाओं को प्रदर्शित नहीं कर सकते । वर्गीकरण एवं सारणीयन के द्वारा यह कार्य आसानी से सम्भव हो जाता है ।
5. संख्यात्मक प्रदर्शन असम्भव है ।
6. चित्रों का सरलतापूर्वक दुरूपयोग किया जा सकता है ।
7. चित्रों को देखकर निष्कर्ष निकाल पाना कठिन होता हैं । सत्य निष्कर्ष निकालने के लिए पूर्ण सूचना एवं सन्दर्भ आवश्यक है ।
8. चित्रों को यदि आँकडों के अनुरूप न बनाया जाय तो देखने बालों को आसानी से भ्रमित किया जा सकता है ।

3.4 चित्र संरचना के सामान्य नियम (Genral Rules of Diagrams Method)

सांख्यिकी में समंकों का चित्रमय एवं बिन्दु रेखीय प्रदर्शन के कुछ सामान्य नियम इस प्रकार है :

1. **चित्र आकर्षक होने चाहिए** चित्रों के लिए सबसे प्रमुख बात यह है कि चित्र आकर्षक हो । इसके लिए सही आकार एवं विविधि रंगों का प्रयोग किया जा सकता है । आकर्षक चित्रों का मस्तिष्क पर स्थाई प्रभाव पडता है ।
2. **शुद्धता** चित्रों की रचना करते समय उनकी शुद्धता पर ध्यान देना अति आवश्यक है । चित्रों को आकर्षक बनाने के लिए उनकी शुद्धता के साथ समझौता नहीं करना चाहिए क्योंकि अशुद्ध चित्रों से भ्रमात्मक निष्कर्ष निकलते हैं ।

3. **उपयुक्त आकार** चित्रों का आकार कितना बड़ा अथवा कितना छोटा हो इस बारे में कोई सामान्य नियम नहीं है, यह अवश्य ध्यान रखना चाहिए कि चित्र कागज के आकार के अनुरूप अपनाया जाय । चित्रों के लिए जो भी मापदण्ड अपनाया जाय उसका उल्लेख चित्र के साथ ही कर देना उचित होता है ।
4. **शीर्षक तथा फुटनोट** प्रत्येक चित्र अथवा ग्राफ का शीर्षक अवश्य होना चाहिए जिससे देखने बालों को यह आसानी से समझ में आ जाय कि चित्र की विषय सामग्री क्या है? यदि शीर्षक अस्पष्ट अथवा अधूरा हो तो नीचे फुटनोट देकर उसकी विषय वस्तु स्पष्ट कर देनी चाहिए।
5. **मापदण्ड का चयन** चित्र बनाने से पूर्व उचित मापदण्ड अथवा पैमाने का चयन करना आवश्यक है । चित्रों के लिए मापदण्ड के बारे में कोई सामान्य नियम नहीं बनाए जा सकते हैं, परन्तु इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि चित्र कागज के आकार का हो एवं मापदण्ड सम संख्याओं में लिया जावे । माप की इकाई का उल्लेख करना न भूलें क्षैतिज एवं उदग्र दोनों तरफ उसका उल्लेख अवश्य करें ।
6. **चित्र बनाना** चित्र की रचना सदैव साफ कागज पर पैमाने एवं ज्यामिति उपकरणों की सहायता से करनी चाहिए। मुक्त हस्त चित्र देखने में भद्दे नजर आते हैं । यदि अनुसंधानकर्ता की हस्तलिपि एवं चित्रकला (ड्राईंग) सुन्दर न हो तो किसी कलाकार (आर्टिस्ट) की मदद लेनी चाहिए।
7. **संकेत** चित्रों को तुलना योग्य बनाने के लिए विभिन्न रंगों अथवा छाया (शेड्स) का प्रयोग करना पडता है । कमी-कभी उन्हें अलग-अलग डिजाईन से दिखाया जाना आवश्यक होता है। कौनसे रंग अथवा डिजाईन से कौनसा तथ्य प्रस्तुत किया गया है यह स्पष्ट करना जरूरी है।
8. **स्रोतों का उल्लेख** चित्रों की संरचना जिन आँकडों के आधार पर की गई है उन आँकड़ों का स्रोतों प्रदर्शित करना भी आवश्यक है । चित्रों के लिए प्रयुक्त आँकड़ों के स्रोतों का उल्लेख कर देने से उनकी विश्वसनीयता बढ़ जाती है ।
9. **उपयुक्त विधि का चुनाव** चित्र बनाने के लिए उपयुक्त विधि का चयन करना जरूरी है, चित्रों को सरल एवं समझने योग्य बनाना जरूरी है ।
10. **चिंत्र बनाने के लिए समान्तर एवं लम्ब अक्ष का ध्यान रखना** रेखाचित्र बनाने के लिए समय अथवा स्वतंत्र चर को समान्तर अक्ष पर एवं आश्रित घर के मूल्यों को लम्ब अक्ष पर प्रदर्शित करना चाहिए । यदि आवश्यक हो तो कृत्रिम आधार रेखा का प्रयोग करना उचित होता है । रेखाचित्र में विभिन्न चरों का प्रदर्शन करने के लिए भिन्न-भिन्न आकार की रेखाएं लेना चाहिए।

3.5 चित्रों के प्रकार (Types of Diagrams)

- **एक-विमा चित्र (One Dimental Diagrams)**

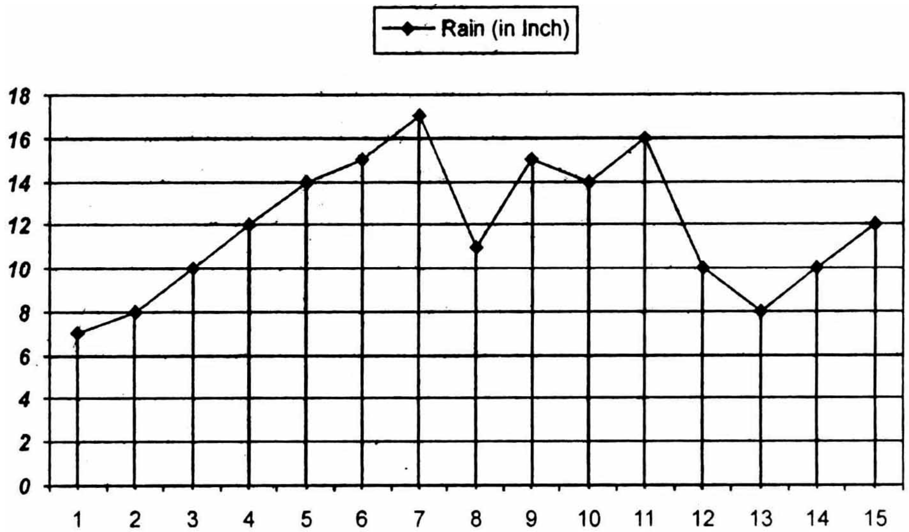
एक विमितीय रेखा चित्रों में चित्रों की एक ही माप ऊँचाई का प्रयोग किया जाता है । यद्यपि चित्रों की कुछ मोटाई भी ली जाती है परन्तु वह केवल सुन्दरता के लिए होती है । इसके लिए निम्नांकित प्रकार के चित्र बनाए जाते हैं ।

3.5.1 रेखाचित्र (Line Diagram)

एक विमा चित्रों में रेखाचित्र अधिक चलन में नहीं है । रेखाचित्रों का प्रयोग तब किया जाता है जब पद मूल्यों की संख्या अधिक हो और श्रेणी का विस्तार कम हो अर्थात् सबसे बडे एवं सबसे छोटे मूल्यों के मध्य अन्तर अधिक न हो । चित्र रचना के लिए प्रत्येक पद मूल्य के बराबर लम्बाई की खड़ी रेखाएं खींची जाती है । सभी रेखाओं के बीच अन्तर अथवा दूरी समान रूखी जाती है । रेखाओं की मौटाई नहीं होती अत: यह रेखाएं अधिक आकर्षक नहीं होती ।

उदाहरण-1 निम्नांकित समंकों को उपयुक्त रेखाचित्र बनाकर प्रदर्शित कीजिए

दिनाक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
वर्षा (इंच)	7	8	10	12	14	15	17	11	15	14	16	10	8	10	12



रेखाचित्र 3.1

3.5.2 सरल दण्ड चित्र (Simple Bar Diagram)

एक विमा चित्रों की एक ही माप उँचाई का प्रयोग समंकों को प्रदर्शित करने के लिए किया जाता है । रेखाचित्र में अधिक मूल्य एक प्रदर्शित किये जाते हैं । यदि मूल्यों की संख्या कम हो तो कुछ मोटाई के दण्ड बनाये जाते हैं । दण्ड की कुछ चौडाई होती है उसमें रंग भरे जा सकते हैं अथवा उन्हें अलग-अलग डिजाईन दिए जा सकते है । दण्ड की रचना करने से पूर्व सबसे बडें मूल्य के आधार पर एक उपयुक्त पैमाना निश्चित कर लिया जाता है फिर सभी दण्ड इस पैमाने के अनुसार बनाए जाते हैं । दण्डों की सुन्दरता के लिए इनकी मौटाई एवं दूरी एक समान रखी जाती है । दण्डों को दो प्रकार से बनाया जा सकता है ।

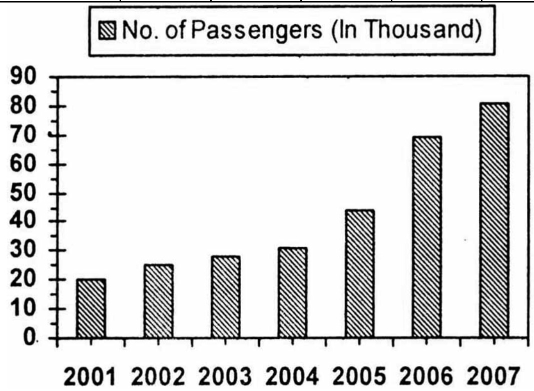
(1) उदग्र दण्ड (Vertical Bar)

(2) क्षैतिज दण्ड (Horizental Bar)

परन्तु समानान्तर अक्ष पर बनाए जाने वाले दण्ड चित्रों का चलन अधिक है ।

उदाहरण-2 निम्नलिखित सारणी में 2001 से 2007 तक आने वाले यात्रियों की संख्या दी हुई है । इसे आलेख द्‌वारा प्रदर्शित कीजिए ।

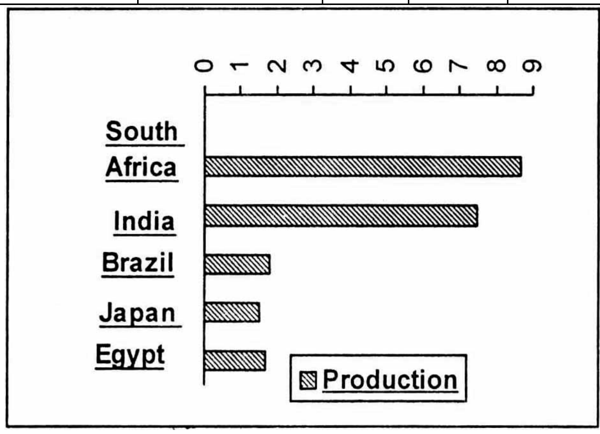
वर्ष	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
यात्रियों की संख्या (हजार मे)	19.9	25.4	28.1	31.2	43.6	68.9	80.5



रेखाचित्र 3.2

उदाहरण-3 निम्नलिखित सारणी से मैंगनीज का उत्पादन (लाख टनों मे) दिया है। इसे दण्ड आलेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

देश	दक्षिण अफ्रीका	भारत	ब्राजील	जापान	मिश्र
उत्पादन (टनों में)	8.7	7.5	1.8	1.5	1.7



रेखाचित्र 3.3

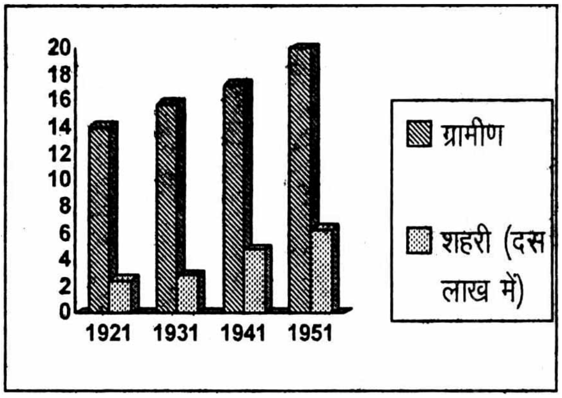
3.5.3 बहु गुणी दण्ड चित्र (Multiple Bar Diagram)

जब एक ही चीज के लिए आँकडों की दो या अधिक श्रेणियों की तुलना करनी हो तो आँकडों को बहु दण्ड आलेख द्वारा प्रदर्शित करते हैं जिसमें दो या अधिक दण्ड साथ-साथ खींचते हैं।

उदाहरण -4 जनगणना वर्षो 1921 से 1951 के अनुसार पश्चिम बंगाल की ग्रामीण एवं शहरी जनसंख्या निम्नलिखित तालिका में दी गई

(दस लाख में)

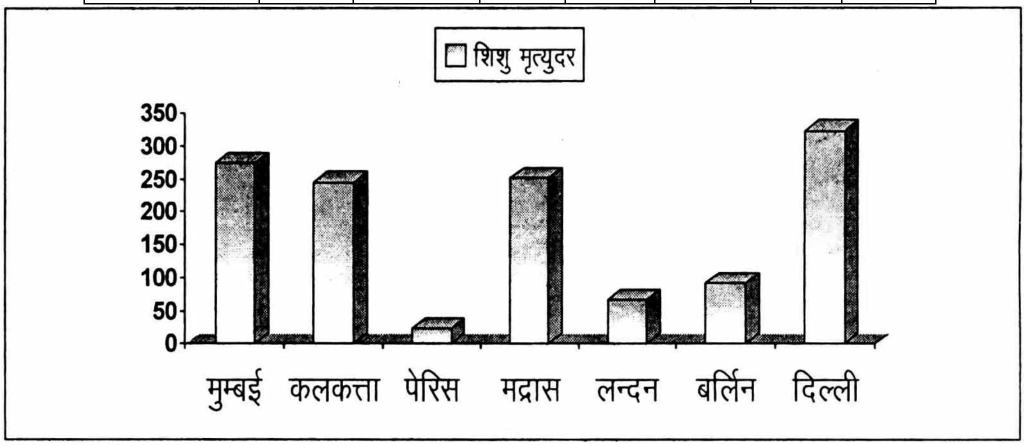
जनगणना वर्ष	1921	1931	1941	1951
ग्रामीण जनसंख्या	13.99	15.79	17.19	20.02
शहरी जनसंख्या	2.43	2.89	4.78	6.28



रेखाचित्र 3.4

उदाहरण -5 विभिन्न नगरों के जनगणना में बच्चों की मृत्युदर के सम्बन्ध में निम्नांकित आँकड़े प्राप्त हुए । उपर्युक्त रेखाचित्र के माध्यम से इन्हें प्रस्तुत कीजिए ।

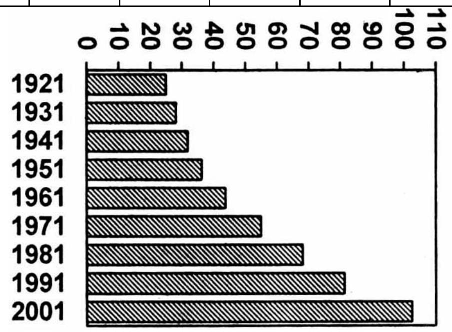
शहर का नाम	मुम्बई	कलकत्ता	पेरिस	मद्रास	लन्दन	बर्लिन	दिल्ली
शिशु मृत्युदर	274	244	23	251	66	92	323



रेखाचित्र 3.5

उदाहरण- 6 निम्नांकित आँकडों की मदद से दण्ड आलेख बनाइए ।

वर्ष	1921	1931	1941	1951	1961	1971	1981	1991	2001
भारत की जनसंख्या	25.1	27.9	31.9	36.1	43.9	54.7	68.3	81.5	102.8



रेखाचित्र 3.6

बोध प्रश्न - 01

1. निम्नांकित सारणी में विभिन्न देशों के जन्मदर के आँकड़े दिए गए हैं । उपयुक्त चित्र बनाइए।

देश	चीन	भारत	न्यूज़ीलैण्ड	यू.के.	जर्मनी	स्वीडन
जन्मदर	40	33	30	20	16	75

2. चित्रों के प्रकार लिखिए ।
3. चित्र-रचना के सामान्य नियम क्या हैं? किन्हीं 3 का उल्लेख कीजिए
4. चित्रमय निरूपण के दो लाभ एवं दो सीमाओं का उल्लेख कीजिए
5. किसी क्या में 15 विद्यार्थियों के सांख्यिकी में प्राप्तांक दिए गए हैं । उपयुक्त चित्र प्रदर्शित कीजिए

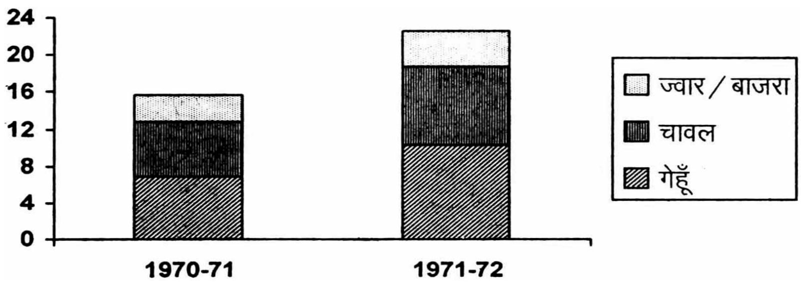
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	18	22	36	40	55	60	38	40	55	48	8	12	40	16

3.5.4 अन्तर्विभक्त दण्डचित्र (Sub- divided Bar Diagram)

अन्तर्विभक्त दण्ड चित्र में एक ही चर को कई भागों में विभाजित किया जाता है । उक्त चर के कई उपभागों को अन्तर-विभक्त दण्डों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है । यह दण्ड कुल परिणाम के साथ अपना अनुपात प्रकट करते हैं । यह एक दूसरे के साथ तुलनीय होते हैं । विमिन्न अंशों अथवा उप-भागों को विभिन्न रंगों या उप चिन्हों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है ।

उदाहरण-7 वर्ष 1970-71 एवं 1971-72 में विभिन्न फसलों में उन्नत बीजों के अन्तर्गत क्षेत्र के आँकड़े दिए गये हैं, इन्हें उपयुक्त रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए ।

वस्तु	मिलियन हैक्टयर मे	
	1970-71	1971-72
गेहूँ	6.8	10.2
चावल	6.0	8.6
ज्वार /बाजरा	2.9	3.7
कुल	15.7	22.5



3.5.5 प्रतिशत अन्तर्विभक्त दण्डचित्र (Percentage Sub-divided Bar Diagram)

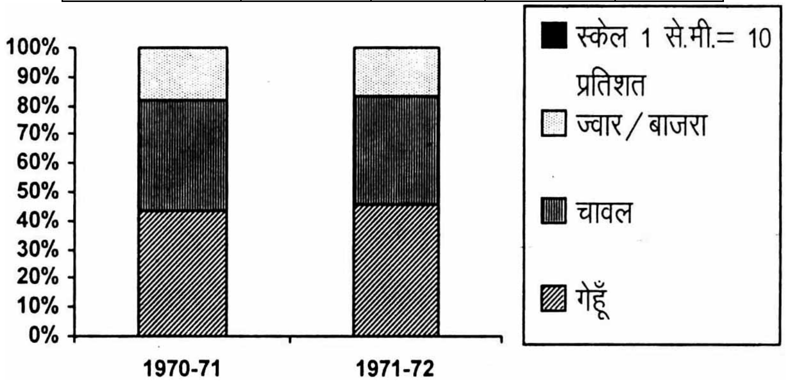
प्रतिशत अन्तर्विभक्त दण्ड चित्र बनाने के लिए पूर्ण मूल्य को 100 मान कर उनके विभिन्न भागों को प्रतिशत में वक्त किया जाता है । प्रत्येक दण्ड की लम्बाई-चौडाई एक समान होती है । उनका

अन्तर विभाजन प्रतिशत में होता है । इससे तुलना करना बहुत आसान हो जाता है । इसका सबसे बडा दोष यह है कि आँकडों में कम अन्तर होने पर चित्रों के माध्यम से आसानी से तुलना नहीं हो पाती है ।

अब हम उपर्युक्त उदाहरण -4 के आँकडों को प्रतिशत अन्तर्विभक्त दण्ड चित्र के माध्यम से उदाहरण 5 प्रदर्शित करते है-

उदाहरण -8

वस्तु	1979-71	प्रतिशत	1971-72	प्रतिशत
गेहुँ	6.8	43.32	10.2	45.40
चावल	6.0	38.21	8.6	38.20
ज्वार / बाजरा	2.9	18.47	3.7	16.40
कुल	15.7	100.00	22.5	100



रेखाचित्र 3.8

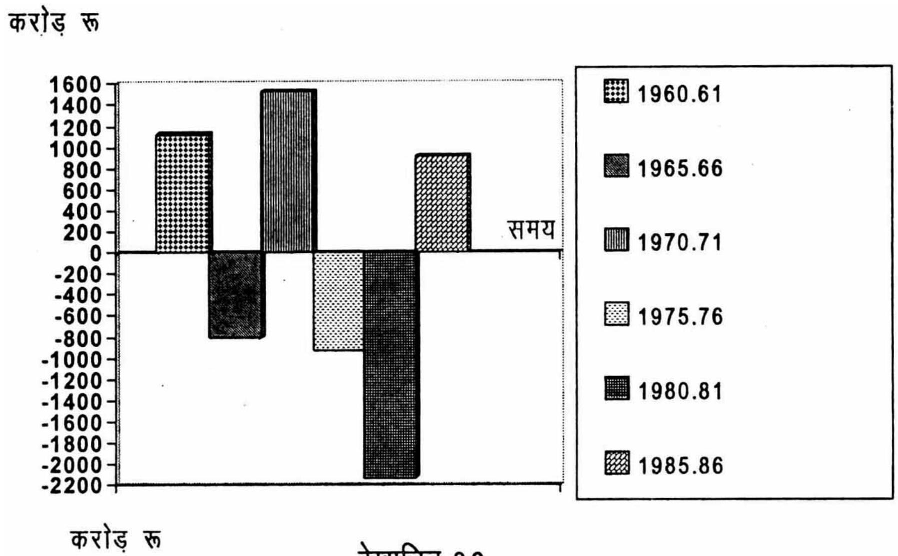
3.5.6 द्विमुखी दण्डचित्र (Dialateral or Duo Directional Bar Diagram)

यह दण्ड चित्र दो विपरीत गुण वाले तथ्यों का प्रदर्शन करने के काम में आते हैं । उदग्र दण्ड (Vertical Bar) बनाने में दण्ड आधार रेखा के ऊपर व नीचे बनाए जाते हैं एवं क्षैतिज (Horizental Bar) दण्ड समय आधार रेखा के दाएं / बाएं बनते हैं । द्विमुखी दण्ड चित्रों के माध्यम से दो विरोधी सूचनाओं का एक साथ प्रदर्शन व तुलना सम्भव हो जाती है। यह दण्ड बनाना सुविधाजनक है ।

उदाहरण-9 भारत के विदेशी व्यापार में भुगतान संतुलन के काल्पनिक आँकड़े दिए गए हैं, इन्हें द्वि-दिशा दण्ड चित्र के माध्यम से प्रदर्शित कीजिए ।

करोड़ रू

वर्ष	1960-61	1965-66	1970-71	1975-76	1980-81	1985-86
	1120	-810	1525	-925	-2135	+915



रेखाचित्र 3.9

3.5.7 मिश्रित दण्डचित्र (Compound Bar Diagram)

समंकों के विभिन्न गुणों की तुलना हेतु दण्डों को एक दूसरे से सटाकर बनाया जाता है । इन दण्डों को समानता के अनुसार विभिन्न रंगों अथवा चिन्हों द्वारा प्रदर्शित करते हैं ।

(i) **युगल दण्डचित्र** यहां पर दो गुण अथवा समय को प्रकट करने के लिए दो-दो दण्डों को एक साथ सटाकर

बनाया जाता है ।

(ii) **त्रि-दण्डचित्र** त्रि-दण्ड चित्र में तीन-तीन दण्डों को सटाकर बनाया जाता है । जैसे गैहूँ चावल व ज्वार / बाजरा को प्रदर्शित करने के लिए तीन अलग-अलग दण्ड सटाकर बनाये जा सकते हैं ।

(iii) **बहु दण्ड चित्र** इसमें तीन गुण से अधिक या एक ही गुण के तीन रूपों या अवस्थाओं से अधिक को प्रदर्शित करने के लिए अलग-अलग दण्ड सटाकर बनाए जाते हैं । मान लीजिए आपको विदेशी व्यापार के आँकड़े प्रदर्शित करने है तो विभिन्न देशों के विभिन्न वर्षों के व्यापार के आकडों के दण्ड सटाकर बनाए जा सकते हैं ।

(iv) **स्तूप चित्र** इस चित्र की आकृति स्तूप जैसी होती है । अधिकतर इस चित्र का प्रयोग विभिन्न आयु वर्गों के स्त्री-पुरुषों की संख्या को प्रदर्शित करने के लिए किया जाता है । इस चित्र में आधार रेखा को बीच में उदग्र मानकर क्षैतिज के दोनों और दण्डों की रचना की जाती है ।

3.6 द्वि-विमा चित्र (Two Dimential Diagram)

एक विमा (One Dimential) चित्र' में दण्डों की लम्बाई ही महत्व रखती है, उनकी चौड़ाई केवल सुन्दरता के लिए रखी जाती है । सभी दण्डों की चौडाई बराबर रखी जाती है उनका मोटाई का आँकडों से सम्बन्ध नहीं होता है । परन्तु द्वि-विमा चित्र का प्रयोग करने में लम्बाई के साथ-साथ चौडाई का भी महत्व होता है । इसलिए ऐसे चित्रों में आयताकार क्षेत्रफल का महत्व होता है । समंको की तुलना उनके क्षेत्रफल के अनुसार की जाती है । द्वि-विमा चित्र तीन प्रकार के होते हैं।

(i) आयत चित्र (Rectangular Diagram)

(ii) वर्ग चित्र (Square Diagram)

(iii) वृत चित्र (Pai Diagram)

3.6.1 आयत चित्र (Rectangular Diagram)

किसी वर्गीकृत बारम्बारता को जिसमें दो अथवा दो से अधिक चरों की पारस्परिक तुलना करनी हो तब हम आयत चित्र का प्रयोग करते हैं । ग्राफ पेपर के X अक्ष पर वर्ग अन्तरालों को अंकित कर लेते हैं एवं आवृत्ति को प्रदर्शित करने के लिए उस वर्ग पर एक आयत बनाते हैं जिसकी लम्बाई आवृत्ति को प्रदर्शित करती है । आयत चित्र दो प्रकार के होते हैं प्रतिशत अन्तर्विभक्त आयत चित्र जिसका वर्णन (1) हम खण्ड 3.5.4 में कर चुके हैं । (2) विभाजित आयत चित्र - जब तीन विभिन्न किन्तु परस्पर सम्बन्धित तथ्यों का चित्रमय प्रदर्शन करना हो जब विभाजित आयत चित्रों का प्रयोग किया जाता है । जैसे किसी वस्तु का प्रति इकाई मूल्य, बिक्री की मात्रा तथा विक्रय राशि एक साथ बतानी हो तो चौडाई प्रति इकाई मूल्य के हिसाब से लेनी चाहिए । बिक्री की मात्रा के अनुपात में ऊँचाई लेते हैं आयत का कुल क्षेत्रफल (लम्बाई गुणा चौडाई) बिक्री की विक्रय मूल्य को प्रदर्शित करता है ।

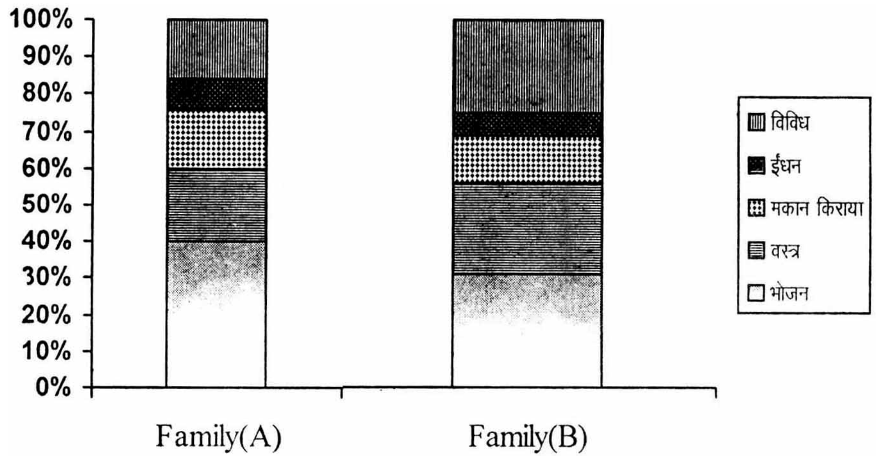
उदाहरण-10 नीचे दो परिवारों के मासिक व्यय (रु) सम्बन्धी विवरण को द्‌वि-विमा चित्र द्‌वारा प्रस्तुत कीजिए ।

व्यय की मदें	भोजन	वस्त्र	मकान किराया	ईधन	विविध	कुल
परिवार (A)	2000	1000	800	400	800	5000
परिवार (B)	2500	2000	1000	500	2000	8000

हल- दोनों परिवारों की आय को 100 मानकर प्रतिशत ज्ञात करें । इसके पश्चात् प्राप्त प्रतिशत मूल्यों की संचयी आवृत्तियाँ ज्ञात करें । दण्ड अथवा आयतकी चौड़ाई व्यय के अनुपात में 5:8 रखें।

व्यय की मदें	भोजन	वस्त्र	मकान किराया	ईधन	विविध	कुल
परिवार(A)	2000	1000	800	400	800	5000
प्रतिशत	40	20	16	8	16	100
संचयी आवृत्ति	40	60	76	84	100	
परिवार(B)	2500	2000	1000	500	2000	8000
प्रतिशत	31.3	25.0	12.5	16.2	25.0	100
संचयी आवृत्ति	31.3	56.3	68.8	75.0	100	

दो परिवारों का मासिक व्यय



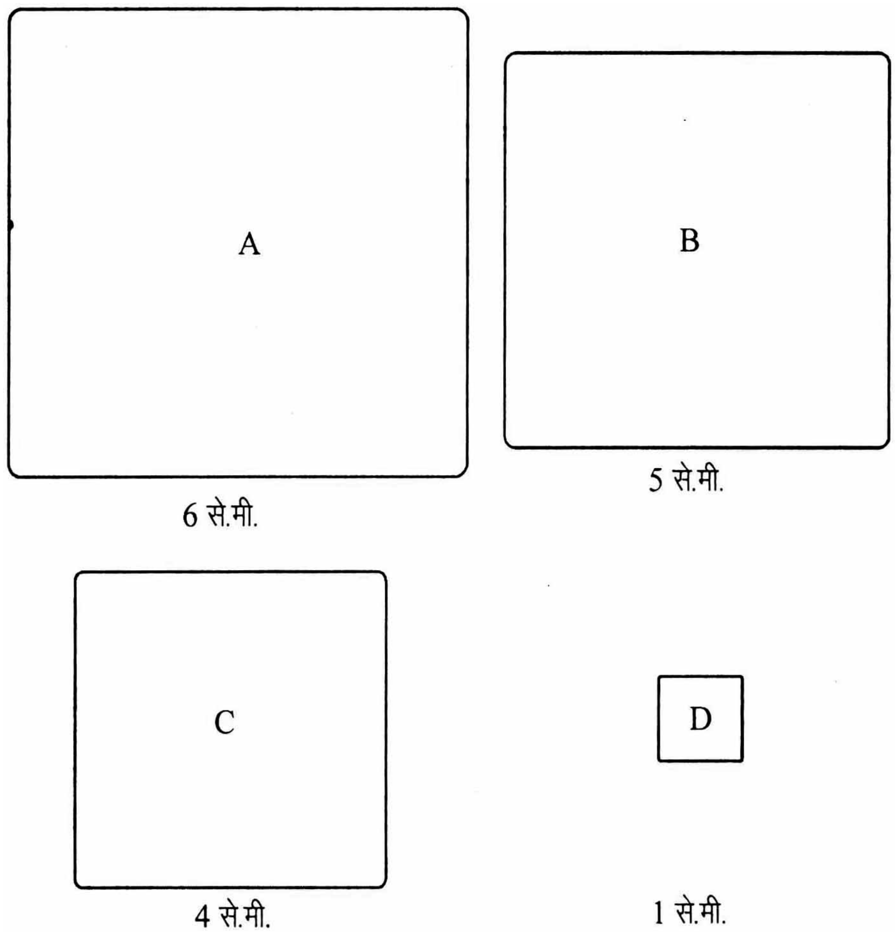
रेरवाचित्र 3.10

3.6.2 वर्ग चित्र (Square Diagram)

जर दो ऐसे समंकों की तुलना करनी हो जिनके माप में काफी अन्तर हो तो दण्ड चित्र उपयुक्त नहीं होता क्योंकि ऐसी स्थिति में चाहे कोई भी मापदण्ड लिए जाए एक दण्ड अत्यधिक लम्बा होगा एवं दूसरा दण्ड अत्यधिक छोटा होगा। बड़े दण्ड को कगज पर दिखाना कठिन हो जाएगा। ऐसी स्थिति में उन संख्याओं का वर्गमूल निकालकर उन्हें भुजा मानकर उसी अनुपात में उन पर वर्ग बनाते है। मान लीजिए एक संख्या 625 एवं दूसरी 25 है। यहां दण्ड चित्र नहीं बन सकता इसलिए इनका वर्गमूल निकालेंगे जो 25 व 5 हुआ इनका अनुपात 5 से.मी. एवं 1 से.मी. हुआ अत: एक वर्ग 1 से.मी. भुजा एवं एक भुजा 5 से.मी. भुजा का बनाया जाएगा। दो वर्गों के बीच का अन्तर अपनी इच्छानुसार लिया जा सकता है परन्तु आधार रेखा एक ही होनी चाहिए।

उदाहरण -10 चार देशों में उर्वरक उपयोग के आँकड़े इस प्रकार हैं। इन्हें वर्ग चित्र बनाकर प्रदर्शित कीजिए।

देश	A	B	C	D
उर्वरक उपयोग (करोड़ टन)	3600	2500	1600	100
वर्गमूल	60	50	40	10
वर्ग मूल की भुजा 1 से.मी.=10	6	5	4	1

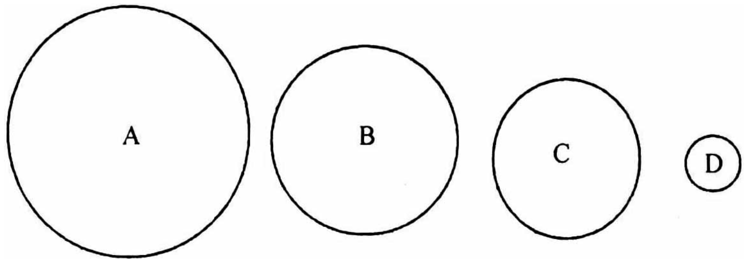


रेखाचित्र 3.11

3.6.3 वृत चित्र (Pai Diagram)

समंकों का तुलनात्मक अध्ययन करने के लिए वृतों का प्रयोग भी करते हैं । जिन परिस्थितियों में वर्ग चित्रों का प्रयोग होता है ठीक उन्हीं परिस्थितियों में वृत चित्र भी बनाये जा सकते हैं । वृत का क्षेत्रफल अर्द्धव्यास (Radius) पर निर्भर करता है । इसलिए वर्गों की भुजाओं के अनुपात में अर्द्धव्यास (Radius) लेकर वर्गों के स्थान पर वृत बनाएं जा सकते हैं । सभी वृतों का केन्द्र एक सरल रेखा होनी चाहिए । वृतों का लाभ यह है कि उन्हें बनाना सरल है । वृत सुन्दर लगते हैं । वृतों को साधारण वृत चित्र के रूप में अथवा अन्तर्विभक्त वृत चित्र बनाए जा सकते हैं । अन्तर्विभक्त करने के लिए सम्पूर्ण वृत को 360 डिग्री मानकर उप दिमाग का अनुपात ज़ात कर लेते हैं ।

उदाहरण-12 : उदाहरण 10 में दिए गए समंकों को वृत चित्र बनाकर प्रदर्शित कीजिए पिछले उदाहरण की वर्ग भुजाएं 8 से.मी., 5 से.मी., 4 से.मी. व 1 से.मी. है, अत: उनकी अर्द्धव्यास इसी प्रकार लेकर इन्हें आधा कर वृत बनाएंगे । वृत का अर्द्धव्यास लेकर 3 से.मी., 25 से.मी., 2 से.मी. एवं 0.5 से.मी. लेकर वृत बनाएंगे ।



रेखाचित्र 3.12

वृत चित्र का पैमान ज्ञात करना - पहले किसी एक वृत चित्र के अर्द्धव्यास के आधार पर उसका क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं। वृत का क्षेत्रफल πr^2 के बराबर होता है । जहां $\pi = \frac{22}{7}$ और Radius 3 से.मी है । अत: क्षेत्रफल $\frac{22}{7} \times (3)^2$

$\frac{22}{7} \times 9 = \frac{198}{7} = 28.2$ वर्ग से.मी.

$\because$ $\frac{198}{7}$ वर्ग से.मी.दिखाता है 3600 करोड़ टन

$\because$ 1वर्ग से.मी. दिखाता है $\frac{3600 \times 7}{198} = 127.27$ करोड़ टन

वृत चित्र को अन्तर्विभक्त भी किया जा सकता है । सम्पूर्ण वृत को 360° मानकर विभिन्न विभाग अथवा उपभाग को प्रदर्शित करने के लिए कोण का माप ज़ात कर लेते हैं । सम्पूर्ण उपभागों का जोड़ 360° होगा ।

उदाहरण-13 निम्नांकित समंकों को उपयुक्त चित्र बनाकर प्रदर्शित कीजिए ।

मद	कृषि	सिंचाई	ग्रामोद्योग	उद्योग	यातायात एंव संचार	सामाजिक सेवाएं	कुल
द्वितीय योजना(करोड़ रू.)	530	865	175	900	1300	830	4600
तृतीय योजना(करोड़ रू.)	1068	1662	264	1520	1486	1500	7500

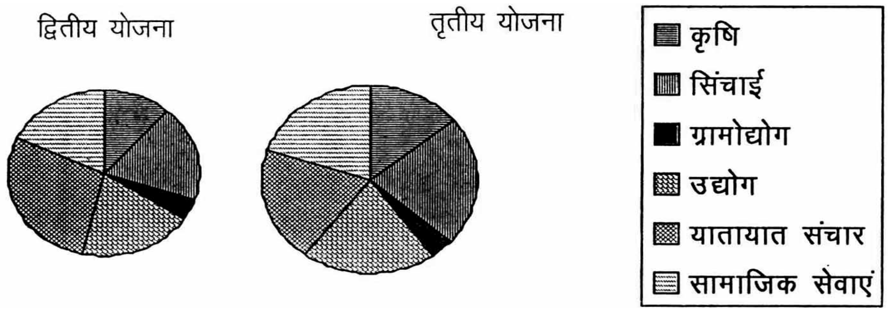
हल-

(1) सर्वप्रथम कुल व्यय का वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

(2) अर्द्धव्यास हेतु उनका अनुपात ज्ञात कीजिए ।

(3) इन्हें 360° के आधार पर विभिन्न मदों के कोणीय माप ज्ञात कीजिए ।

मद	कृषि	सिंचाई	ग्रामोद्योग	उद्योग	यातायात एवं संचार	सामाजिक सेवाएं	कुल	वर्गमूल 1 से.मी.=30
द्वितीय योजना (करोड़ रू.)	530	865	175	900	1300	830	4600	67.8
कोण	41	68	14	70	102	65	360°	2.26 cm
द्वितीय योजना (करोड़ रू.)	1068	1662	264	1520	1486	1500	7500	86.6
कोण	51	80	13	73	71	72	360°	2.90cm



वृत चित्र 3.13

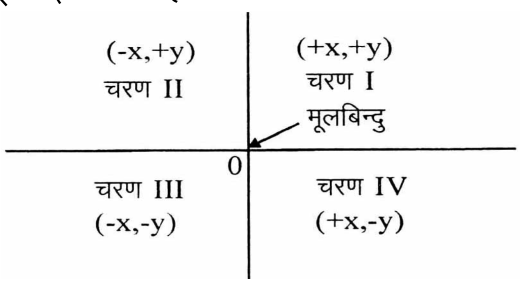
3.7 त्रि-विमा चित्र (Three Dimential Diagram)

इसे परिमा चित्र (Volume Diagram) भी कहते हैं । इसमें परिमा के आधार पर चित्रों का निर्माण होता है । जब एक बडा मूल्य व एक बहुत छोटा मूल्य हो एवं वर्ग अथ्वा वृत चित्र से भी यह सम्भव न हो तो त्रि विमा चित्र का प्रयोग होता है । इसके लिए संख्याओं का घनमूल (Cube Root) निकाला जाता है । घनमूल निकालने के लिए संख्याओं का लघुगुणक (Logarithms) निकाल कर उसमें 3 का भाग देकर प्राप्त मूल्य का प्रति लघुगुणक (Anti Logarithms) निकाल लेते हैं । इन घनमूलों के अनुपात में भुजाएं लेकर घन बनाते है । घन बनाने के लिए पहले घन की भुजा के आधार पर 1 वर्ग बनाया जाता है फिर दूसरा वर्ग पहले वर्ग पर इस प्रकार बनाया जाता है कि उसका बांया निचला कोना पहले वर्ग के बीच में हो एवं भुजाएं समानान्तर हो । दोनो वर्गों के कोनों को मिलाने से घन बन जाता है ।

3.8 समंकों का बिन्दुरेखीय प्रदर्शन

बिन्दु रेखीय चित्र एक विशेष प्रकार के कागज जिसे बिन्दु रेखीय पत्र अथवा अंग्रेजी भाषा में ग्राफ पेपर कहते हैं, पर बनाए जाते हैं । रेखाचित्र बनाने से पूर्व एक कटाव बिन्दु चुनकर ग्राफ पेपर को चार भागों में विभक्त कर लिया जाता है । अब कटाव बिन्दु को मूल बिन्दु अथवा 0 मानकर इस बिन्दु के ऊपर समकोण बनाती हुई दो रेखाएं खींची जाती है । यह रेखा बांए से दांए खींची जाती है उसे क्षैतिज रेखा या भुजाक्ष अथवा X अक्ष एवं ऊपर से नीचे खींची जाने वाली रेखा उदग्र रेखा कोटि अक्ष अथवा Y अक्ष कहा जाता है । सम्पूर्ण बिन्दु रेखीय पत्र चार भागों में बंट जाता है जिन्हें चरण (Quadrants) कहते हैं । स्वतंत्र चर अथवा समय चरों को X अक्ष पर एवं आश्रित चरों को Y अत पर दिखाया जाता है ।

चारों चरण के मूल्य इस प्रकार होंगे ।



रेखाचित्र 3.14

मूल बिन्दु के दाहिंनी ओर दोनों चरों के मूल्य धनात्मक होंगे । द्वितीय चरण में अर्थात् बायीं ओर X ऋणात्मक व Y धनात्मक होगा । तृतीय चरण में दोनों ऋणात्मक होंगे जबकि चतुर्थ चरण में X धनात्मक एवं Y के मूल ऋणात्मक होंगे। व्यवहार में अधिकांशत: प्रथम चरण ही दिखाया जाता है ।

3.8.1 बिन्दु रेखीय प्रदर्शन के लाभ

बिन्दु रेखीय प्रदर्शन के मुख्य लाभों का वर्णन इस प्रकार हैं-

- काल श्रेणियों तथा आवृत्ति वितरणों का प्रदर्शन करने में उपयोगी ।
- सांख्यिकीय तथ्यों का विश्लेषण करना आसान हो जाता है ।
- स्थिति सम्बन्धी माध्य का निर्धारण किया जा सकता है ।
- आन्तरगणन तथा पूर्वानुमान लगाना आसान हो जाता है ।
- सहसम्बन्ध के अध्ययन में सहायक ।
- रेखाचित्रों की सहायता से विभिन्न प्रकार के माप वाले समंकों की परस्पर तुलना करना आसान हो जाता है ।

3.8.2 बिन्दु रेरवीय प्रदर्शन के नियम

(i) **शीर्षक** प्रत्येक रेखाचित्र का एक शीर्षक होता है जो उसकी विषय सामग्री के आधार पर दिया जाता है । शीर्षक स्पष्ट होना चाहिए ।

(ii) **अक्षों का अनुपात** यह प्रयास होना चाहिए कि भुजाक्ष की लम्बाई कोटि अक्ष से लगभग डेड गुना हो ।

(iii) **पैमाना** पैमाना शुद्ध माप पर आधारित होना चाहिए । मापदण्ड अथवा पैमाने का चयन ग्राफ पेपर के आकार को ध्यान में रखकर करें ।

(iv) **मापदण्ड का उ**ल्लेख रेखाचित्र के ऊपर की ओर मापदण्ड का उल्लेख अवश्य करें ।

(v) **कृत्रिम** आधार रेखा आश्रित चर बड़े हो एवं अक्ष पर लिए गए मापदण्ड में नहीं समाते हो तो कृत्रिम आधार रेखा का प्रयोग करें ।

(vi) **वक्र खींचना** विभिन्न बिन्दुओं को सीधी रेखा से मिलाकर वक्र खींचें ।

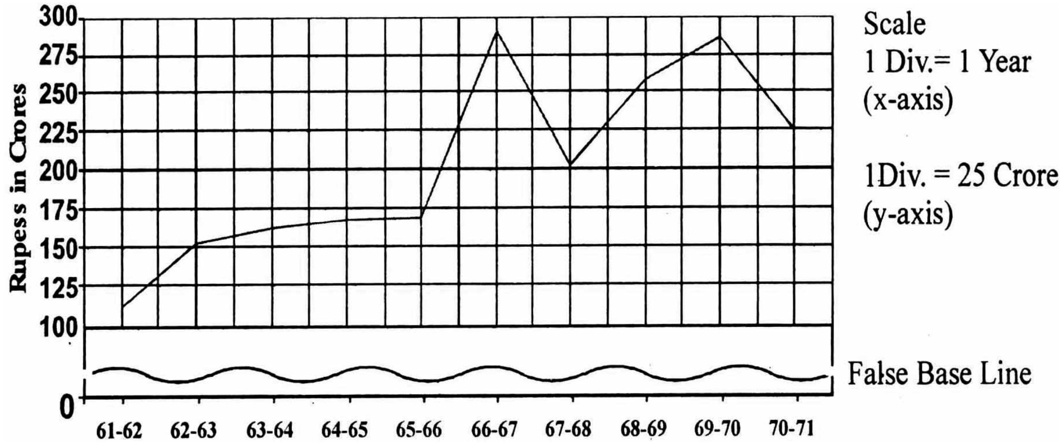
3.8.3 कृत्रिम आधार रेखा

बिन्दु रेखीय प्रदर्शन का नियम है कि उदग्र माप सदैव शून्य से प्रारम्भ होता है । जब मूल्य बडे हो एवं उनमें अन्तर कम हो तो शून्य से प्रारम्भ करने पर चित्र ऊपर की ओर बनेगा व उसमें छोटा अन्तर छुप जाएगा । इन बाधाओं को समाप्त करने के लिए कृत्रिम आधार रेखा का सहारा लिया जाता है । इसमें उदग्र अक्ष को मूल बिन्दु के ऊपर थोडा काट दिया जाता है बाद में श्रेणी के न्यूनतम मूल्य अथवा न्यूनतम के सन्निकट मूल्यों को उदग्र अक्ष पर मापकर लिखा जाता है । शून्य एवं न्यूनतम मूल्य के बीच का भाग दोहरी आधार रेखाओं द्वारा प्रदर्शित किया जाता है । कृत्रिम आधार रेखा से हम चित्र बनाने के लिए सम्पूर्ण ग्राफ पेपर का प्रयोग कर सकते हैं व चित्र ऊपरी कोने में नहीं बनता इस कारण चित्र आकर्षक लगता है ।

उदाहरण -14 निम्नांकित आँकडों को ग्राफ पेपर पर प्रदर्शित कीजिए ।

वर्ष	61-62	62-63	63-64	64-65	65-66	66-67	67-68	68-69	69-70	70-71
सूचकांक	114	155	166	171	172	295	206	262	290	229

Deficit Finance Curve



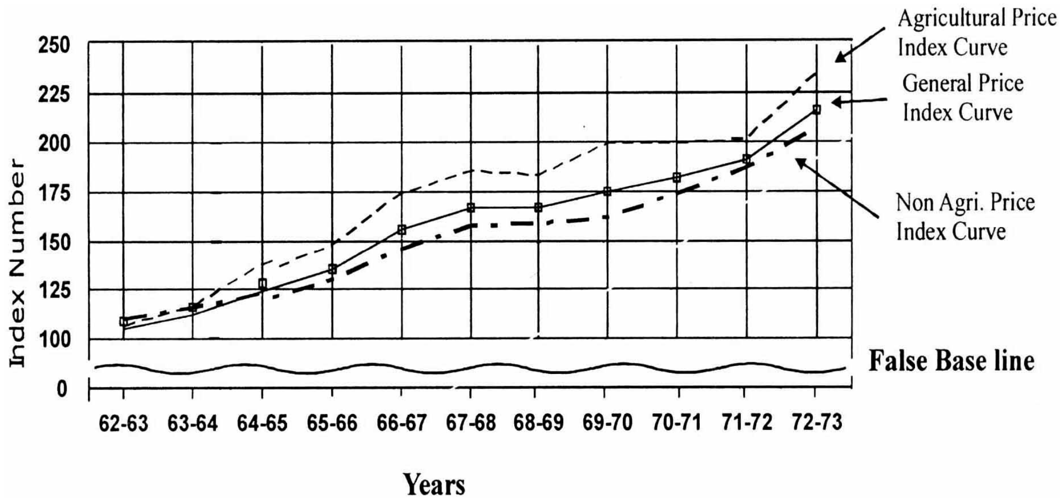
रेखाचित्र 3.15

यदि कालिक माला के निर्देशांक दिये हुए हों तो उन्हें ठीक उसी प्रकार अंकित किया जाता है जैसे कालिक माला की मूल संख्याओं को किया जाता है । यदि निर्देशांक न दिये हों तो मूल राशियों को निर्देशांकों में परिवर्तित करके अंकित किया जायेगा । इससे चरों के आनुपातिक परिवर्तन का अध्ययन किया जा सकता है ।

उदाहरण -15 भारत के निम्नलिखित सूचकांकों की संख्याओं के थोक मूल्य दिया गया है । ग्राफ पेपर पर इन संख्याओं को प्रदर्शित कीजिए ।

Year (July-June)	General Index Wholesale Prices	Index Agriculture Commodities	Index of Non Agriculture Commodities
1962-63	105.2	102.9	106.4
1963-64	112.3	112.4	112.3
1964-65	124.6	134.0	119.9
1965-66	135.9	147.5	130.1
1966-67	155.2	174.0	145.9
1967-68	167.0	185.2	158.0
1968-69	166.6	183.1	158.4
1969-70	174.3	198.8	162.1
1970-71	182.1	198.9	173.8
1971-72	191.2	200.7	186.5
1972-73	216.2	234.3	207.2

Index number of wholesale prices



रेखाचित्र 3.16

3.8.4 गैन्ट चित्र (Gantt Chart)

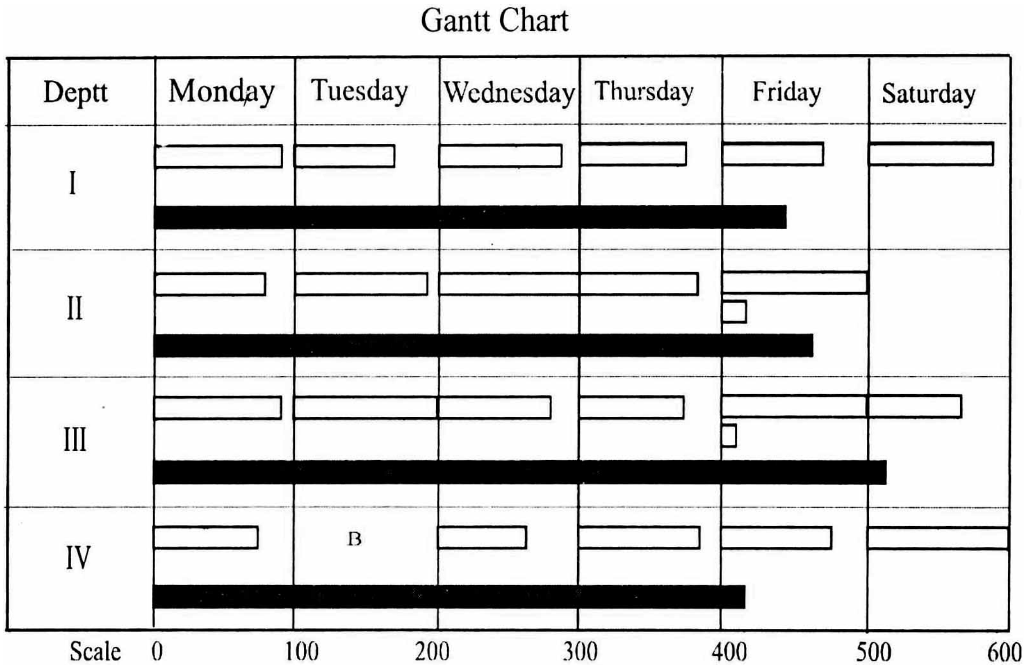
गैन्ट चित्र का सर्वप्रथम प्रयोग प्रसिद्ध प्रबन्ध अभियन्ता सर हेनरी गैन्ट द्वारा 1917 में किया गया था । गैन्ट चित्र मुख्य रूप में निर्माण कारखानों के दैनिक उत्पादन लाभों तथा प्राप्त प्रगति की तुलना करने के उद्देश्य से तैयार किये जाते है। गैन्ट चित्र की रचना करने के लिए सात जाने बनाये जाते हैं । पहला खाना मशीन अथवा विभाग को प्रदर्शित करता है शेष 6 खाने सप्ताह के कार्यदिवसों को प्रदर्शित करते हैं । प्रत्येक दिवस के खाने को फिर कार्य के घण्टों के अनुसार छोटे-छोटे खानों से प्रदर्शित करते हैं । एक दिन के कार्य को 100 के बराबर माना जाता है जिससे किए गए कार्य का प्रतिशत ज्ञात किया जा सके । इसके बाद सम्पन्न किए गए कार्य की निर्धारित कार्य के प्रतिशत के रूप में एक पड़ी रेखा (Horizantal Line) अथवा दण्ड (बार) द्वारा प्रदर्शित किया जाता है । यदि किसी दिन कारखाने में अतिरिक्त कार्य किया जाता है तो उसका ब्योरा उसी दिन के खाने में एक अलग दण्ड बनाकर किया जाता है । यदि किसी दिन किसी कारणवश कोई कार्य नहीं हो पाता तो सम्बन्धित खाने में उस कारण को संकेताक्षर के रूप में दिखाया जाता है जैसे बिजली बन्द होने पर ‘P’(No Power Supply) यंत्रों की टूट-फूट होने पर ‘B’ (Break Down) कच्चा माल उपलब्ध न होने पर ‘M’ (Waiting for Raw Material) मशीनों की मरम्मत की स्थिति में ‘R’ (Repair) इत्यादि लिखा जाएगा ।

इसके बाद पूरे सप्ताह का कुल कार्य योग कर एक दण्ड अलग से बनाया जाता है । इसमें काला रंग भरा जाता है । इस प्रकार पूरे सप्ताह का सम्मिलित कार्य. अलग-अलग कार्य दिवसों का कार्य, कार्य न होने का कारण, अधिक होने की जानकारी एक साथ प्राप्त हो जाती है ।

उदाहरण -16 टाटा के इस्पात कारखाने का किसी सप्ताह का कार्य प्रगति विवरण प्रतिशत के रूप में नीचे दिया गया है । प्रतिदिन का लक्ष्य 100 प्रतिशत है । गैन्ट चार्ट बनाइए ।

मशीन विभाग	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	गुरुवार	शुक्रवार	शनिवार	कुल
I	85	65	80	75	65	80	450
II	70	95	100	80	120	R	465

III	90	100	80	70	110	60	510
IV	75	B	60	90	85	100	410



रेखाचित्र 3.17

3.9 आवृत्ति बंटनों के रेखाचित्र

3.9.1 आवृति आयत चित्र

अविछिन्न माला का बिन्दु रेखीय प्रदर्शन करने के लिए आवृत्ति आयत चित्र अथवा हिस्टोग्राम (Histogram) बनाया जाता है । आवृत्ति चित्र में प्रत्येक वर्ग के लिए आयत बनता है । आयतों की संख्या वर्गों पर निर्भर है । आयत एक दूसरे से सटकर बनाए जाते हैं । आकार अथवा मूल्य भुजाक्ष पर एवं आवृतियों को लम्ब अक्ष पर बनाया जाता है । प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल आवृत्ति के अनुपात में होता है । वर्गान्तर समान होने पर आयत की चौड़ाई समान होती है । वर्गान्तर बड़ा होने पर चौडाई बढ़ाई जाएगी । यदि वर्गान्तर समावेशी (Inclusive) हो तो पहले उन्हें अपवर्जी (Exculsive) बना लेना चाहिए । हिस्टोग्राम बनाकर समंकमाला के मूल्यों का भूयिष्ठिक (Mode) भी ज्ञात किया जा सकता है । भूयिष्ठिक (Mode) ज्ञात करने की रीती इस प्रकार है ।

(i) सबसे अधिक ऊँचाई वाला आयत भूयिष्ठिक वर्ग वाला आयत होता है ।

(ii) इस आयत के दाहिंने कोने को उससे पूर्व के आयत के दाहिने कोने को मिलाते हुवे एक रेखा खींचे ।

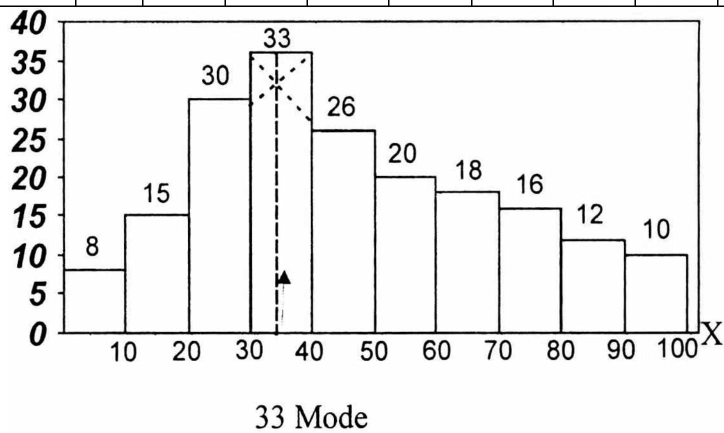
(iii) इसी प्रकार सबसे ऊँचे आयत के बायीं ओर के कोने से इससे अगले आयत के बाएं कोने को सीधी रेखा द्‌वारा मिलाएं।

(iv) जहां ये दोनों रेखाएं एक दूसरे को काटती है उस कटान बिन्दु से एक लब समानान्तर अक्ष Xaxis पर डालें ।

(v) जहां यह लम्ब X axis को छूता है बह मूल्य भूयिष्ठिक (Mode) मूल्य होता है ।

उदाहरण -17 निम्नांकित को एक हिस्टोग्राम बनाकर प्रदर्शित कीजिए एवं मूल्य निकालिए ।

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
विद्यार्थियों की संख्या	8	15	30	36	26	20	18	16	12	10



रेखाचित्र 3.18

उत्तर भूयिष्ठिक का मूल्य 33 है ।

बोध प्रश्न -02

निम्नांकित आँकड़ों को आवृत्ति चित्र (Histogram) बनाकर प्रदर्शित कीजिए ।

उम्र	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-70	70-100
व्यक्तियो की संख्या	5	15	18	22	35	20	18

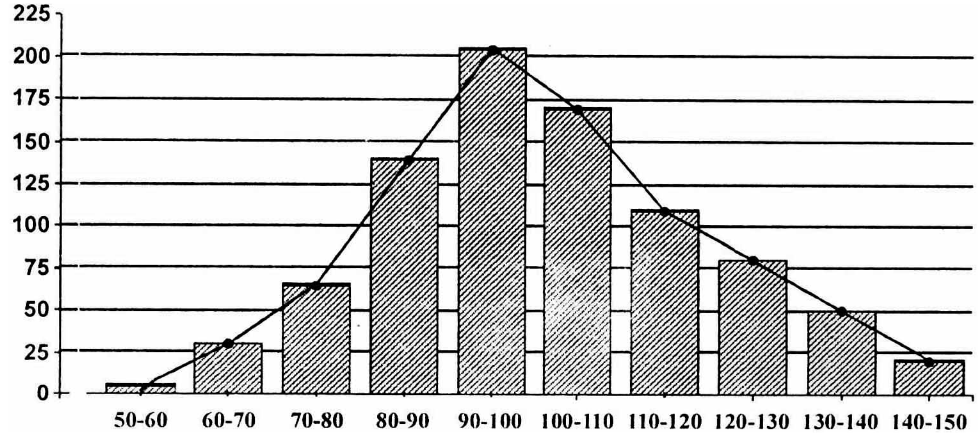
संकेत 50-70 एवं 70-100 वालें मूल्यों के आयत अधिक चौड़े बनेंगे

3.9.2 आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon)

आवृत्ति चित्र (Histogram) से आवृत्ति बहुभुज बनाना बहुत सरल है । आवृत्ति बहुभुज बनाने के लिए आवृत्ति चित्र के आयत के मध्य बिन्दु को लेते हैं । इन सभी आयतों के मध्य बिन्दुओं को मिलाती हुई एक सीधी रेखा खींचते हैं फिर वक्र को दोनों छोरों के भुजाक्ष के दोनों किनारों को मिला देते हैं ।

उदाहरण - 18 आवृत्ति बहुभुज तैयार कीजिए ।

मूल्य	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150
आवृत्ति	5	30	65	140	205	170	110	80	50	20



रेखाचित्र 3.19

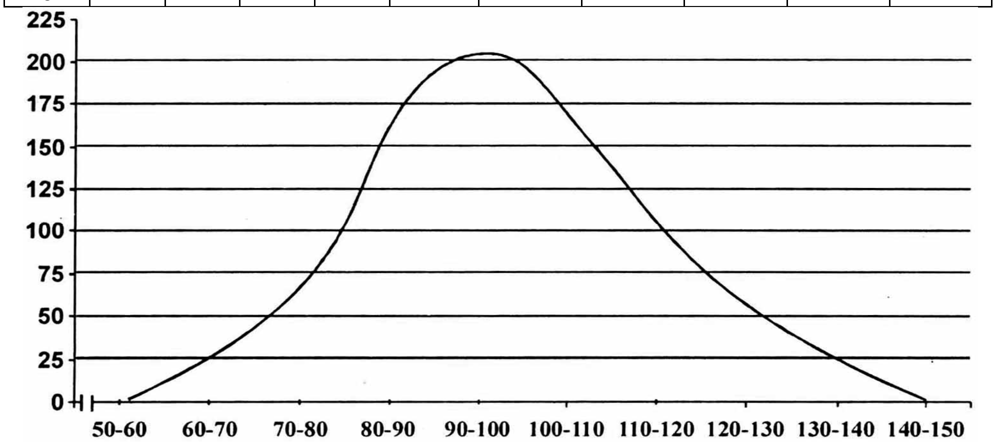
3.9.3 आवृत्ति वक्र (Frequency Curve)

आवृत्ति वक्र बनाने से पहले आवृत्ति चित्र (Histogram) आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon) बनाना आवश्यक है आवृत्ति बहुभुज आयतों के मध्य बिन्दुओं के मिलाने से बनता है इसलिए उसमें रेखाओं में कुछ मोड़ होते हैं । आवृत्ति वक्र में यह प्रयत्न किया जाता है कि आवृत्ति बहुभुज के कोण समाप्त हो जाय और बह एक सरलित वक्र (Smoothed Curve) बन जाय। यह वक्र Free hand से बनाया जाता है एवं यह आवश्यक नहीं कि वह मध्य बिन्दु से गुजरे । यह वक्र सामान्य वक्र (Normal Curve) की तरह घंटाकार (Bell Shaped) होता है ।

उदाहरण -19

उदाहरण 16 के मूल्यों के आधार पर एक आवृत्ति वक्र तैयार कीजिए ।

मूल्य	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140	140-150
आवृत्ति	5	30	65	140	205	170	110	80	50	20



रेखाचित्र 3.20

3.9.4 संचयी आवृत्ति वक्र अथवा तोरण (Ogive)

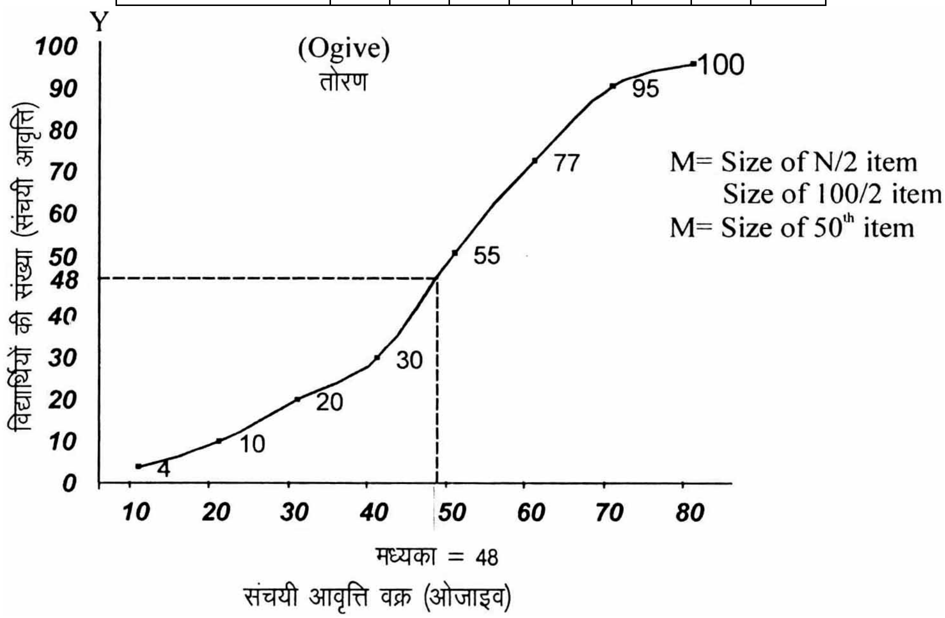
यदि आवृत्ति वक्र की रचना न करके वर्ग की ऊपरी सीमाओं को X अक्ष पर अंकित करके एवं संचयी आवृत्ति को Y अक्ष पर अंकित करके उन्हें सरल रेखा द्वारा मिला दे तो जो वक्र बनता है उसे संचयी आवृत्ति अथवा तोरण वक्र (Cummulative Frequency Curve or Ogive) कहते हैं । यह वक्र दी गई आवृत्तियों के आधार पर बढ़ती हुई अथवा घटती हुई आवृत्तियों के क्रम में बनता है । इस वक्र से मध्यका, चतुर्थक, दशमक एवं शतमक ज्ञात किये जाते हैं । मध्यका, ज़ात करने के लिए Size of N / 2 item ज़ात किया जाता है इसका मूल्य मध्यका होगा ।

उदाहरण -20 सांख्यिकी में प्राप्तांक इस प्रकार है । संचयी आवृत्ति वक्र बनाइये एवं मध्यका ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
विद्यार्थियों की संख्या	4	6	10	10	25	22	18	5

हल - सबसे पहले आवृत्ति को से कम के रूप में बदल लीजिए ।

प्राप्तांक (से कम)	10	20	30	40	50	60	70	80
आवृति	4	10	20	30	55	77	95	100



रेखाचित्र 3.21

3.10 सारांश (Summary)

चित्र समंको के आपसी सम्बन्धों को व्यक्त करने का एक आसान तरीका है । आँकडों का ढेर सामान्य व्यक्ति के लिए नीरस होता है उन्हें समझाने के लिए एवं उनमें रूचि उत्पन्न करने के लिए चित्रों का सहारा लिया जाता है । प्रस्तुत इकाई में हमने चित्रमय एवं बिन्दु रेखीय प्रदर्शन के लाभों का अध्ययन किया एवं इन्हें बनाने के बारे में सामान्य नियमों की जानकारी प्राप्त की । सामान्य व्यक्ति

चित्रों को देखकर भ्रमित न हो जाय इसके लिए इसकी सीमाओं का भी उल्लेख यहां किया गया है । चित्र स्वच्छ एवं आकर्षक हो एवं उन्हें पैमाने के आधार पर बनाया जाय तभी यह सार्थक होते हैं।

3.11 शब्दावली (Glossary)

एक विमा चित्र	One Dimential Diagram
द्वि विमा चित्र	Two Dimential Diagram
वृत चित्र	Pie Diagram
आवृत्ति चित्र	Histogram
आवृत्ति बहूभुज	Frequency Polygon
आवृत्ति वक्र	Frequency Curve
संचयी आवृत्ति वक्र	Ogive

3.12 सन्दर्भ ग्रन्थ (References)

Gupta, C.B.; an Introduction to Statistical Methods, Vikas Publishing House, Delhi.

एस.पी. गुणा; सांख्यिकी सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस. चन्द 2005

3.13 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Questions)

1. निम्नलिखित आँकड़ों को आयत चित्र तथा बारम्बारता बहुभुज से प्रदर्शित कीजिए ।

प्राप्तांक	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
विद्यार्थियों की संख्या	1	1	3	14	20	22	12	2

2. कुछ विद्यार्थियों के प्राप्तांक नीचे दिये गये हैं । इनको तोरण द्वारा प्रदर्शित कीजिए ।

66	62	45	79	32	51	56	60	51	49
25	42	54	54	58	70	43	58	50	52
38	67	50	51	48	65	79	30	96	55
82	51	63	45	53	40	35	56	70	52
67	55	57	30	63	42	74	50	40	55

(पहले के वर्गीकृत बारम्बारता बंटन निरूपित कीजिए फिर उसके अनुसार तोरण खींचिये ।)

3. किसी ग्राम की गेहूँ की पैदावार निम्नलिखित तालिका में दी गई है । इसे दंड आलेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

वर्ष	1959	1960	1961	1962	1963
गेहूँ की पैदावार (क्विंटल में)	200	250	450	550	600

4. दो विश्वविद्यालयों A और B के 1963 में विद्यार्थियों की संख्या संकाय के अनुसार निम्नलिखित तालिका में दी हुई है । इन आँकडों को उचित आलेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

संकाय	A		B	
	1953	1963	1953	1963
कला	800	2500	1000	2500
विज्ञान	500	1500	750	2000
वाणिज्य	300	1000	200	1000
विधि	100	500	200	1000

(उप विभाजित बहु दंड आलेख बनाइये)

5. निम्नलिखित तालिका में भारत को 1969-70 वर्ष में विभिन्न अनाजों की उपज दी गई है। इन आकडों को दंड आलेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए

अनाज	चावल	ज्वार	बाजरा	मक्का	राई	गेंहूँ	चना	दालें	अन्य
उपज (दस लाख टनों में)	40.4	9.7	5.4	5.7	2.2	20.0	5.5	6.2	4.9

इकाई - 04

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप - औसत, मध्यका एवं बहुलक
Measures of Central Tendencies - Arithmetic Mean, Median and Mode)

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य (Obectives)

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप:

- माध्य की गणना कर सकेंगे एवं इसके विभिन्न प्रकारों जैसे- समान्तर माध्य अथवा औसत, मध्यका, बहुलक की गणना करने योग्य हो जाएंगे
- जान सकेंगे कि विभिन्न प्रकार के माध्य कब एवं किन परिस्थितियों में उपयोग में लेना चाहिए;
- विभिन्न प्रकार के माध्य की क्या-क्या कमियां है? एवं;
- एक आदर्श माध्य के लिए क्या आवश्यक तल है?

4.1 प्रस्तावना (Introduction)

विस्तृत आकड़ों को सार्थक तथा विश्लेषण योग्य बनाने के लिए केवल उनका व्यवस्थापन तथा आलेखी निरूपण ही पर्याप्त नहीं होता है बल्कि उनकी केन्द्रीय प्रवृत्ति का पता लगाना भी आवश्यक होता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति से यहाँ अभिप्राय उस संख्यात्मक माप से है जो कि प्राप्त आकड़ों का सबसे अधिक प्रतिनिधित्व करता है, अर्थात् वह मान जो कि दिये गये आँकडों के एक समूह में बार-बार आता है। जब कभी दो या दो से अधिक आकड़ों के समूहों के तुलनात्मक अध्ययन की आवश्यकता होती है तब उनकी तुलना केवल मूल प्राप्तांकों के आधार पर सम्भव नहीं होती, क्योंकि उनका प्रसार न्यूनतम इकाई से लेकर अधिकतम इकाई तक दूर-दूर तक फैला रहता है। आकडों को व्यवस्थित करने पर भी उनका तुलनात्मक तथा विवेचनात्मक अध्ययन सम्भव नहीं होता तब ऐसी स्थिति में विभिन्न समूहों की केन्द्रीय प्रवृत्ति का पता लगाना आवश्यक हो जाता है।

इस इकाई में हम औसत अथवा समान्तर माध्य, मध्यका एवं बहुलक की गणना करना सीखेंगे। विभिन्न प्रकार के माध्यों के गुण-दोष एवं गणना सूत्र भी दिए जाएंगे। इकाई के अन्त में सारांश, शब्दावली एवं सन्दर्भ ग्रन्थों की सूची तथा अभ्यासार्थ प्रश्न दिए गए हैं।

4.2 अर्थ एवं परिभाषाएं (Meaning and Definitions)

प्रत्येक समंक श्रेणी में एक ऐसा बिन्दु होता है जिसके आसपास अन्य समंको के केन्द्रित होने की प्रवृति पाई जाती है। यह मूल श्रेणी के लगभग केन्द्र में स्थित होता है और उसके महत्वपूर्ण लक्षणों का प्रतिनिधित्व करता है। सांख्यिकीय माध्य की प्रमुख परिभाषाएँ निम्नलिखित हैं-

1. **क्राक्सटन एवं काउडेन के अनुसार**, "समंको के विस्तार में माध्य ऐसा मूल्य है जो श्रेणी के समस्त मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने हेतु प्रयुक्त किया जाता है। समंकमाला के विस्तार के अन्तर्गत होने के कारण इसे केन्द्रीय मूल्य का माप भी कहा जाता है।"
2. **ए.एल. बाउले के अनुसार,** "माध्य शुद्ध रूप से एक गणितीय विचार है जैसे विभिन्न विशेषताओं वाली संख्या में जीवन की औसत माप, जो किसी विशेष वर्ग की नहीं होती, परन्तु अंकगणितीय परिणाम को संक्षेप में वक्त करने की एक रीति मात्र है।"
3. **क्लार्क एवं शकाडे के अनुसार**, "माध्य समस्त समंक समूह का विवरण देने वाली एकमात्र संख्या प्राप्त करने का प्रयास है।"

4. **ए.ई.वाघ के अनुसार.** "एक माध्य, मूल्यों के एक समूह में से चुना गया वह मूल्य है जो उसका किसी रूप में प्रतिनिधित्व करता है ।

इस प्रकार, यह स्पष्ट हो जाता है कि माध्य वह मूल्य है जिसकी खोज श्रेणी के प्रतिनिधित्व के लिए की जाती है, जो उसकी केन्द्रीय प्रवृत्ति को भी वक्त करता है । माध्य मूल्य के चारों और श्रेणी के अन्य मूल्यों का झुकाव होता है और यह अवलोकन समूह की सभी विशेषताओं पर प्रकाश डालता है ।

4.2.1 उद्देश्य व उपयोगिता (Objectives and Function)

सांख्यिकीय माध्यों के निम्नलिखित उद्देश्य एवं कार्य हैं जिसके कारण उनकी अत्यधिक उपयोगिता है ।

1. **तुलना करना** माध्य द्वारा दो या अधिक समूहों अथवा वर्गों की तुलना आसानी से की जा सकती है । उदाहरणार्थ भारत और अमेरिका की प्रति व्यक्ति औसत आय की तुलना करके उचित परिणाम निकाले जा सकते हैं ।
2. **संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत करना** माध्यों द्वारा जटिल और अव्यवस्थित समंको की मुख्य विशेषताओं का एक सरल, स्पष्ट एवं संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत किया जाता है ताकि उन्हें समझने और याद रखने में भी कोई कठिनाई न हो। 110 करोड़ भारतीयों की अलग-अलग आय को समझना व स्मरण रखना असम्भव है परन्तु उनकी औसत प्रति व्यक्ति आय आसानी से समझी व याद रखी जा सकती है ।
3. **समूह का प्रतिनिधित्व** माध्यों की सहायता से न्यादर्श (samples) की परीक्षा करके पूरे समूह के सम्बन्ध में निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं अर्थात् न्यादर्श का माध्य निकालकर हम समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति को जान सकते है।
4. **मार्गदर्शन** माध्य के द्वारा कीमत स्तर, उत्पादन के स्तर आदि में होने वाले परिवर्तनों को ज्ञात किया जाता है और इसी जानकारी के आधार पर भावी नीतियों का निर्धारण होता है । एक बैंक अधिकारी के लिए यह जानकारी प्राप्त करना आवश्यक है कि औसत रूप से कितनी राशि एक दिन में बैंक से निकाली जा सकती है, इसी आधार पर यह निर्धारित होगा कि नकद रूप में कितनी राशि रखी जाएगी । इस प्रकार माध्य नीतियों के निर्धारण में मार्गदर्शन का कार्य करते हैं ।
5. **सांख्यिकीय विवेचन का आधार** सांख्यिकीय विश्लेषण की अधिकांश क्रियाऐं जैसे - अपकिरण सहसम्बन्ध, काल श्रेणी का विश्लेषण, सूचकांक आदि के विवेचन का आधार माध्य ही है ।

4.3 आदर्श माध्य के आवश्यक तत्व (Essential Properties of an Ideal Average)

एक आदर्श माध्य के आवश्यक तत्वों की व्याख्या करते हुए प्रो. यूल एवं केण्डाल ने इन्हें निम्नलिखित छः भागों में विभाजित किया है ।

1. स्पष्ट एवं स्थिर परिभाषा होनी चाहिए ।
2. सभी मूल्यों पर आधारित हो ।

3. सरल एवं बुद्धिगम्य हो ।
4. गणना में सरलता होनी चाहिए ।
5. निदर्शन के परिवर्तनों का न्यूनतम प्रभाव पडे ।
6. बीजगणितीय विवेचन सम्भव होना चाहिए ।

उपर्युक्त आवश्यक गुण एक आदर्श माध्य में होने चाहिए । इसके साथ ही वह समग्र की अधिकांश विशेषताओं को अस्त करने वाला एवं अधिकांश पद मूलों के निकट होना चाहिए ।

4.4 सांख्यिकीय माध्य के प्रकार (Kinds of Statistical Average)

सांख्यिकी में निम्न प्रकार के माध्यो का अध्ययन किया जाता है :

(क) स्थिति-सम्बन्धी माध्य (Positional Averages)

(1) बहुलक (Mode) (Z)

(2) मध्यका (Median) (M)

(ख) गणितीय माध्य (Mathematical)

(3) समान्तर माध्य (Arithmetic Mean) (X)

(4) गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean) (GM)

(5) हरात्मक माध्य (Harmonic Mean) (HM)

(6) द्विघातीय माध्य (Quadratic Mean) (QM)

(ग) व्यापारिक माध्य (Commercial Averages)

(7) चल अथवा गतिमान माध्य (Moving Average)

(8) प्रगामी या संचयी माध्य (Progressive Average)

(9) संग्रथित माध्य (Composite Average)

4.5 समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)

गणितीय माध्यों में सबसे अधिक महत्वपूर्ण और लोकप्रिय समान्तर माध्य है । जब हम बोलचाल की भाषा में औसत या माध्य शब्द का प्रयोग करते हैं तो हमारा अभिप्राय समान्तर माध्य से ही होता है ।

- **परिभाषा**

(i) **रीगलमैन एवं फ्रिसबी के अनुसार,** 'यह एक औसत है जो पद मूल्यों के जोड़ में उनकी संख्या का भाग देने से प्राप्त होता है"

(ii) **क्राक्स्टन एवं काउडेन के अनुसार**. "किसी श्रेणी का समान्तर माध्य उसके पद मूल्यों के योग में उनकी संख्या का भाग करके प्राप्त किया जाता है ।"

उदाहरणार्थ यदि किसी क्लास टेस्ट में चार विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक क्रमशः 10,16,12 और 18 है तो उनका औसत अंक $\frac{10+16+12+18}{4}=\frac{56}{4}=14$ अंक होगा ।

4.5.1 माध्य के प्रकार

समान्तर माध्य दो प्रकार के होते हैं ।

(1) सरल माध्य (Simple Arithmetic Average) इसमें पद माला के सभी पदों को समान महत्त्व दिया जाता है।

(2) भारित माध्य (Weighted Arithmetic Average) जब पदों को आवश्यकतानुसार भार देकर माध्य निकाला जाये तो इसे भारित माध्य कहते हैं ।

4.5.2 सरल समान्तर माध्य को गणना

सरल समान्तर माध्य की गणना श्रेणियों की प्रकृति पर आधारित होती है । श्रेणियाँ निम्नलिखित प्रकार की हो सकती है ।

(क) व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series) व्यक्तिगत श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना दो प्रकार से की जा सकती है।

(1) **प्रत्यक्ष रीति** (Direct Method) इस रीति के अनुसार समंकमाला के सभी मूलों (X_1, X_2, X_3.................X_n) को जोडकर योग ($\sum X$) ज्ञात किया जाता है । इस योग में पद मूल्यों की संख्या (N) से भाग दे दिया जाता है ।

$$X = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + X_n}{N} = \sum X$$

यह रीति अत्यन्त सरल है । परन्तु इसका प्रयोग ऐसी श्रेणियों में ही उचित है जिनमें चर-मूल्यों की संख्या कम हो तथा दशमलव में न हों ।

- **प्रक्रिया**

(i) सर्वप्रथम दिए हुए पद मूल्यों का योग ज्ञात कर लिया जाता है पद मूल्यों को X तथा पद मूल्यों के योग को 28 द्वारा प्रकट किया जाता है ।

(ii) पद मूल्यों की संख्या को गिन लिया जाता है और इसे ओर द्वारा प्रकट करते हैं ।

(iii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है :

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

उदाहरण - 1

10 विद्यार्थियों द्वारा सांख्यिकी में प्राप्त अंक दिए हुए हैं इनसे समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

क्रम संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
प्राप्तांक	25	28	32	26	38	35	24	23	20	42

हल-

(1) दिए हुए मूल्यों का योग करें । यह जोड़ 291 है अर्थात् $\sum X = 291$ है ।

(2) पद मूल्यों की संख्या ज्ञात करें । यह कुल 10 है अर्थात ओर N = 10 है ।

(3) सूत्र का प्रयोग कर माध्य ज्ञात करें ।

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{291}{100} = 29.1$$

समान्तर माध्य = 29.1 अंक ।

(ii) लघु रीति (Short-cut Method)

समान्तर माध्य का सबसे महत्वपूर्ण बीजगणितीय गुण यह होता है कि 'वास्तविक माध्य से विभिन्न पद मूल्यों के विचलनों का बीजीय योगफल शून्य होता है ।"

$$\sum = (X - \bar{X}) = \sum d = 0$$

यदि वास्तविक समान्तर माध्य (X) की बजाय किसी कल्पित मूल्य (A) को माध्य मान लिया जाये तो विभिन्न पद मूल्यों के इस कल्पित माध्य से निकाले गये विचलनों का योग शून्य नहीं होगा। इन विचलनों के औसत का कल्पित माध्य में समायोजन करने पर वास्तविक माध्य ज्ञात हो जाएगा । यही लघु रीति का आधार है । अतः-

वास्तविक माध्य = कल्पित माध्य + संशोधन कारक -

सूत्रानुसार $\overline{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$

संकेताक्षर $\bar{X}$ = समान्तर माध्य

A = कल्पित माध्य

$\sum$dx = कल्पित माध्य से पद मूल्यों के विचलनों का योग

N = पदों की संख्या

प्रक्रिया

(i) दिए हुए मूल्यों में से किसी एक सरल मूल्य को कल्पित माध्य मान लेना चाहिये । सैद्धान्तिक रूप से किसी को भी कल्पित माध्य माना जा सकता है चाहे वह समंक श्रेणी से बाहर का ही क्यों न हो, परन्तु व्यवहार में ऐसे मूल्य को मानने से गणन क्रिया सरल हो जाती है जो न तो सबसे कम हो और न ही सबसे अधिक बल्कि सबसे मध्य का हो ।

(ii) प्रत्येक व्यक्तिगत मूल्य (X) में से कल्पित माध्य (A) घटाकर विचलन ज्ञात कर लेना चाहिए - (ऋणात्मक एवं धनात्मक चिन्हों का ध्यान रखे) ।

dx = (X - A)

(iii) विचलनों का बीजगणितीय योग निकाल लेना चाहिए-

$\sum$dx = $\sum$(X – A)

(iv) निम्न सूत्र का प्रयोग करना चाहिए-

$$\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$$

उदाहरण- 2

10 विद्‌यार्थियों के वजन के समान्तर माध्य की गणना लघु रीति द्‌वारा कीजिए ।

वजन (किलो ग्राम)	42	40	43	57	50	53	66	60	51	48

हल-

समान्तर माध्य की गणना (लघु-रीति)

वजन (X) (किलोग्राम)	कल्पित माध्य (A) से विचलन A = 50 dx = (X-A)
42	42 - 50 = -8
40	40 - 50 = -10
53	43 - 50 = -7
57	57 - 50 = 7
50	53-50 = 3
53	66 - 50 = 16
66	60-50 = 10
51	51-50 = 1
48	48 - 50 = 2
N = 10	$\sum$dx = +10

$$\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{N} = 50 + \frac{10}{10} = 50 + 1 = 51$$

समान्तर माध्य = 51 किलोग्राम

(ख) खण्डित श्रेणी

खण्डित श्रेणी में पद मूलों की आवृत्ति दी हुई होती है, समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए आवृत्तियों को ध्यान में रखना आवश्यक होता है । समान्तर माध्य की गणना निम्न प्रकार की जाती है ।

(1) प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)

(i) पद मूल्यों को उनसे सम्बन्धित आवृत्ति (f) से गुणा किया जाता है, गुणनफल का योग ($\sum$fx) ज्ञात कर लिया जाता है ।

(ii) आवृत्तियों का योग ज्ञात किया जाता है $\sum$f = N

(iii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है-

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{\sum fx}{N}$$

उदाहरण-3

40 व्यक्तियों के एक वर्ग की जाँच की गई कि वे कितने समय तक अपनी साँस रोक सकते हैं । निम्न परिणामों के आधार पर प्रत्यक्ष रीति द्‌वारा औसत समय ज्ञात कीजिए-

समय (सैकिंड)	58	61	65	67	68	70	72
व्यक्तियों की संख्या	8	5	12	5	4	3	3

हल-

खण्डित श्रेणी में अंकगणितीय माध्य की गणना (प्रत्यक्ष रीति)

समय (X)	व्यक्तियों की संख्या (f)	fx
58	8	464
61	5	305
65	12	780
67	5	335
68	4	272
70	3	210
72	3	216
	$\sum f = 40$	$\sum fx = 2582$

$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{2582}{40} = 64.55$ औसत अथवा माध्य = 64.55 सैकिंड

(2) लघु रीति (Short-cut Method)

खण्डित श्रेणी में लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्नलिखित है:

(i) पद मूल्यों में से कल्पित माध्य (A) का चयन किया जाता है ।

(ii) प्रत्येक पद मूल्य (X) में से कल्पित माध्य (A) घटाकर उस मूल्य का विचलन [dx = (X-A)] ज्ञात किया जाता है।

(iii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है ।

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{N}$$

संकेताक्षर $\bar{X}$ = समान्तर माध्य

A = कल्पित माध्य

$\sum$ fdx = विचलनों व आवृत्तियों की गुणाओं का योग

N = कुल आवृत्ति

उदाहरण-4

उपर्युक्त उदाहरण संख्या 3 में दी गई खण्डित श्रेणी का समान्तर माध्य लघु रीति के प्रयोग द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल- लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य की गणना-

समय (सैंड) (X)	व्यक्तियों की संख्या (f)	कल्पित माध्य से विचलन A = 67 dx = (X-A)	fdx
58	8	-9	-72
61	5	-6	-30
65	12	-2	-24

67	5	0	0
68	4	1	4
70	3	3	9
72	3	5	15
	N = ∑f = 40		∑fdx =-98

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{N} = 67 + \frac{(-98)}{40} = 67 - 2.45$$

$$\bar{X} = 64.55$$

∴ समान्तर माध्य = 64.55 सैकिंड

(ग) अखण्डित श्रेणीं

अखण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य उसी प्रकार ज्ञात किया जाता है जिस प्रकार खण्डित श्रेणी में, परन्तु अन्तर केवल इतना है कि पहले इस श्रेणी के वर्गों के मध्यमान ज्ञात किये जाते है । ये मूल्य समान्तर माध्य की गणना करने के आधार है ।

मध्यमान मूल्य (Mid Value or M.V.) वर्ग की निम्न सीमा और उच्च सीमा या अंक को जोडकर उसमें दो का भाग देकर निकाला जाता है । अखण्डित अथवा सतत् श्रेणी (Continuous Series) को परीक्षक कभी-कभी वर्गान्तर में न लिखकर (से कम) अथवा (से अधिक) के रूप में लिख देते हैं जो देखने में खण्डित श्रेणी की तरह प्रतीत होते हैं । अत: जब भी किसी सारणी के मूल्य (X) के साथ “से कम” अथवा “से अधिक" लिखा हो तो समझ ले अखण्डित श्रेणी है जिसे समूही रूप से जाड़कर लिखा गया है । ऐसी समंकमालाओं को हल करने से पूर्व सामान्य समंकमाला के वर्गान्तर रूप में लेकर आवें इसकी गणना विधि पहले ध्यानपूर्वक सीख लें । जैसे उदाहरण 5 में बतायी गई है ।

सूत्रानुसार- M.V. $= \frac{Lower\ limit + Upper\ limit\ of\ the\ class\ interval}{2}$

इस प्रकार प्रत्येक वर्ग का मध्य मूल्य ज्ञात कर लेने से श्रेणी खण्डित श्रेणी में परिवर्तित हो जाती है । समान्तर माध्य की गणना निम्न तीन विधियों से की जा सकती है ।

(i) प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

(ii) लघु विधि (Short-cut Method)

(iii) पद विचलन विधि (Step Deviation Method)

(i) प्रत्यक्ष विधि सर्वप्रथम मध्य मूल्य ज्ञात किए जाते हैं और प्राप्त मूल्यों (x) को आवृत्ति से गुणा करके fx प्राप्त किया जाता है का योग (∑fx) ज्ञात कर लिया जाता है ।

सूत्रानुसार $\overline{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{\sum fx}{N}$

(ii) लघु विधि अखण्डित श्रेणी में कल्पित माध्य से मध्य मूल्यों के विचलन ज्ञात करके खण्डित श्रेणी के अनुसार ही समान्तर माध्य की गणना की जाती है ।

सूत्रानुसार $\bar{X} = A + \frac{\sum fx}{\sum f} = A + \frac{\sum fx}{N}$

उदाहरण - 5 निम्न श्रेणी से प्रत्यक्ष रीति व लघु रीति द्वारा औसत प्राप्तांक ज्ञात कीजिए-

Marks अंक (X)	No. of Students (विद्यार्थियों की संख्या) (f)	Marks अंक (X)	No. of Students (विद्यार्थियों की संख्या (f)
Below 10	25	Below 50	95
Below 20	40	Below 60	125
Below 30	60	Below 70	190
Below 40	75	Below 80	240

हल : संचयी आवृत्ति श्रेणी को गणना से पूर्व साधारण अखण्डित श्रेणी में परिवर्तित किया जाएगा ।

अखण्डित श्रेणी समान्तर माध्य की गणना (प्रत्यक्ष रीति)

(अंक) Marks (X)	मध्य बिन्दु M.V.	विद्यार्थियों की संख्या (f)	Fx
0-10	5	=25	125
10-20	15	40-25=15	225
20-30	25	60-40=20	500
30-40	35	75-60=15	525
40-50	45	95-75=20	900
50-60	55	125-75=30	1650
60-70	65	190-125=65	4225
70-80	75	240-190=50	3750
		$N = \sum f = 240$	$\sum fx = 11900$

$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{11900}{240} = 49.58$ औसत प्राप्तांक = 49.58 Approx

अखण्डित श्रेणी -समान्तर माध्य की गणना (लघुरीति)

Marks (X)	M.V. (L1+L2)/2	No. of Students (f)	Deviations A=35 dx (X-A)	Fdx
0-10	5	25	-30	-750
10-20	15	15	-20	-300
20-30	25	20	-10	-200
30-40	35	15	0	0
40-50	45	20	10	200
50-60	55	30	20	600
60-70	65	65	30	1950
70-80	75	50	40	2000
		$N = \sum f = 240$		$\sum fdx = 3500$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{N} = 35 + \frac{3500}{240} = 35 + 14.58 = 49.58$$

औसत प्राप्तांक ($\bar{X}$) 49.58 Approx

(iii) पद विचलन विधि यह विधि उपर्युक्त बताई गई लघु रीति को और भी सरल बनाती है । इस विधि में विचलनों को समापवर्तक (Common Factor) से भाग देकर पद विचलन ज्ञात किए जाते हैं । इन पद विचलनों को उनकी आवृत्ति से गुणा करके कुल योग ज्ञात कर लेते हैं । इसके बाद निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है ।

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd'x}{N} Xi$$

$\bar{X}$ = समान्तर माध्य

A = काल्पनिक माध्य

$\sum fd'x$ = सम्बन्धित पद विचलन और आवृत्तियों के गुणनफल का योग

N = आवृत्तियों का योग

I = वर्ग-विस्तार

उदाहरण-6 निम्न सारणी से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए ।

प्राप्तांक	5	10	15	20	25	30	35	40
छात्रों की संख्या	10	14	18	20	16	12	6	4

हल:

प्राप्तांक (X)	आवृत्ति (f)	विचलन A= 20 dx = X-A	पद विचलन i=5 d'x = $\frac{dx}{i}$	पद विचलन X आवृति Fdx
5	10	-15	-3	-30
10	14	-10	-2	-28
15	18	-5	-1	-18
20	20	0	0	0
25	16	5	1	16
30	12	10	2	24
35	6	15	3	18
40	4	20	4	16
	∑f = N = 100			∑fd'x = -2

सूत्र या $\bar{X} = A + \frac{\sum fd'x}{N} Xi$ या $= 20 + \frac{-2}{100} \times 5$ $\bar{X}$ = 20-0.1 = 19.9

उदाहरण -7 निम्नलिखित समंको की सहायता से छात्रों की प्रत्यक्ष लघु रीति से औसत ऊँचाई ज्ञात कीजिए ।

हल-

ऊंचाई	आवृति	प्रत्यक्ष रीति	लघु रीति	
X	f	Fx	A= 65 dx = X-A	Fdx
62	4	248	-3	-12
63	4	252	-2	-8
64	8	512	-1	-8
65	10	650	0	0
66	15	990	1	15
67	14	938	2	28
68	5	340	3	15
	N=60	$\sum$fx = 3390		Fdx = 30

प्रत्यक्ष रीति $= \bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$

$= \frac{3930}{60}$ इंच

$\bar{X} =$ 66.5 **ईंच**

लघु रीति - $\bar{X} = \frac{\sum fdx}{N}$

$= 65 + \frac{30}{60}$

$= 65+0.5$

$\bar{X} =$65.5 ईंच

उदाहरण- 8 निम्नलिखित समंकों से प्रत्यक्ष, लघु व पद विचलन रीति (तीनों रीतियो) का प्रयोग करते हुए समान्तर माध्य की गणना कीजिए।

ऊँचाई (Heights)	संचयी आवृतियाँ (c.f.)
7 फीट से कम	26
14 फीट से कम	57
21 फीट से कम	92
28 फीट से कम	134
35 फीट से कम	216
42 फीट से कम	287
49 फीट से कम	341
56 फीट से कम	360

हल: पहले उक्त संचयी आवृत्ति श्रेणी को साधारण अखण्डित श्रेणी में बदला जाएगा।

ऊँचाई (फीट में)	मध्यमान (MV)	आवृति (f)	मध्य x आवृति MV x f
0-7	3.5	26	91.0
7-14	10.5	31	325.5

14-21	17.5	35	612.5
21-28	24.5	42	1029.0
28-35	31.5	82	2583.0
35-42	38.5	71	2733.5
42-49	45.5	54	2457.0
49-56	45	19	997.5
		N = 360	$\sum$fx = 10829.0

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{10829}{360} = 30.08$$

औसत ऊँचाई = 30.08 फीट

लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य का परिकलन

ऊँचाई (फीट में) (X)	मध्यमान (MV)	आवृति (f)	A=31.5 से विचलन dx= X-A	पद विचलन (d'x) = $\left(\frac{X-A}{i}\right)$	पद विचलन X आवृति Fd'x
0-7	3.5	26	-28	-4	-104
7-14	10.5	31	-21	-3	-93
14-21	17.5	35	-14	-2	-70
21-28	24.5	42	-7	-1	-42
28-35	31.5	82	0	0	0
35-42	38.5	71	7	1	71
42-49	45.5	54	14	2	108
49-56	52.5	19	21	3	57
योग		N = 360			$\sum$fd'x = -73

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd'x}{N} \times i$$

$$= 31.50 + \frac{-73}{360} \times 7$$

$$= 31.50 \frac{511}{360} = 31.50 - 1.42 = 30.08$$

माध्य ऊँचाई (X) = 30.08 फीट

4.5.3 सामूहिक समान्तर माध्य (Combined Arithmetic Mean)

किसी समूह के विभिन्न वर्गों का समान्तर माध्य एवं इकाइयों की संख्या ज्ञात हो तो इन समंको की सहायता से पूरे समूह का सामूहिक माध्य भी ज्ञात किया जा सकता है । सामूहिक माध्य की गणना निम्न प्रकार की जाती है ।

(i) विभिन्न वर्गो के समान्तर माध्य $\bar{X}_{1,}$ $\bar{X}_{2}$......... $\bar{X}_{n}$ को उनसे सम्बन्धित इकाइयों की संख्या N_1, N_2 ...Nn से गुणा किया जाता है । प्राप्त गुणनफल का योग कर लिया जाता है ।

(ii) विभिन्न वर्गों की इकाइयों की संख्या का योग $N_1+N_2+........+N_n$ कर लिया जाता है ।

(iii) निम्न सूत्र के प्रयोग द्वारा सामूहिक समान्तर माध्य निकाला जाता है ।

$$\bar{X} = \frac{\bar{X}_1 N_1 + \bar{X}_2 N_2 + \bar{X}_3 N_3 .... + \bar{X}_n N_n}{N_1 + N_2 + N_3 .... + N_n}$$

$\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{X}_3$..........आदि विभिन्न वर्गो के समान्तर माध्य ।

N_1, N_2, N_3.........आदि विभिन्न वर्गों की इकाइयों की संख्या ।

उदाहरण - 9 निम्नलिखित सूचना से बताइए :

(क) कौन सा कारखाना दैनिक पर अधिक मजदूरी व्यय करता है,

(ख) दोनों कारखानों के सम्मिलित श्रमिकों की औसत दैनिक मजदूरी क्या है?

	कारख़ाना	
	A	B
श्रमिकों की संख्या	2500	200
औसत दैनिक मजदूरी (रु. में)	2.00	2.50

हल: (क) श्रमिकों की संख्या $N_1 = 250$ $N_2 = 200$

औसत दैनिक मजदूरी **$\bar{X}_1$ = रूपये 2.00** **N_2 = 200**

$\therefore \sum X_A = 2 \times 250$ $\therefore \sum X_B = 2.50 \times 200$

$= Rs.500$ $= Rs.500$

कुल दैनिक मजदूरी

दोनों कारखानों में दैनिक मजदूरी पर कुल व्यय बराबर है । -

(क) सामूहिक माध्य $$\bar{X} = \frac{\bar{X}_1 N_1 + \bar{X}_2 N_2}{N_1 + N_2}$$

$$\bar{X} = \frac{2 \times 250 + 2.50 \times 200}{250 + 200}$$

$$\bar{X} = \frac{1000}{450} Rs.2.22$$

सामूहिक समान्तर माध्य ($\bar{X}$) रूपये 2.22

4.5.4 अज्ञात मूल्यों को ज्ञात करना (To find out the Missing Values)

$\bar{X}$ N एवं में से कोई से दो मूल्य ज्ञात होने पर तीसरा मूल्य सरलता से ज्ञात किया जा सकता है, जैसे-

$$(i)\,\overline{X} = \frac{\sum X}{N} \quad (ii)\,N = \frac{\sum X}{N} \quad (iii)\,\sum X = N \times \overline{X}$$

किसी श्रेणी के अज्ञात मूल्य या अज्ञात आवृत्ति को ज्ञात करने में इन सूत्रों का प्रयोग किया जाता है ।

4.5.5 भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)

सरल समान्तर माध्य श्रेणी के सभी पद मूल्यों को समान महत्व दिया जाता है, किन्तु जहाँ पद मूल्यों के सापेक्षिक महत्व को स्पष्ट करना हों बही हमें भारित समान्तर माध्य का सहारा लेना होता है । यदि हमें बी.ए. व एम.ए. के विद्यार्थियों के परीक्षा परिणाम की तुलना करनी है. तो बी.ए. के विद्यार्थियों को अधिक भार देना होगा क्योंकि उनकी संख्या एम.ए. के विद्यार्थियों की तुलना में अधिक होती है । पारित समान्तर माध्य के द्वारा तुलना करके अधिक सही निष्कर्ष प्राप्त किये जा सकते हैं ।

- **भारित समान्तर माध्य की गणना** भारित समान्तर माध्य निकालने के लिए विभिन्न पदों के अलग-अलग भार जान लेना आवश्यक है । भार दो प्रकार के होते हैं-
  - (i) **वास्तविक भार** यह भार श्रेणी में स्पष्ट रूप से दिया हुआ होता है, जैसे-यदि एक महाविद्यालय के कर्मचारियों का औसत वेतन ज्ञात करने के लिए प्राचार्य, प्राध्यापकों एवं अन्य कर्मचारियों को उनकी संख्या के बराबर भार प्रदान किया जाय तो इस प्रकार का भार वास्तविक भार कहलाता है ।
  - (ii) **अनुमानित भार** वास्तविक भार की अनुपस्थिति में पद मूल्यों को उनके सापेक्षिक महत्व के अनुसार भार प्रदान कर दिए जाते हैं तो इन्हें अनुमानित भार कहा जाता है ।
  - भारित समान्तर माध्य की गणना दो प्रकार से की जा सकती है ।

(1) प्रत्यक्ष रीति

(i) सर्वप्रथम मूल्यों को उनके सम्बन्धित मार से गुणा करके गुणनफल का योग ज्ञात (ΣW) किया जाता है ।

(ii) दिये गये भारों का योग ज्ञात (ΣW) किया जाता है ।

(iii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जावेगा

$$\bar{X}_w = \frac{\bar{X}_1 W_1 + \bar{X}_2 W_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{X}_n W_n}{W_1 + W_2 + \ldots\ldots\ldots + W_n} = \frac{\sum WX}{\sum W}$$

संकेत $\bar{X}_w$ = भारित समान्तर माध्य ।

$\sum WX$ = मूल्यों ब मारो की गुणाओ का योग ।

$\sum W$ = भारों का जोड़ ।

(2) लघु रीति

(i) पद मूल्यों में से कल्पित भारित माध्य (AW) द्वारा विचलन ज्ञात किये जाते हैं ।

(ii) प्राप्त विचलनों को उनसे संबन्धित भार से गुणा करके प्राप्त गुणनफल का योग (ΣWdx) ज्ञात कर लिया जाता है।

(iii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है ।

$$\bar{X}_w = A_w + \frac{\sum WDX}{\sum W}$$

व्यवहार में भारित समान्तर माध्य निकालने में, अधिकतर प्रत्यक्ष रीति का ही प्रयोग किया जाता है ।

उदाहरण- 10 निम्न परिणामों का निर्वचन कीजिए जो A एवं B विश्वविद्यालय से सम्बन्धित है । ज्ञात कीजिए कि दोनों में कौन अच्छा है।

परीक्षा	विश्वविद्यालय -A		विश्वविद्यालय -B	
	परीक्षार्थियों की संख्या	उत्तीर्ण	परीक्षार्थियों की संख्या	उत्तीर्ण
M.Sc.	60	50	50	40
M.A.	150	135	240	190
B.Sc.	400	300	300	210
B.A.	240	156	160	100
Total	850	635	750	540

हल-

दोनों विश्वविद्यालयों के परीक्षा परिणामों की तुलना के लिए भारित समान्तर माध्य का प्रयोग करना होगा। विद्यार्थियों की संख्या को ध्यान में रखते हुए अनुमानित भार दिया जाएगा। भार देते समय ध्यान रखना चाहिए कि दोनों विश्वविद्यालयों के लिए भार समान हो।

Examination	University-A					University-B				
	No. of Candidates appeared	Successful	Pass % X	Weights W	WX	No. of Candidates	Successful	Pass % X	Weights W	WX
M.Sc.	60	50	88.33	3	176.66	50	40	80	2	160
M.A.	150	135	90.00	2	270	240	190	79.17	3	237.5
B.Sc.	400	300	75.00	12	900	300	210	70	12	840
B.A.	240	150	62.5	8	500	160	100	62.5	8	500
Total	850	635		25 $\sum W$	1846.66 $\sum WX$	750	540		25 $\sum W$	1737.5 $\sum WX$

विश्वविद्यालय A = $\frac{\sum WX}{\sum X} = \frac{1846.66}{25}$ =73.87

विश्वविद्यालय B = $\frac{\sum WX}{\sum X} = \frac{1737.5}{25}$ =69.50

विश्वविद्यालय -A का परीक्षा परिणाम श्रेष्ठ है ।

4.5.6 समान्तर माध्य की बीजगणितीय विशेषताएँ

(Algebraic Properties of The Arithmetic Mean)

(i) समान्तर माध्य में निम्नलिखित बीजगणितीय विशेषताएँ पाई जाती है-

$$\sum(X-\bar{X})=0$$

(ii) समान्तर माध्य से पद मूल्यों के विचलनों का योग शून्य होता है ।

(iii) समान्तर माध्य के विभिन्न मूल्यों के विचलनों के वर्गों का योग न्यूनतम होता है ।

$\sum$d2 = minimum

(iv) यदि किसी समूह के दो या अधिक भागों के अलग-अलग समान्तर माध्य और उन भागों में पदों की संख्या ज्ञात हो तो उनकी सहायता से पूरे समूह का सामूहिक समान्तर माध्य ज्ञात किया जा सकता है ।

यदि $\bar{X}$,N ब में से कोई दो माप ज्ञात हों तो तीसरा माप निश्चित किया जा सकता है ।

$$\bar{X}=\frac{\sum X}{N}=\sum X=\bar{X}\,N, N=\frac{\sum X}{X}$$

4.5.7 समान्तर मान्य के गुण-दोष

- **गुण**

(1) **सरलता** समान्तर माध्य की गणना सरलता से की जा सकती है, इसकी गणना में उच्चस्तरीय गणित के ज्ञान की आवश्यकता नहीं होती ।

(2) **निश्चितता** यह माध्य निश्चित और सदा एक ही होता है ।

(3) **स्थिरता** यह केन्द्रीय प्रवृत्ति का अधिक स्थाई मापन है, इस पर दैव विचरणों का प्रभाव कम पड़ता है ।

(4) **तुलनीयता** यह माध्य तुलना करने के लिए बहुत उपयुक्त है । यदि पदों की संख्या अधिक हो तो यह असामान्यताओं को कम कर देता है । इसलिए तुलना अधिक अच्छी तरह से की जा सकती है ।

(5) **बीजगणितीय विवेचना** समान्तर माध्य में कई बीजगणितीय गुण पाए जाते हैं जिस कारण अन्य सांख्यिकीय रीतियों जैसे अपकिरण विषमता सह-सम्बन्ध आदि में समान्तर माध्य का काफी प्रयोग किया जाता है ।

(6) **सभी पद मूल्यों पर आधारित** समान्तर माध्य सभी पद मूल्यों पर आधारित होने के कारण समूह की सभी विशेषताओं का प्रतिनिधित्व करता है ।

- **दोष**

(1) चरम मूल्यों का प्रभाव समान्तर माध्य श्रेणी के सभी पद-मूल्यों पर आधारित होता है. अत: उस अवस्था में जबकि श्रेणी में कुछ असाधारण सीमान्त मूल्य हों, तो वह माध्य समूह का प्रतिनिधित्व नहीं कर पाता । जैसे A,B,C,D चार व्यक्तियों की मासिक आय क्रमश: 2000,200,100 एवं 50 रूपये हैं तो औसत मासिक आय 587. 5 रूपये होगी, यह आय समग्र का प्रतिनिधित्व नहीं करती ।

(2) भ्रमात्मक निष्कर्ष माध्य से श्रेणी की बनावट या प्रवृत्ति के बारे में कोई जानकारी प्राप्त नहीं होती है, अत: इसके निष्कर्ष भ्रमात्मक हो सकते हैं, उदाहरण - दो कम्पनियों के 3 वर्ष के लाभ इस प्रकार हैं ।

वर्ष	प्रथम श्रेणी (रुपया)	द्वितीय श्रेणी (रुपया)
द्वितीय वर्ष	4000	4000
तृतीय वर्ष	5000	5000
तृतीय वर्ष	6000	6000

दोनों कम्पनियों का औसत लाभ 5000 रूपये हैं जिससे परिणाम निकलता है कि दोनों एक ही स्तर पर है परन्तु प्रथम कम्पनी उन्नति कर रही है व दूसरी अवनति की ओर जा रही है ।

(3) अवास्तविक एवं हास्यास्पद समान्तर माध्य वह संख्या है जो सामान्यतया श्रेणी के बाहर की होती है, अत: वह समूह का प्रतिनिधित्व नहीं कर सकती । दशमलव अंश में होने पर यह माध्य अवास्तविक एवं हास्यास्पद लगता है।

(4) सभी पद मूल्यों कीं जानकारी आवश्यक समान्तर माध्य की गणना के लिए सभी पदों के वास्तविक मूल्यों की जानकारी आवश्यक होती है ।

(5) गुणात्मक अध्ययन व अनुपात. दर व प्रतिशत गुणात्मक अध्ययन व अनुपात, दर व प्रतिशत आदि का अध्ययन करने के लिए समान्तर माध्य सर्वथा अनुपयुक्त है ।

(6) बिन्दु रेखीय प्रदर्शन सम्भव नहीं है ।

समान्तर माध्य सर्वाधिक प्रचलित माध्य है । सामाजिक व आर्थिक समस्याओं के विवेचन के लिए यह माध्य बहु त उपयोगी है । औसत मूल्यव औसत लागत, औसत वेतन, औसत आय, औसत आयात-निर्यात, औसत वर्षा आदि मालूम करने के लिए समान्तर माध्य ही उपयोग किया जाता है ।

4.6 मध्यका (Median)

अर्थ एवं परिभाषा किसी समंक श्रेणी को आरोही (बढ़ते हु ए) या अवरोही (घटते हु ए) क्रम में सुव्यवस्थित करने पर उस श्रेणी के मध्य में जो मूल्य आता है वही मध्यका कहलाता है । यह समंक श्रेणी को दो बराबर भागों में विभाजित करता है।

4.6.2 परिभाषाएं

(1) **प्रो. कॉनर के अनुसार,** "मध्यका समंक श्रेणी का वह पद मूल्य है जो समूह को दो समान भागों में इस प्रकार विभक्त करता है कि एक भाग में समस्त मूल मध्यका से अधिक और दूसरे भाग में समस्त मूल उससे कम हों ।

(2) **नीस्वेन्जर,** "मध्यका एक स्थिति सम्बन्धी मूल्य है जो सीमान्त विचरणों के आकार की अपेक्षा संख्या से प्रभावित होता है ।"

उपर्युक्त परिभाषाओं से स्पष्ट है कि "मध्यका किसी व्यवस्थित पदमाला के मध्य वह पद मूल्य है जो पदमाला को दो बराबर भागा में विभक्त कर देती है ।"

4.6.2 मध्यका की गणना

मध्यका की गणना विभिन्न श्रेणीयों में निम्न प्रकार की जाती है-

(क) व्यक्तिगत श्रेणी व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्नानुसार है :

(1) सर्वप्रथम श्रेणी को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाता है ।

(2) निम्न सूत्र द्वारा मध्यका की गणना की जाती है ।

M = size of $\left(\frac{N+1}{2}\right)^{th}$ item अथवा M = वे पद का मूल्य

M = मध्यका

N = पदों की संख्या

मध्यका की ही भांति चतुर्थक, दशमक एवं शतमक ज्ञात किये जाते हैं । अन्तर सिर्फ इतना है कि मध्यका में जहां श्रेणी को दो समान भागों में विभाजित करने के लिए 2 का भाग देते हैं वहीं चतुर्थक में 4 का दशमक में 10 का एवं शतमक में 100 का भाग देते हैं ।

उदाहरण- 11 एक कक्षा के 11 विद्यार्थियों का भार नीचे दिया गया है । मध्यका भार को ज्ञात कीजिए।

भार (किलो) 60,59,43,67,69,50,67,55,48,54, व 51

हल - श्रेणी के पद मूल्यों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर -

व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका की गणना

क्रम संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
आरोही क्रम	43	48	50	51	54	55	59	60	67	67	69
अवरोही क्रम	69	67	67	60	59	55	54	51	50	48	43

M = size of $\left(\frac{N+1}{2}\right)^{th}$ item

= size of $\left(\frac{11+1}{2}\right)^{th}$ item

=Size of 6^{th} item

M = 55 किलोग्राम

आरोही या अवरोही क्रम से प्राप्त मध्यका का मूल्य समान होता है ।

- **पदों को संख्या सम होने पर मध्यका ज्ञात करना** यदि पदों की संख्या सम है तो उसमें एक संख्या और जोड़ने पर वह ऐसी संख्या बन जायेगी जिसमें 2 का भाग देने पर हमें सम्पूर्ण संख्या प्राप्त नहीं होगी । ऐसी स्थिति में उसके आस-पास के दोनों पदों के मूल्यों का योग करके दो का भाग देने से जो संख्या आयेगी वही अभिष्ट उत्तर होगा ।

उदाहरण -12 निम्न आँकड़ों से मध्यका मूल्य ज्ञात कीजिए ।

75, 200, 180, 225, 100, 150, 170, 165, 160, 220

हल- व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका की गणना

क्र.सं.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
मूल्य	75	110	150	160	170	180	185	200	220	225

$$M = \text{size of } \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$$= M = \text{size of } \left(\frac{10+1}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$$= \text{size of } 5.5^{th} \text{ item}$$

$$\therefore sizeof\, 5.5^{th}\, item = \frac{sizeof\, 5^{th}\, item + sizeof\, 6^{th}\, item}{2}$$

$$M = \frac{170+180}{2} = \frac{350}{2} = 175$$

(क) खण्डित श्रेणी खण्डित श्रेणी में मध्यका ज्ञात करने के लिए निम्न प्रक्रिया है-

(1) सर्वप्रथम संचयी आवृत्तियाँ ज्ञात की जाती है ।

(2) इसके बाद निम्न सूत्र द्वारा मध्यका की क्रम संख्या ज्ञात कर ली जाती है

$$M = \text{size of } \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

(3) मध्यका की क्रम संख्या प्रथम बार जिस संचयी आवृत्ति में सम्मलित होती है. उसका मूल्य ही मध्यका होता है । उदाहरण-13 निम्न बंटन से मध्यका मूल्य ज्ञात कीजिए ।

पद	0	1	2	3	4	5	6	7	8
आवृति	1	9	26	59	72	52	29	7	1

हल-

पद (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
आवृति (f)	1	9	26	59	72	52	29	7	1
Cf	1	10	36	95	167	219	248	255	256

$$M = \text{size of } \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th} \text{ item}$$

$= \text{size of} \left(\frac{256+1}{2}\right)^{th} \text{item}$

$= \text{Size of} \left(\frac{256}{2}\right)^{th} \text{item}$

= 128.5th item

M=4

अत: 128.5 दे पद का मूल्य मध्यका होगा। जिस संचयी आवृत्ति में यह मूल्य प्रथम बार सम्मलित होगा उसके सामने वाला पद मध्यका होगा ।

(ग) सतत श्रेणी सतत श्रेणी में मध्यका का मूल्य निकालने के निम्न प्रक्रिया अपनाई जाती है-

(1) सर्वप्रथम संचयी आवृत्तियाँ ज्ञात की जाती है ।

(2) निम्न सूत्र द्‌वारा मध्यका पद ज्ञात किया जाता है ।

$$M = Size\ of \left(\frac{N}{2}\right)^{th} item$$

(3) मध्यका पद की संख्या जिस संचयी आवृत्ति में प्रथम वार आती है उसके सामने कला वर्ग मध्यका वर्ग कहलाता है ।

(4) मध्यका वर्ग में से मध्यका का निर्धारण निम्न सूत्र द्‌वारा किया जाता है ।

$$M = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - C\right)$$

M = मध्यका

L_1 = मध्यका वर्ग की निम्न सीमा

i = मध्यका वर्ग का विस्तार

$\frac{N}{2}$= मध्यका पद

C = मध्यका वर्ग से पूर्व वर्ग की संचयी आवृत्ति

उदाहरण -14 निम्नलिखित आवृत्ति वितरण से मध्यका ज्ञात कीजिए ।

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
f	5	10	14	20	35 f	15	1
Cf	5	15	29	49 c	84	99	100

$$M = Size\ of \left(\frac{N}{2}\right)^{th} item$$

$$M = Size\ of \left(\frac{100}{2}\right)^{th} item$$

= Size of 50th item

मध्यका वर्ग 40-50

$$M = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - C\right)$$

$$= 40 + \frac{10}{35}(50 - 49)$$

$$= 40 + \frac{10}{35} \times 1$$

$$= 40 + 0.285$$

$$M = 40.285$$

उदाहरण-15 निम्न सारणी से मध्यका ज्ञात कीजिए ।

प्राप्तांक	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45
संख्या	7	10	16	32	24	18	10	5	1

हल- समावेशी श्रेणी में मध्यका निर्धारण करने के लिए इसे अपवर्जी श्रेणी में बदला जाता है ।

प्राप्तांक	अपवर्जी वर्ग	f	cf
1-5	0.5-5.5	7	7
6-10	5.5-10.5	10	17
11-15	10.5-15.5	16	33C
16-20	15.5-20.5	32 f	65
21-25	20.5-25.5	24	89
26-30	25.5-30.5	18	107
31-35	30.5-35.5	10	117
36-40	35.5-40.5	5	122
41-45	40.5-45.5	1	123
		N=123	

M= size of$\left(\frac{N^{th}}{2}\right)\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ item

$$M = Szieof\left(\frac{123}{2}\right)^{th} item = 61.5^{th} item$$

मध्यका वर्ग 15.5 - 20.5

मध्यका $M = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - C\right)$

$$=15.5 + \frac{5}{32}(61.5 - 33)$$

$$= 15.5 + \frac{5}{32} \times 28.5$$

M = 19.95

उदाहरण-16 निम्न सारणी से रिक्त स्थानों के मूल्य ज्ञात कीजिए, यदि श्रेणी का मध्यका मूल्य 45 है ।

वर्ग	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
आवृति	2	28	?	10	8

हल-

वर्ग	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
F	6	28	X ? f	10	8
c.f.	6	34 c	34+x	44xx	52+x

चूँकि मध्यका मूल्य 45 दिया हुआ है, अतः मध्यका वर्ग 40-60 है ।

सूत्रानुसार -

$$M = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - C\right)$$

$$45 = 40 + \frac{20}{x}\left(\frac{52+x}{2} - 34\right)$$

$$5 = \frac{20}{x}\left(\frac{52+x-68}{2}\right)$$

$$5 = \frac{10}{x}(x-16)$$

-5x =-160

$$x = \frac{160}{5} = 32$$

अतः रिक्त आवृत्ति 32 है ।

उदाहरण-17 निम्नलिखित से मध्यका ज्ञात कीजिए ।

अंक (se कम)	80	70	60	50	40	30	20	10
छात्रों की संख्या	100	90	80	60	32	20	13	5

हल- ऐसे प्रश्नों में समंक श्रेणी को पलट देते हैं अर्थात् नीचे से चलते हैं ।

C.I.	C.f.	F
0-10	5	5
10-20	13	13-5=8
20-30	20	20-13=7
30-40	32 C	32-20=12
40-50	60	60-32=28 f
50-60	80	80-60=20
60-70	90	90-80=10
70-80	100	100-90=10

$$M = size\,of\left(\frac{N}{2}\right)^{th} item = size\,of\left(\frac{100}{2}\right)^{th} item$$

Size of 50^{th} item

$$M = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - C\right)$$

$$= 40 + \frac{10}{28}(50 - 32)$$

M = 46.4 अंक

4.6.3 मध्यका की विशेषताएं

मध्यका में निम्न प्रमुख विशेषताएँ पाई जाती है ।

(1) मध्यका एक स्थिति सम्बन्धी माध्य है, यह पद मूल्यों के आकार से प्रभावित न होकर उनकी स्थिति से या संख्या से प्रभावित होता है।

(2) मध्यका उस समय समान्तर माध्य से अधिक होगा जब वितरण बाईं ओर फैला हुआ हो, एवं उस समय कम होगा जब फैलाव दायीं ओर होगा । सममित वितरण होने पर मध्यका एवं समान्तर माध्य का मूल्य बराबर होता है ।

(3) किसी श्रेणी के पद मूल्यों में से मध्यका द्वारा विचलन ज्ञात किये जाएँ तो इनका योग अन्य किसी मूल्य द्वारा निकाले गये विचलन के योग से कम होता है ।

$\sum(X - W)$ न्यूनतम

4.6.4 मध्यका के गुण-दोष

- **गुण**

(1) मध्यका में सरलता का गुण विद्यमान है क्योंकि इसे समझना व ज्ञात करना सरल है ।

(2) मध्यका श्रेणी के मध्य में स्थित मूल्य होता है, अत: यह सीमान्त मूल्यों से प्रभावित नहीं होता।

(3) रेखाचित्र खींचकर भी मध्यका मूल्य का निर्धारण किया जा सकता है ।

(4) मध्यका का निर्धारण निश्चितता से किया जा सकता है, यह बहुलक की तरह अनिश्चित नहीं होता ।

- **दोष**

(1) मध्यका मूल निर्धारित करने से पूर्व पदों को आरोही या अवरोही क्रम में रखना पडता है ।

(2) सतत श्रेणी में मध्यका निर्धारण इस मान्यता पर आधारित होता है कि प्रत्येक वर्ग में आवृत्तियाँ समान रूप से वितरित है । यह मान्यता सदैव सत्य नहीं होती ।

(3) मध्यका मूल एवं पदों की संख्या दी हुई हो तो हम सभी पदों के मूल्यों का योग प्राप्त नहीं कर सकते, अत: उच्चत्तर गणितीय क्रियाओं में इसका प्रयोग बहुत कम किया जाता है ।

(4) मध्यका सीमान्त मूल्यों से प्रभावित नही होता।

मध्यका गुणात्मक तथ्यों जैसे बुद्धिमता, स्वास्थ्य आदि के अध्ययन में बहुत उपयोगी होता है । सामाजिक समस्याओं के विश्लेषण में मध्यका की काफी उपयोगिता है । वस्तुत: जहाँ इकाइयों

को क्रमानुसार रखा जा सके और चरम मूल्यों को महत्व न देना हो वही मध्यका का प्रयोग उचित होता है ।

4.7 बहुलक (Mode)

बहुलक भी मध्यका की तरह एक स्थिति सम्बन्धी माध्य है, इसे भूयिष्ठक भी कहा जाता है । "Mode" फ्रैन्च भाषा के शब्द 'La Mode' से बना है, जिसका अर्थ है रिवाज या फैशन । सांख्यिकीय विश्लेषण में बहुलक का अभिप्राय उस मूल्यों से है जिसकी आवृत्ति सर्वाधिक हो । बहुलक सर्वाधिक घनत्व की स्थिति, 'मूल्यों के अधिकतम केन्द्रीयकरण का बिन्दु, सर्वाधिक आने वाले पद का मूल होता है ।

4.7.1 परिभाषाएं

(1) **क्राक्सटन एवं काउडेन के अनुसार** "एक समंक श्रेणी का बहुलक वह मूल्य है जिसके निकट श्रेणी की इकाइयाँ अधिक से अधिक केन्द्रित होती है । उसे मूल्यों की श्रेणी का सबसे अधिक प्रतिरूपी मूल्य माना जा सकता है।

(2) **रींगलमेन एवं फ्रिसबी के अनुसार** "यह वह मूल है जो सबसे अधिक पाया जाता है या अधिक यथार्थ रूप में वह मूल्य जिसके करीब अधिकतम इकाइयाँ पाई जाएँ, वह सबसे अधिक सामान्य मूल्य होता है ।"

4.7.2 बहुलक का निर्धारण

(क) व्यक्तिगत श्रेणी व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक तीन प्रकार से ज्ञात किये जा सकते हैं

(i) व्यक्तिगत श्रेणी को खण्डित श्रेणी में बदलकर ।

(ii) व्यक्तिगत श्रेणी को सतत श्रेणी में बदलकर ।

(iii) मध्यका एवं समान्तर माध्य की सहायता से ।

(i) **व्यक्तिगत श्रेणी में बदलना** व्यक्तिगत श्रेणी को खण्डित श्रेणी में बदलकर निरीक्षण से यह ज्ञात किया जा सकता है कि सर्वाधिक आवृत्तियाँ किस चर की हैं, वही चर मूल बहुलक होगा।

उदाहरण-18 10 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक नीचे दिये गये हैं । बहुलक अंक ज्ञात कीजिए ।

अंक 8, 7, 6, 3, 6, 5, 6, 3, 6, 4

हल-

खण्डित श्रेणी में बदलने पर

अंक	3	4	5	6	7	8
आवृत्ति	1	2	1	3	1	2

सर्वाधिक तीन विद्यार्थियों के प्राप्तांक 6 है, अत: बहुलक का मूल्य 6 होगा ।

श्रेणी में एक से अधिक चर मूल्यों की आवृत्तियाँ अधिकतम होने पर बहुलक का निर्धारण कठिन हो जाता है । ऐसी श्रेणी को अनेक बहुलक वाली श्रेणी कहा जाता है । इस प्रकार की श्रेणियों में वे सभी मूल्य बहुलक होंगे जिनकी आवृत्तियाँ अधिकतम है ।

(ii) **सतत श्रेणी में बदलना** जब श्रेणी में कोई भी व्यक्तिगत मूल्य एक से अधिक बार न पाया जाता हो तो उसे सतत आवृत्ति बंटन के रूप में बदलकर अधिकतम आवृत्ति वाला वर्गान्तर ज्ञात कर लेना चाहिए । फिर इस बहु लक वर्ग में बहु लक का मूल्य एक सूत्र के प्रयोग द्वारा निश्चित करना चाहिए। यह विधि आगे स्पष्ट की गई है ।

(iii) **मध्यका एवं समान्तर माध्य** मध्यका व समान्तर के आधार पर बहु लक का निर्धारण निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है ।

$$Z = 3M - 2\bar{X}$$

(क) खण्डित श्रेणी खण्डित श्रेणी में बहु लक निरीक्षण विधि द्वारा या समूहन विधि द्वारा ज्ञात किये जा सकते हैं-

(i) **निरीक्षण विधि** - यह रीति तब अपनाई जाती है जब खण्डित श्रेणी की आवृत्तियाँ नियमित हों अर्थात् श्रेणी के आरम्भ से आवृत्तियाँ निरन्तर बढ़ती रहे, अधिकतम आवृत्ति लगभग केन्द्र में हो और उनके बाद से आवृत्तियाँ फिर निरन्तर घटने लगे । ऐसी श्रेणी में अधिकतम आवृत्ति बिल्कुल स्पष्ट हो जाती है । निरीक्षण द्वारा उसका मूल्य ज्ञात कर लिया जाता है ।

उदाहरण- 19 निम्न सारणी में एक कक्षा के 50 विद्यार्थियों के भार (किलो ग्राम) दिये गये हैं । बहु लक भार ज्ञात कीजिए।

भार (कि.ग्रा.)	48	49	50	51	52	53
संख्या	4	10	20	10	3	2

हल-

उपर्युक्त श्रेणी में आवृत्तियाँ नियमित हैं, अत: निरीक्षण द्वारा बहु लक ज्ञात किया जायेगा । अधिकतम आवृत्ति 20 है जिसका मूल्य 50 है । इसलिए बहु लक भार 50 कि.ग्रा. है ।

(ii) **समूहन विधि** जब आवृत्तियों का वितरण अनियमित हो अर्थात् अनियमित रूप से कभी बढ़े व कभी कम हो, अधिकतम आवृत्ति केन्द्र में न होकर प्रारम्भ में या अन्त में हो अधिकतम आवृत्ति दो या दो से अधिक स्थानों पर हो तो निरीक्षण द्वारा बहु लक ज्ञात करना कठिन हो जाता है । ऐसे समय बहु लक ज्ञात करते समय समूहनरीति का प्रयोग किया जाता है । श्रेणी की आवृत्तियों का समूहन निम्न प्रकार से किया जाता है ।

सर्वप्रथम 6 स्तम्भों (Column) वाली एक सारणी बनाई जाती है ओर इनमें आवृत्तियों का समूहन किया जाता है।

1st Column दी गई आवृत्तियों को ही लिखा जाता है ।

2nd Column में दो-दो आवृत्तियों का योग लिखा जाता है ।

3rd Column में आरम्भ से एक आवृत्ति छोड़कर दो-दो आवृत्तियों का योग लिखा जाता है ।

4th Column में तीन-तीन आवृत्तियों का योग लिखा जाता है ।

5th Column में प्रथम आवृत्ति को छोड़कर तीन-तीन आवृत्तियों का योग लिखा जाता है ।

6th Column में प्रथम ब द्वितीय दो आवृत्तियों को छोड़कर तीन-तीन आवृत्तियों का योग लिखा जाता है ।

समूहन के बाद एक विश्लेषण सारणी बनाई जाती है जिसके द्वारा यह ज्ञात किया जाता है कि अधिकतम आवृत्ति वाला मूल कौन-सा है, यही मूल्य बहुलक होता है ।

उदाहरण-20 निम्नलिखित पदों की सहायता से बहुलक ज्ञात कीजिए ।

पदों के प्रकार	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
आवृत्ति	3	8	10	12	16	14	10	8	17	5	4	1

हल- उपर्युक्त प्रश्न में आवृत्ति वितरण अनियमित है अत: समूहन विधि का प्रयोग किया जायेगा ।

समूहन द्वारा बहुलक निर्धारण

आकार	I f	II	III	IV	V	VI
20	3	11		21		
30	8		18		30	
40	10	22				38√
50	12		28√	42√		
60	16	30√			40√	
70	14		24			32
80	10	18		35		
90	8		25		30	
100	17√	22				26
110	5		9	10		
120	4	5				
130	1					

उपर्युक्त सारणी से पता चलता है कि सबसे अधिक (5) बार 60 मूल्य आता है ।

Z=60

समूहन द्वारा प्राप्त अधिकतम आवृत्तियों का विश्लेषण निम्न सारणी के रूप में भी किया जाता है ।

विश्लेषण सारणी

स्तम्भ संख्या	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
(i)									✓			
(ii)					✓	✓						
(iii)				✓	✓							
(iv)				✓	✓	✓						
(v)					✓	✓	✓					
(vi)			✓	✓	✓							
आवृत्तियाँ	X	X	1	3	5	3	1	X	1	X	X	X

विश्लेषण सारणी में 60 के सामने सर्वाधिक ✓ है अत: बहुलक 60 है ।

(ग) सतत श्रेणी सतत श्रेणी में बहुलक का निर्धारण निम्न प्रकार से किया जाता है।

(i) सर्वप्रथम निरीक्षण या समूहन विधि द्वारा बहुलक वर्ग का निर्धारण किया जाता है। नियमित आवृत्ति वितरण में निरीक्षण विधि एवं अनियमित आवृत्ति वितरण में समूहन विधि का प्रयोग किया जाता है।

(ii) बहुलक वर्ग की सीमाओं के अन्तर्गत बहुलक वर्ग का निर्धारण निम्न सूत्र की सहायता से किया जाता है।

$$Z = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

जहां L_1 = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

F_1 = बहुलक वर्ग की आवृत्ति

F_2 = बहुलक वर्ग के बाद की आवृत्ति

F_0 = बहुलक वर्ग से पहले वाली वर्ग की आवृत्ति

i= वर्ग विस्तार

वैकल्पिक सूत्र यदि बहुलक वर्ग से पहले वाले (f_0) अथवा बाद वाले वर्ग की आवृत्ति (f_2) बहुलक वर्ग की आवृत्ति (f_1) से अधिक हो तो निम्न सूत्र का प्रयोग होगा।

यदि $f_0>f_1$, या $f_2 > f_1$, तो $Z = L_1 + \frac{f_2}{f_0 + f_2} \times i$

उदाहरण-21 निम्न सारणी से बहुलक ज्ञात कीजिए

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
विद्यार्थी	2	18	30	45	35	20	6	3

हल- समूहन विधि द्वारा बहुलक वर्ग का निर्धारण

अंक	I f	II	III	IV	V	VI
0-10	2	20		50		
10-20	18		48		93√	
20-30	30 f_0	75√				110√
30-40	45 f_1 √		80√	100√		
40-50	35 f_2	55			61	
50-60	20		26			29
60-70	6	9				
70-80	3					

विश्लेषण सारणी

पद / स्तम्भ संख्या	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
(i)				✓				
(ii)			✓	✓				
(iii)				✓	✓			
(iv)				✓	✓			
(v)		✓	✓	✓				
(vi)			✓	✓	✓			
आवृति की संख्या		1	3	6	3	1		

बहुलक = 30-40

$$Z = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$= 30 + \frac{45-30}{2\times 45 - 30 - 35} \times 10 = 30 + \frac{15}{90-65} \times 10$$

$$= 30 + \frac{150}{25}$$

Z=36

उदाहरण-22 निम्न वितरण से बहुलक (Z) ज्ञात करो-

पद का आकार	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
आवृति	20	24	32	28	20	16	37	10	8

हल- उपर्युक्त प्रश्न में समंक श्रेणी अनिमित है अत: समूहीकरण की विधि का प्रयोग किया जायेगा।

पद	I f	II	III	IV	V	VI
0-5	22	44				
5-10	24		56√	76√		
10-15	32	60√			24	
15-20	28		48	64		86√
20-25	20	36				
25-30	16		53		73 √	
30-35	37 √	47		45√		63
35-40	10		18			
40-45						

उक्त सारणी के विश्लेषण से स्पष्ट है की बहुलक 10-15 है। विश्लेषण दूसरी विधि अनुसार भी अग्रसारणी से निकाला जा सकता है ।

विश्लेषण सारणी

पद / स्तम्भ संख्या	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
(i)							✓	
(ii)			✓	✓				
(iii)		✓	✓					
(iv)	✓	✓	✓					
(v)		✓	✓	✓				
(vi)			✓	✓	✓			
आवृति की संख्या	1	3	5	3	1	X	1	X

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि बहुलक 10-15 है ।

$$Z = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$= 10 + \frac{32 - 24}{2 \times 32 - 24 - 28} \times 5$$

$$= 10 + \frac{8}{64 - 52} \times 5$$

$$= 10 + \frac{40}{12}$$

$$Z = 10+3.33 = 13.33$$

$$Z = 13.33$$

4.7.3 बहुलक के गुण-दोष

- **गुण**

  (1) बहुलक ज्ञात करना सरल है ।

  (2) इस पर श्रेणी के असाधारण मूल्यों का प्रभाव नहीं पडता ।

  (3) इसका बिन्दु रेखीय निर्धारण किया जा सकता है ।

  (4) अंकों के अधिक जमाव वाली संख्या होने के कारण सामान्य बुद्धि का व्यक्ति भी इसके द्वारा समग्र की विशेषताओं को सरलता से समझ सकता है ।

- **दोष**

  (1) इसकी बीजगणितीय विवेचना सम्भव नहीं है ।

  (2) यह अनिश्चित एवं अस्पष्ट होता है ।

  (3) बहुलक मूल्य एवं पदों की कुल संख्या दिये होने पर सब मूल्यों का योग एवं सामूहिक बहुलक भी ज्ञात नहीं किया जा सकता है ।

  (4) बहुलक मूल्य पर वर्ग विस्तार का बहुत अधिक प्रभाव पडता है ।

  (5) वर्ग विस्तार में परिवर्तन पर बहुलक मूल पर बहुत अधिक प्रभाव पडता है ।

  (6) कभी-कभी बहुलक से प्राप्त निष्कर्ष भ्रमात्मक होते है जैसे एक छात्रावास के 100 विद्यार्थियों में से 5 का मासिक व्यय 100 रूपये एवं अन्य 96 विद्यार्थियों का वेतन 100 से अधिक है किन्तु अन्य किन्हीं 5 विद्यार्थियों का व्यय समान नहीं है । ऐसी स्थिति में बहुलक व्यय 100 रूपये होगा जो केवल 5 विद्यार्थियों का प्रतिनिधित्व करता है न कि 100 का।

दैनिक जीवन में बहुलक प्रयोग सबसे अधिक है । मौसम सम्बन्धी पूर्वानुमान, व्यापारिक पूर्वानुमान एवं वस्तुओं की लोकप्रियता के अध्ययन में बहुलक का प्रयोग किया जाता है ।

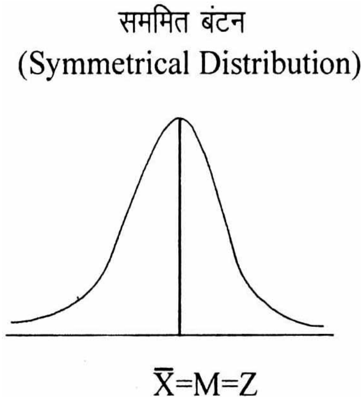
4.8 माध्यों का पारस्परिक सम्बन्ध

- **समान्तर माध्य ($\bar{X}$) मध्यका (M) एवं बहुलक (Z) का सम्बन्ध**

उपर्युक्त सम्बन्ध आवृत्ति वितरण की प्रकृति पर निर्भर करता है । यदि आवृत्ति वितरण का एक सरल आवृत्ति वक्र बनाया जाये तो उसमें समान्तर माध्य संतुलन बिन्दु पर स्थित होगा, मध्यका बिल्कुल केन्द्र में स्थित होता है जिसके दोनों ओर के भाग क्षेत्रफल में समान होते हैं और बहुलक वक्र के शिखर का मान होता है । आवृत्ति वितरण सममित या असममित दो प्रकार का हो सकता है ।

(1) **सममित वितरण** जब आवृत्तियाँ प्रारंभ में नियमित क्रम से बढ़ती रहे, मध्य में अधिकतम हो जाए और उसके बाद क्रमशः कम होती रहे तो इस प्रकार के आवृत्ति वितरण को सममित वितरण कहते हैं । सम्मित वितरण के आवृत्ति वितरण में सन्तुलन बिन्दु केन्द्र बिन्दु तथा उच्चतम बिन्दु का मूल

एक समान होता है । अत: ऐसे वितरण में माध्य, मध्यका एवं बहुलक मूल्य बराबर होते हैं । जैसा कि रेखा चित्र 4.1 में दर्शाया गया है।

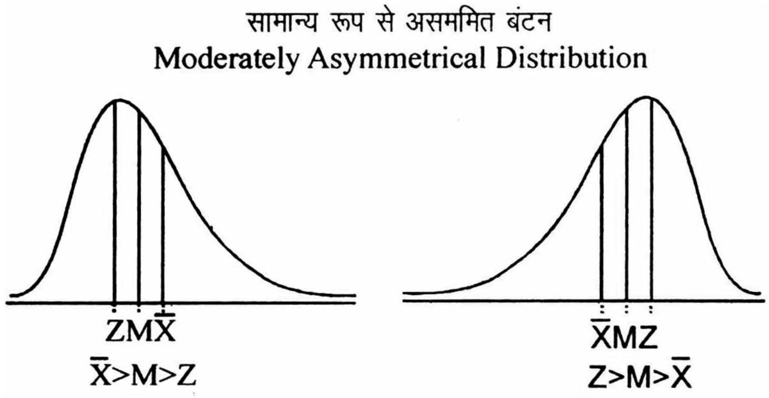


रेखाचित्र 4.1

(2) **असममित वितरण** जब आवृत्ति वितरण का रेखाचित्र घण्टाकार न बने या शिखर से एक रेखा खींचने पर दोनों ओर का क्षेत्रफल बराबर न हो तो इस प्रकार के वितरण को असममित वितरण कहा जाता है । असममित वितरण दो प्रकार का हो सकता है ।

(अ) दांयी ओर झुका दायीं ओर झुके वितरण में समान्तर माध्य का मूल्य सबसे अधिक होता है, मध्यका मूल्य उससे कम, तथा बहुलक मूल्य सबसे कम होता है जैसा कि रेखाचित्र4.2 में दिखाया गया है ।

(ब) बांयी ओर झुका बायीं ओर झुके वितरण में बहुलक का मूल्य सबसे अधिक होता है मध्यका मूल्य उससे कम तथा समान्तर माध्य का मूल्य सबसे कम होता है जैसा कि रेखाचित्र 4.3 में दिखाया गया है ।



रेखाचित्र 4.2 रेखाचित्र 4.3

एक साधारण रूप से असममित वितरण में समान्तर माध्य और बहुलक का अन्तर माध्य व मध्यका के अन्तर का लगभग तीन गुना होता है । इस तथ्य को निम्न समीकरण द्वारा व्यक्त किया जा सकता है ।

$$(\bar{X} - Z) = 3(\bar{X} - Z)$$

4.9 सारांश (Summary)

सारणी

व्यक्तिगत श्रेणी	खण्डित श्रेणी	सतत श्रेणी
1.समान्तर माध्य ($\bar{X}$) $\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$ लघु रीति: $\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$ पद विचलन रीति : (समान वर्ग अन्तराल)	$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{\sum fx}{N}$ $\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{N}$	$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$ $\bar{X} = A + \frac{\sum dx}{N}$ $\bar{X} = A + \frac{\sum df'x}{N} \times i$
2.मध्यका (M) $M = size of \left(\frac{N+\|1}{2}\right)^{th} item$	संचयी आवृति $M = size of \left(\frac{N+\|1}{2}\right)^{th} item$	संचयी आवृति $M = size\, of \left(\frac{N}{2}\right)^{th} item$ मध्यका वर्ग में $M = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - C\right)$
3.बहुलक (Z) सबसे अधिक बार आने वाला मूल्य	निरीक्षण विधि द्वारा समूहन विधि द्वारा अधिकतम आवृति का मूल्य	निरीक्षण विधि द्वारा समूहन विधि द्वारा बहुलक वर्ग द्वारा $Z = L_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$ $Z = L_1 + \frac{f_2}{f_0 - f_2} \times i$ या Z = 3M-2 $\bar{X}$ अनुमानित

"माध्यों के कार्य सुनिश्चित होते हैं। उन्हें प्रयोग करने के औचित्य का निश्चय सभी सम्बन्धित तथ्यों तथा विभिन्न प्रकार के माध्यों के विशेष लक्षणों को ध्यान में रखकर करना चाहिए ।"

4.10 शब्दावली (Glossary)

व्यक्तिगत सारणी अथवा श्रेणी	Individual Series
खण्डित श्रेणी	Discrete Series
सतत श्रेणी (अखण्डित श्रेणी)	Continuous Series
समान्तर माध्य अथवा औसत	Arithmetic Mean or Average
मध्यका	Median
बहुलक अथवा भूयिष्ठिक	Mode

4.11 सन्दर्भ ग्रन्थ (References)

Mood, A.M. (1950) "Introduction to the Theory of Statistics", Mc Grow Hill Book Company. एस. पी. सिंह (2006) "सांख्यिकी" एस. चंद, नई दिल्ली ।

4.12 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Questions)

1. समान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक की परिभाषा दीजिए तथा समान्तर माध्य की विशेषताएं लिखिए ।
2. निम्न पद मूल्यों से बहुलक और मध्यका ज्ञात कीजिए ।

   33 20 35 50 37 33 35 25 35 34 35

   (Ans. M = Z = 35 = 33.82 Z)
3. निम्न बंटन का माध्य, मध्यका एवं बहुलक ज्ञात कीजिए ।

केन्द्रीय आकार	10	20	30	40	50	60	70
संख्या	7	12	17	29	31	5	3

(Ans. $\bar{X}$ = 40.86 M = 42.55 Z = 42.34

4. निम्न आवृत्ति वितरण से बहुलक निकालिए ।

आय	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89
संख्या 1	0	14	16	14	11	13	17	13

5. निम्न सारणी में बहुलक 18.5 है । पदों की कुल संख्या N=100 है । दो अज्ञात आवृत्तियों का निर्धारण कीजिए।

वर्गान्तर	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35
आवृत्ति	?	11	15	?	20	9	8

6. कक्षा के 15 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों से मध्यका निर्धारित कीजिए ।

   6, 9, 10, 12, 18, 19, 23, 23, 24, 28, 37 48, 49, 53, 60
7. निम्न सारणी से समान्तर माध्य, मध्यका व बहुलक निर्धारित कीजिए ।

प्राप्तांक	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
आवृत्ति	4	6	10	16	12	8	4

8. निम्न आँकड़ों से मध्यका व बहुलक ज्ञात कीजिए ।

अंक (से कम)	10	20	30	40	50	60	70
संख्या	2	13	33	63	89	99	106

9. निम्न समंकों से समान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक निकालिए ।

क्र.संख्या	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	11	12	13	14	15	16	17	18
अंक	17,	32	35	33	15	21	41	32	11	18	20	22	11	15	35	23	38	12

10. निम्न खण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य निकालिए ।

साईज	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
आवृत्ति	1	2	4	8	11	10	7	4	2	1

($\bar{X}$ = 15.4)

11. निम्न श्रेणी से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए ।

वर्ग	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30
आवृत्ति	20	30	50	40	10

12. एक थोड़े से असममित वितरण में समान्तर माध्य 246 और बहुलक 161 है । मध्यका निर्धारित कीजिए ।

13. एक कक्षा में 150 विद्यार्थियों का औसत भार 80 किग्रा. है । कक्षा में लड़कों का औसत भार 70 किग्रा. है। कक्षा में लड़कियों की संख्या बताइए ।

इकाई -05

अपकिरण के माप - विस्तार, चतुर्थक विचलन एवं माध्य विचलन
(Measures of Dispersions - Range, Quartic Deviation and Mean Deviation)

इकाई की रूपरेखा

5.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप:

- समंक माला की संरचना से अधिक अच्छे तरीके से परिचित हो सकेंगे,
- जान सकेंगे कि समंक माला के मूल्य केन्द्रीय प्रवृत्ति के मूल्य से दूर स्थित है, अथवा पास,
- दो समंक मालाओं को व्याख्या कर तुलना करने योग्य हो जाएंगे ।

5.1 प्रस्तावना (Introduction)

समंक श्रेणी की सभी विशेषताओं को केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप द्वारा स्पष्ट नहीं किया जा सकता माध्य समंक श्रेणी की सामान्य विशेषताओं को ही प्रकट कर पाते हैं । श्रेणी की छिपी हुई विशेषताएँ अर्थात् उनकी बनावट प्रसार या बिखराव की जानकारी के लिए अपकिरण का अध्ययन आवश्यक हो जाता है । यदि अपकिरण के अध्ययन के बिना निष्कर्ष निकाले गये तो वही दशा होगी कि "लेखा ज्यों का त्यों, कुनबा डूबा क्यों?" एक व्यक्ति ने नदी पार करते समय पानी की गहराई के औसत की तुलना अपने परिवार के सदस्यों की औसत ऊँचाई से कर ली परन्तु उसने यह ध्यान नहीं दिया कि नदी का पानी किसी स्थान पर उसके परिवार के सदस्यों की ऊँचाई से अधिक गहरा है । अत: यह स्पष्ट है कि समंक श्रेणी के बारे में यथेष्ठ ज्ञान प्राप्त करने के लिए न केवल उसका माध्य जानना जरूरी है बल्कि विभिन्न व्यक्तिगत मूल्यों का उस माध्य से औसत अन्तर और श्रेणी की संरचना तथा स्वरूप आदि के बारे में पूरी जानकारी प्राप्त करना भी परमावश्यक है । अपकिरण की विभिन्न माप होती है । इस इकाई में हम विस्तार (Range) एवं माध्य विचलन (Mean Deviation) की चर्चा करेंगे । अपकिरण के एक अन्य महत्वपूर्ण माप प्रमाप विचलन (Standard Deviation) एवं विचरण (Variance) का अध्ययन अगली इकाई में किया जाएगा । इस इकाई के अन्त में सारांश. शब्दावली एवं अभ्यासार्थ प्रश्न भी दिए गए हैं ।

5.2 श्रेणी की संरचना तथा स्वरूप

केन्द्रीय प्रवृत्ति तथा बनावट के आधार पर समंक श्रेणियाँ निम्न दो प्रकार की हो सकती हैं:

(क) माध्यों में समानता किन्तु बनावट में भिन्नता

कुछ श्रेणियों के माध्य समान होते हुए भी उनकी बनावट भिन्न हो सकती है जैसे :

समान माध्य किन्तु बनावट में भिन्न श्रेणियाँ अ,ब,स दी गई है ।

क्रम संख्या	अ		ब		स	
	मूल्क	माध्य से विचलन	मूल्य	माध्य से विचलन	मूल्य	माध्य से विचलन
1	10	0	2	-8	23	13
2	10	0	6	-4	12	2
3	10	0	10	0	7	-3
4	10	0	13	3	5	-5
5	10	0	19	9	3	-7

योग	50		50		50	
माध्य $\left(\bar{X}\right)=\frac{\sum x}{N}$	10		10		10	

'अ' में सभी मूल समान है अर्थात् माध्य से विचलन शून्य है, अत: माध्य समंक श्रेणी का पूर्ण प्रतिनिधित्व करता है। 'ब' में न्यूनतम मूल्य 2 एवं अधिकतम मूल्य 19 है एवं विचलन - 8 एवं +9 के मध्य है अत: माध्य समंक श्रेणी का यथोचित प्रतिनिधित्व नही कर सकता ।

'स' में न्यूनतम मूल्य 3 एवं अधिकतम मूल्य 23 है एवं विचलन -7 से +13 के मध्य है अत: माध्य इस अवस्था में भी श्रेणी का प्रतिनिधित्व नहीं कर सकता ।

इस प्रकार माध्यों में समानता होते हुए भी श्रेणी की बनावट में अन्तर के कारण केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप समंक श्रेणी का यथोचित प्रतिनिधित्व नहीं कर सकते ।

(ख) माध्यों में भिन्नता किन्तु बनावट में समानता

कुछ श्रेणियों के माध्य अलग-अलग हो सकते हैं किन्तु उनकी बनावट समान हो सकती है, जैसे-

समान बनावट किन्तु भिन्न माध्य वाली श्रेणियाँ अ ब, स दी गई है ।

क्रम संख्या	अ		ब		स	
	मूल्य	माध्य से विचलन	मूल्य	माध्य से विचलन	मूल्य	माध्य से विचलन
1	20	-2	50	-2	90	-2
2	21	-1	51	-1	91	-1
3	22	0	52	0	92	0
4	23	1	53	1	93	1
5	24	2	54	2	94	2
योग	110		260		460	
माध्य $\bar{X}$	22		52		92	

इस उदाहरण में अ,ब, एवं स के लिए माध्य क्रमश: 22,52 एवं 92 है अर्थात् भिन्न-भिन्न है किन्तु श्रेणियों की बनावट समान है क्योंकि माध्य से तीनों श्रेणियों के विचलन बराबर हैं ।

5.3 अपकिरण (Dispersion)

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप प्रथम श्रेणी के माध्य कहलाते हैं क्योंकि इनकी गणना का आधार समंक श्रेणी के विभिन्न पद मूल होते हैं जब कि अपकिरण ज्ञात करने के लिए पहले सांख्यिकीय माध्य ज्ञात किए जाते हैं और उसके बाद उनसे पद मूल्यों के विचलन ज्ञात कर उनका माध्य निकाला जाता है, अत: अपकिरण के मापों को द्वितीय क्रम का माध्य कहा जाता हैं।

5.3.1 परिभाषा (Definition)

(1) **डॉ. बाउले के अनुसार**, "अपकिरण पदों के विचरण या अन्तर का माप है ।"

(2) **स्पीगेल के अनुसार**, "वह सीमा जहाँ तक समंक एक माध्य मूल्य के दोनों ओर फैलने की प्रवृत्ति रखते हैं उन समंको को विचरण या अपकिरण कहते हैं ।"

(3) **ब्रुक्स एवं डिक के अनुसार**, "पक केन्द्रीय मूल्य के दोनों ओर पाए जाने वाले चरम मूल्यों के विचरण या प्रसार की सीमा ही अपकिरण है ।"

अपकिरण को प्रसार (spread), बिखराव (scatter), तथा विचरण (Variation), आदि अनेक नामों से पुकारा जाता है।

5.3.2 अपकिरण के निरपेक्ष तथा सापेक्ष माप (Absolute and Relative Measures Dispersion)

जब श्रेणी के प्रसार, बिखराव या विचरण का माप निरपेक्ष रूप में उस श्रेणी की इकाई में ही ज्ञात किया जाता है तो वह अपकिरण का निरपेक्ष माप कहलाता है । उदाहरणार्थ व्यक्तियों की आय, ऊँचाई, भार, आयु आदि के अपकिरण के निरपेक्ष माप क्रमशः रूपये, सेन्टीमीटर, किलोग्राम तथा वर्ष के रूप में प्रकट किए जायेंगे । निरपेक्ष माप के आधार पर विभिन्न पद मालाओं के अपकिरण की तुलना नहीं की जा सकती क्योंकि ये माप विभिन्न इकाइयों में व्यक्त हो सकते हैं ।

तुलनात्मक अध्ययन के लिए निरपेक्ष माप को सम्बन्धित माध्य से भाग देने पर जो अनुपात या प्रतिशत आता है वह अपकिरण का सापेक्ष माप कहलाता है । यह समंकमाला की इकाई में व्यक्त नहीं किया जाता बल्कि एक अनुपात या प्रतिशत के रूप में होता है, इसे अपकिरण गुणांक भी कहते हैं ।

5.3.3 अपकिरण के उद्देश्य एवं महत्व (Objectives and Importance of Dispersion)

अपकिरण का माप निम्न उद्देश्यों की पूर्ति के लिए किया जाता है-

(1) **माध्य की विश्वसनीयता का अनुमान लगाना** अपकिरण का माप यह व्यक्त करने के लिए भी किया जाता है कि माध्य समग्र का किस सीमा तक प्रतिनिधित्व करता है । अपकिरण का माप जितना कम होगा माध्य समग्र का उतना ही अधिक प्रतिनिधित्व करेगा एवं अपकिरण का माप अधिक होने पर माध्य के समग्र का प्रतिनिधित्व नहीं कर सकेगा ।

(2) **विचरणशीलता का अध्ययन** अपकिरण के सापेक्ष मापों की सहायता से दो या अधिक श्रेणियों की विचरणशीलता (अथवा एकरूपता या संगीत) का तुलनात्मक अध्ययन किया जा सकता है । विचरणशीलता कम होने पर समरूपता या संगीत अधिक होती है ।

(3) **श्रेणीं बनावट की जानकारी** अपकिरण से यह ज्ञात किया जाता है कि केंद्रीय प्रवृत्ति से दोनों ओर मूल्यों का फैलाव या बिखराव कैसा है अर्थात् श्रेणी की बनावट किस प्रकार की है ।

(4) **विचरणशीलता के नियन्त्रण में सहायक होना** अपकिरण का माप विभिन्न क्षेत्रों में विचरणशीलता को नियन्त्रित करने के लिए भी किया जाता है । उदाहरणार्थ, शरीर का तापमान,

उच्च रक्तचाप आदि को नियन्त्रित करने हेतु विचरण का अध्ययन करके उचित उपचार किया जाता है ।

(5) **अन्य सांख्यिकीय मापों का आधार प्रस्तुत करना** अन्य विभिन्न सांख्यिकीय माप जैसे-विषमता, पृथुशीर्षत्व, सहसम्बन्ध, प्रतीपगमन किस्म नियन्त्रण, परिकल्पना परीक्षण, प्रसरण विश्लेषण आदि अपकिरण के मापों आधारित हैं ।

इस प्रकार यह स्पष्ट है कि अपकिरण ज्ञात करने का मुख्य उद्देश्य विचरण या बिखराव का अध्ययन करना है, आय व धन की असमानताओं की माप, उद्योगों के औसत लाभ, औसत उत्पादन एवं औसत लागत में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन, एकाधिकार एवं आर्थिक सत्ता के केन्द्रीयकरण का माप, अपकिरण की विभिन्न रीतियों द्वारा ही किया जाता है । सांख्यिकीय विश्लेषण में अपकिरण के मानों का बहु त अधिक महत्व है, विचरणशीलता की प्रकृति एवं कारण की जानकारी प्राप्त कर उनको नियन्त्रित करने के आधार के रूप में भी अपकिरण का प्रयोग किया जाता है । केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के साथ-साथ यदि निष्कर्ष प्राप्त किए जाए तो ये अधिक विश्वसनीय होंगे ।

5.3.4 अपकिरण ज्ञात करने की रीतियाँ (Methods of Measuring Dispersion)

अपकिरण ज्ञात करने की मुख्य रीतियाँ निम्नलिखित हैं-

(अ) सीमा रीति (Methods of Limits)

(1) विस्तार (Ranges)

(2) अन्तर-चतुर्थक विस्तार (Ineter-Quartle Range)

(3) शतमक विस्तार (Percentile Range)

(ब)विचलन माध्य रीति (Method of Averaging Deviations)

(4) चतुर्थक विचलन (Quartile Deviations)

(5) माध्य विचलन (Mean Deviations)

(6) प्रमाप विचलन (Standard Deviations)

(स)बिन्दु रेखीय रीति (Graphics Method)

(7) लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve)

अपकिरण ज्ञात करने के लिए उपर्युक्त सभी रीतियों को निम्न प्रकार स्पष्ट किया जा सकता है ।

5.4 विस्तार (Range)

किसी समंक श्रेणी के अधिकतम और न्यूनतम पद मूल्यों के अन्तर को विस्तार कहते हैं । इसकी गणना निम्न प्रकार की जाती है-

(i) सर्वप्रथम श्रेणी के अधिकतम और न्यूनतम पदों को ज्ञात किया जाता है । सतत श्रेणी में सबसे छोटे वर्ग की निम्न सीमा को न्यूनतम मूल्य ओर सबसे बड़े वर्ग की उच्च सीमा को अधिकतम मूल्य मानना चाहिए ।

(ii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है ।

$$R = L - S$$

संकेताक्षर R = Range (विस्तार)

L = Largest Value (अधिकतम मूल्य)

S = Smallest Value (न्यूनतम मूल्य)

5.4.1 विस्तार गुणांक (Coefficient of Range)

अपकिरण के तुलनात्मक अध्ययन के लिए विस्तार का सापेक्ष माप ज्ञात करना आवश्यक होता है । विस्तार के सापेक्ष माप को ही विस्तार गुणांक कहते हैं ।

सूत्रानुसार विस्तार गुणांक $(C.R.) = \frac{L-S}{L+S}$

उदाहरण -1 निम्न आँकडो से विस्तार वी विस्तार गुणांक निकालिए ।

रोल नम्बर	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
अंक	34	20	10	3	8	4	6	19	15	27

हल- (i)विस्तार (R) = अधिकतम मूल्य (L) - न्यूनतम मूल्य (S) = 34-3 = 31 अंक

(ii) विस्तार गुणांक $= \frac{L-S}{L+S} = \frac{34-3}{34+3} = \frac{31}{37} = .84$

उदाहरण - 2 प्रदत्त आँकडो से विस्तार व विस्तार गुणांक निकालिए ।

पदों का आकार	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
आवृत्ति	7	8	15	25	3

हल- (i) विस्तार (R) अधिकतम मूल्य (L) - न्यूनतम मूल्य (S) = 50-0 = 50

(ii) विस्तार गुणांक $= \frac{L-S}{L+S} = \frac{50-0}{50+0} = \frac{50}{50} = 1$

5.4.2 विस्तार के गुण-दोष

- **गुण**

(i) विस्तार की गणना करना व समझना अत्यन्त सरल है ।

(ii) विस्तार की गणना के लिए सभी मूल्यों की जानकारी आवश्यक नहीं, केवल अधिकतम एवं न्यूनतम मूल्य ज्ञात होने पर इसकी गणना की जा सकती है ।

(iii) विस्तार से वह सीमा स्पष्ट हो जाती है जिसके अन्तर्गत समंक श्रेणी के पद मूल्य फैले रहते हैं ।

(iv) औद्योगिक क्षेत्रों में किस्म नियन्त्रण एवं मूल्यों के उच्चावन आदि में विस्तार का प्रयोग अत्यन्त उपयोगी रहता है ।

- **दोष**

(i) विस्तार विचलन का अस्थिर माप है, क्योंकि इनमें श्रेणी के केवल दो पदों को ही ध्यान में रखा जाता है । अधिकतम या न्यूनतम पद मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों का विस्तार पर तुरन्त प्रभाव पड़ता है ।

(ii) विस्तार में केवल श्रेणी के सबसे बडे और सबसे छोटे पद का ही महत्व होता है, अन्य मूलों का कोई महत्व नहीं होता।

(iii) विस्तार से श्रेणी की बनावट की जानकारी प्राप्त नहीं होती, हो सकता है कि दो समंकमालाओं का विस्तार बराबर हो परन्तु उनकी बनावट भिन्न-भिन्न हो सकती है ।

5.5 अन्तर-चतुर्थक विस्तार (Inter-Quartile Range)

समंकमाला के तृतीय चतुर्थक और प्रथम चतुर्थक के अन्तर को अन्तर चतुर्थक विस्तार कहते हैं । इसको ज्ञात करने की रीति इस प्रकार है ।

(i) सर्वप्रथम श्रेणी के प्रथम एवं तृतीय चतुर्थक का मूल्य ज्ञात किया जाता है ।

(ii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है ।

I.R. = Q_3-Q_1

Q_3= तृतीय चतुर्थक

Q_1= प्रथम चतुर्थक

विस्तार की तरह ही अन्तर चतुर्थक विस्तार भी अपकिरण ज्ञात करने की सरल रीति है । इसके गुण दोष विस्तार के समान ही है । चतुर्थक विस्तार की ही भांति दशमक विस्तार में D_9 एवं D1 का अन्तर ज्ञात किया जाता है ।

5.6 शतमक विस्तार (Percentile Range)

अन्तर चतुर्थक विस्तार में श्रेणी के 50 प्रतिशत मूल्यों का विस्तार ज्ञात किया जाता है, उसी प्रकार शतमक विस्तार भी आंशिक विस्तार की एक माप है, जिसमें श्रेणी के 60 प्रतिशत मूल्यों का विस्तार ज्ञात किया जाता है । शतमक विस्तार में 90 शतमक (P_{90}) तथा दसवें शतमक (P_{10}) के अन्तर द्वारा ज्ञात किया जाता है । इसकी गणना निम्न प्रकार की जाती है।

(i) P_{90} एवं P_{10} की गणना की जाती है ।

(ii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है ।

शतमक विस्तार (P.R.) = P_{90} - P_{10}

अन्तर चतुर्थक विस्तार का प्रयोग 50 प्रतिशत मूलों की सीमा तथा शतमक विस्तार का प्रयोग 80 प्रतिशत मूलों की सीमा ज्ञात करने के लिए किया जाता है ।

उदाहरण -3 निम्न वितरण से मध्यवर्ती 50 प्रतिशत एवं 80 प्रतिशत विद्यार्थियों के अंकों का विस्तार ज्ञात कीजिए ।

अंक	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
विद्यार्थियों की संख्या	1	3	8	5	4	2	2

हल- मध्यवर्ती 50 प्रतिशत विद्यार्थियों के अंकों के विस्तार की सीमा ज्ञात करने के लिए अन्तर चतुर्थक विस्तार एवं 80 प्रतिशत विद्यार्थियों के अंकों के विस्तार की सीमा ज्ञात करने के लिए शतमक विस्तार की गणना करेंगे ।

चतुर्थकों, दशमक एवं शतमकों की गणना करते समय वर्गान्तरों को अपवर्जी बनाकर प्रयुक्त किया जाएगा ।

अंक (x)	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति (cf)
4.5-9.5	1	1
9.5-14.5	3	4
14.5-19.5	8	12
19.5-24.5	5	17
24.5-29.5	4	21
29.5-34.5	2	23
34.5-39.5	2	25
	N = 25	

तृतीय चतुर्थक

$$Q_3 = Sizeof_3 \left(\frac{N}{4}\right)^{th} item$$

$$= Q_3 = Sizeof_3 \frac{3\times 25}{4}^{th} item$$

$$= Q_3 = Sizeof_3 \frac{75}{4}^{th} item$$

= Size of 18.75^{th} item

$$Q_3 = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{3N}{4} - C\right)$$

$$= 24.5 + = \frac{5}{4}(18.75 - 17)$$

$$24.5 + = \frac{5}{4}\times 1.75$$

$$Q_3 = 24.5 + = \frac{8.75}{4} = 24.5 + 2.19 = 26.69$$

प्रथम चतुर्थक

$$Q1 = Sizeof \left(\frac{N}{4}\right)^{th} item$$

$$= Sizeof \left(\frac{N}{4}\right)^{th} item = sizeof\, 6.25^{th}\, item$$

6.25^{th} item 14.5 से 19.5 वाले वर्ग में हैं।

$$Q_1 = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{3N}{4} - C\right)$$

$$= 14.5 + \frac{5}{8}(6.25 - 4)$$

$$= 14.5 + \frac{11.25}{8}$$

Q_1 = 14.5+1.41=15.91

दशमक विस्तार

$$D_1 = Size of \left(\frac{N}{10}\right)^{th} item$$

$$= size\, of \left(\frac{25}{10}\right)^{th} item$$

2.5^{th} item

$$D_1 = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{3N}{4} - C\right)$$

$$D_1 = 9.5 + \frac{5}{3}(2.5 - 1)$$

$$= 9.5 + \frac{7.5}{3}$$

= 9.5+2.5

= 12

$$D_9 = Size of\, 9\left(\frac{N}{10}\right)^{th} item$$

$$= size\, of\, 9\left(\frac{25}{10}\right)^{th} item$$

$=22.5^{th}$ item

$$D_9 = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{3N}{4} - C\right)$$

$$= 29.5 + \frac{5}{2}(22.5 - 21)$$

$$= 29.5 + \frac{7.5}{2}$$

=29.5+3.75

D_9 = 33.25

दसवाँ शतमक

$$P_{10} = Size of\, \frac{10(N)^{th}}{100}\ item$$

$$P_{10} = Size of\, \frac{10 \times 25^{th}}{100}\ item$$

Size of $2/5^{th}$

2.5^{th} item

2.5^{th} item 9.5 से 14.5 वाले वर्ग में हैं ।

$$P_{10} = L_1 + \left(\frac{10N}{100} - C\right)$$

$$9.5 + \frac{5}{3}(2.5 - 1)$$

$$P_{10} = 9.5 + \frac{7.5}{3} = 9.5 + 25 = 12$$

90 वां शतमक

$$P_{10} = Size of\ \frac{90(N)}{100}^{th}\ item$$

$$= Size of\ \frac{90 \times 25}{100}^{th}\ item$$

Size of 22.5^{th} item

22.5^{th} item 29.5 से 34.5 वाले वर्ग में है।

$$P_{10} = L_1 + \left(\frac{90N}{100} - C\right)$$

$$P_{10} = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{90N}{100} - C\right)$$

$$= 29.5 + \frac{5}{2}(22.5 - 21)$$

$$P_{90} = 29.5 + \frac{7.5}{2} = 29.5 + 3.75$$

P_{90} = 33.25

अन्तर चतुर्थक विस्तार या मध्यवर्ती 50 प्रतिशत विद्यार्थियों के अंकों का विस्तार-

I.Q.R. = Q_3 - Q_1

=26.69 - 15.91 = 10.78

दशमक विस्तार मध्यवर्ती 80 प्रतिशत विद्यार्थियों के अंकों का विस्तार बताता है ।

दशमत विस्तार D.R. = D_9-D_1

= 33.25-12

= 21.25

शतमक विस्तार या मध्यवर्ती 80 प्रतिशत विद्यार्थियों के अंकों का विस्तार

P.R. = P_{90} - P_{10}

=33.25-12 = 21.25

इस प्रकार मध्यवर्ती 50 प्रतिशत विद्यार्थियों के अंकों के विस्तार की सीमा 10.78 तथा 80 प्रतिशत विद्यार्थियों के विस्तार की सीमा 21.25 है ।

5.7 चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

तृतीय चतुर्थक तथा प्रथम चतुर्थक के अन्तर के आधे को चतुर्थक विचलन कहा जाता है ।

सूत्र के रूप में- Q.D. = $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

चतुर्थक विचलन गुणांक (Coefficient of Quartile Deviation)

चतुर्थक विचलन का सापेक्ष माप चतुर्थक विचलन गुणांक कहलाता है । सूत्रानुसार-

$$\text{Coefficient of Q.D.} = \frac{\frac{Q_3-Q_2}{2}}{\frac{Q_3+Q_2}{2}}$$

$$= \frac{Q_3-Q_2}{Q_3+Q_2}$$

5.7. चतुर्थक विचलन का आगणन

चतुर्थक विचलन का आगणन निम्नांकित तीन दशाओं में किया जाता है ।

(अ)व्यक्तिगत श्रेणी में;

(ब)खण्डित श्रेणी में;

(स)सतत श्रेणी में ।

(अ) व्यक्तिगत श्रेणी में चतुर्थक विचलन की गणना-

उदाहरण -4 निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन तथा उसके गुणांक की गणना कीजिए ।

माह	मासिक आय	माह	मासिक आय
1	39	7	42
2	40	8	43
3	40	9	43
4	41	10	44
5	41	11	44
6	42	12	45

हल - चतुर्थ विचलन एवं उसके गुणांक की गणना-

माह	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
मासिक	39	40	40	41	41	42	42	43	43	44	44	45

प्रथम चतुर्थक = $(Q_1) = size\,of \left(\frac{(N+1)}{4}\right)^{th} item$

$= Sizeof\left(\frac{12+1}{4}\right)^{th} item$

= size of 3.25^{th} item

Size of 3.25^{th} item = Size of 3^{rd} item + .25 (Size of 4^{th} item - Size of 3^{rd} item)

= 40+.25 (41-40)

Q_1= 40+.25 = 40.25

तृतीय चतुर्थक

$(Q_3) = Sizeof^{\,3}\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} item$

$$= Size of^{3}\left(\frac{12+1}{4}\right)^{th} item$$

= Size of 9.75^{th} item

Size of 9.75^{th} item = size of 9^{th} item + .75 (Size of 10^{th} item-Size of 9^{th} item)

=43+.75 (44-43)

=43+.75

Q_3= 43.75

चतुर्थक विचलन $= \frac{Q_3 - Q_2}{2} == \frac{43.75 - 40.25}{2} = \frac{3.5}{2}$ = 1.75

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{43.75 - 40.25}{43.75 + 40.25} = \frac{3.5}{84} = .042$

(ब) खण्डित श्रेणी में चतुर्थक विचलन की गणना -

उदाहरण -5 निम्नलिखित आँकड़ो से चतुर्थक विचलन की गणना कीजिए-

अंक	10	12	15	16	25	35	40
छात्रों की संख्या	3	2	5	2	8	8	4

हल-

अंक	10	12	15	16	25	35	40
छात्रों की संख्या	3	2	5	2	8	8	4
संचयी आवृति (cf)	3	5	10	12	20	26	30

प्रथम चतुर्थक

$$(Q_1) = Size of \left(\frac{(N+1)}{4}\right)^{th} item$$

$$= Size of \left(\frac{(30+1)}{4}\right)^{th} item$$

Size of 7.7^{th} item = 15 अंक

तृतीय चतुर्थक

$$(Q_3) = Size of^{3}\left(\frac{N+1}{4}\right)^{th} item$$

$$= size\, of \left(\frac{30+1}{4}\right)^{th} item$$

= size of $3(7.7)^{th}$ item

= size of 23.1^{th} item

= size of 23.1^{th} item = 35अंक

तृतीय चतुर्थक (Q.D.) $= = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{35-15}{2} = 10 \text{ अंक}$$

(स) संतत श्रेणी में विचलन की गणना -

उदाहरण -6 निम्नलिखित सारणी से चतुर्थक विचलन तथा उसके गुणांक की गणना कीजिए ।

Heights in inches	50-53	53-56	56-59	59-62	62-65	65-68
No. of Students	2	7	24	27	13	3

हल -

Heights in inches (X)	50-53	53-56	56-59	59-62	62-65	65-68
f	2	7	24	27	13	3
Cf	2	9	33	60	73	76

प्रथम चतुर्थक

$$(Q_1) = Size of \left(\frac{N}{4}\right)^{th} item$$

$$= Size of \left(\frac{76}{4}\right)^{th} item$$

= size of 19th item

19th item 56 से 59 वर्ग में है ।

$$Q_1 = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{4} - C\right)$$

$$= 56 + \frac{3}{24}(19-9)$$

$$Q_1 = 56 + \frac{30}{24} = 56 + 1.25 = 57.25 inches$$

तृतीय चतुर्थक $= (Q_1) = size\, of \left(\frac{N}{4}\right)^{th} item$

$$= Size of\, 3\left(\frac{76}{4}\right)^{th} item$$

= size of 57th item

57th 59 से 62 वर्ग में है ।

$$Q_3 = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{3N}{4} - C\right)$$

$$Q_3 = 59 + \frac{3}{27}(57-33)$$

$$Q_3 = 59 + \frac{3}{27} = 59 + 2.66 = 61.66 inches$$

चतुर्थक विचलन (Q.D) = $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{61.66 - 57.25}{2}$$

$$= \frac{4.41}{2} = 2.21 inches$$

चतुर्थक विचलन गुणांक

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$= \frac{61.66 - 57.25}{61.66 + 57.25}$$

$$= \frac{4.41}{118.91} = .037$$

चतुर्थक विचलन = 2.21 इन्च तथा चतुर्थक विचलन गुणांक = .037

5.7.2 चतुर्थक विचलन के गुण व दोष

- **गुण**
  - (i) चतुर्थक विचलन की गणना करना एवं समझना सरल है ।
  - (ii) चतुर्थक विचलन पर चरम मूल्यों का प्रभाव नगण्य होता है ।
  - (iii) यह श्रेणी के मध्य के आधे भाग के लिए अधिक उपयोगी है ।
- **दोष**
  - (i) इससे श्रेणी की बनावट की जानकारी प्राप्त नहीं होती है ।
  - (ii) यह माप श्रेणी के सभी पद मूल्यों पर आधारित न होने के कारण इसे अपकिरण का सन्तोषजनक माप नहीं कहा जा सकता है ।
  - (iii) इसका प्रयोग क्षेत्र बहु त सीमित है । इस पर निदर्शन परिवर्तनों का बहुत अधिक प्रभाव पड़ता है ।

5.8 माध्य विचलन (Mean-Deviation)

माध्य विचलन किसी सांख्यिकीय माध्य (समान्तर माध्य, मध्यका, बहु लक) से विभिन्न मूल्यों के विचलनों का औसत होता है अर्थात् समस्त मूल्यों का किसी सांख्यिकीय माध्य से विचलन निकाल लिया जाता है । फिर इन विचलनों को जोड़कर उसका औसत निकाला जाता है । यही माध्य विचलन है । माध्य विचलन को प्रथम धातु का अपकिरण भी कहते है । मूल्यों के विचलन निकालते समय बीजगणितीय चिन्ह + तथा - को छोड दिया जाता है अर्थात् ऋणात्मक विचलन भी धनात्मक मान लिए जाते हैं ।

5.8.1 माध्य विचलन निकालने को प्रक्रिया

(i) **माध्य का चुनाव** वैसे माध्य विचलन समान्तर माध्य, मध्यका एवं बहु लक किसी एक माध्य की से निकाला जा सकता है किन्तु मध्यका से प्राप्त विचलनों की जोड़ सबसे कम होती है।

अत: प्रश्न में स्पष्ट निर्देश न होने पर माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए मध्यका का ही चुनाव करना चाहिए ।

(ii) **बीजगणितीय चिन्हों की उपेक्षा** माध्य विचलन ज्ञात करते समय जब विचलनों का योग किया जाता है तो धनात्मक एवं ऋणात्मक चिन्हों को ध्यान में नहीं रखा जाता। d के दोनों और खड़ी रेखाएँ बना दी जाती है । विचलन को $|d|$ संकेताक्षर द्वारा व्यक्त किया जाता है ।

(iii) **विचलनों का माध्य ज्ञात करना** सभी विचलनों की जोड़ $\sum|d|$ ज्ञात करके उनमें इकाइयों की संख्या ओर का भाग करने से माध्य विचलन ज्ञात हो जाता है ।

(iv) **सूत्र** माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्रों का प्रयोग किया जाता है । माध्य विचलन को (डेल्टा) द्वारा व्यक्त किया जाता है ।

मध्यका से माध्य विचलन $\delta_M = \dfrac{\Sigma|d_M|}{N}$

समान्तर माध्य से माध्य विचलन $\delta_{\overline{X}} = \dfrac{\Sigma|d_{\overline{X}}|}{N}$

बहुलक से माध्य विचलन $\delta_Z = \dfrac{\Sigma|d_Z|}{N}$

5.8.2 माध्य विचलन गुणांक (Coefficient of Mean Deviation)

माध्य विचलन एक निरपेक्ष माप है । इन्हें सापेक्ष बनाने के लिए विचलनों में क्रमश: उन्हीं माध्यों का भाग देंगे जिनकी सहायता से वे प्राप्त किये गये हैं । इसके लिए निम्न सूत्र प्रयोग किये जायेंगे-

मध्यका से माध्य विचलन गुणांक $C\delta_M = \dfrac{\delta_M}{M}$

समान्तर माध्य से माध्य विचलन गुणांक $C\delta_{\overline{X}} = \dfrac{\delta_{\overline{X}}}{\overline{X}}$

बहुलक से माध्य विचलन गुणांक $C\delta_Z = \dfrac{\delta_Z}{Z}$

5.8.3 माध्य विचलन की गणना (Calculation of Mean Deviation)

माध्य विचलन एवं उसके गुणांक की गणना विभिन्न श्रेणियों में निम्न प्रकार की जाती है।

- **व्यक्तिगत श्रेणी**

उदाहरण - निम्न आँकड़ो की सहायता से मध्यका एवं समान्तर माध्य विचलन तथा उसके गुणांक की गणना कीजिए।

कीमत (रू) 210, 220, 225 225, 225 235 240 250 270 280

हल - व्यक्तिगत श्रेणी - मध्यका एवं समान्तर माध्य से माध्य विचलन की गणना

क्रम संख्या	कीमत (रु.) (X)	M=230 $\lvert d_M \rvert$	$\overline{X} = 238 \lvert d_{\overline{X}} \rvert$
1.	210	20	28

2.	220	10	18
3.	225	5	13
4.	225	5	13
5.	225	5	13
6.	235	5	3
7.	240	10	2
8.	250	20	12
9.	270	40	32
10.	280	50	42
	$\sum X$ =2380	$\sum \lvert d_M \rvert$ =170	$\sum \lvert d_{\bar{X}} \rvert = 176$

मध्यका (M) = $size\,of \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th} item$

$= Size of \left(\frac{10+1}{2}\right)^{th} item$

= size of 5.5^{th} item

Size of 5.5^{th} item = Size of 5^{th} item +0.5 (Size of 6^{th} item-size of 5^{th} item)

= 225 + .5 (235-225)

= 225 + 5 = 230 M = 230

मध्यका से माध्य विचलन = $(\delta_M) = \frac{\lvert \sum d_M \rvert}{N} = \frac{170}{10} = 17$

मध्यका से माध्य विचलन गुणांक = $\frac{\delta_M}{M} = \frac{17}{230} = 0.74$

समान्तर माध्य $\bar{X}$ = $\frac{\sum X}{N} = \frac{2380}{10} = \bar{X} = 238$

समान्तर माध्य ($\bar{X}$) से माध्य विचलन ($\delta_{\bar{X}}$) = $\left(\frac{\sum d_{\bar{X}}}{N}\right)$

$= \frac{176}{10} = 17.6$

समान्तर माध्य से माध्य विचलन गुणांक = $\frac{\delta_{\bar{X}}}{\bar{X}} = \frac{17.6}{238} = .074$

मध्यका से माध्य विचलन गुणांक एवं समान्तर माध्य से माध्य विचलन गुणांक दोनों .074 है ।

- खण्डित श्रेणी खण्डित श्रेणी में माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र प्रयोग किये जाते हैं -

समान्तर माध्य से माध्य विचलन $(\delta_M) = \frac{\Sigma f\left|d_{\bar{X}}\right|}{N}$

मध्यका से माध्य विचलन $(\delta_M) = \frac{\Sigma f\left|d_M\right|}{N}$

बहुलक से माध्य विचलन $(\delta_Z) = \frac{\Sigma f\left|d_X\right|}{N}$

उदाहरण - 8 निम्न समंकों का माध्य, मध्यका एवं बहुलक से माध्य विचलन एवं गुणांक ज्ञात कीजिए।

आकार	5	7	9	11	13	15	17
आवृति	1	2	3	10	4	3	2

हल-

Size				माध्य से विचलन		मध्यका से विचलन		बहुलक से विचलन	
X	F	Cf	Xf	$\left\|d_{\bar{X}}\right\|$	$f\left\|d_{\bar{X}}\right\|$	$\left\|d_M\right\|$	$f\left\|d_M\right\|$	$\left\|d_z\right\|$	$f\left\|d_z\right\|$
5	1	1	5	6.48	6.48	6	6	6	6
7	2	3	14	4.48	8.96	4	8	4	8
9	3	6	27	2.48	7.44	2	6	2	6
11	10	16	110	.48	1.48	0	0	2	0
13	4	20	52	1.52	6.08	2	8	4	8
15	3	23	45	3.52	10.56	4	12	6	12
17	2	25	34	3.52	11.04	6	12		12
योग	N = 25		$\sum fx = 287$		$\sum f\left\|d_{\bar{X}}\right\|$ =51.04		$\sum f\left\|d_M\right\|$ =52		$\sum f\left\|d_z\right\|$ =52

समान्तर माध्य ($\bar{x}$)

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{287}{25}$$

$\bar{X}$ =11.48

माध्य विचलन

$$(\delta_{\bar{X}})\frac{\sum f\left|d_{\bar{X}}\right|}{N}$$

मध्यका (M)

$$= Size of \left(\frac{N+1}{2}\right)^{th} item$$

= Size of 13th item

M = 11

$$\delta_M = \frac{\sum f\left|d_M\right|}{N}$$

बहुलक -निरीक्षण (Z)

विधि द्वारा बहुलक 11 है।

$$\delta_z = \frac{\sum f\left|d_z\right|}{N}$$

$= \frac{51.04}{25}$

=2.04

माध्य विचलन गुणांक-

Coefficient $\delta_{\bar{X}} = \frac{\delta_{\bar{X}}}{\bar{X}}$

$= \frac{2.04}{11.48}$

=.18

$= \frac{52}{25}$

=2.08

Coefficient $\delta_{\bar{X}} = \frac{\delta_M}{M}$

$= \frac{2.08}{11}$

=.19

$= \frac{52}{25}$

= 2.08

Coefficient $\delta_Z = \frac{\delta_Z}{M}$

$= \frac{2.08}{11}$

=.19

- **सतत श्रेणी में माध्य विचलन**

सतत श्रेणी में माध्य विचलन निकालने की बही विधि है जो खण्डित श्रेणी में प्रयुक्त होती है । अन्तर केवल है कि वर्गान्तर के मध्य-बिन्दु निकालकर उन्हें मूल्य (X) मान लिया जाता है ।

उदाहरण-9 निम्न के लिए माध्य विचलन तथा उसके गुणांक की गणना कीजिए '

साप्ताहिक मजदूरी	200-400	400-600	600-800	800-1000
मजदूरों की संख्या	20	40	30	10

हल- सतत श्रेणी: माध्य विचलन की गणना

C.I. वर्गान्तर	F आवृति	Cf संचयी आवृति	X MV मध्य मूल्य	$\lvert d_M \rvert$ विचलन (चिन्हों को छोड़कर) M = 550	$f\lvert d_M \rvert$ आवृति एवं विचलनों का गुणनफल
200-400	20	20	300	250	5000
400-600	40	60	500	50	2000
600-800	30	90	700	150	4500
800-1000	10	100	900	350	3500
	100(N)				$\sum f\lvert d_z \rvert$=15000

मध्यका (M) $= size\,of \left(\frac{N}{2}\right)^{th} item$

$= Size of \left(\frac{100}{2}\right)^{th} item$

= size of 50^{th} item

50^{th} item 400-600 वर्ग में हैं।

$M = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{4} - C\right)$

$M = 400 + \frac{200}{40}(50-20)$

= 400 + 5(30) = 400+150 = 550

मध्यका से माध्य विचलन = $(\delta_M) = \frac{\sum f|d_M|}{N} = \frac{15000}{100}$ =150

माध्य विचलन गुणांक $= \frac{\delta_M}{M} = \frac{150}{550} = .273$

उदाहरण- 10 नीचे दिए हुए आँकडों में माध्य विचलन और उसका गुणांक (अ) मध्यका से (ब) समान्तर माध्य से ज्ञात कीजिए ।

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
आवृति	4	6	8	10	7	6	5	3	1

हल- (अ) सतत श्रेणी मध्यका की सहायता से माध्य विचलन

	X MV	f	cf	$\lvert d_M \rvert$	$f\lvert d_M \rvert$
0-10	5	4	4	32	128
10-20	15	6	10	22	132
20-30	25	8	18	12	96
30-40	35	10	28	2	20
40-50	45	7	35	8	56
50-60	55	6	41	18	108
60-70	65	5	46	28	140
70-80	75	3	49	38	114
80-90	85	1	50	48	48
		N=50			$\sum f\lvert d_M \rvert = 842$

मध्यका (M) =Size of $\left(\frac{N}{2}\right)^{th}$ *item*

$= Size of \left(\frac{50}{2}\right)^{th} item$

= Size of 25th item

इस प्रकार मध्यका 30-40 वर्गान्तर में होगी ।

$$M = L_1 + \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - C\right)$$

$$= 30\frac{10}{10} = (25-18) = 30+7 = 37$$

मध्यका से माध्य विचलन = $\delta_M \frac{\sum f|d_M|}{N} = \frac{842}{50} = 16.84$

मध्यका विचलन गुणांक $= \frac{\delta_M}{M} = \frac{16.84}{37} = 0.46$

(ब) समांतर माध्य से माध्य विचलन

C.I.	X (MV)	f	A = 45 d_x	d'x	fd'x	$\lvert d\bar{x}\rvert$	f $\lvert d\bar{x}\rvert$
0-10	5	4	-40	-4	-16	33.8	135.2
10-20	15	6	-30	-3	-18	23.8	142.8
20-30	25	8	-20	-2	-16	13.8	110.4
30-40	35	10	-10	-1	-10	3.8	38.0
40-50	45	7	0	0	0	6.2	43.4
50-60	55	6	10	1	6	16.2	97.2
60-70	65	5	20	2	10	26.2	131.0
70-80	75	3	30	3	9	36.2	108.1
80-90	85	1	40	4	4	46.2	46.2
					$\sum fd'x$ =-31		$\sum f\lvert d_{\bar{x}}\rvert$ = 852.8

समान्तर माध्य ($\bar{X}$)   A = $\frac{\sum fd'x}{N}\times i$ $45+\frac{-31}{50}\times 10 = 45-6.2 = 38.8$

समान्तर माध्य से माध्य विचलन $(\delta_{\bar{x}}) = \frac{\sum f\lvert d_{\bar{x}}\rvert}{N} = \frac{852.8}{50} = 38.8$

माध्य विचलन गुणांक = $= \frac{17.6}{38.8} = .44$

5.8.4 माध्य विचलन के गुण दोष

- **गुण**

  (i) माध्य विचलन की गणना सरलता से की जा सकती है ।

  (ii) माध्य विचलन श्रेणी के सभी पद मूल्यों पर आधारित होता है, इससे श्रेणी की संख्या के बारे में पर्याप्त सूचना प्राप्त हो जाती है ।

  (iii) चरम मूल्यों का इस पर प्रभाव नहीं पडता है ।

  (iv) आय व धन के वितरण की असमानताओं का अध्ययन इस रीति द्वारा किया जाता है ।

- **दोष**

  (i) माध्य विचलन का सबसे बड़ा दोष विचलन निकालते समय बीजगणितीय चिन्हों का परित्याग करना है, इससे यह उन स्तरीय प्रयोग के योग्य नहीं रहता ।

  (ii) बहुलक के अनिश्चित होने पर बहुलक से माध्यविचलन की सही गणना नहीं की जा सकती यह अनिश्चित भी होती है ।

5.9 अपकिरण के मापों का सम्बन्ध (Relation Between Measures of Dispersion)

सामान्य रूप से असममित वितरण में अपकिरण की विभिन्न मापों का चतुर्थक, माध्य एवं प्रमाप विचलन में निम्न सम्बन्ध पाया जाता है-

(i) चतुर्थक विचलन प्रमाप विचलन का 2/3 या .6745 गुना होता है ।

$$Q.D. = \frac{2}{3}\sigma \text{ या } \sigma = \frac{3}{2}Q.D.$$

(ii) चतुर्थक विचलन माध्य विचलन का 5 / 6 या .8453 गुना होता है ।

$$Q.D. = \frac{5}{6}\delta \text{ या } \delta = \frac{6}{5}Q.D.$$

(iii) माध्य विचलन प्रमाप विचलन का 4 / 5 या .7979 गुना होता है ।

$$\delta = \frac{5}{6}\sigma \text{ या } \sigma = \frac{3}{2}\delta$$

प्रमाप विचलन का 6 गुना चतुर्थक विचलन का 9 गुना तथा माध्य विचलन का 7.5 गुना बराबर होता है ।

$$6\sigma = 9Q.D. = 7.5\delta$$

5.10 अपकिरण की बिन्दु रेखीय माप

लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve)

डॉ. मैक्स लॉरेंज ने इस वक्र का प्रयोग सर्वप्रथम आय व धन की असमानताओं के अध्ययन के लिए किया था। लॉरेंज वक्र एक संचयी प्रतिशत वक्र है, इसे निम्न प्रकार बनाया जा सकता है ।

(i) मूल्यों की संचयी योग निकाले जाते हैं ।

(ii) अंतिम संचयी योग को 100 के बराबर मानकर सभी को प्रतिशत के रूप में बदल दिया जाता है ।

(iii) अलग-अलग वर्ग की आवृत्तियों के योग को भी संचयी करके मूल्यों की भांति उन्हें भी प्रतिशत में बदल दिया जाता ईं ।

(iv) बिन्दु रेखा पत्र के उदग्र अक्ष पर संचयी मूल्यों के प्रतिशत को तथा क्षैतिज अक्ष पर आवृत्तियों के संचयी प्रतिशत को दिखाया जाता है

(v) मापदण्ड लिखते समय OY अक्ष पर मापदण्ड 0 से 100 लिखा जाता है जबकि OX अक्ष पर मापदण्ड 100 से 0 लिखा जाता है ।

(vi) OX अक्ष के शब्द को एवं OY अक्ष के 100 को एक सीधी रेखा द्वारा मिला दिया जाता है । यह समान वितरण की रेखा कहलाती है ।

(vii) अलग-अलग वर्ग के संचयी आवृत्तियों के प्रतिशत एवं मूल्यों के प्रतिशत को बिन्दु रेखा पत्र पर अंकित कर उन्हें आपस में मिला देने से लॉरेंज वक्र का निर्माण हो जाता है ।

लॉरेंज वक्र का विश्लेषण

लॉरेंज वक्र में समान वितरण की रेखा समानता को व्यक्त करती है अर्थात् अपकिरण का अभाव होता है । इस रेखा से मूल बिन्दु की ओर अपकिरण की माप की जाती है । लॉरेंज वक्र की रेखा समान वितरण की रेखा से जितनी दूर होगी, अपकिरण की भी उतनी ही अधिक होगी । अलग-अलग वर्ग के लॉरेंज वक्र खींचकर उनकी तुलना भी की जा सकती है, जिस वर्ग का वक्र समान वितरण की रेखा के समीप होगा उसमें अपकिरण की मात्रा तुलनात्मक रूप से कम होगी ।

उदाहरण-11 नीचे दिए गए आकड़ों से एक लॉरेंज वक्र खींचिए ।

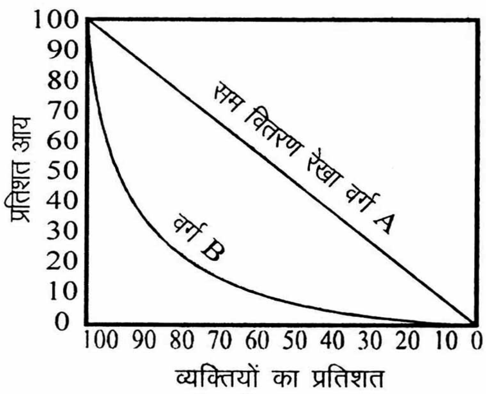
आय (हजारों में)	20	40	80	100	160
व्यक्तियों की संख्या (हजारों में) वर्ग (A)	10	20	40	50	80
व्यक्तियों की संख्या (हजारों में) वर्ग (B)	16	14	10	6	4

हल- संचयी योग ब प्रतिशतों की गणना

आय	संचयी योग	संचयी प्रतिशत	वर्ग (A)			वर्ग - B		
			व्यक्तियों की संख्या	संचयी आवृति	संचयी प्रतिशत	व्यक्तियों की संख्या	संचयी आवृति	संचयी प्रतिशत
20	20	5	10	10	5	16	16	32
40	60	15	20	30	15	14	30	60
80	140	35	40	70	35	10	40	80
100	240	60	50	120	60	6	46	92
160	400	100	80	200	100	4	50	100

संचयी प्रतिशतों के आधार पर लॉरेंज वक्र रेखा चित्र 5.1 के अनुसार खींचा जा सकता है-

लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve)
मापदण्ड (1Cm to 10%)



रेखाचित्र 5.1

रेखाचित्र 5.1 देखने से यह स्पष्ट हो जाता है कि वर्ग A की रेखा एवं समवितरण की रेखा दोनों एक ही है अर्थात् वर्ग A में आय वितरण में अपकिरण की मात्रा नहीं है। वर्ग B की रेखा समवितरण रेखा से दूर है अर्थात् वर्ग 4 की तुलना में विचरण की मात्रा वर्ग B में अधिक है ।

5.11 सारांश (Summary)

इस प्रकार अपकिरण ज्ञात करने की मुख्य रीतियाँ विस्तार, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन, प्रमाप विचलन एवं लॉरेंज वक्र आदि हैं । समंकों की प्रकृति एवं अपकिरण ज्ञात करने के उद्देश्य को ध्यान में रखते हुए किसी एक विधि का चयन किया जाता है, यदि अपकिरण का संख्यात्मक माप आवश्यक नहीं है तो हम लॉरेंज वक्र रीति का प्रयोग कर सकते हैं, विस्तार में चरम मूल्यों का प्रभाव अधिक होता है, अत: चरम मूल्यों के प्रभाव को कम करने के लिए चतुर्थक विचलन रीति का प्रयोग किया जाता है । माध्य विचलन में बीजगणितीय चिन्हों की उपेक्षा की जाती है, अत: यदि उन स्तर की शुद्धता की आवश्यकता हो तो प्रमाप विचलन रीति का प्रयोग किया जाना चाहिए । संक्षेप में कुछ विशेष परिस्थितियों के अतिरिक्त ज्ञात करने के लिए प्रमाप विचलन ही एक सर्वोत्तम माप माना जाता है ।

5.12 शब्दावली (Glossary)

अपकिरण	Dispersion
विस्तार	Range
चतुर्थक विचलन	Quartile Deviation
माध्य विचलन	mean Deviation
गुणांक	Coefficient
प्राकृतिक अंक	Natural Numbers

5.13 सन्दर्भ ग्रन्थ (References)

एस. पी. सिंह (2005), "सांख्यिकी सिद्धान्त एवं व्यवहार", एस. चन्द नई दिल्ली ।

सुदामा सिंह, ओ.पी सिंह, आई.के. सिंह (2002), अर्थशास्त्रीय गणित एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी, राधा पब्लिकेशन्स नई दिल्ली।

Cramer, H. (19460, Mathematical Methods of Statistics, Princeton, New Jersey.

Hoel, P.G. (1954), Introduction to Mathematical Statistics John Wiley & Sons ine., New Jersey.

5.14 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Questions)

1. अपकिरण को समझाइए । अपकिरण को मापने की कौन-कौन सी विधियाँ हैं?
2. अपकिरण के अन्य मापों की तुलना में प्रमाप विचलन क्यों अधिक अच्छा माना जाता है? समझाइए, इसका प्रमुख दोष क्या है?

3. एक कक्षा के विद्यार्थियों की मासिक पॉकिट मनी निम्न प्रकार है। विस्तार एवं विस्तार गुणांक की गणना कीजिए।

10 20 30 100 105 100 110 180 260 व 750

4. नीचे एक कक्षा के 80 विद्यार्थियों के प्राप्तांक दिए हुए है, विस्तार एवं विस्तार गुणांक ज्ञात कीजिए।

अंक (Maths)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
छात्रों की संख्या (No. Of Students)	4	12	20	18	15	8	2	1

5. निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन की गणना कीजिए।

आकार	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40
आवृत्ति	6	10	18	30	15	12	10	6	2

6. निम्नलिखित अंकों से चतुर्थक विचलन तथा उसका गुणांक कीजिए।

ऊँचाई (से.मी. में)	150	151	152	153	154	155	156
विद्यार्थियों की संख्या	15	20	32	35	33	22	20

7. विभिन्न दुकानों में रेडियो सेट के एक मॉडल की निम्न कीमतें हैं, विचलन ज्ञात कीजिए।

210 220 225 225 225 240 250 270 290

8. निम्न समंकों से चतुर्थक विचलन तथा इसका गुणांक ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक (से कम)	10	20	30	40	50	60
छात्रों की संख्या	4	12	23	38	50	56

9. निम्न समंकों से मध्यका ब माध्य विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

क्रमांक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
मूल्य	21	22	22.5	22.5	22.5	25.5	24	25	27	28

10. निम्न समंको से माध्य व मध्यका की सहायता से मान विचलन की गणना कीजिए।

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
छात्रों की संख्या	6	7	12	20	10	5

इकाई - 06

प्रमाप विचलन एवं विचरण (Standard Deviation & Variance)

इकाई की रूपरेखा

6.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप:

- जान सकेंगे कि प्रमाप विचलन एवं विचरण सम्बन्धी माप क्या है एवं यह क्यों उपयोगी है?
- प्रमाप विचलन की गणना करने योग्य हो जाएंगे ।
- प्रमाप विचलन गुणांक एवं विचरण विचरण गुणांक ज्ञात कर सकेंगे ।

6.1 प्रस्तावना (Introduction)

पिछली इकाई में हम पढ़ चुके हैं कि आवृत्ति वितरण के सन्दर्भ में प्रथम श्रेणी के माध्य जैसे समान्तर माध्य, माध्यिका एवं बहुलक के द्वारा हमें श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृत्ति का संकेत तो अवश्य प्राप्त होता है परन्तु श्रेणी के मूल्यों का उसके केन्द्रीय प्रवृत्ति से औसतन कितना अन्तर है अर्थात पदों के बीच विस्तार क्या है, या समंक माला की बनावट कैसी है, यह ज्ञात नहीं होता । किसी श्रेणी का सम्पूर्ण रूप से अध्ययन करने के लिए केन्द्रीय प्रवृत्ति के अतिरिक्त अन्य लक्षणों जैसे पदों का फैलाव अपकिरण विचरण तथा विचलन आदि अध्ययन अनिवार्य हो जाता है ।

प्रमाप विचलन, अपकिरण को मापने का सबसे अधिक सन्तोषप्रद तथा सर्वाधिक व्यवहार में आने वाला माप है । प्रमाप विचलन आकडों के संक्षिप्तीकरण में वैज्ञानिक रूप से अपनाई जाने वाली अपकिरण की विधियों में से सर्वश्रेष्ठ विधि है । प्रमाप विचलन में दो प्रमुख विशेषताएं होती है- एक तो मूल्य के विचलन सदैव समान्तर माध्य से ही लिए जाते हैं, दूसरे, बीजगणितीय चिन्हों को छोड़ा नहीं जाता बल्कि प्राप्त विचलनों के वर्ग कर लिए जाते हैं जिससे ऋणात्मक विचलनों के वर्ग भी स्वयं धनात्मक हो जाते हैं । अन्त में विचलन गये का माध्य निकालकर उसका वर्गमूल ज्ञात कर लिया जाता है । यही प्रमाप विचलन कहलाता है । इस प्रकार यह माप माध्य विचलन के दोषों से सर्वथा मुक्त है ।

'किसी श्रेणी के समान्तर माध्य से निकाले गये उसके विभिन्न पद मूल्यों के विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल उस श्रेणी का प्रमाप विचलन होता है ।" अपकिरण की प्रमाप विचलन रीति का सर्वप्रथम प्रयोग करने का श्रेय प्रसिद्ध प्राणीशास्त्र विशेषज्ञ एवं सांख्यिकी कार्ल पियर्सन को दिया जाता है । प्रमाप विचलन के लिए ग्रीक वर्गमाला का अक्षर ' ' सिग्मा प्रयुक्त किया जाता है ।

सामूहिक रूप से इन्हें अपकिरण की माप कहते हैं, जिन्हें द्वितीय श्रेणी के माध्य कहते हैं ओर जिनका अध्ययन हम पिछली इकाई में विस्तार से कर चुके हैं ।

अपकिरण की गणना करने का दो विधियाँ

(1) विस्तार विधि

(i) विस्तार

(ii) अन्तर-चतुर्थक विस्तार

(iii) दशमक विस्तार

(iv) शतमक विस्तार

(2) औसत मध्यक अन्तर विधि

(i) अपकिरण का प्रथम संवेग अथवा माध्य विचलन

(ii) अपकिरण का द्वितीय संवेग अथवा माध्य विचलन

(iii) चतुर्थक विचलन

(iv) लॉरेंज वक्र

इन विधियों में हमने विस्तार विधि, माध्य विचलन तथा चतुर्थक विचलन का विस्तृत अध्ययन पिछली इकाई में किया है ।

प्रस्तुत इकाई में हम प्रमाप विचलन तथा लॉरेंज वक्र के सन्दर्भ में चर्चा करेंगे ।

6.2 प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

6.2.1 अर्थ, महत्व एवं उपयोग

अपकिरण को ज्ञात करने की सर्वाधिक लोकप्रिय व्यापक एवं उपयोगी विधि प्रमाप विचलन अथवा मानक विचलन है । अपकिरण के अन्य माप सामान्य गणितीय क्रियाओं (जैसे मूल बिन्दु का परिवर्तन इत्यादि) के अनुकूल नही है जबकि प्रमाप विचलन इन क्रियाओं के लिए सर्वथा उपयुक्त है और इन्हीं कारणों से यह अपकिरण का एक आदर्श माप है और इसका प्रयोग सांख्यिकी में सबसे अधिक किया जाता है ।

प्रमाप विचलन के विचार का प्रतिपादन कार्ल पियर्सन ने 1893 में किया था । प्रमाप विचलन अपकिरण मापन के द्वितीय संवेग का वर्गमूल है जिसे सदैव समान्तर माध्य के द्वारा ज्ञात किया जाता है क्योंकि यह केन्द्रीय प्रवृत्ति का सर्वश्रेष्ठ माप समझा जाता है ।

“प्रमाप विचलन माध्य से विभिन्न पद-मूल्यों के विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल होता है ।"

प्रमाप विचलन किसी समंक के पद मूल्यों के बिखराव का माप है, यदि समंक के सभी पद मूल्य उस समंक के समान हो तो प्रमाप विचलन शब्द होगा । इसी प्रकार समंक के पद मूल्यों का मान उसके समान्तर माध्य से जितना दूर होता जाएगा प्रमाप विचलन का मान भी उतना ही बडा प्राप्त होगा ।

प्रमाप विचलन अपकिरण का सर्वश्रेष्ठ मापक है और व्यवहार में इसका बहुत प्रयोग किया जाता है । यह अपकिरण के आदर्श माप की सभी विशेषताओं को पूरा करता है । इसका प्रयोग अधिकतर उन परिस्थितियों में किया जाता है जब विचरण की मात्रा अथवा दो या दो से अधिक श्रेणियों की समरूपता की मात्रा की तुलना करनी हो अथवा वितरण में किसी पद के स्थान का निर्धारण करना हो ।

6.2.2 प्रमाप विचलन का विशेषताएं

1. प्रमाप विचलन स्पष्टतया परिभाषित है ।
2. प्रमाप विचलन नमी अवलोकनों पर आधारित होता है ।
3. प्रमाप विचलन उच्चतर बीजगणितीय विवेचन के लिए उपयुक्त है । इसमें बीजगणितीय चिन्हों को छोड़ा नहीं जाता, बल्कि प्राप्त विचलनों के वर्ग कर लिए जाते हैं जिससे ऋणात्मक विचलन स्वत: ही धनात्मक हो जाते हैं ।
4. प्रमाप विचलन में कई गणितीय विशेषताएँ विद्यमान है । इसलिए संयुक्त प्रमाप विचलन की गणना सकी जा सकती है और विषमता, सहसम्बन्ध प्रतीपगमन आदि कई सांख्यिकी तकनीकों में इसका प्रयोग किया जाता है।
5. प्रतिदर्श उच्चावचनों से प्रमाप विचलन अधिक प्रभावित नहीं होता ।
6. प्रमाप विचलन सामान्य वितरण वक्र के क्षेत्रफल (Area of Normal Distribution Curve) से विशेष रूप से सम्बन्धित होता है ।

6.2.3 प्रमाप विचलन की सीमाएँ

प्रमाप विचलन की निम्नलिखित सीमाएँ हैं :

1. प्रमाप विचलन की गणना जटिल है ।
2. विचलन के शर्त के कारण अति-सीमान्त मूलों को अधिक भार प्रदान किया जाता है ।
3. ऐसी दो या दो से अधिक श्रेणियों की तुलना नहीं कर सकता जिनकी इकाइयाँ अलग-अलग हो ।
4. माध्यिका की भाँति यह चरम मूल्यों से अधिक प्रभावित होता है ।

बोध प्रश्न - 01

1. किसी आवृति के प्रमाप विचलन की परिभाषा दीजिए।
2. अपकिरण की अन्य मापों की अपेक्षा प्रमाप विचलन को क्यों श्रेष्ठ माना जाता है?
3. अपकिरण की मापों में प्रमाप विचलन की उपयोगिता को स्पष्ट कीजिए।

6.3 प्रमाप विचलन मापने की विधियां (Measurement of Standard Deviation)

6.3.1 प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

(i) सर्वप्रथम श्रेणी का समान्तर माध्य ($\bar{X}$) निकाला जाता है ।

(ii) समान्तर माध्य से विचलन लिये जाते है: (dx = X -)

(iii) विचलनों का वर्ग करके उनका योग $\left(\Sigma d^2x\right)$ निकाल लिया जाता है ।

(iv) यदि श्रेणी विच्छिन्न या अविच्छिन्न हो तो वर्गों को उनकी आवृत्तियों से गुणा करके $\left(\Sigma fd^2x\right)$ प्राप्त कर लिया जाता है ।

(v) विचलन वर्गों के योग (or) को पदों की संख्या से भाग दिया जाता है ।

$$\left(\frac{\sum d^2x}{N} or \frac{\sum fd^2x}{N}\right)$$

(vi) प्राप्त भजनफल का वर्गमूल निकाला जाता है, जो प्रमाप विचलन का मान है ।

6.3.2 संक्षिप्त विधि (Short-cut Method)

प्रत्यक्ष रीति के अनुसार प्रमाप विचलन की गणना करते समय जब कभी समान्तर माध्य पूर्णाक नहीं होता तो उससे विचलन लेने में काफी कठिनाई होती है क्योंकि विचलन अधिकतर दशमलव अर्थात् भिन्नक रूप में आते हैं । इस कठिनाई को दूर करने के लिए संक्षिप्त विधि में विचलन वास्तविक समान्तर माध्य से न लेकर काल्पनिक माध्य से लिए जाते हैं ।

प्रथम सूत्र $$\sigma - \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2} or \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2}$$

द्वितीय सूत्र $or \sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N} - \left(\bar{X} - A\right)^2}$

तृतीय सूत्र $or \sigma = \frac{\sqrt{\frac{\sum d^2 x - N}{N} - \left(\bar{X} - A\right)^2}}{N}$

चतुर्थ सूत्र $\sigma = \frac{1}{N} \frac{\sqrt{\frac{\sum d^2 x - N}{N} - \left(\bar{X} - A\right)^2}}{N}$

उपर्युक्त सूत्रों में से प्रथम सूत्र का सबसे अधिक प्रयोग किया जाता है। यदि वास्तविक समान्तर माध्य भी निकालना हो तो द्वितीय या तृतीय सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है। प्रत्येक स्थिति में परिणाम एक ही होगा।

6.3.3 पद विचलन विधि (Step Deviation Method)

पद विचलन रीति का प्रयोग अविच्छिन्न और विच्छिन्न दोनों श्रेणियों में किया जा सकता है परन्तु शर्त यह है कि वर्ग विस्तार या मूल्य विस्तार समान हो। इस रीति का एक मात्र उद्देश्य गणना क्रिया को और अधिक सरल बनाना है। इस विधि में विचलन लेते समय समान वर्ग विस्तार के बराबर समापवर्तक (Common factor) निकाल लिया जाता है। शेष सभी क्रियाएँ लघु रीति की भांति ही होती है। इस संशोधन के कारण सूत्र में समान वर्ग (i) विस्तार को गुणा कर दिया जाता है।

$$\sigma = ix\sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}$$

6.3.4 योग रीति द्वारा प्रमाप विचलन

इस रीति द्वारा प्रमाप विचलन उस अवस्था में निकाला जाता है जबकि दी हुई श्रेणी का वर्ग विस्तार समान हो।

सूत्र $\sigma = i \times \sqrt{2F_2 - F_1 - f^2_1}$

(i) F_1 निकालने के लिए पहले संचयी आवृत्तियाँ बनाकर उनके जोड़ को आवृत्ति से भाग दे दिया जाता है।

$$F_1 = \frac{\sum cf_2}{\sum f}$$

(ii) प्रथम संचयी आवृत्ति को पुन: संचयी बनाया जाता है। उसका कुल जोड़ निकालकर पुन: उसको आवृत्तियों के योग से भाग दिया जाता है; जिससे F_2 का मूल्य ज्ञात हो जाता है।

$$F_2 = \frac{\Sigma cf_2}{\Sigma f}$$

उदाहरण-1

एक फर्म के 10 कर्मचारियों की आय के निम्न आँकडों से प्रमाप विचलन की गणना कीजिए।

100, 120, 140, 120, 180, 170, 180, 140, 200, 150

हल- व्यक्तिगत श्रेणी : प्रत्यक्ष रीति द्वारा प्रमाप विचलन की गणना

X	100	120	140	120	180	170	180	140	200	150	$\sum X$ = 1500
$dx = (X - \bar{X})$	-50	-30	-10	-30	30	20	30	-10	50	0	
d^2x	2500	900	100	900	900	400	900	100	2500	0	$\sum d^2x$=9200

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{1500}{10} = 150$$

प्रमाप विचलन (σ)= $\sqrt{\frac{\sum d^2x}{N}} = \sqrt{\frac{9200}{10}} = \sqrt{920} = 30.33$

उदाहरण - 02

10 विद्यार्थियों के निम्नांकित भर (कि.ग्रा.) के समंकों से लघु रीति के विभिन्न सूत्रों का प्रयोग करते हुए प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए ।

41, 44, 45 49, 50, 53 55, 56, 60

हल- प्रमाप विचलन का परिकलन (लघु रीतियां)

क्रमांक S.No.	भार X	A= 50 से विचलन D_x = X-A	विचलनों के वर्ग	
1.	41	-9	81	समान्तर माध्य $(\bar{X})$ $= \frac{\sum X}{N}$ $= \frac{510}{10} = 51$
2.	44	-6	36	
3.	45	-5	25	
4.	49	-1	1	
5.	50	0	0	
6.	53	+3	9	
7.	55	+5	25	
8.	55	+5	25	
9.	58	+8	64	
10.	60	+10	100	
N=10	$\sum X$ =510	+31-20 = +10 $\sum dx$	366 $\sum d^2x$	

प्रथम सूत्र के अनुसार

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2x}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{366}{10} - \left(\frac{10}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{36.6 - 1.0}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{35.6} = 5.97$$

द्वितीय रू के अनुसार

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2x}{N} - (\bar{X} - A)^2}$$

$$\sqrt{\frac{366}{10} - (51 - 50)^2}$$

$$= \sqrt{36.6 - 1.0} = \sqrt{35.6}$$

$$\therefore \sigma = 5.97$$

तृतीय सूत्र के अनुसार

चतुर्थ सूत्र के अनुसार

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum fd^2x-N(\bar{X}-A)^2}{N}} \qquad \sigma=\frac{1}{N}\sqrt{N\sum d^2x-(\sum dx)^2}$$

$$\sigma=\frac{\sqrt{366-10(51-50)^2}}{10} \qquad =\frac{1}{10}\sqrt{10\times366-(10)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{366-10}}{10} \qquad =\frac{1}{10}\sqrt{3660-100}$$

$$\therefore \sigma=\frac{\sqrt{366}}{10}=5.97 \qquad =\frac{1}{10}\sqrt{3560}$$

$$\therefore=\frac{59.7}{10}=5.97$$

- **प्रमाप विचलन की गणना : खण्डित श्रेणी** खण्डित श्रेणी में प्रमाप विचलन की गणना करने की दो विधियाँ है

(क) प्रत्यक्ष विधि व्यक्तिगत श्रेणी में प्रयोग की गई वास्तविक समान्तर माध्य विधि ही यहाँ प्रयोग की जाती है, केवल अन्तर इतना है कि प्रत्येक विचलन को आवृत्ति से गुणा किया जाता है, इसका सूत्र इस प्रकार है ।

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum fd^2x}{N}}$$

(ख) लघु रीति यदि समान्तर माध्य में दशमलव भाग भी होता है तो प्रत्यक्ष रीति द्वारा प्रमाप विचलन निकालने में गणन क्रिया अत्यन्त जटिल हो जाती है। ऐसी स्थिति में कल्पित माध्य से विचलन निकाल कर निम्न सूत्रों का प्रयोग करना चाहिए ।

प्रथम सूत्र के अनुसार

$$\sigma=\frac{\sqrt{\frac{\sum d^2x-N}{N}-\left(\bar{X}-A\right)^2}}{N}$$

द्वितीय सूत्र के अनुसार

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum fd^2x}{N}-(\bar{X}-A)^2}$$

तृतीय सूत्र के अनुसार

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum fd^2x-N(\bar{X}-A)^2}{N}}$$

चतुर्थ सूत्र के अनुसार

$$\sigma=\frac{1}{N}\sqrt{N\sum d^2x-(\sum dx)^2}$$

सामान्यतया प्रथम सूत्र का ही प्रयोग किया जाता है ।

उदाहरण-03

निम्न श्रेणी में प्रत्यक्ष रीति द्वारा प्रमाप विचलन और उसका गुणांक ज्ञात कीजिए ।

आकार	10	12	14	16	18	20	22	24
आवृत्ति	5	8	21	24	16	15	7	2

हल- प्रत्यक्ष रीति द्वारा प्रमाप विचलन की गणना

आकार X	आवृति F	$\bar{X}$ =16.5 से विचलन dx	विचलन वर्ग d^2x	आवृत्ति व विचलन वर्गों की गुणा fd^2x	आकार × आवृत्ति $f\times X$

10	5	-6.5	42.25	211.25	50
12	8	-4.5	20.25	162.00	96
14	21	-2.5	6.25	131.25	294
16	24	-0.5	0.25	6.00	384
18	18	+1.5	2.25	40.50	324
20	15	+3.5	12.25	183.75	300
22	7	+5.5	30.25	211.75	154
24	2	+7.5	56.25	112.50	48
	N=100			$\sum fd^2{}_x = 1059.00$	$\sum fx = 1650$

समान्तर माध्य

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{1650}{100} = 16.5$$

प्रमाप विचलन

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd_x^2}{N}} = \sqrt{\frac{1059}{100}} = 3.25$$

प्रमाप विचलन गुणांक Coefficient of $\sigma = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{3.25}{16.50} = 0.197$

अत: प्रमाप विचलन =3.25 , प्रमाप विचलन गुणांक = 0.197 है । आपने देखा कि उपर्युक्त उदाहरण में प्रत्यक्ष रीति का प्रयोग करने के कारण गणना जटिल हो गई । अत: अब हम इस उदाहरण की लघु रीति से हल करेंगे । लघु रीति में विचलन काल्पनिक माध्य 4=16 से निकाले गए है ताकि दशमलव नहीं रहे एवं गणना क्रिया सरल बन जाय ।

उदाहरण-04

उपर्युक्त उदाहरण में दिये गये समंको से लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य एवं प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए । हल- लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य ब प्रमाप विचलन

आकार X	आवृत्ति f	A=16 से विचलन dx	f व dx का गुणनफल fdx	fdx व dx की गुणा fd_x^2
10	5	-6	-30	180
12	8	-4	-32	128
14	21	-2	-42	84
16	24	0	0	0
18	18	+2	+36	72
20	15	+4	+60	240
22	7	+6	+42	252
24	2	+8	+16	128
	N=100		$\sum fdx$ =+154-104=+50	$\sum fd_x^2$ =1084

समान्तर माध्य $\left(\overline{X}\right)$	प्रमाप विचलन (σ)
$\bar{X} = A + \frac{\sum fdx}{N}$	$\sigma = \frac{\sum fd_x^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2$
$= 16 + \frac{50}{100}$	$= \sqrt{\frac{1084}{100} - \left(\frac{50}{100}\right)^2}$
=16.5	$= \sqrt{10.84 - .25}$
	$\therefore \ \sigma = \sqrt{10.59} = 3.35$

प्रमाप विचलन की गणना : सतत श्रेणी

सतत श्रेणी में प्रमाप विचलन ज्ञात करने से पूर्व वर्गो के मध्य बिन्दु निकाले जाते हैं । फिर मध्य बिन्दुओं को मूल्य मानकर खण्डित श्रेणी की भांति प्रमाप विचलन का मान निकाल लिया जाता है । प्रमाप विचलन की निम्नलिखित रीतियाँ हैं-

(क) प्रत्यक्ष विधि इस रीति के अनुसार, पहले, श्रेणी का समान्तर माध्य निकाला जाता है । इसके बाद प्रत्येक मध्य बिन्दु में से माध्य घटाकर विचलन प्राप्त किये जाते हैं, शेष सभी क्रियाएँ उसी प्रकार रहती हैं जिस प्रकार खण्डित रीति में । बही सूत्र अपनाया जाता है ।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd_x^2}{N}}$$

(ख) लघु रीतियां इस रीति में खण्डित श्रेणी में प्रयुक्त लघुरीति की भांति ही क्रियाएँ करनी पड़ती है। केवल अन्तर इतना रहता है कि मूल्य के स्थान पर मध्य बिन्दुओं का प्रयोग होता है । बही सूत्र प्रयुक्त होते हैं जो खण्डित श्रेणी में अपनाये जाते हैं ।

प्रथम सूत्र

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd_x^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}$$

द्वितीय सूत्र

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum fd_x^2}{N}\right) - \overline{(X - A)^2}}$$

तृतीय सूत्र के अनुसार

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd_x^2 - N(\overline{X} - A)^2}{N}}$$

चतुर्थ सूत्र

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{N \sum fd_x^2 - (\sum fdx)^2}$$

उदाहरण-05

निम्न श्रेणी में प्रत्यक्ष तथा लघु रीति द्वारा समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन तथा उसका गुणांक ज्ञात कीजिए

अंक (से कम)	10	20	30	40	50	60	70
परीक्षार्थियों की संख्या	10	25	50	75	85	95	100

हल- पहले संचयी आवृत्ति श्रेणी को साधारण सतत आवृत्तिमाला में बदला जाता है । तत्पश्चात् प्रमाप विचलन का निर्धारण किया जाता है ।

प्रत्यक्ष रीति द्वारा माध्य व प्रमाप विचलन की गणना

अंक (Marks)	MV X	आवृति f	कुल अंक fx	$\overline{X}=31$ से विचलन dx	विचलन वर्ग d_x^2	fd_x^2
0-10	5	10	50	-26	676	6760
10-20	15	15	225	-16	256	3840
20-30	25	25	625	-6	36	900
30-40	35	25	875	+4	16	400
40-50	45	10	450	+14	196	1960
50-60	55	10	550	+24	576	5760
60-70	65	5	325	+34	1156	5780
		N=100	3100 $=\sum fx$			$\sum fd_x^2 = 25400$

समान्तर मध्य $(\overline{X})$

$$\overline{X} = +\frac{\sum fx}{N}$$

$$= \frac{3100}{100}$$

$$= 31$$

प्रमाप विचलन

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd_x^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{25400}{100}\right)}$$

$$= \sqrt{254}$$

$$\therefore \sigma = 15.94$$

लघु रीति द्वारा माध्य ब प्रमाप विचलन का परिकलन

C.I	MV X	F	A=35 से विचलन dx	fdx	fd_x^2
0-10	5	10	-30	-300	9000
10-20	15	15	-20	-300	6000
20-30	25	25	-10	-250	2500
30-40	35	25	0	0	0
40-50	45	10	+10	+100	1000
50-60	55	10	+20	+200	4000
60-70	**65**	5	+30	+150	4500
		N=100		$\sum fd_x = 400$	$\sum fd_x^2 = 27000$

समान्तर माध्य

प्रमाप विचलन

$$\overline{X} = + \frac{\sum fdx}{N}$$
$$= 35 + \frac{-400}{100}$$
$$= 35 - 4$$
$$\therefore \overline{X} = 31$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd_x^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{27000}{100}\right) - \left(\frac{-400}{100}\right)^{-2}}$$
$$= \sqrt{270 - 16}$$
$$\sigma = \sqrt{254 = 15.94}$$

(ग) पद विचलन रीति यदि वर्ग विस्तार समान हों तो कल्पित मध्य बिन्दु से विचलन ज्ञात करते समय विस्तार के बराबर समापवर्तक (Common Factor) निकाल लिया जाता है । शेष सभी क्रियाएँ प्रमाप विचलन की लघु रीति की भांति होती है । केवल सूत्र में समान वर्ग विस्तार (1) की गुणा की जाती है ।

$$\sigma = ix\sqrt{\frac{\sum fd_x^2}{N} - \left(\frac{\sum fd_x}{N}\right)^2}$$

उदाहरण-06

निम्नलिखित श्रेणी से प्रमाप विचलन (क) प्रत्यक्ष रीति (ख) लघु रीति (ग) पद विचलन रीति से निकालिये।

अंक (से अधिक)	0	10	20	30	40	50	60	70
छात्रों की संख्या	100	90	75	50	25	15	5	0

हल - पहले संचयी आवृत्ति श्रेणी को सतत सामान्य आवृत्ति श्रेणी में बदला जाएगा फिर प्रमाप विचलन ज्ञात किया जाएगा।

(क) प्रत्यक्ष रीति द्वारा प्रमाप विचलन की गणना

वर्ग अन्तराल C.I	(X) MV	f	Fx	$\overline{X} = 31$ $dx = X - \overline{X}$	Fdx	fd_X^2
0-10	5	10	50	-26	-260	6760
10-20	15	15	225	-16	-240	3840
20-30	25	25	625	-6	-150	900
30-40	35	25	875	+4	+100	400
40-50	45	10	450	+14	+100	1960
50-60	55	10	550	+24	+240	5760
60-70	65	5	325	+34	+170	5780
		N=100	3100			$\sum fd_x^2 = 25400$

समान्तर माध्य

$$\overline{X} = + \frac{\sum fx}{N}$$

$$\overline{X} = \frac{3100}{100}$$

$$= 31$$

प्रमाप विचलन (σ)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx}{N}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2500}{100}\right)}$$

$$= \sqrt{254}$$

$$\sigma = 15.94$$

(ख) लघु रीति द्वारा प्रमाप विचलन की गणना

C.I	MV	F	A=35 dx	Fdx	fd_X^2
0-10	5	10	-30	-300	9000
10-20	15	15	-20	-300	6000
20-30	25	25	-10	-250	2500
30-40	35	25	0	0	0
40-50	45	10	+10	+100	1000
50-60	55	10	+20	+200	4000
60-70	65	5	+30	+150	4500
		N=100		$\sum fdx = 400$	$\sum fd_x^2 = 27000$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd_x^2}{N} - \left(\frac{\sum fd_x}{N}\right)} = \sqrt{\frac{2700}{100} - \left(\frac{-400}{100}\right)^2}$$

$$\sqrt{270 - 16} = \sqrt{254 = 15.94}$$

(ग) पद विचलन रीति प्रमाप विचलन की गणना

C.I	MV	f	dx	i=10	fd’x	fd'^{2}_{x}
0-10	5	10	-30	d’x=$\frac{dx}{i}$	-30	90
10-20	15	15	-20	-3	-25	65
20-30	25	25	-10	-2	0	25
30-40	35	25	0	-1	+10	0
40-50	45	10	+10	0	+20	10
50-60	55	10	+20	1	+15	40
60-70	65	5	+30	2	fd’x	45

		N=100			$\sum fd'x = 40$	$\sum fd_x^2 = 270$

$$\sigma = ix\sqrt{\frac{\sum fd_x'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} = 10\times\sqrt{\frac{270}{100} - \left(\frac{-40}{100}\right)^2}$$

$$= 10\times\sqrt{2.70 - 0.16} = 10\times\sqrt{2.54} = 1.59\times 10$$

$$\sigma = 15.94$$

उदाहरण-07

निम्न श्रेणी का प्रमाप विचलन ज्ञात करें ।

आयु (से कम)	10	20	30	40	50	60	70	80
व्यक्तियों की संख्या	15	30	53	75	100	110	115	125

पहले संचयी आवृत्ति को सामान्य आवृत्ति वितरण में परिवर्तित किया जाएगा फिर 6.3.4 में दिये गये सूत्र का प्रयोग कर प्रमाप विचलन की गणना करेंगे ।

आयु	मध्य बिन्दु	व्यक्तियों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता-1 (Cf_1)	संचयी बारम्बारता-2 (Cf_2)
0-10	5	15	15	15
10-20	15	(30-15=)15	45	45
20-30	25	(53-30=)23	98	98
30-40	35	(75-53=)22	173	173
40-50	45	(100-75=)25	273	273
50-60	55	(110-100=)10	383	383
60-70	65	(115-110=)5	498	498
70-80	75	(125-115=)10	623	623
		$\sum f = 125$	$\sum Cf_2 = 2108$	$\sum Cf_2 = 2108$

$$\sigma = i\times\sqrt{2F_2 - F_1 - F_1^2}$$

$$F_1 = \frac{\sum Cf_1}{\sum f} = \frac{623}{125} = 4.984$$

$$F_2 = \frac{\sum Cf_2}{\sum f} = \frac{2108}{125} = 16.864$$

$$i = 10$$

$$\sigma = 10\times\sqrt{2\times 16.864 - 4.984 - (4.984)^2}$$

$$= 10\times\sqrt{33.723 - 29.826}$$

$$= 10\times 1.976 = 19.76$$

6.3.5 मूल्य वर्ग रीति

यह प्रमाप विचलन के गणना की एक सरल रीति है । इसमें विचलन की गणना नहीं करनी होती । केवल मूल्यों के वर्ग (X^2) निकालकर उनकी आवृत्ति (f) से गुणा कर दिया जाता है । इस रीति का प्रयोग तभी होता है जबकि मूल्य काफी छोटे आकार के हों

सूत्र $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \left(\frac{\sum fX}{N}\right)^2}$

उदाहरण-08 निम्न समंको से प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए ।

आकार	1	2	3	4	5	6	7
आवृत्ति	6	12	18	26	16	10	8

आकार (x)	1	2	3	4	5	6	7	
आवृत्ति (f)	6	12	18	26	16	10	8	
Fx	6	24	54	104	80	60	56	384
fx^2 $fx.x$	6	48	162	416	400	360	392	1784

$\sum fx = 384 N = 96$

$\sum fx^2 = 1784$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{1784}{96} - \left(\frac{384}{96}\right)^2}$$

$= 1.61$

बोध प्रश्न-02

1. प्रमाप विचलन की गणना हेतु प्रयोग होने वाली प्रत्यक्ष एवं संक्षिप्त विधि में अंतर स्पष्ट करे।
2. संक्षिप्त विधि द्वारा प्रत्यक्ष विधि की किसी कमी को दूर करने का प्रयास किया गया है?
3. पद विचलन विधि का प्रयोग किन परिस्थितियों में किया जाता है।
4. मूल्य वर्ग रीति तथा योग द्वारा प्रमाप विचरण की गणना को स्पष्ट कीजिये।

उदाहरण -09

यदि किसी उत्पादन इकाई में लगे दस श्रमिकों की 'साप्ताहिक आय का वितरण निम्न प्रकार हो तो प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए ।

श्रमिक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
साप्ताहिक आय (रू)	80	85	95	90	100	75	65	105	70	85

श्रमिक (N)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	N=100
साप्ताहिक आय (X)	80	85	95	90	100	75	65	105	70	85	$\sum x = 850$

माध्य से विचलन $dx(x-\overline{x})$	-5	0	+10	+5	+15	-10	-20	+20	-15	0	$\sum dx = 0$
dx^2	25	00	100	52	225	100	400	400	225	00	$\sum dx^2 = 1500$

समान्तर माध्य $= \frac{\sum x}{N} = \frac{850}{10} = 85$

प्रमाप विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N}}$

$$= \sqrt{\frac{1500}{10}} = \sqrt{150}$$

$$= 12.25$$

उदाहरण -10 नीचे दिये गये व्यक्तियों के वजन (कि.ग्रो. में) का प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए ।

45 48 50 54 55 55 56 57 60 63

हल- इसे हम लघुरीति से हल करेंगे । इस हेतु काल्पनिक माध्य = 55 लेंगे ।

वजन (कि.ग्रा.)	45	48	50	54	55	55	56	57	60	63	
काल्पनिक मध्य से विचलन (dx)	-10	-7	-5	-1	0	0	+1	+2	+5	+8	$\sum dx = -7$
$(dx)^2$	100	49	25	1	0	0	1	4	25	64	$\sum dx^2 = 269$

प्रमाप विचलन

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$$

$$N = 10 \sum dx^2 = 269$$

$$\sum dx = -7$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{269}{10} - \left(\frac{-7}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{26.9 - 0.49}$$

$$= \sqrt{26.41}$$

$$= 5.14kg$$

उदाहरण-11 निम्न समंकों से प्रत्यक्ष रीति का प्रयोग करके प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिये।

आकार 1 2 3 4 5 6 7

आवृति 6 12 18 26 16 10 8

आकार (x)	1	2	3	4	5	6	7	28
आवृति (f)	6	12	18	26	15	10	8	96

(fx)	6	24	54	104	80	60	56	384
मध्य से विचलन dx(x-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	
dx^2	9	4	1	0	1	4	9	
fdx^2	4	48	18	0	16	40	72	$\sum fdx^2 = 248$

माध्य $= \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{384}{26} = 4(N = \sum f)$

प्रमाप विचलन $= \sqrt{\frac{\sum fd^2x}{N}} = \sqrt{\frac{248}{96}}$

$= 1.61$

उदाहरण-12 दिए गए आँकडों का उपयोग करके लघु रीति द्वारा प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए ।

परिवार में व्यक्तियों की संख्या	5	2	3	4	6	1
परिवार की संख्या	30	65	20	75	55	10

हल-

परिवार में व्यक्तियों की संख्या (x)	परिवार की संख्या (f)	dx (X-4)	fdx	dx^2	fdx^2
5	30	1	30	1	30
2	65	-2	-130	4	260
3	20	-1	-20	1	20
4	75	0	0	0	0
6	55	2	110	4	220
1	10	-3	-30	9	90
	225		-40	1	620

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum dx}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{620}{225} - \left(\frac{-40}{225}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2.8 - .03}$$

$$= 1.66$$

उदाहरण-13 निम्न आंकड़ों से (i) सामान्तर माध्य और (ii) प्रमाप विचलन निकालिये।

आयु (वर्षों में)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
आवृति	2	4	4	8	6	3	2

हल-

आयु (x)	आवृति (f)	मध्य बिन्दु (x)	fx	माध्य से विचलन dx (x-45)	dx^2	$dx)^2$
10-20	2	15	30	-30	900	1800
20-30	4	25	100	-20	400	1600

30-40	4	35	140	-10	100	400
40-50	4	45	360	0	0	0
50-60	8	55	330	10	100	600
60-70	6	65	195	20	400	1200
70-80	3	75	150	30	900	1800
	29		1305			7400

समान्तर माध्य = $\frac{\sum fx}{N} = \frac{1305}{29} = 45 year$

प्रमाप विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(dx)^2}{N}}$

$= \sqrt{\frac{7400}{29}} = \sqrt{255.17}$

$= 15.97 yrs$

उदाहरण-14 एक कारखाने के 5000 कर्मचारियों की साप्ताहिक मजदूरी के निम्न वितरण से माध्य एवं प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए ।

मजदूरी (रू मे)	5-55	45-50	40-45	35-40	30-35	25-30	20-25
मजदूरों की संख्या	250	300	400	450	800	1000	1700

हल

मजदूरी (x)	मज. की संख्या (f)	मध्य बिन्दु (x)	dx=x37.5	dx^2	fdx	$(dx)^2$
50-55	250	52.5	+15	225	3750	56,250
45-50	300	47.5	+10	100	3000	30,000
40-45	400	42.5	+5	25	2000	10,000
35-40	450	37.5	0	0	0	0
30-35	800	32.5	-5	25	-4000	20,000
25-30	1100	27.5	-10	100	-11000	1,10,000
20-25	1700	22.5	-15	225	-22500	3,82,500
	5000				-31,750	6,08,750

माध्य = $A + \frac{\sum fdx}{N} = 37.5 \frac{(-31750)}{} 5000 = 31.15$

प्रमाप विचलन = $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{608750}{5000} - \left(\frac{-31750}{5000}\right)^2}$

$= \sigma = \sqrt{121.75 - 40.32}$

$= 9.02$

उदाहरण - 15 दिये गये समंक से पद - विधि द्वार' प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए '

अंक	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80

छात्रों की संख्या 5 10 10 25 25 15 10

हल-

अंक (x)	मध्य बिन्दु (f)	आवृति (x)	Dx=x-45	$\frac{dx}{i}=dx'=\frac{dx}{10}$	fdx'	F(dx')^2
10-20	15	5	-30	-3	-15	45
20-30	25	10	-20	-2	-20	40
30-40	35	10	-10	-1	-10	10
40-50	45	25	0	0	0	0
50-60	55	25	+10	+1	25	25
60-70	65	15	+20	+2	30	60
70-80	75	10	+30	+3	30	90
		100			40	270

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N}-\left(\frac{\sum fd'x}{N}\right)^2}\times i=\sqrt{\frac{270}{100}-\left(\frac{40}{100}\right)^2}\times 10$$

$$=\sqrt{2.7-(0.4)^2}\times 10=15.93$$

6.4 सामूहिक प्रमाप विचलन

जिस प्रकार अलग-अलग वितरणों के माध्यों के आधार पर समस्त वितरणों का सामूहिक माध्य ज्ञात किया जाता है उसी प्रकार विभिन्न वितरणों के माध्यों एवं प्रमाप विचलनों के आधार पर सामूहिक वितरण का प्रमाप विचलन ज्ञात किया जाता है ।

(i) सर्वप्रथम वितरणों का सामूहिक माध्य ($\overline{X}$)ज्ञात किया जाता है ।

यदि विभिन्न वितरणों का माध्य क्रमशः $\overline{X_1}, \overline{X_2}$ .... $\overline{X_n}$ हो तथा कुल आवृत्तियाँ N_1, N_2, N_3...................... N_n हो तो वितरणों का सामूहिक माध्य $\overline{X}$ =

$$\frac{N_1\overline{X}+N_2\overline{X}_2+N_3\overline{X_3+}................+N_n\overline{X_n}}{N_1+N_2+.....................N_n}$$

(ii) प्रत्येक वितरण माध्य का सामूहिक माध्य से विचलन (D) ज्ञात किया जाता है ।

$$D_1=\overline{X}_1-\overline{X}\quad D_2=\overline{X}_2-\overline{X}\quad D_3=\overline{X_3}.............D_n=\overline{X}_n-\overline{X}$$

(iii) अब निम्न सूत्र के द्वारा हम सामूहिक वितरण का प्रमाप विचलन (σ) ज्ञात करते हैं ।

$$\sigma=\sqrt{\frac{N_1(\alpha_1^2+D_1^2+N_2(\alpha_2^2+D_2^2+...........+N_n(\alpha_n^2+D_n^2}{N_1+N_2+............+N_n}}$$

जहां $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$..............$\sigma_n$ विभिन्न वितरणों के प्रमाप विचलन है ।

यदि वितरणों की संख्या =2 हो तो सामूहिक प्रमाप विचलन का सूत्र होगा-

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2 + D_1^2 + N_2(\sigma_2^2 + D_1^2}{N_1 + N_2}}$$

उदाहरण-16 निम्न सूचना से सम्भावित वर्गों के लिए सामूहिक प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए ।

वर्ग	संख्या	माध्य	प्रमाप विचलन
A	40	20	6
B	60	25	9

हल-

सामूहिक मध्य ($\bar{X}$) **=** $\sigma = \sqrt{\frac{N_1\overline{X}_1 + N_2\overline{X_2}}{N_1 + N_2}} = \frac{(20\times 40)+(25\times 60)}{40+60}$

$$= \frac{800+1500}{100} = 23$$

$$D_1 = \overline{X}_1 - \overline{X} = 20 - 23 = -3 \quad D_1^2 = 9\ \sigma_1^2 = 36$$

$$D_2 = \overline{X_2} - \overline{X} = 23 - 25 = -2 \quad D_2^2 = 4\ \sigma_2^2 = 81$$

$$\sigma 1.2 = \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2 D_1^2 + N_2(\sigma_2^2 + D_2^2}{N_1 + N_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{40(36+9)+60(81+4)}{40+60}}$$

$$= \sqrt{\frac{40(45)+60(85)}{40+60}} = \sqrt{\frac{6900}{100}} = \sqrt{69 = 8.3066}$$

उदाहरण-17

दो आवृत्ति वितरणों की कुल आवृत्ति, माध्य एवं प्रमाप विचलनों का विवरण इस प्रकार है।

$$N_1 = 200 \qquad X_1 = 25 \qquad \sigma_1 = 3$$

$$N_2 = 300 \qquad X_2 = 10 \qquad \sigma_2 = 4$$

इन वितरणों का सामूहिक माध्य एवं प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए ।

हल

वितरणों का सामूहिक माध्य $\overline{X} = \frac{N_1\overline{X}_1 + N_2X_2}{N_1 + N_2}$

$$= \frac{200(25)+300(10)}{200+300}$$

$$= \frac{5000+3000}{500}$$

$$= \frac{8000}{500} = 16$$

वितरणों का सामूहिक माध्य (σ) = $= \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2 D_1^2 + N_2(\sigma_2^2 + D_2^2}{N_1 + N_2}}$

$$D_1 = \overline{X}_1 - \overline{X} = 25 - 16 = -9$$

$$D_2 = \overline{X_2} - \overline{X} = 10 - 16 = -6$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{200(3^2 + 9^2) + 300(4^2 + (-6^2)}{200 + 300}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{200(9 + 81 + 300(16 + 36)}{500}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{18000 + 15600}{500}}$$

$$= \sqrt{\frac{33600}{500}}$$

$$= \sqrt{67.2 = 8.2}$$

बोध प्रश्न-03

1. निम्न आँकडों से माध्य एवं प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए।

80 85 100 110 82 97 93 95 98 140

2. निम्न श्रेणी में एक कारखाने में विभिन्न श्रमिकों द्वारा प्रतिदिन ऊत्पादित निर्मित वस्तुओं की संख्या दी गई है । प्रतिदिन उत्पादित निर्मित वस्तुओं की माध्य एवं प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए।

वस्तुओं की संख्या	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
श्रमिकों की संख्या	3	7	11	14	18	17	13	8	5	4

3. निम्न श्रेणी का प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिए।

जोतों की आकार (हेक्टेयर)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
कृषकों की संख्या	1000	2300	3600	2400	1700	3000	500

4. एक बंटन के तीन भाग है जिनका वितरण इस प्रकार है

क्रम	पद संख्या	समान्तर माध्य	प्रमाप विचलन
1.	200	25	3
2.	250	10	4
3.	300	15	5

सिद्ध कीजिए कि पूरे बंटन का समान्तर माध्य 16 है और प्रमाप विचलन लगभग 7.2 है।

6.5 प्रसरण (Variance)

6.5.1 अर्थ एवं सूत्र

समान्तर माध्य से लिए गये विचलनों के वर्गो का समान्तर माध्य प्रसरण, विचरण मापांक अथवा द्‌वितीय अपकिरण घात (second Moment of Dispersion) कहलाता है । जब विचरण मापांक का वर्गमूल निकाला जाता है तो यह प्रमाप विचलन बन जाता है । अत: प्रसरण प्रमाप विचलन का वर्ग होता है ।

सूत्रानुसार प्रसरण=σ

6.5.2 विचरण गुणांक

प्रमाप विचलन अपकिरण का एक निरपेक्ष माप है जिसे सर्वदा मापन की इकाई में व्यक्त किया जाता है जैसे रूपया अंक, कि.ग्रा. आदि । दो या दो से अधिक श्रेणियों के विचलनों की तुलना करने के लिए अपकिरण के निरपेक्ष माप का प्रयोग नहीं किया जा सकता, विशेषकर उन परिस्थितियों में जब दे विभिन्न मापन इकाइयों में व्यक्त किये गये हो । इस प्रकार की परिस्थितियों में, जब दो या दो से अधिक श्रेणियों के प्रमाप विचलन विभिन्न इकाइयों में व्यक्त किये गये हो एवं उनका तुलनात्मक विश्लेषण करना हो, प्रमाप विचलन के गुणांक अधिक उपयुक्त होते हैं । प्रमाप विचलन के गुणांक की गणना के लिए प्रमाप विचलन को समान्तर माध्य से भाग दिया जाता है । कभी-कभी यह गुणांक दशमलव या भिन्न रूप में आने के कारण तुलना के योग्य नहीं हो पाता । इस दोष के निवारण हेतु विचरण गुणांक का सहारा लिया जाता है । विचरण गुणांक के लिए प्रमाप विचलन के गुणांक को 100 से गुणा कर दिया जाता है । अर्थात्‌ विचरण गुणांक, प्रमाप विचलन के गुणांक का ही प्रतिशत है ।

सूत्रानुसार विचरण गुणांक (C.V) = $\frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100$ Zई

जिस समंक श्रेणी का विचरण गुणांक अधिक होता है उसमें विचरण अधिक होता है । वह अधिक अस्थिर मानी जाती है । इसके विपरीत जिस श्रेणी में विचरण गुणांक (C.V.) कम होता है वह अधिक एकरूप, सजातीय अथवा संगत कहलाती है ।

उदाहरण-18

नीचे दिये गये x एवं y शेयरों के मूल्य से बताइये कि कौन-सा शेयर अधिक स्थाई है-

x	55	54	52	53	56	58	52	50	51	49
y	107	107	105	105	106	107	103	104	101	

हल

X	dx=x-35	dx^2	y	dy=x-105	dy^2
55	+2	4	108	+3	9
54	+1	1	107	+2	4
52	-1	1	105	0	0
53	0	0	105	0	0
56	+3	92	106	+1	1

58	+5	25	107	+2	4
52	-1	1	104	-1	1
50	-3	9	103	-2	4
51	-2	4	104	-1	1
49	-4	16	101	-4	16
530		70	1050		40

Share x mean $\overline{X_X} = \frac{530}{10} = 53$

Share y mean $\overline{X_Y} = \frac{1050}{10} = 105$

प्रमाप विचलन **=** $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum dx^2}{N}}$

$$= \sqrt{\frac{70}{10}} = \sqrt{7} = 2.65$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum dy^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{40}{10}} = \sqrt{4} = 2$$

विचरण गुणांक **=** $\frac{\sigma}{\overline{\overline{X}}} \times 100$

$$CV_x \frac{\sigma_x}{\overline{\overline{X}}_x} \times 100 = \frac{2.65}{53} \times 100 = 5\%$$

$$CV_x \frac{\sigma_x}{\overline{\overline{X}}_x} \times 100 = \frac{2}{10.5} \times 100 = 1.9\%$$

शेयर x का विचरण गुणांक, शेयर y के विचरण गुणांक से अधिक है अत: y शेयरों की कीमतों में अधिक स्थिरता होगी।

6.5.3 प्रमाप विचलन के बीज गणितीय गुण (Algebraic Properties of Standard Deviation)

प्रमाप विचलन में निम्न प्रमुख बीज गणितीय गुण पाये जाते हैं-

(i) **सामूहिक प्रमाप विचलन** विभिन्न उप-वर्गों के प्रमाप विचलनों के आधार पर पूरे समूह का सामूहिक प्रमाप विचलन मालूम किया जा सकता है ।

क्रमानुसार प्राकृतिक अंकों का प्रमाप विचलन निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है-

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{1}{12}\right)(N^2 - 1)}$$

(ii) समान्तर माध्य से विचलन समान्तर माध्य से विचलन के लिए जाने के कारण प्रमाप विचलन में विचलन वर्गो का जोड़ न्यूनतम होता है ।

$$\sum d^2 = \sum (X - \overline{X})^2 = \min imum$$

(iii) प्रमाप विचलन पर गणितीय क्रियाओं का प्रभाव किसी समंक श्रेणी के प्रत्येक पद मूल्य में एक स्थिरांक या अचर मूल्य जोड़ने, घटाने, गुणा करने या भाग करने का उस श्रेणी के माध्य और प्रमाप विचलन पर निम्नांकित प्रभाव पड़ता है-

गणितीय क्रियाओं का प्रभाव	समांतर माध्य पर प्रभाव	प्रमाप विचलन पर प्रभाव
स्थिरांक जोड़ने पर (a)	$\bar{X} + a$	σ
स्थिरांक घटाने पर (a)	$\bar{X} - a$	σ
स्थिरांक से गुणा करने पर (a)	$\bar{X} \times a$	$\sigma \times a$
स्थिरांक से भाग देने पर (a)	$\bar{X} \div a$	$\sigma \div a$

उपर्युक्त गुणों के कारण प्रमाप विचलन का उच्चत्तर गणितीय अध्ययन में सर्वाधिक प्रयोग होता है ।

6.5.4 प्रमाप विचलन के लाभ व दोष

- **लाभ**

(i) प्रमाप विचलन श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता है । इसमें किसी मूल्य को छोड़ा नहीं जाता ।

(ii) प्रमाप विचलन का उच्चत्तर बीज गणितीय अध्ययन में प्रयोग किया जाता है ।

(iii) प्रमाप विचलन पर अन्य अपकिरण मापों की अपेक्षा निदर्शन परिवर्तनों का सबसे कम प्रभाव पडता है ।

(iv) प्रमाप विचलन अपकिरण का सर्वश्रेष्ठ माप है जो विभिन्न समूहों के वितरण की तुलना करने में तथा दैव प्रीतदर्शों में विभिन्न मापों की अर्थपूर्णता की जाँच करने में, प्रसामान्य वक्र के अधीनस्थ क्षेत्रफल ज्ञात करने में, सहसम्बन्ध विश्लेषण में, श्रेणी में मूल्य वितरण की सीमाएं निर्धारित करने में तथा सही तुलना ब निर्वचन में अत्यन्त उपयोगी है ।

- **दोष**

(i) इसकी गणना कठिन होने के कारण सर्वसाधारण के लिए असुविधाजनक है ।

(ii) यह चरम मूल्यों को अधिक महत्त्व देता है ।

6.6 लॉरेंज वक्र - बिन्दु रेखीय विधि

बिन्दु रेखीय विधि से अपकिरण मापने का सर्वप्रथम प्रयोग डी. मैक्स ओ लॉरेंज ने किया था । उन्होंने इसका प्रयोग विभिन्न समयावधि में अथवा विभिन्न देशों के बीच आय एवं सम्पत्ति के वितरण में असमानता को मापने के लिए किया । लॉरेंज वक्र के द्वारा विभिन्न प्रकार की असमानताओं जैसे - मजदूरी, विक्रय, जनसंख्या एवं लाभों के वितरण में असमानताओं को प्रदर्शित किया जाता है । लॉरेंज वक्र एक संचयी प्रतिशतों का बिन्दुरेखीय प्रदर्शन है ।

यदि हम किसी अर्थव्यवस्था में आय वितरण की बात करें तो आय का वितरण उस स्थिति में समान कहा जायेगा जबकि जनसंख्या के एक विशिष्ट प्रतिशत का राष्ट्रीय आय में अंश उतने ही प्रतिशत के बराबर हो तो अर्थव्यवस्था में आय का वितरण पूर्णतया समान होगा । गणितीय भाषा में यदि 'n' प्रतिशत लोगों का राष्ट्रीय आय में हिस्सा ' n ' प्रतिशत के बराबर हो तो आय का वितरण पूर्णतया समान कहा जायेगा ।

किसी आय वितरण का लॉरेंज वक्र बनाने के लिए हमें यह ज्ञात करना होता है कि आय के एक निश्चित प्रतिशत को प्राप्त करने वाले लोगों का वितरण में प्रतिशत क्या है? तत्पश्चात् आय व लोगों के संगत प्रतिशत मानों को हम एक ग्राफ पर अंकित करते हैं और प्राप्त बिन्दुओं को एक वक्र के द्वारा जोड़ देते हैं । यह वक्र अर्थव्यवस्था में आय वितरण की प्रकृति को दर्शायेगा । इसी वक्र को हम लॉरेंज वक्र करते हैं ।

- **लॉरेंज वक्र बनाने की विधि**

(i) समंक के पद मूल्यों का अगर वर्ग अन्तराल है तो इसके मध्य बिन्दुओं का संचयी मूल्य ज्ञात करते हैं एवं अंतिम संचयी मूल्य को 100 मानकर अन्य संचयी मूल्यों का प्रतिशत ज्ञात कर लेते हैं ।

(ii) इसी प्रकार से आवृत्तियों की भी संचयी आवृत्ति ज्ञात कर लेते हैं और अंतिम संचयी आवृत्ति को 100 मानकर अन्य संचयी आवृत्तियों का प्रतिशत ज्ञात किया जाता है ।

(iii) संचयी मूल्यों के प्रतिशत को Y अक्ष पर क्रम से 0 से 100 तक लेते हैं, किन्तु X अक्ष पर संचयी आवृत्तियों के प्रतिशत को 0 से नहीं वरन उन्हें क्रम से 100 से 0 तक अंकित करते हैं ।

(iv) अब प्राप्त प्रतिशत संचयी मानों के अनुरूप ग्राफ पेपर पर अंकित बिन्दुओं को मिला देने से प्राप्त वक्र लॉरेंज वक्र होता है । X अक्ष पर 0 और Y अक्ष पर 100 को एक रेखा से मिला देते हैं जिसे समान वितरण रेखा कहते हैं ।

लॉरेंज वक्र समान वितरण रेखा से वास्तविक वितरण के विचलन का माप है । यह वक्र समान वितरण वक्र से जितना दूर होगा, वितरण की असमानताएँ उतनी ही अधिक होगी । यदि लॉरेंज वक्र के समान वितरण रेखा के निकट है या समान वितरण रेखा से सम्पाती है तो वास्तविक वितरण में आय की असमानताएँ नगण्य होगी तथा हम कह सकते हैं कि अर्थव्यवस्था में आय का वितरण लगभग समान होगा ।

- **गिनी गुणांक**

आय की असमाताओं को परिमाणात्मक रूप में मापने के लिए हम गिनी गुणांक का प्रयोग करते हैं जिसे निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है ।

$$\text{गिनी गुणांक} = \frac{\text{सामान वितरण रेखा व लॉरेंज वक्र के मध्य क्षेत्रफल}}{\text{सामान वितरण रेखा व अक्षो के बीच क्षेत्रफल}}$$

इस गुणांक का मान जितना कम होगा आय की असमानताएँ भी उतनी कम होगी तथा गिनी गुणांक का मान अधिक होने पर आय की असमानताएँ भी अधिक होगी ।

- **लॉरेंज वक्र की सीमाएँ**

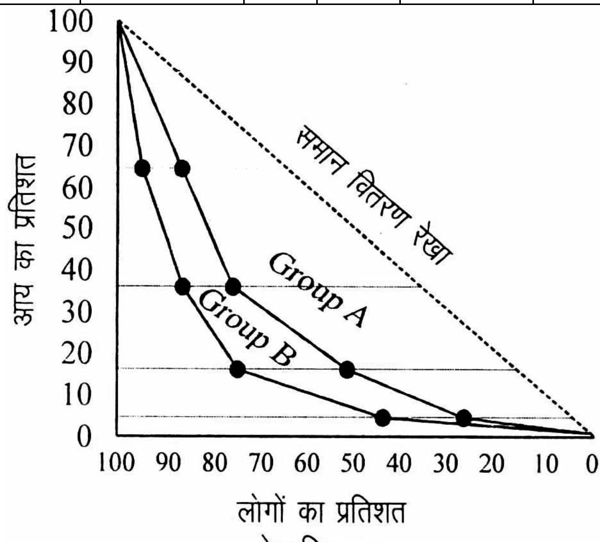
लॉरेंज वक्र विधि एक सरल व आकर्षक विधि है, पर इसे वैज्ञानिक विधि के रूप में स्वीकार नहीं किया जाता है जिसका कारण यह है कि इसके अन्तर्गत अपकिरण की मात्रा का संख्यात्मक मापन सम्भव नहीं है ।

उदाहरण-19

निम्नलिखित आय वितरणों के लिए लॉरेंज वक्रों की रचना कीजिए ।

आय	Below 1000	Below 2000	Below 3000	Below 4000	Below 5000
समूह A	2500	2200	2000	1600	1100
समूह B	3000	2300	1000	550	300

आय	मध्य बिन्दु	संचयी मूल्य	% संचयी मूल्य (यदि 12500=100)	समूह A			समूह B		
				F	संचयी आवृति cf	% cf यदि 9400=100	f	संचयी आवृति cf	% cf यदि 7150=100
Below 1000	500	500	4%	2500	2500	26.6	300	3000	41.9
1000-2000	1500	2000	16%	2200	4700	50.0	2300	5300	74.1
2000-3000	2500	4500	36%	2000	6700	74.3	1000	6300	88.1
3000-4000	3500	8000	64%	1600	8300	88.3	550	6850	95.8
4000-5000	4500	12500	100%	1100	9400	100.0	300	7150	100.0



रेखाचित्र 6.1

समूह B में आय की असमानताएँ अधिक है एवं समूह 'के वितरण में आय की असमानताएँ अपेक्षाकृत कम हैं क्यों कि समूह A का लॉरेंज वक्र समान वितरण रेखा के अधिक समीप है।

बोध प्रश्न -04

1. विचरण गुणांक पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।
2. विचरण गुणांक किस उद्देश्य की पूर्ति करता है ? प्रसारण और विचरण गुणांक के बीच

भेद बताइये।
3. लारेंज वक्र की रचना विधि समझाइए।

6.7 सारांश (Summary)

प्रमाप विचलन या मानक विचलन अपकिरण का एक आदर्श माप है और इसका प्रयोग सांख्यिकी में सबसे अधिक किया जाता है। अपकिरण मापन के दृष्टिकोण से प्रमाप विचलन सर्वाधिक व्यापक एवं उपयोगी है। प्रस्तुत इकाई में प्रमाप विचलन के अर्थ महत्व, एवं उपयोग की चर्चा की गयी है । इसके अतिरिक्त प्रमाप विचलन की गणना हेतु विभिन्न विधियों का भी विस्तृत विवरण इकाई में समाहित है । विभिन्न प्रकार की श्रेणियों में किस प्रकार प्रमाप विचलन की विभिन्न विधियों का प्रयोग किया जाता है इसकी भी इकाई में व्याख्या की गई है । प्रमाप विचलन के अतिरिक्त अपकिरण मापन के अन्य मापों अर्थात् प्रसरण एवं विचरण गुणांक का उल्लेख भी इकाई में हैं। अपकिरण के अन्य मापक लॉरेंज वक्र की चर्चा भी इकाई में की गई है । आय की असमानता मापने के लिए लॉरेंज वक्र का प्रयोग कई देशों द्वारा किया गया है । इस तथ्य से लॉरेंज वक्र की महत्ता स्पष्ट हो जाती है ।

6.8 शब्दावली (Glossary)

प्रमाप विचलन	Standard Deviation
औसत मध्यक अन्तर विधि	Average Differences From Average Method
प्रत्यक्ष विधि	Direct Method
संक्षिप्त विधि	Short Moment Of Dispersion
अपकिरण का द्वितीय संवेग	Second Moment Of Dispersion
पद विचलन विधि	Step Deviation Method
अविच्छिन्न श्रेणी	Discrete Series
सामूहिक प्रमाप विचलन	Continuous Series
प्रसरण	Variance
विचरण गुणांक	Coefficient Of Variation
लॉरेंज वक्र	Lorenz Curve
आय की असमानता	Income Inequality
गिनी गुणांक	Ginni Coefficient

6.9 संदर्भ ग्रंथ (References)

Agrawal D.R., (2005),'Quantitative Methods'. Vrinda Publications Ltd.Delhi

Monga G.S., (1999).'Mathematics And Statistics For Economics', Vikas Publishing House Pvt. Ltd.New Delhi.

Singh S.P..(1988)'Statistics Theory And Pratice;.S. Chand & Comp. Pvt Ltd. New Delhi

Rai Ramendu (2006),'Principles Of Statistics'.Indian Press Publications Pvt. Ltd. New Allahabad.

Goon A.M., Gupta M.K., Das Gupta B., 'Fundamentals Of Statistics" Vol-I, The World Press Calcutta.

Bajpai,O.P., "Foundations Of Statistics" . Asia Publishing House,Bombay.

शुक्ला एवं सहाय, 'सांख्यिकी के सिद्धान्त', साहित्य भवन, आगरा ।

6.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (unit-end Questions)

1. प्रमाप विचलन क्या है? इसके विभिन्न लाभ क्या है?
2. विचरण गुणांक क्या है? प्रसरण व विचरण गुणांक में भेद बताइए?
3. लॉरेंज वक्र पर एक संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए तथा इसके उपयोगों का विवेचन कीजिए ।
4. अपकिरण की मापों के रूप में प्रमाप विचलन के गुण दोषों ब उपयोगिता की विवेचना कीजिए।
5. प्रमाप विचलन की गणना हेतु जिन विधियों का प्रयोग होता है, उनका संक्षिप्त विवरण दें। आप इनमें से किसे श्रेष्ठ मानते हे।
6. निम्न समंकों के आधार पर व 10 मजदूरों की मासिक मजदूरी का समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन की गणना कीजिए ।

मजदुरो	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
मजदूरी	750	800	650	700	900	850	750	950	750	850

7. निम्न समंको से समान्तर माध्य तथा प्रमाप विचलन का परिकलन कीजिए ।

मूल्य	60	61	62	63	64	65
आवृत्ति	5	15	18	8	6	8

8. निम्न सारणी से माध्य विचलन स्व प्रमाप विचलन का परिकलन कीजिए ।

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
छात्रों की संख्या	3	6	9	7	5

9. निम्न आंकड़ो से समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन निकालिए ।

आयु (वर्षों में)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
आवृत्ति	2	4	4	8	6	3	2

इकाई - 07

विषमता कीं माप (Measures of Skewness)

इकाई की रूपरेखा

7.0 उद्देश्य (Objective)

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप:

- जान सकेंगे कि श्रेणी का स्वरूप सममितीय है अथवा असममित है;
- विषमता का अर्थ एवं प्रकारों से परिचित हो जाएंगे;
- विषमता की गणना करने योग्य हो सकेंगे ।

7.1 प्रस्तावना (Introduction)

पूर्ववर्ती इकाइयों से यह स्पष्ट हो चुका है कि कोई अकेला सांख्यिकी मापन किसी श्रेणी की सभी विशेषताओं को प्रकट करने में सक्षम नहीं होता । संखियकीय माध्य' किसी श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृति का ज्ञान कराते हैं तथा 'अपकिरण की माप से यह पता चलता है कि श्रेणी के पद-मूल्यों का माध्य से कितना विचलन है । यद्‌यपि ये दोनों प्रकार की सूचनाएँ अत्यन्त आवश्यक और महत्वपूर्ण होती है, परन्तु श्रेणी की बनावट, चरित्र व स्वरूप का अध्ययन केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप व अपकिरण की माप द्‌वारा सम्भव नहीं हो पाता । श्रेणी का स्वरूप क्या है, उसका प्रसार सममितीय है अथवा असममित है, इसका ज्ञान केवल विषमता एवं पृथुशीर्षत्व के मापन द्‌वारा ही सम्भव है । विषमता हमें वक्र की आकृति का विश्लेषण करने में सहायता प्रदान करता है अर्थात समितीयता एवं असमितीयता जबकि

पृथुशीर्षत्व किसी आवृत्ति वितरण का पूर्णरूपेण निरूपण करने में पर्याप्त रूप से सक्षम हैं । प्रस्तुत इकाई में हम विषमता की माप का विस्तार से अध्ययन करेंगे ।

7.2 विषमता (Skewness)

7.2.1 अर्थ एवं परिभाषा

विषमता से अभिप्राय किसी समंक माला में सममिती का अभाव होना समझा जाता हैं । अन्य शब्दों में समक माला में जब आवृति-वितरण सममिति से दूर हो जाता है और वितरण असममित होने लगे, तो इस प्रवृत्ति को विषमता कहते हैं । सिम्पसन एवं काफ्का के अनुसार विषमता आवृत्ति वितरण की विशेषता है जो वर्ग के एक ओर अधिकतम आवृत्ति के साथ दूसरी ओर की अपेक्षा अधिक बढ़ जाती है । पैडन तथा लिण्डकिस्ट के अनुसार एक वितरण को विषम कहा जाता है यदि उसमें सममिति का अभाव होता है, अर्थात् मापों के विस्तार के एक ओर ही स्व केन्द्रित हो जाते हैं । इस प्रकार संक्षेप में किसी वितरण की सममिति से दूर हटने की प्रवृत्ति को विषमता कहते हैं ।

7.2.2 अपकिरण एवं विषमता में अन्तर

अपकिरण किसी श्रेणी मे पदों के बिखराव को प्रदर्शित करता है जबकि विषमता का समबन्ध उसकी आकृति की विशिष्टताओं से होता है । अन्य शब्दों में अपकिरण हमें श्रेणी की संरचना के बारे में बताता है जबकि विषमता हमें श्रेणी के वक्र की आकृति के बारे में बताता हैं । अपकिरण हमें श्रेणी के पदों का मानक रूप में स्वीकृत अन्य किसी पद से व्यक्तिगत अन्तरों की ओर संकेत करता है । अपकिरण द्वितीय क्रम के माध्यों पर आधारित है जबकि विषमता मुख्यतया प्रथम क्रम के माध्यों पर आधारित है ।

7.2.3 विषमता का परीक्षण

किसी समंक-माला में विषमता के होने की जाँच निम्न आधार पर की जाती है :-

1. यदि किसी श्रेणी में समान्तर माध्य, माध्यिका तथा बहुलक का मूल्य समान है तो श्रेणी में बिसमता नहीं होगी । इनके बीच अन्तर जितना अधिक होगा विषमता उतनी अधिक होगी।
2. यदि मध्यिका से लिए गये धनात्मक विचलनों का योग ऋणात्मक विचलनों के बराबर है तो विषमता नहीं होगी ।
3. यदि चतुर्थक, दशमक तथा शतमक के जोड़े मध्यिका से बराबर दूरी पर स्थित हैं तो विषमता नहीं होगी ।
4. यदि बहुलक के आगे व पीछे समान दूरी पर दोनों ओर की बारम्बारतायें बराबर हो तो विषमता नहीं होगी ।
5. यदि श्रेणी को रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित करने पर सममित वक्र ऊभरे तथा वह घंटी के आकार का हो तो विषमता नहीं होगी ।

बोध प्रश्न - 1

1. विषमता क्या है ? यह अपकिरण से किस प्रकार भिन्न होता है?
2. विषमता के परीक्षण क्या है?

3. किसी आवृति - वितरण की प्रकृति को समझने में विषमता के माप के महत्व को स्पष्ट कीजिये।

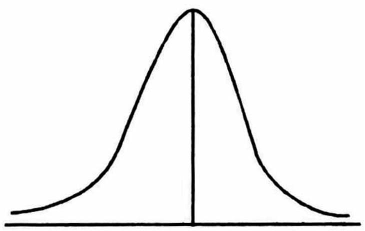
7.3 वितरण के प्रकार (Types of distribution)

विषमता के दृष्टिकोण से आवृत्ति वितरण को निम्न दो वर्गो में वर्गीकृत किया जा सकता है :-

7.3.1 अविषम. सामान्य अथवा सममित वितरण

इस प्रकार के आवृत्ति वितरण में मूल्यों की आवृत्तियाँ एक निश्चित क्रम से बढती हैं तथा एक निश्चित बिन्दु या स्थान पर चरम अथवा अधिकतम होने के पश्चात उसी क्रम में घटती है । ऐसे आवृत्ति को रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित करने पर घंटी के आकार का वक्र प्राप्त होगा । मध्य से विभाजित करने पर वक्र के दोनों भाग सम्पूर्ण समान होगें ।

सममित वितरण



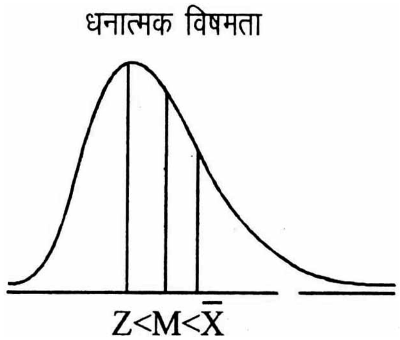
समान्तर माध्य ($\bar{X}$)
मध्यका (M)
बहुलक (Z)
$\bar{X}$=M=Z
रेखाचित्र 7.1

7.3.2 विषम अथवा असममित वितरण

विषम अथवा असममित वितरण में आवृत्तियों के घटने व बढ़ने का कोई निश्चित क्रम नहीं होता है । ऐसे वितरणमाला में समान्तर माध्य, माध्यिका तथा बहु लक एक नहीं होते है । ऐसे वितरण को रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित करने पर असामान्य तथा झुकावदार वक्र प्राप्त होता है । ऐसे वितरण में पाई जाने वाली विषमता दो प्रकार की होती है -

(i) धनात्मक विषमता

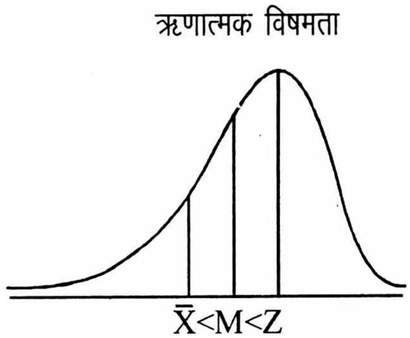
धनात्मक विषमता तब पाई जाती है जब किसी श्रेणी का समान्तर माध्य, माध्यिका से तथा मध्यिका बहु लक से अधिक होती है । इस प्रकार के वितरण में मध्यिका से तृतीय-चतुर्थक का अन्तर (Q_3-M,), मध्यिका से प्रथम चतुर्थक के अन्तर (M-Q_1) से अधिक होता है ।



रेखाचित्र 7.2

(ii) ऋणात्मक विषमता

ऋणात्मक विषमता की स्थिति में समान्तर माध्य का मूल्य, मध्यिका से कम तथा मध्यिका बहुलक से कम होती है । इसी प्रकार मध्यिका व तृतीय चतुर्थक का अन्तर (Q_1 -M), मध्यिका और प्रथम चतुर्थक के अन्तर (M-Q_1) से कम होता है । ऐसी स्थिति में वक्र का झुकाव बाई ओर अधिक होता है ।



रेखाचित्र 7.3

बोध प्रश्न-2

1. चित्र की सहायता से विषम व अविषम आवृति को स्पष्ट कीजिये।
2. घनात्मक तथा ऋणात्मक विषमता में अंतर को चित्र द्वारा स्पष्ट करें।
3. विषमता की माप हेतु आवृत्तियों का वितरण किस आधार प्रकिया जाता है ?

7.4 विषमता के माप (Measures of Skewness)

विषमता के माप विषमता के परीक्षण पर आधारित है । विषमता के मापों का वर्णन इस प्रकार है:

7.4.1 विषमता का प्रथम माप

विषमता का प्रथम माप विषमता के प्रथम परीक्षण पर आधारित है, जिसके अनुसार एक सममितीय वितरण में माध्य, मध्यिका तथा बहुलक का मूल्य समान होता । अत: श्रेणी की विषमता माध्यों के अन्तर पर निर्भर करती है, जितना अन्तर अधिक होगा, उतनी ही अधिक विषमता पाई जायेगी । इसके सापेक्षिक माप प्राप्त करने के लिए विषमता गुणांक ज्ञात किया जाता है । इस संदर्भ में कार्ल

पियर्सन का विषमता माप सबसे अधिक प्रयोग किया जाता है, जिसे कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक के नाम से जाना जाता है । विषमता के प्रथम माप से सम्बन्धित सूत्र-

(i) विषमता की माप $S_k = (\overline{X} - Z)$ 2)

(ii) विषमता की माप $S_k = 3(\overline{X} - M)$

(iii) कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक $(j) = \left(\frac{\overline{X} - Z}{\sigma}\right) = j$

(iv) कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक $(j) = \frac{3(\overline{X} - M)}{\sigma}$

जहाँ $\overline{X}$ = माध्य Z= बहुलक

M माध्यिका σ= प्रमाप विचलन

- **महत्वपूर्ण तथ्य**

(i) विषमता गुणांक का मान सदैव ± 1 की सीमाओं के अन्तर्गत ही रहता है ।

(ii) यदि विषमता गुणांक का मान शून्य है तो श्रेणी विषमता रहित होती है ।

(iii) यदि विषमता गुणांक का मान धनात्मक है तो विषमता धनात्मक होती है ।

(iv) यदि विषमता गुणांक का मान ऋणात्मक है तो विषमता ऋणात्मक होती है ।

उदाहरण संख्या -1

समान्तर माध्य, बहुलक और प्रमाप विचलन निकालकर कार्ल पियर्सन के विषमता गुणांक निकालिए:

माप	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
आवृत्ति	10	12	18	25	16	14	5

हल

कल्पित माध्य = A=35

माध्य = $A + \frac{\sum fdx}{N}$

प्रमाप विचलन = $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2}$

बहुलक = $M_0 = I_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}(I_2 - I_1)$

माप X	मध्य बिन्दु X	आवृत्ति f	dx(x-35)	Fdx	dx^2	fdx^2
0-10	5	10	-30	-300	900	9000
10-20	15	12	-20	-240	400	4800
20-30	25	18	-10	-180	100	1800
30-40	35	25	0	0	0	0

40-50	45	16	10	+160	100	1600
50-60	55	14	20	+280	400	5600
60-70	65	5	30	+150	900	4500
		100		-130		27300

माध्य $\overline{X} = A + \frac{\sum fdx}{N} = 35 - 1.3 = 33.7$

प्रमाप विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left(\frac{\sum fdx}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{27300}{100} - \left(\frac{-130}{100}\right)^2}$

$= \sqrt{273 - 1.69 = 16.47}$

अधिकतम आवृत्ति (25) वाला वर्गान्तराल अर्थात बहुलक का वर्गान्तराल (30-40) है ।

$$Z = 30 + \frac{25-18}{2 \times 25 - 18 - 16}(40-30) = 34.38$$

- **कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक**

$J = \frac{\overline{X} - Z}{\sigma} = \frac{33.734.8}{16.47}$

$= 0.04$

उदाहरण संख्या - 2

निम्न प्राप्तांकों के आधार पर कार्ल पियर्सन की रीति द्वारा विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए-

आकार	58	59	60	61	62	63	64	65
आवृति	10	18	30	42	35	28	16	8

हल

आकार (x)	आवृति (f)	dx(x-61)	Fdx	$(dx)^2$	$F(dx)^2$
58	10	-3	-30	9	90
59	18	-2	-36	4	72
60	30	-1	-30	1	30
61	42	0	0	0	0
62	35	1	35	1	35
63	28	2	56	4	112
64	16	3	48	9	144
65	8	4	32	16	128
	$\sum f = 187$	$\sum fdx = 75$			$\sum fdx^2 = 611$

माध्य **=** $A + \frac{\sum fdx}{n}$ A=**काल्पनिक माध्य** = 61

$= 61 + \frac{75}{187} = 61 + 0.4 = 61.4$

प्रमाप विचरण $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{n} - \left(\frac{\sum fdx}{n}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{611}{187} - \left(\frac{75}{187}\right)^2} = \sqrt{3.27 - 0.16}$$

$$= \sqrt{3.11 - 1.76}$$

श्रेणी में अधिकतम आवृत्ति 42 है और यह आकार 61 से सम्बन्धित है अत: बहुलक Z=61

कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक-

$$J = \frac{\overline{X} - Z}{\sigma} = \frac{61.4 - 61}{1.76} = \frac{0.4}{1.76}$$

$$= 0.23$$

7.4.2 विषमता का द्वितीय माप अथवा बाउले का विषमता गुणांक

विषमता का द्वितीय माप विषमता के तृतीय परीक्षण पर आधारित है, जिसके अनुसार एक सममितीय वितरण में चतुर्थकों की जोड़ी (अर्थात Q_1 एवं Q_3) मध्यिका से समान दूरी पर होगी । अत: श्रेणी में विषमता की मात्रा, दो चतुर्थकों के योग से दो मध्यिका का अन्तर होगा । इसके गुणांक ज्ञात करने के लिए, इसे दो चतुर्थकों के अन्तर से भाग दिया जाता । है ।

प्रो0 बाउले ने चतुर्थकों पर आधारित विषमता के सूत्र का प्रतिपादन किया था। इसी कारण से इसे बाउले का विषमता गुणांक भी कहते हैं।

सूत्र -

(i) **विषमता का द्वितीय माप** $S_{K\,Q} = (Q_3 - M) - (M - Q_1)$

$$= S_{K\,Q}(Q_3 + Q_1 - 2M)$$

(ii) बाउले का विषमता गुणांक $J_Q = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (MQ_1)}$

$$J_Q = \left(\frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}\right)$$

उदाहरण संख्या - 3

निम्न श्रेणी में चतुर्थक विचलन गुणांक व विषमता गुणांक की गणना कीजिए -

अंक	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
विद्यार्थियों की संख्या	2	9	11	14	20	24	20	16	5	2

हल-

अंक (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
विद्यार्थियों की संख्या (f)	2	9	11	14	20	24	20	16	5	2	123
संचयी बारम्बारता (cf)	2	11	22	36	56	80	100	116	121	123	

मध्यिका $M_d = \left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद $= \left(\frac{123+1}{2}\right)$ वाँ पद

=62 वाँ पद = 6

$Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ वाँ पद $= \left(\frac{123+1}{4}\right)$ वाँ पद का मूल्य

=31 वाँ पद = 4

$Q_3 = \frac{3(n+1)}{4}$ वाँ पद = 93 वाँ पद का मूल्य = 7

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \frac{7-4}{7+4} = \frac{3}{11} = 0.27$

बाउले का विषमता गुणांक $= \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$

$J_Q = \frac{7+4-(2\times6)}{7-4} = \frac{11-12}{3}$

$J_Q = \frac{-1}{3} = J_Q = -0.33$

उदाहरण संख्या - 4

निम्नलिखित आकडों से बाउले का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए -

भार (से अधिक)	40	50	60	70	80	90
व्यक्तियों की संख्या	185	167	132	84	38	12

हल : संचयी आवृत्ति को सामान्य आवृत्ति वितरण में बदलना होगा।

भार (x)	व्यक्तियों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (cf)
40.50	18 (=185-167)	18
50-60	35 (=167-132)	53
60-70	48 (=132-84)	101
70-80	46 (=84-38)	147
80-90	26 (=38-12)	173
90 से अधिक	12	185
	185	

मध्यिका $M = \left(\frac{n}{2}\right)$ वाँ पद का मूल्य

$= \left(\frac{185}{2}\right)$ वाँ पद = 92.5 वाँ पद जो 60-70 वर्गान्तराल है।

$M = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{f_1}\left(\frac{n - C}{2}\right)$

L_1= 60 L_2 = 70

f_1 = 48 m = 92.5

C= 53

$$= 60 + \left(\frac{70-60}{48}\right)(92.5-53)$$

$$= 60 + \frac{10}{48} \times 39.5 = 60 + 8.23 =$$ मध्यका (M) = 68.23

$Q_1 = \left(\frac{n}{4}\right)$ वाँ पद = वाँ पद = 46.25 वाँ पद जो 50-60 वर्गान्तराल में है।

$$Q_1 = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{F_1}\left(\frac{n}{4} - C\right)$$

$$= 50 + \frac{60-50}{35}(46.25-18)$$

$$= 50 + \frac{10}{35} \times 28.25 = 50 + 8.70 Q = 58.07$$

$$Q_3 = 3\left(\frac{n}{4}\right)$$

वाँ पद = 138.7 वाँ पद जो 70-80 वर्गान्तराल में होगा।

$$Q_3 = L_1 + \frac{L_2 - L_1}{F_1}\left(\frac{n}{4} - C\right)$$

$$= 70 + \left(\frac{80-70}{46}\right)(138.75-101) Q_3 = 78.21$$

बाउले का विषमता गुणांक

$$J_Q = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1} = \frac{78.21 + 58.07 - (2 \times 68.23)}{78.21 - 58.07}$$

$$= \frac{136.28 - 136.46}{20.14} = -0.009$$

7.4.3 विषमता का तृतीय माप

विषमता का तृतीय माप घनमूल तथा घनों की सहायता से निकाला जाता है। यहाँ पर तृतीय घात को आधार मानकर मानक विचलन से विभाजित किया जाता है । इसका प्रयोग व्यवहारिक रूप से न्यून है। विषमता के तृतीय माप के निम्न सूत्र है :

(i) $$S_{k3} = 3\sqrt{\frac{\sum dx3}{N}} = 3\sqrt{\frac{(x-\overline{X})^3}{N}}$$

यह विषमता गुणांक आघूर्णों पर आधारित है अत: इसे कहते हैं -

(ii) आघूर्ण विषमता गुणांक $$= 3\sqrt{\frac{\sum dx3}{N}}\sigma = \frac{m_3}{\sigma^3}$$

(iii) विच्छिन व अविच्छिन श्रेणी के लिए $$S_{k3} = 3\sqrt{\frac{\sum fdx3}{N}}$$

(iv) **आघूर्ण विषमता गुणांक**

$$= \sqrt[3]{\frac{\sum fdx^3}{\frac{N}{\sigma}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\sum f(x-\overline{x})}{\frac{N}{\sigma}}} = \frac{m_3}{\sigma^3}$$

$$m_3 = \frac{\sum f(x-\overline{x})^3}{N}$$

उदाहरण संख्या - 5

निम्न आवृत्ति वितरण के लिए आघूर्ण विषमता गुणांक की गणना कीजिए -

वर्गान्तर	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20
आवृत्ति	1	3	12	8	6

हल

वर्गान्तर	मध्य बिन्दु (x)	आवृत्ति (f)	(X- $\bar{X}$)	$(x-\overline{X})^2$	$(x-\overline{X})^3$	$(x-\overline{X})^2$	$f(x-\overline{X})^3$
0-4	2	1	-10	100	-1000	100	-1000
4-8	6	3	-6	36	-216	108	-648
8-12	10	12	-2	4	-8	48	-96
12-16	14	8	+2	4	8	32	64
16-20	18	6	+6	36	216	216	1296
		30				504	-384

प्रमाप विचलन

$$= \sigma\sqrt{\frac{f(X-\overline{X})^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{504}{30}} = 4.06$$

$$m_3 = \frac{\sum f(x-\overline{x})^3}{N}$$

$$= \frac{-384}{30} = -12.8$$

आघूर्ण विषमता गुणांक $= \frac{m_3}{\sigma^3}$

$$= \frac{-12.8}{(4.06)^3}$$

आघूर्ण विषमता गुणांक के अनुसार आवृति वक्र की विषमता ऋणात्मक है।

बोध प्रश्न -3

1. विषमता के विभिन्न मापों को समझाइए?

2. विषमता तथा विषमता गुणांक पर टिप्पणी लिखिये?

3. निम्नलिखित आँकडों में कार्ल पियर्सन विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए -

वर्ग	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
आवृत्ति	2	5	7	13	21	16	8

4. निम्न आकड़ों का बाउले का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए -

   3 विद्यार्थियों को प्रत्येक को 3 अंक प्राप्त होतें हैं

   5 विद्यार्थियों को प्रत्येक को 5 अंक प्राप्त होतें हैं

   8 विद्यार्थियों को प्रत्येक को 7 अंक प्राप्त होतें हैं

   6 विद्यार्थियों को प्रत्येक को 8 अंक प्राप्त होतें हे

   2 विद्यार्थियों को प्रत्येक को 10 अंक प्राप्त होतें हैं

5. चतुर्थकों पर आधारित विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए -

अंक	55-58	58-61	61-64	64-67	67-70
विध्यार्थियों की संख्या	20	22	25	13	7

7.5 सारांश (Summary)

प्रस्तुत इकाई विषमता की माप पर आधारित है। यदि कोई आवृत्ति वितरण केन्द्रीय मान के दोनों ओर सममित है अर्थात केन्द्रीय मान के दोनों ओर प्रवृत्ति वक्र का आकार एक-सा है तो हम आवृत्ति वक्र को पूर्णतया सममित कहेंगे - इसके विपरीत यदि आवृत्ति वक्र केन्द्रीय मान के दोनों ओर सममित नहीं है तो हम ऐसे आवृत्ति वक्र को विषम कहते है और तत्सम्बन्धित आवृत्ति वितरण को विषम आवृत्ति वितरण कहते हैं। यदि आवृत्तियों का संकेन्द्रण केन्द्रीय मान के बायीं ओर है अर्थात यदि वितरण में अधिकांश मूल्यों का परिमाण केन्द्रीय मान से कम है तो हम ऐसे वितरण को ऋणात्मक विषमता वाला कहेंगे। इन अवधारणाओं को चित्रों के माध्यम से स्पष्ट किया गया है। इसके अतिरिक्त विषमता गुणांकों का विस्तृत अध्ययन इकाई में समाहित है। कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक, बाउले का विषमता गुणांक एवं आघूर्णों पर आधारित विषमता गुणांक की चर्चा इकाई में की गई है।

7.6 शब्दावली (Glossary)

विषमता की माप	- Measure of Skewness
सममित	- Symmetric
विषम	- Skewed
विषमता गुणांक	- Coefficient of Skewness
बहुलक	- Mode (Z)

माध्य	- Mean $(\overline{X})$
मध्यिका	- Median (M)
कार्ल पियर्सन विषमता गुणांक	- Karl Pearson's Coefficient of Skewness
बाउले का विषमता गुणांक	- Bowley's Coefficient of Skewness
चतुर्थक विषमता गुणांक	- Quartile Coefficient of Skewness
आघूर्णों का विषमता गुणांक	- Moments Coefficient of Skewness
विच्छिन्न श्रेणी	- Discrete Series
अविच्छिन्न श्रेणी	- Continuous Series

7.7 सन्दर्भ ग्रन्थ (References)

Agarwal D.R., (2005), "Quantitative Methods". Vrinda Publications Ltd., Delhi.

Monga, G.S., (1999), "Mathematics and Statistics for Economics", Vikas Publishing House Pvt. Ltd., New Delhi.

Singh S.P., (1998), "सांख्यिकी : सिद्धान्त एवं व्यवहार", S. Chand & Com. Pvt. Ltd., New Delhi.

Rai Ramendu, (2006), "सांख्यिकी के सिद्धान्त" Indian Press Publications Pvt. Ltd., Allahabad.

Goon A.M., Gupta, M.K., Das Gupta, B., "Fandamentals of Statistics- Vol- I", The World Press Calcutta.

Bajpai, O.P., "Foundations of Statistics", Asia Publishing House, Bombay.

शुक्ला एवं सहाय : सांख्यिकी के सिद्धान्त",, साहित्य भवन, आगरा।

7.8 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit- end Question)

1. माध्य, अपकिरण तथा विषमता किसी भी आवृत्ति वितरण के समझने में एक-दूसरे के पूरक हैं । इस कथन को स्पष्ट कीजिए।
2. विषमता को परिभाषित कीजिए। 'अपकिरण तथा विषमता में भेद स्पष्ट कीजिए।
3. विषमता को मापने की विधियाँ लिखिए।
4. विषमता एवं परिघात के बीच सम्बन्ध को समझाइये।
5. सांख्यिकी में विषमता के माप के अध्ययन के महत्व पर प्रकाश डालिए।

इकाई - 08

सहसम्बन्ध - कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक (असमूहित समंक)

(Correlation- Karl Pearson's Coefficient of Correlation) (Ungrouped Data)

इकाई की रूपरेखा

8.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप:

- द्विचर सारणियों के बीच आपसी सम्बन्ध ज्ञात करने हेतु कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक की गणना करना सीख सकेंगे;
- जान सकेंगे कि स्पियरमैन कोटि सहसम्बन्ध गुणांक कैसे ज्ञात किया जाता है;
- सहसम्बन्ध के अर्थ एवं परिभाषा को समझने के योग्य हो सकेंगे।

8.1 प्रस्तावना (Introduction)

आर्थिक क्षेत्र में हमारा सामना ऐसे चरों से होता है जिनमें आपस में सम्बन्ध पाया जाता है अर्थात दो चर या तो एक साथ एक दिशा में घटित होते है अथवा अलग-अलग दिशा में क्रियाशील होते हैं। अर्थशास्त्रियों की रूचि सदैव यह जानने की होती है कि अध्ययन के लिए प्रयोग में लिए जा रहे दो चरों के बीच सम्बन्ध कैसा है एवं किस स्तर का है। इस इकाई में हम यह अध्ययन करेंगे कि सहसम्बन्ध किसे कहते हैं एवं यह किस प्रकार ज्ञात किया जाता है। सहसम्बन्ध ज्ञात करने की सबसे लोकप्रिय एवं सर्वाधिक उपयोग में ली जाने वाली कार्ल पियर्सन विधि का हम इस इकाई में विस्तार से अध्ययन करेंगे ।

8.2 अर्थ एवं परिभाषा (Meaning and Definitions)

सहसम्बन्ध एक विवरणात्मक सांख्यिकी माप है, जो दो चरों के मध्य पाये जाने वाले सम्बन्ध की मात्रा का विवरण देता है । सहसम्बन्ध एक सांख्यिकीय तकनीक है जो यह मापती है कि दो चर या तथ्य एक दूसरे के संदर्भ में किस सीमा तक परिवर्तित होते हैं।

प्रो. एल. आर. कोनर (L. R. Connor) के अनुसार, "जब दो या अधिक राशियाँ सहानुभूति में परिवर्तित है, जिससे एक में होने वाले परिवर्तन के फलस्वरूप दूसरी राशि में भी परिवर्तन होने की प्रवृत्ति पायी जाए तो दे राशियाँ सहसम्बन्धित कहलाती हैं। "प्रो. किंग (King) के शब्दों में, 'सहसम्बन्ध का अर्थ है कि आकडों की दो श्रेणियों अथवा समूहों में कुछ कारण एवं परिणाम का सम्बन्ध है।"

प्रो. डेवनपोर्ट (Davenport) के मत के अनुसार, 'सहसम्बन्ध का सम्पूर्ण विषय पृथक विशेषताओं के मध्य पाये जाने बाले उस पारस्परिक सम्बन्ध की ओर संकेत करता है, जिसके अनुसार वे कुछ अंशों में साथ-साथ होने की प्रवृत्ति रखते हैं।

अत: सहसम्बन्ध सांख्यिकीय तकनीक के माध्यम से दो चरों के मध्य अन्तर निर्भरता का अध्ययन करता है । जैसे मूल्य तथा मांग के बीच यह देखने को मिलता है कि जब किसी वस्तु का मूल्य बढ़ता है, तब सामान्यत: उसकी मांग में कमी होती है या उत्पादन और रोजगार के बीच यह देखने को मिलता है कि सामान्यत: जब उत्पादन की मात्रा बढ़ती है, रोजगार का स्तर भी बढ़ता है । इसी प्रकार दो चरों के बीच अन्तर निर्भरता की माप सहसम्बन्ध द्वारा की जाती है।

8.3 सहसम्बन्ध के कारण (Causes of Correlation)

दो चरों के बीच सहसम्बन्ध विद्यमान होने के निम्नलिखित कारण हो सकते हैं:

(1) जब एक चर स्वतन्त्र हो तथा दूसरा चर आश्रित हो क्योंकि वह स्वतन्त्र चर के परिवर्तनों से प्रभावित होता है, जैसे वर्षा और कृषि उत्पादन के मध्य सहसम्बन्ध ज्ञात करने से स्पष्ट होता है कि कृषि उत्पादन वर्षा से प्रभावित होता है, लेकिन उत्पादन का वर्षा पर कोई प्रभाव नहीं पडता।

(2) जब दोनों चर एक दूसरे पर आश्रित हो या एक दूसरे पर प्रतिक्रिया करते हों । उदाहरणार्थ किसी वस्तु की माँग और कीमत के बीच सम्बन्ध।

(3) दो चर, किसी तीसरे चर से प्रभावित हों या किन्हीं बाहरी प्रभावों के कारण आपस में घनिष्ठ रूप से सहसम्बन्धित हों । उदाहरण स्वरूप उत्पादन और पूँजी की मात्रा के बीच घनिष्ठ

सहसम्बन्ध, कुशल श्रम, उच्च तकनीकी का प्रयोग, कच्चे माल की उपलब्धता आदि अन्य बाह्य कारकों के कारण हो सकता है।

(4) कभी-कभी संयोगवश भी दो चरों के मध्य घनिष्ठ सहसम्बन्ध पाया जा सकता है, जबकि उनके बीच किसी प्रकार

(5) का भी कारण-परिणाम सम्बन्ध न हो। जैसे देश में कपास का उत्पादन और कोयले के मूल में एक साथ वृद्धि होती है, तो दोनों श्रेणियों में सहसम्बन्ध होने पर भी यह निरर्थक सहसम्बन्ध होगा ।

8.4 सहसम्बन्ध के अध्ययन का महत्व (Importance of the study of Correlation)

सांख्यिकीय विश्लेषण में सहसम्बन्ध बहुत महत्वपूर्ण योगदान देता है, इसके महत्व को निम्न प्रकार से स्पष्ट किया जा सकता है:

(i) सहसम्बन्ध तकनीकी की सहायता से दो या दो से अधिक चरों के मध्य पाए जाने वाले सम्बन्धों के परिणाम को एक अंक में मापा जा सकता है।

(ii) सहसम्बन्ध विश्लेषण आर्थिक व्यवहार को समझने में महत्वपूर्ण योगदान देता है। उन महत्वपूर्ण चरों, जिन पर अन्य चर निर्भर करते हैं, को खोजने में सहायक होता है। इससे नीति निर्धारण में और अर्थव्यवस्था में स्थिरता लाने में सहायता मिलती है।

(iii) प्रतिपगमन एवं विचरण-अनुपात के विचार सहसम्बन्ध के माप पर ही निर्भर है।

(iv) सहसम्बन्ध के द्वारा उत्पादन के विभिन्न साधन और उत्पादित वस्तुओं के मूल्य के साथ सम्बन्ध स्थापित किया जाता है।

(v) सहसम्बन्ध विश्लेषण पर आधारित पूर्वानुमान या भविष्यवाणी अधिक विश्वसनीय एवं वास्तविकता के निकट होते हैं।

(vi) प्रसिद्ध संख्याशास्त्री गाल्टन ओर पियर्सन (Galton & Pearson) ने सहसम्बन्ध तकनीकी की सहायता से प्राणिशास्त्र (Biology) तथा जनन-विद्या (Genetics) की अनेक समस्याओं का विवेचन किया।

इस प्रकार, सहसम्बन्ध विश्लेषण व्यावहारिक जीवन बहुत महत्वपूर्ण है। इसके उपयोग भौतिक एवं सामाजिक विज्ञान दोनों में बहुत व्यापक रूप से होता है।

8.5 सहसम्बन्ध के प्रकार (Types of Correlation)

दो चरों के मध्य सम्बन्ध होने पर उनके परिवर्तन की दिशा, अनुपात आदि के आधार पर सहसम्बन्ध निम्नलिखित प्रकारों का हो सकता है:

(1) **धनात्मक अथवा ऋणात्मक सहसम्बन्ध** यदि एक चर का मूल्य बढ़ने पर दूसरे संबद्ध चर का भी मूल्य बढ़े या एक चर का मूल्य घटने पर, दूसरे चर का मूल्य घटे तो ऐसा सहसम्बन्ध धनात्मक होता है। कमी-कभी एक चर-मूल्य के घटने पर दूसरा चर मूल्य बढ़ता है या उस चर-मूल्य के बढ़ने पर दूसरे चर-मूल्य में कमी आती है, तो इस प्रकार के सहसम्बन्ध को विलोम या ऋणात्मक सहसम्बन्ध कहते हैं। जैसे - मूल्य और माँग के बीच सम्बन्ध।

(2) **सरल आंशिक या बहु गुणी सहसम्बन्ध** जब केवल दो चर मूल्यों के बीच सहसम्बन्ध पाया जाता है, तो उसे सरल सहसम्बन्ध कहते हैं । आंशिक सहसम्बन्ध में कुल सहसम्बन्ध में शामिल अन्य तत्वों को स्थिर मान कर केवल दो चरों के बीच सहसम्बन्ध मापा जाता है, जबकि कुल सहसम्बन्ध में आश्रित चर में प्रभाव डालने वाले सभी स्वतन्त्र चरों को विचार में लिया जाता है । इसी को बहगुणी सहसम्बन्ध भी कहा जाता है, विशेषकर के जब तीन या अधिक चर मूल्यों के मध्य पारस्परिक सम्बन्ध का अध्ययन किया जाता है ।

(3) **रेखीय या अरेखीय सहसम्बन्ध** जो दो चर मूल्यों के बीच परिवर्तन समान अनुपात में होता है, तो उसे रेखीय सहसम्बन्ध कहते हैं । यदि इन चर मूल्यों को ग्राफ पर दर्शाया जाए, तो यह एक सीधी रेखा के रूप में होगा। लेकिन जब दो चर मूलों की श्रेणी में परिवर्तन का अनुपात समान नहीं रहता, तो उन समंकों को ग्राफ पेपर पर दर्शाने पर वक्र रेखा बन जाती है । इस प्रकार के सहसम्बन्ध को अरेखीय सहसम्बन्ध कहा जाता है ।

8.6 सहसम्बन्ध की माप (Measurement of Correlation)

दो चरों के बीच पारस्परिक सम्बन्ध की मात्रा का माप सहसम्बन्ध गुणांक के अंकात्मक मूल्य द्वारा किया जाता है। यह सहसम्बन्ध गुणांक -1 एवं +1 की सीमाओं के अन्तर्गत पाया जाता है । सहसम्बन्ध गुणांक के आधार पर सहसम्बन्ध की मात्रा का निर्धारण निम्न प्रकार से किया जा सकता है :-

(i) **पूर्ण सहसम्बन्ध** जब दो सम्बन्धित चरों में पूर्णतया समान अनुपात में परिवर्तन होता है, तब उनमें पूर्ण सहसम्बन्ध पाया जाता है । जब यह समान आनुपातिक सहसम्बन्ध एक ही दिशा में दोनों चरों में होता है, तब इसे पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध कहा जाता है । इसके विपरीत, जब दो चरों में समान अनुपातों में परिवर्तन विपरीत दिशाओं में होते हैं. तब इन चरों के मध्य पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध होता है। पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध +1 एवं पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध का गुणांक -1 होता है।

(ii) **सीमित सहसम्बन्ध** यदि दो चरों के मध्य असमान परिवर्तन एक ही दिशा में होते हैं, तो उसे सीमित धनात्मक सहसम्बन्ध होता है और यदि दो चरों के मध्य असमान परिवर्तन विपरीत दिशा में होते हैं, तो सीमित ऋणात्मक सहसम्बन्ध होता है। यहाँ सहसम्बन्ध का गुणांक शून्य (0) और एक (1) के बीच में होता है।

(iii) **सहसम्बन्ध की अनुपस्थिति** जब दो चरों में अन्तरनिर्भरता विद्यमान न हो या एक चर में परिवर्तन का दूसरे चर पर कोई प्रभाव न पडे, तो उन चरों के बीच सहसम्बन्ध का अभाव होता है । इसमें सहसम्बन्ध की मात्रा शून्य (0) होगी।

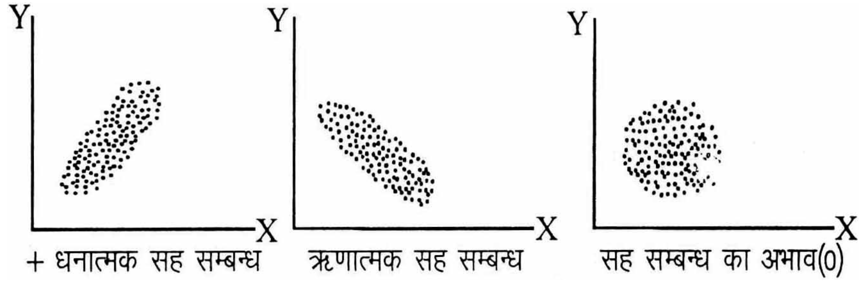
8.6.1 सहसम्बन्ध ज्ञात करने को बिन्दुरेखीय रीतियाँ

(Graphical Method of Calulation of Correlation)

दो चरों के मध्य सहसम्बन्ध की उपस्थिति, दिशा और मात्रा को ज्ञात करने के लिये बिन्दुरेखीय विधियाँ अपनायी जाती है- इसमें दो प्रकार की रीतियाँ अपनायी जाती हैं -

(i) **विक्षेप-चित्र अथवा बिन्दु चित्र (Scatter Diagram)** विक्षेप चित्र चरों के मध्य सहसम्बन्ध जानने की एक सरल ग्राफीय विधि है । इस विधि में स्वतन्त्र चर मूल्यों (x) को बिन्दुरेखीय पत्र के भुजाक्ष (X-axis) पर तथा तत्सम्बन्धित आश्रित चर मूल्यों (Y) को कोटि अक्ष (Y-axis) पर अंकित किया जाता है । X श्रेणी तथा Y श्रेणी से सम्बन्धित दो मूल्यों के लिये एक बिन्दु अंकित किया जाता है । बिन्दुरेखीय पत्र पर इस समस्त बिन्दुओं को अंकित करने से, उनकी प्रवृत्ति के आधार पर सहसम्बन्ध का अनुमान लगाया जाता है । यदि बिन्दुओं की एक निश्चित दिशा की ओर जाने की प्रवृत्ति होती है, तब दोनो श्रेणियों के मध्य सहसम्बन्ध होता है । यदि बिन्दुओं के प्रवाह में बांये कोने से दाहिनी ओर उपर की तरफ बढ़ने की प्रवृत्ति हो तो दोनों चरो में धनात्मक सहसम्बन्ध होता है।

यदि बिन्दुओं के प्रवाह में बायीं ओर से दायीं तरफ नीचे की ओर होने की प्रवृत्ति होती है, तो दोनों चरों में ऋणात्मक सहसम्बन्ध होता है। यदि बिन्दुओं के प्रवाह से किसी दिशा का ज्ञान नहीं होता, बल्कि वे बिखरे हु ए रहते हैं, तो इससे दोनों चरों में सहसम्बन्ध का आभाव होता है । इन प्रवृत्तियों को निम्न रेखाचित्र - 8.1 में दर्शाया गया है:

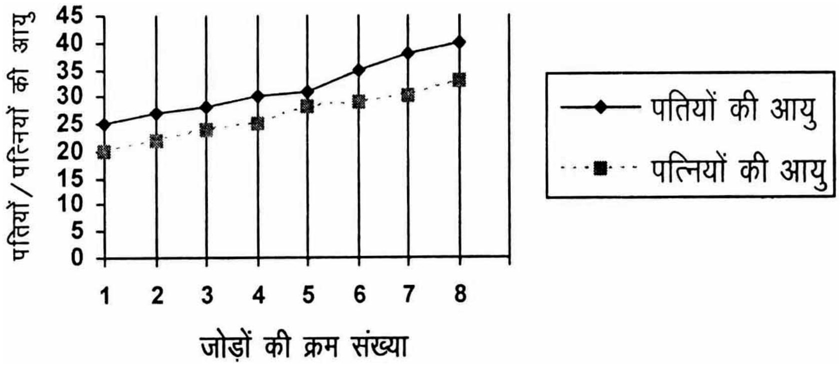


रेखाचित्र 8.1

इस विधि से सहसम्बन्ध की दिशा का ज्ञान होता है, लेकिन इसकी गणितीय माप नहीं प्राप्त होता।

(ii) **बिन्दु रेखीय विधि (Graphic Method)** बिन्दुरेखा द्वारा भी दो चर मूल्यों के बीच सहसम्बन्ध की दिशा और मात्रा का अनुमान लगाया जा सकता है । दोनों श्रेणियों को बिन्दुरेखीय प्रपत्र पर अंकित करके दोनो वक्रों की प्रवृत्ति और निकटता के आधार पर उनके मध्य विद्यमान सहसम्बन्ध का अनुमान लगाया जा सकता है । यदि दोनो वक्र समान्तर हों और बायीं ओर से उठकर दायीं ओर ऊपर की ओर जाते हों तो उन घरों के मध्य धनात्मक सहसम्बन्ध होता है । यदि दोनों वक्र विपरीत दिशाओं में हो, तो उनमें ऋणात्मक सहसम्बन्ध होता है । दोनो वक्रों के उच्चावचन की प्रवृत्ति जितनी समान होगी, सहसम्बन्ध की मात्रा उतनी ही अधिक होगी । इससे सहसम्बन्ध की निश्चित मात्रा का पता नहीं चलता । बिन्दुरेखीय रीति से निम्न समंकों की सहायता से पतियों आयु और पत्नियों की आयु के बीच सहसम्बन्ध को देखेगें :- -

जोड़ों की क्रम संख्या (Serial number of Couples)	1	2	3	4	5	6	7	8
पतियों की आयु (Husband's age)	25	27	28	30	31	35	38	40
पत्नियों की आयु (Wife's age)	20	22	24	25	28	29	30	33



रेखाचित्र 8.2

8.6.2 गणितीय रीतियां (Mathematical method)

(i) काल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक

सहसम्बन्ध ज्ञात करने की सर्वाधिक तर्कपूर्ण एवं वैज्ञानिक विधि का प्रतिपादन कार्ल पियर्सन ने सन् 1890 में किया था। इस रीति के द्वारा सहसम्बन्ध की दिशा व मात्रा का अनुमान ही नहीं, वरन् उसका संख्यात्मक माप भी प्राप्त होता है। कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक की प्रमुख विशेषताएँ इस प्रकार है :

(a) इस विधि से सहसम्बन्ध की दिशा का स्पष्ट ज्ञान हो जाता है । यदि गुणांक का मान धनात्मक (+) में प्राप्त होता है, तो सहसम्बन्ध धनात्मक होता है। लेकिन यदि यह मान ऋणात्मक (-) में प्राप्त होता है, तो सहसम्बन्ध ऋणात्मक होता है।

(b) सहसम्बन्ध गुणांक का मान सदैव +1 और -1 के बीच में रहता है, यह सहसम्बन्ध कीं मात्रा की जानकारी देता है । सहसम्बन्ध गुणांक +1 होने पर दोनों श्रेणियों में पूर्ण धनात्मक तथा -1 होने पर दोनों श्रेणियों में पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध पाया जाता है । यदि गुणांक (0) है, तो दोनो श्रेणियों में सहसम्बन्ध का आभाव होता है । जैसे गुणक का मान 0 से 1 की ओर बढ़ता जाता है, सहसम्बन्ध का परिमाण भी बढ़ता जाएगा

(c) कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक को श्रेष्ठ तथा संतोषजनक गणितीय माप माना गया है, क्योंकि यह समान्तर माध्य और प्रमाप विचलन पर आधारित हैं, जिनका बीजगणितीय विश्लेषण सम्भव हैं।

(d) सहसम्बन्ध गुणांक सह-विचरण के माप का गुणांक होता है । सह-विचरण, चर मूल्यों के माध्य से उनके विचलनों के गुणनफलों का माध्य होता है।

8.6.3 कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की विधियाँ

(i) **प्रत्यक्ष विधि** यदि श्रेणियों का माध्य पूर्णाक में प्राप्त होता है, तो प्रत्यक्ष विधि का प्रयोग किया जा सकता है। इस विधि से सहसम्बन्ध गुणांक प्राप्त करने के लिये सर्वप्रथम दोनों श्रेणियों के समान्तर माध्य की गणना की जाती है । इसके पश्चात् श्रेणी के प्रत्येक मान से समान्तर माध्य का विचलन ज्ञात किया जाता है। अब इन विचलनों का वर्ग ज्ञात करते हैं और दोनों

श्रेणियों के विचलनों का भी आपस में गुणाकर उनका योग निकालते हैं। इसके पश्चात निम्न सूत्र उनका मान रखकर सहसम्बन्ध गुणाक (r) का मान प्राप्त किया जाता है:

$$r = \frac{\sum XY}{\sqrt{\sum X^2 \times \sum y^2}} \quad \text{अथवा} \quad r = \frac{\Sigma dxdy}{\sqrt{\frac{\Sigma d^2 x}{N}} \times \sqrt{\frac{\Sigma d^2 y}{N}}}$$

इस सूत्र में - r = सहसम्बन्ध गुणांक

जहाँ या $\sum dxy = x$ तथा y समंक मालाओं के विचलनों के गुणनफलों का योग बताता है ।

N = पदों की संख्या

x^2, y^2 या $d^2x, d^2y = x$ और y श्रेणियों के विचलनों के वर्ग को बताते हैं ।

उदाहरण -1 निम्नलिखित तालिका में 8 विद्यार्थियों के गणित एवं खांख्यिकी के प्राप्ताँक दिये गये है । सहसम्बन्ध गुणांक द्वारा ज्ञात करो कि इनके बीच सहसम्बन्ध है या नहीं ।

गणित में अंक X	65	66	67	67	68	69	70	72
सांख्यिकी में अंक Y	67	68	65	68	72	72	69	71

गणना :

क्रम संख्या	X गणित में अंक	X=(X-X) विचलन X=6	X^2	Y सांख्यिकी में अंक	Y=(Y-$\bar{Y}$) विचलन $\bar{Y}$=69	Y^2	Xy
1.	65	-3	9	67	-2	4	6
2.	66	-2	4	68	-1	1	2
3.	67	-1	1	65	-4	16	4
4.	67	-1	1	68	-1	1	1
5.	68	0	0	72	3	9	0
6.	69	1	1	72	3	9	3
7.	70	2	4	69	0	0	0
8.	72	4	16	71	2	4	8
	$\sum X = 544$		$\sum x^2 = 36$	$\sum y = 552$		$\sum y^2 = 44$	$\sum xy = 24$

सर्वप्रथम X और Y का माध्य निकाला जाता है, जो कि निम्न प्रकार है-

सूत्र एवं $\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$ एवं $\overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N}$

या $\overline{X} = \frac{544}{8} = 68$ या $\overline{Y} = \frac{552}{8} = 69$

कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \times \sum y^2}}$$

$$r = \frac{24}{\sqrt{36 \times 44}}$$

$$= \frac{24}{\sqrt{1580}}$$

=+.603

निष्कर्ष - X एवं y चरों के बीच 0.603 सहसम्बन्ध गुणांक है, अर्थात् दोनों में उच्च धनात्मक सहसम्बन्ध है ।

(ii) **लघु विधि** यदि चरों के माध्य पूर्णांक में न होकर, दशमलव में होते हैं, तब सहसम्बन्ध के लिये विचलन निकालने और उसका वर्ग ज्ञात करने में बड़ी असुविधा होती है और चरों के मूल्यों की संख्या बडी होने पर भी इसकी गणना करने में कठिनाई होती है । इस असुविधा से बचने के लिये कार्ल पियर्सन ने लघु विधि का प्रतिपादन किया । इस विधि द्वारा सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्न प्रकार है-

x तथा y श्रेणियों में किसी सुविधाजनक मूल्यों को उनका कल्पित माध्य मान लिया जाता है। दोनों श्रेणियों के कल्पित माध्यों से उनके व्यक्तिगत चर मूल्यों के विचलन ज्ञात किये जाते हैं । उन विचलनों का योग किया जाता है। विचलनों के वर्ग किये जाते हैं और वर्गों को जोडा जाता है । दोनों श्रेणियों के विचलनों का गुणा करके उनका योग निकाला जाता है ।

- **कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक - (लघु रीति द्वारा)**

$$r = \frac{\sum dxdy - \frac{(\sum dx)(\sum dy)}{N}}{\sqrt{\sum d^2x\left(\frac{\sum dx}{2}\right)^2}\sqrt{\sum d^2y\left(\frac{\sum dy}{N}\right)^2}}$$

इस सूत्र में

dxdy = X में श्रेणी के विचलनों एवं Y श्रेणी के विचलनों का गुणा

dx = x श्रेणी के मूल्यों का कल्पित माध्य से विचलन,

dy = y श्रेणी के मूल्यों का कल्पित माध्य से विचलन,

d^2x = x श्रेणी के विचलनों का वर्ग,

d^2y = y श्रेणी के विचलनों का वर्ग,

N - पदों की संख्या

उदाहरण -2

X तथा X के निम्नलिखित समंकों से कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए-

X	23	27	28	29	30	31	33	35	36	39
Y	18	22	23	24	25	26	28	29	30	32

गणना -

X श्रेणी	कल्पित माध्य=30 से विचलन dx	d^2x	Y श्रेणी	कल्पित माध्य = 25 से विचलन dy	d^2y	$dx \times dy$
23	-7	49	18	-7	49	+49
27	-3	9	22	-3	9	+9
28	-2	4	23	-2	4	+4
29	-1	1	24	-1	1	+1
30	0	0	25	0	0	0
31	+1	1	26	+1	1	1
33	+3	9	28	+3	9	9
35	+5	25	29	+4	16	20
36	+6	36	30	+5	25	30
39	+9	81	32	+7	49	63
N=10	$\sum dx = +11$	$\sum d^2x = 215$		$\sum dy = +7$	$\sum d^2y = 163$	$\sum dxdy = 186$

अब निम्न सूत्र में मानों को रखकर गुणांक की गणना करेगें :

$$r = \frac{\sum dxdy - \frac{(\sum dx)(\sum dy)}{N}}{\sqrt{\sum d^2x \left(\frac{\sum dx}{2}\right)^2} \sqrt{\sum d^2y \left(\frac{\sum dy}{N}\right)^2}}$$

$$= \frac{861 - \frac{11 \times 7}{10}}{\sqrt{215 - \frac{(11)^2}{10}} \sqrt{163 - \frac{(7)^2}{10}}}$$

$$= \frac{178.3}{\sqrt{202.9 \times 158.1}}$$

$$= \frac{178.3}{\sqrt{32078.49}}$$

$$= \frac{178.3}{179.1} = + 0.99$$

निष्कर्ष : x तथा y श्रेणी के मध्य उच्च स्तर का धनात्मक सहसम्बन्ध है ।

- **कार्ल पियर्सन के सहसम्बन्ध गुणांक कीं सीमाएँ**

पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणक दो चरों के मध्य सहसम्बन्ध की दिशा तथा मात्रा दोनों को ही बताता है, लेकिन इस माप की कुछ सीमाएँ भी हैं, जो इस प्रकार है.

(1) सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने में यह मान्यता होती है कि विचारगत दो घरों के मध्य रेखीय सम्बन्ध है, चाहे इस प्रकार का सम्बन्ध वास्तव में हो अथवा नहीं ।

(2) गुणक का मान चरम मूल्यों से अधिक प्रभावित होता है ।

(3) गणन क्रिया जटिल एवं समय लगाने वाली है ।

(4) गुणक का माप +1 एवं -1 के मध्य में होना चाहिये । सहसम्बन्ध गुणक के त्रुटिपूर्ण निर्वचन की सम्भावना रहती

8.7 स्पियरमैन का कोटि सहसम्बन्ध गुणांक

प्रो. चार्ल्स स्पियरमैन ने सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिये अपनी विधि 1904 ई. में प्रस्तुत की यह तुलनात्मक रूप से कार्ल पियर्सन सहसम्बन्ध की विधि की अपेक्षा अधिक सरल है । स्पियरमैन ने चरों के बीच सहसम्बन्ध स्थापित करने के लिये पदों की कोटि प्रदान कर उनके अन्तर के आधार पर सहसम्बन्ध ज्ञात करने की विधि प्रस्तुत की जिसे स्पियरमैन कोटि अन्तर विधि कहा जाता है । इस रीति का उपयोग उस दशा में किया जाता है, जबकि

(1) पदों की विशेषता की संख्यात्मक माप सम्भव न हो लेकिन उनकों एक निश्चित क्रम में रखा जाना सम्भव हो जैसे सुन्दरता ईमानदारी आदि ।

(2) समंकों में अनियमितता हो या सीमान्त पद अस्पष्ट हो या उनके व्यवहार में असंगतता हो । क्रम पर आधारित सहसम्बन्ध वितरण के सामान्य होने की मान्यता पर आधारित नहीं होता।

इस विधि में सर्वप्रथम प्रत्येक श्रेणी के प्रत्येक पद मूल्य को एक निश्चित क्रम दिया जाता है, सबसे बड़े पद को प्रथम क्रम तथा उसके बाद वाले पद को द्वितीय क्रम दिया जाता है । यदि कोई पद एक से अधिक बार आता है, तो उनके क्रमों का माध्य शांत कर उसे वह क्रम प्रदान कर दिया जाता है । दोनों श्रेणियों के क्रमों को घटाकर उनका अन्तर $(R_1 - R_2) = D$ ज्ञात किया जाता और उसका वर्ग प्राप्त कर लिया जाता है. तत्पश्चात् अग्र सूत्र द्वारा सहसम्बन्ध ज्ञात किया जाता है

$$r_s = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}$$

यहाँ D = कोटि अन्तर

$\sum D^2$ = कोटि अन्तर के वर्गों का योग,

N = पद युग्मों की संख्या ।

उदाहरण -3 निम्नलिखित समंकों से स्पियरमैन कोटि अन्तर सहसम्बन्ध गुणांक का मान ज्ञात कीजिए:

X	50	60	65	70	75	40	70	80
Y	80	71	60	75	90	82	70	50

गणना -

S.N0.	X	R_1	Y	R_2	$D=(R_1-R_2)$	D^2
1.	50	7	80	3	4	16
2.	60	6	71	5	1	1
3.	65	5	60	7	-2	4
4.	70	3.5	75	4	-5	0.25

5.	75	2	90	1	1	1
6.	40	8	82	2	6	36
7.	70	3.5	70	6	-2.5	6.25
8.	80	1	50	8	-7	49
						113.50

उपयुक्त श्रेणी X में 70 अंक दो बार तीसरे एवं चौथे क्रम पर आया है, अत: इनका औसत निकालकर दोनों को 3.5 कोटि प्रदान की गई है ।

सूत्र- $$r_s = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 113.50}{8(64-1)}$$

$$= 1 - \frac{681}{504} = .35$$

निष्कर्ष : दोनों चरों में ऋणात्मक सहसम्बन्ध है ।

- स्पियरमैन के कोटि अन्तर सहसम्बन्ध गुणांक विधि में मुख्यत:: निम्न विशेषताएँ हैं -

(1) इसे सिर्फ कोटियों आधार ज्ञात किया जा सकता है । जबकि कार्ल पियर्सन सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिये पूर्व गणितीय सूचनाओं की आवश्यकता होती है ।

(2) इस विधि से कोटियों के अन्तर का जोड़ ($\sum D$) सदैव 0 प्राप्त होता है, जिससे इसकी गणना की शुद्धता की जाँच हो जाती है ।

(3) इस विधि द्वारा उन तथ्यों को भी मापा जा सकता है, जिसे मापने की कोई इकाई नहीं होती।

(4) यदि श्रेणी के आँकड़े अनियमित हो' तब भी इस विधि का प्रयोग किया जा सकता है ।

- इस विधि में कुछ कमियाँ भी हैं जो निम्न हैं.

(1) इस विधि का प्रयोग उसी स्थिति में सुविधाजनक होता है जहाँ पदों की संख्या कम हो। यदि पदों की संख्या अधिक होती है तो गणना का कार्य जटिल होगा ।

(2) इसका प्रयोग सिर्फ व्यक्तिगत श्रेणी में ही किया जाता है । खण्ड़ित श्रेणी या सतत श्रेणी में इसका प्रयोग नहीं किया जा सकता ।

8.8 सारांश (Summary)

पिछली इकाइयों में हमने केवल एक चर बाले बंटनों अथवा समंक मालाओं के स्वरूप की चर्चा की थी । इस इकाई में हमने दो घरों की समंक मालाओं की चर्चा की जैसे पतियों की आयु एवं पत्नियों की आयु दोनों चरों से मिलकर एक मूल्य युग्म बना । इसी प्रकार अन्य मूल्य युग्म हैं । अत: यह सारणी द्वि-चर (Bi-variate Series) कही जाती है । प्राय: दो घरों में आपसी सम्बन्ध पाया जाता है एवं यह बात एक सामान्य समझ वाला व्यक्ति भी जानता है । लम्बाई के साथ भार अधिक होगा। इस प्रकार दोनों घरों में परस्पर आश्रितता देखने को मिलती है । दोनों चर साथ-साथ बढ़ते हैं अथवा घटते हैं । दोनों चर विपरीत दिशाओं में परिवर्तित होते हैं जैसे एक बढ़े तो दूसरा घटता है । यह प्रवृत्ति ही सहसम्बन्ध है । प्रस्तुत इकाई में सहसम्बन्ध का अर्थ परिभाषा, प्रकार एवं महत्व की चर्चा की गई

है एवं इनकी गणना के लिए सर्वाधिक प्रचलित कार्ल पियर्सन के सूत्र को उदाहरण देकर समझाया गया है । इसके अतिरिक्त स्पियरमैन के कोटि सहसम्बन्ध गुणांक की गणना विधि की व्याख्या भी की गई है । यहाँ हमने केवल असमूहित समंकों की सरल समस्याओं को लिया है । विद्यार्थी सांख्यिकी की अन्य पुस्तकों को पढ़कर अधिक उदाहरणों को हल करें क्योंकि परीक्षा में सवाल कहीं से भी पूछे जा सकते हैं ।

8.9 शब्दावली (Glossary)

प्रतीपगमन	: Regression
विचरण अनुपात	: Ratio of Variation
आंशिक सहसम्बन्ध	: Partial Correlation
बहु गुणी सहसम्बन्ध	: Multiple Correlation
रेखीय	: Linear
आरेखीय	: Non-linear
सहसम्बन्ध का परिमाण	: Degree of Correlation
सह-विचरण	:Co-Variance
कोटि अन्तर विधि	: Rank Difference Method

8.10 सन्दर्भ ग्रन्थ (References)

डी. एन. एलहंस, "सांख्यिकी के सिद्धान्त"

शुक्ला एवं सहाय, "सांख्यिकी के सिद्धान्त"

प्रो. आर. एल. कुटारिया / सुरेश कुटारिया "उच्चतर सांख्यिकी

Gupta, S.C. and V.K. kapoor, "Fundamentals of Applied Statistics"

8.11 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Question)

1. सहसम्बन्ध से आप क्या समझतें हैं? धनात्मक एवं ऋणात्मक सहसम्बन्ध तथा सरल एवं बहु गुणीय सहसम्बन्ध में अन्तर स्पष्ट कीजिए ।
2. सहसम्बन्ध से क्या तात्पर्य है? सांख्यिकीय विश्लेषण में इसका महत्व बताइए ।
3. निम्नलिखित आँकड़ों से कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

छात्र (Students)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
अर्थशास्त्र के प्राप्तांक	78	36	98	25	75	82	90	22	65	32
10सांख्यिकी के प्राप्तांक	48	51	91	60	68	62	86	58	65	47

r= 0.68

4. निम्नलिखित आँकड़ों से x तथा y में सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

X	57	42	40	38	43	45	44	46	48	51
Y	10	25	30	41	21	17	19	16	15	12

5. निम्नलिखित आँकडों से कार्ल पियर्सन का सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

पति की आयु	25	26	27	28	30	32	35
पत्नि की आयु	20	22	24	25	26	27	34

6. विद्यार्थियों को एक परीक्षा में दो जजों ने निम्न रूप से क्रम प्रदान किये। कोटि अन्तर विधि से सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए :

पहला जज	3	4	8	5	7	10	2	1	6	9
दूसरा जज	6	5	9	8	1	2	3	10	4	7

r= 0.273

7. निम्नलिखित समंकों से कोटि सहसम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए -

X	58	60	62	64	66	64	70
Y	90	81	99	108	126	117	135

r=0.56

इकाई - 09

प्रतीपगमन विश्लेषण - असमूहित समंक

(Regression Analysis - Ungrouped Data)

इकाई की रूपरेखा

9.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप :

- प्रतीपगमन का अर्थ एवं इसकी परिभाषाओं से परिचित हो जाएंगें,
- समझ सकेंगें कि सहसम्बन्ध एवं प्रतीपगमन में क्या अन्तर है,
- प्रतीपगमन रेखाओं को ज्ञात करने के लिए गणना कर सकेगें;
- जान सकेगें कि प्रमाप विभ्रम कैसे ज्ञात किया जाता है ।

9.1 प्रस्तावना (Introduction)

प्रतीपगमन रेखाओं का आधुनिक युग में व्यापक उपयोग होता है । प्रतीपगमन के आधार पर सामाजिक, आर्थिक व व्यावसायिक क्षेत्रों में विभिन्न तथ्यों के मध्य-सम्बन्धों का विश्लेषण करके एक पद मूल्य से सम्बन्धित दूसरी श्रेणी का सर्वाधिक उपयुक्त मूल्य का अनुमान किया जा सकता है । इस इकाई में सर्वप्रथम आपको प्रतीपगमन का अर्थ एवं उसकी परिभाषा से परिचित कराया जाएगा । इसके बाद आप यह जान सकेगें कि सहसम्बन्ध व प्रतीपगमन में क्या अन्तर है? प्रतीपगमन की उपयोगिता की चर्चा करने के उपरान्त आपको दोनों प्रतीपगमन समीकरण रेखाओं को ज्ञात करने के सूत्रों को बताया गया है । उदाहरण देकर यह स्पष्ट किया गया है कि प्रतीपगमन के अज्ञात चरों का

निर्धारण किस प्रकार किया जाता है । इकाई के अन्त में सारांश, शब्दावली, संदर्भ ग्रन्थों की सूची व अभ्यासार्थ प्रश्न दिए गए हैं ।

9.2 प्रतीपगमन का अर्थ एवं परिभाषा (Meaning and Definition of Regression)

प्रतीपगमन शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम 1877 में सर फ्रांसिस गाल्टन ने अपने शोध लेख पैतृक उँचाई में मध्यमता की ओर प्रतीपगमन में किया था एवं यह निष्कर्ष निकाला था कि मानव जाति में सामान्य औसत ऊँचाई की ओर वापस जाने की प्रवृत्ति को प्रतीपगमन कहा जाता है । प्रतीपगमन विश्लेषण का उपयोग किसी भी श्रेणी के औसत सम्बन्ध के आधार पर पूर्वानुमान लगाने में किया जाता है । प्रतीपगमन तकनीक की सहायता से एक श्रेणी में एक निश्चित मात्रा में परिवर्तन होने पर दूसरी श्रेणी में होने वाले परिवर्तनों की सम्भावना का औसत ज्ञात किया जाता है । प्रतीपगमन की मुख्य परिभाषाएँ निम्न प्रकार हैं :

प्रो. वालिस एवं राबर्ट् के अनुसार, “प्राय: यह ज्ञात करना अधिक महत्वपूर्ण है कि दो चर मूल्यों में वास्तविक सम्बन्ध क्या है, जिससे कि एक चर का मूल्य ज्ञात होने पर दूसरे चर मूल्य (आश्रित चर) का अनुमान लगाया जा सके । ऐसा करने के लिये प्रयोग की जाने वाली उपयुक्त सांख्यिकीय तकनीक को प्रतीपगमन विश्लेषण कहते हैं ।

("It is often more important to find out what the relation actually is, in order to estimate or predict one variable (the dependent variable); and the statistical technique appropriate to such a case is called Regression Analysis” Wallis and Roberts)

प्रो. वार्नर जैड हिर्श का कहना है कि, “जहाँ सहसम्बन्ध विश्लेषण घनिष्ठता की जाँच करता है, जिसमें दो या अधिक घटनाएँ सम्मिलित की जाती हैं, वहीं प्रतीपगमन विश्लेषण इस सम्बन्ध की प्रवृत्ति एवं मात्रा की माप करके हमें भावी अनुमान लगाने में सहयोग देता है" या लुन चाऊ के अनुसार, “प्रतीपगमन विश्लेषण चरों के बीच सम्बन्ध की प्रकृति का निरूपण करने का प्रयास करता है - अर्थात् यह चरों में फलनात्मक सम्बन्ध का अध्ययन करता है और उनके बारे में भविष्यवाणी या पूर्वानुमान हेतु रचना तंत्र प्रस्तुत करता है ।"

इस प्रकार प्रतीपगमन तकनीक का प्रयोग उन समस्त क्षेत्रों में कर सकते हैं, जहाँ दो श्रेणियों में सामान्य माध्य की ओर जाने की प्रवृत्ति पायी जाती है । इससे भावी अनुमान लगाने में भी सहायता मिलती है ।

9.2.1 सहसम्बन्ध और प्रतीपगमन में अन्तर

दो चरों के बीच तथ्यों का विश्लेषण करने में सहसम्बन्ध और प्रतीपगमन दोनों ही महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं दोनों के बीच निम्नलिखित अन्तर है :

(1) **कारण परिणाम सम्बन्ध** चर मूल्यों के कारण और परिणाम के बीच विश्लेषण, सहसम्बन्ध द्वारा किया जा सकता है, परन्तु सहसम्बन्ध से यह ज्ञात नहीं होता है कि कौन सा कारण

हैं, और कौन सा परिणाम, परन्तु प्रतीपगमन विश्लेषण में स्पष्ट रूप से यह ज्ञात होता है कि स्वतन्त्र चर कारण होता है और परतन्त्र चर परिणाम होता है ।

(2) **परस्पर सम्बन्ध कीं मात्रा एवं प्रकृति** दो चरों के बीच सहसम्बन्ध की मात्रा का अनुमान सहसम्बन्ध विश्लेषण से किया जाता है, जबकि प्रतीपगमन की सहायता से स्वतन्त्र चर के औसत मूल्य के आधार पर आश्रित चर का औसत मूल्य ज्ञात किया जा सकता है, इससे चरों की प्रकृति का भी ज्ञान होता है ।

(3) **अर्थहीन सहसम्बन्ध** दो चरों के बीच सहसम्बन्ध अर्थहीन या संयोगवश हो सकता है, लेकिन प्रतीपगमन अर्थहीन नहीं होता ।

9.3 प्रतीपगमन विश्लेषण कीं उपयोगिता एवं महत्व (Uses of Importance of Regression Analysis)

प्रतीपगमन उन क्षेत्रों में अधिक उपयोगी होता है. जिन क्षेत्रों में एक चर दूसरे चर पर आश्रित रहता हूँ । इसके महत्वपूर्ण उपयोग निम्न प्रकार हैं -

(1) प्रतीपगमन विश्लेषण के द्वारा उपलब्ध स्वतन्त्र चर मूल्य के आधार पर आश्रित चर के सम्भावित मूल्य का अनुमान लगाया जा सकता है ।

(2) दो या अधिक चरों के मध्य कार्य-कारण सम्बन्ध ज्ञान करने के लिए प्रतीपगमन विश्लेषण उपयोगी होता है । इससे तथ्यों के वैज्ञानिक विश्लेषण में सहायता मिलती हैं ।

(3) प्रतीपगमन गुणांक की सहायता से सहसम्बन्ध गुणांक की गणना की जाती है । निर्धारण गुणांक (Co-efficient of Determination) की गणना के लिए प्रतीपगमन समीकरणों का प्रयोग किया जाता है ।

(4) प्रतीपगमन विश्लेषण, प्रतीपगमन रेखा में निहित विभ्रम को मापने में सहायक होता है ।

(5) प्रतीपगमन विश्लेषण का प्रयोग अर्थशास्त्र के अनेक क्षेत्रों में भावी अनुमान लगाने के लिये किया जाता है ।

9.4 प्रतीपगमन विश्लेषण के प्रकार (Types of Regression Analysis)

प्रतीपगमन विश्लेषण सामान्यत: निम्नलिखित प्रकार का हो सकता है -

(i) **रेखीय व अरेखीय प्रतीपगमन** दो परस्पर सम्बन्धित समंक मालाओं के चर मूल्यों को ग्राफ पर अंकित करने से जो बिन्दु मिलता है, उनको जोड़ने के जो दो 'सर्वोपयुक्त रेखाएँ बनती हैं, उन्हें ही प्रतीपगमन रेखाएँ कहा जाता है । जब ये रेखाएँ सीधी या सरल होती हैं, तब प्रतीपगमन रेखीय माना जाता हैं । जब ये रेखाएँ घुमावदार होती हैं, तो प्रतीपगमन अरेखीय या वक्ररेखीय माना जाता है ।

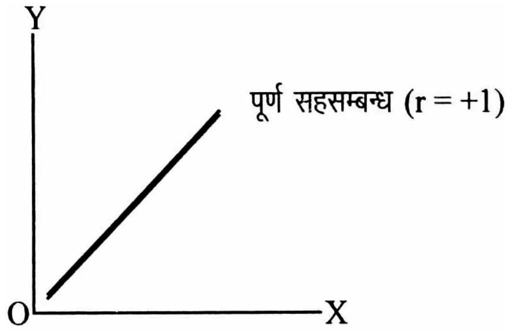
(ii) **सरल एवं बहु गुणी प्रतीपगमन** जब केवल दो घरों एक स्वतन्त्र और दूसरा आश्रित चर के मध्य प्रतीपगमन का अध्ययन किया जाता है, तो सरल प्रतीपगमन कहलाता है । लेकिन जब दो

से अधिक चरों का अध्ययन किया जाता है, एक आश्रित चर और शेष स्वतन्त्र चर होते है, तो बहु गुणी प्रतीपगमन कहलाता है ।

9.5 प्रतीपगमन रेखाएं (Regression Lines)

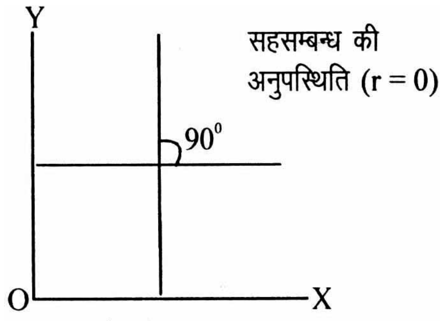
प्रतीपगमन रेखाओं से आशय उन रेखाओं से है, जो कि दो समंक मालाओं के पारस्परिक औसत सम्बन्ध को दर्शाने वाली सर्वोपयुक्त होती है । ये रेखाएँ किसी एक समंक माला के मध्यक मूल से सम्बन्धित दूसरी समंक माला के सर्वोत्तम मध्य मूल्यों को बताता है । सामान्यत: प्रतीपगमन की दो रेखाएँ होती है. जिसमें से एक रेखा X का Y पर प्रतीपगमन दर्शाती है और दूसरी Y का X पर प्रतीपगमन प्रकट करती हैं । प्रथम रेखा में Y को स्वतन्त्र चर मूल्य और X को आश्रित मूल्य माना जाता है । दूसरी रेखा में X को स्वतन्त्र चर मूल्य और Y को आश्रित घर मूल्य माना जाता है । इस प्रकार इनसे X से संबन्धित Y का सर्वोत्तम मूल्य तथा Y से सम्बंधित X का सर्वोत्तम मूल्य प्राप्त होता है ।

इन प्रतीपगमन रेखाओं से दो समंक मालाओं के मध्य सहसम्बन्ध की दिशा और मात्रा का ज्ञान प्राप्त होता है । इसे हम निम्न चित्रों के माध्यम से स्पष्ट करा सकते हैं -



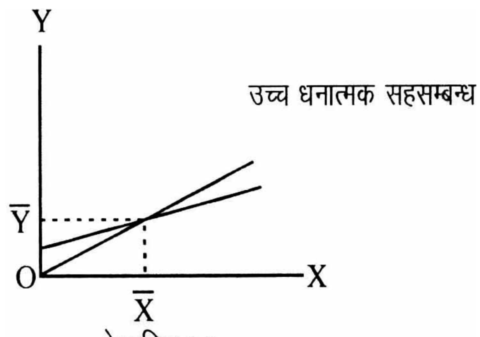
रेखाचित्र 9.1

रेखाचित्र 9.1 दर्शाता है कि यदि दोनों रेखाएँ एक दूसरे को पूर्णत: ढ़की हैं और एक ही रेखा लग रही है । ऐसी स्थिति में दोनों चरों के मध्य पूर्ण सहसम्बन्ध होगा। (r = +1)



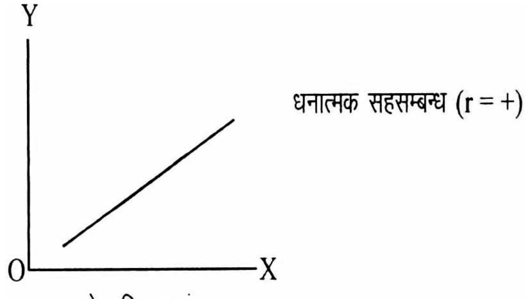
रेखाचित्र 9.2

रेखाचित्र - 9.2 में दोनों रेखाएँ एक दूसरे को समकोण (90^0) पर काट रही हैं । ऐसी स्थिति में सहसम्बन्ध का आभाव होगा ।(r=0)



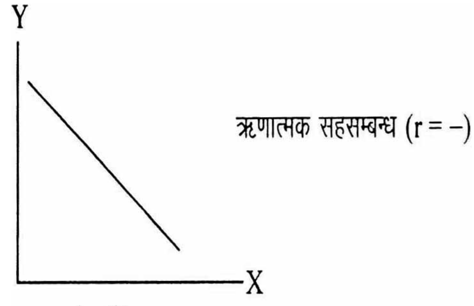
रेखाचित्र 9.3

रेखाचित्र 9.3 में दोनों रेखाएँ एक दूसरे के निकट हैं, ऐसी स्थिति में दोनों चरों के बीच उच्च सहसम्बन्ध होता है ।



रेखाचित्र 9.4

रेखाचित्र - 9.4 में प्रतीपगमन रेखा बांयी ओर से दाँयी ओर उपर की ओर बढ़ती है, ऐसी स्थिति में सहसम्बन्ध धनात्मक होता है ।



रेखाचित्र 9.5

रेखाचित्र 9.5 में प्रतीपगमन रेखा बाँयी ओर से दाहिनी ओर नीचे को जाती है, तब चरों के बीच सहसम्बन्ध ऋणात्मक होता है ।

इन रेखाओं की सहायता से सहसम्बन्ध की मात्रा व दिशा जानने में भी सहायता मिलती है जिसके लिए निम्न नियम हैं -

(1) यदि दोनों रेखाएँ रेखाचित्र पर बाएं निचले कोने से दाहिने उपर के कोने की तरफ बढ़ती है तो X व Y में धनात्मक सहसम्बन्ध होता है । इस प्रकार X व Y के मध्य पूर्ण सह सम्बन्ध की स्थिति में एक ही प्रतीपगमन रेखा बनती है ।

(2) यदि दोनो रेखाएँ समकोण पर काटे तो सहसम्बन्ध का सर्वथा अभाव होता है । अर्थात सहसम्बन्ध शब्द है ।

(3) रेखाएँ एक दूसरे के जितनी पास होगी सहसम्बन्ध की मात्रा उतनी ही अधिक होगी ।

(4) रेखाएँ एक दूसरे से जितनी दूर होगी सहसम्बन्ध की मात्रा उतनी ही कम होगी ।

इस प्रकार हम प्रतीपगमन रेखाओं की सहायता से यह जान सकते हैं कि दोनो श्रेणियों में सहसम्बन्ध है अथवा नहीं । यदि है तो उनकी प्रकृति धनात्मक है अथवा ऋणात्मक । एक चर के औसत मूल दूसरे चर के औसत मूल्य से कितना प्रभावित होते है? इसके साथ ही हम स्वतंत्र चर के मूल्य ज्ञात होने पर निर्भर चर का सम्भावित मूल ज्ञात कर सकते हैं । किसी भी चर बिन्दु पर विचरण का अनुपात ज्ञात कर सकते है । प्रतीपगमन रेखाओं की यह विशेषता है कि इनके कटाव बिन्दु से यदि X अक्ष व Y अक्ष पर लम्ब डाला जाय तो वह क्रमश: X तथा Y के समानान्तर माध्य को व्यक्त करते हैं ।

9.6 प्रतीपगमन समीकरण (Regression Equations)

प्रतीपगमन रेखाओं का बीजगणितीय सरूप प्रतीपगमन समीकरण कहलाता है । प्रतीपगमन समीकरण दो होते हैं । X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण X के मूल्यों में विचरण को प्रकट करता है और Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण X के मूल्यों में विचरण को प्रकट करता है । इन समीकरणों को निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है -

(i) X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण (Regression Equation of X on Y)

X=a : bY

इसमें Y स्वतन्त्र घर है और X आश्रित घर है । इन दोनों समीकरणों में a तथा b दो अचर-मूल्य हैं । पहला अचर मूल्य 'a' अन्त:खण्ड (Intercept) है । यह वह बिन्दु है जिस पर प्रतीपगमन रेखा कोटि अक्ष (Y-axis)को स्पर्श करती है ।

यह स्पर्श बिन्दु धनात्मक होने पर प्रतीपगमन रेखा कोटि अक्ष को मूल बिन्दु शून्य से उपर की ओर स्पर्श करेगी और ऋणात्मक होने पर नीचे की ओर स्पर्श करेगी । यदि 'a' का मान शून्य है तो रेखा मूल बिन्दु से ही प्रारम्भ होगी । दूसरा अचर-मूल्य 'b' प्रतीपगमन रेखा का ढाल (Slope of the Line) है । ढाल यह बताता है कि रेखा बाएं से दाएं ऊपर की ओर जायेगी अथवा बाएं से दाएं नीचे की ओर जाएगी । इस समीकरण को सहसम्बन्ध गुणांक, दोनों श्रेणियों के प्रमाप विचलनों और समानान्तर माध्यों के मानों के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} \text{ अथवा } \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

इन सभी में -

$\overline{X} = X$ श्रेणी का समानान्तर माध्य

$\overline{Y} = Y$ श्रेणी का समानान्तर माध्य,

r = दोनों श्रेणी के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक,

$\sigma_x = X$ श्रेणी का प्रमाप विचलन ।

$\sigma_x = Y$ श्रेणी का प्रमाप विचलन ।

(ii) Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण (Regression Equation of Y on X)

Y=a+bX

इस सभी में X स्वतन्त्र चर है और Y आश्रित चर है । इस समीकरण में सहसम्बन्ध गुणांक, प्रमाप विचलन और समानान्तर माध्य के मानों के रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं -

$$Y-\overline{Y}=r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\overline{X}) \text{ अथवा } Y-\overline{Y}=b_{yx}(X-\overline{X}) \text{ जहां } b_{yx}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

समीकरण में अचर मूल्य a अन्त:खण्ड को प्रदर्शित करते हैं और b प्रतीपगमन रेखा के ढाल को प्रदर्शित करता है । यदि दो श्रेणियों के समानान्तर माध्य, प्रमाप विचलन और सहसम्बन्ध गुणांक का मान ज्ञात हो, तो उनको उपर्युक्त समीकरण में रखने पर हम एक चर के मूल्य के आधार पर दूसरे चर का मूल्य निकाल सकते हैं ।

उदाहरण - (1) : एक विश्वविद्यालय की परीक्षा में विद्यार्थियों को अंग्रेजी एवं गणित के प्राप्तांकों के आधार निम्नलिखित आँकड़े मिलते हैं :

अंग्रेजी में औसत अंक ($\overline{X}$) = 39.5

गणित में औसत अंक ($\overline{Y}$) = 47.6

अंग्रेजी का प्रमाप विचलन (σ)= 10.8

गणित में प्रमाप विचलन (σ) = 16.9

अंग्रेजी एवं गणित में सहसम्बन्ध (r) = 0.42

उपर्युक्त आँकडों के आधार पर ऐसे विद्यार्थियों के गणित में औसत अंक ज्ञात कीजिए जिन्हें अंग्रेजी में 50 अंक प्राप्त हुए हों ।

यहां अंग्रेजी के अंक को X चर मानकर, Y या गणित का अनुमानित अंक ज्ञात करना है, इसके लिये निम्न सूत्र का प्रयोग होगा -

$$Y-\overline{Y}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\overline{X})$$

सूत्र में मान रखने पर -

$$(Y-47.6)=0.42\frac{16.9}{10.8}(X-39.5)$$

या, (Y- 47.6) = 0.657 (X-39.5)

या, Y-47.6 = 0.657 X - 25.96

या, Y=0.657 X + 25.96 + 47.6   Y = a + bx

Y = 0.657 X × + 21.64   Y = 21.64 + 0.657 x

9.7 प्रतीपगमन गुणांक (Regression Coefficient)

(A) **प्रत्यक्ष रीति** इस रीति में श्रेणियों के मूल्यों का वास्तविक माध्य से विचलन लिया जाता है । इसमें निम्न सूत्रों का प्रयोग किया जाता है ।

X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक या $b_{yx}\frac{\sum dxdy}{\sum dy^2}$

Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक या $b_{yx}\frac{\sum dxdy}{\sum dx^2}$

(B) **लघु रीति** इस रीति में x तथा y श्रेणियों के मूल्यों का कल्पित माध्य से विचलन किया जाता है । इसका सूत्र निम्न है।

$$b_{xy}\frac{\sum dxdy\times N-(\sum dx)(\sum dy)}{\sum dy^2\times N-(\sum dx)^2}$$

$$b_{yx}\frac{\sum dxdy\times N-(\sum dx)(\sum dy)}{\sum dy^2\times N-(\sum dx)^2}$$

प्रतीपगमन गुणांकों के आधार पर प्रतीपगमन समीकरणों को निम्न प्रकार से वक्त कर सकते हैं :

X का Y पर समीकरण $(X-\overline{X})=b_{xy}(Y-\overline{Y})$

Y का X पर समीकरण $(Y-\overline{Y})=b_{yx}(X-\overline{X})$

उदाहरण-2 निम्नलिखित आँकड़ों से प्रतीपगमन गुणांक ज्ञात कीजिए ।

पिता की ऊँचाई (इंच में) X	64	65	66	68	70	72	73	74
पुत्र की ऊँचाई (इंच में) Y	66	67	68	70	68	71	72	73

हल

पिता की ऊँचाई X	A=64 x= X-A dx	d^2x	पुत्र की ऊँचाई Y	A = 66 y=Y- A dy	d^2y	dx.dy
64	0	0	66	0	0	0
65	1	1	67	1	1	1
66	2	4	68	2	4	4
68	4	16	70	4	16	16
70	6	36	68	2	4	12
72	8	64	71	5	25	40
73	9	81	72	6	36	54
74	10	100	73	7	49	70
552 N=8	$\sum dx=40$	$\sum d^2x=302$	555	$\sum dy=27$	$\sum d^2y=135$	$\sum dxdy=197$

X का Y पर प्रतीपगमन गुणांक $b_{xy}=\frac{\sum dxdy\times N-(\sum dx)(\sum dx)}{\sum d^2y\times N-(\sum dy)^2}$

इस सूत्र में मान रखने पर $b_{xy}=\frac{197\times 8-(40)(27)}{135\times 8-(27)^2}$

$$= \frac{1576-1080}{1080-729}$$

$$= \frac{496}{351}$$

$$b_{xy} = 1.4131$$

Y का X पर प्रतीपगमन गुणांक $b_{yx} = \frac{\sum dxdy \times N - (\sum dx)(\sum dy)}{\sum d^2 \times N - (\sum dx)^2}$

इस सूत्र में मान रखने पर $b_{yx} = \frac{197 \times 8 - (40)(27)}{302 \times 8 - (40)^2}$

$$= \frac{1576-1080}{2416-1600}$$

$$= \frac{496}{816}$$

$$b_{yx} = 0.6078$$

इसी के आधार पर प्रतीपगमन समीकरण निम्न होंगे-

X का Y पर प्रतीपगमन समीकरण X- 69 = 1.4131(Y-69.375)

Y का X पर प्रतीपगमन समीकरण Y- 69.375 = 0.6078 (X-69)

9.8 प्रतीपगमन गुणांक तथा सहसम्बन्ध में सम्बन्ध (Relation between Regression and Correlation)

प्रतीपगमन गुणाँक से सहसम्बन्ध गुणाँक आसानी से निकाला जा सकता है । सहसम्बन्ध गुणाँक दो प्रतीपगमन गुणाँकों के गुणन के वर्गमूल के बराबर होता है ।

प्रतीपगमन गुणांक की गणना का मुख्य उद्देश्य प्रतीपगमन रेखाओं के ढाल का बीजगणितीय माप प्राप्त करना है । प्रतीपगमन गुणाँक से प्रतीपगमन रेखाओं और सहसम्बन्ध गुणांक की गणना भी की जाती है । प्रतीपगमन गुणाँक के दो रूप होते है :

(i) X का Y पर प्रतीपगमन गुणाँक अर्थात b_{yx}, यह बताता है कि Y के मूल्य एक इकाई परिवर्तन करने पर उसके सापेक्ष X के मूल्य में कितना परिवर्तन होगा । इसका सूत्र है -

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

(ii) Y का X पर प्रतीपगमन गुणाँक, अर्थात b_{xy}, यह बताता है कि X के मान में एक इकाई परिवर्तन करने पर, Y के मूल में कितना परिवर्तन होगा । इसका सूत्र निम्न है -

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

- **न्यूनतम वर्ग रीति दारा प्रतीपगमन समीकरण**
  (Regression Equations Through least Square)

यह तो पहले ही बताया जा चुका है कि रेखीय प्रतीपगमन के समीकरण उन श्रेष्ठ रेखाओं के समीकरण है जिन्हें न्यूनतम वर्ग विधि के आधार पर बनाया जाता है । इस रीति के अनुसार समीकरण के अन्त:खण्ड (intercept) a तथा ढाल (slope) b दोनों अचल मूल्यों (Constants) की गणना सामान्य समीकरण के हल करने पर प्राप्त होती है।

A एवं b का मान प्राप्त करने के समीकरण

Y का X पर समीकरण

$$Y = a + bx$$
$$\sum X = Na + b\sum X$$
$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$$

X का Y पर समीकरण

$$X = a + bY$$
$$\sum Y = Na + b\sum Y$$
$$\sum XY = a\sum Y + b\sum Y^2$$

उदाहरण-3 न्यूनतम वर्ग रीति (Method of Least Squares) की सहायता से दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ ज्ञात कीजिए।

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	9	8	10	12	11	13	14	16	15

हल-

X	Y	XY	X^2	Y^2	
1	9	9	1	81	
2	8	16	4	64	$\sum X$ =45
3	10	30	9	100	$\sum Y = 108$
4	12	48	16	144	$\sum XY = 597$
5	11	55	25	121	$\sum X^2 = 285$
6	13	78	36	169	$\sum Y^2 = 1356$
7	14	98	49	196	
8	16	128	64	256	
9	15	135	81	225	

प्रतीपगमन समीकरणों का हल-

(Y on X) Y का X पर	(X on Y) X का Y पर
$\sum Y = Na + b\sum X$	$\sum X = Na + b\sum Y$
$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$	$\sum XY = a\sum Y + b\sum Y^2$
108=9a + 45b ..(i)	45 = 9a + 108b ...(i)
597=45a + 285b ..(ii)	597 = 108a + 1356b ...(ii)

समीकरण (i) को 5 से गुणा करके समीकरण (ii) में से घटाएं	समीकरण (i) को 12 से गुणा करके उसे समीकरण (ii) में से घटाएं
597 = 45a + 285b ...(i)	597 = 108a + 1356b ....(i)
$\pm$540 = 45a $\pm$ 225b ...(ii) घटाने पर	$\pm$540 = 108a $\pm$ 1296b ...(ii) घटाने पर
+57 = +60b	$\pm$57 = +60
$b = \frac{57}{60} = 0.95$	$b = \frac{57}{60} = 0.95$
b का मान समीकरण (i) में रखने पर	b का मान समीकरण (i) में रखने पर
108 = 9a + 45(0.95) ...(i)	45 = 9a + 108 (0.95) .....(i)
408 = 9a + 42.75	45 = 9a + 102.6
9a = 65.25	Or
	9a = -57.6
a = 7.25	a = -6.4
Y = a + bX	X= a + bY
Ans. Y = 7.25 + 0.95 X	Ans. X = -6.4 + 0.95Y

अनुमान का प्रमाप विभ्रम (Standard Error of The Estimate)

प्रतीपगमन रेखा से विभिन्न मध्यक बिन्दुओं तक के विचलनों का प्रमाप विचलन अनुमान का प्रमाप विभ्रम कहलाता है । इस प्रकार आश्रित श्रेणी के वास्तविक मूल्यों और संगुणित मूल्यों के विचलनों का मध्यक माप ही इस अनुमान का प्रमाप विभ्रम है ।

Y का X पर प्रतीपगमन	X का Y पर प्रतीपगमन
$S_{YX} = \sqrt{\frac{\sum (Y-Y^e)^2}{N}}$	$S_{XY} = \sqrt{\frac{\sum (Y-Y^e)^2}{N}}$
S_{YX} = आश्रित श्रेणी Y के अनुमान का प्रमाप विभ्रम	S_{XY} = आश्रित श्रेणी X के अनुमान का प्रमाप विभ्रम
Y = वास्तविक मूल्य (Y श्रेणी)	X = वास्तविक मूल्य (X श्रेणी)
Y^e = संगणित मूल्य (Y श्रेणी)	X^e = संगणित मूल्य (X श्रेणी)

यदि सह-सम्बन्ध गुणांक r, X तथा Y श्रेणी के प्रमाप विचलन गुणांक क्रमशः σ_x तथा σ_y ज्ञात हो तो प्रमाप विभ्रम ज्ञात किया जा सकता है ।

$$S_{yX} = \sigma_y \sqrt{1-r^2} \qquad S_{Xy} = \sigma_x \sqrt{1-r^2}$$

इन सूत्रों में r = सहसम्बन्ध गुणांक, $\sigma_x = x$ श्रेणी का प्रमाप विचलन, $\sigma_x = y$ श्रेणी का प्रमाप विचलन ।

प्रतीपगमन गुणांक की गणना के लिए श्रेणियों का सह-सम्बन्ध गुणांक x श्रेणी का प्रमाप विचलन और y श्रेणी का प्रमाप विचलन का मूल्यों की आवश्यकता पडती है लेकिन इनकी अलग-अलग

गणना करना लम्बा और जटिल कार्य है । अत: निम्न रीति के द्‌वारा प्रतीप गमन गुणांकों की गणना की जाती है ।

9.9 सारांश (Summary)

प्रतीपगमन शब्द के प्रयोग का श्रेय सर फ्रान्सिस गाल्टन को दिया जाता है । पिता एवं पुत्रों की ऊँचाइयों का अध्ययन करते समय उन्होंने यह देखा कि सामान्यत: व्यक्तिगत ऊँचाइयों का झुकाव औसत ऊँचाई की ओर है । इसे आधार बनाकर प्रतीपगमन की रेखीयता की मान्यता लेकर दो चरों के मध्य कारण व प्रभाव का सम्बन्ध होने पर प्रतीपगमन समीकरण की सहायता से एक पर आधारित दूसरे चर का मूल्य बडी आसानी से निकाला जाता है । दो संबन्धित श्रेणियों के लिए दो रेखाएँ होती हैं । एक रेखा Y का X पर प्रतीपगमन प्रकट करती है और दूसरी रेखा X का Y पर प्रतीपगमन प्रकट करती है । पहली रेखा Y on X से X के मूल्यों के आधार पर Y के मूल्य ज्ञात किये जाते हैं । एवं दूसरी रेखा X on Y से Y के मूल्यों के आधार पर X के मूल्य ज्ञात किए जाते हैं । इस इकाई में हमने प्रतीपगमन गुणांक ज्ञात करने की विधि से आपका परिचय कराया है ।

9.10 शब्दावली (Glossary)

प्रतीपगमन	: Regression
विभ्रम	: Error
रेखीय प्रतीपगमन	: Linear Regression
अरेखीय प्रतीपगमन	: Non-linear Regression
सीधी रेखा	: Straight Line
वक्र रेखीय	: Curvilinear
सरल	: Simple
बहु गुणी	: Regression equations
प्रतीपगमन गुणांक	: Regression Co-efficient

9.11 सन्दर्भ ग्रन्थ (References)

शुक्ला एवं सहाय, "सांख्यिकी के सिद्धान्त"

मनोहर रे हरस्वरूप शर्मा एवं यू. एन. सिंह "सांख्यिकीय विधियाँ"

डी. एन एलहंस, "सांख्यिकी के सिद्धान्त"

Gupta S.C. and V.K. Kapoor, "Fundamentals of Applied Statistics".

9.12 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Questions)

(1) प्रतीपगमन को परिभाषित कीजिए एवं आर्थिक अनुसंधान में इसकी उपयोगिता स्पष्ट कीजिए।

(2) प्रतीपगमन का क्या अर्थ है ? सहसम्बन्ध एवं प्रतीपगमन के मध्य अन्तर स्पष्ट कीजिए ।

(3) निम्नलिखित आँकड़े वर्षा और फसल के उत्पादन को दर्शाते हैं ।

	वर्षा (इंच में)	उत्पादन (क्विंटल में)
माध्य ($\overline{X}$)	43	10
प्रमाप विचलन (σ)	73	12

दोनों के बीच सहसम्बन्ध गुणाँक का मान 0.75 है । यदि वर्षा 42 हो तो उत्पादन का मान निकालिए ।

(4) एक अध्ययन के निष्कर्ष निम्न प्रकार है :-

	X श्रेणी	Y श्रेणी
माध्य ($\overline{X}$)	10	20
प्रमाप विचलन (σ)	15	20

x और y के बीच सहसम्बन्ध गुणांक (r) = 0.6

दोनों प्रतीपगमन समीकरणों की गणना कीजिए ।

उत्तर Y =12 + 0.8 X

X = 1 + 0.45 Y

(5) निम्नलिखित आँकडों के आधार पर X का Y पर और Y का X पर प्रतीपगमन रेखाएँ तथा सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए -

X:	8	1	3	4	7	1	2
Y:	7	0	4	3	6	8	1

(Y = 0.512 X + 2.24, X = 0.44 Y + 1.88 r = 0.48)

(6) सहसम्बन्ध गुणाँक और प्रतीपगमन गुणाँक निकालिए -

X:	1	2	3	4	5
Y:	1	4	9	15	25

(b_{xy} = 0.169; b_{yx} = 5.7)

(7) निम्न आँकडों के आधार पर दो प्रतीपगमन समीकरण प्राप्त कीजिए :

पति की आयु (वर्ष में)	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
पत्नी की आयु	14	16	16	18	18	19	20	20	21	21

(X का Y पर X = 1.25 Y - 0.375, Y का X पर Y = 0.76 X + 1.2)

इकाई - 10

गुण सम्बन्ध (Association of Attributes)

इकाई की रूपरेखा

10.0 उद्देश्य (Objectives)

सांख्यिकी में सामान्यतः इन तथ्यों का निर्वचन किया जाता है जिन्हें अंकों अथवा संख्याओं में वक्त किया जाता हो । परन्तु तथ्य सदैव संख्यात्मक हो यह आवश्यक नहीं है । कभी-कभी कुछ तथ्य ऐसे भी होते हैं जिन्हें हम अंकों में तो व्यक्त नहीं कर पाते परन्तु उन्हें पहचानते अवश्य है, अर्थात् हम यह बता सकते हैं कि तथ्य उपस्थित है अथवा अनुपस्थित। जैसे सुन्दरता चरित्र आदि ऐसे तथ्य गुण समंक कहलाते हैं । वर्णनात्मक प्रकृति के समंकों के बीच सम्बन्ध का अध्ययन करने के लिए गुण सम्बन्ध गुणांक की गणना करते हैं ।

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप :

- तथ्यों का गुणात्मक वर्गीकरण करने के योग्य हो सकेंगे;
- तथ्यों को संकेतों द्वारा सम्बोधित कर सकेंगे एवं उनकी उपस्थिति के लिए बडे अक्षर (Capital Letters) एवं अनुपस्थिति के लिए लघु अक्षरों का उपयोग करने के योग्य हो सकेंगे; एवं गुण युग्म का अर्थ निकाल सकेंगे;
- अज्ञात वर्ग की आवृति ज्ञात कर सकेंगे;
- दो गुणों के मध्य गुण सम्बन्ध की गणना करने योग्य हो जाएंगे ।

10.1 प्रस्तावना (Introduction)

सांख्यिकी विषय की मुख्य धारा में संख्या का महत्वपूर्ण स्थान है । समाज के हर तथ्य को संख्यात्मक रूप से व्यक्त किया जाता है चाहे वह अंकात्मक अभिलक्षण हो या विवरणात्मक अभिलक्षण । अंकात्मक अभिलक्षण से तात्पर्य है ऊँचाई, भार, आयु आय, चौड़ाई आदि; विवरणात्मक अभिलक्षण

का तात्पर्य है रोजगार, गरीबी साक्षरता, स्वास्थ्य सम्बन्धी जानकारी, पोलियो टीकाकरण, अन्धापन आदि । इस तरह से अंकात्मक अभिलक्षण घर समंक व विवरणात्मक अभिलक्षण गुण समंक कहलाते हैं । चर समंकों से सम्बन्ध रखने बाली सांख्यिकी रीतियाँ हैं, केन्द्रीय प्रवृत्ति माप, अपकिरण विषमता, सहसम्बन्ध, प्रतीपगमन आदि, जबकि गुण साहचर्य की रीति गुण समंको पर आधारित है ।

10.2 गुण समंक व चर समंक में अन्तर

(i) चर समंक अंकात्मक विशेषता पर आधारित है जबकि गुण समंक विवरणात्मक होते हैं ।

(ii) चर समंक तथ्यों के आकार के प्रत्यक्ष माप द्वारा उपलब्ध किये जाते हैं जबकि गुण समंक को गुण की उपस्थिति व अनुपस्थिति की गिनती करके प्राप्त किया जा सकता है । उदाहरण समाज में पोलियाग्रस्त बच्चों की संख्या।

(iii) चर समंको का आवश्यकतानुसार गुण समंको के वर्गो में परिवर्तित किया जा सकता है लेकिन गुण समंकों के वर्ग चर समंकों के वर्ग में नहीं बदला जा सकता है ।

(iv) जब दो विभिन्न श्रेणियों व चर समंकों में पारस्परिक सम्बन्ध ज्ञात करना होता है तो उसे सहसम्बन्ध से ज्ञात किया जाता है । अगर इसके विपरीत विवरणात्मक समंकों की श्रेणियों के बीच सहसम्बन्ध ज्ञात करना होता है तो गुण सम्बन्ध द्वारा ज्ञात किया जा सकता है शिक्षा व गरीबी, शिक्षा व स्वस्थ्य, शिक्षा व विकास आदि।

10.3 गुणात्मक वर्गीकरण व संकेतन

गुणात्मक समंकों का वर्गीकरण दो प्रकार से सम्भव है ।

(1) द्वन्द्व-भाजन या सरल वर्गीकरण

(2) बहु गुण वर्गीकरण

गुण सम्बन्ध के सन्दर्भ में सरल वर्गीकरण का ही प्रयोग होता है । इसके अनुसार एक गुण की उपस्थिति और अनुपस्थिति के आधार पर दो वर्ग बनाये जाते है । उदाहरण रोजगार व बेरोजगार, गरीबी व अमीर, साक्षर व निरक्षर, स्त्री व पुरुष । ये सभी वर्ग रोजगार, पैसा, साक्षरता लिंग के आधार पर बनाये जाते हैं । इनको गिनने सम्बन्धी प्रक्रिया के लिए कुछ संकेताक्षरों का उपयोग किया जाता है ।

(i) 'N' यह संकेताक्षर समग्र (Universe) की कुल इकाइयों की संख्या को कहते हैं ।

(ii) A,a, B,b आदि - समग्र में निश्चित गुण की उपस्थिति बडे अक्षरों से व गुण की अनुपस्थिति छोटे अक्षरों से व्यक्त की जाती है ।

एक विश्व, समग्र (Universe) में दो या दो से अधिक के एक साथ अध्ययन से दो या अधिक गुण संयोग भी प्राप्त होते हैं जिन्हें गुण संयोग कहते हैं । निम्न उदाहरण में बड़े अक्षर एवं लघु अक्षरों के प्रयोग से गुण की उपस्थिति एवं अनुपस्थिति को बताया गया है ।

A	- पुरुष	a	- स्त्री	C - रोजगार
B	- साक्षरता	b	- निरक्षरता	C - बेरोजगार
AB	- शिक्षित पुरुष	ABC	- शिक्षित पुरुष रोजगार	

Ab	- अशिक्षित पुरुष	ABc	- शिक्षित पुरुष बेरोजगार
aB	- शिक्षित स्त्रियाँ	abC	- अशिक्षित स्त्रियाँ रोजगार
ab	- अशिक्षित स्त्रियाँ	abc	- अशिक्षित स्त्रियाँ बेरोजगार

10.4 गुण सम्बन्ध के प्रकार (Types of Association of Attributes)

यूल एवं केण्डाल के अनुसार, सांख्यिकी में A तथा B को सहचारी तब ही कहा जायेगा जब वे स्वतंत्र होने पर वास्तविक प्रत्याशा से कहीं अधिक मात्रा में दोनों साथ-साथ हो । अर्थात् जब कोई दो गुण प्रत्याशित मात्रा से कही अधिक मात्रा में एक साथ उपस्थित हों तो उनसे गुण सम्बन्ध होता है ।

इसमें तीन परिस्थितियाँ पाई जाती है । (1) धनात्मक (2) ऋणात्मक (3) स्वतंत्र

1. धनात्मक गुण सम्बन्ध

निश्चित किये हुये गुण की उपस्थिति को संकेताक्षर AB द्वारा व्यक्त करते हैं। यदि वर्ग में यह गुण पाया जाता है तो उसे अनुलोम (Positive Class) वर्ग करते हैं । जब दो गुण साथ-साथ उपस्थित हो या साथ-साथ अनुपस्थित हो तो उन दोनों में धनात्मक गुण सम्बन्ध होता है । उदाहरण शिक्षा व रोजगार, अच्छी जलवायु व अच्छा साध्य आदि । इस अवस्था में वास्तविक आवृत्ति प्रत्याशा से अधिक पायी जाती है । अनुलोम वर्ग को बडे अक्षर (Capital Letters) से व्यक्त करते हैं जैसे- (A), (B), (AB), (ABC) आदि धनात्मक गुणसम्बन्ध के लिए निम्नांकित सूत्र का प्रयोग होगा।

$$AB > \frac{(A)\times(B)}{N}$$

2. ऋणात्मक गुण सम्बन्ध

पूर्व निश्चित गुण की अनुपस्थिति को छोटे अक्षरों (Small Letters) द्वारा प्रकट करते हैं जैसे (a), (b), (ab), (abc) जब एक गुण के होने पर दूसरा कम हो तो इन दोनों गुणों में ऋणात्मक गुण सम्बन्ध होता है । उदाहरण- अच्छी जलवायु व रोग आदि । यदि वर्ग में विलोम गुण हो तो उसे विलोम वर्ग (Negative Class) कहते हैं । ऋणात्मक गुण सम्बन्ध के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग होगा-

$$(AB) < \frac{(A)\times(B)}{N}$$

3. स्वतंत्रता

जो दो गुणों में आपस में कोई सम्बन्ध नहीं होता उसे गुणों की स्वतंत्रता कहते हैं । दो विभिन्न अवस्थाएं हैं (i) जब दो गुण एक साथ न पाये जाय । (ii) जब एक गुण की उपस्थिति दूसरे गुण की अनुपस्थिति देखने में न आती हो। ऐसी अवस्था में वास्तविक व प्रत्याशित आवृत्ति बराबर होती है।

(A) व (B) स्वतंत्र होंगे यदि $(AB) = \frac{(A)\times(B)}{N}$

a व B स्वतंत्र होंगे यदि $(aB) = \frac{(a)\times(B)}{N}$

a व b स्वतंत्र होंगे यदि $(ab)=\frac{(a)\times(b)}{N}$

4. गुणों का संयोग (Combination of Attributes)

एक समय में दो अथवा दो से अधिक गुणों का साथ-साथ अध्ययन करने पर दोनों गुणों का संयोग भी प्राप्त होता है। यदि दोनों गुणों की उपस्थिति पाई जाय तो इसे दोनों बड़े अक्षरों (Capital Letters) को साथ लिखकर दर्शाया जाता है जैसे AB एवं दोनों गुणों की अनुपस्थिति बताने के लिए दोनों छोटे अक्षर (Small Letters) प्रयोग में लिए जाते हैं जैसे ab । इन्हें गुण संयोग कहते हैं । दो विपरीत गुणों के वर्ग को विपरीत वर्ग (Negative Class) कहते हैं । यह वर्ग बडे व छोटे अक्षरों में मिले जुले होते हैं जैसे ab, AB आदि ।

5. वर्ग आवृत्ति (Class Frequency)

प्रत्येक वर्ग की इकाइयों की संख्या को वर्ग आवृत्ति कहते हैं । आवृत्ति व्यक्त करने के लिए गुण को कोष्ठक में लिखते हैं जैसे A स्त्रीलिंग को व्यक्त करता है एवं B निरक्षरता को व्यक्त करता है तो स्त्रियों की कुल संख्या को कोष्ठक में (A) व्यक्त किया जाता है एवं कुल निरक्षर लोगों को (B) से व्यक्त किया जाता है ।

6. वर्गो का क्रम (Order of Classes)

वर्गो एवं आवृत्तियों को विभिन्न क्रमों के अनुसार लिखा जाता है जैसे- प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय क्रम आदि । ऐसे वर्ग जिसमें एक ही गुण की उपस्थिति अथवा अनुपस्थिति को दिखाया जाता है, प्रथम क्रम का वर्ग (Class of the First Order) कहते हैं जैसे- A,B,a,b आदि । दो गुणों के संयोग से जो वर्ग बनते हैं वे द्वितीय क्रम के वर्ग (Class of the Second Order) कहलाते हैं जैसे- AB,Ab, aB,ab आदि । इसी प्रकार तीन तीनों गुणों के संयोग से बने वर्ग तृतीय क्रम के वर्ग (Class of the Third Order) कहलाते हैं जैसे- ABC,abc,ABc आदि ।

7. अन्तस्थ वर्गो की संख्या (Number of Ultimate Classes)

समग्र के किसी गुणात्मक वर्गीकरण में सर्वोच्च क्रम के वर्ग अन्तस्थ वर्ग (Ultimate Classes) कहे जाते हैं । इनकी आवृत्तियाँ अन्तस्थ वर्ग की आवृत्तियाँ कहलाती है । अन्तस्थ वर्ग की संख्यां गुणों के आधार पर बढ़ती है । 1 गुण की अन्तस्थ आवृत्तियों की संख्या दो होगी, 2 गुणों की आवृत्तियाँ 4 होगी, 3 वर्ग की आवृत्तियाँ 8 होगी। इस प्रकार अन्तस्थ वर्गो की संख्या ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है-

अन्तस्थ वर्गो की संख्या = 2^n जहां n = गुणों की संख्या है ।

इस प्रकार तीन गुण होने पर अन्तस्थ वर्ग की कुल संख्या ज्ञात करने के लिए यह सूत्र प्रयोग में लिया जाएगा ।

अन्तस्थ वर्ग की संख्या = 2^n

n = गुणों की संख्या है । = 2^3 = $2\times2\times2$

= 8

वर्गो की कुल संख्या (Total Number of Classes) ज्ञात करने का सूत्र इस प्रकार है :

वर्गो की कुल संख्या = 3^n

दो गुण होने पर = 3^2 or $3\times3=9$ होगी ।

तीन गुण होने पर = 3^3 or $3\times3\times3=27$ होगी ।

सारणी 10.1

दो गुणा होने पर वर्गो की कुल संख्या

वर्ग की कोटि	वर्ग	वर्गो की संख्या
शून्य	N	1
प्रथम कोटि	A,b a,B	4
द्वितीय कोटि	AB, Ab, aB, ab	4
	वर्गो की कुल संख्या	9

दो गुणों का अध्ययन करते समय विभिन्न अज्ञात वर्ग आवृत्तियाँ नौ वर्ग सारणी बनाकर ज्ञात की जा सकती है । सारणी इस प्रकार है ।

	A	a	Total
B	AB	aB	(B)
b	Ab	ab	(b)
Total	(A)	(a)	N

इस सारणी या समीकरणों से अज्ञात आवृत्तियों को ज्ञात किया जा सकता है । महत्वपूर्ण बात यह है कि आवृत्तियाँ धनात्मक मान की होनी चाहिए ।

10.5 गुण सम्बन्धी निर्धारण नीतियां

अब हम गुण सम्बन्ध निर्धारण की विभिन्न विधियों का अध्ययन करेंगे । ये इस प्रकार है।

(i) प्रतिशत विधि (Percentage Method)

(ii) सम्भावना व प्रत्याशा विधि (Method of Probability)

(iii) यूल गुणसम्बन्ध गुणांक (Coefficient of Association)

(i) प्रतिशत ओषधि (Percentage Method)

इस विधि में एक गुण की उपस्थिति का प्रतिशत दूसरे गुण के धनात्मक तथा ऋणात्मक वर्गो में अलग-अलग ज्ञात किया जाता है । यदि A व B के गुणों का सम्बन्ध ज्ञात करना हो तो गणना इस प्रकार है ।

B का प्रतिशत A में $\frac{(AB)\times100}{A}$ A का प्रतिशत B में $\frac{AB\times100}{A}$

B का प्रतिशत a में $\frac{aB\times100}{a}$ A का प्रतिशत b में $\frac{Ab\times100}{b}$

उपर्युक्त के आधार पर-

(i) दोनों प्रतिशत बराबर हो तो गुण सम्बन्ध स्वतंत्र है ।

(ii) (A) का प्रतिशत अधिक तो धनात्मक गुण सम्बन्ध

(iii) (a) का प्रतिशत अधिक तो ऋणात्मक

गुण सम्बन्ध	(b) का A तथा (a) में अनुपात Proportion of (B) in (A) and (a)	(A) का (B) तथा b में अनुपात Proportion of A in (B) and (b)
स्वतंत्र	$\frac{(AB)}{A}\times 100=\frac{aB}{a}\times 100$	$\frac{(AB)}{B}\times 100=\frac{Ab}{b}\times 100$
धनात्मक	$\frac{(AB)}{A}\times 100>\frac{aB}{a}\times 100$	$\frac{(AB)}{B}\times 100>\frac{Ab}{b}\times 100$
ऋणात्मक	$\frac{(AB)}{A}\times 100<\frac{aB}{a}\times 100$	$\frac{(AB)}{B}\times 100<\frac{Ab}{b}\times 100$

उदाहरण-1 एक क्षेत्र में मलेरिया विरोधी अभियान में रोगियों को उपचार हेतु 3248 की कुल जनसंख्या में से 812 व्यक्तियों को कुनैन दी गई । इस क्षेत्र में बुखार आने सम्बन्धी निम्नांकित जानकारी प्राप्त हुई ।

उपचार	मलेरिया बुखार	मलेरिया नहीं बुखार
कुनैन दी	20	792
कुनैन नहीं दी	220	2216

मलेरिया रोकने हेतु कुनैन की उपयोगिता का परीक्षण कीजिए ।

हल-

कुनैन उपचार को A संकेताक्षर द्वारा और मलेरिया बुखार नहीं होने को B द्वारा व्यक्त किया गया है । वर्गो की संख्या व गुण संयोग ज्ञात करने हेतु गुण सारणी बनाई जाएगी ।

उपचार	कुनैन दी A	कुनैन नहीं दी B	कुल
मलेरिया बुखार नहीं B	(AB)	(aB)	(B)
	792	2216	3008
मलेरिया बुखार है b	(Ab)	(ab)	(b)
	20	220	240
कुल	(A)	(a)	(N)
	812	2436	3248

कुनैन दिये हुए व्यक्तियों में बीमार न हुए व्यक्तियों का प्रतिशत

$$\frac{(AB)}{(A)}\times 100=\frac{792}{812}\times 100=97.5\%$$

कुनैन नहीं दिये हुए व्यक्तियों में बीमार नहीं हुए व्यक्तियों का प्रतिशत

$$\frac{(aB)}{(a)}\times 100=\frac{2216}{2436}\times 100=91\%$$

चूँकि $\frac{(AB)}{(A)}\times 100>\frac{(aB)}{(a)}\times 100$ अत: A एवं B में धनात्मक गुण सम्बन्ध है अर्थात् कुनैन देने पर बुखार नहीं होता, कुनैन मलेरिया रोकने में प्रभावी है ।

(ii) सम्भावना व प्रत्याशा विधि (Method of Probability) अथवा अनुपात तुलना विधि (Comparison of Proportions Method)

इस विधि में गुण सम्बन्ध वास्तविक एवं प्रत्याशित आवृत्तियों में तुलना करके ज्ञात किया जाता है । इस विधि का आधार प्रायिकता सिद्धान्त पर आधारित है ।

Expected Frequencies x No. of Observations

Prob. $(A)=\frac{(A)}{N}$ Prob. $(B)=\frac{(B)}{N}$

Prob. $(A\&B)=\frac{(A)}{N}\times\frac{(B)}{N}$

Prob. $(AB)=\frac{(A)\times(B)}{N}$

स्वतंत्र, धनात्मक व ऋणात्मक सम्बन्ध के लिए सारणी का अध्ययन करेंगे ।

गुण	स्वतंत्र	धनात्मक	ऋणात्मक
(A) and (B)	$(AB)=\frac{(A)\times(B)}{N}$	$(AB)>\frac{(A)\times(B)}{N}$	$(AB)<\frac{(A)\times(B)}{N}$
(A) and (b)	$(Ab)=\frac{(A)\times(b)}{N}$	$(Ab)>\frac{(A)\times(b)}{N}$	$(Ab)<\frac{(A)\times(b)}{N}$
a and (b)	$(Ab)=\frac{(a)\times(b)}{N}$	$(Ab)>\frac{(a)\times(b)}{N}$	$(Ab)<\frac{(a)\times(b)}{N}$
a and (B)	$(aB)=\frac{(a)\times(B)}{N}$	$(aB)>\frac{(a)\times(B)}{N}$	$(aB)<\frac{(a)\times(B)}{N}$

उदाहरण-2

नीचे दिए गए गुण सम्बन्ध आँकडों पर निर्णय कीजिए कि क्या यह गुण आपस में धनात्मक, ऋणात्मक सम्बन्धित है अथवा स्वतंत्र है ।

(i) N = 1000 (A) = 470 (B) = 620 (AB) = 320

(ii) A = 490 (AB) = 294 (a) = 570 (aB) = 380

(iii) AB = 256 (aB) = 768 (Ab) = 48 (ab) = 144

हल-

(i) AB की प्रत्याशा = $\frac{(A)\times(B)}{N}=\frac{470\times620}{1000}=291AB$ की आवृत्ति 320 है जो 291 से अधिक है । अत: सहसम्बन्ध धनात्मक है ।

(ii) N = (A) + (a) = 490+570=1060

B = (AB) + (aB) = 294+380 = 674

अब AB की प्रत्याशा $=\frac{(A)\times(B)}{N}=\frac{490\times674}{1000}=312$

AB की आवृत्ति 294 है जो प्रत्याशित आवृत्ति 312 से कम है अत: A एवं B में ऋणात्मक सम्बन्ध है ।

(iii) A = (AB) + (Ab) = 256+ 48 = 304

B = (AB) + (aB) = 256+ 768 = 1024

N = (AB) + (Ab) + (aB) + (ab) = 256+48+768+144 = 1216

अब AB की प्रत्याशा $= \frac{(A)\times(B)}{N} = \frac{304\times1024}{1216} = 256$

AB की ज्ञात आवृत्ति भी 256 ही है अत: A एवं B स्वतंत्र है ।

गुण सम्बन्ध की उपर्युक्त दोनों विधियाँ सरल है इनसे यह ज्ञात होता है कि गुण सम्बन्ध धनात्मक है, ऋणात्मक है अथवा स्वतंत्र है । गुण सम्बन्ध की मात्रा इन विधियों से ज्ञात नहीं होती अत: हम गुण सम्बन्ध गुणांक का यूल सूत्र का अध्ययन करेंगे ।

10.6 यूल गुण सम्बन्ध गुणांक (Yule's Coefficient of Association)

प्रसिद्ध सांख्यिकी प्रो. यूल ने 1900 में गुण सम्बन्ध की मात्रा का सापेक्ष माप प्रस्तुत किया जिसे यूल गुण सम्बन्ध गुणांक कहते हैं । इसके अनुसार-

$$Q_{AB} = \frac{(AB)(ab)-(Ab)(aB)}{(AB)(ab)+(Ab)(aB)}$$

(i) यदि Q_{AB}=0 तो (A) व (B) गुण सम्बन्ध का अभाव है ।

(ii) Q_{AB} का मूल्य (मान + 1 व -1 के मध्य रहता है ।

(iii) +1 में Q_{AB} आवे तो गुण सम्बन्ध धनात्मक

-1 में Q_{AB} आवे तो गुण सम्बन्ध ऋणात्मक

(iv) +1 = पूर्ण धनात्मक

-1 = पूर्ण ऋणात्मक

0.75 से +1 = उच्च धनात्मक

-0.75 से -1 = उच्च ऋणात्मक

0 से 0.25 = निम्न धनात्मक

0 से -0.25 = निम्न ऋणात्मक

0 = कोई गुण सम्बन्ध नहीं ।

यह कार्ल की भांति प्रतीत होता है ।

उदाहरण-3

राजस्थान के तीन शहरों में साक्षर एवं अपराध प्रवृति के आँकड़े दिए गए है ।

शहर	कोटा	जयपुर	बीकानेर
कुल (संख्या हजारों में)	244	184	230
साक्षर	40	47	33
साक्षर अपराधी	3	2	2
निरक्षर अपराधी	40	20	24

तीनों शहरों में अपराध एवं निरक्षर में गुणसम्बन्ध की मात्रा की तुलना कीजिए ।

हल - निरक्षरता को A से तथा साक्षरता को a से और अपराध प्रवृति को B से प्रकट करने पर:

शहर	कोटा	जयपुर	बीकानेर
N	2,44,000	1,84,000	2,30,000
A	40,000	47,000	33,000
aB	3300	200	200
AB	4,000	2,000	2,400

अन्य द्वितीय क्रम आवृत्तियाँ निकालने के लिए नौ वर्ग तालिकाएँ बनायी जायेंगी । (सैकड़ा मे)

कोटा	A	a		जयपुर	A	a		बीकानेर	A	a	
B	(AB)	(aB)	(B)	B	(AB)	(aB)	B	B	(AB)	(aB)	B
	40	3	43		20	2	22		24	2	26
b	(Ab)	(ab)	(b)	b	(Ab)	(ab)	b	b	(Ab)	(ab)	b
	2000	397	2397		1350	468	1818		1946	328	2274
कुल	(A)	(a)	(N)	कुल	(A)	(a)	कुल	कुल	(A)	(a)	कुल
	2040	400	2440		1370	470	1840		1970	470	2300

$$Q_{AB} = \frac{(AB)(ab)-(Ab)(aB)}{(AB)(ab)+(Ab)(aB)}$$

कोटा $Q_{AB} = \frac{(40)\times(397)-(2000\times 3)}{(40)+(397)+(2000\times 3)} = \frac{15880-6000}{15880+6000} = \frac{9880}{21880} = 0.45$

जयपुर $Q = \frac{(20\times 468)-(1350\times 2)}{(20\times 468)+(1350\times 2)} = \frac{9360-2700}{9360+2700} = \frac{6660}{12060} = 0.55$

बीकानेर $Q = \frac{(24\times 328)-(1964\times 2)}{(24\times 328)+(1964\times 2)} = \frac{7872-3892}{7872+3892} = \frac{3980}{11764} = 0.34$

तीनों नगरों में निरक्षरता एवं अपराध प्रवृत्ति में धनात्मक गुण सम्बन्ध है । जयपुर में यह सम्बन्ध सर्वाधिक व बीकानेर में सबसे कम है ।

10.7 काई वर्ग परीक्षण (x^2)

सांख्यिक परीक्षण में काई वर्ग परीक्षण का महत्वपूर्ण स्थान है । इसको सर्वप्रथम 1863 में आवे व 1875 में हेल्मर्ट तथा 1900 में कार्ल पियर्सन ने पुन: खोजकर इसे व्यापक बनाया । यह एक सर्वाधिक लोकप्रिय अप्राचलीय परीक्षण (Non-Parametric) है ।

काई वर्ग वास्तविक व अवलोकित आवृत्तियों व किसी परिकल्पना के आधार पर परिकलित तत्संवादी प्रत्याशित आवृत्तियों के अन्तर का माप है । अवलोकित आवृत्तियों (F_o) व प्रत्याशित आवृत्तियों (F_e) के अन्तर के वर्गों के प्रत्याशित आवृत्तियों पर अनुपातों जोड़ ही काई वर्ग कहलाता है ।

(x^2 is the Sum of Ratios of Squared differences between observed frequencies (F_o) and expected frequencies (F_e) to expected frequencies.)

काई वर्ग जांच (x^2 Test) का उपयोग किसी भी सांख्यिक परिकल्पना के परीक्षण हेतु किया जाता है किन्तु गुण स्वातंत्र्य की जांच तथा अन्वायोजन उत्कृष्टता (Goodness of fit) के लिए विशेष किया जाता है ।

1. स्वातंत्र्य जांच (Test of Independence)

काई वर्ग द्वारा दो गुणों में स्वातंत्र्य निम्न विधि द्वारा की जाती है ।

(i) शून्य परिकल्पना (Null Hypothesis)

यदि दो गुणों में सहचर्य नहीं है व पूर्ण स्वतंत्र है तो इस प्रकार की मान्यता को शून्य परिकल्पना कहते हैं । इसमें- $F_{\circ} - f_e = 0$

(ii) x^2 का परिगणन

$$x^2 = \sum\left[\frac{(f_0 - f_e)^2}{f_e}\right] \text{ or } x^2 = \sum\left[\frac{(0-E)^2}{E}\right]$$

यहाँ पर शून्य मान्यता के आधार पर वास्तविक आवृत्तियों ($f_{\circ}$) की सहायता से सभी कोष्ठकों की प्रत्याशित आवृत्तियों (f_e) निकाली जाती है ।

(iii) स्वातंत्र्य कोटियाँ

d.f = (C-1)(r-1)

C = खानों (Coloums) की संख्या

r = पंक्तियों की संख्या (Rows) की संख्या

x^2 जांच में स्वातंत्र्य कोटियों का निर्धारण अनिवार्य है ।

(iv) काई वर्ग (x^2) तालिका

x^2 व d.f ज्ञात करने के बाद x^2 तालिका में से एक निश्चित सार्थकता स्तर (Level of significance) पर ज्ञात स्वातंत्र्य कोटियों की संख्या (d.f.) से सम्बन्धित मूल्य देख लिया जाता है । x^2 सारणी में विभिन्न स्वातंत्र्याशों के आधार पर विभिन्न सार्थकता स्तरों के x^2 मूल्य दिये होते हैं, परन्तु अधिकतर 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर से सम्बद्ध मूल्य देखे जाते हैं ।

(v) परिकल्पना परीक्षण

यदि काई वर्ग का परिगणित मूल्य 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर और स्वातंत्र्य कोटियों पर आधारित काई वर्ग का सारणी मूल से अधिक है तो शून्य परिकल्पना ($H_{\circ}$ Null Hypothesis) गलत है अर्थात् दोनों गुण स्वतंत्र नहीं हैं उनमें साहचर्य है । इसके विपरीत यदि x^2 का ज्ञात किया गया मान उनके सारणी में दिये हुए मूल से कम है तो शून्य परिकल्पना ठीक है, दोनों गुण स्वतंत्र है । इनमें कोई साहचर्य नहीं है ।

10.8 सारांश (Summary)

चर समंक की भांति गुण समंक भी एक दूसरे के साथ सम्बन्धित व एक दूसरे पर आश्रित हो सकते हैं । प्रस्तुत इकाई में आपको गुण समंक के अर्थ एवं परिभाषा से अवगत कराया गया है । इसमें गुण समंक व चर समंक में अन्तर भी स्पष्ट किया गया है । नो वर्गों की सारणी द्वारा अज्ञात

आवृत्तियों के निर्धारण की विधि को भी बताया गया है । इसके पश्चात् गुण सम्बन्ध निर्धारण की विभिन्न विधियों की गणना विधि को समझाया गया है ।

10.9 शब्दावली (Glossary)

गुण सम्बन्ध	Association of Attributes
समंकों की संगति	Consistency of Data
असंगति	Inconsistency
गुण सम्बन्ध गुणांक	Coefficient of Association of Attributes
अन्तस्थ वर्ग	Ultimate Classes

10.10 सन्दर्भ ग्रन्थ (References)

S.P. Gupta; "Statistical Methods" 2007-08 ed. S. Chand, New Delhi.

कैलाश नाथ नागर 'सांख्यिकी के मूल तल" 44 ई.डी. मीनाक्षी प्रकाशन, मेरठ ।

Oswal Tiwari; "Statistical Methods Ramesh Book Depot, Jaipur

Ranga Raghuvanshi; Statistics" Ajmera Book Co.

Croxton F.E. Cowden D.J.; Klien. S. "Applied General Statics" Prentice Hall of India, New Delhi.

Gupta, S.C., Kapoor, V.K. (1993) "Fundamentals of Applied Statistics" S. Chand and Sons, New Delhi.

10.11 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Questions)

1. क्या निम्न आँकडों के आधार पर कहा जा सकता है कि टीका लगवाना चेचक से प्रतिरक्षा उपाय है?

   एक बस्ती में 1482 व्यक्तियों में से 368 को चेचक हो गयी । 1482 व्यक्तियों में से 343 व्यक्तियों को टीका लगाया गया था उनमें से केवल 35 पर ही चेचक का आक्रमण हुआ ।

   उत्तर - टीके लगे व्यक्तियों में चेचक न होने का अनुपात 89.8 प्रतिशत तथा टीका न लगे व्यक्तियों में चेचक न होने का वाले व्यक्तियों का अनुपात 70.8 प्रतिशत । अत: A एवं B में धनात्मक सम्बन्ध है, अर्थात् टीका लगने पर चेचक की सम्भावना कम होती है ।

2. एक सर्वेक्षण में यह पाया गया कि 900 व्यक्तियों में से 300 साक्षर है और 400 ने अपने जिले की सीमा से बाहर की यात्रा की थी । साक्षरों में से 200 व्यक्ति यात्रा कर चुके थे । क्या यात्रा करने एवं साक्षरता में कोई गुण सम्बन्ध है? अनुपात तुलना विधि का प्रयोग कीजिए।

3. यूल का गुण सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए:-

(i)	(AB) = 250	(Ab) = 120,	(aB) = 200	(ab) = 70
(ii)	ab = 100	(A) = 36	(a) = 48	(AB) = 30
(iii)	N = 1000	(A) = 380	(B) = 380	(AB) = 230

4. पिता व पुत्र की आँखों के रंग के बीच गुणसम्बन्ध ज्ञात कीजिए ।

पिता की आँखों का रंग	पुत्र की आँखों का रंग
गहरा 230	148
हल्का 151	471

Ans. Q_{AB} = +0.658

5. गुण सम्बन्ध का क्या अर्थ है? गुणसम्बन्ध एवं सहसम्बन्ध में अन्तर स्पष्ट कीजिए । आप इसकी माप कैसे करेंगे ।
6. गुणसम्बन्ध से आप क्या समझते हे ? सांख्यिकी में गुणसम्बन्ध के महत्व की विवेचना कीजिए।

इकाई -11

काल श्रेणी विश्लेषण , काल श्रेणी के संघटक एवं प्रवृत्ति निर्धारण (Analysis of Time Series, Components of Time Series and Trend Determination)

इकाई की रूपरेखा

11.0 उद्देश्य (Objectives)

अर्थशास्त्र के क्षेत्र में हमारा सामना ऐसे आँकडों से होता है जिन्हें समय के साथ मापा जाता है । अर्थात् एक चर (Variable) समय होता है । जैसे भारत की जनगणना के आँकड़े अथवा विभिन्न योजनाओं में कृषि उत्पादन अथवा औद्योगिक उत्पादन के आँकड़े काल श्रेणी के ही उदाहरण हैं । इस इकाई के अध्ययन के बाद आप :

- काल श्रेणी के अर्थ एवं महत्व से परिचित हो जाएंगे;
- काल श्रेणी में समय के साथ-साथ विभिन्न प्रकार के परिवर्तन आते हैं इन परिवर्तनों को अर्थशास्त्रियों ने विभिन्न वर्गों में विभाजित किया है उन्हें काल श्रेणी के संघटक अथवा अंग कहते हैं । विभिन्न संघटकों से आप परिचित हो जायेंगे।
- काल श्रेणी का विश्लेषण कर सकेंगे एवं विभिन्न प्रवृत्तियों का मापन करना सीख सकेंगे ।

11.1 प्रस्तावना (Introduction)

काल श्रेणी के अन्तर्गत दो प्रकार के चर मूल्य होते हैं । एक चर को स्वतंत्र चर कहा जाता हैं एवं दूसरा चर उस स्वतंत्र चर पर निर्भर है । स्वतंत्र चर मूल्य समय को प्रदर्शित करते हैं । काल श्रेणी अथवा समय श्रेणी की रचना एक तथ्य में समय के साथ होने वाले परिवर्तनों की तुलना के लिए की जाती है । काल श्रेणी के विश्लेषण का महत्व आज के युग में बहु त अधिक है । इस इकाई में आप इस बात का अध्ययन करेंगे कि आधुनिक आर्थिक एवं व्यावसायिक क्षेत्रों में समय के साथ-साथ सतत् गीत से होने वाले परिवर्तनों को दर्शाया जा सकता है । उपभोग उत्पादन, निवेश, मूल्य, व्यापार तथा व्यवसाय से सम्बन्धित अल्पकालीन तथा दीर्घकालीन परिवर्तनों की निरन्तर जानकारी समाज के सभी वर्गों के लिए अत्यावश्यक है । आप यह भी जानते हैं कि भूतकाल में होने वाले विभिन्न प्रकार के परिवर्तनों के आधार पर ही सरकार भावी नीति का निर्धारण कर पाती है । इतना ही नहीं, भावी प्रवृत्तियों व परिवर्तनों के पूर्वानुमान के साथ-साथ यहाँ हम यह भी अध्ययन करेंगे कि प्रवृति क्या है, दीर्घकालीन प्रवृति कैसे निर्धारित होती है अल्पकालीन उतार-चढ़ाव को किस प्रकार मापा जाता है एवं इनके मापने की विभिन्न विधियाँ कौनसी है? काल श्रेणी के विश्लेषण का महत्व इस प्रकार है :

(1) सामयिक परिवर्तनों का अध्ययन कर सकते हैं ।

(2) भविष्य के बारे में पूर्वानुमान लगा सकते हैं ।

(3) भूतकाल के अनुभवों से शिक्षा प्राप्त कर सकते हैं ।

(4) व्यापार चक्रों के बारे में पूर्वानुमान लगाया जा सकता है ।

(5) अन्य श्रेणियों से तुलना की जा सकती है ।

अत: काल श्रेणी का विधिवत् विश्लेषण उस कम्पास की भाँति है जो सामाजिक, आर्थिक, वित्तीय तथा व्यावसायिक नीतियों के निर्धारण के लिए मार्गदर्शक हैं ।

11.2 काल श्रेणी की परिभाषा (Definition of Time Series)

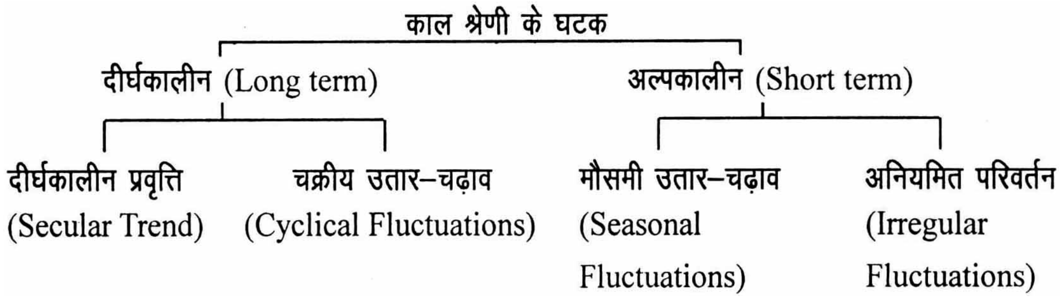
काल श्रेणी का अभिप्राय क्या है? यह हम अब तक जान चुके हैं । अब हम विभिन्न विद्वानों द्वारा दी गई परिभाषाओं का अध्ययन करेंगे। **केने व कीपिंग के अनुसार "समय पर आधारित समंक समूह काल श्रेणी कहलाते हैं । "क्राक्सडन एवं काउडन के अनुसार" एक काल श्रेणी समंकों की काल क्रमानुसार व्यवस्था है ।" पी.जी.मूरे के अनुसार, "किसी समय को अवधि पर आधारित मूल्यों की श्रेणी एक कालश्रेणी कहलाती है। " वर्नर हर्ष के अनुसार "समय के क्रमिक बिन्दुओं के तत्संवादी उसी चर के मूल्यों का व्यवस्थित अनुक्रम ही काल श्रेणी कहलाता है । "** समय के किसी माप (जैसे वर्ष माह, दिन) के आधार पर प्रस्तुत समंकों के व्यवस्थित क्रम की श्रेणी काल माला (Time Series) अथवा ऐतिहासिक चर मूल्य कहलाती है । काल माला के अन्तर्गत स्वतंत्र चर मूल्य समय के प्रतीक होते हैं । आश्रित चर मूल्य समंकों पर समय के साथ-साथ होने वाले परिवर्तनों के प्रभावों को प्रकट करते हैं । पैटर्सन के अनुसार "काल श्रेणी सांख्यिकीय समंकों का समूह है जिनको समय के क्रमिक फैलाव के साथ-साथ संकलित, अंकित या अवलोकित किया जाता है ।"

उपर्युक्त परिभाषाओं के अध्ययन से काल श्रेणी का अर्थ एवं अवधारणा अच्छी प्रकार समझ में आ जाती है । काल का अभिप्राय ही समय से है एवं यदि हमारे आँकड़े वह चाहे जनसंख्या उत्पादन

अथवा मूल्यों के हो यदि समय के साथ उन्हें लिखा गया है तो वह एक काल श्रेणी है। अब हम कालश्रेणी के संघटकों अथवा अंगों के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे।

11.3 काल श्रेणी के संघटक (Components of Time Series)

काल श्रेणी के संघटक से अभिप्राय यह है कि कालश्रेणी में कितने प्रकार के उच्चावचन हो सकते हैं। नीचे दिए गए चार्ट में इन विभिन्न संघटकों को समझाया गया है -



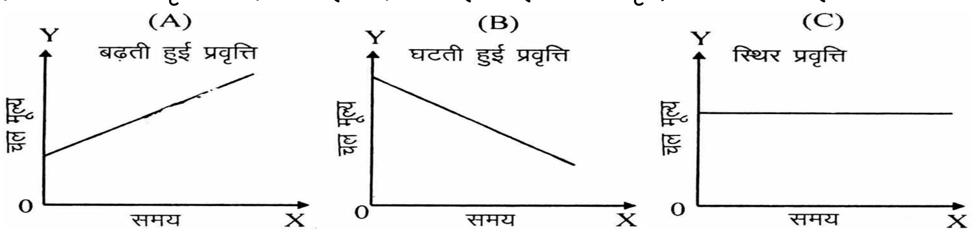
11.3.1 सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति (Secular Trend)

काल श्रेणी में समय-समय पर अनेक उतार-चढ़ाव होते रहते हैं। ये परिवर्तन एक लम्बी अवधि में दृष्टिगोचर होते हैं उनमें अल्पकालीन उतार-चढ़ाव भी हो सकते हैं, परन्तु इसके बावजूद भी इनमें एक दीर्घकालीन प्रवृत्ति पाई जाती है। दीर्घकालीन प्रवृत्ति वह अपरिवर्तनीय प्रवृत्ति है जो सामान्य रूप से उसी दिशा में पर्याप्त अवधि तक रहती है।

किसी भी काल श्रेणी में वृद्धि या (परिवर्तन) की स्वाभाविक प्रवृत्ति होती है उसी को दीर्घकालीन प्रवृत्ति कहते हैं। उदाहरण के लिए यदि भारत की पंचवर्षीय योजना में खाद्यान्न उत्पादन का अध्ययन करें तो आपको यह स्पष्ट हो जाएगा कि कुछ वर्षा में बाढ़, वर्षा का अभाव व अन्य प्राकृतिक प्रकोपों से उत्पादन में कमी हुई है परन्तु दीर्घकालीन प्रवृत्ति वृद्धि की ही पाई जाती है।

इस प्रकार यदि आप मृत्यु दर के आँकड़े लें तो आप पायेंगे कि योजनाकाल में 1951 से अब तक प्रति हजार मृत्यु दर में निरन्तर कमी होती रही है। दीर्घकालीन प्रवृत्ति कमी की ओर ही है। अत: स्पष्ट है कि प्रवृत्ति जिसे उपनति या दीर्घकालीन प्रवृत्ति भी कहा जाता है, श्रेणी की किसी समयावधि में बढ़ने अथवा घटने की आधारभूत प्रवृत्ति होती है। प्रवृत्ति के विचार के अन्तर्गत अल्पकालीन परिवर्तन सम्मिलित नहीं होते हैं। बल्कि दीर्घकाल में हुए नियमित परिवर्तन सम्मिलित होते हैं।

इस दीर्घकालीन प्रवृत्ति के अनेक कारण हो सकते हैं जैसे जनसंख्या में परिवर्तन, उत्पादन प्रणाली में सुधार, व्यावसायिक संगठन में सुधार, सरकारी नीति में परिवर्तन और मांग में परिवर्तन आदि। सामान्य प्रवृत्ति सदा एक ही दिशा में होती है या तो वृद्धि की ओर या ह्रास की ओर।



रेखाचित्र 11.1

वृद्धि की प्रवृत्ति वृद्धि तत्व (Growth factor) की उपस्थिति के कारण होती है । उत्पादन, जनसंख्या रोजगार आदि वृद्धि तल के उदाहरण हैं, क्योंकि दीर्घकालीन आधार पर इनमें वृद्धि ही देखने में आती है ।

इसी प्रकार कमी की ओर प्रवृत्ति ह्रास तत्व (Decline factor) के परिणामस्वरूप दिखाई देती है । लाभ उत्पादन, व्यय,मृत्यु दर इत्यादि इसके उदाहरण हैं । आपको यह भी जानना चाहिए कि ऐसा हो सकता है कि वृद्धि की दर समान न हो अथवा बीच-बीच में रुकावट हो जाये । परन्तु प्रवृत्ति में यह वृद्धि या कमी एकदम से नहीं होनी चाहिए, धीरे-धीरे क्रमिक गीत से होना चाहिए ।

दीर्घकालीन प्रवृत्ति मापन के मुख्य दो उद्देश्य हैं । प्रथम श्रेणियों में से दीर्घकालीन प्रवृत्ति को पृथक करके आप अन्य संघटकों जैसे मौसमी या चक्रीय उच्चावचनों का ज्ञान प्राप्त कर सकेंगे । द्वितीय आप इसके द्वारा भविष्य की प्रवृत्ति के बारे में अनुमान लगा सकेंगे ।

11.3.2 चक्रीय उतार-चढ़ाव (Cyclical fluctuations)

दीर्घकालीन प्रवृत्ति के बारे में जानने के बाद हम चक्रीय उच्चावचनों का उल्लेख करेंगे । ये नियमित होते हैं तथा इनकी अवधि एक वर्ष से अधिक होती हैं आर्थिक जगत में व्यापार चक्रों का बहुत महत्व है ।

इनका स्वरूप एक लहर की तरह होता है इन लहरों के शीर्ष से तह तक की दूरी असमान होती है । अनेक आर्थिक क्रियाओं में लगभग एक साथ आने वाली प्रसार व संकुचन की क्रमिक तरंगों को ही व्यापार चक्र कहा जाता है ।

(i) अभिवृद्धि (Prosperity), (ii) ह्रास या प्रतिसार (Decline or Recession) (iii) अवसाद (Depression) तथा (iv) पुनरुत्थान (Recovery) । व्यापार चक्रों की समयावधि उतनी नियमिति नहीं होती है जितनी ऋतुओं की होती है । यही कारण है कि उनके होने वाले प्रभावों को सामयिक उच्चावचन नहीं कहते हैं । इन्हें चक्रीय उच्चावचन कहा जाता है ।

11.4 अल्पकालीन संघटक (Short-term Components)

जैसा कि नाम से स्पष्ट है कि अल्पकाल में जो परिवर्तन होते हैं, उन्हें अल्पकालीन उच्चावचन कहा जाता है । इन परिवर्तनों की गीत अधिक तीव्र हो सकती है अथवा धीमी । परिवर्तन नियमित हो सकते हैं अथवा अनियमित ।

11.4.1 मौसमी उच्चावचन या आर्तव विचरण (Seasonal Fluclations)

यह एक निश्चित समयान्तराल के अन्दर होते हैं । यह समयान्तराल एक वर्ष या इससे कम-दिन, सप्ताह माह अथवा त्रैमासिक के रूप में हो सकता है । मौसम का अर्थ यहाँ सर्दी, गर्मी, ऋतु से नहीं है । ऐसे परिवर्तन जो जलवायु मौसम, विशेष उत्सव आदि कारणों से उत्पन्न होते हैं मौसमी विवरण कहे जाते हैं । एक निश्चित अन्तर से होने के कारण नियमित उच्चावचन भी कहलाते हैं । आपने देखा होगा कि गर्मी आते ही पंखे कूलर एवं ठंडे पेय पदार्थों की मांग बढ़ जाती है जबकि सर्दी में इनकी मांग घट जाती है । विवाह के समय सोना चांदी आभूषणों व वस्त्रों की मांग व मूल्य बढ़ जाते हैं । अत: व्यापारिक प्रतिष्ठानों के लिए इनका अध्ययन अत्यन्त आवश्यक हो जाता है ।

उपर्युक्त वर्णन से चक्रीय परिवर्तन तथा आर्तव (मौसमी) परिवर्तन में अन्तर स्पष्ट हो जाता है । चक्रीय परिवर्तनों की अवधि एक वर्ष से अधिक की होती है । यह सामान्यत: 10 या 12 वर्ष तक की होती है जबकि मौसमी परिवर्तन की

अवधि एक वर्ष से कम होती है । मौसमी परिवर्तनों में अवधि और क्रम दोनों में नियमितता होती है तथा इनका क्रम बहु त ही निश्चित रहता है जबकि चक्रीय परिवर्तनों में प्रत्येक चरण की अवधि में परिवर्तन होते रहते हैं । मौसमी परिवर्तन जलवायु व मौसम, रीति-रिवाज, फैशन, आदत में परिवर्तनों के कारण उत्पन्न होते हैं जबकि चक्रीय परिवर्तन मुद्रा प्रसार, उत्पादन एवं बिक्री की मात्रा, वस्तुओं की मांग, सरकारी नीतियों आदि में परिवर्तन के कारण उत्पन्न होते हैं ।

11.4.2 अनियमित परिवर्तन (Irregular Fluctuations)

कई बार देव योग से अकस्मात ऐसे परिवर्तन होते हैं जिनका पूर्वानुमान या मापन वैज्ञानिक ढंग पर असम्भव है । ये व्यवसाय में किसी भी निश्चित क्रम में घटित नहीं होते हैं । ये दो प्रकार के होते हैं - (i) जो केवल अगर (Chance) के कारण कभी एक दिशा तो कभी दूसरी दिशा में हो जाते हैं, और (ii) जो आकस्मिक कारणों, जैसे-युद्ध, हड़ताल, बाढ़, चुनाव आदि से अनियमित रूप से उत्पन्न होते हैं ।

इस प्रकार के अनियमित या दैव परिवर्तन की मापन विधि यह है कि किसी भी श्रेणी का विश्लेषण करके उसके नियमित परिवर्तनों, प्रवृत्ति,अल्पकालीन परिवर्तन आदि को समाप्त करने के बाद जो परिवर्तन शेष रहते हैं, उन्हें दैव परिवर्तन कहा जाता है ।

11.5 काल श्रेणी का विघटन या विश्लेषण (Decomposition or Analysis of Time Series)

उपर्युक्त विश्लेषण से स्पष्ट हो जाता है कि एक काल श्रेणी के मूल समंक (O) चार घटकों से मिलकर बनते हैं ।

(1) दीर्घकालीन प्रवृत्ति (T= TREND)

(2) चक्रीय उच्चावचन या उतार-चढ़ाव (C=CYCLICAL)

(3) मौसमी उच्चावचन या उतार-चढ़ाव (S=SEASONAL)

(4) अनियमित उच्चावचन या उतार-चढाव (I=IRREGULAR)

इन सबका अलग-अलग अध्ययन करना ही काल श्रेणी का विश्लेषण या विघटन कहलाता हैं । इन चारों संघटकों का दो मॉडलों में अध्ययन किया जा सकता है ।

11.5.1 योगात्मक मॉडल (Additive Model)

इस मॉडल में यह माना जाता है कि मूल समंक (O) चारों संघटकों का योग होता है -

सूत्रानुसार : $O = T + S + C + I$ (1)

(1) दीर्घकालीन उपनति : $T = O - S - C - I$ (i)

(2) चक्रीय एवं अनियमित परिवर्तन: $O - T - S = C + I$ (ii)

(3) अल्पकालीन उच्चावचन - इन्हें प्राप्त करने के लिए आप मूल समंकों (O) में से दीर्घकालीन

प्रवृत्ति को घटा दीजिए तो अल्पकालीन उच्चावचन रह जाएंगे

$$O - T = S + C + I \qquad \text{(iii)}$$

(4) अनियमित परिवर्तन - इसके लिए आपको अल्पकालीन उच्चावचनों (O-T) में से मौसमी और चक्रीय उच्चावचनों को घटाना होगा

$$O - T - S - C = I \qquad \text{(iv)}$$

11.5.2 गुणात्मक मॉडल (Multiplicative Model)

योगात्मक मॉडल में हम यह मान लेते हैं कि सभी संघटक एक दूसरे से स्वतंत्र है और एक संघटक का दूसरे पर कोई प्रभाव नहीं पडता परन्तु व्यवहार में प्रत्येक संघटक एक दूसरे पर निर्भर करता है । इसके अन्तर्गत मूल समंक सभी संघटकों के गुणनफल के रूप में होते हैं । इसमें यह माना जाता है कि अल्पकालीन विचरण दीर्घकालीन उपनति के फलन है ।

$$O = T \times S \times C \times I \qquad \text{.........................(2)}$$

(1) दीर्घकालीन प्रवृत्ति $(T) = \dfrac{O}{S \times C \times I}$ ....(i)

(2) चक्रीय एवं अनियमित परिवर्तन $C \times I = \dfrac{O}{T \times S}$ ....(ii)

(3) अल्पकालीन उच्चावचन $S \times C \times I = \dfrac{O}{T}$ ....(iii)

(4) अनियमित उच्चावचन $I = \dfrac{O}{T \times S \times C}$ ....(iv)

गुणात्मक मॉड़ल में यह माना जाता है कि प्रत्येक संघटक एक-दूसरे पर निर्भर करता है जबकि योगात्मक मॉडल में सभी संघटक एक दूसरे से स्वतंत्र है और एक संघटक का दूसरे पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता । व्यवहार में ऐसा कम होता है, व्यवहार में एक संघटक का दूसरे पर कुछ न कुछ प्रभाव अवश्य पड़ता है, इसीलिए तो गुणात्मक मॉडल का उपयोग काल श्रेणी विश्लेषण के लिए अधिक उपयोगी माना जाता है। कुछ दशाओं में जहां सभी संघटक स्वतंत्र हो योगात्मक मॉडल द्वारा काल श्रेणी विश्लेषण किया जाता है ।

काल श्रेणी के विश्लेषण के लिए यह आवश्यक है कि समंकों में सजातीयता हो एवं वे तुलनीय हों । यदि समंक विजातीय हैं एवं अतुलनीय है तो उनमें कुछ प्रारम्भिक समायोजन कर लेने चाहिए । इन समायोजनों के कई तरीके हो सकते हैं जैसे कैलेन्डर परिवर्तनों के लिए समायोजन, जिसमें एक माह तथा दूसरे माह के दिनों में अन्तर-फरवरी 28 या 29 दिन की तथा मार्च 31 दिन का होता है । इनका समायोजन करने के लिए हम समंकों के योग को माह के दिनों की संख्या से 365 366 भाग देकर हम प्रतिदिन या माध्य मूल्य निकाल लेंगे, फिर औसत मूल को $\frac{365}{12}$ या $\frac{366}{12}$ से गुणा करेंगे। यह मासिक मूल्य होगा । जनसंख्या परिवर्तन के लिए भी हमें समायोजन करना होगा । इसके लिए कुल समंकों में जनसंख्या का भाग देकर प्रति व्यक्ति उत्पादन या मूल्य आदि ज्ञात किये जाते हैं । मूल्यों में परिवर्तन होने से वास्तविक बिक्री या आय में परिवर्तन हो जाते हैं । इसके लिए हमें मूल्य परिवर्तनों के लिए समायोजन करना होगा । वास्तविक आय की जानकारी मुद्रा के रूप में आय में मूल्यों

का भाग देकर ही की जा सकती है । इनके अलावा यदि और कोई अन्तर हो जैसे परिभाषाओं में अन्तर, भौगोलिक दशाओं में अन्तर, आंकडें संकलन की विधि में अन्तर आदि तो इन्हें भी उचित रूप से समायोजित कर लिया जाता

11.6 सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति या उपनति का मापन (Measurement of Long term Trend)

प्रवृत्ति शब्द का साधारण बोलचाल में बहु त अधिक प्रयोग किया जाता है । उदाहरण के लिए हम प्राय: जनसंख्या की बढ़ती हु ई प्रवृत्ति कीमतों की बढ़ती हु ई प्रवृत्ति की बात करते हैं । इस प्रवृत्ति को दीर्घकालीन प्रवृत्ति भी कहा जाता है । यह उत्पादन, बिक्री, आय, रोजगार की मूलभूत प्रवृत्ति है कि समय अवधि में या तो बे घटते हैं या इनमें वृद्धि होती है । प्रवृत्ति के विचार में अल्पकालीन उतार-चढाव शामिल नहीं होते ।

प्रवृत्ति की अर्थ भलि-भांति समझने के लिए यह जानना आवश्यक है कि दीर्घकाल शब्द का उचित अर्थ जाना जाये । दीर्घकाल कितना समय होता है इसका कोई स्पष्ट उत्तर नहीं दिया जा सकता । एक व्यापारी के लिए विक्रय के अनुमान के लिए उपनति का पता लगाने के लिए, कम से कम 7-8 वर्षो के विक्रय के समंक होने चाहिए । दूसरी तरफ यदि किसी डाक्टर के पास किन्हीं कीटाणुओं के बढ़ने के प्रत्येक 5 मिनट के समंक 6 घण्टों के उपलब्ध है तो वह समय उन कीटाणुओं की प्रवृत्ति जानने के लिए दीर्घकालीन समय है जिसमें आसानी से उपनति को ज्ञात किया जा सकता है । जितना अधिक दीर्घकाल होगा, उपनति का उतना ही सही ज्ञान होगा ।

दूसरा यह आवश्यक नहीं कि बढ़ने की प्रवृत्ति या घटने की प्रवृत्ति एक ही दिशा में हो । यह बढ़ सकती है, फिर घट सकती है और पुन: बढ़ सकती है । हमें सामान्य प्रवृति की ओर ध्यान देना चाहिए ।

दीर्घकाल में किसी श्रेणी में बढ़ने या घटने की प्रवृत्ति को ही दीर्घकालीन प्रवृत्ति या उपनति कहते हैं। किसी श्रेणी में अल्पकाल में जो परिवर्तन होते रहते हैं उन्हें अल्पकालीन उतार-चढाव कहते हैं । इन अल्पकालीन परिवर्तनों की गीत तीव्र हो सकती है अथवा धीमी । परिवर्तन दोनों दिशाओं में होते रहते हैं। अल्पकाल में इनके परिवर्तनों में नियमितता पाई जा सकती है अथवा अनियमितता । किसी एक निश्चित अवधि में नियमित रूप से परिवर्तन किसी असामान्य या अप्रत्याशित या दैनिक या संयोगवश कारणों से (जैसे बाढ़, भूकम्प अथवा अकाल आदि) होते हैं तो इन्हें दैविक या अनियमित परिवर्तन कहते

11.6.1 प्रवृत्ति का निर्धारण (Determination of Trend)

काल श्रेणी के विभिन्न संघटकों पर विचार और विश्लेषण करने के बाद आइए अब हम इस बात पर विचार करें कि दीर्घकालीन व अल्पकालीन प्रवृत्ति का माप कैसे होता है ।

इसकी सहायता से आप भूतकालीन वृद्धि या ह्रास का पता लगा सकेंगे । यह आपको भावी पूर्वानुमान लगाने में भी सहायक होगी जो कि व्यावसायिक नियोजन में सहायक होते हैं तथा प्रवृत्ति विश्लेषण द्वारा आप अन्य घटकों को पृथक कर चक्रीय तथा अल्पकालीन उतार-चढ़ावों का अलग से अध्ययन और विश्लेषण कर सकेंगे । अब हम इन्हें मापने की कुछ प्रमुख मापों का वर्णन करेंगे ।

(1) मुक्त हस्त रीति (Free-Hand Curve Method)

सारणी -11.1

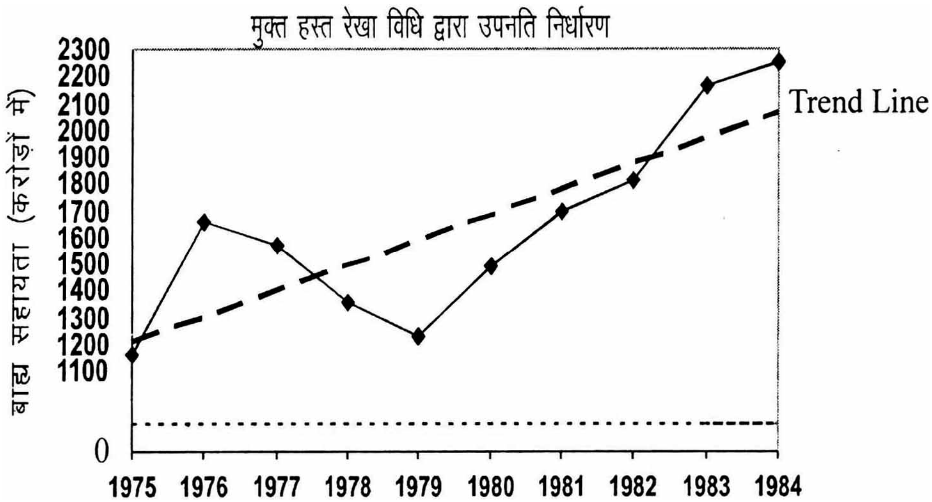
भारत को मिली बाह्य सहायता

वर्ष	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
बाह्य सहायता (करोड़ों में)	1164	1658	1574	1355	1231	1494	1693	1812	2160	2250

उपर्युक्त तालिका को संलग्न ग्राफ पर दिया गया है ।

आप देखेंगे कि इस विधि में वर्षों का OX अक्ष तथा व्यय को OY पर दिखाया गया है । फिर अंकों को रेखा-चित्र पर अंकित किया जाता है और इसके बाद सभी अंकों के बीचोबीच एक सर्वोपयुक्त वक्र (Smooth Curve) खींचा जाता है । यह वक्र ही मुक्त हस्त प्रवृत्ति वक्र है ।

आप देखेंगे कि यह विधि सबसे सरल है । इसकी सहायता से उपनति रेखा को शीघ्रतापूर्वक जाना जा सकता है । इसमें गणित सम्बन्धित जटिलताएं भी नहीं है । परन्तु व्यक्तिनिष्ट रीति होने के कारण पक्षपात की अधिक संभावना है । दो संख्या शास्त्री कभी भी एक जैसी वक्र रेखा नहीं खींच सकते हैं ।



रेखाचित्र 11.3

(2) अर्द्धमध्यक रीति (Semi-Average Method)

सिम्पसन तथा काफ़्का के अनुसार अर्द्ध मध्यक शब्द का अर्थ है श्रेणी के प्रत्येक आधे भाग (पूर्वार्द्ध तथा उत्तरार्द्ध) के मूल्यों का समानान्तर माध्य । इस विधि में काल श्रेणी को दो बराबर भागों में बांट लिया जाता है । फिर प्रत्येक आधे भाग के समंकों का समानान्तर माध्य निकाल कर उस भाग के मध्यका समय बिन्दु के सम्मुख रख दिया जाता है । इसके बाद निर्धारित दोनों माध्यों को रेखाचित्र पर दोनों भागों के मध्यका बिन्दुओं के ऊपर अंकित करके मिला दिया जाता है । इस प्रकार मिलाने से जो रेखा तैयार होती है उसे अर्द्ध मध्यक विधि द्वारा तैयार की गई प्रवृत्ति रेखा (Trend Line) कहते हैं ।

उदाहरण : निम्नांकित समंको से अर्द्धमध्यक रीति से प्रवृत्ति रेखा का निर्धारण कीजिए ।

वर्ष (X)	2004	2005	2006	2007	2008	2009
उत्पादन (Y) (टनों में)	9771	11744	11012	12550	15741	20281

हल- अर्द्धमध्यक रीति द्वारा दीर्घकालीन प्रवृत्ति का परिगणन ।

वर्ष	उत्पादन (टनों में)	अर्द्ध योग	अर्द्ध माध्य	माध्य का वर्ष
2004	9771	32527	$\frac{32527}{3}=10842$	2005
2005	11744			
2006	11012			
2007	12550	48572	$\frac{48527}{3}=16191$	2008
2008	154741			
2009	20281			

उपर्युक्त आकड़ों को ग्राफ पेपर पर अंकित करके दो युग्म बना लें (2005, 16191) इन दो बिन्दुओं के बीच सीधी रेखा खींच कर प्रवृति रेखा बनाएं ।

उदाहरण: निम्न समंकों से अर्द्धमध्यक रीति द्वारा उपनति अथवा प्रवृत्ति निकालिए ।

वर्ष (X)	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
भारत के आयात (करोड़ों में)	14293	15832	17134	19759	20063	22899	27693

हल- चूँकि वर्षों की संख्या विषम है अत: बीच के वर्ष को छोड़कर आधे ऊपर के मूल्यों एवं आधे नीचे के मूल्यों का माध्य ज्ञात करके उसे मध्यका वर्ष के सामने रखा जाएगा बाद में रेखा चित्र पर अंकन कर प्रवृत्ति रेखा ज्ञात की जाती है ।

वर्ष	आयात (करोड़ों में)	अर्द्ध योग	अर्द्ध माध्य	माध्य का वर्ष
1983	14293	47259	$\frac{47259}{3}=15753$	1984
1984	15832			
1985	17134			
1986	19759	छोड़ा गया वर्ष		
1987	20063	70655	$\frac{70655}{3}=23552$	1988
1988	22899			
1989	27693			

इस विधि के भी कई गुण व दोष हैं । यह रीति भी प्रथम रीति की भांति सरल है, पक्षपात रहित है, परन्तु जब चरम मूल्य (Extreme values) है तो इस रीति द्वारा दिखाई गई प्रवृत्ति ठीक नहीं होगी । समंकों की प्रवृत्ति लगभग रेखीय होने पर ही यह विधि उपयुक्त हो सकती है ।

(3) चल माध्य रीति (Method of Moving Averages)

इस विधि का प्रयोग व्यवहार में अधिक होता है । चल माध्य निकालने से पूर्व यह निश्चित करना होता है कि माध्य कितने वर्षों के मूल्य का लिया जाये । यह व्यावसायिक चक्र की अवधि पर निर्भर करता है । इसमें एक वर्ष के मूल्य को छोड़ते जाते हैं और अगले वर्ष के मूल्य को औसत में सम्मिलित करते जाते है ।

उदाहरण - नीचे तालिका में भारत में कोयले के उत्पादन के आँकड़े दिए गए हैं । पाँच वर्षीय चल माध्य की गणना कीजिए।

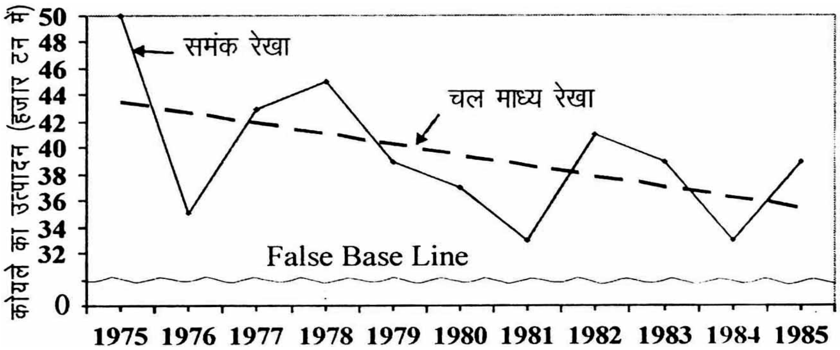
वर्ष	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
भारत में कोयले का उत्पादन (हजार टन में)	50	36	43	45	39	38	33	42	41	34	40

हल-

वर्ष	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
भारत में कोयले का उत्पादन (हजार तन में)	50	36	43	45	39	38	33	42	41	34	40
पंचवर्षीय चल योग	-	-	213	201	198	197	193	188	190	-	-
पंचवर्षीय चल माध्य (प्रवृति मूल्य)	-	-	42.6	40.2	39.6	39.4	38.6	37.6	38.0	-	-

प्राप्त मूल्यों को ग्राफ बनाकर प्रदर्शित किया जा सकता है ।

चल माध्य (विषम संख्यायें लेने पर)



रेखाचित्र 11.4

उदाहरण- दिए गए समंकों के आधार पर चार वर्षीय चल माध्य की गणना कीजिए ।

वर्ष	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
उत्पादन (टनों में)	3	4	8	10	9	11	13	14	12

हल- जब चल माध्य की अवधि सम हो जैसे 4 वर्ष 6 वर्ष अथवा 8 वर्ष तो चल माध्य की गणना करने के लिए उसे केन्द्र में लाना पड़ता है । इस हेतु आप पहले चार-चार वर्षों के चल योग ज्ञात कीजिए फिर इस योग को दूसरे व तीसरे वर्ष के बीच में रख दीजिए । फिर अगला वर्ष लेकर तीसरे व चौथे वर्ष के बीच में रख दीजिए । यह क्रम पूरा कीजिए। अब पहली जोड़ एवं दूसरी जोड़ को पुन: जोड़े एवं उसे तीसरे वर्ष के सामने रख दें । यह क्रम पूरा करें इस प्रकार अब योग 8 वर्षों का हो गया अत: प्राप्त जोड़ में 8 का भाग दे एवं चल माध्य ज्ञात करें ।

वर्ष	उत्पादन (टन में)	चार वर्षीय चल योग	युग्मों में चल योग	चार वर्षीय चल माध्य
1975	3			
1976	4			
		25		
1977	8	31	56	7
1978	10	38	69	9
1979	9	43	81	10
1980	11	47	90	11
1981	13	50	97	12
1982	14			
1983	12			

आइए अब हम इस विधि के गुण व दोषों पर नजर डालें । यह विधि समझने में सरल है, उपनति ज्ञात करने की लोचदार विधि है, पक्षपात की सम्भावना नहीं है । परन्तु इसमें एक उचित और उपयुक्त अवधि को निश्चित करना कठिन कार्य है । इसमें सभी वर्षों के उपनति मूल्य को ज्ञात नहीं किये जा सकते । गणितीय सूत्र के अभाव में इसे पूर्वानुमान के लिए प्रयोग नहीं कर सकते। ये अनियमित उच्चावचनों को पूर्णतया समाप्त नहीं कर सकते ।

(4) न्यूनतम वर्ग रीति (Least Square Method)

अब हम उस रीति की व्याख्या करेंगे जो प्रवृत्ति को ज्ञान करने के लिए सर्वोत्तम मानी जाती है । इस रीति के द्वारा ज्ञात प्रवृत्ति से वास्तविक समंकों के विचलन के वर्ग का योग सबसे कम होता है । इसलिए इसे न्यूनतम वर्ग रीति कहा जाता है । इसमें वास्तविक मूल्य (Y) दिया हुआ होता है । उपनति मूल्य (Y) निकालते है । Y तथा Y के विचलनों का योग शून्य होता है । अतः हम यह बताएंगे कि उपनति मूल्य किस प्रकार निकले जाते हैं ।

सीधी रेखा प्रवृति (Straight Line Trend)

इस विधि की व्याख्या इस इकाई संख्या 9 में न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा प्रतीपगमन समीकरण शीर्षक के अन्तर्गत कर चुके हैं । हम Y=a+bX एवं X=a+bY समीकरण हल करके a एवं b का मान निकालते हैं । प्राप्त समीकरण में X का मूल्य प्रतिस्थापित कर Y का सम्भावित मूल्य ज्ञात करते हैं अथवा समीकरण संख्या X= a+bY में Y का मूल्य प्रतिस्थापित कर X का सम्भावित मूल ज्ञात करते हैं । इस प्रकार X की Y प्रतीपगमन रेखा X=a+bY में Y के मूल्यों को रखकर X के सर्वोत्तम संगणित मूल्य ज्ञात करते हैं । इसी प्रकार Y की X पर समीकरण Y=a+bX में X के मूल्य रखकर Y के संगणित मूल्य ज्ञात करते हैं । इन्हें ग्राफ पेपर पर अंकित कर प्रतीपगमन रेखा प्राप्त कर सकते हैं ।

इसकी गणना हम प्रत्यक्ष व लघु रीति से करेंगे । प्रत्यक्ष रीति में स्वतंत्र चर-मूल्यों अर्थात समय बिन्दुओं को प्राकृतिक संख्याओं जैसे 1,2,3,4 .... संकेताक्षर दिया जाता है । फिर सूत्रों के द्वारा उपनति मूल्य निकालेंगे ।

वर्ष	1981	1982	1983	1984	1985
मूल्य	8	10	15	13	14

प्रत्यक्ष विधि द्वारा प्रवृति मूल्यों का परिकलन

इस रीति में विचलन नहीं लिए जाते हैं । मूल समंकों का सीधा प्रयोग किया जाता है ।

वर्ष	मूल्य (Y)	1981 से समय विचलन (X)	विचलनों का वर्ग (X^2)	उपनति मूल्य (XY)	Y=7.5+1.5 X
1981	8	1	8	8	7.5+1.5(1)=9.00
1982	10	2	20	20	7.5+1.5(2)=10.50
1983	15	3	45	45	7.5+1.5(3)=12.00
1984	13	4	52	52	7.5+1.5(4)=13.50
1985	14	5	70	70	7.5+1.5(5)=15.00
N=5	$\sum Y = 60$	$\sum X = 15$	$\sum X^2 = 55$	$\sum XY = 195$	

Y का X पर प्रतीपगमन

Y = a+bX

$\sum Y = Na + b\sum X$ (1)

$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$ (2)

मूल्य प्रतिस्थापित करने पर

5a+15b=60 (1)

15a+55b=195(2) समीकरण नं. 1 को 3 से गुणा करने पर

15a+45b=180(1)

15a+55b=195(2)

$\frac{- \quad - \quad -}{-10b = -15}$ घटाने पर $b = \frac{-15}{-10} = 1.5$

समीकरण नं. 1 में 1.5 रखने पर

या 5a+15(1.5)=60 या 5a+22.5=60

या 5a=60-22.5 या 5a=37.5

या $a = \frac{37.5}{5} = 7.5$ अतः Y = 7.5 + 1.5 X

नोट :- विद्यार्थी संगणित मूल्यों के आधार पर X तथा Y के मूल्यों के युग्मों को ग्राफ पेपर पर अंकित कर प्रतीपगमन रेखाएं ज्ञात कर लें ।

लघु रीति द्वारा सरल रेखा उपनति का आकलन- (जब वर्ष विषम हो)

इस रीति से हम मध्य वर्ष को आधार मानकर विभिन्न वर्षों से विचलन निकालेंगे । इन विचलनों का योग शब्द होगा। विषम वर्षों की स्थिति में तो यह रीति बहुत सरल है ।

निम्न समंकों से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा सरल रेखीय उपनति प्रदान कीजिए ।

वर्ष	1976	1977	1978	1979	1980
टी.वी. सेटों की बिक्री(हजार में)	4	6	7	8	10

हल न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा उपनति मूल्य

वर्ष (X)	टी.वी. सेटों की बिक्री (Y) (हजारों में)	विचलन मूल्य बिन्दु 1978 (dx)	(xy)	(x^2)	उपनति मूल्य Y=7+1.4X
1976	4	-2	-8	4	7.0+1.4(-2)=4.2
1977	6	-1	-6	1	7.0+1.4(-1)=5.6
1978	7	0	0	0	7.0+1.4(0)=7.0
1979	8	+1	+8	1	7.0+1.4(1)=8.4
1980	10	+2	+20	4	7.0+1.4(2)=9.8
$N=5, \sum y=35, \sum x=0, \sum xy=14, \sum x^2=10 \sum Y_e=35$					

X का Y प्रतीपगमन

X = a+bX

$$Na+\sum x.b=\sum y(1) \qquad Na+\sum x^2 b=\sum xy(2)$$

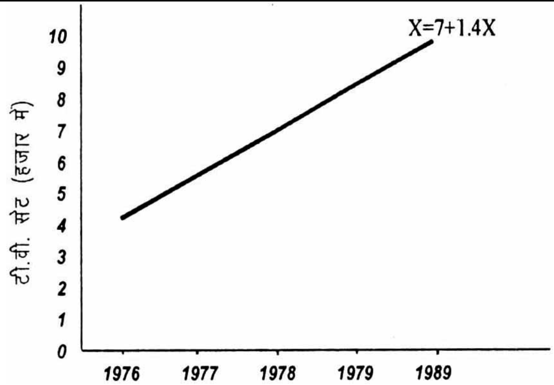
$$Na+0(b)=\sum y \qquad 0(a)+10(b)=14$$

$$Na=\sum y \qquad 10(b)=14$$

$$a=\frac{\sum y}{N} \qquad a=\frac{35}{5} \qquad a=7 \qquad b=\frac{14}{10} \qquad b=1.4 \qquad X=7+1.4X$$

प्राप्त समीकरण में X के विचलन मूल्यों का मान रखकर संगणित मूल्य ज्ञात किए जाएंगे। प्राप्त संगणित मूल नीचे तालिका में दिए गए हैं । इन मूल्यों के आधार पर प्रतीपगमन रेखा दर्शाई गई है । (रेखाचित्र 11.5)

वर्ष	1976	1977	1978	1979	1989
उपनति मूल्य	4.2	5.6	7.0	8.4	9.8



रेखाचित्र 11.5

उदाहरण - निम्न आंकडों से न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा प्रतीपगमन रेखा का निर्धारण कीजिए एवं वर्ष 1973 व 1975 के लिए प्रवृत्ति मूल्यों को ज्ञात कीजिए ।

वर्ष	1971	1972	1973	1974	1975	1976
उपनति मूल्य	101	107	113	121	136	148

हल- न्यूनतम वर्ग रीति द्‌वारा सरल रेखीय उपनति ज्ञात करने हेतु लघुरीति का प्रयोग करेंगे । यहाँ वर्षो की संख्या सम (even) है । अत: बीच के वर्ष 1973 एवं 1974 के मध्य को Origin मान कर विचलन ज्ञात किए जाएंगे । इन्हें पूर्णाक बनाने हेतु सभी विचलनों को 2 से गुणा किया गया है।

वर्ष	उत्पादित बिजली (Y)	समय विचलन विचलन आधे में 1973.5	(xy)	(x^2)	उपनति Y=a+bX
1971	101	-2.5-5	-505	25	
1972	107	-1.5-3	-321	9	
1973	113	-0.5-1	-113	1	1x21+4.71(-1)=116.29
1974	121	+.5+1	+121	1	
1975	136	+1.5+3	+408	9	121+4.71(3)=135.13
1976	148	+2.5+5	+740	25	

$N = 6 \Sigma Y = 726 \quad \Sigma X = 0 \ \Sigma XY = +330 \ \Sigma x^2 = 70$

$Y = a + bX$

$\Sigma Y = Na + b\Sigma X$

$\Sigma XY = a\Sigma X + b\Sigma X^2$ (1)

चूँकि $\Sigma X = 0$ है अत: (2)

$Na = \Sigma y$

$a = \frac{\Sigma y}{N}$ (1) इसी प्रकार $\Sigma Xy = b\Sigma X^2$ $b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$ (2)

समीकरण में मान रखने पर

$a = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{726}{6} = 121$ $b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = \frac{330}{70}$

उपनति मूल्य Y = a + bX Y = 121 + 4.71 X

उपनति मूल्य 1973 के लिए 121 + 4.71 (-1) = 116.29

उपनति स्व 1975 के लिए 121 + 4.71 (3) = 135.13

उपर्युक्त उदाहरणों में b का मान ही विकास दर (Rate of Growth) को बताता है । न्यूनतम वर्ग विधि एक गणितीय विधि होने के कारण सर्वश्रेष्ठ रीति मानी जाती है ।

11.7 अल्पकालीन उतार चढ़ावों का मापन (Measurement of Short Term Fluctuations)

काल श्रेणी में सुदीर्घकालीन प्रवृत्ति एवं अल्पकालीन उच्चावचनों दोनों का ही मिश्रण होता है । यदि चल माध्य अथवा न्यूनतम वर्ग रीति द्वारा निकाले गये उपनति मूल्यों को आप मूल्य श्रेणी में से घटा दें तो शेष बचता है उसे उच्चावचन कहते हैं । इसका मापन कई प्रकार की विधियों द्वारा किया जा सकता है ।

(1) आर्तव माध्य शाह या आर्तव विचरण सूचकांक या मौसमी परिवर्तन

प्राय: हम देखते है कि बहुत से तथ्य ऐसे हैं जिनमें मौसम के अनुसार परिवर्तन होता रहता है । जब फसल कटकर आती है तो गेहूं की कीमतें कम हो जाती है । जुलाईअगस्त में कापियों के दाम बढ़े रहते हैं । मौसमी परिवर्तन या आर्तव विचरण हम दो प्रकार से ज्ञात करेंगे ।

अल्पकालीन परिवर्तन के माध्यों द्वारा-इसमें हम सरल समान्तर माध्य की सहायता से मौसमी परिवर्तन का अनुमान लगाते हैं ।

कीमत	माह											
	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रेल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्टूबर	नवम्बर	दिसंबर
1982	15	15	13	12	11	10	13	15	17	15	14	14
1983	16	17	16	13	12	10	14	16	16	15	13	12
1984	17	19	16	14	13	13	15	17	18	15	15	16

माह	कीमतें			औसत कीमतें(त्रिवर्षीय)	मौसम परिवर्तन सूचकांक (त्रिवर्षीय / औसत)
	1982	1983	1984		
जनवरी	15	16	17	$\frac{48}{3}=16$	$\frac{16}{14.5}\times 100=100$
फरवरी	15	17	19	=17	=117
मार्च	13	16	16	=15	=103
अप्रैल	12	13	14	=13	=90
मई	11	12	13	=12	=83
जून	10	10	13	=11	=76
जुलाई	13	14	15	=14	=97
अगस्त	15	16	17	=16	=110
सितंबर	17	16	18	=17	=117
अक्टूबर	15	15	15	=15	=104
नवम्बर	14	13	15	=14	=97
दिसम्बर	14	12	16	=14	=97
				174	

$$\text{औसत} = \frac{174}{12} = 14.5$$

मौसम परिवर्तन सूचकांक= $\frac{\text{मासिक औसत मूल्य}}{\text{वार्षिक औसत मूल्य}} \times 100$

मौसमी परिवर्तन के निर्देशांकों द्वारा आर्तव विचरण

उदाहरण - सरल - माध्य रीति द्वारा मौसमी ज्ञात कीजिए

वर्ष	ग्रीष्म	मानसून	पतझड़	सर्दी
1984	30	81	62	119
1985	33	104	86	171
1986	42	153	99	221
1987	56	172	129	235
1988	67	201	136	302

हल- मौसमी सूचकांक की गणना

वर्ष	ग्रीष्म	मानसून	पतझड़	शीत	कुल	माध्य
1984	30	81	62	119	292	$\frac{292}{4} = 73$
1985	33	104	86	171	394	=98.5
1986	42	153	99	221	515	=128.85
1987	56	172	129	235	592	=148
1988	76	201	136	302	706	=176.5
योग	228	711	512	1048	2499	=624.8
औसत	228/5=45.6	142.2	102.4	209.6	499.8	=125
मौसम सूचकांक	36.5	113.8	81.9	167.6	399.9	100

हम आर्तव सूचकांकों को ज्ञात करने के लिए माध्यों का माध्य निकालेंगे $\frac{624.8}{5} = 125$ फिर इस 125 की सहायता से मौसमी सूचकांक निकालेंगे, जैसे -ग्रीष्म, के मौसमी सूचकांक $\frac{456}{125} \times 100$ =36.5

मानसून के मौसमी सूचकांक $\frac{1422}{125} \times 100 = 113.8$, $\frac{102.4}{125} \times 100 = 81.9$

(2) चल माध्यों द्वारा आर्तव विचरण (Seasonal Variations through Moving Averages)

यह रीति प्रथम रीति से अधिक श्रेष्ठ है, कारण कि इसमें चक्रीय उच्चावचनों को छोड़कर शेष अन्य सभी प्रकार के विवरणों का विश्लेषण है ।

वर्ष	1	2	3	4	5
ग्रीष्म	30	33	42	56	57
मानसून	81	104	153	172	201
पतझड़	62	86	99	129	136
सर्दी (शीतकाल)	119	171	221	235	302

हल चल माध्यों द्वारा अल्पकालिक ऋतुनिष्ठ व अनियमित उच्चावचनों का निर्धारण

वर्ष	मौसम	मूल समंक (O)	चार -चार का चल योग आवर्त योग	दो-दो का चल योग केन्द्रित योग	चार-चार का चल माध्य (T)	अल्पकालीन उच्चावचन (O-T)	आवर्त विचरण (S)	अल्पकालीन उच्चावचन (I)
C1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	$C_7 = (C_3 - C_6)$	C_8	$C_9 (C_3 - C_6)$
1.	ग्रीष्म	30	-		-	-	-	-
	मानसून	81						
	पतझड़	62	292	587	73	+11	-19	+8
	शीत	119	295	613	77	+11+42	+68	-26
2.	ग्रीष्म	33	318	660	83	-50	-75	+25
	मानसून	104	342	736	92	+12	+25	-13
	पतझड़	36	394	797	100	-14	-19	+5
	शीत	171	403	855	107	+64	+68	-4
3.	ग्रीष्म	42	452	917	115	-73	-75	+2
	मानसून	153	465	980	123	+30	+25	+5
	पतझड़	99	515	1044	131	-32	+19	-13
	शीत	221	529	1077	135	+86	+60	+18
4.	ग्रीष्म	56	548	1126	141	-85	-75	-10
	मानसून	172	578	1170	146	+26	+25	+1
	पतझड़	129	592	1195	149	-20	-19	-1
	शीत	235	603	1235	154	+81	+68	+13
5.	ग्रीष्म	67	632	1271	159	-92	-75	-17
	मानसून	201	639	1345	168	+33	+25	+8
	पतझड़	136	706	-	-	-	-	-
	शीत	302	-	-	-	-	-	-

(*) इसे निकालने के लिए अग्र सारणी देखिए।

कालम नं.8 निकालने के लिए हम निम्न सारणी बनाएंगे । यह औसत आर्तव विचरण है इन्हें नीचे एक अलग तालिका में संगणित करके यहाँ ऋतु अनुसार लिखा गया है ।

वर्ष	1	2	3	4	5	योग	माध्य
ग्रीष्म	-	-50	-73	-85	-92	-300	-75
मानसून	-	+12	+30	+26	+33	+101	+25
पतझड़	-11	-14	-32	-20	-	-77	-19
सर्दी(शीतकाल)	+42	+64	+86	+81	-	+273	+68

(2) चल माध्य अनुपात रीति (Ratio-to- Moving Average Method)

यह विधि गुणानात्मक निर्देश पर आधारित है । इसकी मान्यता है कि मौसमी विचरण दीर्घकालीन उपनति के कारण है । इस विधि में पहले हम परिवर्तन की अवधि निश्चित करते हैं तत्पश्चात् वह माध्य (T) निकालते हैं, इसके बाद $\left(\frac{O}{T}\times 100\right)$ द्वारा चल माध्य अनुपात निकालते हैं । इसे हम निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे ।

सारणी- चल माध्य अनुपात विधि द्वारा आर्तव सूचकांक निकालना ।

उदाहरण - निम्न समंकों से चल माध्य-अनुपात रीति द्वारा आर्तव विचरण सूचकांक परिकलित कीजिए।

वर्ष	1 त्रैमास	2 त्रैमास	3 त्रैमास	4 त्रैमास
1981	68	62	61	63
1982	65	58	66	61
1983	68	63	63	67

हल चल माध्य-अनुपात द्वारा आर्तव विचरण सूचकांकों का परिगणन

वर्ष	त्रैमास	मूल समंक (0)	चार–चार का चल योग	दो–दो का चल योग	4 त्रैमासिक चल माध्य (T)	चल माध्य अनुपात % $\frac{O}{T}\times 100$
1	2	3	4	5	6	7
1981	1	68				
	2	62				
	3	61	254	505	$\frac{505}{8}=63.13$	$\frac{61}{63.1}\times 100=96.63$
	4	63	251	498	62.25	=101.20
1982	1	65	247	499	62.38	=104.20
	2	58	252	502	62.75	=92.43
	3	66	250	503	62.88	=104.96
	4	61	253	511	63.88	=95.49
1983	1	68	258	513	64.13	=106.03
	2	63	255	516	64.50	=97.67
	3	63	261			
	4	67				

उपर्युक्त चल माध्य अनुपात अर्थात् कोलम नं. (C_7) के निम्न सारणी में रखेंगे ।

त्रैमासिक अवधि

वर्ष	प्रथम	द्वितीय	तृतीय	चतुर्थ	
1981	-	-	96.63	101.20]	
1982	104.20	92.43	104.96	95.49	
1983	106.03	97.67	-	-	
योग	210.23	190.10	201.69	196.6	योग= 399.32/4=99.83
औसत	$\frac{210.3}{2}$ =105.12	$\frac{190.1}{2}$ = 95.05	$\frac{201.6}{2}$ = 100.80	$\frac{196.6}{2}$ = 98.35	400
संशोधित आर्तव सूचकांक	$\frac{105.12}{99.83}\times100$ = 105.30	$\frac{95}{99.05}\times100$ = 95.83	$\frac{100.8}{99.83}\times100$ =100.97	$\frac{98.3}{99.83}\times100$ = 98.52	

माध्यों का माध्य $\frac{105.12+95.05+100.80+98.35}{4}=\frac{399.32}{4}=99.83$

संशोधित सूचकांकों का वैकल्पिक परिकलन (यहाँ संशोधन कारक 400/399.32=1) है । अत: त्रैमासिक माध्य ही आर्तव सूचकांक है । परन्तु योग 400 से अधिक अथवा कम होने पर संशोधित आर्तव सूचकांक निकालने पड़ते हैं इसकी विधि उपर स्पष्ट कर दी गई है ।

(4) प्रवृत्ति अनुपात विधि (Ratio-to-Trend Method)

काल श्रेणी की यह विधि भी पूर्ण वाली विधि की तरह गुणानात्मक निर्देश पर आधारित है तथा उपनति को उचित महत्व प्रदान करती है ।

उदाहरण- प्रवृत्ति अनुपात विधि द्वारा आर्तव सूचकांक की गणना कीजिए ।

वर्ष	1 त्रैमास	2 त्रैमास	3 त्रैमास	4 त्रैमास	योग
1984	15	20	18	17	70
1985	17	26	25	22	90
1986	20	29	27	24	100
1987	27	38	34	31	130
1988	40	46	43	41	170

हल-

वर्ष	योग I+II+III+V	औसत X	समय विचलन 1986 से	X^2		उपनति मूल्य
1984	70	17.5	-2	4	-35	28+6(-2)=16

1985	90	22.5	-1	1	-22.5	28+6(-1)=22
1986	100	25	0	0	0	28+6(0)=28
1987	130	32.5	1	1	32.5	28+6(1)=(34)
1988	170	42.5	2	4	85	28+6x(2)=40
N=5	560	ΣY=140	Σy=0	Σx^2=10	Σxy=60	ΣY=140

a= $\frac{\Sigma Y}{N} = \frac{140}{5} = 28 \quad b = \frac{\Sigma xy}{\Sigma X2} = \frac{60}{10} = 6$ (वार्षिक वृद्धि पर)

त्रैमासिक वृद्धि पर $= \frac{6}{4}$ =1.5 **इसकी सहायता से उपनति मूल्य ज्ञात करेंगे । 2 और 3 तिमाही का उपनति मूल्य** $\pm\frac{1.5}{2} = \pm 0.7\ 5$ **द्वारा 1 और 4 तिमाही का उपनति मूल्य ज्ञात करेंगे 6-1.5=4.5 शेष रहा** $\pm\frac{4.5}{2} = \pm 2.25$ **द्वारा**

तिमाही प्रवृत्ति मूल्यों की परिगणना (T)

वर्ष	Y_e	(-)2.25	(-.75)	+.75		कुल प्रवृत्ति
		I	II	III	IV	
1984	16	13.75	15.25	16.75	18.25	64
1985	22	19.75	21.25	22.75	24.25	88
1986	28	25.75	27.25	28.75	30.25	112
1987	34	31.75	33.25	34.75	36.25	136
1988	40	37.75	39.25	40.75	42.25	160
						560

सभी त्रैमासिक मूल का योग = 580

सभी त्रैमासिक प्रवृत्ति मूलों का जोड़ = 560

प्रवृत्ति अनुपात व मौसमी सूचकांक की गणना

वर्ष	तिमाही			
	I	II	III	IV
1984	109.1	131.1	107.5	93.2
1985	86.1	122.4	109.9	90.7
1986	77.7	106.4	93.9	79.3
1976	85	114.5	97.8	85.5
1988	106	117.2	105.5	97.0
योग	463.9	591.4	514.6	445.7

औसत	$\frac{463.9}{5} = 92.78$	118.28	102.92	89.14
मौसमी सूचकांक	$\frac{92.78}{100.78} \times 100$ =92.1	$\frac{118.28}{100.78} \times 100$ =117.4	$\frac{102.92}{100.78} \times 100$ =102.1	$\frac{89.14}{100.78} \times 100$ =88.4

1984 के सामने 1 तिमाही में 109.1 ज्ञात करने की विधि:

$$\frac{O}{T} \times 100 = \frac{15}{13.75} \times 100 = 109.091$$ या 109.09 लगभग 109.1

इसी प्रकार से सभी वर्षो के सभी तिमाही के प्रवृत्ति अनुपात ज्ञात किये जायेंगे । 100.78 किस प्रकार प्राप्त किया । यह प्रवृत्ति अनुपातों का माध्य है:-

$$\frac{92.78 + 118.28 + 102.92 + 89.14}{4} = \frac{403.12}{4} = 100.78$$

यह विधि बहु त लम्बी है जिसमें गणनकार्य बहु त अधिक है समय भी अधिक लगता है ।

(5) श्रृंखला मूल्यानुपात रीति (Link Relative Method)

इस रीति के प्रतिपादक प्रो. कार्ल पिर्यसन थे । इस विधि में भी गणना कार्य बहु त जटिल है।

(i) इस रीति में सर्वप्रथम श्रृंखला मूल्यानुपात निकालते हैं ।

श्रृंखला मूल्यानुपात (LR) = $\frac{\text{प्रचलित ऋतु मूल्य}}{\text{पिछला मूल्य}} \times 100$

(ii) श्रृंखला मूल्यानुपातों का समान्तर माध्य निकालते हैं ।

(iii) श्रृंखला मूल्यानुपातों को श्रृंखला सूचकांक में बदल दिया जाता है । स्मरण रहे प्रथम अवधि का सूचकांक सदैव 100

होगा और आगे की अवधियों के लिए गणना सूत्र इस प्रकार होगा:

प्रचलित ऋतु का श्रृंखला सूचकांक =$\frac{\text{चालू ऋतु का औसत श्रृंखलानुपात (ALU)} \times \text{गत ऋतु का श्रृंखलानुपात}}{100}$

(iv) प्रथम ऋतु का श्रृंखला सूचकांक ज्ञात करने हेतु इस सूत्र का प्रयोग करें-

प्रथम ऋतु का संगणित श्रृंखला अनुपात (CR) =$\frac{\text{अंतिम ऋतु का (CR)} \times \text{प्रथम ऋतु का (ALR)}}{100}$

(v) प्रथम अवधि के संगणित सूचकांक और 100 के अन्तर को ऋतुओं की संख्या से भाग देकर प्रति मौसम औसत अन्तर (Correction factor or d) ज्ञात किया जाता है । इस अन्तर के लिए आर्तव श्रृंखला सूचकांकों को निम्न ढंग से समायोजन किया जाता है । प्रथम श्रृंखला में कोई संशोधन नहीं होगा । द्वितीय सूचकांक में प्रति मौसम अन्तर ($\pm D$)के बराबर, तृतीय सूचकांक में औसत अन्तर के दुगने ($\pm 2D$) और चौथे सूचकांक में औसत अन्तर तिगुने ($\pm 3D$)के बराबर समायोजन होगा । इसी प्रकार अंतिम अवधि तक यह प्रक्रिया दोहराएं । यदि अन्तर ऋणात्मक है तो संशोधन कारक को सम्बन्धित सूचकांक में जोड़े एवं धनात्मक होने पर घटाएं ।

(vi) अन्त में संशोधित श्रृंखला सूचकांकों का समान्तर माध्य ज्ञात करे और उसे 100 मानकर प्रत्येक आर्तव श्रृंखलानुपात को प्रतिशत में बदल लें । यही आर्तव श्रृंखला सूचकांक है ।

उदाहरण- श्रृंखला मूल्यानुपात विधि से आर्तव विचरण सूचकांक ज्ञात कीजिए ।

वर्ष	ग्रीष्म	मानसून	पतझड़	शीत
1984	20	40	60	80
1985	30	30	440	90
1986	40	60	30	120
1987	50	50	70	150

हल- त्रैमासिक आर्तव विचरण सूचकांकों का आगणन (श्रृंखला मूल्यानुपात विधि)

वर्ष	ग्रीष्म	मानसून	पतझड़	शीत
1984	-	$\frac{40}{20}\times 100=200$	$\frac{60}{40}\times 100=150$	$\frac{80}{60}\times 100=133.3$
1985	$\frac{30}{80}\times 100=37.5$	$\frac{30}{30}\times 100=100$	=133.3	=225
1986	44.5	=150	=50	=400
1987	41.7	=100	=140	214.3
कुल L.R.	123.6	550	473.3	972.6
औसत L.R.	$\frac{123.6}{3}=41.2$	$\frac{550}{4}=137.5$	118.3	243.2

श्रृंखला				
सूचकांक C.R.	100	$\frac{100\times 137.5}{100}=13$	$\frac{137.5\times 118.5}{100}=$	$\frac{162.7\times 243.2}{100}=$
संशोधित C.R.	100	137.5-1d 135.5-15.75 =121.75	162.7-2d 162.7-31.5 =131.2	395.7-3d 395.7-47.25=34 8.45
संशोधित आर्तव सूचकांक	$\frac{100\times 100}{175.35}$ =57.03	$\frac{121.75\times 100}{175.35}$ =69.43	$\frac{131.2\times 100}{175.35}$ =78.82	$\frac{348.45\times 100}{175.35}$ =198.72

CR=CHAIN RELATIVE **श्रृंखला अनुपात**

समायोजन ($\pm 1d$) ($\pm 2d$) तथा ($\pm 3d$) के आधार पर किया जाता है । d का मान ज्ञात करने का तरीका है -

$$\text{प्रथम} = \frac{\text{त्रैमासिक औसत श्रृंखला} \times \text{अन्तिम अवधि पर आधारित श्रृंखला (C.R.)}}{100}$$

$$\frac{41.2\times 395.7}{100}=163$$

d संशोधन कारक (Cf) प्रति त्रैमास = $\frac{163-100}{4}=\frac{63}{4}=15.75$

2d= 15.75×2=31.5

3d= 15.75×3=47.25

संशोधित आर्तव सूचकांक का योग यहां 100×4=400 आना चाहिए । यहां भी यह 400 है । 175.34 प्राप्त करने का तरीका-

$$\frac{100+121.75+131.2+348.45}{4}=175.35$$

गणन क्रिया की शुद्धता की जाँच का आधार यह है कि संशोधित आर्तव सूचकांकों का योग 100 गुणा ऋतुओं के बराबर होना चाहिए । उपर्युक्त उदाहरण में ऋतुओं की संख्या 4 है अतः योग 100×4=400 आना चाहिए । उदाहरण में यह योग 57.1+69.4+74.8+198.7=400 है अत: परिगणन शुद्ध है ।

11.8 सारांश (Summary)

इस इकाई में आपने कालश्रेणी का अर्थ एवं इसके महत्व के बारे में जानकारी प्राप्त की । कालश्रेणी के विभिन्न संघटकों एवं उनके विघटन या विश्लेषण करने के बारे में अध्ययन किया । आपने विभिन्न विधियों द्वारा कालश्रेणी की अल्पकालीन एवं दीर्घकालीन प्रवृत्तियों के निर्धारण के बारे में अध्ययन किया ।

11.9 शब्दावली (Glossary)

प्रवृत्ति/उपनति	Secular Trend
योगात्मक मॉडल	Additive Model
गुणात्मक मॉडल	Multiplicative Model
स्वतंत्र घर	Independent Variable
आश्रित घर	Dependent Variable
रेखीय	Linear
मुक्तहस्त रीति	Free Hand Method
अर्द्ध मध्यक रीति	Semi Average Method

11.10 सन्दर्भ ग्रन्थ (Reference)

के.एल. नागर, सांख्यिकी के मूलतत्व

शुक्ल सहाय, सांख्यिकी के सिद्धान्त साहित्य भवन, आगरा

S.P. Gupta, Statistic Methods

बी.एल. अग्रवाल, सांख्यिकी के सिद्धान्त एवं अनुप्रयोग

सुदामा सिंह एवं अन्य, अर्थशास्त्रीय गणित एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी ।

11.11 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Question)

1. **अर्द्ध मध्यक रीति से उपनति ज्ञात कीजिए एवं वर्ष 1998 के लिए प्रवृत्ति मूल्य का अनुमान लगाइये ।**

वर्ष	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
उत्पादन (हजार टन में)	40	50	30	60	55	65	70	80

2. **निम्न श्रेणी से त्रिवर्षीय चल माध्य द्‌वारा उपनति मूल्य ज्ञात कीजिए एवं मूल्य समंको तथा उपनति मूल्यों का ग्राफ पर प्रदर्शन कीजिए. (दशमलव बिन्दु छोड दे)**

वर्ष	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
बिक्री(हजार रु.में)	20	24	19	21	26	22	25	26	22	30	27

3. **कालश्रेणी क्या है? इसके विभिन्न अंग एवं महत्व का वर्णन कीजिए ।**

इकाई- 12

सूचकांक (Index Number)

इकाई की रूपरेखा

12.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप

- समझ सकेगें कि सूचकांक किसे कहते हैं;
- सूचकांकों की गणना करना सीख सकेंगे;
- सूचकांकों के महत्व एवं उपयोगिता से परिचित हो सकेंगे;
- जान सकेंगे कि फिशर का सूचकांक किस प्रकार परीक्षणों पर जाता है;
- उपभोक्ता मूल्य सूचकांक के अर्थ एवं गणना विधियों से परिचित हो जाएंगे

12.1 प्रस्तावना (Introduction)

ज्ञान प्रसारण के सभी माध्यम टी.वी. रेडियो, समाचार पत्र, विभिन्न प्रकार के सूचकांकों का व्यापक प्रयोग करती हैं। राष्ट्रीय आय, राष्ट्रीय उपभोग,सामान्य मूल्य स्तर, सामान्य रोजगार, व्यापार चक्र, आर्थिक विकास दर, महंगाई, मजदूरी आदि सभी के तुलनात्मक अध्ययन में सूचकांक ही समस्त विषद व्याख्या का संक्षिप्त एवं विश्वस्त स्वरूप प्रस्तुत करते हैं। नियमित आर्थिक विकास का ज्ञान

समयावधि के आधार पर सापेक्ष स्वरूप की सुस्पष्ट झलक देता है । अर्थशास्त्री, उद्यमी, समाज सुधारक, राजनेता, श्रम संगठन, वित्त-वेत्ता, आर्थिक संस्थान सभी के लिए इन सूचकांकों की बहुत उपयोगिता है । इनके अनुसार ही वह भविष्य का स्वप्न संजोते हैं, वर्तमान का चित्र चित्रण करते हैं तथा अतीत की तुलनात्मक समीक्षा करते हैं । इसी प्रकार श्रम सूचकांक, चोट तथा व्यावसायिक बीमारियों के समंक, सामाजिक सुरक्षा समंक, उत्पादकता समंक, औद्योगिक परिवाद समंक इस प्रकार के गैर मूल्य समंक है जिनका प्रयोग एवं लोकप्रियता निरन्तर बढ़ती ही जा रही है । सामाजिक, आर्थिक तथा राजनैतिक समस्याओं के स्पष्टीकरण हेतु मूल सूचकांक तथा गैर मूल सूचकांक सभी का प्रयोग व्यापक स्तर पर होने लगा है । प्रस्तुत इकाई में आपको सूचकांकों के अर्थ, उपयोगिता एवं इसकी गणना करने की विभिन्न रीतियों से परिचित कराया जाएगा । इस इकाई में फिशर के आदर्श मूल सूचकांक एवं उपभोक्ता मूल्य सूचकांकों की गणना विधि स्पष्ट करने के बाद इकाई के अन्त में सारांश, शब्दावली एवं सन्दर्भ ग्रन्थों की सूची दी गई है । विद्यार्थियों की सुविधा के लिए कुछ अभ्यासार्थ प्रश्न दिए गए हैं ।

12.2 सूचकांक की अवधारणा (Concept of Index Number)

आप प्रतिदिन सूचकांकों की चर्चा समाचार पत्र तथा ज्ञान प्रसारण के अनेक माध्यमों में पाते होंगे । जैसे शरीर के तापमान को मापने हेतु तापमापक यंत्र सहायक होता है. उसी प्रकार सूचकांक किसी देश अथवा अर्थव्यवस्था के आर्थिक पक्ष का मापन करने में सहायक होते हैं । विकसित तथा विकासोन्मुख सभी देशों की आर्थिक-नाड़ी की धड़कन सूचकांकों की सहायता से ही ज्ञात होती है । परिवर्तन प्रकृति का सहज धर्म है; अत: सामाजिक, आर्थिक, औद्योगिक, व्यावसायिक तथा वित्तीय जगत में निरन्तर परिवर्तन होते रहते हैं । विभिन्न आर्थिक क्षेत्रों में घटित होने वाले उच्चावचनों को सापेक्षरूप में नापने की विधि ही सूचकांक है । अब आप सरलता से आज के युग में सूचकांक के प्रयोग तथा महत्व का अनुमान लगा सकते हैं । आप इन्हें ऐसी आर्थिक घटनाओं तथा परिवर्तनों का सापेक्ष माप भी कह सकते हैं जिनका प्रत्यक्ष संख्यात्मक माप संभव नहीं । विभिन्न अर्थशास्त्री एवं सांख्यिकी वेत्ताओं की कुछ अधिकृत परिभाषाओं का भी एक विहंगम अवलोकन उपयोगी होगा ।

होरेस सिक्राइस्ट के अनुसार, "सूचकांक एक ऐसा संख्यात्मक माप है, जिसके द्वारा समय, स्थान अथवा अन्य विशेषता के आधार पर किसी चर मूल्य अथवा सम्बन्धित चर मूल्यों के समूह में होने वाले परिवर्तनों को मापा जाता है ।"

स्पीगिंल के अनुसार, "सूचकांक एक ऐसा सांख्यिकी माप है जो समय, भौगोलिक स्थिति अथवा अन्य किसी विशेषता के आधार पर किसी चर-मूल्य अथवा सम्बन्धित चर मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों को प्रदर्शित करता है ।"

क्राक्सटेन तथा काउडेन के अनुसार, "सूचकांक सम्बन्धी चर मूल्यों के आकार में होने वाले अन्तरों का माप करने के साधन हैं ।"

उपर्युक्त परिभाषाओं के अवलोकन एवं मनन से आपको स्पष्ट हो गया होगा कि सूचकांक विशेष प्रकार के माध्य होते हैं, जिनकी सहायता से काल श्रेणी तथा स्थान श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृति का मापन किया जाता है ।

12.2.1 सूचकांक-रचना करते समय प्रयुक्त सावधानियां

1. सूचकांक रचना का उद्देश्य

सूचकांक रचना का उद्देश्य पूर्णतया स्पष्ट होना चाहिए । हमें सूचकांक बनाने से पहले यह ज्ञात होना चाहिए कि किस प्रकार के सूचकांक बनाए जा रहे हैं? यदि हमको जीवन निर्वाह सूचकांक रचना करनी है तो यह स्पष्ट होना चाहिए कि किस वर्ग के उपभोक्ताओं हेतु रचना करनी है । एक सूक्ष्मग्राही मूल्य सूचकांक में केवल वे ही वस्तुएं सम्मिलित की जाएगी जिनके मूल्य में बहुत तीव्रता से परिवर्तन होते रहते हैं इसके विपरीत सामान्य उद्देश्य वाले सूचकांकों में अधिक वस्तुओं को सम्मिलित करने का प्रयास किया जाता है । आधार वर्ष का चयन, वस्तुओं की संख्या, गुणवत्ता प्रतिनिधि मूल्य, माध्य का चयन तथा भारांकन का स्वरूप उद्देश्य के अनुरूप ही होता है ।

2. आधार वर्ष का चयन

आधार काल (वर्ष) का चयन करते समय पूर्ण सावधानी बरतनी चाहिए । आधार वर्ष सामान्य वर्ष हो जिसमें कोई आर्थिक, राजनैतिक, सामाजिक, भौगोलिक तथा अन्य आकस्मिक घटना घटित नहीं हुई हो । आधार काल (वर्ष) बहुत प्राचीन भी नहीं होना चाहिए । स्थिर आधार वर्ष का प्रयोग होगा अथवा श्रृंखला आधार रीति प्रयुक्त होगी, पूर्णतया स्पष्ट होना चाहिए। यह भी सम्भव है कि एक से अधिक वर्षों को भी (आधार वर्ष) आधार काल हेतु संग्रहित किया जाता है । कभी-कभी ऐसी स्थिति भी होती है जब समस्त वर्षा के समंकों का माध्य लेकर आधार काल (आधार वर्ष) निर्धारित किया जाता है ।

3. वस्तुओं का चयन

सूचकांक निर्माण करते समय समस्त वस्तुओं का चयन एवं सम्मिलित करना सम्भव नहीं है । अत: कौन सी वस्तु चयन की जाए? संख्या कितनी हो? गुणवत्ता का स्तर क्या हो? उनका वर्गीकरण किस प्रकार अपेक्षित है? इन सभी बिन्दुओं पर विशेष ध्यान देना आवश्यक है ।

4. प्रतिनिधि मूल्यों का चयन

वस्तुओं के चयन पश्चात् मूल्य के चयन का प्रश्न उठता है । थोक मूल्य लिये जायें अथवा फुटकर मूल्य । विभिन्न स्थानों पर प्रचलित मूल्यों में प्राय: अन्तर पाया जाता है । अत: किस स्थान के मूल्य को प्रतिनिधि मूल्य माना जाए। उपभोक्ता मूल्य सूचकांक रचना करते समय उस स्थान विशेष के मूल्य को ही लेना चाहिए । मूल्य प्राप्त करने का साधन निश्चित करते समय उसकी विश्वसनीयता पर बल देना परमावश्यक है । मूल्य प्राप्त करने की अवधि भी महत्वपूर्ण होती है । प्राय: साप्ताहिक मूल्य सूचकांकों में एक निश्चित दिन के ही मूल्यों का चयन किया जाता है ।

5. भारांकन विधि

विभिन्न वस्तुओं का भिन्न-भिन्न वर्गो के व्यवहार में अलग-अलग सापेक्षिक महत्व होता है । उदाहरणार्थ, अन्न, नमक, बीड़ी कार, रेफ्रीजरेटर, टेलीविजन आदि । जब विभिन्न वस्तुओं से सम्बन्धित भारों को ध्यान में रखकर सूचकांक रचित होते हैं तो उन सूचकांकों को पारित सूचकांक कहते हैं । भार आवंटित करने की दो विधियाँ प्रचलित है । 1. प्रत्यक्ष 2. अप्रत्यक्ष साथ ही भार स्थिर, अथवा परिवर्तनशील हो सकते हैं । प्राय: सूचकांक रचना में परिवर्तनशील भार ही अधिक लोकप्रिय है । सूचकांक निर्माण में भार प्रक्रिया बहुत महत्वपूर्ण होती है । भार आवंटन उस वर्ग विशेष को उससे सम्बन्धित

महत्व एवं उपादेयता को स्पष्ट करते हैं । जैसे श्रमिक तथा निर्धन वर्ग के जीवन में जीवन निर्वाह की वस्तुओं का अधिक महत्व होता है अत: इस वर्ग का सूचकांक निर्माण करते समय जीवनोपयोगी बच्चों को अधिक मार आवंटित किए जाएंगे। धनी वर्ग की आय का बहु त कम भाग जीवनोपयोगी वस्तुओं पर व्यय होता है । उनकी आय का बहु त बड़ा भाग विलासिता तथा प्रदर्शन प्रभाव की वस्तुओं पर व्यय होता है अत: धनी व्यक्तियों के जीवन निर्वाह सूचकांक रचना करते समय विलासिता तथा प्रदर्शन प्रभाव की वस्तुओं पर भार आवंटन अधिक होगा, जीवनोपयोगी वस्तुओं पर कम ।

6. उपयुक्त माध्य का चयन

गुणोत्तर माध्य सूचकांक संरचना हेतु सर्वश्रेष्ठ माना जाता है । परन्तु व्यवहार में प्राय: समान्तर माध्य का ही प्रयोग होता है । क्योंकि गुणोत्तर माध्य सापेक्षरूप से अधिक जटिल है । यदि जनसंख्या, आर्थिक विकास दर अथवा अन्य किसी ऐसी परिस्थिति में जहां परिवर्तन दर मिश्रित (Compound) है उस स्थिति में गुणोत्तर माध्य का ही प्रयोग किया जाएगा।

7. उपयुक्त सूत्र का चयन

सूचकांक सरंचना के व्यावहारिक सूत्र अनेक हैं परन्तु फिशर के (आदर्श सूचकांक निर्माण करने के) सिद्धान्त का ही अधिक प्रयोग होता है । सरलता तथा अधिक से अधिक चरों का प्रयोग करते हु ए समान्तर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य के निश्चित स्वरूप का प्रयोग होता है । यद्यपि फिशर के सूत्र को सर्वश्रेष्ठ स्वीकारा गया है परन्तु हर परिस्थिति में इसका प्रयोग नहीं हो सकता।

12.3 सूचकांक की रचना (Construction of Index Number)

प्रत्येक अर्थव्यवस्था में विभिन्न आय समूह होते हैं । उनकी उपभोग प्रवृति तथा उपभोग क्षमता में भी भिन्नता पाई जाती है । अत: सामान्य सूचकांक सामान्य मूल्य स्तर में होने वाले परिवर्तन के परिणामस्वरूप विभिन्न वर्गो के रहन-सहन तथा आर्थिक गतिविधियों पर पड़ने वाले प्रभाव की व्याख्या नहीं करता अत: निर्देशांक निर्माण करते समय विभिन्न वस्तुओं के उपयोग अनुपात को भी अवश्य ध्यान में रखना चाहिए।

प्रदत्त सूचकांक निर्माण विधियों में से लेस्पेयर, पाशे तथा फिशर की सूचकांक निर्माण विधियों का यहां विवेचन किया जा रहा है ।

12.3.1 लेस्पेयर विधि (Laspeyre's Method) व्याख्या तथा उदाहरण

लेस्पेयर विधि के अन्तर्गत आधार वर्ष की वस्तुओं के परिणाम को भार मान लिया जाता है । प्रचलित वर्ष के मूल्य तथा आधार वर्ष के वस्तुओं के परिणाम का गुणा करके इसमें आधार वर्ष के मूल तथा आधार वर्ष की मात्रा के गुणनफल का भाग देकर 100 का गुणा कर दिया जाता है । इस गणितीय प्रक्रिया से जो समंक प्राप्त होगा वह लेस्पेयर विधि का भारित सूचकांक होगा। इस प्रक्रिया को इस प्रकार सूत्रबद्ध किया जाता है :

सूचकांक $(p_{01}) = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$

जहां p_0= आधार वर्ष का मूल्य

q_0=आधार वर्ष की मात्रा

p_1=चालू वर्ष का मूल्य

q_1=चालू वर्ष की मात्रा

Σ = योगफल

उदाहरण : 1

निम्नलिखित आकड़ों का प्रयोग करते हुए लेस्पेयर विधि के अनुसार सूचकांक की रचना करें।

वस्तु	आधार वर्ष		चालू वर्ष (वर्तमान वर्ष) मूल्य (रू) (p_1)	मात्रा (q_1)	गुणनफल (p_0q_0)	गुणनफल (p_1q_0)
	मूल्य (रू) (p_0)	मात्रा (q_0)				
अनाज	200 प्रति क्विंटल	2 क्विंटल	250	3 किलोग्राम	400	500
घी	50 प्रति किलो	4 किलोग्राम	60	3 किलोग्राम	200	240
तेल	16 प्रति किलो	6 किलोग्राम	15	8 किलोग्राम	96	90
चीनी	5 प्रति किलो	10 किलोग्राम	6	12 किलोग्राम	50	60
चावल	4 प्रति किलो	50 किलोग्राम	5	6 किलोग्राम	200	250
					946 $\Sigma p_0 q_0$	1140 $\Sigma p_1 q_0$

लेस्पेयर विधि सूचकांक $P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$

$= \frac{1140}{946} \times 100$

$= \frac{114000}{946} = 120.5$

P_{01} = 120.5

12.3.2 पाशे विधि (Paasche's Method) व्याख्या तथा उदाहरण

इस विधि के अन्तर्गत आधार वर्ष के स्थान पर चालू वर्ष (वर्तमान वर्ष) की वस्तुओं की मात्रा अथवा परिमाण (Quantity) को भार माना जाता है । इस विधि के अन्तर्गत सूचकांक निर्माण सूत्र इस प्रकार है ।

जहां : सूचकांक $P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$

p_1 = चालू वर्ष का मूल्य

q_1 = चालू वर्ष की मात्रा

Σp_0 = आधार वर्ष की मात्रा

Σ = योगफल

(अ) विभिन्न वस्तुओं की वर्तमान कीमतों (p_1) को वर्तमान वर्ष की वस्तुओं के परिमाण (q_1)से गुणा करो और $\Sigma p_1 q_1$ ज्ञात कर लीजिए ।

(ब) विभिन्न वस्तुओं की आधार वर्ष की कीमतों को वर्तमान वर्ष की वस्तुओं के परिमाण (q_1) से गुणा करके Σp_0q_1 ज्ञात कर लीजिए ।

(स) अब आप Σp_1q_1 में Σp_0q_1 से भाग दीजिए और भागफल को 100 से गुणा कर दीजिए ।

उदाहरण-2 इस प्रकार प्रदत्त जानकारी के अनुसार पाशे विधि से सूचकांक रचना कीजिए।

वस्तु	आधार वर्ष		वर्तमान वर्ष		Σp_1q_1	Σp_0q_1
	मूल्य (p_0)	मात्रा (q_0)	मूल्य (p_1)	मात्रा (q_1)		
गेहूँ	150	3	250	2	500	300
चावल	500	1	400	1	400	500
चीनी	700	1	600	1	600	700
दाल	800	1	500	1	500	800
तेल	1600	1	2000	1	2000	1600
					4000 Σp_1q_1	3900 Σp_0q_1

पाशे विधि $P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} = \frac{4000}{3900} \times 100$`

$$= \frac{40}{39} \times 100$$

= 102.56 लगभग

लेस्पेयर तथा पाशे विधियों का अलग-अलग अध्ययन करने के पश्चात् अब एक उदाहरण की सहायता से सूचकांक निर्माण करने की इन विधियों का संयुक्त एवं तुलनात्मक विश्लेषण करें ।

उदाहरण-3 निम्नलिखित की सहायता से लेस्पेयर तथा पाशे विधियों से सूचकांक का निर्माण करियेः-

वस्तु	आधार वर्ष		चालू वर्ष		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
	(q_0)	(p_0) Rs.	(q_1)	(p_1) Rs.				
गेहूँ	15 कि.	3 प्रति कि.	20 कि.	4 प्रति कि.	60	45	80	60
घी	6 कि.	40 प्रति कि.	8 कि.	50 प्रति कि.	300	240	400	320
चीनी	8 कि.	10 प्रति कि.	10 कि.	12 प्रति कि.	96	80	120	100
					456	365	600	480
					Σp_1q_0	Σp_0q_0	Σp_1q_1	Σp_0q_1

लेस्पेयर्स सूचकांक

$$p_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} = 100$$

$$= \frac{456}{365} \times 100$$

पाशे का सूचकांक-

$$p_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100$$

$$= \frac{600}{480} \times 100$$

$$= \frac{456000}{365} \qquad\qquad = \frac{60000}{480}$$

$$p_{01} = 124.93 \qquad\qquad p_{01} = 125$$

लेस्पेयर तथा पाशे विधियों द्वारा भारित सूचकांकों की रचना करते समय यह भली प्रकार अध्ययन कर लिया है कि इन विधियों में स्थिर भारों का प्रयोग होता है और समस्त समंकों का भी पूर्ण प्रयोग नहीं होता है। आप व्यावहारिक जीवन में प्राय: यह देखते है कि वस्तुओं के मूल्य में परिवर्तन होता रहता है। मूल्य परिवर्तन के परिणामस्वरूप वस्तु की मांग मात्रा में भी परिवर्तन होता रहता है। इस प्रकार सूचकांक निर्माण करने की विधियां एकांगी तथा अपूर्ण है। परिवर्तनशील भारों का प्रयोग ही अधिक सार्थक है। अत: सूचकांक निर्माण हेतु ऐसी विधि की अन्वेषणा की गई जिसमें समस्त चरों को प्रयुक्त किया जा सके।

12.3.3 फिशर का आदर्श मूल्य सूचकांक

प्रोफेसर इरविंग फिशर ने सूचकांक रचना करने के 134 सूत्रों का गहन अध्ययन करने के पश्चात सूचकांक रचना हेतु एक आदर्श सूचकांक सूत्र प्रतिपादित किया। इस सूत्र द्वारा संरचित सूचकांक को फिशर का आदर्श सूचकांक कह कर संबोधित किया गया। आदर्श सूचकांक रचना करते समय आप आधार वर्ष तथा चालू वर्ष दोनों में ही प्रयुक्त वस्तुओं के परिणामों को भार के रूप में प्रयोग करते हैं। इसकी रचना करते समय प्रत्येक वस्तु के आधार वर्ष प्रदत्त मूल्य p_0 को तथा आधार वर्ष के परिमाण को q_0 से प्रकट किया जाता है। चालू अथवा वर्तमान वर्ष के मूल्य p_1 तथा प्रचलित वर्ष की मात्रा q_1 से प्रकट की जाती है। इसकी गणना विधि फिशर की आदर्श सूचकांक रचना सूत्र के अनुसार इस प्रकार है।

फिशर का आदर्श सूचकांक-

$$p_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100$$

फिशर के उपर्युक्त सूत्र में सभी तत्वों का समुचित प्रयोग किया जाता है। अब इस सूत्र के प्रयोग हेतु विस्तृत जानकारी निम्नलिखित है :-

Σp_0 आधार वर्ष की प्रत्येक वस्तु का मूल्य — $\Sigma p_1 q_0 = p_1 \times q_0$ का योग

Σq_0 आधार वर्ष की प्रत्येक वस्तु का परिमाण — $\Sigma p_0 q_0 = p_0 \times q_0$ का योग

Σp_1 चालू वर्ष का मूल्य — $\Sigma p_1 q_1 = p_1 \times q_1$ का योग

Σq_1 चालू वर्ष में प्रत्येक वस्तु का परिमाण — $\Sigma p_0 q_1 = p_0 \times q_1$ का योग

उदाहरण-4 उपर्युक्त फिशर के आदर्श सूचकांक सूत्र के आधार पर निम्नलिखित समंकों की सहायता से सूचकांक निर्माण कीजिए।

वस्तु	मूल्य		मात्रा	
	आधार वर्ष	चालू वर्ष	आधार वर्ष	चालू वर्ष
अ	6	1	50	56
ब	2	2	100	120
स	4	6	60	60

द	10	12	30	64

हल- फिशर के आदर्श सूचकांक की रचना:

वस्तु	आधार वर्ष		चालू वर्ष		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
	(p_0)	(q_0)	(p_1)	(q_1)				
अ	6	50	10	56	500	300	560	336
ब	2	100	2	120	200	200	240	240
स	4	60	6	60	360	240	360	240
द	10	30	12	64	360	300	768	640
					1420	1040	1928	1456
					$\Sigma\ p_1q_0$	$\Sigma\ p_0q_0$	$\Sigma\ p_1q_1$	$\Sigma\ p_0q_1$

फिशर का आदर्श सूचकांक

$$p_{01}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}\times 100=\sqrt{\frac{1420}{1040}\times\frac{1928}{1456}}\times 100$$

$$=\sqrt{\frac{17111}{9496}}\times 100=1.34\times 100=134$$

12.4 समय उत्क्राम्यता परीक्षण (Time Reversal Test)

इस आशय है कि यदि आधार वर्ष पर आधारित करते हुए चालू वर्ष (Current Year) का सूचकांक ज्ञात किया जाये और इसी प्रकार चालू वर्ष पर आधारित आधार वर्ष (Base Year) का सूचकांक ज्ञात किया जाये तो इन दोनों का गुणनफल 1 आना चाहिए । स्पष्ट है कि दोनों सूचकांक एक दूसरे के व्युत्क्रम (Reciprocal) होने चाहिए ।

सूत्रानुसार :- $p_{01}\times p_{10}=1$

अब इन प्रतीकों का स्पष्टीकरण इस प्रकार है ।

p_{01} आधार वर्ष के मूल्यों पर आधारित चालू वर्ष का मूल्य सूचकांक

p_{10} चालू वर्ष के मूल्यों पर आधारित आधार वर्ष का मूल्य सूचकांक

इस प्रकार समय उत्क्रम्यता परीक्षण सफल है यदि :-

$$p_{01}\times p_{10}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\times\frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}\times\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1}=1}$$

समय उत्क्रम्यता परीक्षण को आप निम्नलिखित बोध प्रश्न की सहायता से और भी भली प्रकार समझ लेंगे । तत्पश्चात् फिशर का आदर्श सूचकांक ज्ञात करने हेतु इस पाठ के अन्त में दी गई विभिन्न अभ्यास माला में इस परीक्षण की जानकारी एवं अभ्यास कीजिए ।

उदाहरण - 5 फिशर के सूचकांक की रचना कीजिए एवं सिद्ध कीजिए कि यह सूचकांक समय उत्क्राम्यता परीक्षण पूरा करता है ।

वस्तु	आधार वर्ष		चालू वर्ष	
	मूल्य (p_0)	मात्रा (q_0)	मूल्य (p_1)	मात्रा (q_1)
अ	8	50	12	60
ब	3	150	5	200
स	4	80	6	120
द	12	40	15	60
य	10	50	12	80

हल-

वस्तु	(p_0)	(q_0)	(p_1)	(q_1)	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
अ	8	50	12	60	400	600	480	720
ब	3	150	5	200	450	750	600	1000
स	4	80	6	120	320	480	480	720
द	12	40	15	60	480	600	800	960
य	10	50	12	80	500	600	800	960
					$\Sigma\ p_0q_0$	$\Sigma\ p_1q_0$	$\Sigma\ p_0q_1$	$\Sigma\ p_1q_1$
					150	3030	3080	4300

फिशर का आदर्श सूचकांक (Fisher's Ideal Index No.)

$$p_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{3030}{2150} \times \frac{4300}{3080}} \times 100 \quad = \sqrt{\frac{303}{215} \times \frac{430}{308}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{303}{154}} \times 100 = \sqrt{1.9670} \times 100 = 1.402 \times 100 = 140.2$$

समय उत्क्राम्यता परीक्षण (Time Reversal Test)

$P_{01}.P_{10}=1;$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0 \times \Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_0 \Sigma p_1 q_1}}$$

$$= \sqrt{\frac{3030}{2150} \times \frac{4300}{3080} \times \frac{2150 \times 3080}{3030 \times 4300}} = \sqrt{1} = 1$$

12.5 तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण (Factor Reversal Test)

अब तक आप फिशर के आदर्श सूचकांक रचना तथा समय उत्क्राम्यता परीक्षण से सुपरिचित हो चुके हैं । तत्व उक्राम्यता परीक्षण का आशय है कि यदि मूल्य के स्थान पर मात्रा तथा मात्रा के स्थान पर मूल्य रखकर q_{01} रचना की जाये तो उसका तथा मूल्य सूचकांक का गुणनफल, चालू वर्ष

(Current Year) के समस्त व्यय ($\Sigma p_1 q_1$) और आधार वर्ष के कुल व्यय ($\Sigma p_0 q_0$) के अनुपात के समान होना चाहिये। उदाहरणार्थ यदि 2008 में 2000 की अपेक्षा मूल्य दुगने हो जाएं और परिमाण (Quantity) तीन गुनी हो जाए तो 2008 में कुल व्यय 2000 की तुलना में 6 गुने हो जाने चाहिए। स्वयं फिशर का अभिमत है कि "जिस प्रकार दो समय का परस्पर परिवर्तन करने से असंगत फल प्राप्त न हो ठीक उसी प्रकार यह भी संभव होना चाहिए कि मूल्यों तथा मात्राओं के प्रतिस्थापन करने पर भी असंगत फल प्राप्त न हो अर्थात् दोनों परिमाण आपस में गुणा करने पर वास्तविक मूल्य अनुपात प्राप्त हो।"

तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण के विषय में या लुन चाऊ (Ya-Lun-Chou) ने बताया कि इसमें कीमत सूचकांक और मात्रा सूचकांक का गुणनफल तत्संवादी वास्तविक मूल्य सूचकांक के बराबर होना चाहिए। फिशर का सूत्र तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण पर भी खरा उतरता है।

सूत्र : $p_{01} \times q_{01} \dfrac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ (वास्तविक मूल्य अनुपात प्राप्त होना चाहिए।)

$$p_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \quad \text{तथा} \quad q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_0}}$$

अत: अब तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण हेतु इस प्रकार ज्ञात कर लें।

$$p_{01} \times q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_0}}$$

$$\sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

फिशर के सूत्र के प्रयाग से वास्तव में यह आनुपातिक सम्बन्ध भी प्राप्त हो जाता है। जिस प्रकार समय उत्क्राम्यता परीक्षण को एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट किया उसी प्रकार अब तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण का अवलोकन कर ले।

उदाहरण- 6 फिशर के सूचकांक को गणना करके सिद्ध कीजिए कि यह सूचकांक तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण पर खरा उतरता है।

वस्तु	आधार वर्ष		चालू वर्ष	
	मूल्य	मात्रा	मूल्य	मात्रा
अ	8	4	16	8
ब	10	5	20	10
स	15	6	30	12

हल-

वस्तु	(p_0)	(q_0)	(p_1)	(q_1)	p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
अ	8	4	16	8	32	64	64	128
ब	10	5	20	10	50	100	100	200
स	15	6	30	12	90	180	180	360

					$\Sigma\ p_0q_0$	$\Sigma\ p_1q_0$	$\Sigma\ p_0q_1$	$\Sigma\ p_1q_1$
					172	344	344	688

इस प्रकार इस प्राप्त जानकारी के अनुसार तब उत्क्राम्यता परीक्षण किया जा सकता है । तत्व उक्राम्यता हेतु वर्णित सूत्र:

$$p_{01} \times q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_0}}$$

$= \sqrt{\frac{688}{172} \times \frac{688}{172}} \quad = \frac{688}{172}$ जो सूत्र के अनुसार $\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ है, इस प्रकार से तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण स्पष्ट रूप से सिद्ध होता है ।

तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण का विश्लेषण करते समय सन् 1983 ई. तथा सन् 1988 ई. के मूल्य. मात्रा के परिवर्तन का गुणात्मक सम्बन्ध प्रकट किया था । इस परीक्षण हेतु प्रयुक्त उदाहरण का यदि आप ध्यान से मनन करें तो स्पष्ट होगा कि आधार वर्ष की तुलना में प्रचलित वर्ष (Current Year) के मूल्य दुगने हैं; और आधार वर्ष (Base Year) की तुलना में चालू वर्ष का परिमाण भी दुगना है । इस प्रकार दोनों अनुपातों का गुणनफल (2×2=4) चार है । यही सम्बन्ध $\frac{688}{172}$ में स्पष्ट सिद्ध होता है । इस परीक्षण में भी फिशर का सूत्र पूर्णतया सही सिद्ध होता है ।

12.6 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (Consumer Price Index)

आप अपने दैनिक जीवन में स्पष्ट रूप से देखते हो कि भिन्न-भिन्न वर्गों के व्यक्ति विभिन्न प्रकार की वस्तुओं का भिन्न-भिन्न समय पर भिन्न-भिन्न अनुपात में उपयोग करते हैं । अत: मूल परिवर्तन का प्रभाव भी अलग-अलग होता है । इस प्रकार आप इसे सहज रूप से अभिव्यक्त कर सकते हैं किसी स्थान से सम्बन्धित वर्ग विशेष पर पड़ने वाले मूल्य परिवर्तनों के प्रभाव का माप करने हेतु जो सूचकांक बनाये जाते हैं उन्हें निर्वाह व्यय सूचकांक कहते हैं । आप भली प्रकार जान गए है कि निर्वाह एवं सूचकांक किसी वर्ग के उपभोक्ताओं द्वारा उपभोग की जाने वाली बच्चों के फुटकर मूल्यों में होने वाले उतार-चढ़ाव मा मापन करने के उद्देश्य से बनाए जाते हैं । इसीलिए आप इनको उपभोक्ता मूल्य सूचकांक भी कह सकते हो ।

आप मजदूरों को तथा अन्य निश्चित वेतनभोगी (आय) वर्ग को समय-समय पर मजदूरी तथा वेतन बढ़ाने के लिए हड़ताल करते हु ए, नारा लगाते हु ए तथा अन्य माध्यमों का सहारा लेते हु ए देखते हो । आपने भी कभी सोचा है कि यह सब ऐसा क्यों करते हे' ऐसा सब कुछ क्यों होता है? इसकी अर्थपूर्ण व्याख्या उपभोक्ता मूल्य सूचकांकों की सहायता से ही की जा सकती है । आप हमारे समाज (मानव समाज) में इसके महत्व को भली प्रकार से समझ लेंगे । आप इनकी सहायता से एक वर्ग के उपभोक्ता के रहन-सहन के व्यय में होने वाले परिवर्तनों का पता चल जाता है जिसके आधार पर मूल्य नियंत्रण करके आवश्यकतानुसार राशनिंग व्यवस्था की जा सकती है । भिन्न-भिन्न कर्मचारियों का महंगाई भत्ता एवं न्यूनतम मजदूरी की राशि भी उपभोक्ता मूल्य सूचकांक के अनुसार ही निश्चित की जाती है ।

इन सूचकांकों को बनाते समय यह मान लिया जाता है कि जिस वर्ग के उपभोक्ताओं हेतु इन्हें बनाया जा रहा है उस वर्ग के सभी उपभोक्ताओं की आवश्यकताएं लगभग समान है । भारत में कृषक वर्ग तथा ग्रामीण श्रमिक के संदर्भ में यह एक सामान्य बात है । यह भी आपको मानना होगा कि उपभोग की जाने वाली वस्तु तथा उनकी मात्रा, आधार वर्ष तथा चालू वर्ष में भी पूर्णतया समान रही है । यद्यपि भारत में विभिन्न स्थान पर समान मूल्य नहीं पाए जाते परन्तु समान मूल्य की कल्पना की जाती है । सूचकांक निर्माण में सम्मिलित वस्तुएँ उस वर्ग के उपभोग का पूर्ण रूप से प्रतिनिधित्व करते हैं । उपभोक्ता मूल्य सूचकांक औसत रूप से ही सत्य होते हैं । भारत में इन सूचकांकों के निर्माण में अनेक कठिनाई आती है ।

- **उपभोक्ता मूल्य सूचकांकों की रचना में कठिनाइयाँ**

(अ) आप अपने दैनिक जीवन में देखते है कि उपभोक्ताओं के जीवन स्तर, आय, व्यवसाय तथा स्थान के अनुसार अनेक अन्तर पाए जाते हैं । इन भिन्नताओं के कारण एक उपभोक्ता मूल्य सूचकांक सभी स्थान तथा सभी उपभोक्ताओं हेतु प्रयुक्त नहीं किए जा सकते हैं ।

(ब) आपको आय, व्यय तथा रूचि भिन्नता की समय-समय पर चर्चा की है । अत: हम प्राय: देखते हैं कि परिवार का आकार उपभोक्ताओं की रूचि, व्यय-अनुपात आदत, उपभोग प्रवृत्ति तथा अन्य परिस्थितियां भिन्नता लिए हु ए होती है। इस प्रकार किसी वस्तु के मूल्य परिवर्तन का उस वर्ग के सभी उपभोक्ताओं पर एकसा प्रभाव नहीं पड़ता । यदि मांस तथा अण्डा का मूल्य बढ़ जाए तो उस स्थान के शाकाहारी उपभोक्ताओं पर कोई प्रभाव नहीं पडेगा ।

(स) आप यह भली प्रकार देखते हो कि हम अपने उपयोग हेतु स्थानापन्न वस्तुओं का प्रयोग भी करते हैं । अत: वस्तुओं की किस्म तथा परिणाम में समय और मूल्य के साथ अन्तर आ जाता है । परिणामस्वरूप इनसे तुलनात्मक विश्लेषण सम्भव नहीं हो पाता । यदि गेहूं का मूल्य बहु त अधिक बढ़ जाएगा तो जौ, जार, बाजरा तथा अन्य खाद्यान्नों का उपयोग होने लगेगा ।

(द) आपको यह स्पष्ट किया था कि इनकी रचना फुटकर मूल्यों द्वारा होती है । प्राय: देखते हैं कि फुटकर मूल्यों में विभिन्न स्थान पर बहु त अन्तर पाया जाता है । इस प्रकार के सूचकांक विभिन्न उपभोक्ता वर्ग तथा विभिन्न स्थानों के लिए अलग-अलग बनाए जाते हैं ।

अब उन चरणों की भी जानकारी प्राप्त कर लें जिनका उपयोग उपभोक्ता मूल्य सूचकांक रचना में किया जाता है

(1) आप सर्वप्रथम यह निश्चित कर लीजिए कि उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की रचना किस वर्ग के लिए कर रहे हैं?

(2) आप इस उपभोक्ता वर्ग में से दैव-प्रतिचयन विधि अनुसार कुछ परिवारों का चयन कर लीजिए। तत्पश्चात् आप इन परिवारों की आय व्यय की मदें, वस्तुओं की मात्रा, परिवार का आकार, वस्तुओं का मूल्य आदि की जानकारी प्राप्त कर लें । आप अपनी सुविधानुसार उपभोग वस्तुओं को 5 प्रमुख श्रेणियों में विभाजित कर लीजिएगा -

(अ) खाद्य सामग्री (ब) वस्त्र (स) ईंधन (द) मकान किराया (य) विविध व्यय

(3) अब आप चयनित वस्तुओं के उन स्थानों से विश्वस्त सूत्रों से फुटकर मूल्य ज्ञात कर लो । जहां से उस वर्ग के उपभोक्ता इन वस्तुओं को खरीदते हैं ।

(4) आपको भारांकन जानकारी पहले मिल चुकी है । अत: अब महत्व के आधार पर विभिन्न वस्तुओं का भा]र आवंटन कर लें । भार आवंटन आप दो प्रकार से कर सकते हैं। (अ) आधार वर्ष में उपभोग की गई वस्तु की मात्रा q_0 अथवा (ब) आधार वर्ष में प्रत्येक वस्तु पर किए जाने वाले व्यय का मूल (Σp_0q_0) के अनुपात में । मात्रा भार तथा मूल्य भार के आधार पर आप भारित उपभोक्ता मूल सूचकांक की रचना कर सकते हो ।

12.6.1 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक समूही व्यय रीति

आपको उपभोक्ता मूल्य सूचकांक रचना की दो विधियों का सहज ज्ञान आवश्यक है - (1) समूही व्यय रीति अथवा भारित समूही रीति (Aggregative Expenditure Method or Weighted Aggregative Method) । इसकी रचना हेतु आप आधार वर्ष में उपभोग की गई वस्तुओं की मात्रा q_0 और आधार वर्ष के मूल्यों p_0 को गुणा करके Σp_0q_0 ज्ञात कर लेते हैं । आधार वर्ष की वस्तु की मात्रा तथा चालू वर्ष (Current year) के मूल्य p_1 का गुणा कर दो तत्पश्चात् जोड़कर p_1q_0 ज्ञात करें । अब आपको निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करना है

$$\text{चालू वर्ष का सूचकांक} = \frac{\text{चालू वर्ष का समूही व्यय}}{\text{आधार वर्ष का समूही व्यय}} \times 100 \text{ अथवा } \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times 100$$

एक उदाहरण देकर समूही व्यय रीति तथा पारिवारिक बजट रीति से अलग-अलग उपभोक्ता सूचकांक रचना का अभ्यास कराया है ।

उदाहरण-7

निम्नलिखित आकड़ों की सहायता से (अ) समूही व्यय रीति तथा (ब) पारिवारिक बजट रीति का प्रयोग करते हु ए उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की रचना कीजिए । आप यह भी भली प्रकार स्पष्ट करें कि दोनों विधियों द्वारा सूचकांकों में कोई अन्तर नहीं आता है ।

वस्तुएं	परिणाम	आधार वर्ष(1987)	प्रचलित वर्ष(1988)
		मूल्य	मूल्य
चावल	6 क्विंटल	Rs. 100 प्रति क्विंटल	Rs.120
गेहूँ	8 क्विंटल	Rs. 80 प्रति क्विंटल	Rs.90
बाजरा	1 क्विंटल	Rs. 70 प्रति क्विंटल	Rs.70
दाल	2 क्विंटल	Rs. 120 प्रति क्विंटल	Rs.115
घी	20 कि.ग्रा.	Rs. 12 प्रति कि.ग्रा.	Rs.15
चीनी	1 क्विंटल	Rs. 100 प्रति क्विंटल	Rs.170

हल- (1) समूही व्यय रीति द्वारा उपभोक्ता सूचकांक रचना

वस्तुएं	परिणाम (q_0)	आधार वर्ष मूल्य (p_0)	चालू वर्ष मूल्य (p_1)	p_1q_0	p_0q_0
चावल	6	100	120	720	600

गेहूँ	8	80	90	720	640
बाजरा	1	70	70	70	70
दाल	2	120	115	230	240
घी	20	12	15	300	240
चीनी	1	160	170	170	160
				2210 $\Sigma\ p_1q_0$	1950 $\Sigma\ p_0q_0$

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक $P_{01} = \dfrac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$

$$= \frac{2210}{1950} \times 100 = \frac{22100}{195} = 113.33$$

आधार वर्ष के परिमाण तथा चालू वर्ष की कीमत गुणा करे $(p_1 \times q_0 = \sum p_1 q_0)$ जोड़ लिया गया है । इसी प्रकार आधार वर्ष का परिमाण तथा आधार वर्ष मूल का गुणा करके $(p_0 \times q_0 = \sum p_0 q_0)$ जोड़ लिया गया है तत्पश्चात् $\sum p_1 q_0$ में 100 का गुणा करके $\sum p_0 q_0$ का भाग दिया गया है । इस प्रकार उपभोक्ता मूल्य सूचकांक प्राप्त किए गए हैं ।

इन्हीं आकडों का प्रयोग करते हुए इसी उदाहरण को पारिवारिक बजट रीति द्वारा हल करके उपभोक्ता मूल सूचकांक परिकलित किए गए हैं ।

12.6.2 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक पारिवारिक बजट रीति (Family Budget Method)

इस विधि में पहले मूल्यानुपात (R) ज्ञात किए जाते हैं । मूल्यानुपातों का मार (W) से गुणा करके RW निकाले जाते हैं । RW का योग ज्ञात किया जाता है एवं इस योग $\left(\sum RW\right)$ में भारों के योग $\left(\sum W\right)$ का भाग देकर सूचकांक ज्ञात किया जाता है ।

उदाहरण-8 पारिवारिक बजट रीति द्वारा उपभोक्ता मूल्य सूचकांक रचना :

वस्तुएं	मात्रा	इकाई q_0	1987 में मूल्य p_0	1988 में मूल्य p_1	$\frac{p_1}{p_0} \times 100$ R	$p_1 q_o$	R.W. (W)
चावल	6 क्विंटल	क्विंटल	100	Rs. 120	120	600	72000
गेहूँ	8 क्विंटल	क्विंटल	80	Rs. 90	112.5	640	72000
बाजरा	1 क्विंटल	क्विंटल	70	Rs. 70	100	70	7000
दाल	2 क्विंटल	क्विंटल	120	Rs. 115	95.83	240	23000
घी	20 कि.ग्रा.	कि.ग्रा.	12	Rs. 15	125	240	30000
चीनी	1 क्विंटल	क्विंटल	160	Rs. 170	106.25	160	17000
						$\sum w =$	$\sum w =$ =221000

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक $\frac{\sum RW}{\sum W}=\frac{221000}{1950}=113.33$

आप प्रत्येक स्थिति में $\frac{P_1}{P_0}\times 100$ करके R (Relative) ज्ञान कर लीजिए । $p_0 X q_0$ करके W (Weights) ज्ञात कर लीजिए । पुन: R X W करके R W की संगणना कर लो । तत्पश्चात् सूत्र का प्रयोग कर पारिवारिक बजट रीति द्वारा उपभोक्ता सूत्र का प्रयोग कर पारिवारिक बजट रीति द्वारा उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की रचना कर लीजिए।

अब आपने भली प्रकार समझ लिया है कि दोनों विधियों के प्रयोग से मूल्य सूचकांक समान ही आया है । आप थोड़ा ध्यान देकर उपर्युक्त वर्णित विधि का प्रयोग करते हुए R (Relative) ज्ञात करने की विधि और भली प्रकार समझ लें।

प्रत्येक वस्तु का $\frac{p_1}{p_0}\times 100$

चावल $\frac{120}{100}\times 100=120$

बाजरा $\frac{70}{70}\times 100=100$

घी $\frac{15}{12}\times 100=125$

गेंहूँ $\frac{90}{80}\times 100=112.5$

दाल $\frac{115}{120}\times 100=95.83$

चीनी $\frac{170}{160}\times 100=106.25$

अब तक विभिन्न प्रकार के सूचकांक रचना के अनेक सूत्र स्पष्ट किए गए हैं । अगले खण्ड में हम सूचकाँकों के महल एवं उपयोग की चर्चा करेंगे ।

12.7 महत्व तथा उपयोग (Importance and Uses)

1. जटिल तथ्यों को सरल बनाना

सूचकांक जटिल तथ्यों को जिनका निरपेक्ष क्या प्रत्यक्ष माप सम्भव नहीं है, मापने की सुविधा प्रदान करता है उदाहरणार्थ व्यापारिक क्रिया का मापन किसी एक तथ्य द्वारा सम्भव नहीं है परन्तु उत्पादन, आयात, निर्यात, बैंकिंग, यातायात आदि के विश्लेषण से व्यापार गतिविधियां रचित एवं संचालित की जाती है जिससे इस क्षेत्र में होने वाले परिवर्तन, की प्रवृत्ति का आभास हो सकता है ।

2. तुलनात्मक अध्ययन को सम्भव बनाना

तुलनात्मक अध्ययन सूचकांक की सबसे बडी उपलब्धि है । इसके द्वारा तुलनात्मक अध्ययन करके किसी समय अथवा स्थान के आधार पर घटनाओं की तुलना सहज रूप में की जा सकती है ।

आप भली प्रकार से अब तक समझ चके हो कि निरपेक्ष मूल्यों के आधार पर तुलना करना सम्भव नहीं होता है । सूचकांक वस्तुत: इस निरपेक्ष माप के स्थान पर सापेक्षिक माप को संभव बनाते हैं ।

3. सामान्य मूल्यों में परिवर्तन का अध्ययन :

आपने मूल सूचकांकों की रचना करते समय देखा था कि इसके माध्यम से मूल्य स्तर तथा मुद्रा की क्रय शक्ति में होने वाले परिवर्तनों की मापन सम्भव हो जाता है । इन्हीं के आधार पर सरकार समय-समय पर मूल्यों में स्थिरता लाने हेतु अपनी आर्थिक नीतियों में वांछित परिवर्तन करती है ।

4. वेतन. महंगाई भत्ता तथा अन्य सुविधाओं व परिवर्तन हेतु सहायक

आपने ज्यों ही सूचकांक बढ़ने का समाचार पढ़ा, आशा लगाने लग जाते हो कि महंगाई भत्ते की अगली किश्त मिलेगी, यदि नहीं मिलती है तो आप आन्दोलित हो उठते हो । अत: इन उपभोक्ता मूल्य सूचकांकों की सहायता से कर्मचारियों की महंगाई भत्ता, मजदूरों को न्यूनतम मजदूरी आदि निर्धारण करने में सहायता मिलती है ।

5. उत्पादन परिवर्तन की जानकारी प्राप्त होतीं है

आप भली प्रकार जान गए हैं कि उत्पादन में वृद्धि अथवा ह्रास की जानकारी भी सूचकांकों से प्राप्त होती है । अत:

यह निश्चित करना सरल हो जाता है कि किन उद्योगों को सहायता दी जाए, किन उद्योगों को प्रोत्साहन दिया जाए तथा किन उद्योगों को संरक्षण दिया जाए ।

6. भावी प्रवृत्तियों को ओर संकेत करना

भूतकाल के सन्दर्भ में सूचकांक वर्तमान का विश्लेषण करते हैं । इसी प्रकार भूतकाल के अनुभव तथा वर्तमान ज्ञान के आधार पर भविष्य में पूर्वानुमान लगाने में सहायक सिद्ध होते हैं ।

12.8 सारांश (Summary)

इस इकाई के अन्तर्गत आपने सूचकांक की परिभाषा संरचना पूर्व ध्यान रखने के बिन्दु तथा सम्भावित कठिनाइयों के बारे में जानकारी प्राप्त की । लेस्पेयर एवं पाशे द्वारा प्रतिपादित सूत्रों की व्याख्या करते हुए अपेक्षित उदाहरणों की सहायता से आपको सूचकांक संरचना का ज्ञान कराया गया है । इसके पश्चात् फिशर के आदर्श सूचकांक सूत्र की व्याख्या करते हुए आपको सूचकांक संरचना के फिशर का आर्दश सूत्र भी स्पष्ट किया । आपको यह भी स्पष्ट किया था कि फिशर का सूत्र आदर्श सूचकांक रचना में किस प्रकार सार्थक है । प्रदत्त समस्त आंकडों का प्रयोग और गुणोत्तर माध्य का उपयोग इस सूत्र द्वारा रचित सूचकांक की विश्वसनीयता स्थापित करता है । फिशर का सूत्र समय उत्क्राम्यता परीक्षण एवं तल उत्क्राम्यता परीक्षण पर भी खरा उतरता है । इस इकाई में आपने उपभोक्ता मूल्य अथवा जीवन निर्वाह सूचकांकों की रचना करना भी सीखा ।

12.9 शब्दावली (Glossary)

भार	Weight
परिमाण / मात्रा	Quantity
योग	$\sum$
सूचकांक	Index Number

वर्तमान / चालू वर्षा / प्रचलित वर्ष	Current Year
आधार वर्ष	Base Year
समय उत्क्राम्यता परीक्षण	Time Reversal Test
तत्व उत्क्राम्यता परीक्षण	Factor Reversal Test
उपभोक्ता मूल्य सूचकांक	Consumer Index Number
मूल्य भार	Value Weight
मात्रा मार	Quantity Weight
समूही व्यय रीति	Aggregative Expenditure Method
भारित समूही रीति	Weighted Aggregative Method
थोक मूल्य सूचकांक	Wholesale Price Index Numbers
स्थिर भार समंक	Fixed Base Index Number
मूल्यानुपात भार	Price Relative Weight

12.10 सन्दर्भ ग्रन्थ (References)

S.P. Gupta, Statistical Methods.
एस.पी. सिंह, सांख्यिकी, एस. चन्द, नई दिल्ली ।
शुक्ल एवं सहाय, सांख्यिकी के सिद्धान्त, साहित्य भवन आगरा ।
के.एल.नागर, सांख्यिकी

12.11 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Questions)

1. निम्नलिखित समंकों की सहायता से लेस्पेयर तथा पाशे सूचकांक तैयार कीजिए ।

वस्तु	आधार वर्ष		चालू वर्ष	
	मूल्य	मात्र	मूल्य	मात्र
A	6	40	7	30
B	4	45	5	50
C	2.5	90	1.5	40

2. सन् 2007 तथा सन् 2008 की उपभोग की जाने वाली वस्तु एवं मूल्य दिये हैं । सन् 2007 के आधार पर सन् हेतु लेस्पेयर विधि से सूचकांक बनाओ ।

वस्तु	2007		2008	
	मात्रा	मूल्य	मूल्य	मात्रा
अ	15	12	15	10
ब	25	8	10	14
स	30	16	12	18
द	20	15	10	12
य	10	24	26	20

फ	40	8	12	30
	क्विंटल	रु. प्रति क्विं	रु. प्रति क्विं	क्विंटल

3. सूचकांक किसे कहते हैं? इनकी संरचना पूर्व कौन-कौन से बिन्दुओं पर विशेष ध्यान देना आवश्यक है ।

4. सन् 2008 तथा सन् 2009 के आँकड़े दिये गए हैं । 2008 के आधार पर फिशर के आदर्श मूल्य सूचकांक सूत्र द्वारा सन् 2009 के सूचकांक ज्ञात कीजिए ।

वस्तु	मूल्य (रु.)	परिमाण	मूल्य (रु.)	परिमाण
गेंहूँ	150 प्र.क्विं	5 क्विंटल	180 प्र.क्विं	4 क्विंटल
चावल	350 प्र.क्विं	2 क्विंटल	400 प्र.क्विं	3 क्विंटल
तेल	1500 प्र.क्विं	0.2 क्विंटल	2000 प्र.क्विं	0.3 क्विंटल
चीनी	500 प्र.क्विं	3 क्विंटल	700 प्र.क्विं	4 क्विंटल
गुड़	250 प्र.क्विं	5 क्विंटल	200 प्र.क्विं	4 क्विंटल

5. निम्नलिखित आँकड़ों की सहायता से पाशे तथा लेस्पेयर तथा फिशर सूत्रों का प्रयोग करते हुए 2005 हेत 2000 को आधार वर्ष मानते हुए सूचकांक बनाओ ।

वस्तु	सन् 2000		सन् 2005	
	मूल्य (रु.)	मात्रा (क्विंटल में)	मूल्य (रु.)	मात्रा (क्विंटल में)
अ	200	5	150	8
ब	130	12	150	15
स	80	25	100	30
द	65	8	50	5
य	44	15	10	10

6. सन् 1985 को आधार वर्ष मानकर 1986 तथा 1987 के भारित मूल्य सूचकांक तैयार कीजिए।

वर्ग	भार	मूल्य (रूपये में)		
		1985	1986	1987
अ	4	20.00	24.00	21.00
ब	3	1.25	1.50	1.00
स	2	5.00	8.00	8.00
द	1	2.00	2.25	2.12

7. निम्नलिखित जानकारी के आधार पर चालू वर्ष 1988 के उपभोक्ता सूचकांक तैयार कीजिए।

मद	भार	आधार वर्ष मूल्य	चालू वर्ष (1988) मूल्य
बीड़ी	23	0.05	0.24
पान-सुपारी	21	0.50	3.60
साबुन	12	0.50	1.60
धोबी	23	0.04	0.16
नाई	21	0.05	0.12

इकाई - 13

आन्तरगणन-द्विपद विस्तार विधि
(Interpolation-Binomial Expansion Method)

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप :

- जान सकेगें कि आन्तरगणन एवं बाह्यगणन से हमारा क्या अभिप्राय है एवं इसकी आवश्यकता क्यों होती है?
- उन मान्यताओं से भी परिचित हो जाएगें जिनके आधार पर आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की क्रिया सम्पन्न की जाती है; एवं
- आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की विभित्र रीतियों का परिचय प्राप्त कर प्रत्यक्ष द्विपद विस्तार विधि की सहायता से गणना क्रिया करना सीख सकेंगें ।

13.1 प्रस्तावना (Introduction)

सांख्यिकीय आँकड़ो का संकलन एक समय साध्य एवं खर्चीली प्रक्रिया है । सांख्यिकीय अनुसन्धान में प्राय: ऐसी स्थिति मिलती है जब दो लम्बी अवधियों के बीच में आंकडें नहीं मिलते हैं । ऐसी स्थिति का सामना होने पर अनुसन्धानकर्त्ता को आन्तरगणन क्रिया करनी पडती हैं । इसके

साथ ही कभी-कभी उपलब्ध आँकडों के आधार पर भविष्य की तिथि के लिए भी आँकड़ों का अनुमान लगाने की आवश्यकता होती है ऐसी स्थिति में बाह्यगणन का सहारा लेकर अनुमान लगाया जाता है । समंक अपूर्ण होने अथवा समंक नष्ट होने की स्थिति में भी यह विधि हमें सहारा देती है एवं हम उपलब्ध समंकमाला के ज्ञात चर मूल्यों के आधार पर अज्ञात मूल्यों का निर्धारण एवं भविष्य के मूल्यों के लिए पूर्वानुमान लगा सकते हैं । उदाहरण के लिए भारत में जनगणना प्रति दस वर्ष बाद होती है जैसे 1991, 2001 आदि अब अगली जनगणना वर्ष 2011 एवं 2021 में होगी । यदि हम वर्तमान वृद्धि के आधार पर यह जानना चाहे कि वर्ष 2015 में भारत की अनुमानित जनसंख्या क्या होगी? तो हम बाह्यगणन द्वारा यह पूर्वानुमान लगा सकते हैं । यदि हमें ज्ञात आँकड़ों के बीच किसी वर्ष के लिए जनसंख्या के आँकड़ों की आवश्यकता हो जैसे 1985 में अथवा 1989 में जनसंख्या कितनी रही होगी तो हम आन्तरगणन सूत्रों का प्रयोग करके संभावित अनुमानित जनसंख्या प्राप्त कर सकते हैं । इस इकाई के खण्ड 13.2 में सर्वप्रथम हम आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की परिभाषा प्रस्तुत करेगें एवं इसके पश्चात् उन मान्यताओं की चर्चा करेंगे जिनके आधार पर यह क्रिया सम्पन्न होती है । खण्ड 13.4 में आन्तरगणन एवं बाह्यगणन से प्राप्त अनुमानों की शुद्धता को प्रभावित करने वाले तत्वों का अध्ययन करेंगे । इसके पश्चात् आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की विभित्र विधियों की जानकारी प्राप्त कर हम द्विपद विस्तार विधि के सूत्र का उपयोग करना सीखेंगे । इकाई के अन्त में हम सारांश शब्दावली, संदर्भ ग्रन्थों की सूची एवं अभ्यासार्थ प्रश्न देंगे ।

13.2 आन्तरगणन एव बाह्यगणन का अर्थ एवं परिभाषा (Meaning and Definition of Interpolation and Extrapolation)

दिये हुये समंकों के आधार पर विशेष सांख्यिकीय विधियो द्वारा समंकमाला के बीच में किसी अज्ञात मूल्य के लिए सर्वोत्तम सम्भाव्य अनुमान लगाने की क्रिया को आन्तरगणन एवं समंकमाला के बाहर स्थित किसी भावी अवधि के लिए अनुमान लगाना बाह्यगणन कहा जाता है । इसलिए हम कह सकते हैं ज्ञात मूल्य के आधार पर अज्ञात मूल्य का निर्धारण करना आन्तरगणन क्रिया है एवं समंक श्रेणी बाहर के लिए अनुमान लगाना बाह्यगणन है । स्मरण रहे सूत्र बही होता है जिससे आन्तरगणन भी किया जाता है एवं बाह्यगणन भी किया जाता है । यह अनुमान कुछ विशेष मान्यताओं के आधार पर लगाए जाते हैं जिनका वर्णन हम 13.3 में करेंगे । अब हम आन्तरगणन एवं बाह्यगणन की कुछ परिभाषाओं का अध्ययन करेंगे ।

शुक्ल एवं सहाय के अनुसार, "आन्तरगणन एवं बाह्यगणन का अर्थ कुछ कल्पनाओं या मान्यताओं के आधार पर अधिकतम सम्भाव्य अनुमान प्राप्त करना है ।"

हारपर के अनुसार,"आन्तरगणन से आशय एक ऐसे मूल्य को ज्ञात करना है जो दो चरम बिन्दुओं के बीच स्थित हो। बाह्यगणन से आशय एक ऐसे मूल्य को ज्ञात करना है जो दो चरम बिन्दुओं (सीमाओं) के बाहर स्थित हो ।"

हिरच लिखते हैं, "दी हुई दशाओं में सर्वोत्तम सम्भाव्य अनुमान का आँकलन करना है । एक पिछले मूल्य का अनुमान लगाने की तकनीक आन्तरगणन कहलाती है जबकि भविष्य के लिए सम्भाव्य अनुमान लगाना बाह्यगणन कहलाता है।"

13.3 मान्यताएं (Assumptions)

आन्तरगणन एवं बाह्मगणन सूत्रों का निर्माण कुछ मान्यताओं के आधार पर किया गया है जो यहाँ दी जा रही है । यदि हमारे समंक अथवा आँकड़े भी उन मान्यताओं पर खरे उतरते हैं तो प्राप्त अनुमान सटीक एवं विश्वसनीय होंगे । यदि समंक श्रेणी उक्त मान्यताओं पर खरी नहीं उतरती है तो प्राप्त अनुमान की विश्वसनीयता सन्देहास्पद रहेगी ।

(1) **उच्चावचन रहित श्रेणी** सर्वप्रथम मान्यता श्रेणी की बनावट के बारे में है । हमारे पास जो समंक उपलब्ध है वे निरन्तरता अथवा नियमितता लिए हुये है । दो अवधियों के मध्य कोई आकस्मिक उच्चावचन नहीं है अर्थात् अचानक अत्यधिक वृद्धि एवं कमी नहीं है । दूसरे शब्दों में उपलब्ध आँकड़े सरलित वक्र के रूप में है ।

(2) **आन्तरगणन किया जाने वाला वर्ष सामान्य वर्ष (Normal Year)** है इस वर्ष कोई अकाल अथवा बाढ़ युद्ध अथवा महामारी न फैली हो । क्योंकि यदि वर्ष में असामान्य घटना घटित हुई होगी तो समंक मूल्यों के प्रभावित होने का खतरा होता है । ऐसी अवधि के लिए अनुमान की विश्वसनीयता सन्देहपूर्ण बनी रहेगी ।

(3) **परिवर्तनों की नियमितता** आन्तरगणन एवं बाह्यगणन करने के लिए समंक श्रेणी के लिए यह जरूरी है कि वह नियमितता लिए हुए हो अर्थात नियमित गति से बढ़ रही हो अथवा गिर रही हो । हम अनियमित एवं असमान परिवर्तनों का अनुमान लगाने में असमर्थ हैं ।

(4) **समंक श्रेणियों अथवा पद श्रेणियां** ऐसी हो जिनमें आपस में कोई सम्बन्ध हो । अर्थात एक चर स्वतंत्र हो एवं दूसरा चर उस पर आश्रित हो ।

13.4 आन्तरगणन एवं बाहयगणन की आवश्यकता क्यों होती है?

अब प्रश्न उठता है हमें आन्तरगणन अथवा बाहयगणन करने की आवश्यकता की क्या है? आन्तरगणन एवं बाहयगणन का अत्यधिक व्यावहारिक महत्व है इसके निम्नलिखित कारण हैं :

(1) **समंकों का अभाव या अपर्याप्तता** हमारी रूचि जिस विषय के अध्ययन में है उसके लिए यदि समंकों की कमी है, समंक अपर्याप्त है, अथवा समंकों की गणना ही नहीं की गई हो तो क्या करें । भूतकाल में जाकर हम समंकों को तो अब इकट्ठा नहीं कर सकते ऐसी स्थिति में एक ही उपचार है आन्तरगणन अथवा बाहयगणन करके उन, भूतकालीन समंकों के लिए सर्वाधिक विश्वसनीय आँकड़ों का अनुमान प्राप्त कर लिया जाए ।

(2) **समंकों का खो जाना अथवा नष्ट हो जाना** प्राय: यह भी होता है कि किसी अनुसन्धान में कार्य करते समय कुछ समंक इकट्ठे करना भूल गए अथवा इकट्ठे किए हुए समंक खो गए हों, नष्ट हो गए हो ऐसी दशा में अनुसन्धानकर्त्ता के पास एक विकल्प तो यह है कि वह पुन: अनुसन्धान करने के लिए अपने क्षेत्र में जाकर आँकड़ें इकट्ठे करे । यह अत्यधिक खर्चीली एवं समय साध्य प्रक्रिया है । अत: खोए हुए समंकों के लिए आन्तरगणन कर अनुमान लगाना अनिवार्य हो जाता है ।

(3) **मध्यवर्ती वर्षो के लिए समंक प्राप्त करना** आन्तरगणन एवं बाहयगणन की प्रस्तावना लिखते समय हम इस बिन्दु को स्पष्ट कर चुके हैं । आन्तरगणन विधि का प्रयोग मध्यवर्ती वर्षो के लिए आँकड़ें प्राप्त करने के लिए किया जाता है । उदाहरणार्थ हमारे देश में जनगणना प्रत्येक

दस वर्ष के बाद होती है । यदि इस बीच किसी वर्ष के लिए आँकड़ों की आवश्यकता हो तो आन्तरगणन करके ही प्राप्त किए जा सकते हैं ।

(4) **सरकार एवं राजनीतिज्ञों के लिए उपयोगी** सरकारों एवं राजनीतिज्ञों के लिए इनका बहुत महत्व है क्योंकि इसी आधार पर वे अपनी योजनाएं बनाते हैं । सरकार के लिए विभिन्न क्षेत्रों के लिए नीति निर्धारण के लिए, कर लगाने के लिए भी समंकों की आवश्यकता होती है । ठीक इसी प्रकार यदि सरकार किसी भी क्षेत्र के लिए पूर्वानुमान लगाना चाहे तो बाह्यगणन करना आवश्यक है ।

(5) **उद्योगपतियों एवं व्यापारियों के लिए** आज के प्रतियोगी युग में केवल जागरूक उद्योगपति एवं व्यापारी ही लाभ कमा सकते हैं इस कार्य के लिए उन्हें देश की आर्थिक नीति, मुद्रा प्रसार, उत्पादन, विदेशी व्यापार एवं करारोपण के क्षेत्र में उपलब्ध आँकड़ों का अध्ययन एवं पूर्वानुमान लगाने पड़ते हैं । यदि पूर्वानुमान सही साबित हो तो लाभ होगा अन्यथा हानि हो सकती है।

(6) **स्थिति सम्बन्धी माध्य का निर्धारण** एक अखण्डित श्रेणी में अथवा वर्गान्तरों बाली श्रेणी में बहुलक तथा मध्यका के मूल्यों का निर्धारण करने के लिए आन्तरगणन क्रिया का प्रयोग होता है ।

(7) **तुलनात्मक अध्ययन** अलग-अलग देशों के आँकड़ें तुलना योग्य बनाने के लिए आन्तरगणन करना पड़ता है । उदाहरणार्थ भारत की जनगणना 2001 में हुई जबकि अमेरिका में वर्ष 2000 में हुई तो तुलना करने के लिए भारत की जनसंख्या का वर्ष 2000 के लिए आन्तरगणन करना पड़ेगा ।

13.5 प्राप्त अनुमानों की शुद्धता को प्रभावित करने वाले तत्व (Factors Affecting Accuracy of the Interpolated Figures)

आन्तरगणन अथवा बाह्यगणन से प्राप्त आँकड़ें मात्र अनुमान होते हैं । यह आशा रखना कि वे वास्तविक अथवा ज्ञात समंकों की भांति पूर्णत: शुद्ध होंगे, ठीक नही है । आन्तरगणन का कार्य कुछ मान्यताओं के अन्तर्गत किया जाता है । अत: हम यह मान लेते हैं कि ये सम्भाव्य अथवा यथोचित रूप से परिशुद्ध होंगे । ऐसी स्थिति में ये मान्यताएँ ही उनकी शुद्धता का आधार है । यदि मान्यताएँ ठीक एवं शुद्ध हैं तो पूर्ण आशा है कि आन्तरगणन मूल्य विश्वसनीय एवं शुद्ध होंगे। डा. बाऊले के अनुसार आन्तरगणन की शुद्धता निम्नांकित तत्वों पर निर्भर करती है :

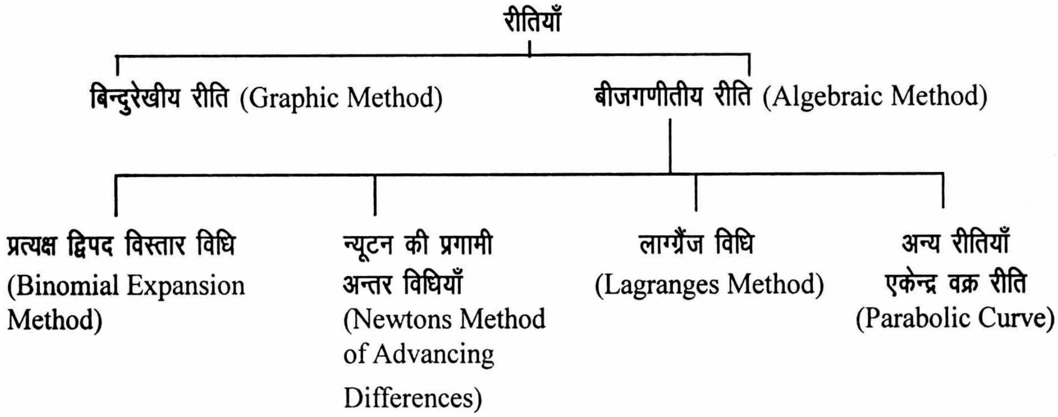
(1) **सम्भाव्य उच्चावचनों के सम्बन्ध में जानकारी होना** इस सम्बन्ध में यह आवश्यक है कि हमें मूल्यों के उच्चावचन के बारे में पूर्ण जानकारी हो । समंकमाला का अवलोकन हमें यह जानकारी देता है । यदि हम यह अनुभव करते है कि उच्चावचन नियमित है तो अनुमानित मूल्य यथा सम्भव काफी हद तक शुद्ध होंगे ।

(2) **सम्बन्धित घटनाओं का पूरा ज्ञान होना** आन्तरगणन अथवा बाह्यगणन करते समय सम्बन्धित घटनाओं का पूरा ज्ञान होना आवश्यक है । यदि हमें उपलब्ध समंकों पर प्रभाव डालने वाले विशेष तथ्यों या घटनाओं की यथेष्ट जानकारी होने पर शुद्धता के अधिक निकट पहुँचा जा सकता है । यह जानकारी होने पर आन्तरगणित मूल्यों में आवश्यक संशोधन कर उन्हें अधिक विश्वसनीय बनाया जा सकता है ।

(3) **आन्तरगणन एवं बाह्यगणन** की उचित रीति का चुनाव आन्तरगणन एवं बाहयगणन की कई विधियाँ हैं । इन विधियों का वर्णन खण्ड 13.6 में किया गया है । इन विधियों में से कुछ अधिक विश्वसनीय है तो कुछ कम तथा किसी परिस्थिति में कोई एक रीति अधिक उपयुक्त है तो किसी परिस्थिति में दूसरी रीति । यह आवश्यक है कि हम सही विधि का उपयोग कर आन्तरगणन अथवा बाहयगणन करें । इस प्रकार उपर्युक्त सभी तत्व प्राप्त अनुमानों की शुद्धता स्तर को प्रभावित करता है ।

13.6 आन्तरगणन तथा बाह्यगणन का विधियां (Method of Interpolation and Extrapolation)

आन्तरगणन अथवा बाहयगणन की रीतियों को निम्न चार्ट द्वारा दर्शाया जाना उचित होगा।



अब हम इन विधियों की जानकारी प्राप्त करेंगे :

13.6.1 बिन्दुरेखीय विधि

यह आन्तरगणन अथवा बाहयगणन करने की सबसे सरल विधि है । x अक्ष (horizontal axis) पर समय को प्रदर्शित किया जाता है । यह स्वतंत्र चर मूल होता है । आश्रित चर मूल्यों को y अक्ष (vertical axis) पर रखा जाता है । यदि श्रेणी में मूल्यों के साथ-साथ आवृत्ति दी गई हो तो मूल्यों को क्षैतिज रेखा (x अक्ष) पर एवं आवृत्ति को उदग्र रेखा । (y अक्ष) पर प्रदर्शित करते है फिर माप निश्चित करके बिन्दुओं को अंकित करते हैं । इस प्रकार मूल्यों का अथवा आवृत्तियों का एक वक्र बनता है । अब x जिस मूल्य अथवा समय बिन्दु के लिए आन्तरगणन करना हो उस बिन्दु से वक्र पर एक लम्ब डाला जाएगा यह लम्ब वक्र को जिस बिन्दु पर काटता है उस स्पर्श बिन्दु से y अक्ष पर एक लम्ब डाला जाएगा। यह लम्ब जिस मूल्य को प्रदर्शित करता है वही x के लिए y का सम्भाव्य अथवा आन्तरगणित मूल्य है । जब बाहयगणन करना हो तो उसी गति या क्रम से वक्र को आगे तक बढ़ाया जाता है एवं इसके बाद x तथा y अक्षों पर ऊपर बताई गई विधि के अनुसार लम्ब डालकर सम्भावित मूल्य का अनुमान लगाते हैं । आन्तरगणन क्रिया अधिक शुद्ध मूल्यों का गणन कर सकती है बाहयगणन के लिए अत्यधिक सावधानी की आवश्यकता होती है ।

13.6.2 प्रत्यक्ष द्विपद विस्तार विधि

इस सूत्र का प्रयोग करने से पूर्व विद्यार्थी यह जाँच ले कि समंक श्रेणी निम्नांकित शर्त पूरी करती है :

(i) स्वतंत्र घर (x) अर्थात् समय श्रेणी के मूल्य समान अन्तर के हो । अर्थात x श्रेणी का वर्ग विस्तार (class interval) एक समान हो। जैसे x श्रेणी के मूल्य इस प्रकार हो - 1951,1961,1971,1981,1991,2001 अथवा 10,20,30,40,50 अथवा 0-10, 10-20, 20-30, 30-40, 40-50 आदि ।

(ii) दूसरी शर्त यह है कि इन समान अन्तर वाले मूल्यों में से ही अथवा वर्ग विस्तार में आने वाले किसी मूल्य को ज्ञात करना हो जैसे ऊपर दिए गए मूल्य में 1991 के लिए मूल्य ज्ञात करना है तो इस सूत्र का प्रयोग होगा।

इस प्रकार उन अवस्थाओं के लिए जहाँ x मूल्यों का वर्ग विस्तार समान रूप से बढ़ते अथवा घटते क्रम में हो एवं इसी क्रम का कोई एक मूल्य अज्ञात हो तब द्विपद विस्तार विधि का प्रयोग कर मूल्य आन्तरगणन अथवा बाह्यगणन किया जा सकता है ।

13.6.3 न्यूटन की विधियाँ

इस रीति का प्रयोग करने की निम्नांकित शर्त हैं -

(i) x श्रेणी समान अन्तर से बढ़ती हो ।

(ii) x के जिस पद के लिए y श्रेणी का जो पद ज्ञात करना है वह नियमित मूल्यों में से एक न होकर उनसे भिन्न हो उदाहरणार्थ ऊपर दिए गए उदाहरण में 1991 का मूल्य अज्ञात न होकर 1995 का मूल्य अज्ञात हो एवं उसका निर्धारण करना हो ।

न्यूटन की प्रमुख रीतियाँ निम्नलिखित हैं.

न्यूटन - गॉस अग्रगामी रीति एवं न्यूटन गॉस विलोमगामी रीति ।

न्यूटन - गॉस अग्रगामी रीति का उपयोग वही किया जाता है जहाँ आन्तरगणन की जाने वाली संख्या श्रेणी के मध्यक्रम में स्थित हो । न्यूटन - गॉस की विलोमगामी रीति का प्रयोग तब किया जाता है । जब आन्तरगणन की जाने वाली संख्या श्रेणी के अन्तिम भाग में पड़ती है।

13.6.4 लाग्रेंज का विधि

आन्तरगणन के लिए उपर्युक्त वर्णित विधियों के प्रयोग की शर्तों पर नजर डालने पर यह स्पष्ट होता है कि वर्गान्तर असमान होने पर आन्तरगणन तथा बाह्यगणन क्रिया नहीं हो सकती । इस हेतु फ्रान्स के प्रसिद्ध गणितज्ञ लाग्रेंज (Lagrange) ने एक सूत्र दिया जो आन्तरगणन तथा बाह्यगणन की सार्वभौमिक रीति है । यह सूत्र उन्हीं के नाम से लाग्रेंज विधि के रूप में जाना जाता है । सैद्धान्तिक रूप से यह सूत्र किसी भी परिस्थिति में प्रयोग में लाया जा सकता है । व्यवहार में इस रीति का प्रयोग उन्हीं परिस्थितियों में किया जाता है जहाँ x श्रेणी का वर्ग विस्तार असमान हो ।

आन्तरगणन की अन्य रीतियों में परवलयिक वक्र (Parabolic Curve) विधि है । यह भी एक सार्वभौमिक विधि है परन्तु जटिल गणन क्रिया के कारण इसका प्रयोग कम होता है । यह रीति इस कल्पना पर आधारित है कि दो समंकमालाएँ एक दूसरे से सम्बन्धित है और जब एक श्रेणी के

मूल्य ज्ञात है तो उससे सम्बन्धित दूसरी श्रेणी के मूल्य भी ज्ञात किए जा सकते हैं । सबसे पहले हमें यह तय करना होता है कि परवलयिक वक्र का घातांक (Power) कितना होगा यह पदों की संख्या पर निर्भर होता है । इसका नियम (n-1) है अर्थात् जितने पद हो उनसे एक कम करके परवलयिक वक्र का समीकरण लिख लिया जाता है । ज्ञात मूल्य 5 होने पर चतुर्थ घात का समीकरण हल करके आन्तरगणन किया जाता है ।

13.7 प्रत्यक्ष द्विपद विस्तार विधि का गणना सूत्र (Binomial Expansion Method)

प्रस्तुत इकाई का उद्देश्य, आन्तरगणन की सभी विधियों से आपका परिचय करवाना नहीं है। यहाँ हमारा उद्देश्य केवल प्रत्यक्ष द्विपद विस्तार विधि का प्रयोग करना सीखना है अत: हम इस इकाई में गणन क्रिया के लिए केवल एक ही सूत्र का अध्ययन करेंगे । इसकी क्रिया विधि इस प्रकार है :

(i) सर्वप्रथम X श्रेणी के मूल्यों को क्रमानुसार x_0, x_1, x_2, x_3 आदि संकेताक्षरों द्वारा प्रदर्शित कर लें और इस प्रकार Y श्रेणी के मूल्यों को y_0, y_1, y_2, y_3 आदि संकेताक्षरों से प्रदर्शित कर लें ।

(ii) जितने पदों का प्रश्न हो उसी क्रम का द्विपद विस्तार लिखना होगा । अन्तिम y इस बात का द्योतक होगा । उदाहरणार्थ यदि Y श्रेणी के 5 मूल्य ज्ञात है तो y^5 अर्थात $(y-1)^5$ का विस्तार लिखेंगे । सर्वप्रथम अन्तिम क्रम y को लिखा जाता है फिर अवरोही क्रम में y के मूल लिख लिए जाते है जिससे अन्त में y^0 आ जाय । यह रीति यह मानकर के चलती है कि N श्रेणी के पदों वाली श्रेणी का Nवॉ प्रमुख अन्तर शब्द होगा अर्थात $(y-1)^n=0$

(iii) y का प्रथम मूल्य धनात्मक लिखते हु ये क्रम से ऋणात्मक व धनात्मक चिन्ह लगाए जाएंगे । इनका प्रमुख अन्तर शून्य होगा -

$y^5-y^4+y^3-y^2+y^1-y^0=0$

(iv) विभिन्न y मूल्यों का अंकात्मक गुणक निकालने के लिए पहले वाले y का गुणक 1 होगा आगे के y मूल्यों के लिए y का गुणक निम्न सूत्र से प्राप्त होगा -

$$\frac{\text{y के पिछले अंक का अंकातक गुणक x पिछले y का अन्त में लिखा लेख पिछले}}{\text{पिछले y समीकरण में क्रम संख्या}}$$

जैसे - $(y-1)^5$ के द्विपद विस्तार में पहला पद y^5 का गुणक 1 होगा, y^4 का गुणक $\frac{1\times 5}{1}=5$ होगा ।

y^3 का गुणक $\frac{5\times 4}{2}=10$ होगा । y^2 का गुणक $\frac{10\times 3}{3}=10$ होगा । y^1 का गुणक $\frac{10\times 2}{4}=5$

होगा एवं y^0 का गुणक $\frac{5\times 1}{5}=1$ होगा ।

अर्थात्

$Y^5-5y^4+10y^3-10y^2+5y^1-y^0=0$

नीचे सारणी में कुछ ज्ञात मूल्यों के द्विपद विस्तार दिए जा रहे हैं -

सारणी 13.1

ज्ञात	द्विपद विस्तार
4	$\Delta_0^4=y^4-4y^3+6y^2-4y^1+y^0=0$
5	$\Delta_0^5=y^5-5y^4+10y^3-10y^2+5y^1y^0=0$
6	$\Delta_0^6=y^6-6y^5+15y^4-20y^3+15y^2-6y^1-y^0=0$
7	$\Delta_0^7=y^7-7y^6+21y^5-35y^4+35y^3-21y^2+7y^1-y^0=0$

उदाहरण -1 निम्नांकित सारणी में अज्ञात मूल्य का निर्धारण कीजिए ।

X	20	25	30	35	40	45
Y	60	66	?	72	75	80
	Y^0	Y^1	Y^2	Y^3	Y^4	Y^5

हल -

(i) सर्वप्रथम x अक्ष का वर्ग विस्तार समान है एवं एक वर्ग की सम्बन्धित y मूल्य अज्ञात है अतः द्विपद विस्तार विधि का उपयोग किया जाएगा । '

(ii) Y मूल्यों को क्रम से $y^0y^1y^2y^3y^4y^5$ द्वारा दर्शाया जाएगा ।

(iii) y^2 का मूल अज्ञात है ।

(iv) y^5 है अतः $(y-1)^5=0$ का विस्तार किया जाएगा ।

(v) y^5 को सर्वप्रथम लिखकर अवरोही क्रम से y मूल्य लिख लें एवं धनात्मक एवं ऋणात्मक चिन्ह लगा लें । बाद में y के अंकात्मक मूल्यों का निर्धारण करले इसके लिए सारणी 13.1 देखें।

$y^5 - 5y^4 + 10y^3 - 10y^2 + 5y^1 - y_0 = 0$

मूल्य रखने पर -

$80 - 5 (75) + 10 (72) - 10y^2 + 5 (66) - 60 =0$

or $80 - 375 + 720\ 10y^2 + 330 - 60 = 0$

$-10y^2 + 695 =0$

$-10y^2 = -695$

ऋणात्मक निरस्त हो जाएगें

$10y^2 = 695$

$y^2 = 695/10\ 695$

अतः अज्ञात मूल $y^2 = 69.5$ होगा ।

उदाहरण -2

माता की आयु एवं प्रति महिला बच्चों की संख्या नीचे सारणी में दी गई है । 30-34 वर्ष की माताओं की औसत सन्तानों की संख्या का अनुमान लगाइए ।

माता की आयु (वर्ष)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44
बच्चों की संख्या	0.7	2.1	3.5	?	5.7	5.8

हल-

माता की आयु (वर्ष)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44
बच्चों की संख्या	0.7	2.1	3.5	?	5.7	5.8
	y^0	y^1	y^2	y^3	y^4	y^5

$Y^5 - 5Y^4 + 10Y^3 - 10Y^2 + 5Y^1 - Y^0 = 0$

By substituting Values, we get

$5.8 - 5(5.7) + 10Y^3 - 10(3.5) + (2.1) - 0.7 = 0$

or $5.8 - 28.5 + 10Y^3 - 35 + 10.5 - 0.7 = 0$

$10Y^3 - 47.9 = 0$

$10Y^3 - 47.9$

$$Y^3 = \frac{47.9}{10} = 4.79$$

अतः 30-34 वर्ष की माताओं की सम्भावित औसत संतानों की संख्या 4.79 होगी ।

बोध प्रश्न -1

1. आन्तरगणन एवं बाहयगणन का क्या अर्थ है ।
2. आन्तरगणन से प्राप्त अनुमानों की शुद्वता के लिए आवश्यक शर्तों नाम लिखिए ।
3. $(y-1)^8$ के लिए द्विपद विस्तार सूत्र लिखिए ।

उदाहरण -3

निम्नांकित समंको से 1985 के लिए उत्पादन का अन्तरगणन कीजिए -

वर्ष	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
उत्पादन (हजार टन में)	100	120	150	180	210	-	320
	Y^0	Y^1	Y^2	Y^3	Y^4	Y^5	Y^6

$(Y-1)^6 = 0$

$= Y^6 - 6Y^5 + 15Y^4 - 20Y^3 + 15Y^2 - 6Y^1 + Y_0 = 0$

$320 - 6Y^5 + 15(210) - 20(180) + 15(150) - 6(120) + 100 = 0$

$320 - 6Y^5 + 3150 - 3600 + 2250 - 720 + 100 = 0$

$- 6Y^5 = -1500$ (ऋणात्मक चिन्ह निरस्त हो जाएंगे ।)

$6Y^5 = 1500$

$$Y^5 = \frac{1500}{6}$$

$Y^5 = 250$ (हजार)

13.8 सारांश (Summary)

सांख्यिकीय अनुसन्धान में समंकों की आवश्यकता को पूरा करने के लिए अनुसन्धानकर्त्ता को अनेक बार आन्तरगणन क्रिया का सहारा लेना पड़ता है। विशेषकर यदि बीच के वर्षा के लिए जिनके लिए समंक इकट्ठे ही न किए गए हो। जैसे जनगणना वर्षो के बीच के वर्षो के लिए समंको की जरूरत हो तो आन्तरगणन व बाह्यगणन कुछ मान्यताओं के आधार पर किया जाता है एवं इससे प्राप्त अनुमान यथोचित रूप से शुद्धता के नजदीक होते हैं। यहाँ हमने द्विपद विस्तार विधि द्वारा आन्तरगणन करने की क्रिया का विस्तार से अध्ययन किया।

13.9 शब्दावली (Glossary)

आन्तरगणन	- Interpolation
बाह्यगणन	- Extrapolation
द्विपद विस्तार	- Binomial Expansion
उतार चढाव	- Fluctuation
परवलयक वक्र	- Parabolic Curve

13.10 संदर्भ ग्रन्थ (References)

एस. पी. सिंह - सांख्यिकी सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस. चन्द, नई दिल्ली।

13.11 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Questions)

(i) 1961 में चावल उत्पादन का मूल्य अज्ञात है आन्तरगणन द्वारा ज्ञात कीजिए।

वर्ष	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1920
उत्पादन (हजार टन में)	76.6	78.7	78.2	77.7	78.7	?	80.6	77.6	78.7

उत्तर 80.5

(ii) आन्तरगणन हेतु उपयुक्त सूत्र का चुनाव कर अज्ञात मूल्य का निर्धारण कीजिए।

Y	10	20	30	40	50
Y	25	30	-	38	48

उत्तर 33.17

(iii) निम्न श्रेणी में आन्तरगणन द्वारा अज्ञात मान का निर्धारण कीजिए।

वर्ष	1991	1992	1993	1994	1995
जनसंख्या (हजारों में)	125	130	-	180	210

उत्तर 150.8

(iv) निम्नांकित समंकों से वर्ष 2003 के लिए सम्भावित मूल्य ज्ञात कीजिए।

वर्ष	2001	2002	2003	2004	2005
मूल्य	24	64	-	216	343

उत्तर 125.5

इकाई - 14

सारणिक (Determinants)

इकाई की रूपरेखा

14.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप:

- सारणिक की संकल्पना को समझ सकेंगे ।
- सारणिक व मैट्रिक्स के अंतर को समझ सकेंगे ।
- सारणिक के मुख्य गुणधर्मो को जान सकेंगे ।
- सारणिक का मूल्यांकन कर सकेंगे ।
- सारणिक का प्रयोग करके रैखिक समीकरण निकायों का अनन्य हल ज्ञात कर सकेंगे ।

14.1 प्रस्तावना (Introduction)

प्रत्येक वर्ग-मैट्रिक्स A से सम्बन्धित एक संख्या होती है जिसे मैट्रिक्स का सारणिक कहा जाता है । इसे कमज det A अथवा चिन्ह $|A|$ से सूचित किया जाता है । जहां $|\ |$ सीधी रेखाओं का तात्पर्य का 'सारणिक' (The determinant of) होता है । एक मैट्रिक्स का कोई संख्यात्मक मूल्य नहीं होता जबकि एक मैट्रिक्स का सारणिक एक संख्या होती है । सारणिक केवल वर्ग मैट्रिक्स (Square Matrix) के लिए ही परिभाषित होते हैं । इस इकाई में हम जानेंगे कि सारणिक क्या है? सारणिक व मैट्रिक्स में अंतर को समझेंगे और सारणिक का प्रयोग रैखिक समीकरण निकायों को हल करने के लिए करेंगे । युगपत समीकरणों के समुच्चय में अधिक समीकरणों के होने पर बीजगणित की सामान्य विधियों से हल करना कठिन हो जाता है । अत: ऐसे समीकरणों का हल सारणिक की विशेष विधि से किया जाता है ।

14.2 सारणिक की संकल्पना (Concept of Determinates)

सारणिक केवल वर्ग-आव्यूहों के लिए ही परिभाषित होते है, जैसे 2 × 2, 3 × 3, 4 × 4 तथा n × n आयाम के आव्यूहों (मैट्रिक्सों) के लिए ही सारणिक ज्ञात किये जा सकते हैं ।

एक 2 × 2 मैट्रिक्स A लीजिए $A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}$

इसके साथ जो सारणिक जुडा हुआ है वह इस प्रकार है: $A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}$ कैंची गुणा (Cross Multiplication) करके इसे खोला जाता है ।

$a_{11}a_{12}$ - $a_{21}a_{22}$ इसे हल कर संख्यात्मक मान ज्ञात किया जा सकता है ।

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ है तो इसका सारणिक इस प्रकार लिखा जाएगा $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

कैंची गुणा करने पर

(3) (-1) - (0) (4)

-3 -0

∘ - 3

= -3

उत्तर = -3

यदि $A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}$ हैं तब $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = -(10) - 0(6) = -10$ उत्तर = -10

इस प्रकार $|A|$ प्राप्त करने के लिए A के मुख्य विकर्ण के दो अवयवों को गुणा करके उसमें से अन्य दो अवयवों को तिरछा करके घटाया जाता है । यहां मैट्रिक्स A का आयाम 2 × 2 होने से यह द्वितीय क्रम का सारणिक कहा जायेगा।

यहां - रेखाओं द्वारा जोड़े गये अवयवों का गुणन धनात्मक पदों और...... रेखाओं द्वारा जोड़े गये अवयवों का गुणन ऋणात्मक पदों को दर्शाता है । यहां यह ध्यान रखें कि उच्च क्रम के मैट्रिक्सों के लिए यह नियम लाग नहीं होता है।

अब हम सारणिक को निम्न प्रकार से परिभाषित कर सकते है'-

n × n राशियों (a_{11}, a_{12}, a_{13}........ a_{nn}) को दो समानान्तर ऊध्वाधार का लम्बवत रेखाओं के मध्य वर्ग अंकायत (Square array) में लिखे गये क्रम विन्यास को n कोटि का सारणिक कहते हैं प्रतीक रूप में:-

$$|a_{ij}| = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n^n} \end{vmatrix}$$ जहां i, j = 1, 2,.....n है

यहां a_{ij} ' s सारणिक A के अवयव हैं; पादांक i, पंक्ति का और द्वितीय पादांक j स्तम्भ का अभिसूचक है ।

n क्रम के एक सारणिक $|A| = |a_{ij}|$ जहां i, j = 1, 2,......n है, का मूल्य, n! पदों का बीजगणितीय योग होता है ।, n! पदों में सभी संभव एवं भिन्न संयोग (all possible and distinct combinations) आ जाते हैं जो इस प्रकार से चयनित किये जाते हैं कि प्रत्येक पद में एक अवयव प्रत्येक पंक्ति से और एक अवयव प्रत्येक स्तम्भ से हो । i को बढ़ते हुए क्रम में रखने पर जहां j के क्रम में उलटाव की संख्या सम होती है पद का चिन्ह धनात्मक और असम होने पर ऋणात्मक होता है । इस नियम का उपयोग करके 3×3 से बडे क्रम में मैट्रिक्स का सारणिक ज्ञात करना कठिन है । जैसे 4 × 4 क्रम के मैट्रिक्स का सारणिक 41=24 पदों का बीजगणित योग होगा और प्रत्येक पद 4 अवयवों का गुणनफल होगा।

3 × 3 क्रम से बडे मैट्रिक्स का सारणिक सामान्यतया एक दूसरी पद्धति जिसे सहखण्डों से विस्तार (expansion by factors) कहा जाता है, द्वारा ज्ञात किया जाता है ।

जैसे 3 × 3 क्रम के मैट्रिक्स के सारणिक को सह खण्डों से विस्तार करके निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है:-

$$|A| = a_{11}(a_{22}\ a_{33} - a_{23}\ a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$+ a_{13}(a_{21}\ a_{32} - a_{22}\ a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

यहां आप यह ध्यान दें कि योग में प्रत्येक सारणिक A मैट्रिक्स के सब्मैट्रिक्स का सारणिक है जो उस अवयव वाली पंक्ति और स्तम्भ को छोड़ने पर प्राप्त होती है ।

उदाहरणार्थ-

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ में a_{11} की लघु सारणिक M_{11} इस सारणिक की प्रथम पंक्ति तथा स्तम्भ को छोड़ने पर

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ या $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ होती है ।

व्यापक रूप से कहें तो अवयव a_{ij} की उप-सारणिक (Minor) दी हुई सारणिक की i^{th} पंक्ति j^{th} स्तम्भ छोड़ने पर प्राप्त होती है ।

इसी प्रकार a_{12} अवयव का उपसारणिक प्रथम पंक्ति एवं द्वितीय स्तम्भ को निरस्त करके प्राप्त किया जाता है ।

अर्थात्-

a_{12} का उपसारणिक = $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

अवयव a_{13} का उपसारणिक प्रथम पंक्ति एवं तृतीय स्तम्भ को निरस्त करके प्राप्त किया जाता है । अर्थात्

a_{13} का उपसारणिक = $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

उपसारणिक को संगत शीर्ष अक्षरों से प्रदर्शित करने पर

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{12}a_{12} + a_{13}A_{13}$$

(प्रथम पंक्ति लेने पर)

$$|A| = a_{11}A_{11} - a_{12}a_{12} + a_{13}A_{13}$$

उपसारणिक से निकट सम्बन्ध रखने वाली अवधारणा सहखण्ड (Cofactor) है । यदि उपसारणिक को उनके चिन्हों के साथ लिखा जावे तब वे उस अवयव के सहखण्ड कहलाते हैं । उदाहरणार्थ, a_{11} का सहखण्ड ($+A_{11}$), a_{12} का सहखण्ड ($-A_{12}$) तथा a_{13} का सहखण्ड ($+A_{13}$) है । सहखण्ड के निशान लगाने का नियम यह है कि उपसारणिक में i और j का जोड़ (even) सम हो तो उपसारणिक व सहखण्ड का निशान एक-सा होगा । यदि विषम हो जैसे 3,5,7 आदि तो सहखण्ड का निशान उपसारणिक के निशान से उलटा होगा ।

यदि हम उपसारणिक को $|M_{ij}|$ से और सहखण्ड को $|C_{ij}|$ से सूचित करें तो

i + j सम होने पर $|C_{ij}| = |M_{ij}|$

i + j विषम होने पर $|C_{ij}| = -|M_{ij}|$

अथवा स्कैलर $C_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$ सहखण्ड को Signed minor भी कहा जाता है ।

n × n मैट्रिक्स $(C_{ij})^1$ (सहखण्ड मैट्रिक्स का ट्रांसपोज) को मैट्रिक्स A का सहखण्डज (Adjoint) कहा जाता है और adj A द्वारा बताया जाता है ।

सहखण्डों से विस्तार की इस पद्धति को लाप्लेस विस्तार (Laplace expansion) कहा जाता है । यह विधि 4 × 4 क्रम के सारणिक में भी प्रयुक्त की जा सकती है ।

गणितीय सूत्र के रूप में इस विधि को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है ।

पंक्ति i से विस्तार करने पर

$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$ किसी भी पंक्ति के लिए i = 1, 2,........n

लाप्लेस विस्तार किसी पंक्ति या स्तम्भ से किया जा सकता है । सबसे समान परिणाम प्राप्त होते हैं ।

सारणिक प्रसार में निम्नलिखित लक्षण पाये जाते हैं-

(1) सारणिक प्रसार के दायें पक्ष में प्रत्येक पद उतने ही अवयवों का गुणनफल है जितना कि उस सारणिक का क्रम है ।

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

यहां प्रत्येक पद दो-दो अवयव हैं ।

इस प्रकार तृतीय क्रम का सारणिक :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

(2) सारणिक-प्रसार के दायें पक्ष के प्रत्येक पद में सारणिक A की प्रत्येक पंक्ति से एक ओर केवल एक अवयव है तथा प्रत्येक स्तम्भ से भी एक ओर केवल एक अवयव है । अर्थात्, एक अवयव एक ही पद में पुन: नहीं आता।

(3) 2×2 सारणिक प्रसार में पदों की संख्या 2! = 2 तथा 3×3 सारणिक प्रसार में पदों की संख्या 3! = b है तथा सभी पद भिन्न है । इस प्रकार $n \times n$ सारणिक प्रसार में n! पद होंगे ।

(4) आधे पदों का चिन्ह धनात्मक तथा आधे पदों का चिन्ह ऋणात्मक है ।

(5) सामान्यत: n^2 अवयव n वीं क्रम के सारणिक में व्यवस्थित होंगे ।

14.3 सारणिक का मूल्य निकालना (Solving Determinants)

सारणिक की संकल्पना में आप जान चुके हैं कि प्रत्येक सारणिक का एक संख्यात्मक मूल्य होता है । किसी भी सारणिक को लाप्लेस विस्तार पद्धति से द्वितीय क्रम के सारणिकों में विस्तार कर इसका मूल्य ज्ञात किया जा सकता है ।

द्वितीय क्रम के सारणिक का मान

यदि मैट्रिक्स $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ हैं तो DetA = $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ होता है

अर्थात् द्वितीय क्रम के सारणिक का मान उसके मुख्य विकर्ण के अवयवों के गुणन (Product) तथा इसके विपरीत विकर्ण के अवयवों के गुणन का अन्तर होता है ।

उदाहरण-1

1.1 यदि $|A| = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 9 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ है तो $|A| - |B|$

तथा $|A||B|$ ज्ञात कीजिए ।

हल- $|A| = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = (7\times 4)-(9\times -3) = 28+27 = 55$

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1\times 1)-(0\times 0) = 1-0 = 1$

अत: $|A|-|B|$ =55-1=54

तथा $|A||B|$ =55×1=55

1.2 यदि A = $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$ है तो $|A^2|$ ज्ञात कीजिए ।

A2 = A × A = $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} (3\times 3)+(4\times -2) & (3\times 4)+(4\times -3) \\ (-2\times 3)-(-3\times -2) & (-2\times 4)+(-3\times -3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\therefore |A^2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1\times 1)-(0\times 0) = 1-0 = 1$

1.3 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $|B| = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ तो $|AB|$ ज्ञात कीजिए ।

हल - $AB = \begin{bmatrix} (3\times 3)+(4\times -2) & (3\times 4)+(4\times -3) \\ (-2\times 3)-(-3\times -2) & (-2\times 4)+(-3\times -3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = (7\times 4)-(-3\times 9) = 28+27 = 55$

तृतीय क्रम के सारणिक के मान

माना कि

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

यह तृतीय क्रम का सारणिक है । इसके प्रथम पंक्ति के अवयवों a_{11},a_{12} तथा a_{13} के द्वारा सारणिक का प्रसार करने पर हमको निम्नांकित मान प्राप्त होता है ।

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{11}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

इस प्रकार

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

(प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर)

$|A| = 4(4-0) - 2(12-0) + 1(6-5)$

= 16 - 24 + 1

= - 7

उदाहरण-2

2.1 मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ का सारणिक ज्ञात कीजिए ।

हल -

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

प्रथम स्तम्भ से विस्तार करने पर-

$$|A| = 3\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -8 & 1 \end{vmatrix}$$

= (-32 -3) - 6(0+6) + 0(0-16)

= -105 -36+0

$|A|$ = -141

2.2 यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ तो $|BA|$ **ज्ञात कीजिए ।**

हम जानते हैं $|BA|$ = $|B|.|A|$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

(प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर)

= 1(0-6)-1(-2+3)+0(4-0)

= -6-1+0

= -7

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

= 2(2-0)-3(-1-6)+1(0-4)

= 4+21-4

= 21

$|BA| = |B|.|A| =$ -7×21= -147

2.3 यदि $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ तथा $B = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

तो $|AB|$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल -

हम जानते हैं कि $|AB| = |A|.|B|$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

(द्वितीय स्तम्भ से विस्तार करने पर)

= -3(1-8)+0-3(8-4)

= 21=12

$|A| =$ +9

$$B = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

(द्वितीय पंक्ति से विस्तार करने पर)

= -1(-9+2)+3(12-4)-0

= 7+24

$|B|$ =31

$|AB| = |A|.|B|$ =9×31=279

नोट: जिस पंक्ति या स्तम्भ में सबसे अधिक शून्य हों उस पंक्ति या स्तम्भ से विस्तार करना सुविधाजनक होता है।

14.4 सारणिक की विशेषताएं (Properties of Determinants)

प्रमेय-1 यदि सारणिक में पंक्तियों को स्तम्भों में और स्तम्भों को पंक्तियों में परिवर्तित किया जावे तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है । जैसे :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_1 & b_1 \\ b_1 & b_1 & b_1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

प्रमेय-2 यदि सारणिक में दो पंक्तियों या स्तम्भों को परस्पर अर्न्तपरिवर्तित कर दिया जाय तब सारणिक का संख्यात्मक मान वही रहता है, परन्तु चिन्ह में परिवर्तन हो जाता है । जैसे: कालम दो को कालम एक में बदलने पर चिन्ह ऋणात्मक हो जाएगा ।

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = (-)\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार पंक्ति एक को पंक्ति दो में लिखने पर चिन्ह परिवर्तित हो जाएगा ।

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

संख्यात्मक रूप में- पंक्ति एक को पंक्ति दो में लिखने पर ऋणात्मक चिन्ह लगाया गया है ।

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-4)-2(0-1)+6(12-5) = -4+2+42 = 40$$

प्रथम एवं तृतीय पंक्ति को परस्पर बदलने पर मान 40 ही रहा परन्तु यह ऋणात्मक हो जाएगा।

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 1(30-2)-4(18-1)+0(6-5) = 28-68 = -40$$

प्रमेय-3 यदि किसी स्तम्भ (या पंक्ति) को निकट के स्तम्भ (या पंक्ति) के आगे खिसकाया जाता है तो सारणिक का संख्यात्मक मान वही रहता है परन्तु छलांगे गये स्तम्भों (या पंक्तियों) की संख्या विषय होने पर चिन्ह बदल जाता है।

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$=40 है जबकि एक पंक्ति छलांग लगाने पर मान ऋणात्मक एवं दो पंक्ति की छलांग लगाने पर मान धनात्मक हो जाएगा । $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = -40

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 40 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 40$$

प्रमेय-4 यदि सारणिक की किसी पंक्ति या स्तम्भ के सभी अवयवों को किसी अदिश (Scalar) से गुणा किया जाय तो सारणिक के मान में उस राशि का गुणा हो जाता है ।

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 40$$

प्रथम स्तम्भ को 5 से गुणा करने पर-

$$\begin{vmatrix} 1\times5 & 2 & 6 \\ 3\times5 & 5 & 1 \\ 1\times5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 15 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 40\times5 = 200$$

उपप्रमेय-

इसी विशेषता के आधार पर हम सारणिक की किसी भी पंक्ति या स्तम्भ से किसी संख्या को उभयनिष्ठ (Common Factor) ले सकते हैं जैसे- प्रथम पंक्ति से 5 उभयनिष्ठ लेने पर

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 30 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति से 5 एवं द्वितीय पंक्ति से 2 उभयनिष्ठ (Common Factor) लेने पर

$$\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5\times2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

नोट: मैट्रिक्स एवं सारणिक से उभयनिष्ठ लेने में मूलभूत अन्तर है जिसे सदैव ध्यान में रखा जाना चाहिए । मैट्रिक्स में उभयनिष्ठ सारे अवयवों में से लिया जावेगा जबकि सारणिक में किसी पंक्ति या स्तम्भ से । इसी प्रकार किसी मैट्रिक्स को किसी अदिश से गुणा करने पर उस मैट्रिक्स के सभी अवयव अदिश से गुणा हो जावेंगे जबकि एक सारणिक को अदिश से गुणा करने पर केवल किसी एक पंक्ति या स्तम्भ के अवयव अदिश से गुणा होंगे ।

(अदिश एक ऐसा मैट्रिक्स है जिसका अवयव केवल एक वास्तविक संख्या है ।)

प्रमेय-5 यदि किसी सारणिक में कोई दो पंक्तियां अथवा स्तम्भ सर्वसम हो तो उस सारणिक का मान शून्य होता है । जैसे- $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

प्रथम पंक्ति तथा तृतीय पंक्ति सर्वसम है । इन दोनों को अन्तर्परिवर्तित करने पर (प्रमेय 2 से)

A = -A

अथवा 2A = 0

अथवा A = 0

प्रमेथ-6 यदि किसी सारणिक की किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के सभी अवयव शून्य ही तो उस सारणिक का मान शून्य होगा ।

यदि $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} 0-0-0=0$

प्रमेय 7 यदि किसी सारणिक की एक पंक्ति (या स्तम्भ), दूसरी किसी पंक्ति (या स्तम्भ) का कोई गुणा हो तो सारणिक का मान शून्य होगा।

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

(तृतीय पंक्ति के सभी अवयव प्रथम पंक्ति के संगत अवयवों से दुगने हैं)

प्रमेय-8 यदि सारणिक का किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के प्रत्येक अवयव में अन्य किसी पंक्ति (या स्तम्भ) के संगत अवयवों को किसी भी अचर राशि से गुणा करके जोड़ या घटा दिया जाय तो सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता । अर्थात्

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 1(48-0)-2(24-0)+3(4-24)$$

(प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर)

= 48-48-60=-60

स्तम्भ 1 को 2 से गुणा कर स्तम्भ 2 से घटाने पर (C_2- $2C_1$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\text{-}(1\times 2) & 3 \\ 2 & 4\text{-}(2\times 2) & 0 \\ 6 & 2\text{-}(6\times 2) & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -10 & 12 \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर

= 1(0-0)-0(24-0)+3(-20-0)

= 0-0-60

= -60

प्रमेय 9 यदि सारणिक की किसी पंक्ति या स्तम्भ का प्रत्येक अवयव दो राशियों के योग (अथवा अन्तर) के रूप में हो तो सारणिक को उसी क्रम के दो सारणिकों के योग (अथवा अन्तर) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है । जैसे-

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2+b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3+b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

इसी प्रकार $\begin{vmatrix} 4\text{-}2 & 2 & 1 \\ 3\text{-}1 & 4 & 2 \\ 5\text{-}3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} (-) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

प्रमेय 10 दो आव्यूहों (मैट्रिक्सों) के गुणनफल का सारणिक उन आव्यूहों के सारणिक के गुणनफल के बराबर होता है अर्थात्

$|AB| = |A||B|$

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \text{-}3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & \text{-}2 \end{bmatrix}$ एवं $B = \begin{bmatrix} \text{-}1 & 0 & 2 \\ 3 & \text{-}2 & \text{-}2 \\ 1 & 0 & \text{-}1 \end{bmatrix}$ तब

$AB = \begin{bmatrix} 5 & \text{-}6 & \text{-}1 \\ \text{-}1 & 0 & 3 \\ 11 & \text{-}8 & \text{-}8 \end{bmatrix}$ अतः $|AB| = AB = \begin{bmatrix} 5 & \text{-}6 & \text{-}1 \\ \text{-}1 & 0 & \text{-}3 \\ 11 & \text{-}8 & \text{-}8 \end{bmatrix}$

= 5(0+24)+6(8-33)-1(8-0)

= 120 - 150 - 8

= -38

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \text{-}3 \\ 2 & 0 & 1 \\ \text{-}1 & 4 & \text{-}2 \end{vmatrix} = 1(0-4)-3(-4+1)-3(8-0) = -4+9-24 = -19$

$|B| = \begin{vmatrix} \text{-}1 & 0 & 2 \\ 3 & \text{-}2 & \text{-}2 \\ 1 & 0 & \text{-}1 \end{vmatrix} = -1(2-0)-0(-3+2)-2(0+2)$

= -2-0+4

= 2

अतः $|AB| = |A||B|$ =(-19)(2)= -38

प्रमेय 11 एक विकर्ण मैट्रिक्स (Diagonal Matrix) का सारणिक इसके विकर्ण के अवयवों के गुणनफल के बराबर होता है ।

यदि A $= \begin{bmatrix} \text{-}2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ है तब $|A| = \begin{bmatrix} \text{-}2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$|A| = -2(15-0)-0+0 = -30$ अथवा -2 × 3 × 5 = - 30

सारणिकों के उपर्युक्त गुणधर्मो का उपयोग करके सारणिक का मान लाप्लेस विस्तार किये बिना भी ज्ञात किया जा सकता है । ऐसी समस्याओं के कुछ उदाहरणों द्वारा हम सारणिक का मान ज्ञात करना सीखेंगे ।

उदाहरण-3

3.1 निम्नलिखित सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए ।

$$(a)=\begin{vmatrix}9 & 12 & 15\\10 & 13 & 16\\11 & 14 & 17\end{vmatrix}\quad (b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 3 & 6\end{vmatrix}\quad (c)=\begin{vmatrix}2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\\4 & 7 & 10\end{vmatrix}$$

हल-

(a) उपर्युक्त सारणिक के प्रथम तथा द्वितीय, द्वितीय तथा तृतीय स्तम्भों के अवयवों का अन्तर 3 है अतः तृतीय स्तम्भ में से द्वितीय स्तम्भ के संगत अवयवों को घटाने पर (C_3 - C_2 से) ।

$$\begin{vmatrix}9 & 12 & 15\text{-}12\\10 & 13 & 16\text{-}13\\11 & 14 & 17\text{-}14\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}9 & 12 & 3\\10 & 13 & 3\\11 & 14 & 3\end{vmatrix}$$

पुनः द्वितीय स्तम्भ में से प्रथम स्तम्भ के संगत अवयवों को घटाने पर (C_2 - C_1 से) ।

$$\begin{vmatrix}9 & 12\text{-}9 & 3\\10 & 13\text{-}10 & 3\\11 & 14\text{-}11 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}9 & 3 & 3\\10 & 3 & 3\\11 & 3 & 3\end{vmatrix}=0$$

प्रमेय 5 के अनुसार यदि किसी सारणिक में कोई दो पंक्तियां या स्तम्भ सर्वसम हो तो उस सारणिक का मान शून्य होता है । उपर्युक्त सारणिक के स्तम्भ द्वितीय एवं तृतीय सर्वसम हैं; अत+ सारणिक मान शून्य है । विस्तार करके हल करने पर भी यह ही परिणाम प्राप्त होगा ।

(b) माना कि $|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 3 & 6\end{vmatrix}$

स्तम्भ 3 में से स्तम्भ 2 के संगत अवयवों को घटाने पर (C_3 - C_2)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\text{-}1\\1 & 2 & 3\text{-}2\\1 & 3 & 6\text{-}3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 2 & 1\\1 & 3 & 3\end{vmatrix}$$

स्तम्भ 2 में से स्तम्भ 1 के संगत अवयवों को घटाने पर (C_2 - C_1)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1\text{-}1 & 0\\1 & 2\text{-}1 & 1\\1 & 3\text{-}1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर

$|A|=1(1\times3-2\times1)-0+0=1(3-2)$

$|A|=1$

(c) माना $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$

C_3-C_2

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8\text{-}5 \\ 3 & 6 & 9\text{-}6 \\ 4 & 7 & 10\text{-}7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

C_2-C_1

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5\text{-}2 & 3 \\ 3 & 6\text{-}3 & 3 \\ 4 & 7\text{-}4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

प्रमेय 5 के अनुसार कोई भी दो स्तम्भ सर्वसम हो तो सारणिक का मान शून्य होगा ।

3.2 सिद्ध कीजिए कि-

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

हल : दी हुई सारणिक को Δ से व्यक्त करने तथा स्तम्भ 1 में से स्तम्भ 2 के संगत अवयव घटाने पर (C_1-C_2)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1\text{-}1 & 1 & 1 \\ a\text{-}b & b & c \\ a_2\text{-}b_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

स्तम्भ 2 में से स्तम्भ 3 के संगत अवयव घटाने पर (C_2-C_3)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1\text{-}1 & 1 \\ a\text{-}b & b\text{-}c & c \\ a^2\text{-}b^2 & b^2\text{-}c^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a\text{-}b & b\text{-}c & c \\ a^2\text{-}b^2 & b^2\text{-}c^2 & c^2-c^2 \end{vmatrix}$$

प्रथम स्तम्भ से (a- b) और द्‌वितीय स्तम्भ से (b- c) को उभयनिष्ठ (Common) लेने पर

$$\Delta = (a\text{-}b)\ (b\text{-}c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & c \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix}$$

पंक्ति 1 के अनुसार विस्तार करने पर

Δ=(a-b) (b-c)[(b-c)- (a+b)]

= (a-b) (b-c) (c-a)

इस प्रकार सिद्ध होता है कि Δ=(a-b) (b-c) (c-a)

3.3 सिद्ध कीजिए कि-

$$\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix} = 2a^3b^3c^3$$

हल: दी हुई सारणिक को Δ=

$$\begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & 0 & bc^2 \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix}$$

से व्यक्त करें तथा प्रथम स्तम्भ से a^2, द्वितीय स्तम्भ से b^2, एवं तृतीय स्तम्भ से c^2 उभयनिष्ठ लेने पर

$$\Delta = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ b & 0 & b \\ c & c & 0 \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति से a, द्वितीय पंक्ति से b एवं तृतीय पंक्ति से c उभयनिष्ठ लेने पर-

$$\Delta = a^3b^3c^3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

द्वितीय स्तम्भ से तृतीय स्तम्भ के संगत अवयव घटाने पर (C_2-C_3)

$$\Delta = a^3b^3c^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

सारणिक का प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर

$\Delta = a^3b^3c^3[0-0+1(1+1)]$

$\Delta = 2a^3b^3c^3$

3.4 सिद्ध कीजिए-

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

हल दी हुई सारणिक को Δ से व्यक्त करने और C_1-C_3 तथा C_2-C_3 का प्रयोग करने पर -

$$|\Delta| \begin{vmatrix} (b+c)^2 - a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & (a+b)^2 & c^2 - (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (b+c+c) & (b+c+a) & 0 & a^2 \\ 0 & & (c+a+b)(c+a-b) & b^2 \\ (c+a+b) & (c-c-b) & (c+a+b)(c-a-b) & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$\left[(a+b)(a-b)=a^2-b^2\right]$$

$$(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ c-a-b & c-a-b & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

तृतीय पंक्ति में से प्रथम व द्वितीय पंक्ति के योग को घटाने पर (R_3-R_2+R_2)]

$$|\Delta|=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix}$$

प्रथम एवं द्वितीय स्तम्भ का क्रमश a व b से गुणा करके दोनों स्तम्भों से तृतीय स्तम्भ के संगत अवश्य जोड़ने पर-

$$|\Delta|=(a+b+c)^2/ab\begin{vmatrix} ab+ac-a^2 & a^2 & a^2 \\ 0+ & c+a-b+b^2 & b^2 \\ -2ab+2ab & -2ab+2ab & 2ab \end{vmatrix}$$

$$|\Delta|=(a+b+c)^2/ab\begin{vmatrix} ab+ac & a^2 & a^2 \\ b & bc+ab & b^2 \\ 0 & 0 & 2ab \end{vmatrix}$$ तृतीय पंक्ति से विस्तार करने

$$=2abc(a+b+c)^2$$

14.5 क्रैमर के नियम द्वारा युगपत समीकरणों का हल (Cramer's Rule)

अर्थशास्त्र के कई मॉडलों के विश्लेषण में युगपत एक रेखीय समीकरणों के समुच्चय को हल करना होता है। जैसे-जैसे चरों की संख्या तथा तदनुसार समीकरणों की संख्या में वृद्धि होती है, समस्या जटिल होती जाती है। सारणिकों के उपयोग से एक रेखीय समीकरणों के समुच्चय को हल करना बहुत सरल हो जाता है। सारणिक उन समीकरणों के समुच्चय द्वारा ही बन सकता है जहां चरों की संख्या समीकरणों की संख्या के बराबर हो।

इस इकाई में हम युगपत समीकरणों के हल की विधि जिसे क्रैमर का नियम (Cramer's Rule) कहते हैं का अध्ययन करेंगे। सर्वप्रथम हम सरल सीधी रेखा समीकरण को हल करेंगे।

$a_1 \times b_1 y = c_1$.......................(1)

$a_1 \times b_1 y = c_2$..............(2)

सारणिक की विधि से हल इस प्रकार लिखा जा सकता है ।

$$\frac{\times}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}}$$

इससे अज्ञात चरों के मूल्य सारणिक का मूल्य ज्ञात कर निकाला जा सकता है ।

सामान्य रूप में सूत्र इस प्रकार होगा यदि समीकरणों की संख्या तीन होगी ।

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = K_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = K_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = K_3$$

$$X_1 = \frac{\begin{vmatrix} K_1 & a_{12} & a_1 \\ K_2 & a_{22} & a_{23} \\ K_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{A} \quad X_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & K_2 & a_{13} \\ a_{22} & K_2 & a_{23} \\ a_{32} & K_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{A} \quad X_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & K_1 \\ a_{21} & a_{22} & K_2 \\ a_{31} & a_{32} & K_3 \end{vmatrix}}{A}$$

उपर्युक्त अनुपातों में हर (denominator) चरों के गुणांक मैट्रिक्स का सारणिक हैं । अंश (numerator) गुणांक मैट्रिक्स का ऐसा सारणिक है जिसमें i वां स्तम्भ (i= 1, 2, 3) दायीं ओर के अचर मूल्यों के स्तम्भ द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया गया है ।

यदि $|A|$=0 है तो एक रेखीय समीकरणों के समुच्चय का कोई अन्नय हल नहीं है ।

ऊपर 3 युगपत समीकरणों की स्थिति में अनन्य हल ढूंढने की प्रक्रिया बताई गई है । n समीकरणों की स्थिति में भी इसी प्रकार की प्रक्रिया अपनाई जावेगी ।

$X_1, X_2 .... X_n$ अर्थात् n अज्ञात मूल और n समीकरण दिये हुये हैं ।

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 .... a_{in}X_n = K_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 .... a_{2n}X_n = K_2$$
$$- -$$
$$a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 .... a_{nn}X_n = K_3$$

माना कि अज्ञात मूल्य $X_1, X_2 .... X_n$ के गुणांक का सारणिक $|\Delta|$ है जैसे-

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \end{vmatrix}$$

यदि हम i वें स्तम्भ के स्थान पर समीकरणों के दायीं ओर के गुणांकों के स्तम्भ को प्रतिस्थापित करके बने सारणिक को $|\mathrm{D}_1|$ द्वारा बतायें, तब-

$$X_1 = \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|}, X_2 = \frac{|\Delta_2|}{|\Delta|}, X_3 \frac{|\Delta_3|}{|\Delta|}, ...X_1 \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|}, X_n \frac{|\Delta_n|}{|\Delta|}$$

जहां $(|\Delta| \neq 0)$

जैसे युगपत समीकरणों का समुच्चय है-

$$X_1 + X_2 + X_3 = 3$$
$$2X_1 - X_2 + X_3 = 0$$
$$3X_1 + 4X_2 + X_3 = 8$$

तब

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1+4)-1(2+3)+1(8+3)$$

$=+3-5+11$

$=9$

$$|\Delta_1| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3(1-4)-10+8)+1(0+8)$$

$=9-8+8$

$=9$

$$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 1(0+8)-3(2+3)+1(16-0)$$

$= 8 - 15 + 16$

$= 9$

$$|\Delta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -0 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1(-8+0)-1(16-0)+3(8+3)$$

$= -8 - 16 + 33$

$= 9$

तब $X_1 = \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|}, X_2 = \frac{|\Delta_2|}{|\Delta|}, X_3 \frac{|\Delta_3|}{|\Delta|}$

अथवा $X_1 = \frac{9}{9} = 1, X_2 = \frac{9}{9} = 1, X_3 = \frac{9}{9} = 1$

उदाहरण -4 सारणिकों का उपयोग करके निभ समीकरणों को हल कीजिए-

(i) $x+y+2z=9$

$x+2y+3z=14$

$2x+3y+z=11$

(ii) $x+y+3z=0$

$x+2y=6$

$x+3y+z=8$

(iii) $3x+5y+7z=13$

$4x+y-12z=6$

$2x+9y-3z=20$

हल - सारणिक $|\Delta_2|$ **का मान**

$$(i)|\Delta|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$|\Delta|=-7+5-2=-4$$

$$|\Delta_1|\,or\,|\Delta x|=\begin{vmatrix}9 & 1 & 2\\ 14 & 2 & 3\\ 11 & 3 & 1\end{vmatrix}=9\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}14 & 3\\ 11 & 1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}14 & 2\\ 11 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-63+19+40$$

$$=-4$$

$$|\Delta_1|\,or\,|\Delta y|=\begin{vmatrix}1 & 9 & 2\\ 1 & 14 & 3\\ 2 & 11 & 1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}14 & 3\\ 11 & 1\end{vmatrix}-9\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 14\\ 2 & 11\end{vmatrix}$$

$$=-19+45-34$$

$$=-8$$

$$|\Delta_3|\,or\,|\Delta z|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 9\\ 1 & 2 & 14\\ 2 & 3 & 11\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2 & 14\\ 3 & 11\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 14\\ 2 & 11\end{vmatrix}+9\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-20+17-9$$

$$=-12$$

$$x=\frac{|\Delta x|}{|\Delta|}=\frac{-4}{-4}=1$$

$$y=\frac{|\Delta y|}{|\Delta|}=\frac{-8}{-4}=2$$

$$z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} = \frac{-12}{-4} = 3$$

नोट: हल जांच x, y, और z का मूल्य सभी समीकरणों में प्रतिस्थापित करके " कीजिए, जैसे -

$$x + y + 2z = 1 + 2 + 2(3) = 9$$

हल (ii) माना कि अज्ञात राशियों के गुणांक का सारणिक $|\Delta|$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - 1 + 3 = 4$$

$$63 + 19 + 40$$

$$|\Delta x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -6 + 6 = 0$$

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 3\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 0 + 6 = 12$$

$$|\Delta z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 0$$

$$= -2 - 2 = -4$$

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{12}{-4} = 3$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} = \frac{-4}{-4} = -3$$

हल (iii) माना कि अज्ञात राशियों के गुणांक का सारणिक $|\Delta|$

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 4 & 1 & -12 \\ 2 & 9 & -3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -12 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & -12 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-3+108) - 5(-12+24) - 7(36-2)$$

$$= 315 - 60 - 238$$

$$|\Delta y| = \begin{vmatrix} 3 & 13 & -17 \\ 4 & 6 & -12 \\ 2 & 20 & -3 \end{vmatrix} = 3(-18+240) - 13(-12+24) - 7(80-12)$$

$$= 34$$

$$|\Delta z| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 13 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 9 & 20 \end{vmatrix} = 3(20-54) - 5(80-12) + 13(36-2)$$

$$= 0$$

$$x = \frac{|\Delta x|}{|\Delta|} = \frac{17}{17} = 1$$

$$y = \frac{|\Delta y|}{|\Delta|} = \frac{34}{17} = 2$$

$$z = \frac{|\Delta z|}{|\Delta|} = \frac{0}{17} = 0$$

14.6 सारांश (Summary)

दो समानान्तर लम्बवत् रेखाओं के मध्य वर्ग अंकायत में लिखे गये क्रम विन्यास को सारणिक कहते हैं। सारणिक केवल वर्ग आव्यूहों के लिये ही परिभाषित होते हैं । सारणिक का मान ज्ञात किया जा सकता है । मान ज्ञात करने के लिये सहखण्डों से विस्तार की पद्धति अपनाई जाती है । सारणिक के गुणधर्मो के आधार पर, जहां संभव हो, बिना विस्तार किये भी सारणिक का मान ज्ञात किया जा सकता है । एक रेखीय युगपत समीकरणों के समुच्चय का अनन्य हल सारणिक विधि से ज्ञात किया जा सकता है । इस विधि को क्रैमर का नियम कहते हैं ।

14.7 शब्दावली (Glossary)

सारणिक	Determinant
रैखिक समीकरण	Linear Equation
समुच्चय	set

लघुसारणिक / उपसारणिक	Minor
सहखण्ड	Cofactor
सहखण्डन	Adjoint'
हर	Denominator
अंश	Numerator
गुणांक	Coefficient

14.8 सन्दर्भ ग्रन्थ (References)

Chiang., Alpha C., "Fundamental Methods Of Mathematical Economics" , Mcgraw Hill, 1984, Chapter-5

Webber, Jean E., "Mathematical Analysis, Business And Economics Applications" Harper, 1982, Chapter-7

Mehta And Madnani, "Mathematics For Economics" . Sultan Chand, Latest Ed. Chapter-3

लक्ष्मीनारायण नाथूरामका, "अर्थशास्त्र में गणित के प्रयोग' कॉलेज बुक हाउस, अध्याय -11

14.9 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Questions)

1. E-1 यदि $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ है तो $|A|$ का मान ज्ञात कीजिए।

E-2 यदि $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ है तो Adj. ज्ञात कीजिए ।

E-3 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ में

(i) अवयव 1, -2 तथा 4 के लघु सारणिक ज्ञात कीजिए ।

(ii) अवयव 2. -2 तथा -3 के सहखण्ड ज्ञात कीजिए ।

E-4 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ का प्रसार कर मान ज्ञात कीजिए ।

E-5 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & d \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

E-6 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & d \end{vmatrix}$ अवयव (), 1 और 7 के लघुसारणिक एवं सहखण्ड ज्ञात कीजिए ।

2. E-7 बिना विस्तार किए सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} 19 & 17 & 15 \\ 9 & 8 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

E-8 प्रदर्शित कीजिए कि $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a+b+c)$

E-9 सारणिक के किन गुणधर्मो के आधार पर निम्न प्रकार से लिख सकते हैं-

(a) $\begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ $(b)\begin{vmatrix} 9 & 27 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 18\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$ $(d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

E-10 सिद्ध कीजिए कि-

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

E-11 सिद्ध कीजिए कि-

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$

E-12 सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-b & b-c & c-a \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc$$

3. E-13 युगपत समीकरणों के निम्न समुच्चयों को सारणिक विधि (क्रेमर का नियम) लागू करके हल कीजिए-

(i) $7x - y - z = 0$

$10x - 2y + z = 8$

$x - 2y - 3z = 1$

(ii) $6x+3y-2z=7$

$2x+y-4z=3$

$2x+y-2z=1$

(iii) $2x-y-3z=9$

$x-2y+z=4$

$3x\ \ 2y+z=10$

(iv) $4x_1-5x_2-7x_3=15$

$3x_1-2x_2-6x_3=8$

$x_1-7x_2-x_3=6$

हल एवं उत्तर

E-1 $|A=0|$

E-2 adj. $|A|=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

E-3

$(i)\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$

$(ii)(+)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix},(+)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix},(+)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$

E-4 $|A|=-26$

E-5 $3abc-a^3-b^3-c^3$

E-6

$|Ma|=\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} |Ma|=\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} |Mf|=\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

$|Ca|=+\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} |Ca|=(-)\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} |Cf|=(-)\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$

E-7 R_1-2R_2 करने पर प्रथम व तृतीय पंक्ति समान है अत: मान शब्द है ।

E-8 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

C_1-C_2 एवं C_2-C_3 लेकर (a-b) व (b-c) उभयनिष्ठ लीजिए ।

E-9 (a) सारणिक की किसी पंक्ति के प्रत्येक अवयव को किसी अचर राशि से गुणा कर किसी अन्य पंक्ति के संगत अवयवों में से घटाने पर सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है ।

(R_2-3R_1)

(b) प्रथम पंक्ति से 9 एवं द्वितीय पंक्ति से 2 उभयनिष्ठ लेने पर, क्योंकि सारणिक की किसी पंक्ति या स्तम्भ से कोई भी अचर राशि उभयनिष्ठ के रूप में बाहर ली जा सकती है ।

(c) एक पंक्ति दूसरी पंक्ति का कोई गुणा होने पर सारणिक का मान शून्य होता है । $(R_1 - 2R_2)$

(d) सारणिक के किसी स्तम्भ को निकट के स्तम्भ के आगे खिसकाया जाय तो सारणिक का संख्यात्मक मान वही रहता है परन्तु छलांगें गये स्तम्भों की संख्या विषम होने पर चिन्ह बदल जाता है ।

E-10 $(i) C_1 + C_2 + C_3)(ii)$ प्रथम स्तम्भ से 2 $(a+b+c)$ कॉमन लें (iii) $R_2 - R_1$, एवं $R_3 - R_1$ करें (iv) प्रथम पंक्ति से प्रसार करें ।

E-11 (i) $C_2 + C_3$ करें (ii) C_3 में -1 का भाग देकर -1 उभयनिष्ठ लें (iii) प्रथम एवं तृतीय स्तम्भ सर्वसम होने सें मान शून्य होगा ।

E-12 (i) द्वितीय पंक्ति से प्रथम पंक्ति के संगत अवयव घटायें (ii) तृतीय पंक्ति में द्वितीय पंक्ति के संगत अवयव जोड़े (iii) प्रथम पंक्ति से विस्तार करें ।

E-13 (i) x=1, y=3, z=4 (ii) x=0, y=1, z=1 (iii) x=1, y=2, z=3 (iv) $|\Delta|$ असंगत, हल नहीं ।

इकाई -15

युगपत समीकरण (Quadratic Equations)

इकाई की रूपरेखा

15.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई का उद्देश्य विद्यार्थियों को समीकरण के बारे में जानकारी प्रदान करना है । इस इकाई के अध्ययन के बाद आप:

- समीकरण द्वारा समस्याओं को हल करने की विधि ज्ञात कर सकेंगे;
- द्विपदीय समीकरण को हल कर सकेंगे;
- द्विघातीय समीकरण को हल करने की विधियां ज्ञात कर सकेंगे;
- अर्थशास्त्र में समीकरण का प्रयोग कर सकेंगे ।

15.1 प्रस्तावना (Introduction)

बीजगणित समीकरण का प्रारम्भिक बिन्दु है जहां साधारण समस्याएं, तर्क, स्मरण शक्ति एवं तीव्र गणना द्वारा हल की जा सकती है वहां जटिल समस्याओं को हल करने में समीकरण बहुत उपयोगी है । एक सामान्य उदाहरण लें । वह कौन सी संख्या है जिसमें तीन जोड़ा जाय तो योग 8 हो जायेगा. आप शीघ्र जवाब देंगे कि वह संख्या 5 है जिसमें यदि तीन जोडा जाय तो उत्तर 8 होगा।

इसी समस्या को एक समीकरण के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है माना कि X वह अज्ञात संख्या है जिसे जोड़ने पर उत्तर 8 है । तो समीकरण के रूप में-

$$3 + X = 8$$

अथवा रूपान्तरण करने पर

$$X = 8-3$$

$$X = 5$$

इसने हमें एक ऐसी विधि प्रदान की है जिससे हम इस प्रकार की कोई भी समस्या, समीकरण बनाकर हल कर सकते हैं । अर्थात समीकरण वह विधि है जिससे अज्ञात संख्या बिना विशेष परिश्रम के ज्ञात की जा सकती है ।

समीकरण का प्रयोग न केवल कठिनाई को सरल बनाता है पर हमें सोचने का नया तरीका भी प्रदान करता है । इस इकाई में हम सरल समीकरण का प्रयोग करेंगे क्योंकि अर्थशास्त्र, वाणिज्य आदि में सरल समीकरण भी अनेक व्यवहारिक प्रश्नों को हल करने की क्षमता प्रदान करते हैं ।

15.2 युगपत समीकरण (Quadratic Equations)

15.2.1 युगपत समीकरण का उदाहरण

युगपत समीकरण में दो चर होते हैं तथा ये दोनों ही घर उस विशिष्ट मूल्य को बतलाते हैं जो दोनों ही समीकरणों को संतुष्ट करता है । उदाहरण के लिए निम्न समीकरण युगपत समीकरण को बतलाता है ।

$$3X + 2Y = 7 \text{ ....(1)}$$

$$X + Y = 3 \text{ ....(2)}$$

समीकरण X = 1 तथा Y = 2 वे विशिष्ट मूल्य है जो दोनों ही समीकरण युग्म को एक साथ संतुष्ट करते हैं । यदि X एवं Y का अन्य कोई मूल्य लिया जाये तो समीकरण संतुष्ट नहीं होंगे । उदाहरण के लिए X=2 एवं Y=1 लिया जाये तो समीकरण संख्या 2 (eq....2) तो पूरा होगा पर समीकरण 1 (eq........1 का मूल्य-

$$3(2) + 2(2) = 6+2 = 8$$

हो जायेगा । अतः समीकरण 1 पूरा नहीं होगा ।

इसी प्रकार X = 2 एवं Y=$\frac{1}{2}$ लिया जाये तो $3(2) + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 6+1 = 7$

अर्थात् समीकरण संख्या 1 पूरा होगा पर समीकरण संख्या 2 में यही मूल्य रखने पर 2 $2+\left(\frac{1}{2}\right)=2.5$ होगा । अतः समीकरण संख्या 2 की संतुष्टि नहीं हो पायेगी । इस प्रकार युगपत समीकरण का हल करने में हम उन दो विशिष्ट मूल्यों को प्राप्त करते है जो दोनों ही समीकरणों को संतुष्ट कर सके । इससे पूर्व की हम युगपत समीकरणों की गणितीय विशेषताओं का अध्ययन करे हम उनके हल करने की दो विधियों का अध्ययन करते हैं ।

(1) रेखाचित्र विधि

(2) बीजगणितीय विधि

15.2.2 रेखाचित्र विधि

इसमें दोनो समीकरणों में दिये गये X व Y गुणांक (Coefficients) को कल्पित मूल्य देकर ग्राफ पेपर पर दो रेखाएं बनायी जाती है। इन दोनों रेखाओं का मिलन बिन्दु (Intersection Points) ही X एवं Y के मूल्य को बतलाता है जो समीकरण को संतुष्ट करते है। इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया गया है।

3X + 2Y = 7....................(1)

X + Y = 3....................(2)

यहां हम X एवं Y कल्पित मूल्य लेते हैं जो समीकरण संख्या 1 को संतुष्ट करता है।

X= 0 1 2 3 2.33 - $\frac{1}{3}$

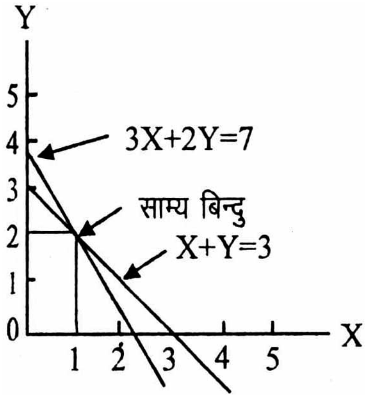
Y = 3.5 2 0.5 -1 0 4

इसी प्रकार समीकरण संख्या 2 में X एवं 7 के विभिन्न मूल्यों का उपयोग करने पर-

X = 0 1 2 3 4 -1

Y = 3 2 1 0 -1 4

उपर्युक्त बिन्दुओं को रेखाचित्र पर प्रस्तुत करने पर निम्नलिखित चित्र बनता है।



रेखाचित्र 15.1

इस रेखाचित्र में X=1 तथा Y=2 पर दोनों रेखाएं आपस में काट रही है यह साम्य बिन्दु (Equilibrium Point) X तथा Y के उन मूल्यों को बतलाता है जहां दोनों समीकरण संतुष्ट होते हैं।

- **रेखाचित्र विधि का विस्तार**

यदि हमारे पास दो के स्थान पर तीन समीकरण हो तब भी X, Y एवं Z का साम्य मूल्य प्राप्त किया जा सकता है। उसकी विधि दो समीकरण के समान ही है।

$$X + Y + Z = 6$$

$$2X + 2Y - 3Z = 15$$

$$3X - Y + 2Z = 7$$

दो समीकरणों की तरह ही इसमें हम X, Y एवं Z के कल्पित मूल्य ले सकते हैं पर इसमें त्रिआयामी चित्र बनाना होगा। अत: व्यवहार में त्रिआयामी चित्र बनाने में कठिनाई होने के कारण तीन या अधिक चर (Variables) वाले समीकरणों को बीज गणितीय विधि द्वारा हल करना अधिक आसान है ।

15.2.3 बीजगणितीय विधि

बीजगणितीय विधि द्वारा युगपत समीकरण को हल करना आसान है । सर्वप्रथम हम दो घरों में वक्त युगपत समीकरण को हल करते हैं ।

उदाहरण-1

3X + 2Y = 17..:....................(1)

2Y + 4Y = 22.......................(2)

उपर्युक्त समीकरणों को हल करने के लिये हम सर्वप्रथम किसी एक घर के गुणांकों के समान मूल्य लेकर उन्हें घटा लेते हैं । इस प्रकार शेष एक चर रह जायेगा जिसमें समीकरण आसानी से हल हो जायेगा ।

उदाहरण के लिए समीकरण प्रथम को 2 से गुणा करने पर एवं समीकरण द्वितीय को ३ से गुणा करने पर दोनों ही समीकरणों में 6X आ जायेगा और फिर घटाने पर X शून्य रह जायेगा तथा Y मूल्य ज्ञात किया जा सकेगा । सम्पूर्ण समीकरण eq. 1 को 2 से तथा समीकरण eq. 2 को 3 से गुणा करने तथा घटाने पर-

$$6X+4Y=34$$

$$6\mathrm{X}+12Y=66$$

-     -   - चिन्ह बदल जाएंगे

$$-8\mathrm{Y}=-32$$

$$\mathrm{Y}=4$$

इस प्रकार Y = 4 मूल्य प्राप्त हुआ । इस मूल्य को समीकरण 1 में रखने पर-

$$3(X)+2(4)=17$$

$$3X+8=17$$

$$3X=17-8$$

$$3X=9$$

$$X=3$$

इस प्रकार X = 3 तथा Y = 4 मूल्य प्राप्त हुआ ।

अब हम इस मूल्य को समीकरण 2 में रखकर जांच करेंगे कि यह मूल्य सही है या नहीं । समीकरण दो में X व Y के ज्ञात मूल्य रखने पर-

$$2X+4Y=22$$

$$2(3)+4(4)=22$$

$$6+1622$$

इस प्रकार X = 3 तथा Y=4 वें मूल्य हैं जो दोनों ही समीकरणों को ही तरह संतुष्ट करते है ।

15.2.4 बीजगणितीय विधि का विस्तार

जहां दो चरों को हल करने के लिए दो समीकरण आवश्यक है वहां तीन चरों का साम्य मूल्य ज्ञात करने लिए तीन समीकरण आवश्यक है ।

उदाहरण-2

3.X + 4Y + 6Z = 29...................... (1)

5X + 2Y + 2Z = 15.......................(2)

2X + 3Y + Z = 11 .... (3)

विधि

(i) प्रथम दो समीकरणों को हल करके उनमें एक घर निकाल दीजिए इस प्रकार दो चरों का समीकरण रह जायेगा।

(ii) समीकरण संख्या दो एवं तीन को हल कीजिए । उसमें भी यही चर निकालिये जो पहले निकाला था इस प्रकार एक अन्य समीकरण प्राप्त होगा ।

(iii) इन दोनो ही समीकरणों को हल करने पर दो चरों के मूल्य ज्ञात कर सकेंगे ।

(iv) तीसरे चर का मूल्य ज्ञात करने के लिये इन दो ज्ञात मूल्यों का प्रतिस्थापन करें ।

(v) सभी समीकरणों में इन तीनों मूल को रखकर जांच करें ।

हल

3X + 4Y + 6Z = 29...................... (1)

5X + 2Y + 2Y = 15...................... (2)

2X + 3Y + Z = 11 .... (3)

प्रथम व द्वितीय समीकरण को लेकर तथा द्वितीय समीकरण को 3 से गुणा करने पर तथा घटाने पर-

3 X + 4Y + 6Z = 29

15 X + 6Y + 6Z = 45

 - -

$$-12X - 2Y = -16.............(4)$$

अब समीकरण 2 व 3 को लेकर तथा समीकरण 3 को 2 से गुणा करने पर-

$$5X + 2Y + 2Z = 15$$

$$4X + 6Y + 2Z = 22$$

\- - - -

$$X - 4Y = -7..............(5)$$

$$-Y + 2Z = 7$$

अब समीकरण 4 को (-2) से गुणा करने पर तथा समीकरण 5 के साथ योग करने पर

$$24X + 4Y = 32$$

$$X - 4Y = -7$$

$$\overline{25 = 25} ....(6)$$

$$X = 1$$

तथा समीकरण 6 में X का मान रखने पर -

$$24(1) + 4Y = 32$$

$$24 + 4Y = 32$$

$$4Y = 32 - 24$$

$$4Y = 8$$

$$Y = 2$$

X = 1 तथा Y=2 का मूल्य समीकरण संख्या 1 में रखने पर-

$$3(1) + 4(2) + 6Z = 29$$

$$3 + 8 + 6Z = 29$$

$$6Z = 11 = 29$$

$$6Z = 29 - 11$$

$$6Z = 18$$

$$Z = 3$$

इस प्रकार X= 1, Y = 2 तथा 2 = 3 ज्ञात मूलों को प्रथम तीन समीकरणों में रखकर सही हल की परीक्षा की जा सकती है ।

द्विघाती समीकरण-

यदि किसी समीकरण का सामान्य रूप $ax^2+bx^2+c=0$ तो यह द्विघाती समीकरण कहलाता है । इसमें x के दो मूल्य ज्ञात होते हैं तथा यही दोनों उसके मूल (Roots) कहलाते हैं ।

इस समीकरण को हल करने के लिये इन समीकरणों की निम्न विशेषता का प्रयोग किया जाता है । b गुणांक को दो भागों में इस प्रकार विभाजित किया जाता है कि उनका योग b तथा गुणा ac के बराबर हो ।

उदाहरण-3

$$15X^2 + 14x + 3 = 0$$

$ax^2+ bx + c = 0$ की भांति एक द्विघाती समीकरण है । इसमें a=15, b = 14 तथा c= 3 है । इस विधि के अनुसार 14 के दो भाग इस प्रकार से ही कि उनका योग 14 तथा गुणा 45 (15x3) हो । 45 के कारक निम्न है । इसके लिए हम विभिन्न संख्याओं का जोड़ व गुणा करके देखते हैं जैसे 1583 पर इसका योग अथवा बाकी हमें 14 प्रदान नहीं करती है । एवं 5 x 9 इसका योग 14 है । अतः + 5 एवं +9 को b के स्थान पर प्रतिस्थापित करने पर समीकरण पुन: लिखा जा सकता है।

$$=15X^2+14x+3=0$$
$$=15X^2+5x+9x+3=0$$
$$5x(3x+1)+3(3x+1)=0$$
$$=(5x+3)(3x+1)=0$$

(प्रथम दो पदों में से 5x उभयनिष्ठ लेने पर एवं बाद के दो पदों में से 3 में से उभयनिष्ठ लेने पर, अब हम एक-एक

ब्रेक्ट को बारी-बारी से लेंगे ।

यदि $5x+3=0$ तो $x=\frac{-3}{5}$

यदि $3x+1=0$ तो $x=\frac{-1}{3}$

अतः समीकरण के दो मूल्य $x=\frac{-1}{5}$ - एवं $x=\frac{-1}{3}$ हैं ।

यदि ये दोनो मूल्य मूल समीकरण में रखें जायें तो-

$$15x^2+14x+3=0$$
$$=15\left(\frac{-3}{5}\right)^2+14\left(\frac{-3}{5}\right)+3=0$$
$$=15\left(\frac{9}{25}\right)-\frac{42}{5}+3=0$$
$$=\frac{27}{5}-\frac{42}{5}+3=0$$
$$=\frac{-15}{5}+3=0$$
$$=-3+3=0$$

इसी प्रकार $x=\dfrac{-1}{3}$ का मूल्य रखने पर ।

$$=15\left(\frac{-3}{5}\right)^2+14\left(\frac{-3}{5}\right)+3=0$$
$$=\frac{15}{9}-\frac{14}{3}+3=0$$
$$=\frac{15-42}{9}+3=0$$
$$=\frac{-1}{3}+3=0$$
$$x=\frac{-27}{9}+=0$$
$$=-3+3=0$$

इस प्रकार दोनों ही मूल $x_1 = \frac{-1}{5}$ तथा $x_1 = \frac{-1}{3}$ इस समीकरण को संतुष्ट करते हैं । सूत्र द्वारा द्विघात समीकरण का हल कारक विधि जटिल है तथा इसमें काफी अनुमान लगाना होता है परन्तु यदि हम निम्न सूत्र का प्रयोग करें तो समीकरण का हल आसान है-

$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ α=X का प्रथम अज्ञात मूल

$\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}$ β=X का द्वितीय अज्ञात मूल्य

हम 15 x^2 + 14 x +3=0 समीकरण को पुन: लेते हैं तथा सूत्र विधि से हल करते हैं- -

$$\alpha = \frac{-14+\sqrt{(14)^2-4(15)(3)}}{2(15)}$$

$$\alpha = \frac{-14+\sqrt{196-180}}{30}$$

$$\alpha = \frac{-14+\sqrt{16}}{30}$$

$$\alpha = \frac{-14+4}{30} = \frac{-10}{30} = \frac{-1}{3}$$

$$\beta = \frac{-14-\sqrt{(14)^2-4(15)(3)}}{2(15)}$$

$$\beta = \frac{-14-\sqrt{16}}{30}$$

$$\beta = \frac{-14-4}{30} = \frac{-18}{30} = \frac{-3}{3}$$

इस प्रकार $\alpha = \frac{-1}{3}$ तथा $\beta = \frac{-3}{5}$ ये दोनों ही समीकरणों को संतुष्ट करते हैं ।

उदाहरण-4

$$6x^2 - x - 2 = 0$$

सूत्र का प्रयोग करने पर

$a = (6)$, b=(-1)

$$\alpha = \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\alpha = \frac{-(1)+\sqrt{(-1)^2-(4)(6)(-2)}}{2(6)}$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{1+48}}{12}$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{49}}{12} = \frac{1+7}{12} = \frac{8}{12} \text{ or } \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\beta = \frac{(-1)-\sqrt{(-1)^2-(4)(6)16(-2)}}{2(6)}$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{49}}{12} = \frac{1-7}{12} = \frac{-6}{12}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$\alpha = \frac{2}{3}, \beta = -\frac{1}{2}$ इन दोनों मूल्यों को समीकरण में रखने पर-

$$6x^2 - x - 2 = 0$$

$$6\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} - 2 = 0$$

$$6\left(\frac{4}{9}\right) \frac{2}{3} - 2 = 0$$

$$\frac{24}{9} - \frac{2}{3} - 2 = 0 \text{ or } \frac{24-6-18}{9} = 0$$

$$\frac{24-24}{9} = 0 \quad 0 = 0$$

इसी प्रकार $x = -\frac{1}{2}$ मूल्य प्रतिस्थापित करने पर-

$$6\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 0$$

$$6\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 2 = 0 \text{ or } \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2 = 0$$

$$\frac{3+1-4}{2} = 0$$

$$+4 - 4 = 0$$

$$0 = 0$$

इस प्रकार दोनों ही मूल्य समीकरणों को संतुष्ट करते हैं ।

बोधप्रश्न-1

1. $3X + 2Y = 9$, $9X + 4Y = 21$
2. $3X + 2Y = 120$, $5X + 3Y = 190$
3. $10A + 5B = 80$, $6A + 10B = 132$
4. 10A + 7B = 12, 6A + 5B = 8

5.	$3X = 15$ $3X + 5Y = 25$	6.	$24X + 10Y = 13$ $16X + 7Y = \frac{53}{6}$
7.	$0.4X + 0.2 = 5$ $1.2X + 0.4Y = 14$	8.	$2X + 3Y - Z = 8$ $X - Y + Z = 4$ $6X - 2Y + 2Z = 16$
9.	$X - Y - 5Z = -20$ $2X + Y - 2Y = 4$ $3Y - 2Y = 4$	10.	$X + Y + Z = 30$ $2X = Y + 3Z = 45$ $3X + 3Y + 3Z = 90$
11.	$4A + 5B + 3Z = 13$ $6A - 4B - Z = -3$ $18A + B + 4Z = 0$		

15. मैट्रिक्स विधि (Matrix Method)

समीकरण को हल करने की मैट्रिक्स विधि भी प्रचलित है । इस इकाई में हम केवल उसकी रूपरेखा प्रदान की रहे हैं।

उदाहरण-1

$3X + 6Y = 24$

$2X - Y = 01$

इसे मैट्रिक्स रूप में प्रदर्शित करने पर

इस सारणिक का मान ज्ञात करने पर (यह $|D|$ कहलाता है)

$(3)(-1) - (2 \times 6) = (-3) - (12)$

$|D| = -15$

यदि उपर्युक्त समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जाए-

$aX + bY = K_1$

$cX + dY = K_2$

यहां $a = 3, b = 6, c = 2$ व $d = -1$ है तथा $|D| = -15$ है ।

निम्न दो सूत्रों द्वारा द्विपदीय समीकरण आसानी से हल हो सकते हैं।

$$X = \frac{dk_1 - bk_2}{|D|}$$

$$Y = \frac{ak_2 - ck_1}{|D|}$$

अतः उपर्युक्त मूल रखने पर

$$X_1 = \frac{(-1)(24)-(6)(1)}{-15}$$

$$= \frac{-24-6}{-15} = \frac{-30}{-15} = 2$$

अर्थात् $X_1 = 2$ है ।

$$Y = \frac{(3)(1)-(2)(24)}{-15}$$

$$= \frac{3-48}{-15} = \frac{-45}{-15} = 3$$

अत: Y= 3 है।

विद्‌यार्थी स्वयं परीक्षा कर सकते है उपर्युक्त समीकरणों में X=2 व Y=3 का मान रखने पर समीकरण के दायें और रखे हुए मूल संतुष्ट किये जा सकते हैं ।

उपर्युक्त उदाहरण 2 x 2 के सारणिक पर आधारित हैं । यदि 3 x 3 अथवा उससे बड़े सारणिक हो तो कम्प्यूटर द्‌वारा ये आसानी से हल किये जा सकते हैं ।

15.4 कम्प्यूटर का प्रयोग (Uses of Computer)

यदि बडे आकार के सारणिक हो तो कम्प्यूटर का प्रयोग करना चाहिये इसके लिए गणित एवं सांख्यिकी के विशेष सॉफ्टवेयर आते हैं । इनका प्रयोग विशेष आवश्यकताओं जैसे आर्थिक अनुसधान, मॉडल निर्माण सामान्य संतुलन आदि के लिये किया जाता है ।

15.5 अर्थशास्त्र में प्रयोग (Uses in Economics)

आर्थिक एवं व्यावसायिक समस्याओं में युगपत समीकरण के कई व्यावहारिक प्रयोग है । इससे अज्ञात मूल्यों को प्राप्त किया जा सकता है ।

उदाहरण-1

अखिल इलेक्ट्रिकल्स ने X श्रेणी का बल्ब 5 रूपये एवं Y श्रेणी का बल्ब 8 रूपये में बेचा तो उसे 200 रूपया प्राप्त होता है जबकि वह X श्रेणी का बल्ब 6 रूपये एवं श्रेणी का 10 रूपये में बेचा तो 248 रूपये प्राप्त होते हैं, बताइये X एवं Y श्रेणी के बल्बों की संख्या क्या है?

हल-

माना कि वह X श्रेणी के X बल्ब तथा Y श्रेणी के Y बल्ब बेचता है । तो समीकरण इस प्रकार बनेगा-

5X+8Y=200

6X+10Y=246

उपर्युक्त दोनों समीकरणों को हल करने पर हमें X = 16 तथा Y = 15 ज्ञात होगा । इस प्रकार वह X श्रेणी के वह 16 बल्ब तथा Y श्रेणी के 15 बल्ब प्राप्त करेगा ।

उदाहरण-2

A, B एवं C तीन आकार के बनियान हैं । दुकानदार अलग-अलग ग्राहकों से अलग-अलग कीमत लेता है । शाम को विभिन्न बिलों के आधार पर निम्न जानकारी प्राप्त हुई

कीमत A	कीमत B	कीमत C	प्राप्त राशि
10	15	12	750

12	12	10	670
5	6	8	395

उपर्युक्त आधार पर बतलाइये कि उसको A, B एवं C प्रकार के कितने बनियान बेचे । अपने उत्तर का मिलान प्राप्त राशि से करें । यदि इन संख्याओं को समीकरण बनाकर हल किया गया तो A=15, B=20 तथा C=25 प्राप्त होगा ।

उदाहरण-3

दो अंकों का योग 80 है । यदि बडी संख्या छोटी संख्या की 4 गुना से 5 गुना अधिक है तो संख्याएं ज्ञात कीजिए । हल- इसे दो प्रकार से हल किया जा सकता है ।

प्रथम विधि- इसमें हम छोटी संख्या को X मानते हैं तब बडी संख्या (80-X) x होगी । तथा छोटी संख्या

एवं बडी संख्या का सम्बन्ध इस प्रकार होगा ।

$$(80-X)=4X+5$$

$$80-X=4X+5$$

$$-X-4X=5-80$$

$$5X=-75$$

$$X=15$$

दूसरी विधि यदि छोटी संख्या X तथा बड़ी संख्या Y है तो प्रश्न के अनुसार-

$$X+Y=80$$

$$Y=4X+5 \quad (\text{या } -4X+Y=5)$$

दोनों समीकरण का हल करने के लिए प्रथम समीकरण को 4 से गुणा करते है तथा योग करने पर-

$$4X+4Y=320$$

$$-4X+Y=5$$

$$5Y=325$$

$$Y=65$$

तथा प्रथम समीकरण में Y= 65 मूल्य रखने पर Y = 15 होगा । अत: बडी संख्या 65 तथा छोटी संख्या 15 होगी ।

15.6 सारांश (Summary)

15.7 शब्दावली (Glossary)

समीकरण Equation

युगपत समीकरण	Simultaneous Equation
सारणिक	Determinants
मैट्रिक्स	Matrix
अज्ञात मूल्य	Unknown Values
गुणांक मूल्य	Coefficients
साम्य बिन्दु	Equilibrium

15.8 सन्दर्भ ग्रन्थ (References)

Stafford, Mathematics For Economists

मेहता एवं मदनानी, अर्थशास्त्र में गणित के प्रयोग, नवीनतम संस्करण ।

15.9 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Questions)

1. रेलवे में आधा टिकिट होने पर किराया आधा होता है पर आरक्षण शुल्क समान है । यदि कोटा से उदयपुर का पूरा टिकिट (आरक्षण सहित) 160 रूपया तथा एक पूरा व एक आधा टिकिट आरक्षण सहित 230 रूपया है तो पूरे टिकिट की दर, आधे टिकिट की दर तथा आरक्षण चार्ज ज्ञात कीजिए ।
2. 20 रूपये एवं 10 रूपये नोटों से बने हुए एक बंडल में कुल 100 नोट हैं, यदि नोटों का कुल मूल्य 1800 रूपये है तो 20 रूपये एवं 10 रूपये के नोटों की संख्या ज्ञात कीजिए ।
3. यदि चार कुर्सी व पाँच टेबल की कीमत 1400 रूपये तथा 2 कुर्सी व 3 टेबल की कीमत 800 रूपये है तो 5 कुर्सी व 2 टेबल की क्या कीमत होगी ।
4. यदि बड़ी संख्या में 5 घटा दिये जायें तो वह छोटी संख्या का 5 गुना हो जाती है तथा यदि छोटी संख्या में 5 जोड़ दिये जाये तो बडी संख्या 4 गुना रह जाती है । छोटी एवं बडी संख्या का मूल ज्ञात कीजिए ।
5. दो अंकों की एक संख्या को दोनों अंकों की जोड़ को 6 से गुणा कर तथा एक जोड़ कर प्राप्त किया जा सकता है या दोनों अंकों के अन्तर को 37 से गुणा कर तथा व जोड़कर प्राप्त किया जा सकता है तो दोनों अंक ज्ञात कीजिए ।
6. 12 किताबों व 8 कॉपियों की कीमत 68 तथा 10 किताबों व 10 कॉपियों की कीमत 60 रूपया है । एक किताब व एक कॉपी का मूल्य ज्ञात कीजिए ।
7. A एवं B 120 किलोमीटर दूर है । यदि दो बसें विपरीत दिशा से आती है तो 4 घण्टे में मिलती है तथा समान दिशा में जाती है तो 12 घण्टे में मिलती है । दोनों बसों की गीत ज्ञात कीजिए ।
8. $X^2+5X+4=0$
9. $-3X^2-10X-8=0$
10. $-3X^2-36=0$
11. $3X^2+5X+2=0$

12. A Two Digit Number Is Four Times The Sum And Three Times The Product Of Its Digit Find The Number.

15.10 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to SAQ's)

बोध प्रश्न-1

1.	X=1		Y=3	2.	X=20		Y=30
3.	A=2		B=12	4.	A=1/2		B=1
5.	X=5		Y=2	6.	X=1/3		Y=1/2
7.	X=10		Y=5	8.	X=2	Y=3	Z=5
9.	X=4	Y=4	Z=4	10.	X=5	Y=10	Z=15
11.	A=1/2	B=1	C=2				

अभ्यासार्थ प्रश्न-

1. पूरा किराया 140, आधा किराया 70 तथा रिजर्वेशन 20 रूपया ।
2. 20 रूपये के नोट 90 तथा 10 रूपये के नोट 20 हैं ।
3. 900 रूपया।
4. बड़ी संख्या 80 तथा छोटी संख्या 15 है ।
5. 75
6. किताब = 5 रूपया, कॉपी 1 रूपया।
7. 10 किलोमीटर तथा 20 किलोमीटर प्रति घण्टा।
8. $L = -4, B = -1$
9. $X_1 = 6, X_2 = 4$
10. $X_1 = -3, \quad X_2 = -2$

इकाई -16

गणितीय एवं ज्यामितीय पदमाला : जोड़ एवं पद निर्धारण
(Arithmetical and Geometrical Series : Sum and Term Determination)

इकाई की रूपरेखा

16.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात आप :

- अंक गणितीय पदमाला का ज्ञान प्राप्त कर सकेंगे ।
- अंक गणितीय पदमाला के निश्चित पदों का मान ज्ञात कर सकेंगे । अंक गणितीय पदमाला का योग ज्ञात कर सकेंगे।
- पदों की संख्या ज्ञात कर सकेंगे ।
- ज्यामितीय पदमाला का ज्ञान प्राप्त कर सकेंगे ।
- ज्यामितीय पदमाला के पदों की संख्या तथा किसी निश्चित पद का मान ज्ञात कर सकेंगे ।

- ज्यामितीय पदमाला का योग प्राप्त कर सकेंगे ।
- अंक गणितीय एवं ज्यामितीय पदमाला के व्यावहारिक प्रयोग तथा अर्थशास्त्र में उपयोग कर सकेंगे ।

16.1 प्रस्तावना (Introduction)

गणित के लिए किसी श्रेणी (Series or Progressing]) का ज्ञान सदैव से रूचि का विषय रहा है। श्रेणी कई प्रकार की हो सकती है। जैसे अंकगणितीय, ज्यामितीय तथा हरात्मक आदि। प्रत्येक श्रेणी के अंक पद क्रम एवं मान के निश्चित सिद्धान्त होते हैं। इनमें अंक गणित श्रेणी की गणना आसान है परन्तु ज्यामितीय श्रेणी के लिए लघुगुणक के ज्ञान की आवश्यकता हो सकती है ।

इन श्रेणियों के कई 'व्यावहारिक प्रयोग है, उनमें से कुछ प्रयोगों की हम आगे चर्चा करेंगे ।

16.2 अंक गणितीय पदमाला (Arithmetical Progression)

यदि कोई पदमाला किसी निश्चित मात्रा में घटती या बढ़ती है तो वह अंक गणितीय पदमाला कहलाती है ।

उदाहरण के लिए-

a a+d a+2d a+3d

16.2.1 अंक गणितीय पदमाला के उदाहरण

एक अंक गणितीय श्रेणी है जिसका समान अन्तर d है । उदाहरण के लिए

5 8 11 14 17

उपर्युक्त श्रेणी का प्रथम पद a = 5 है तथा सामान्य अन्तर (8-5) अर्थात् d = 3 है । इस श्रेणी में प्रत्येक पद में समान अन्तर (d) जुडता जाता है । अंक गणितीय श्रेणी में हम तीन प्रश्नों का उत्तर खोजते हैं ।

16.2.2 श्रेणी का निश्चित पद संख्या पर योग

श्रेणी के निश्चित पद संख्या तक का योग कितना है? इसको ज्ञात करने के लिए हम निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं- $S=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$

इसमें S = पदमाला का योग तथा n= पदों की संख्या है तथा a प्रथम पद एवं d सामान्य अन्तर है ।

अथवा $S=\frac{n}{2}(a+\ell)$

यहाँ ℓ = अंतिम पद है जिसका मान $\ell=a+(n-1)d$ के बराबर होता है ।

उदाहरण-1

5 16 11 14 17 20 23

इस श्रेणी का योग कीजिए-

हल $S=\frac{n}{2}\left[2n+\left(n-1\right)d\right]$ यहाँ $a=5,\ d=3,\ n=7$ है।

इन मूल्यों को रखने पर

$S=\frac{7}{2}[2(5)+(7-1)3]$ $S=\frac{7}{2}[10+(6)3]$

$S=\frac{7}{2}[10+18]$ $S=\frac{7}{2}[28]=98$

यदि साधारण विधि से उपर्युक्त संख्याओं का योग करें तो यही उत्तर प्राप्त होगा ।

उदाहरण-2

एक श्रेणी में प्रथम पद 7 तथा समान अंतर 2 है । यदि कुल पद 11 हैं तो योग ज्ञात कीजिए।

हल

$S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ $S=\frac{11}{2}[2(7)+(11-2)2]$

$S=\frac{11}{2}[14+(10)2]$ $S=\frac{11}{2}[14+(20)]$

$S=\frac{11}{2}[34]$ $S=\frac{374}{2}=187$

विद्यार्थी निम्न श्रेणी का योग कर इसकी उत्तर की परीक्षा कर सकते हैं।

7 9 11 13 187

उदाहरण -3

एक श्रेणी का प्रथम पद 4 है तथा सामान्य अन्तर 2 है, यदि श्रेणी में कुल पद 9 है तो अंतिम पद कौन-सा होगा?

हल श्रेणी में a = 4, d = 2 तथा n = a है । अंतिम पद को ज्ञात करने के लिए -

$\ell=a+(n-1)d$

$\ell=4+(9-1)2$

$\ell=4+(8\times2)2$

$\ell=4+16=20$

अतः अंतिम पद 20 है । विद्यार्थी इस श्रेणी को स्वयं लिखकर उत्तर की परीक्षा कर सकते हैं ।

16.2.3 सामान्य अन्तर ज्ञात करना

सामान्य अन्तर ज्ञात करना, यदि दो पदों का मान दिया गया है तो सामान्य अन्तर ज्ञात किया जा सकता है ।

उदाहरण-4

यदि किसी अंकगणितीय श्रेणी में 7 दें पद का मान 24 तथा 10 वें पद का मान 29 है तो सामान्य अन्तर ज्ञात, कीजिए-

हल इस श्रेणी में 7 बा पद - $\ell_7=a+(7-1)d=24$

तथा 10 वां पद $\ell_{10}=+(10-1)d=29$

प्रथम समीकरण में से द्वितीय समीकरण घटाने पर

$$a + 6d = 24$$
$$a + ad = 29$$
$$\frac{- \quad - \quad -}{3d = 5}$$ घटाने पर चिन्ह बदल जाएंगे (ऋणात्मक चिन्ह दोनों तरफ हट जाएंगे ।) -

$$d = \frac{5}{3}$$

इस मूल्य को समीकरण में रखने पर-

$$a + 6\left(\frac{5}{3}\right) = 24 \qquad a + 10 = 24$$

a = 24 - 24 - 10

a = 14

अत: सामान्य अन्तर $\frac{5}{3}$ तथा श्रेणी का प्रथम पद 14 है । इस आधार पर पदमाला बनाई जा सकती है ।

इस प्रकार श्रेणी निम्न प्रकार से होगी-

$$14,\ 14 + \frac{5}{3},\quad 14\frac{5}{3} + \frac{5}{3}\ ,14 + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3},$$

$$= 14,\ 15 + \frac{2}{3},\ 17 + \frac{1}{3},\ 19,\ 20 + \frac{2}{3}, 22 + \frac{1}{3}.........$$

$$14,\ 15\frac{2}{3},\ 17\frac{1}{3},\ 19,\ 20\frac{2}{3},\ 22\frac{1}{3}........$$

16.2.4 पदों की संख्या ज्ञात करना

यदि किसी श्रेणी का प्रथम पद, अंतिम पद एवं एक अन्य पद दिया गया हो तो श्रेणी के पदों की कुल संख्या ज्ञात की जा सकती है । उदाहरण के लिए-

उदाहरण-5

61 68 75 29

यहाँ a = 61, d= 7 तथा 1 = 299

1=a+(n-1)d

229= 61 + (n-1)

$$299 = 61 + 7n - 7$$

$$299 = 61 + 7 = 7n$$

$$175 = 7n$$

$$n = 25$$

इस प्रकार इस श्रेणी में 25 पद हैं ।

उदाहरण-6

श्रेणी का प्रथम पद 20 तथा अंतिम पद 80 है । यदि सामान्य अन्तर 3 है तो पदों की संख्या ज्ञात कीजिए ।

$$1 = a + (n-1)3$$
$$80 = 2 + (n-1)3$$
$$80 = 20 + 3n - 3$$
$$80 = 17 + 3n$$
$$3n = 63$$
$$n = 21$$

श्रेणी में 21 पद है ।

16.2.5 व्यवहारिक प्रयोग

उपर्युक्त श्रेणी का जीवन के व्यवहारिक क्षेत्रों जैसे अर्थशास्त्र, वाणिज्य विज्ञान आदि में व्यापक प्रयोग है ।

उदाहरण-7

यदि मूलधन 5000 है तथा प्रतिवर्ष 400 रूपया बढ़ता है तो 9 वर्ष के अन्त में कितनी राशि हो जायेगी ।

$$a = 5000 \quad \text{d= 400} \qquad n = 10$$
$$1 = a + (n-1)d$$
$$1 = 5000 + (10-1)400$$
$$1 = 5000 + (9)(400)$$
$$1 = 5000 + 3600$$

इस प्रश्न में हमने n = 10 माना है क्योंकि 9 वर्ष के अन्त में पदों की संख्या कुल 10 हो जायेगी । यदि यही प्रश्न नवें वर्ष के प्रारंभ में कितनी राशि होगी, इस तरह पूछा जाता है तो ,=9 ही लिखते ।

उदाहरण-8

यदि कोई राशि 500 रूपया प्रतिवर्ष बढ़ती है तथा 8 वर्ष के अन्त में 6000 हो जाती है तो वर्ष के प्रारम्भ में कितनी राशि थी ।

$$1 = a + (n-1)d$$
$$6000 = a + (n-1)500$$
$$6000 = a + (6)500$$
$$6000 = a + 3000$$
$$6000 - 3000 = a$$
$$a = 3000$$

अतः प्रारम्भिक राशि 3000 रूपये थी ।

बोध प्रश्न -1

1. उपर्युक्त आँकड़ों के आधार पर सम्पूर्ण श्रेणी लिखिए ।
2. समान अन्तर किस प्रकार ज्ञात करेंगे ।
3. गणितीय श्रेणी के योग ज्ञात करने का सूत्र लिखिए ।

4. गणितीय श्रेणी का n वां पद कैसे ज्ञात करेंगे ।

उदाहरण- एक ट्रक जो जयपुर से कोटा के रास्ते में जयपुर से 200 किलोमीटर दूर खडी है। उसे जयपुर होते हुए दिल्ली जाना है, यदि जयपुर से दिल्ली की दूरी 350 किलोमीटर है तथा ट्रक प्रति घण्टे 50 किलोमीटर चलती है तो प्रत्येक घण्टे में बह कितनी दूरी तय करेगी तथा अन्त में दिल्ली कब पहुँचेगी।

हल ट्रक को कुल दूरी 200 किलोमीटर (जयपुर से कोटा के बीच की दूरी) व 350 किलोमीटर (जयपुर से दिल्ली अर्थात् 200 + 350 = 550 किलोमीटर की दूरी पूरी करनी है इसकी श्रेणी निम्न प्रकार से होगी ।

0 50 100 150 200 250 300 350 400 450 500 550

कुल 11 घण्टे में यह दूरी तय होगी ।

16.3 ज्यामितीय पदमाला (Geometrical Series)

हमने अंकगणितीय श्रेणी के बारे में पढ़ा है । इसी तरह ज्यामितीय श्रेणी भी है । ज्यामितीय श्रेणी एक निश्चित गुणा से बढ़ती है । आपने एक राजा और शतरंज की बिसात पर गेहूँ के दाने की कहानी सुनी होगी । कहते हैं कि एक राजा ने प्रसन्न होकर किसी व्यक्ति को अपना मनमाना इनाम लेने को कहा । उस व्यक्ति ने कहा कि मैं 64 दिन बराबर आपके दरबार में आऊँगा । पहले दिन मुझे 1 दाना, दूसरे दिन 2 दाने, तीसरे दिन 4 दाने, चौथे दिन 8 दाने और पांचवें दिन 16 दाने............इस तरह हम दिन तक लगातार दुगनी मात्रा में गेहूँ के दाने देते रहे । अपना केल्कूलेटर उठाइये और आप पायेंगे कि वह गिनती में असमर्थ है । यह श्रेणी निम्न प्रकार होगी ।

1, 2, 4, 8. 16, 32. 64, 128, 256, ...

16.3.1 ज्यामितीय पदमाला का उदाहरण

अन्य उदाहरणों द्वारा हम ज्यामितीय श्रेणी को समझ सकते हैं-

उदाहरण-9

1, 3, 6, 12, 24, 48, 96............................

$$30,15,\ 7\frac{1}{2},3\frac{15}{4},\frac{15}{8}\frac{15}{16}\ ....$$

ज्यामितीय श्रेणी को निम्न रूप में प्रकट किया जा सकता है ।

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^2..........ar^{n-1}$$

यहाँ a प्रारम्भिक पद r सामान्य गुणक तथा ar^{n-1} अंतिम पद एवं n पदों की संख्या है ।

16.3.2 श्रेणी का निश्चित पदों पर योग

ज्यामितीय श्रेणी के योग के लिए निम्न लिखित सूत्रों का प्रयोग किया जाता है ।

यदि r का 'मूल्य 1 से कम हो $(r < 1)$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{r-1}$$

यदि r का मूल 1 से अधिक हो $(r < 1)$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$$

उदाहरण के लिए एक ज्यामितीय श्रेणी के पद मूल्य निम्न प्रकार हैं-

$$3,\ 4\frac{1}{2},\ \ 6\frac{3}{4},\ \ \frac{18}{8}\ \ \frac{243}{16}$$

इस श्रेणी का योग निकालने के लिए हम $r > 1$ सूत्र का प्रयोग करते हैं क्योंकि दो पदों का गुणक $1\frac{1}{2}$ है ।

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$$ यहाँ a = 3 $a = \frac{1}{2}$ तथा n = 5 है ।

$$S_n = \frac{3\left[\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1\right]}{\frac{3}{2} - 1} \qquad S_n = \frac{3\left[\frac{243}{32} - 1\right]}{\frac{1}{2}}$$

$$S_n = \frac{3\left[\frac{211}{32}\right]}{\frac{1}{2}} \qquad S_n = \frac{633}{16} \times 2$$

$$S_n = \frac{633}{16} \quad = 39\frac{9}{16}$$

विद्‌यार्थी श्रेणी के पदों का योग कर उत्तर का परीक्षण कर सकते हैं ।

उदाहरण - 10

एक ज्यामितीय श्रेणी का प्रथम पद 5, सामान्य गुणक $\frac{1}{2}$ तथा पदों की संख्या 6 है । योग बताइये ।

हल यहाँ, $r < 1$ है अतः

$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}$$ a =5, r = $\frac{1}{2}$ तथा n = 6 है ।

$$S_n = \frac{5\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1 - \frac{1}{2}} \qquad S_n = 5\left[1 - \frac{1}{64}\right]$$

$$S_n = \frac{5\left[\frac{63}{64}\right]}{\frac{1}{2}} \qquad S_n = \frac{\frac{315}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{315}{64} \times 2$$

$$S_n = \frac{315}{32} = \frac{315}{64} \times 2 \qquad S_n = \frac{315}{32} = 9\frac{27}{32}$$

विद्यार्थियों से अपेक्षा है कि बे रू श्रेणी लिखकर उसका योग करें ।

16.3.3 सामान्य अन्तर ज्ञात करना

एक ज्यामितीय श्रेणी का सामान्य अन्तर भी ज्ञात किया जा सकता है ।

उदाहरण-11

एक श्रेणी का मुदा पद 40 तथा 7वां पद 160 है । श्रेणी के प्रथम 8 पद ज्ञात कीजिए ।

किसी श्रेणी का n पद का मान ar^{n-1} के बराबर होता है ।

अत: 7वां पद $ar^{7-1} = ar^6$

5वां पद $ar^{5-1} = ar^4$

अतः $\begin{matrix} ar^6 = 160 \\ ar^4 = 40 \end{matrix}$

या $\frac{ar^6}{ar^4} = r^2 = \frac{160}{40} = 4$ या $r = \sqrt{4} = 2$

अत: सामान्य गुणक का मान 2 है क्योंकि

$ar^4 = a(2)^4 = 40$

$a(16) = 40 \quad = a\ 2.5$

इस प्रकार $a = 2.5, r = 2$ ज्ञात होने पर निम्न ज्यामितीय श्रेणी बनेगी ।

25. 5 10 20 40 80 160 320

16.3.4 पदों की संख्या ज्ञात करना

ज्यामितीय श्रेणी में कितने पद है इसकी जानकारी के लिए भी उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग होता है । पर इसमें लघुगुणक की जानकारी आवश्यक है । लघुगुणक (logarithms) तालिका की सहायता से दो प्रकार के प्रश्नों का हल किया जा सकता है ।

A जब अंतिम पद का मान दिया हो तथा ओप ज्ञात करना हो ।

B जब योग दिया हो तथा N ज्ञात करना हो ।

उदाहरण-12

माना कि प्रथम पद 3 तथा अंतिम पद 96 है यदि गुणक r =2 है तो पदों की संख्या ज्ञात कीजिए ।

उपर्युक्त प्रश्न में a = 3, r = 2 तथा n^{th}' पद का माना 96 है । हमें n पदों की संख्या ज्ञात करना है ।

सुविधा के लिए हम n^{th} पद के मान T_n कहते हैं, सूत्र के अनुसार-

$T_n = ar^n$

या $\log T_n = \log a + n \log r$ या $\log T_n - \log a = n \log r$

उपर्युक्त मूल्य प्रतिस्थापित करने पर

$n = \frac{\log T_n - \log a}{\log r}$ $\quad$ $n = \frac{\log 1.9823 - \log 0.4771}{\log 0.3010}$

$n = \frac{\log 1.5052}{\log 0.3010}$ $\quad$ $n = 5$ अर्थात् पदों की संख्या ० है ।

विद्यार्थी प्रथम पद = 3, r = 2 एवं, $n = 5$ मानकर इसकी सत्यता का परीक्षण कर सकते हैं। यदि हमें योग (Sum) दिया हुआ है तब भी पदों की संख्या ज्ञात की जा सकती है ।

एक श्रेणी का योग 1820 है प्रथम पद 5 है तथा r = 3 है । श्रेणी में कितने पद है । सूत्रानुसार-

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ $\quad$ $1820 = \frac{5\left(3^n - 1\right)}{3-1}$

$1820 = \frac{5\left(3^n - 1\right)}{2}$ $\quad$ $\frac{1820 \times 2}{5} = 3^n - 1$

$728\ 3^n - 1$ $\quad$ $728 = 3^n$

या $\log$ of $728 = n \log 3$ या $2.8621 = n\ (0.4771)$

या $\frac{2.8621}{0.4771} = n.9989 = 6$

अर्थात् इस श्रेणी में 6 पद है । इसकी पदमाला निम्नानुसार होगी-

5, 15, 45. 135, 405, 1215, तथा इसका योग 1820 होगा ।

उदाहरण-13

कोई बाज राशि (मूलधन सहित) हर पाँच वर्ष में दुगनी हो जाती है । 15 वर्ष के अन्त में वह राशि कितने गुना

होगी ।

$S = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ $\quad$ $S = \frac{1(2^3 - 1)}{2-1}$

यहाँ n = 3 का प्रयोग किया गया है क्योंकि प्रत्येक 5 वर्ष के अनुसार 15 वर्ष में यह 3 बार गिनी जायेगी ।

$S = \frac{1(8-1)}{1}$ $\quad$ S = 7 अर्थात् राशि 7 गुना होगी ।

माना कि मूल राशि 100 रूपया है तो पहले मींच वर्षो में 200 रूपया, 10 वर्ष पश्चात् 400 रूपया तथा 15 वर्षो पश्चात् 800 रूपया होगी इसमें 100 रूपया मूलधन तथा 700 रूपया बाज का होगा ।

16.4 सारांश (Summary)

इस इकाई में हमने गणितीय व ज्यामितीय पदमाला को ज्ञात करने की विधियाँ सीखी है । गणितीय पदमाला के निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है । $S = \frac{n}{2}[2a+n-1]d$ तथा अंतिम पद ज्ञात करने के लिए $1 = a+(n-1)d$ का प्रयोग किया जाता है । चूँकि a, n, d तथा S चार चरों का प्रयोग किया गया है । अत: इनमें से कोई भी तीन मूल ज्ञात होने पर चौथा मूल ज्ञात किया जा सकता है ।

ज्यामितीय पद माला के लिए $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ का प्रयोग तब किया जाता है जब r का मूल्य 1 से कम हो । यदि r का मूल्य 1 से अधिक हो तो निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है- $S = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ । इन प्रश्नों के हल करने में केल्कूलेटर का प्रयोग समस्या को आसान बनाता है । यदि लघुगुणक (Logarithms) का प्रयोग किया जाये तो प्रारम्भिक 3 अंकों तक शुद्ध उत्तर प्राप्त किये जा सकते हैं ।

16.5 शब्दावली (Glossary)

गणितीय श्रेणी या पदमाला	Arithmetical Progression
ज्यामितीय पदमाला	Geometrical Progression
लघुगुणक	Logarithmic Progression
अनुपात	Ratio
समान अन्तर	Common Difference

16.6 सन्दर्भ ग्रन्थ (Reference)

W.T Stafford, Mathematics for Economists

मेहता एवं मदनानी - अर्थशास्त्र में गणित के प्रयोग ।

16.7 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Questions)

1. पदमाला का योग कीजिए ।

   A 3, 8, 13, 18, 23

   B 300, 255, 200, 150, 100, 50 0,

   C 200, 500, 800, 1100, 1400, 1700

2. अंतिम पद का मान ज्ञात कीजिए ।

   A 20, 18, 16 ....6 वे पद का मान

   B 8, 20. 32 ....8 वें पद का मान

   C 5, 10, 15 ....11वें पद का मान

3. पद संख्या ज्ञात कीजिए यदि प्रथम पद 4, समान अन्तर 3 तथा अंतिम पद 19 हो ।

4. योग कीजिए ।

A	3,	6,	12,	24,	48	
B	8,	24,	72,	216,	648,	
C	5,	10,	20,	40,	80,	160
D	50,	25,	$12\frac{1}{2}$,	$6\frac{1}{4}$,	$\frac{25}{8}$	

5. यदि कोई धन प्रत्येक चार वर्ष में दुगना हो जाता है तो 20 वर्ष के अन्त में कितने गुना हो जायेगा ।

16.8 अभ्यास प्रश्नों के उत्तर (Answer to SAQs)

प्रश्न संख्या 1- (A)65, (B)1050, (C) 5700

प्रश्न संख्या 2- (A)10, (B)92, (C) 55

प्रश्न संख्या 3- 6 (4A)93 (4B) 968 (4C) 315 (4D) $96\frac{7}{8} = \frac{777}{8}$

प्रश्न संख्या 4- (A)93, (B)968, (C)315, (D) $96\frac{7}{8}$ or 775/8

प्रश्न संख्या 5- 20 वर्ष के अन्त में मूलधन सहित 16 गुना एवं केवल ब्याज 15 गुना हो जायेगा।

इकाई -17

अवकलन (एक चर) Derivatives (Single Variable)

इकाई की रूपरेखा

17.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात आप :

- अवकलन का अर्थ समझ सकेंगे ।
- अवकलन की गणितीय क्रियाओं यथा सामान्य फलन स्थिरांक. गुणन क्रिया भाग, विपरीत फलन, (Inverse Function) स्थिरांक, गुणन क्रिया भाग, विपरीत फलन, अन्तर्निहित फलन (Implicit Function) व फलन का फलन नियमों का प्रयोग कर सकेंगे ।

17.1 प्रस्तावना (Introduction)

अवकलन (Differentiation) गणित की एक महत्वपूर्ण विधि है जो ज्ञान की उन सभी शाखाओं (जैसे भौतिक शास्त्र अर्थशास्त्र, इंजीनियरिंग) में प्रयुक्त होती है, जहाँ एक घर के परिवर्तन का सम्बन्ध दूसरे घर से हो । उदाहरण के लिए किसी वस्तु के उत्पादन (y) का सम्बन्ध उसके लिए प्रयुक्त श्रम (x) पर निर्भर करता है । अवकलन के द्वारा हम y तथा x के परिवर्तन के मध्य सम्बन्ध

स्थापित कर सकते हैं । यदि दो मूल्य निरन्तर बदलते हैं तो इस तरह के परिवर्तन से संबन्धित प्रश्नों का हल कलन (Calculus) द्वारा खोजा जाता है ।

दूसरे शब्दों में इस विधि के द्वारा हम y = f(x) से सम्बन्धित प्रश्नों का उत्तर दे सकेंगे । दो चरों के मध्य आपसी सम्बन्ध को हम एक रेखा (सरल या वक्र रेखा) के द्वारा भी बता सकते हैं । इस स्थिति में कई महत्वपूर्ण प्रश्न उपस्थित होंगे। जैसे x में परिवर्तन होने पर y में परिवर्तन की दर क्या होगी y तथा x के सम्बन्ध को दर्शाने वाले रेखा में उच्चतम व निम्नतम बिन्दु कौन से होंगे ।

17.2 अवकलन का अर्थ (Meaning of Differentiation)

माना कि Y (वस्तु का उत्पादन x (श्रम) के द्वारा किया जाता है, जैसे-जैसे हम x की मात्रा में वृद्धि करेंगे, Y वस्तु के उत्पादन में भी वृद्धि होगी । यहाँ Y आश्रित घर तथा X स्वतंत्र चर है । माना कि उत्पादन व श्रम निम्न प्रकार प्राविधिक सम्बन्ध है ।

$Y = 3x$

जब x में अत्यन्त वृद्धि हो, $(\Delta x \rightarrow 0)$ तक? की मात्रा में कितना परिवर्तन (Δy) होगा यह अवकलन द्वारा ज्ञात किया जाता है ।

उदाहरण $y = 3x$ फलन में परिवर्तन की दर का अनुपात ज्ञात कीजिए ।

हल - यदि x की मात्रा में सूक्ष्मत्तर परिवर्तन किया जाय में $(\Delta x \rightarrow 0)$

$y = 3x$

$y + \Delta y = 3(x+\Delta x)$

$y + \Delta y = 3x+3\Delta x$ (चूँकि y = 3x है) अत:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$$

जब $\Delta x \rightarrow 0$ तो $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ को $\frac{dy}{dx}$ लिखा जा सकता है ।

अत: श्रम की एक अल्प इकाई में परिवर्तन के परिणामस्वरूप उत्पादन Y इकाइयों की दर का अनुपात 3 होगा ।

17.3 अवकलन के प्रमुख सूत्र

अवकलन को क्रिया में हमें कुछ महत्वपूर्ण सूत्रों की सहायता लेनी होती है । इसमें घातांकों का अवकलन गुणन क्रिया भाग फलन, फलन का फलन अनिश्चित है कि सर्वप्रथम घातांक फलन के अवकलन को अच्छी तरह हल करें । इससे आगे के प्रश्न हल करना अधिक सुविधा युक्त रहेगा ।

17.3.1 घातांक फलन का अवकलन (Differentiation of a Power Function)

यदि $y= a^n$ है जहाँ व कोई स्थिरांक n घातांक है इसका फलन lim $\Delta x \rightarrow 0$ $\frac{dy}{dx} = (n)\, a^{n-1}$

उदहारण-1

(i) $y = x$

(ii) $\frac{dy}{dx} = 1x^{1-1} = 1x^{0} = 1x1 = 1$

(iii) $y = \frac{1}{x} = x^{-1} = 1x^{-1-1} = -x^{-2} \text{or - } \frac{1}{x^{2}}$

$y = \sqrt[3]{x^{2}} = x^{2/3}$

$= \frac{2}{3}\ x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(iv) $y = 4x^{3}$

$\lim \Delta\ x \to 0\ \frac{dy}{dx} = (n)\ a^{n-1}$

(v) यदि $c =$ कुल लागत फलन एवं उत्पादन की मात्रा है । लागत फलन $c = q^{3}$ है । c का अवकलन लेने

पर $\frac{dc}{dq} 3\ q^{2}$ यह लागत में परिवर्तन की दर है जो वस्तुत: सीमान्त लागत है ।

(vi) $y = \frac{3}{2}x^{-2}$

$\frac{dy}{dx} = (-2)\left(\frac{3}{2}\right)x^{2-1} = \text{or} \frac{-3}{x^{3}}$

(x^{-3} को $\frac{1}{x^{3}}$ भी लिखा जा सकता है ।)

17.3.2 स्थिरांक का अवकलन (Differentiation of Constant)

सूत्र कप में x का कोई पद नहीं तथा केवल स्थिरांक हो तो अवकलन शून्य होता है ।

$y = f(x) = c \quad \text{constant}$

यदि $y = a \quad \Delta\ x^{\lim} \to 0\ \frac{dy}{dx} = 0$

उदाहरण - एक स्थिरांक का अवकलन शून्य होता है ।

(i) $y=6\ \frac{d}{dx}(6)=0$

(ii) $y = 5\ \frac{d}{dx}(5) = 0$

17.3.3 गुणन क्रिया में अवकलन (The Derivative of a Product)

यदि y चर दो या दो से अधिक गुणनखण्डों का गुण है तो हम प्रत्येक गुणनखण्ड को u, v, w इस तरह का संक्षिप्त नाम देते हैं । इसके पश्चात् निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं ।

$y = c\, f(x)$ तो $\frac{dy}{dx} = c \frac{d}{dx} f(x)$

$y = c\, f_1(x) \quad f_2(x)$ (अर्थात् y दो फलनों का गुणनफल है ।)

इसको इस रूप में भी रखते हैं जहाँ $u = c\, f_1(x)$ एवं $v = f_2(x)$ हैं

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

अर्थात् प्रथम गुणनखण्ड को स्थिर रखकर दूसरे गुणनखण्ड के अवकलन से गुणा करेंगे तथा दूसरे गुणनखण्ड को स्थिर रखकर प्रथम गुणनखण्ड के अवकलज से गुणा करेंगे, फिर दोनों पदों का योग करेंगे ।

उदाहरण-2 $y = (3x^2 + 5x)(2x^2 + 3x)$

हल **मानाकि** $3x^2 + 5x = u \quad 2x^2 + 3x = v$ rks $\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2 + 5x) \frac{dv}{dx} (2x^2 + 3x) + (3x^2 + 3x) \frac{du}{dx} (3x^2 + 5x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (3x^2 + 5x)(4x+3) + (2x^2 + 3x)(6x+5)$$

$$= (12x^2 + 20x^2 + 9x^2 + 15x) + (12x^3 + 18x^2 10x^2 + 15x)$$

$$24x^3 + 57x^2 + 30x$$

यदि आप उपर्युक्त उदाहरण में पहले गुणनखण्डों को आपस में गुणा करें तथा फिर अवकलन करें तब भी यही परिणाम प्राप्त होंगे ।

$y = 6x^4 + 19x^3 + 5x^2$ (गुणा करने पर on multiplication)

$$\frac{dy}{dx} = 24x^3 + 57x^2 + 30x$$

उदाहरण-3 $y = (3 + \sqrt{x})(2x^2 = -9x + 5)$

हल **मानाकि** $u = (3 + \sqrt{x})$ एवं $v = (2x^2 = -9x + 5)$

$$\frac{dy}{dx} = (3 + x^{1/2})\ (4\,x\ \text{-}9) + (2x^2 \text{-}9x + 5)\left(\frac{1}{2} x^{-1/2}\right)$$

$$\text{or} = (12x+4x^{3/2} - 9x^{1/2} - 27) + \left(\frac{1}{2}2x^{3/2} - \frac{9}{2}x^{1/2} + \frac{5}{2}x^{-1/2}\right)$$

$$\text{or} = (12x+4x^{1/2} - 9x^{1/2} - \frac{9}{2}x^{1/2} + x^{3/2} + \frac{5}{2}x^{-1/2} - 27)$$

$$\text{or } (12x+5x^{3/2} - \frac{27}{2}\sqrt{x} + \frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \text{-}27)$$

$$\text{or} = (12x+5x^{3/2} - \frac{27}{2}\sqrt{x} + \frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \text{-}27)$$

यदि दो गुणनखण्डों के स्थान पर दो से अधिक पद हों तो निम्नलिखित क्रिया दोहराई जायेगी।

$$y = f(u,v,w)$$

$$\frac{dy}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$

$$y = (2x+5)(3x^2-6)(x+2)$$

माना कि $\frac{dy}{dx} = (2x+5)\ (3x^2\text{-}6)\frac{d}{dx}(x+2) + (2x+5)(x+2)\frac{d}{dx}(3x^2-6)$

$$+(3x^2-6)(x+2)\frac{d}{dx}(2x+5)$$

$$\frac{d}{dx} = (2x+5)\ (3x^2-6)(1) + (2x+5)\ (x+2)(6x) + (3x^2-6)(x+2)(2)$$

$$= (6x^3 + 15x2 - 30 - 12x) + (12x^2 + 30x^2 + 24x^2 + 60x) + (6x^3 + 12x^2 - 12 - 24)$$

$$= (6x^3 + 15x^2 - 12x - 30 + 12x^3 + 54x^2 + x + 6x^3 + 12x^2 - 12 - 24)$$

$$= 24x^3 + 81x^2 - 36x - 54$$

17.3.4 भागफल का अवकलन (The derivative of a quatient)

यदि y फलन किसी भाग के रूप में हो तब भी उसका अवकलज किया जा सकता है । इसमें अंश को u तथा हर को v के रूप में प्रकट किया जाता है । सूत्र रूप में-

$y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ अर्थात् $y = \frac{u}{v}$ का रूप हो तो-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} \text{-} u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

अर्थात् हर (v) को अंश के अवकलन से गुणा किया जाता है, अंश को हर के अवकलन से गुणा किया जाता है तथा प्रथम में से द्वितीय को घटाया जाता है फिर v^2 का भाग दिया जाता है।

उदाहरण-4

(i) $y = \frac{5x}{5x+2}$

$$\frac{\frac{dy}{dx} = (5x+2)\frac{d}{dx}(5x) - 5x\frac{d}{dx}(5x+2)}{(5x+2)^2}$$

$$= \frac{(5x+2)(5) - 5x(5)}{(5x+2)^2}$$

$$= \frac{25x + 10 - 25x}{(5x+2)^2} = \frac{10}{(5x+2)^2}$$

(ii) $y = \dfrac{3x^2 - 5x}{6x^3 + 7x^2 - 10}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(6x^2 + 7x^2 - 10\frac{d}{dx}(3x^2 - 5x) - (3x^2 - 5x)\frac{d}{dx}(6x^3 + 7 - 10)}{(6x^3 + 7x^2 - 10)^2}$$

$$\frac{(6x^3 + 7x^2 - 10)(6x - 5) - (3x^2 - 5)(18x^3 + 14x)}{(6x^3 + 7x^2 - 10)^2}$$

$$= \frac{18x^4 + 60x^2 + 35x^2 - 60 + 50}{(6x^3 + 7x^2 - 10)^2}$$

(iii) $y = \dfrac{t^2 - 5\sqrt{t}}{2t - 5}$ y =f(t)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2t-5)\frac{d}{dt}(t^2 - 5\sqrt{t}) - (t^2 - 5\sqrt{t})\frac{d}{dt}(2-5)}{(2t-5)^2}$$

$$= \frac{(2t-5)(2t - \frac{5}{2}t^{-\frac{1}{2}}) - (t^2 - 5\sqrt{t})(2)}{(2t-5)^2}$$

$$= \frac{(4t^2 - 10t - 5\sqrt{t} + \frac{25}{2\sqrt{t}} \text{-} (2t^2 - 10\sqrt{t})}{(2t-5)^2}$$

$$= \frac{(2t^2 - 10t - 5\sqrt{t} + \frac{25}{2\sqrt{t}})}{(2t-5)^2}$$

17.3.5 फलन का फलन- श्रृंखला नियम (Function of a Function-Chain Rule)

अब तक की अवकलन क्रियाओं में दो घरों के मध्य सम्बन्ध का ही निर्धारण हुआ है पर व्यवहारिक जीवन में तीन चरों के मध्य आपसी सम्बन्ध भी हो सकता है । जिसमें प्रथम चर दूसरे से व दूसरा घर तीसरे से सम्बन्धित हो । उदाहरण के लिए सीमेंट का उत्पादन पत्थर पर निर्भर है तथा पत्थर का उत्पादन श्रम पर निर्भर है । हम यदि सीमेंट को Z, पत्थर Y तथा श्रम को X माने तो यह कहा जा सकता है

$$Y = f(x)$$
$$Z = f(y)$$

हमारा उद्देश्य Z व X के मध्य सम्बन्ध स्थापित करना है जिसके लिए सूत्र है-

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

उदाहरण-5 $y = 3x^2, z = -2y^2$

हल $\frac{dz}{dy} = -6y^2, \frac{dy}{dx = 6x}$ सूत्र $\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} \quad = -6(y)^2.6x$

y का मूल्य प्रतिस्थापित करने पर-

$$\frac{dz}{dy} = -6(y^2)^2.6x \qquad = -6(y)^2.6x = or\,\frac{dz}{dy} = -324x^5$$

इसकी सत्यता प्रमाणित करने के लिए हम मूल प्रश्न y के मान में x का मान प्रतिस्थापित करें व फिर अवकलन करें तो भी यही उत्तर प्राप्त होगा ।

$$z = 2y^3 = -2(3x^2)^3 = \text{-}(27\text{x}^6)\text{=}54\text{x}^2 \qquad \therefore \frac{dz}{dx} = 324x^5$$

उदाहरण -6 $u = (3x^2 - 6x + 9)^4$

हल इस उदाहरण में यद्‌यपि u को x के रूप में प्रत्यक्षत: प्रकट किया गया है पर हल को अधिक सुविधाजनक करने के लिए हम $3x^2 - 6x + 9$ को Y मानते हैं तब उपर्युक्त समीकरण इस प्रकार लिखा जा सकता है ।

$$u = (y)^4$$
$$\frac{du}{dx} = 4y^3$$
$$\frac{dy}{dx} = 6x - 6$$

$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 4(y)^3.(6x - 6)$ y का मूल रखने पर

$$= 4(3x^2 - 6x + 9)^3(6x - 6)$$

व्यवहार में इस प्रकार के प्रश्नों को हल करने के लिए- $\frac{du}{dx}$ **(कोष्ठक की संख्या को स्थिर मानकर अवकलज लिखते हैं ।**

उदाहरण- 7 (i) $z = (2x + 5)^3$

$$\frac{dz}{dx} = 3(2x + 5)^2(2) = 6(4x^2 + 20x + 25) = 24x^2 + 120 + 150$$

(ii) $y = \sqrt{2x^2 - 3}$

अथवा $(2x^2 - 3)^{\frac{1}{2}}$ **मानाकि** $(2x^2 - 3) = t$ **अत:**

$$y=t^{\frac{1}{2}} or \frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}$$ एवं कोष्ठक का अवकलन

$$\frac{dt}{dx}4x$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{dz}{dy}.\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}.4 \; or \frac{2x}{\sqrt{2x^2-3}}$$ (t का मूल्य रखने पर)

17.3.6 विलोम फलन (Inverse Function)

दो चर राशियों x व y में यदि y = f (x) है तथा जिसे x के लिए हल किया जा सकता है तथा x = g(y) है तथा जिसे y के लिए हल किया जा सकता है तो $\frac{dx}{dy}$ व $\frac{dy}{dx}$ में विलोम सम्बन्ध होगा । विलोम फलन का नियम तभी लागू होता है जब दोनों फलन एक मूल्य बाले हों । उपर्युक्त तथ्यों को निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है ।

उदाहरण- X = Y -3

इस फलन की विशेषता है कि x के प्रत्येक मूल के साथ y का कोई मूल्य होगा ।

उदाहरण- $y = x^2$

इसमें $x=\sqrt{y}$ है पर y का मूल धनात्मक भी हो सकता है तथा ऋणात्मक भी अत: x व y के आपसी सन्दर्भ मूल समान नहीं होगा । विलोम फलन तभी ज्ञात किया जा सकता है तब एकीय रेखांकन (One to One Mapping) हो । इस उदाहरण में ।

$$\frac{dy}{dx}=2x \quad \text{x}=\sqrt{y} \; \frac{dx}{dy}=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}(Y)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dx}{dx}\frac{dx}{dy}=(2x)\left(\frac{1}{2}\right)(\text{x}^2)^{-\frac{1}{2}}=(\text{x}^2)^{-\frac{1}{2}}=(\text{x})(\text{x}^{-1})=\text{x}^0=1$$

अत: दो विलोम अवकलनों का गुणा 1 होता है ।

या $=\frac{dx}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\frac{dx}{dy}$ या $=\frac{dx}{dY}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

इस विधि से हम कठिन अवकलनों को भी ज्ञात कर सकते हैं

उदाहरण- 8 (i) $X=y+8-Y^2$ $\frac{dx}{dy}=3Y^2-2Y$

(ii) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3Y^3-2Y}$

17.3.7 लघुगणकीय और चर घातांकी फलनों का अवकलज

(Derivatives of Logarithmic and exponential Functions)

नीचे कुछ Standard अवकलज दिए गए हैं ।

(i) $y = Log_e x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

(ii) $y = \mathrm{Log_a} x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} Log_a e$

(iii) $y = e^{\times}$

$\frac{dy}{dx} e^{x}$

(iv) $y = a^{\times}$

$\frac{dy}{dx} = a^{\times} Log_e a$

(v) $\frac{dy}{dx} = e^{2\times} = e^{2\times}\frac{dy}{dx} 2x = 2e^{2\times}$

(vi) $\frac{dy}{dx} = e^{x+1} = e^{x+1} = e^{x+1}\frac{d}{dx}(x+1) = e^{x+1}$

(vii) $\frac{dy}{dx} = e^{ax^3+bx+c} = (2ax+b)e^{ax^3+bx+c}$

17.3.7 अस्पष्ट (अनिश्चित) फलन का अवकलन (Differentiation of Implicit Function)

कुछ पद मूल्य संयुक्त होते हैं अर्थात् उनमें x व y दोनों के ही पद होते हैं इन्हें अस्पष्ट या अनिश्चित फलन कहा जाता है । जैसे $x = 3x^2 + 2xy - 6x$

उक्त फलन में x व y दोनों ही पद एक साथ है । इनका अवकलन करते समय x व y का फलन मानकर प्रत्येक पद का अवकलन करते हैं तथा संयुक्त पदों में जहाँ x व y दोनों ही वहाँ Product Rule का प्रयोग करते हैं । जहाँ केवल y के पद हैं उनका y के सन्दर्भ में अवकलन कर आगे $\frac{dy}{dx}$ लिखते हैं ।

उदाहरण-9 $x^3 = y^3 + 3axy = 0 +$

हल

$$x^3 = y^3 + 3axy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 = y\frac{dy}{dx} + 3a\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) = 0$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 3ax\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3ay$$

(अर्थात् के पदों का अवकलन y के सन्दर्भ में कर उनके आगे $\frac{dy}{dx}$ लिखा है । अंतिम पद में हमने 3a को समान मूल्य (Common) मानकर बाहर लिखा है, तथा शेष xy का गुणनफल में अवकलन किया है ।

$$3(y^2 + ax)\frac{dy}{dx} = -3(x^2 + 3ay)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(x^2+3ay)}{3(y^2+ax)} = \frac{dy}{dx} = \frac{-(x^2+ay)}{(y^2+ax)}$$

उदाहरण- 10 $x^2+2xy+y^3-xy^2=0$

हल x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2x+2\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)+3y^{3.}\frac{dy}{dx}-2xy\frac{dy}{dx}-y^2=0$$

$$=2x\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}-2x\frac{dy}{dx}-2x-2y+y^2$$

$$=(2x+3y^3-2xy)\frac{dy}{dx}-2x-2y+y^2$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{-2x-2y+y^2}{(2x+3y^2-2xy)}$$

उदाहरण- 11 $6x^3=y^3$ = $6x^3-y^3=0$

हल x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$18x^2-3y^2\frac{dy}{dx}=0 \quad =-3y^2\frac{dy}{dx}=-18\times 2$$

$$=\frac{dy}{dx}=\frac{-18\times 2}{-3y^2}=\frac{6\times 2}{y^2}$$

उदाहरण -12 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{a}$

हल $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}=0$ (जहां a स्थिरांक (constant) है)

X का सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}=0 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

17.4 सारांश (Summary)

अवकलन विधि ज्ञान की उन सभी शाखाओं में प्रयुक्त होती है जहाँ एक चर के परिवर्तन का सम्बन्ध अन्य चर से हो। अवकलन का अर्थ स्वतंत्र चर में सूक्ष्मतर परिवर्तन ($\Delta x \to 0$) करने पर निर्भर चर में होने वाले परिवर्तनों का अनुपात है ।

$$Y=f(x); \frac{dy}{dx}=f'(x)$$

किन्हीं दो चरों के मध्य अवकलन के लिए निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग किया जाता है ।

(a) $y=x^n$ $f'(x)=nx^{n-1}$

(b) $y=c$ $f'(x)=0$

(c) $y=uv$ $f'(x)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

(d) y=$\frac{u}{x}$ f' (x) $=\frac{u\frac{dv}{dx}-v\frac{du}{dx}}{v^2}$

(e) y=f(x), z=f(y) **(श्रृंखला)**

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy},\frac{dy}{dx}$$

(f) $\frac{dy}{dx},\frac{dx}{dy}$=1 **(विलोम फलन)**

यदि दो चर x व y एक ही फलन में युक्त है तो गुणा का नियम प्रयोग कर दोनों चरों का अलग-अलग फलन करेंगे।

17.5 शब्दावली (Glossary)

अवकलन	Differentiation
अवकलज	Derivative
अनिश्चित या अन्तर्निहित फलन	Implicit Function
आश्रित चर	Dependent Variable
उच्चत्तर अवकलन	Successive Differentiation
गुणनखण्ड	factors
घातांक	Power
चार	Variable
फलन का फलन	Function of a Function
वक्र रेखा	Curve
विलोम या विपरीत फलन	Inverse Function
श्रृंखला नियम	Chain Rule
सरल रेखा	Straight Line
स्थिरांक / अचर	Constant
स्वतंत्र घर	Independent Variable
कलन	Calculus
संयुक्त फलन	Composite Function
सीमान्त	Marginal
के सापेक्ष	With Respect to
प्रवणता / ढलान	Slope

17.6 सन्दर्भ ग्रन्थ (Reference)

L.W.T Stafford “Mathematics for Economists”,ELBS Edition 1974.

J.Parry Lewis " An Introduction to Mathematics for student of economic " 3rd ed 1969

Taro Yamane "Mathematics for Economic " Prentice Hall of India .

Mehta & Madhanani " Mathematics for Economic" Sultan Chand & sons .

Granvllle Smith Longley "Elements of the Differential and Integral Calculus" Oxford & IBH, Publishing co.

लक्ष्मीनारायण नाथूरामका, "अर्थशास्त्र में गणित के प्रयोग', कॉलेज बुक हाउस, जयपुर ।

सुदामासिंह एवं अन्य "अर्थशास्त्रीय गणित एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी', राधा पब्लिकेशन्स, दरियागंज, नई दिल्ली ।

17.7 अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Question)

1. निम्नलिखित मूल्यों का $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए (Differentiation the following Functions)

   (i) $y=2x^3$ (ii) $y=-2x^4$ (iii) y=2 x $\frac{3}{2}$

2. E.2. निम्नलिखित पदों का अवकलन कीजिए । (Differentiation the following functions)

   (i) $y=3x^2-6x+7$ (ii) $y=\frac{2}{3}x^4-\frac{1}{7}x^3+\frac{7}{12}x^2-\frac{6x}{15}+\frac{7}{3}$

3. निम्नलिखित अवकलन कीजिए ।

   (i) $y=(3x+4)(2x-5)$ (ii) $y=(x^5+x^2)\ (x^3+x)$

   (iii) $y=(3x^5+6x^2)\ (4x^2-6x)$ (iv) $y=(4x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}})(2x^3-5x^{\frac{1}{2}})$

4. निम्नलिखित का अवकलन कीजिए । (Differentiation the followings)

   (i) $Y=(2X+-3)(5X+2)(3X-4)$ (ii) $(2X^2-6x)(2X+1)(X-7)$

5. अवकलन ज्ञात कीजिए (Differentiate the following)

   (i) $Y=\frac{3x^3+5x}{4x^2-6x}$ (ii) $y=\frac{12x^2+6x-7}{3x+5}$

6. अवकलन कीजिए । (Differentiate the followings)

   (i) $Z=3Y^2;Y=(2x5)$ (ii) $Z=\ 7Y^3;Y=(3x2)$

   (iii) $Y=(2X^2 5x+7)$ (iv)$Y=(3X^3+6x^2 8x+3)^3$

7. निम्नलिखित प्रश्नों का x के सन्दर्भ में अवकलन ज्ञात कीजिए ।

   (i) $x^2y\ xy^2+x^3+y^2=0$ (ii) $x^2y\ x+y=0$

17.8 अभ्यासार्थ प्रश्नों के उत्तर (Answer to SAQs)

प्रश्न संख्या 1.
(i) $6x^2$
(ii) $-8x^3$
(iii) $3x^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x}$

प्रश्न संख्या 2.
(i) $6x-6$
(ii) $\frac{8}{3}x^3-\frac{3}{7}x^2+\frac{7x}{6}-\frac{6}{15}$

प्रश्न संख्या 3.
(i) $12x-7$
(ii) $8x^7+6x^5+5x^4+3x^2$
(iii) $84x^6-108x^5+96x^3-108x^2$
(iv) $36x^{\frac{7}{2}}+21x^{\frac{5}{2}}-45x^{\frac{5}{4}}-\frac{75}{7}x^{\frac{1}{4}}$

प्रश्न संख्या 4
(i) $90x^2-146x+26$
(ii) $16x^3-114x^2+128x+42$

प्रश्न संख्या 5
(i) $\frac{(4x^2-6x)(9x^2+5)-(3x^3+5x)(8x-6)}{(4x^2-6x)^2}$
(ii) $\frac{(3x-5)(24x+6)-(12x^2+6x-7)^3}{(3x+5)^2}$

प्रश्न संख्या 6.
(i) $24x-60$
(ii) $-567x^2+756x-252$
(iii) $16x^3-60x^2+106x-70$
(iv) $3(-3x^2+6x^2-8x+3)^2(-9x^2+12x-8)$

प्रश्न संख्या 7
(i) $\frac{y^2-3x^2-2xy}{x^2+2y-2xy}$
(ii) $\frac{1-2xy}{x^2+1}$

.

ISBN - 13/978-81-8496-124-9