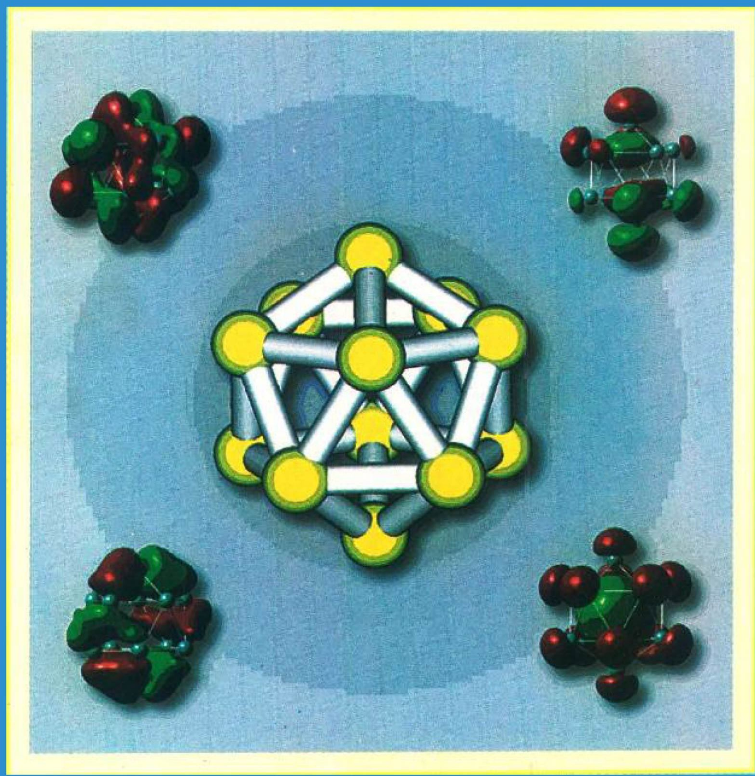
CH - 03

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा



भौतिक रसायन

1

CH-03

रसायन विज्ञान

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

भौतिक रसायन 1

उत्पादन दिसम्बर 2007

व.म.खु.वि. कोटा के लिये कुलसचिव व.म.खु.वि. कोटा (राज.) द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित

प्रस्तावना

यह पुस्तक वर्धमान खुला विश्वविद्यालय कोटा द्वारा निर्धारित पाठ्यक्रमानुसार स्नातक स्तर प्रथम वर्ष के विद्यार्थियों के उपयोग हेतु प्रस्तुत है।

इस पुस्तक में भौतिक रसायन के मूलभूत सिद्धांतों को सुग्राह्य रूप में तथा उदाहरणों द्वारा समझाने का प्रयास किया गया है ताकि विषयवस्तु को सरलता से समझ कर ज्ञानार्जन किया जा सके। विभिन्न इकाइयों में यथा संभव समुचित चित्रों एवं सरणियों का समावेश किया गया है जिससे विषय की रोचकता बनी रहे। महत्वपूर्ण शीर्षक एवं पदों के अंग्रेजी समानान्तर शब्दों को उपयुक्त स्थान पर कोष्ठक व शब्दावली में प्रदर्शित किया गया है ताकि संदर्भ ग्रन्थों से सहायता लेने में सुविधा रहे।

गणितीय व्युत्पन्न एवं संख्यात्मक प्रश्नों का समुचित हल सरलतापूर्वक समावेशित किया है जिससे विषय की उचित व्याख्या की जा सके ।

प्रत्येक इकाई में बोध प्रश्न, अभ्यासार्थ प्रश्न तथा इनके हल संकेत और भी दिये गए हैं।

संख्यात्मक मानो तथा लघुगुणक सारिणी की उपयोगिता के महत्व को ध्यान में रखते हुए पुस्तक के अंत में इनका समावेश किया गया है।

पुस्तक के परिवर्धन के लिए शिक्षकों व विद्यार्थियों के सुझाव आमंत्रित है।

इकाई - 1

गणितीय संकल्पनाएँ (अ)

Mathematical concepts (a)

इकाई संरचना

1.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई का उद्देश्य

- भौतिकी रसायन में प्रयुक्त गणितीय संकल्पनाओं को परिभाषित करना है ।
- भौतिकी रसायन में प्रयुक्त गणित के अनुप्रयोगों के बारे में विस्तार से चर्चा करना ।

1.1 प्रस्तावना (Introduction)

विज्ञान की भिन्न-भिन्न शुद्ध एवं अनुप्रयुक्त शाखाएं जिन में गणित भी सम्मिलित है काफी तेजी से विकसित हो रही है । सफलता का मूल मंत्र गणित में छुपा हुआ है । गणित के समंग दिमागी कम्प्युटर में गजब का स्थान रखते हैं । ज्ञानार्जन का उद्भाव भी तो यहीं से है । कुछ व्यक्ति तो इस विचारधारा के है कि यदि कोई ज्ञान गणित अथवा अंको पर आधारित नहीं है तो वह ज्ञान ही नहीं कहा जा सकता । इस विचारधारा की पुष्टि लॉर्ड केल्विन के इस कथन से होती है "आप जिस विषय की बात कर रहे है यदि आप उसको माप सकते है तथा उसे अंको के रूप में व्यक्त कर सकते है तो आप उसके बारे में कुछ जानते है, किंतु जब आप उस विषय का माप नहीं कर सकते, उसे संख्याओं में व्यक्त नहीं कर सकते, तो आपका ज्ञान अल्प तथा असन्तोषजनक प्रकार का है । यह ज्ञान का प्रारम्भ हो सकता है, परन्तु आप अपनी विचारधारा में एक विज्ञान के स्तर तक प्रगति नहीं कर पायें है ।"

1.2 लघुगणक (Logarithms)

परिमेय संख्या की घातों और उनके घातांक नियमों से तो आप भली भांति परिचित है । कई बार हमें वृहत संख्याओं का अध्ययन करना होता है | एक संख्यात्मक व्यंजक में वृहत संख्याओं के गुणन, भाजन या परिमेय घातों का परिकलन करना पड़ सकता है | ऐसे परिकलनों के लिए लघुगणक बहुत ही लाभदायक सिद्ध होते है । वे कठिन परिकलन को सरल बनाने में हमारे सहायक होते है । लघुगणक की दो प्रणालियाँ प्रयोग में ली जाती है । पहली नेपिरियन प्रणाली है । (लघुगणक के अविष्कार जॉन नेपिरियन (1614 A.D.) थे तथा उन्हीं के नाम से यह प्रणाली प्रचलित है ।) । दूसरी प्रणाली 10 के आधार पर विकसित हुई (इसका विकास हेनरी ब्रिकश (1615 A.D.) ने किया) इसे साधारण लघुगणक कहते हैं ।

हम पहले इस नई संकल्पना को प्रस्तुत करेंगे । फिर उन नियमों पर विचार करेंगे जिनको लघुगणकों द्वारा परिकलन करते समय ध्यान में रखना होगा । फिर हम लघुगणक विधि

के प्रयोग के कुछ उदाहरण देगें जिससे यह स्पष्ट होगा कि इस विधि से कठिन परिकलन सरल हो जाते है ।

12.1 परिभाषा (Definition)

यदि एक धनात्मक वास्तविक संख्या a, $a \neq 1$ के लिए $a^x=b$ हो, तो b का लघुगणक a के आधार पर x होगा जिसे निम्नप्रकार लिखा जायेगा

Loga b=x

जहाँ चिन्ह 'log' (लॉग) लघुगणक के अंग्रेजी पर्याय 'logarithm' का संक्षेप है ।

इस प्रकार a, x तथा b में घातांकीय रूप (Exponential Form) $a^x=b$ को लघुगणकीय रूप (logarithmic Form) में $\log_a b=x$ लिखा जाता है ।

उदाहरण 1. 1

(i) $2^5=32$ का लघुगणकीय रूप - $\log_2 32 = 5$

(ii) $5^3=125$ का लघुगणकीय रूप - $\log_5 125=3$

(iii) $(81)^{1/4}=3$ का लघुगणकीय रूप - $\log_{81} 3=\frac{1}{4}$

(iv) $9^0=1$ का लघुगणकीय रूप - $\log^9 1=0$

इसी प्रकार

(i) Log_9 का घातांकीय रूप-$9^{1/2}=3$

(ii) $\text{Log}_2 64=6$ का घातांकीय रूप - $2^6=64$

(iii) $\text{Log}^{10} 0.01=-2$ का घातांकीय रूप -$10^{-2}=0.01$ इत्यादि ।

बोध प्रश्न 1.2 (अ)

1. निम्न लिखित को लघुगणक के रूप में लिखिये:

(i) 34=81 (ii) 103=1000

(iii) 1281/7=2 (iv) 161/4=2

(v) 10-1=0.1 (vi) 10-5=0.00001

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक को घातांकीय रूप में लिखिए:

(i) log5625=4 (ii) log3243=5

(ii)log4 1=0 (iv) log10(0.001)=-3

नोट :- कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर, अन्त में दिये गये उत्तरों से मिलान कर लेगें

1.2.2 लघुगणकों के नियम (Lows of Logarithms)

(1) **प्रथम नियम: गुणन सूत्र (Product Formula):** यदि m तथा n धनात्मक परिमेय संख्याएँ हो तो $\log_a(mm)=\log_a m+\log_a n$ अर्थात् दो संख्याओं का गुणाओं का log, उन दोनों संख्याओं के अलग-अलग log के योग के बराबर होता है ।

(2) **दूसरा नियम: भाग सूत्र (Quotiet Formula):** यदि m तथा n धनात्मक परिमेय संख्याएँ है तो

$$\log_a\left(\frac{m}{n}\right)=\log_a m-\log_a n$$

अर्थात् दो संख्याओं के अनुपात का लघुगणक उनके लघुगणकों के अन्तर के बराबर होता है ।

(3) **तीसरा नियम : घात सूत्र (Power Formula):** यदि m तथा n धनात्मक परिमेय संख्याएँ है तो

$$\mathrm{Log}_a\,(m^n)\ =n\log_a m$$

अर्थात् किसी संख्या जो घात के रूप में है का लघुगणक उस संख्या के घात तथा उस संख्या के लघुगणक के गुणनफल के बराबर होता है ।

(4) **चतुर्थ नियम: इकाई का लघुगणक (Logarithm of unity)** वास्तविक धनात्मक संख्या a के लिए

$$\log_a 1=0$$

अर्थात् इकाई का लघुगणक (किसी भी आधार के लिए) शून्य होता है ।

(5) **पाँचवा नियम: समान आधार का लघुगणक (Logarithm of same base)** वास्तविक धनात्मक संख्या a के लिए

$$\mathrm{Log}_a a=1$$

अर्थात् किसी धनात्मक संख्या का लघुगणक उसी संख्या के आधार पर इकाई के बराबर होता है ।

(6) **छठा नियम: आधार परिवर्तन सूत्र (Base Change formula)** यदि m धनात्मक परिमेय संख्या है तथा a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ इस प्रकार है कि

$a\neq1$, $b\neq1$, तब $\log_a$ अथवा $\log_b m=\log_a m \times \log_b a$ अर्थात् किसी धनात्मक परिमेय संख्या का, किसी आधार पर लघुगणक का मान, उस संख्या के किसी अन्य धनात्मक संख्या के आधार पर लघुगणक तथा द्वितीय संख्या का, प्रथम संख्या के आधार पर लघुगणक के गुणनफल के बराबर होता है ।

उक्त नियमों को निम्न उदाहरणों द्वारा आप भली भांति समझ सकेंगे ।

उदाहरण 1.2 निम्न का मान ज्ञात कीजिये ।

(i) $\log_9 729$	(ii) $\log_{27}243$	(iii) $\log_{10}(0.0001)$

हल: (i) मान लीजिए

$\log_9 729=x$

तब $9x=729$ (लघुगणक से घातांकी में बदलने पर)

या $9^x=9^3$

या $x=3$ (घातांकों के नियम से)

अत: $\log_9 729=3$

(ii) मान लीजिए

$\log_{27}243=x$

तब $27x=243$

या $27x=3^5$

या $(3^3) = 3^5$ (एक ही आधार में बदलने पर)

या $3^{3x} = 3^5$

या $3_x=5$

या $x=\left[\left(\frac{5}{3}\right)\right]$

अत: $\log_{27} 243 = \frac{5}{3}$

(iii) मान लीजिए

$\log_{100}(0.0001) = x$

तब $10^x = 0.0001 = \frac{1}{10000}$

या $10^x=\frac{1}{10^{-4}}$ (घातांकों के नियम से)

या $x=-4$

अर्थात् $\log_{10}(0.0001)= -4$

उदाहरण 1.3: सिद्ध कीजिए $\log 72=3 \log2+2\log3$

हल : दक्षिण पक्ष $=3\log2+2\log3$

$=\log2^3+\log3^2$

$=\log(2^3x3^2)$

$=\log(8x9)$

$=\log 72$

= वाम पक्ष

उदाहरण 1.4 : सिद्ध कीजिए

$7\log\frac{16}{15}+5\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2$

हल: वामपक्ष $=\log\frac{16}{15}+5\log\frac{16}{15}+3\log\frac{81}{80}$

$=\log\left(\frac{16}{15}\right)^7+\log\left(\frac{25}{24}\right)^5+\log\left(\frac{81}{80}\right)^3$

$=\log\left[\left(\frac{16}{15}\right)^7 X \left(\frac{25}{24}\right)^5 X \left(\frac{81}{80}\right)^3\right]$

$=\log2$

= दक्षिण पक्ष

उदाहरण 1.5 : सिद्ध कीजिए $\log_e(1+2+3)=\log_e1+\log_e2+\log_e3$

हल : दक्षिण पक्ष $=\log_e1+\log_e2+\log_e3$

$=\log_e$ (1X2X3)

$=\log_e 6$

=loge(1+2+3) { $\because$6=1+2+3}

= वाम पक्ष

उदाहरण 1.6 : सिद्ध कीजिए $\log\frac{12}{7}+\log\frac{9}{4}-\log\frac{27}{7}=0$

हल: वाम पक्ष = $\log\frac{12}{7}+\log\frac{9}{4}-\log\frac{27}{7}$

$$=\log\left(\frac{12}{7}X\frac{9}{4}\right)-\log\frac{27}{7}$$

$$=\log\left[\frac{\frac{12}{7}X\frac{9}{4}}{\frac{27}{7}}\right]$$

$$=\log\left[\frac{12}{7}X\frac{9}{4}X\frac{7}{27}\right]$$

=log1

=0= दक्षिण पक्ष

उदाहरण 1.7. सिद्ध कीजिए $\log_b a X \log_c b X \log_a c=1$

हल : सभी लघुगणकों को आधार e में बदलने पर

$$\because \log_b a=\frac{\log_e a}{\log_e b}, \log_c b=\frac{\log_e b}{\log_e c}, \log_a c=\frac{\log_e c}{\log_e a}$$

अत: वाम पक्ष = $\log_b a X \log_c b X \log_a c$

$$=\frac{\log_e a}{\log_e b}X\frac{\log_e b}{\log_e c}X\frac{\log_e c}{\log_e a}$$

=1= दक्षिण पक्ष

बोध प्रश्न : 1.2 (ब)

1.निम्न लिखित का मान ज्ञात कीजिए

(i)$\log_3 9$ (ii)$\log_2 256$ (iii)$\log_{25} 3125$

(iv)$\log_{10}$ (10000) (v)$\log_{10}(0.0000001)$

2.दिखाइए कि:

(i) log(360) =3log2+2log3+log5

(ii)5log3-log9=log27

(iii) $4\log\frac{24}{725}-16\log\frac{9}{10}+7\log\frac{81}{82}=\log 5$

नोट :-कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर, अन्त मे दिये गये उत्तरों से मिलानकर लेवे|

1.2.3 लघुगणक पद्धति (System of Logarithms):

अभी तक हमने यह पढ़ा है कि लघुगणक का आधार कोई भी राशि अथवा संख्या हो सकती है । परन्तु व्यावहारिक रूप में दो विशिष्ट पद्धतियाँ काम में ली जाती है ।

(i) **प्राकृत अथवा नेपिरियन लघुगणक (natural or naperian logarithms) :** आधार e पर संख्याओं के लघुगणक को प्राकृत अथवा नेपिरियन (इस पद्धति के जन्मदाता जॉन नेपियर के नाम पर) लघुगणक कहलाते है जहाँ e, एक अनन्त श्रेणी का योग

$$e = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \ldots\ldots$$

= 2. 7182818...... (अनन्त श्रेणी का योग लगभग)

उच्चगणितीय अध्ययन तथा सैद्धान्तिक प्रश्नों में अधिकतर लघुगणकों का आधार ' e ' लिया जाता है किन्तु यह पद्धति प्रायोगिक परीक्षणों तथा आंकिक परिकलनों में उपयुक्त नही रहती है क्योकि e का मान एक निश्चित राशि न होकर एक अपरिमेय राशि है।

(ii) साधारण लघुगणक (common logarithms) :

आधार 10 पर संख्याओं के. लघुगणक को साधारण लघुगणक कहते हैं । व्यावहारिक आंकिक परिकलनों में आधार 10 उपयुक्त होता है ।

टिप्पणी: आंकिक परिकलनों में जब लघुगणक का कोई आधार व्यक्त नहीं किया गया हो तो इसे साधारण लघुगणक (अर्थात आधार 1० पर लघुगणक) ही मानना चाहिये ।

साधारणतया प्रश्नों को हल करते समय जटिल गुणा, भाग, घात अथवा मूल आ जाते है जिन्हें सरल करने में काफी समय, परिश्रम तथा कठिनाई होती है एवं साथ ही निश्चित रूप से यह नहीं कहा जा सकता कि परिणाम अथवा हल पूर्ण रूप से शुद्ध है । अत: गणितीय आंकिक क्रिया को सरल व शुद्ध बनाने एवं समय व श्रम की बचत करने हेतु लघुगणकों का प्रयोग किया जाता है।

प्राय: संख्या 10 को आधार मानकर संख्याएँ लिखी जाती है: इसलिए आधार 10 पर लघुगणकों का प्रयोग करना अधिक सुविधाजनक होता है । किसी भी दी हुई संख्या का लघुगणक 10 की वह घात है जिससे कि 10 उस प्रस्तुत संख्या के समकक्ष हो जाते ।

उदाहरणार्थ-

Log10 = 1	क्यों कि	$10^1=10$
Log100=2	क्यों कि	$10^2=100$
Log100000=5	क्यों कि	$10^5=100000$
Log1=0	क्यों कि	$10^0=1$
Log 0.1= 1	क्यों कि	$10\text{-}^1=0.1$
Log 0.001= 3	क्यों कि	$10\text{-}^3=0.001$

जो संख्या 10 के विभिन्न घातों के रूप में होती है उनके लघुगणक सरलता से ज्ञात किये जाते है परन्तु अन्य संख्याओं जैसे 39,513,2593 आदि के लघुगणक ज्ञात करने के लिए लघुगणक सरणियों की सहायता ली जाती है । प्रत्येक भिन्न संख्या के लघुगणक के दो भाग होते है । प्रथम लघुगणक का वह भाग जो दशमलव बिन्दु के पूर्व होता है, जिसे पूर्णाश

(characterstic) कहते है तथा द्वितीय, लघुगणक का वह भाग जो दशमलव बिन्दु के बाद होता है, जिसे अपूर्णाश (mantissa) कहते है । पूर्णाश सदैव एक पूर्ण संख्या (integer) (घन, ऋण व शून्य) होती है और अपूर्णाश कभी-भी ऋणात्मक नहीं होता और सदैव संख्या 1 से कम होता है । यदि हमें किसी संख्या n, का लघुगणक, log n के पूर्णाश और अपूर्णाश ज्ञात हो जाये तो log n प्राप्त करने के लिए हमें उन्हें केवल जोड़ना होता है ।

1.2.4 पूर्णाश (characteristic) ज्ञात करना-

पूर्णाश ज्ञात करने हेतु दो सूत्र प्रयुक्त किये जाते है । प्रथम सूत्र का प्रयोग ऐसी संख्याओं के लघुगणक का पूर्णाश ज्ञात करने हेतु किया जाता है जो इकाई (एक) या इकाई से अधिक होती है तथा द्वितीय सूत्र का प्रयोग ऐसी संख्याओं के लघुगणक का पूर्णाश ज्ञात करने हेतु किया जाता है जो इकाई से कम होती है, जैसे 0.5, 0.003578, 0.9985 आदि |

प्रथम सूत्र : इकाई या इकाई से अधिक संख्याओं का पूर्णाश :

जो संख्यायें एक या एक से अधिक होती है उनके लघुगणक का पूर्णाश ज्ञात करने का सूत्र **(n-1)** है । जहाँ n दशमलव के पूर्व कुल अंकों की संख्या है । इन संख्याओं का पूर्णाश सदैव एक धनात्मक पूर्णांक (positive integer) होता है । उदाहरणार्थ-

संख्या (Number)	सूत्र (formula)	पूर्णाश (characteristic)
1	(1-1)=0	0
2985	(4-1)=3	3
573	(3-1)=2	2
89.572	(2-1)=1	1
8	(1-1)=0	0
625.7895	(3-1)=2	2
856080.532	(6-1)=5	5

द्वितीय सूत्र. इकाई से कम संख्याओं का पूर्णाश

एक से कम संख्याओं के लघुगणक का पूर्णाश ज्ञात करने का सूत्र (n+1) है । जहाँ 'n' दशमलव बिन्दु के तुस्त पश्चात तथा प्रथम अशून्य अंक (1 से 9) के मध्य शून्यों की संख्या है । ऐसी संख्याओं का पूर्णाश सदैव ऋणात्मक पूर्णांक (negative integer) होता है । ऋणात्मक चिन्ह इंगित करने हेतु इन पूर्णाशों के उपर ऋण का संकेत बार (Bar) के रूप में बना दिया जाता है ताकि उस ऋण के चिन्ह को पूर्णाश से पृथक रखा जा सके । क्यों कि अपूर्णाश सदैव धनात्मक होता है ।

संख्या (Number)	सूत्र (formula)	पूर्णांश (characteristic)
0.8	(0+1)=1	$\bar{1}$
0.07	(1+1)=2	$\bar{2}$
0.0030607	(2+1)=3	$\bar{3}$
0.00000785	(5+1)=6	$\bar{6}$
0.60589	(0+1)=1	$\bar{1}$

1.2.5 अपूर्णांश (mantissa) ज्ञात करना (लघुगणक सारणी का प्रयोग)

लघुगणक का वह भाग जो दशमलव बिन्दु के बाद आता है, अपूर्णांश कहलाता है । अपूर्णांश लघुगणक सरणियों से देखा जाता है तथा यह सदैव धनात्मक होता है । इसे ज्ञात करते समय दशमलव बिन्दु का संख्या पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है, जबकि पूर्णांश ज्ञात करते समय संख्या का वह हिस्सा जो दशमलव के पूर्व अथवा दशमलव के तुरन्त बाद शून्यों की संख्या पर निर्भर करता है । उदाहरण के लिए 825.6, 82.56, 8.256, 0.8256, 0.008256 आदि संख्याओं का अपूर्णांश समान होगा, जबकि इन संख्याओं का पूर्णांश भिन्न-भिन्न होगा । अपूर्णांशं को लघुगणक सरणियों से प्राय: चार अंको की संख्या तक ही ज्ञात किया जा सकता है । अत: ऐसी संख्याओं जिनका अपूर्णांश देखना अथवा ज्ञात करना हो यदि चार अंकों से बड़ी है तो उसका सन्निकटन (approximation) चार अंको तक कर दिया जाता है ।

ध्यान दीजिए कि इस सारणी में क्षैतिज (horizontal) तथा ऊर्ध्वाधर (vertical)में खाने बने हुए है । क्षैतिज खाने 0 से 9 तक है तथा उसी के बगल में पुन: 1 से 9 तक के खाने है । जिसे औसत अन्तर (mean difference) का खण्ड कहते हैं । लम्बवत खाने में प्रत्येक पंक्ति, दो अंक वाली संख्या, जैसे 10,11,12. .... 97,98,99 से आरम्भ होती है ।

किसी संख्या का सामान्य लघुगणक ज्ञात करने की क्रिया : लघुगणक सारणी के प्रयोग से किसी संख्या का सामान्य लघुगणक का मान को अग्र प्रक्रिया द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

लघुगणक सारणी(LOGARITHMS TABLE) मध्य अन्तर

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123	456	789
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
25	3979	3997	4014	4031	4048	4046	4082	4099	4116	41 33	2 3 5	7 9 10	12 14 15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	42 98	2 3 5	7 8 10	11 13 15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	44 56	2 3 5	6 8 9	11 13 14
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

सर्व प्रथम दी गई संख्या का पूर्णांश इप्रत किया जाता है । तत्पश्चात दशमलव बिन्दु की उपेक्षा करके दी हुई संख्या को प्रथम चार अंको तक (यदि अंको की संख्या चार से अधिक हो तो) सन्निकट करें । इस संख्या के प्रथम दो अंको को लघुगणक सारणी के प्रथम ऊर्ध्वाधर खाने में देखते हुए सारणी के शीर्ष में क्षैतिज पंक्ति में लिखा अंक प्रस्तुत संख्या का तीसरा अंक के ऊर्ध्वाधर स्तम्भ में उपस्थित संख्या को लिख लेते है । पुन: सारणी के शीर्ष में क्षैतिज पंक्ति में औसर अन्तर (mean difference) में प्रस्तुत संख्या का चतुर्थ अंक के ऊर्ध्वाधर स्तम्भ में उपस्थित संख्या को तीसरे अंक के संगत संख्या में जोड़ कर योगफल ज्ञात कर लेते है, यही योगफल प्रस्तुत संख्या का अपूर्णांश होता है अत: प्रस्तुत संख्या का पूर्णांश के बाद दशमलव लगाकर अपूर्णांश लिखकर जो संख्या प्राप्त होती है वही दी गई संख्या का लघुगणक का मान होता है ।

उदाहरणार्थ मान लिजिए हमे log2.627 ज्ञात करना है । सर्वप्रथम दी गई संख्या 2.627 का पूर्णाश 0 है को ज्ञात करते है । अब अपूर्णांश ज्ञात करने के लिए लघुगणक सारणी में प्रथम ऊर्ध्वाधर स्तम्भ में उस पंक्ति को देखिए जो 26 से प्रारम्भ होती है । इस पंक्ति में, उस स्तम्भ की संख्या पढ़िए, जिसके ऊपरी भाग पर 2 है । यह संख्या 4183 है । इस का अर्थ है कि log2.620=0.4183 परन्तु हमें log2.627 इप्रत करना है, इसलिए हमारा उत्तर 0.4183 से थोड़ा अधिक होगा । कितना अधिक होगा यह हम औसर अन्तर के खण्ड से ज्ञात करेंगे । क्योंकि हमारी संख्या में चौथा अंक 7 है, अत: औसर अन्तर वाले खण्ड में, उस स्तम्भ में जिसके ऊपरी भाग पर 7 है, (26 वीं) पंक्ति में, संख्या पढ़िए । यहाँ हम देखते है कि संख्या 11 है । अत: 4183 में 11 का योग कर देते है और इस प्रकार योगफल 4194 प्राप्त होता है । इस योगफल को पूर्णाश 0 के बाद दशमलव लगाकर लिख लेते है । अत:

Log 2,627=0.4194

इसी प्रकार log(812.7) ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम संख्या 8127 का पूर्णाश 2 लिख लेते है, अब हम इस संख्या का अपूर्णांश ज्ञात करने के लिए 81 की पंक्ति में स्तम्भ 2 के नीचे देखते है और हमें (8। की पंक्ति में) 9096 प्राप्त होता है । हम इसी पंक्ति में आगे देखते है और औसत अन्तर के खण्ड में स्तम्भ 7 के नीचे औसर अन्तर 4 को 9096 में योग करने से 9100 प्राप्त होता है इस 9100 को पूर्णाश 2 के बाद दशमलव लगाकर लिख देते है । अत:

Log (812.7) = 29100

1.2.6 प्रतिलघुगणक (antilogarithms)

अभी तक हमने, एक दी हुई धन संख्या n का लघुगणक log n ज्ञात करने की विधि पर अध्ययन किया है । अब हम इस के विलोम का अध्ययन करेगें, अर्थात यदि log n दिया हुआ हो, तो संख्या n ज्ञात करने कि प्रक्रिया का अध्ययन करेगें ।

"किसी दी हुई संख्या का प्रतिलघुगणक वह संख्या है जिसका लघुगुणक दी हुई संख्या है।"

यदि log n=x, तो हम यह भी कह सकते हैं कि n=antilog x (x का प्रतिलघुगणक) । अत: यदि x दिया हो तो इसका प्रतिलघुगणक ज्ञात करने के लिए, हम प्रतिलघुगणक सारणी

का प्रयोग करते है । इस सारणी को पढ्ने के लिए लघुगणक के अपूर्णाश के चार अंको का प्रयोग ठीक उसी प्रकार किया जाता है जिस प्रकार चार अंको तक सन्निकटित संख्या का प्रयोग अपूर्णाश ज्ञात करने हेतु किया जाता है । लघुगणक के पूर्णाश का प्रयोग प्राप्त परिणाम में दशमलव बिन्दु निश्चित करने के लिए किया जाता है ।

प्रतिलघुगणक सारणी, लघुगणक सारणी जैसी ही होती है । प्रतिलघुगणक सारणी में प्रथम ऊर्ध्वाधर स्तम्भ में 0.00 से 0.99 तक की संख्यायें होती है । इसके बाद दस स्तम्भ होते है जिनके शीर्ष पर क्रमश: 0 से 9 अंक लिखे होते है । इनके बाद औसत अन्तर (mean difference) के भी स्तम्भ होते है जिनके शीर्ष पर 1 से 9 अंक लिखे होते है । प्रतिलघुगणक ज्ञात करने की प्रक्रिया निम्नलिखित है:-

(i) यदि लघुगणक में पूर्णाश धनात्मक है तो दशमलव बिन्दु की स्थिति के लिए सूत्र (n+1) होता है जहाँ n पूर्णाश की संख्या है । यदि पूर्णाश 2 हो तो 2+1=3, अर्थात दशमलव बिन्दु के बायीं ओर 3 अंक होगें और यदि पूर्णाश 4 हो तो 4+1=5, दशमलव बिन्दु के बाई और 5 अंक होगें ।

(ii) यदि लघुगणक में पूर्णाश शून्य है तो दशमलव बिन्दु एक संख्या (0+1=1)के बाद लगाया जायेगा ।

(iii) यदि लघुगणक में पूर्णाश ऋणात्मक है अर्थात् उस पर 'बार' (-) है तो दशमलव की स्थिति के लिए सूत्र (n- 1) होगा, जहाँ n पूर्णाश की संख्या है । यदि ऋणात्मक पूर्णाश 3 अर्थात है तो 3 -1=2, अर्थात दशमलव बिन्दु के बाद और प्रथम अशून्य अंक के पूर्व 2 शून्य लगा देगें । यदि ऋणात्मक पूर्णाश 4 है तो 4 -1=3 होगा, अर्थात् दशमलव बिन्दु के तुरन्त पश्चात अर्थात दायीं ओर तीन शून्य लिखकर फिर अशून्य अंक से शुरू होने वाली संख्या लिखते है । यदि ऋणात्मक पूर्णाश 1 हो तो 1 -1=0, अर्थात् दशमलव बिन्दु के तुरन्त बाद कोई शून्य नहीं होगा ।

प्रतिलघुगणक सारणी के प्रथम स्तम्भ में अपूर्णाश के पहिले दो अंको के अनुसार पंक्ति का चयन कर, उस पंक्ति में उस संख्या का चयन करते है जो संख्या अपूर्णाश के तीसरे अंक के संगत शीर्ष में स्थित अंक के स्तम्भ में स्थित हो । पुन: सारणी के शीर्ष में क्षैतिज पंक्ति में औसत अन्तर में प्रस्तुत अपूर्णाश का चतुर्थ अंक के ऊर्ध्वाधर स्तम्भ में चयन की गई क्षैतिज पंक्ति में उपस्थित संख्या को तीसरे अंक के संगत संख्या में जोड़ कर योगफल ज्ञात कर लेते है । इस प्रकार प्राप्त संख्या, वांछित संख्या (desired number) प्राप्त होती है । इस वांछित संख्या में दिये गये लघुगुणांक के पूर्णाश -के आधार पर दशमलव बिन्दु का स्थान निर्धारित करते हुए, दिये गये लघुगणकीय संख्या का संगत प्रतिलघुगणक ज्ञात किया जाता है । उदाहरर्णाथ मान लीजिए, logx=2.4837 है । n ज्ञात करने के लिए, पहले आप logx, का अपूर्णाशं ले । इस उदाहरण में अपूर्णाश 0.4837 है । अब इसका प्रतिलघुगणक सारणी में से प्रतिलघुगणक देखिए । प्रतिलघुगणक सारणी के प्रथम स्तम्भ में .48 की पंक्ति में स्तम्भ 3 के नीचे संख्या 3041 है और इसी पंक्ति में, अंतिम अंक 7 के लिए औसर अन्तर 5 है इस औसत अन्तर को संख्या 3041 में जोड़ने पर 3046 प्राप्त होती है । अत: दी गई लघुगणक संख्या का अपूर्णाश के संगत प्रतिलघुगणक संख्या 3046 है । अब इस संख्या में दी गई लघुगणक संख्या के पूर्णाश 2 के

अनुसार दशमलव बिन्दु का चयन (2+1=3), 3 अंक के बाद दशमलव बिन्दु लगाकर अभिष्ट संख्या x=304.6 प्राप्त कर लेते है ।

लघुगणक तथा प्रतिलघुगणक का प्रयोग निम्न उदाहरणों द्वारा आप भली-भांति समझ सकेंगे ।

उदाहरण 1.8 यदि logx=0.9804 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

हल. प्रतिलघुगणक सारणी से, हम देखते है कि 98०4 की संगत संख्या 9559 है । क्योंकि log x का पूर्णाश 0 है, अत: x=9559 होगा ।

उदाहरण 1.9 : यदि logx= $\bar{2}$.1352 हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

हल': प्रतिलघुगणक सारणी से, हम देखते है कि 1352 की संगत संख्या 1366 है । क्योंकि log x का पूर्णाश अर्थात ऋणात्मक में 2 है, अत: x=0.01366

बोध प्रश्न 1.2 (स)

1. निम्नलिखित के पूर्णाश ज्ञात कीजिये:

   (i) log12.70 (ii) log5834 (iii) log0.7253

   (iv) log0.003892 (v) log0.00007316

2. लघुगणक सारणी का प्रयोग कर, निम्नलिखित संख्याओं के लघुगणक ज्ञात कीजिए।

   (i) 1234 (ii) 12.34 (iii) 248.5

   (iv) 1.123 (v) 0.0012 (vi) 0.0004291

   (Vii) 0.000013789

3. निम्नलिखित मे से प्रत्येक का प्रतिलघुगणक ज्ञात किजिए।

   (i) 0.6002 (ii) 2.9630 (iii)5.8683 (vi)$\bar{1}$.7935

   (v) $\bar{2}$.5428 (vi) $\bar{4}$.7782

   नोट:- कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर अन्त मे दिये गये उत्तरों से मिलान कर लेंवे

1.2.7 संख्यात्मक परिकलनों में लघुगणकों का प्रयोग

गणित की जटिल क्रियाओं जैसे- दो या दो से अधिक संख्याओं का गुणनफल, भागफल, किसी संख्या की घात (वर्ग, घनमूल आदि) अथवा उपरोक्त सभी का मिश्रण का मान, लघुगणक और प्रतिलघुगणक सरणियों के प्रयोग द्वारा सरलता से ज्ञात किया जा सकता है । निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा आप संख्यात्मक परिकलनों में लघुगणकों का प्रयोग करना भली-भांति समझ सकेंगे ।

उदाहरण 1.10 : लघुगणक सारणी की सहायता से निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

$$\frac{517X59.31}{307}$$

हल : मान लीजिए कि x= $\frac{517X59.31}{307}$

अब दोनों पक्षों का लघुगणक (आधार 10 पर) लेने पर $\log x=\log\left\{\frac{517X59.31}{307}\right\}$

=log{507x59.31}-log307

=log517+log59.31-log307

=2.7135+1.7732-2.4871 (लघुगणक सारणी से)

Logx=1.9996

$\therefore$x=antilog (1.9996)

या x=99.91 (प्रतिलघुगणक सारणी से)

उदाहरण 1.11: लघुगणक सारणी की सहायता से सरल कर मान ज्ञात किजिए:

$$\frac{5.856X0.007161}{0.06253}$$

हल :मान लीजिए, x= $\frac{5.856X0.007161}{0.06253}$

तो $\log x=\log\left\{\frac{517X59.31}{307}\right\}$

=log5.856+log0.007161-log0.06253

=0.7676+ $\bar{3}$.8550- $\bar{2}$.7961

=0.7676+(-3+.8550)-(-2+.7961)

(यहीं पूर्णाश ऋणात्मक तथा अपूर्णाश धनात्मक है)

=(-3+2)+(0.7676+.8550)-0.7961

=-1+1.6226-0.7961

=-1+0.8265

Logx= $\bar{1}$.8265

x=antilog ($\bar{1}$.8265)

x=0.6707

उदाहरण 1.12: लघुगणक सारणी का प्रयोग कर निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

$$\sqrt[3]{\frac{31.42X7.192}{(0.236)^2}}$$

हल : मान लीजिए, x= $\sqrt[3]{\frac{31.42X7.192}{(0.236)^2}}$

तो logx=log $\left\{\frac{31.42X7.192}{(0.236)^2}\right\}^{1/3}$

$$=\frac{1}{3}\log\left\{\frac{31.42X7.192}{(0.236)^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\log(31.42X7.192)-\log(0.236)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\log(31.42+\log 7.192)-2\log(0.236)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{1.4971+0.8568-2(\bar{1}.3729)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{2.3539-2(-1+.3729)\right\}=\frac{1}{3}\left\{2.3539+2-7458\right\}$$

$$\log x=\frac{1}{3}\left\{3.6081\right\}=1.2027$$

$$\therefore x = anti\log(1.2027)$$

$$\Rightarrow x=15.95$$

उदाहरण 1.13 लघुगणक सारणी का प्रयोग कर निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

$$\frac{(6.453)^3 X (0.0003462)^{1/3}}{(9.374)^2 X (8.937)^{1/4}}$$

हल : मान लीजिए $x=\frac{(6.453)^3 X (0.0003462)^{1/3}}{(9.374)^2 X (8.937)^{1/4}}$

तो $\log x=\log\left\{\frac{(6.453)^3 X (0.0003462)^{1/3}}{(9.374)^2 X (8.937)^{1/4}}\right\}$

$$=\log\left\{(6.453)^3 X (0.0003462)^{1/3}\right\}-\log\left\{(9.374)^2 X (8.937)^{1/4}\right\}$$

$$=3\log\ (6.453)+\frac{1}{3}\log(0.0003462)-2\log\ (9.374)-\frac{1}{4}\log(8.937)$$

$$=3(0.8098)+\frac{1}{3}(\bar{4}.5393)-(0.9719)-\frac{1}{4}(0.9512)$$

$$=3(0.8098)+\frac{1}{3}(\bar{6}\,2.5393)-2(0.9719)-\frac{1}{4}(0.9512)$$

(ऋणात्मक पूर्णाश 4 में 3 का पूरा-पूरा भाग देने के लिये 2 जोडने व 2 घटाने पर ऋणात्मक पूर्णाश 6 करने पर)

$=2.4294+\bar{2}+0.8464-1.9438-0.2378$

$=3.2758+\bar{2}-2.1816$

$=3.2758+\bar{4}-\ +0.1816\ =\ 3.2758+\bar{5}+1-0.1816$

(अपूर्णाश को धनात्मक बनाने के लिए इकाई को जोडने व घटाने पर)

$=3.2758+\bar{5}+0.8184$

$\text{Logx}=\bar{1}+0.094=\bar{1}.0942$

$\therefore x=\text{antilog}(\bar{1}.0942)$

$\Rightarrow x=0.1234$

टिप्पणी:

(1) अपूर्णाश सदैव धनात्मक ही होता है ।

(2) किसी ऋणात्मक पूर्णाश में किसी संख्या का भाग देना हो तो उस संख्या का ऋणात्मक पूर्णाश में सदैव पूरा-पूरा भाग जाना चाहिये, यदि भाग पूरा-पूरा नही जा रहा हो तो सर्वप्रथम ऋणात्मक पूर्णाश को इस प्रकार ऋणात्मक में समायोजित किया जाता है ताकि भाग पूरा-पूरा जावे ।

उदाहरण 1.14. यदि log 108 =0.3010 तथा log3=0.4771 हो तो log का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : क्योंकि $\log 108=\log(4X27)=\log(2^2X3^3)$

$=2\log2+3\log3$

$=2x0.3010+3X0.4771$

$=0.6020+1.4313$

$\Rightarrow \log 108=2.0333$

बोध प्रश्न 1.2 (द)

1. लघुगणक सरणियों का प्रयोग कर निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\dfrac{8.253X\,4.637}{2.185}$ (ii) $\dfrac{(73.56)^3x(0.0371)^2}{68.21}$

(iii) $\dfrac{(0.7634)^{1/3}}{\sqrt{272.2X15.2}}$ (VI) $\sqrt{\dfrac{(71.24)^5X\sqrt{56}}{(2.3)^7\,X\sqrt{21}}}$

2. दशमलव के दो स्थान तक शुद्ध मान ज्ञात कीजिए:

$(i)\dfrac{(3.7)^3x\sqrt[5]{5.674}}{(7.452)^2X\sqrt[3]{5.674}}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{6}X\sqrt[3]{7}}{\sqrt[4]{8}X\sqrt[5]{9}}$

(iii) $\sqrt[3]{\dfrac{(45.4)^2}{(3.2)^2x(5.6)^3}}$ (iv) $\dfrac{(1.23)}{11.2x23.5}$

3. यदि log2=0.3010 और log3=0.4771 हो तो निम्नलिखित का ज्ञात करो ।

(i) $\log(0.0024)^{1/3}$ (ii)log 0.72

4. 0.0007 का धनमूल ज्ञात करो जबकि दिया हुआ है-

$\text{Log}^7{}_{10}=0.8451$, $\log_{10}{}^{8878}=3.9483$

नोट:- कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर, अन्त मे दिये गये उत्तरों से मिलान कर लेगें ।

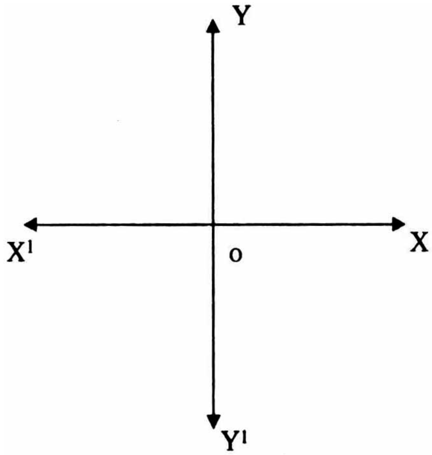
1.3 वक्र खींचना (Curve Sketching)

1.3.1 फलन तथा फलन का मान (Function and Value of the Function)

यदि दो चर x तथा y किसी दी हुई संक्रिया या नियम के तहत इस प्रकार सम्बन्धित हो कि चर x के लिए चर y का एक निश्चित मान प्राप्त हो तो y को x का फलन कहते है तथा इसे y=f(x) से निरूपित किया जाता है । इसे "y बराबर है फलन x का "या" y, x का फलन" पढ़ा जाता है । यहाँ चर x को स्वतन्त्र चर तथा चर y को परतंत्र चर अथवा आश्रित चर कहा जाता है । उदाहरणार्थ $y=f(x)=5x^2+6x-7$ या y=f(x) जहाँ $f(x)= 5x^2+6x-7$, एक फलन है । इस फलन में चर x के विभिन्न मान रखने पर प्रत्येक चर x के संगत f(x) अथवा y का मान प्राप्त होता है । यहाँ चर x स्वतंत्र तथा f(x) अथवा y फलन अथवा परतंत्र चर कहलाता है । अब यदि इस फलन में x=2 रखनें पर $f(2)=5(2)^2+6x2-7=25$ प्राप्त होता है । यहाँ $f(2)=25$, चर x=2 के संगत फलन का मान कहलाता है । पुन: यदि x=3 तो $f(3)=56$, इसी प्रकार x=-1 तब f (-1)=8 आदि । अत: प्रत्येक चर x के संख्यात्मक मान के संगत $f(x)$ का भी एक अद्‌वितीय संख्यात्मक मान प्राप्त होता है । $f(x)$ के इस संख्यात्मक मान को चर x के संगत, परतंत्र चर y भी कहा जाता है । इस प्रकार स्वतंत्र चर x तथा परतंत्र चर y के क्रिमित युग्म क्रमश: (2,25), (3,56), (-1,-8) प्राप्त होते है ।

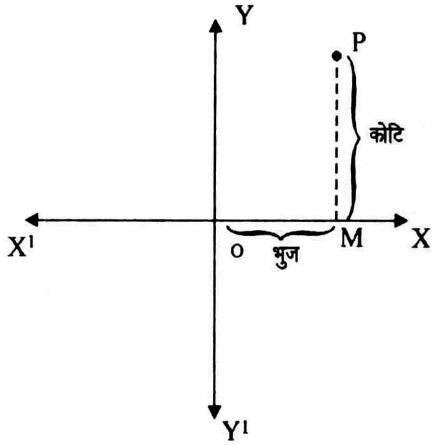
1.3.2 समकोणिक निर्देशांक पद्धति (Rectangular Co-ordinate System)

समतल में स्थित किसी बिन्दु की स्थिति को हम दो बीजीय राशियों के युग्म द्‌वारा व्यक्त करते है इन राशियों को बिन्दु के निर्देशांक कहते है । इनको प्राय: (x,y) से निरूपित किया जाता है । मान लीजिए कि XOX' तथा YOY' परस्पर लम्ब तथा किसी लम्बाई की दो सरल रेखायें है जो परस्पर बिन्दु O पर काटती है । रेखा XOX' को X-अक्ष तथा रेखा YOY' को y-अक्ष कहते है तथा दोनों रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु o को "मूल-बिन्दु" कहते है । क्योंकि दोनो अक्ष अनन्त लम्बाई की मानी जाती है अत: इस तथ्य को चित्र में इनके सिरो पर तीर लगाकर व्यक्त किया जाता है । इन दोनों रेखाओं के युग्म को निर्देशांक अक्ष (axes of coordinates) कहा जाता है तथा ये रेखा-युग्म परस्पर मकोण होने के कारण इसको समकोणाक्ष (rectangular axes)भी कहते है । इस पद्धति को कार्तीय पद्धति (cartesion system) कहते है । अत: वह समतल जिस पर x अक्ष तथा y अक्ष स्थित होते है (परस्पर लम्ब) कार्तीय समतल (Cartesian plane) कहलाता है । इसे x-y तल (x-y plane) भी कहा जाता है ।



चित्र 1.1

समतल में स्थित किसी बिन्दु **P** की स्थिति जानने के लिए बिन्दु **P** से **x** अक्ष पर लम्ब **PM** खिचीयें । लम्बाई **OM** तथा लम्ब **PM** को बिन्दु **P** का क्रमश: भुज **(abscissa)** तथा कोटि **(ordinate)** कहते है । साधारणतया भुज OM को **x** तथा कोटि **PM** को y से व्यक्त किया जाता है । x तथा y को एक साथ क्रमित युग्म (x,y) द्वारा व्यक्त किया जाता है तथा इसे बिन्दु **P** के कार्तीय निर्देशांक **(Cartesian coordinate)** कहते है ।



चित्र 1.2

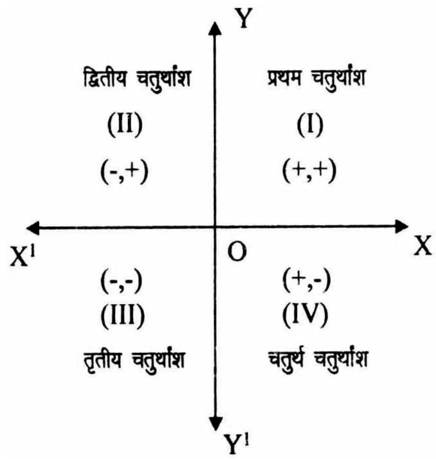
मूल बिन्दु o से ox दिशा में x धनात्मक तथा O से OX' दिशा में X ऋणात्मक माना जाता है । इसी प्रकार मूल बिन्दु O से OY की दिशा में y- धनात्मक तथा O से OY' दिशा में Y ऋणात्मक मान जाता है । निर्देश अक्ष XOX' तथा YOY' समतल को चार भागों में विभक्त करती है । ये चार भाग $XOY^1, YOX^1, X^1OY^1, Y^1OX$ है तथा यें क्रमश: प्रथम चतुर्थांश (I), द्वितीय चतुर्थांश (II), तृतीय चतुर्थांश (III) तथा चतुर्थ चतुर्थांश (IV) कहलाते है । निर्देशांक के चिन्हों की परम्परानुसार-

(i) प्रथम चतुर्थांश में स्थित किसी बिन्दु के दोनों निर्देशांक भुज (x)तथा कोटि (y) धनात्मक होती है ।

(ii) द्वितीय चतुर्थाश में स्थित किसी बिन्दु का भुज (x)ऋणात्मक तथा कोटि (y) धनात्मक होती है ।

(iii) तृतीय चतुर्थांश में स्थित किसी बिन्दु के दोनो निर्देशांक भुज (x) तथा कोटि (y) ऋणात्मक होती है ।

(iv) चतुर्थ चतुर्थाश में स्थित किसी बिन्दु का भुज (x) धनात्मक तथा कोटि (y) ऋणात्मक होती है ।



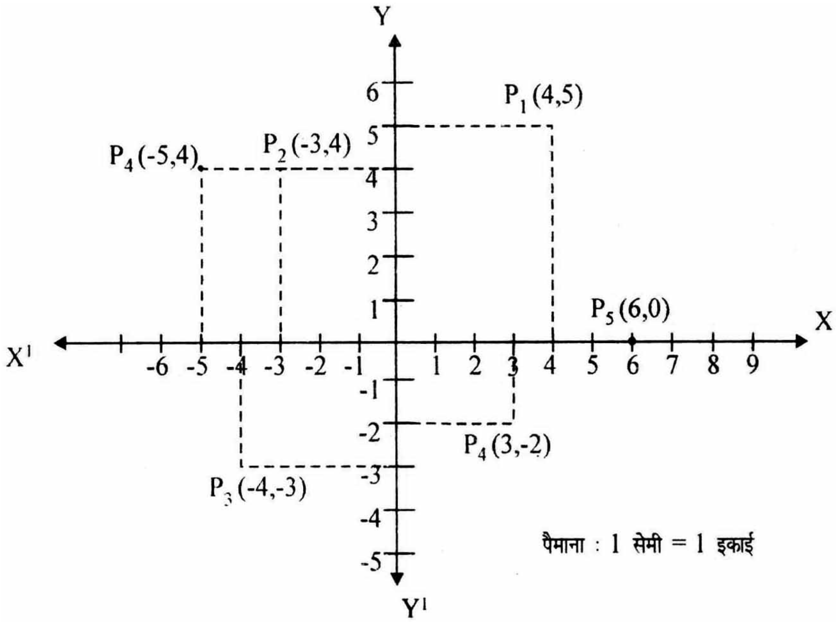
चित्र 1.3

अत: समतल में किसी बिन्दु अथवा बिन्दुओं को अंकित करने के लिए सर्वप्रथम निर्देशकों को मापने के लिए कोई इकाई पैमाना (scale unit) निश्चित करना पड़ता है । फिर दिये गये बिन्दुओं के निर्देशांको को इस इकाई पैमाना की राशि में रखा जाता है । यदि किसी बिन्दु के निर्देशांक (x_1,y_1) हो तो इस बिन्दु की स्थिति निश्चित करने के लिए हम x अक्ष की दिशा में x_1 इकाई की लम्बाई नापते है । (x_1 धनात्मक अथवा ऋणात्मक के अनुसार क्रमश: मूल बिन्दु के दाँयी ओर अथवा बांयी ओर) तथा y अक्ष के समान्तर y_1 इकाई के बराबर लम्बाई मापकर (y1 धनात्मक अथवा ऋणात्मक के अनुसार XOX^1 के ऊपर अथवा नीचे की ओर) दिये हुए बिन्दु की अभिष्ट स्थिति को प्रदर्शित करते है । निम्न उदाहरण द्वारा स्थिति ओर स्पष्ट हो जायेगी ।

उदाहरण 1.15 : निम्न बिन्दुओं को कार्तीय पद्धति से ग्राफ पेपर पर अंकित कीजिए-

(i)(4,5) (ii)(-3,4) (iii)(-4,-3) (iv)(2,-3) (v) (6,0)

हल: XOX^1 तथा YOY^1 दो परस्पर लम्ब रेखाएँ खिंचते, जहाँ XOX^1 क्षैतिज तथा YOY^1 ऊर्ध्वाधर हो । अब चित्रानुसार या उचित पैमाना मानकर तथा दोनों परस्पर लम्ब रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु को मूल बिन्दु O से अक्षों पर दिये गये बिन्दुओं की दुरियों को नापते हुए बिन्दुओं को अंकित करते है । बिन्दु (4,5) को अंकित करने के लिए OX की दिशा में 4 इकाई तथा OY के समान्तर दिशा में 5 इकाई की दूरी को नापते हुए बिन्दु P(4,5) की स्थिति को अंकित करते है । इसी प्रकार बिन्दु (3,-2) को अंकित करने के लिए OX की दिशा में 3 इकाई तथा OY' की दिशा में 2 इकाई लेते हुए बिन्दु $P_4(3,-2)$ को अंकित करते है । इसी प्रकार अन्य बिन्दुओं की स्थिति चित्र में अंकित की गई है ।



चित्र 1.4

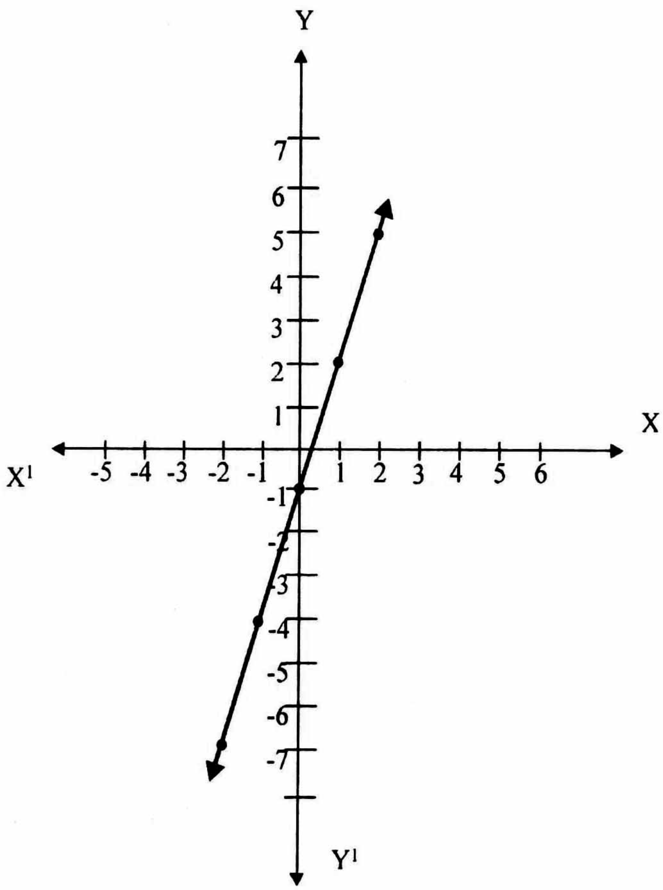
1.3.3 फलन का आलेख (Graph of a Function)

दिये गये किसी फलन $y=f(x)$ को सन्तुष्ट करने वाले क्रमित युग्म (x,y) के बिन्दुओं को मिलाने पर प्राप्त वक्र उस. दिये गये फलन का आलेख कहलाता है । दिये गये फलन द्वारा निरूपित आलेख बनाना उस वक्र का अनुरेखण (curve tracing) कहलाता है । व्यावहारिक दृष्टि से फलन के वक्र के सभी बिन्दुओं को ज्ञात करना व अंकित करना सम्भव नहीं होता है । अत: किसी फलन का आलेख बनाने के लिए कुछ विशिष्ट बिन्दुओं को लेकर उन बिन्दुओं को उचित पैमाना मानकर समतल में अंकित कर पैंसिल से मिलाया जाता है ।

उदाहरण 1.16 : रेखिय फलन $f(x)=3x-1$ का आलेख बनाइये ।

हल : फलन $f(x)$ का मान सभी वास्तविक संख्याओं x के लिए परिभाषित है अत: फलन $f(x)$ का प्रान्त सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है $f(x)$ के प्रान्त से x के कुछ विशिष्ट मान लेकर इसके संगत $y=f(x)=3x-1$ के मान ज्ञात कर इन मानों को सारणी के रूप में लिखते है ।

यदि x=	-2	-1	0	1	2
तब $y=f(x)=$	-7	-4	1	2	5



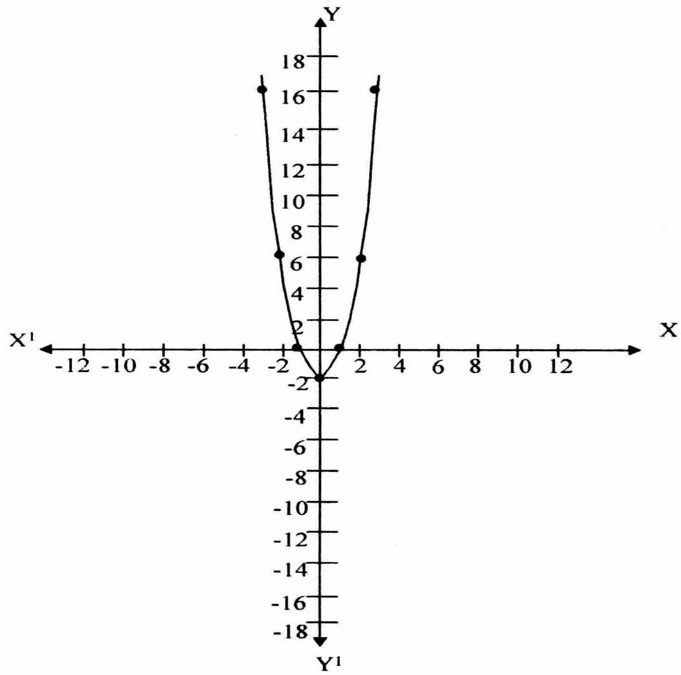
चित्र 1.5

सारणी में दिये गये क्रमित युग्म (x,y) के मानों को कार्तीय पद्धति में संगत बिन्दुओं को अंकित कर इन बिन्दुओं को स्केल से मिलाने पर एक सरल रेखा प्राप्त होती है ।

उदाहरण 1.17 : फलन y= $f(x)=2x^2-2$ का आलेख बनाइये ।

हल : फलन $f(x)$ का मान सभी वास्तविक संख्याओं x के लिए परिभाषित है अत: फलन $f(x)$ का प्रान्त सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है । अब फलन $f(x)$ के प्रान्त से x के कुछ विशिष्ट मान लेकर इसके संगत $f(x)$ के मान ज्ञात कर इन मानों को सारणी के रूप में लिखते है-

यदि x=	-3	-2	-1	0	1	2	3
तब $f(x)$=	16	6	0	-2	0	6	16



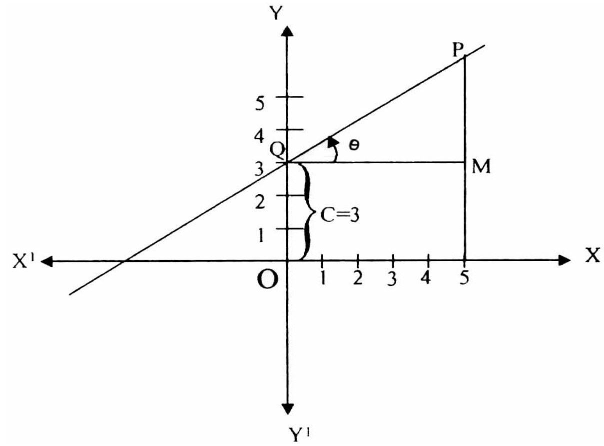
चित्र 1.6

सारणी में दिये गये x तथा y के क्रमित-युग्म (x, y) के मानों को कार्तीय पद्धति में संगत बिन्दुओं को अंकित कर इन बिन्दुओं को स्वतंत्र रूप से (free hand) मिलाने पर एक वक्र की आकृति प्राप्त होती है । (यह आकृति परवलय कहलाती है)

1.3.4 सरल रेखा का ढलान (Slope of a Straight Line)

उपर दिये गये उदाहरण 1.16 में फलन का आलेख एक सरल रेखा को निरूपित करता है । दिया गया फलन, स्वतंत्र x में एक घातीय रूप में है । अत: दो चरो x तथा y में एक घातीय समीकरण का आलेख सदैव एक सरल रेखा प्राप्त होती है । साधारणतया सरल रेखा का मानक समीकरण y=mx+c के रूप में लिया जाता है, जहाँ m=tanθ, एवं c, रेखा द्वारा y-अक्ष पर काटे गये अन्त: खण्ड की लम्बाई है ।

यहाँ θ, रेखा द्वारा x- अक्ष के साथ वामावृत दिशा (धनात्मक) में बनाया गया कोण होता है तथा tanθ को उस सरल रेखा का ढलान कहते है । सरल रेखा द्वारा y- अक्ष पर काटे गये बिन्दु की मूल बिन्दु o से दूरी को y- अक्ष पर अन्त: खण्ड कहते है । चित्र की सहायता से सरल रेखा का ढलान, $m = \tan\theta = \frac{PM}{QM}$ तथा दूरी OQ,Y- अक्ष पर काटे गये अन्त: खण्ड को प्रदर्शित करता है ।



चित्र 1.7

टिप्पणी:

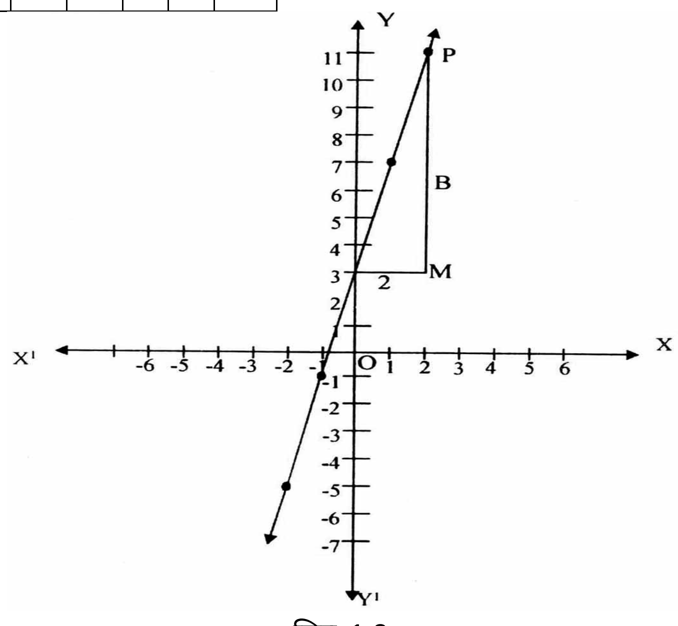
(i) उपरोक्त समीकरण y=mx+c में राशियाँ m तथा c अचर है जिनको उचित मान दे कर किसी भी रेखा को इस समीकरण द्‌वारा निरूपित कर सकते है ।

(ii) एक घाती समीकरण को y=mx+c के रूप में लिखने पर x का गुणांक उस रेखा का ढलान (m) तथा अचर राशि (c), y- अक्ष से काटे गये अन्त: खण्ड को प्रकट करती है ।

उदाहरण 1.18. सरल रेखा y=4x+3 का आलेख कीजिए तथा इस सरल रेखा का ढलान तथा y- अक्ष पर काटे गये अन्त: खण्ड ज्ञात कीजिए ।

हल : y=4x+3 में चर x के संगत y के कुछ विशिष्ट मानों को सारणी में रखने पर

यदि x=	-2	-1	0	1	2
तब y=	-5	-1	3	7	11



चित्र 1.8

सरल रेखा के आलेख की सहायता से PM=8 तथा QM=2 अत: $m = \tan\theta = \frac{PM}{QM} = \frac{8}{2} = 4$, रेखा का ढलान तथा OQ=3, रेखा द्‌वारा ल.अक्ष पर काटे गये अन्त: खण्ड की लम्बाई है ।

वैकल्पिक विधि (Alternate method):

दिये गये सरल रेखा का (एक घातीय) समीकरण में x- का गुणांक 4 है तथा अचर पद 3 है । अत: रेखा का ढाल 4 तथा y-अक्ष पर अन्त: खण्ड 3 होगा ।

बोध प्रश्न 1.3

1. निम्नलिखित फलनो का आलेख बनाइए:

   (i) f(x)=2x-5 (ii) f(x)=x+2 (iii) $f(x)=x^2-2x+1$

2. निम्नलिखित सरल रेखाओं का ढलान तथा y- अक्ष पर काटे गये अन्त: खण्ड ज्ञात कीजिए:

   (i) y=3x+6 (ii) y=-4x+3

   (iii) Y=5x-6 (iv) 3y=4x+5

नोट - कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर, अन्त में दिये गये उत्तरों से मिलान कर लेगें ।

1.4 अवकलन (Differentiation)

किसी फलन के स्वतंत्र चर या चरों के मानो में परिवर्तन करने के फलस्वरूप फलन में आये विचरणों का अध्ययन अवकलन कहलाता है । अवकलन यान्त्रिकी, अर्थशास्त्र, रसायन शास्त्र, भौतिक शास्त्र, जीव विज्ञान तथा उस सभी विषयों की भाषा है जिनमें परिवर्तनशील राशियों से सम्बन्ध होता है ।

फलन (function): दो चरों x तथा y में एक विशेष प्रकार का सम्बन्ध इस प्रकार परिभाषित हो कि x का प्रत्येक मान y के साथ एक अलग (अद्‌वितीय) सम्बन्ध बनाये तो इस सम्बन्ध को फलन कहते है । जैसे-y=3x+1 में x के प्रत्येक मान के लिए y का एक अलग मान होगा । यहाँ पर चर x कोई भी वास्तविक मान ग्रहण करने के लिए स्वतंत्र है इसलिए x को स्वतंत्र चर कहा जाता है । परन्तु चर y का मान चर x पर निर्भर करता है इसलिए चर y को परतंत्र चर कहा जाता है । इन चरों में परस्पर सम्बन्ध को फलन के रूप में प्रकट करने के लिए बराबर चिन्ह (=) के बायें पक्ष (L.H.S) में परतन्त्र तथा दायें पक्ष (R.H.S) में स्वतंत्र चर को लिखा जाता है, जिन्हें सामान्य संकेतन रूप में y=f(x) द्‌वारा व्यक्त करते है ।

फलन y=f(x) का मान, स्वतंत्र चर x का a=a पर ज्ञात करने के लिए f(x) में x को a से प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होता है एवं उसे संकेत f(a) से व्यक्त किया जाता है । जैसे f(x)=3x+5 का x=2 पर मान f(2)=11.

कुछ ऐसे भी फलन होते है जिनका मान एक ज्ञात संख्या नही होती है । जैसे f(x) $= \frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2$ का x=2 पर मान $y = \frac{0}{0}$ है जो कि एक वास्तविक संख्या नहीं है । इस

प्रकार के फलन को दिये गये x के मान x=2 पर अपरिभाषित फलन कहते है तथा ये फलन जिस मान या बिन्दु पर अपरिभाषित होते है, उस बिन्दु या x के मान के बहुत निकटतम बिन्दु पर फलन का मान ज्ञात करते है । जिसे हम सीमान्त मान कहते है ।

उदाहरणार्थ, फलन $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}, x \neq 2$ पर विचार कीजिए ।

हम x=2 पर फलन की सीमा ज्ञात करना चाहेगे । हम 2 के अत्यंत निकट x के मानों के लिए $f(x)$ के मान का परिकलन करते हुए 2 के निकट बाई ओर कुछ बिन्दु 1.9,1.95,1.99,1.999...... इत्यादि है । इन बिन्दुओं पर $f(x)$ के मान नीचे सारणीबद्ध है । इसी प्रकार, 2 के अत्यंत निकट दाई ओर वास्तविक संख्याएँ 2.1,201,2.001,2.0001....... भी है । इन बिन्दुओं पर भी फलन के मान नीचे सारणी में दिये है

सारणी 1 : 2 के बाई ओर के निकट मानों के संगत $f(x)$ के मान

X=	1.9	1.95	1.99	1.999	.....$x \to 2.0$
$f(x)$	3.9	3.95	3.99	3.999	.....$f(x) \to 4.0$

सारणी 2 : 2 के दाई ओर के निकट मानों के संगत $f(x)$ के मान

X=	2.1	2.01	2.001	2.0001	.....$x \to 2.0$
$f(x)$	4.1	4.01	4.001	4.0001	.....$f(x) \to 4.0$

उपरोक्त दोनों सरणियों से हम निगमित करते है कि $f(x)$ का मान 4.0 की ओर अग्रसर होता है जब x का मान 2 की ओर अग्रसर हो, चाहे x का मान x=2 के बाई ओर से 2 की तरफ अग्रसर हो अथवा x=2 के दाई ओर से 2 की तरफ अग्रसर है । अत: जब x का मान x=2 के बाई ओर से 2 की तरफ अग्रसर होता है तब $f(x)$ का मान 4.0 की ओर अग्रसर होने को x=2 पर $f(x)$ की बाई पक्ष की सीमा (Left Hand Limit) कहते है । तथा इसे $\lim_{x \to 2^-}$ $f(x)=4$ से निरूपित करते है ।

इसी प्रकार, जब x,2 के दाई ओर से अग्रसर होता है तो, $f(x)$ का मान 4.0 की ओर अग्रसर हो रहा है इसे x=2 पर $f(x)$ की दाई पक्ष की सीमा (Right Hand Limit) कहते है तथा इसे

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4.0$$

अत: यदि किसी फलन का बिन्दु x=a पर $f(x)$ की बाई पक्ष की सीमा तथा दाई पक्ष की सीमा अस्तित्व में हो तथा बराबर हो तो उनका समान मान ही उस फलन की सीमा कहलाती है इस सीमा को व्यापकत: $\lim_{x \to \infty} f(x)=l$, जहाँ, l, फलन की सीमा हो, से निरूपित करते है । जब फलन के x=a पर सीमा का अस्तित्व होता है तथा सीमा का मान फलन के मान को बराबर हो तो बिन्दु x=a पर सतत् फलन भी कहा जाता है ।

1.4.1 अवकलज (Derivatives):

माना कि y= f(x) ,x का कोई सतत् फलन है जहाँ चर x स्वतंत्र तथा चर y परतन्त्र है । यदि स्वतंत्र चर x के मान में कोई स्वेच्छ अल्पवृद्धि (arbitrary small increment) Δx अथवा δx (डेल्टा x) की जाए तो y के मान में भी संगत वृद्धि Δy अथवा δy होगी ।

तब अनुपात (भिन्न) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\left(-\text{या}\frac{\delta y}{\delta x}\right)$को x के सापेक्ष y की औसत परिवर्तन दर (average rate of change) कहते हैं । अब यदि Δx (या δy) छोटा होता हुआ शून्य की ओर अग्रसर हो, तो Δy (या δy) भी छोटा होता हुआ शून्य की ओर अग्रसर होगा ।

"x के सापेक्ष y में सीमांत परिवर्तन की दर $\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ को y का x के सापेक्ष अवकलन कहते है" तथा इसे $\frac{dy}{dx}$ द्वारा व्यक्त करते है । इसे x के सापेक्ष y का अवकलन गुणांक भी कहते है । अत: $\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ पुन: यदि y=f(x) से किसी फलन को व्यक्त करे तो

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

इस प्रकार $\frac{dy}{dx}$ को $\frac{d}{dx}$ f(x) से भी व्यक्त कर सकते है ।$\frac{df(x)}{dx}$ को f'(x) या Df(x) से भी व्यक्त किया जाता है

टिप्पणी : (1) $\frac{dy}{dx}$,y का x के सापेक्ष अवकलन गुणांक का संकेत है न कि dy में dx से भाग देना ।

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ एक भिन्न हो सकती है अथार्त् Δy एवं Δx को अलग किया जा सकता है । परन्तु $\frac{dy}{dx}$ भिन्न नहीं है अर्थात् dy व dx को अलग नहीं किया जा सकता है ।

(3) $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ को f(x) का x के सापेक्ष प्रथम सिद्धान्त से अवकलन (Differentiation by first principle) अथवा परिभाषा से अवकलन भी कहते है ।

1.4.2 अवकलन के लिए विभिन्न मानक सूत्र (Various Standard Formulae For Differentiation)

(1) $y=x^n$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$, जहाँ n कोई अचर है

(2) $y=e^x$ $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}=e^x$

(3) y=log$_e$x $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$

(4) y=a^x $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$=a^x loga

(5) y=sinx $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$=cosx

(6) y=cosx $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$= sinx

(7) y=tanx $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$=sec^{2}x

(8) y=cosec x $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$=-cosec xcot x

(9) y=sec x $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$=sec x tan x

(10) y=cot x $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}$=cosec^2 x

(11) Y=sin^{-1}x $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(12) Cos^{-1}x $\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(13) y=tan^{-1}x $\Rightarrow$ ^{1}x- $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(14) sec^{-1}x $\Rightarrow$ ^{1}x- $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x|>0$

(15) Cosec^{-1}x $\Rightarrow$ ^{1}x - $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x|>0$

(16) y=cot^{-1}x $\Rightarrow$ ^{1}x- $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$

1.4.3 अवकलन के मूल नियम (Fundamental Rules for Differentation):-

(1) अचर राशि का अवकलन शून्य होता है । अर्थात यदि f(x)=c जहाँ c अचर हो तो $\frac{df(x)}{dx}=0$ या $\frac{dc}{dx}=0$

(2) $\frac{d}{dx}\{c.f(x)\}=c.\frac{d}{dx}f(x)$, जहाँ c अचर है । अर्थात् अचर राशि x फलन का अवकलन, अचर राशि तथा उस फलन के अवकलन के गुणनफल के बराबर होता है ।

(3) $\frac{d}{dx}\{f(x)\pm g(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)\pm\frac{d}{dx}g(x)$

अर्थात् दो फलनों का योगफल (अथवा अन्तर) का अवकलन उन फलनों के अवकलनों के योगफल (अथवा अन्तर) के बराबर होता है ।

(4) $\frac{d}{dx}\{f(x).g(x)\}=f(x).\frac{d}{dx}g(x).\frac{d}{dx}f(x)$ अर्थात् दो फलनों के गुणनफल का अवकलन, प्रथम फलन x द्वितीय फलन का अवकलन + द्वितीय फलन x प्रथम फलन का अवकलन के बराबर होता है ।

(5) $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{g(x).\frac{d}{dx}f(x)-f(x).\frac{d}{dx}g(x)}{\{g(x)\}^2}$

अर्थात् दो फलनों के भागफल का अवकलन

$= \frac{\text{हर x अंश का अवकलन } - \text{ अंश x हर का अवकलन}}{\text{(हर)2}}$

(6) फलन के फलन का अवकलन अर्थात श्रृंखला नियम:-

यदि y=f(t) तथा t=g(x) हो तो, $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$

अर्थात् यदि y किसी चर t का फलन है तथा चर t किसी तीसरे चर x का फलन है एवं का तीसरे चर x के सापेक्ष अवकलन, y के सापेक्ष अवकलन तथा t का x के सापेक्ष अवकलन के गुणनफल के बराबर होता है । इस नियम को श्रृंखला नियम भी कहते है ।

उपर दिये गये अवकलन के मानक सूत्र तथा अवकलन के मूल नियमों का प्रयोग करते हुए किसी भी फलन का अवकलन सरलता से ज्ञात किया जा सकता है । निम्नलिखित उदाहरणों से आप भली-भाँति समझ सकेंगे ।

उदाहरण 1.19 : निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए:

(i)Y=$\frac{1}{x^3}$ (ii) y=$x^{5/2}$ (iii) y=$4x^2$-2x+5

हल: (i) y=$\frac{1}{x^3}$ या y=x^{-3}

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^{-3})=-3x^{-3-1}$ $\left(\because \frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}\right)$

$=-3x^{-4}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{3}{x^4}$

(ii) $y=x^{5/2}\rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^{5/2})=\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}$ $\left(\because \frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}\right)$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{5}{2}x^{3/2}$$

(iii) $y=4x^2-2x+5 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(4x^2-2x+5)$

$$=\frac{d}{dx}(4x^2)-\frac{d}{dx}(2x)+\frac{d}{dx}(5)$$

$$=4\frac{d}{dx}(x^2)-2\frac{d}{dx}(x)+0$$

$$=4X\,2x-2.1+0$$

=8x-2

उदाहरण 1.20 : यदि $y=\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिये ।

हल : दिया हुआ $y=\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}\left\{\frac{(a^2-x^2)}{(a^2+x^2)}\right\}=\frac{(a^2+x^2)\frac{dy}{dx}(a^2-x^2)-(a^2-x^2)\frac{dy}{dx}(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^2}$$

$$=\frac{(a^2+x^2)(0-2x)-(a^2-x^2)(0+2x)}{(a^2+x^2)^2}$$ {∵ a, एक अचर राशि है

$\therefore \frac{dy}{dx}$(a^2)=0}

$$=\frac{-2a^2-2x^3-2a^2x+2x^3}{(a^2+x^2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-4a^2x}{(a^2+x^2)^2}$$

उदाहरण 1.21 : निम्न फलन का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{6x^5-7x^3+9}}$$

हल : माना y= $\frac{1}{\sqrt[3]{6x^5-7x^3+9}}$

या $y=(6x^5-7x^3+9)^{-1/3}$ ....(1)

पुन: माना $u=6x^5-7x^3+9$

तब $y=u^{-1/3}$ तथा $u=6x^5-7x^3+9$ ......(2)

यहाँ y,u का फलन है तथा y,u का फलन है।

$$\therefore \frac{dy}{du}=\frac{d}{du}(u^{-1/3})=\frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}-1}=-\frac{1}{3}u^{-4/3}$$

$$\frac{d}{dx}=\frac{d}{dx}(6x^5-7x^3+9)$$

तथा $=6.5x^4-7.3x^2+0$

$30x^4-21x^2$

अब श्रृंखला नियम का उपयोग करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=-\frac{1}{3}u^{-4/3}.(30x^4-21x^2)$$

$$=-\frac{1}{3}(6x^5-7x^3+9)^{-4/3}.(30x^4-21x^2)$$ उत्तर

$$=-\frac{1}{3}(30x^4-21x^2).(6x^5-7x^3+9)^{-4/3}$$

वैकल्पिक विधि- माना $y=\frac{1}{3\sqrt{6x^5-7x^3+9}}$

या y=(6x^5-7x^3+9$^{)-1/3}$

दोनो पक्षों का म् के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(6x^5-7x^3+9)^{-1/3}$$

$$=-\frac{1}{3}(6x^5-7x^3+9^{-\frac{1}{3}-}1.\frac{d}{dx}(6x^5-7x^3+9)$$

$$=-\frac{1}{3}(6x^5-7x^3+9)^{-\frac{4}{3}}.(6.5x^4-7.3x^2+0)$$ उत्तर

$$=-\frac{1}{3}(6x^5-7x^3+9)^{-\frac{4}{3}}.(30x^4-21x^2)$$

$$=-\frac{1}{3}(30x^4-21x^2)(6x^5-7x^3+9)^{-4/3}$$

उदाहरण 1.22 : यदि y=log(4x^2-5x+3) है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

हल : दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\{\log(4x^2-5x+3)\}$$

$$=\frac{1}{(4x^2-5x+3)}.\frac{d}{dx}(4x^2-5x+3)\quad\left\{\because\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x}\right\}$$

$$= \frac{(4.2x - 5.1 + 0)}{(4x^2 - 5x + 3)}$$ {फलन का फलन सूत्र का प्रयोग करने पर}

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{8x - 5}{(4x^2 - 5x + 3)}$$ उत्तर

उदाहरण 1.23 : यदि y= (2x - 9) $(3x^2+ 2)$ (x^3+7) है तो, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

हल: यहाँ पर दिया गया फलन, तीन फलनों के गुणनफल के रूप में दिया गया है । जब कोई फलन दो से अधिक फलनों का गुणनफल अथवा भागफल के रूप में हो तो लघुगुणक की सहायता से दिये गये फलन का अवकलन सरलता से ज्ञात कर सकते है । अत: दिये गये फलन का लघुगणक लेने पर

$\log y = \log\{(2x-9)(3x^2+2)(x^3+7)\}$

$\Rightarrow \log y = \log(2x-9) + \log(3x^2+2) + \log(x^2+7)$

दोनों पक्षों का प्र के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dy}(\log y) = \frac{d}{dx}\log(2x-9) + \frac{d}{dx}\log(3x^2+2) + \frac{d}{dx}\log(x^3+7)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}(\log y)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2x-9)}\frac{d}{dx}(2x-9) + \frac{1}{(3x^2+2)}.\frac{d}{dx}(3x^2+2) + \frac{1}{(x^3+7)}.\frac{d}{dx}(x^3+7)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{(2.1-0}{2x-9} + \frac{(3.2x+0)}{(3x^2+2)} + \frac{(3x^2+0)}{(x^3+7)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(2x-9)} + \frac{6x}{(3x^2+2)} + \frac{3x^2}{(x^3+7)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (2x-9)(3x^2+2)(x^3+7)\left\{\frac{2}{2x-9} + \frac{6x}{3x^2+2} + \frac{3x^2}{x3+7}\right\}$$

उत्तर

उदाहरण 1.24 : यदि $y=5x^4+e^{3x}-\log(3x^2+2x+2)+\sin(ax+b)$ है तो, ज्ञात

हल : दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5x^4) + \frac{d}{dx}(e^{3x}) - \frac{d}{dx}\log(3x^2+2x+2) + \frac{d}{dx}\{\sin(ax+b)\}$$

$$= 5.4x^3 + e^{3x}.\frac{d}{dx}(3x) - \frac{1}{(3x^2+2x+2)}.\frac{d}{dx}(3x^2+2x+2) + \cos(ax+b).\frac{d}{dx}(ax+b)$$

$$20x^3 + e^{3x}.3 - \frac{1}{(3x^2+2x+2)}.(3.2x+2.1+0) + \cos(ax+b).(a.1+0)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 20x^3 + 3e^{3x} - \frac{(6x+2)}{(3x2+2x+2)} + a\cos(ax+b)$$

उत्तर

1.4.4 अस्पष्ट फलनों का अवकलन (Differentiation of Implicit Functions)

जब कोई फलन $f(x,y)$ चरो x तथा y में इस प्रकार दिया हुआ हो कि फलन में से चरी को अलग नहीं किया जा सके, अथाrt दिये गये $f(x,y)=0$ को न तो हम $y=f_1(x)$ तथा न ही हम $x=f_2(y)$ के रूप में लिख सकें, तो ऐसे फलन अस्पष्ट फलन कहलाते है । अस्पष्ट फलन में स्वतंत्र व परतंत्र चरो की पहचान नहीं कर सकते । अत: अस्पष्ट फलन को अवकलन करने के लिए y को x का फलन मान कर प्रत्येक पद का x के सापेक्ष अवकलन करते है । प्राप्त परिणाम में से के गुणांकों को एकत्रित कर एवं अन्य सभी पदो को पक्षान्तर करके का मान ज्ञात कर लेते है ।

उदाहरण 1.25 : यदि $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ है, तो ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया हुआ है $xa^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$

Y को x का फलन मानते हुए, x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^n y}{dx^n}$$

$$\frac{d}{dx}(ax^2)+\frac{d}{dx}(2hx.y)+\frac{d}{dx}(by2)+\frac{d}{dx}(2gx)+\frac{d}{dx}(2fy)+\frac{dy}{dx=}=0$$

$$\Rightarrow a.2x+2h.\left\{x.\frac{dy}{dx}+y.\frac{dx}{dx}\right\}+b.2y.\frac{dy}{dx}+2g.1+2f.\frac{dy}{dx}+0=0$$

$$\Rightarrow 2ax+2hx\frac{dy}{dx}+2hy+2by\frac{dy}{dx}+2g+2f.\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow (2hx+2by+2f)\frac{dy}{dx}+2ax+2hy+2g=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2(ax+hy+g)}{2(hx+by+f)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{(ax+hy+g)}{(hx+by+f)}$$

उत्तर

उदाहरण 1.26 : यदि $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+......\infty}}}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(2y-1)\frac{dy}{dx}=1$$

हल : दिया हुआ $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+......\infty}}}$

या $y=\sqrt{x+y}$

{$\because$ y एक अनन्त पदो के वर्गमूल योग है एवं अनन्त पदो में एक पद कम कर देने पर भी फलन वही रहता है ।}

दोनो पक्षों का वर्ग करने पर

$Y^2=x+y$

दोनों पक्षों का, y को x का फलन मानते हुए, x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}(y^2)=\frac{d}{dx}(x+y)$$

$$\Rightarrow 2y,\frac{dy}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow (2y-1)\frac{dy}{dx}=1$$

1.4.5 लघुगणकीय अवकलन (logarithmic differentiation)

यदि कोई फलन, जिसका अवकलन करना हो का रूप $(\text{फलन})^{\text{फलन}}$ या फलन $[f(x)]^{\varnothing(x)}$ अर्थात फलन की घात फलन हो तो ऐसे फलनों का पहिले लघुगणक लिया जाता है फिर अवकलन करते है । यह प्रक्रिया लघुगणकीय अवकलन कहलाती है ।

उदाहरण 1.27 : यदि? $Y=x^x$ है तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया हुआ $Y=x^x$

दोनो तरफ लघुगणक (log) लेने पर

$Logy=logx^x=xlogx$

दोनो तरफ x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}(\log y)=\frac{d}{dx}(x.\log x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\log y).\frac{dy}{dx}=x.\frac{d}{dx}(\log x)+\log x.\frac{d}{dx}x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}=x.\frac{1}{x}+\log x.1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=(1+\log x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y(1+\log x)=x^x(1+\log x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=x^x(1+\log_e x)=x^x(\log_e e+\log_e x)\{\because \log_e e=1\}=x^x(\log_e ex)$$

उत्तर

उदाहरण 1.28 : यंदि $x^y=e^{x-y}$ है तो, प्रदर्शित कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$

हल : दिया हुआ $x^y=e^{x-y}$

दोनो तरफ लघुगणक लेने पर

$\log_e(x^y)=\log_e(e^{x-y})$

$\Rightarrow y\log x = (x-y)\log_e e$

$\Rightarrow y\log x = x-y$

$y\log x + y = x$ {$\because \log^e e=1$}

$\Rightarrow y(\log x+1) = x$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{(1+\log x)}$$

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left\{\frac{x}{(1+\log x)}\right\}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x).\frac{dy}{dx} - x.\frac{dy}{dx}(1+\log x)}{(1+\log x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x).1 - x.\left(0+\frac{1}{x}\right)}{(1+\log x)^2}$$

$$= \frac{1+\log x-1}{(1+\log x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

बोध प्रशन1.4 (क)

1.निम्नलिखित फलनों का अवकलन कीजिए:

(i) $y = x+\frac{1}{x}$ (ii) $y = xe^x$

(iii) $y = x^3+3x^2+2x+1$

(iv) $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

2. निम्न लिखित फलनों से $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

$(i) y = (ax)^n + b^n$ $(ii) y = (ax)^n + b^n$

$(iii) \log\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)$ $(iv) y = x^{ex}$

$(v) x^2+y^2-6x-4y=0$

3.यदि $y=e^{x+e}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1-y}$

नोट :- कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर, अन्त मे दिया गये उत्तरों से मिलान कर लेवे।

यदि y=f(x), पर x का फलन हो , तो y का x के सापेक्ष अवकलन गुणांक $\frac{dy}{dx}$ होता है तथा वह अवकलन गुणांक x का फलन होता है | यदि $\frac{dy}{dx}$ का फिर से x के आवेश निरूपित करते है| इसी प्रकार द्‌वितीय क्रम के अवकलज का पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर प्राप्त परिणाम, तृतीय क्रम का अवकलज कहलाता है तथा इसे $\frac{d^3y}{dx^3}$ से निरूपित करते है । इसी क्रम में बढ़ते हु ए यदि (n-1) वें अवकलज का पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर प्राप्त परिणाम x वें क्रम का अवकलज कहलाता है तथा इसे $\frac{d^ny}{dx^n}$ से निरूपित करते है । उपरोक्त अ परिणामों अर्थात् $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}......\frac{d^ny}{dx^n}$ आदि को उत्तरोतर अवकलन गुणांक (Successive Differential Coefficients) भी कहते है । यदि y=*f*(x) हो तो y का x के सापेक्ष उत्तरोत्तर अवकलन गुणांकों के अन्य संकेतन :

$$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3},.......\frac{d^ny}{dx^n}$$

या $\quad y_1, y_2, y_3, ...y_n$

या $\quad dy, d^2y, d^3y, ...d^ny$

या $\quad f'(x), f''(x), f'''(x), ...f^{(n)}(x)$ इत्यादि ।

उदाहरण 1.29 : यदि y=x^2e^x हो, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया हु आ y=x^2e^x

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^2.e^x) \qquad = x^2\frac{de^x}{dx}+e^x.\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2.e^x + e^x.2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^x(x^2+2x)$$

पुन: X के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left\{e^x.(x^2+2x)\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=e^x.\frac{d}{dx}(x^2+2x)+(x^2+2x).\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= ex.(2x+2)+(x^2+2x).e^x$$

$$= e^x\{2x+2+x^2+2x\}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=e^x\{x^2+4x+2\} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 1.30 : यदि $y=(x^2-1)^n$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$(x^2-1)y_2+2(1-n)xy_1-2ny=0$

हल : दिया हुआ $y=(x^2-1)^n$ .... (1)

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^2-1)^n$$

$$\Rightarrow y_1=n(x^2-1)^{n-1}.\frac{d}{dx}(x^2-1)$$

$$=n(x^2-1)^{n-1}.(2x-0)$$

$$\Rightarrow y_1=2nx(x^2-1)^{n-1}=2nx(x^2-1)n.(x^2-1)^{-1}$$

$$\Rightarrow y_1=\frac{2nx(x^2-1)^n}{(x^2-1)}=\frac{2nxy}{(x^2-1)}$$ {समीकरण (1) से}

$$\Rightarrow (x^2-1)y_1=2nxy.............(2)$$ (वज्र गुणन से)

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष पुन: अवकलन करने पर

$$\frac{d}{dx}\left\{(x^2-1)y_1\right\}=\frac{d}{dx}\left\{2nxy\right\}$$

$$\Rightarrow (x^2-1).\frac{d}{dx}(y_1)+y_1.\frac{d}{dx}(x^2-1)=2n\frac{d}{dx}(x.y)$$

$$\Rightarrow (x^2-1)y_2+y_1.(2x-0)=2n\left\{x.\frac{dy}{dx}+y.1\right\}$$

$$\Rightarrow (x^2-1)y_2+2xy_1=2n\left\{xy_1+y\right\}$$

$$\Rightarrow \left(x^2-1\right)y_2+2xy_1=2nxy_1+2ny$$

$$\Rightarrow (x^2-1)y_2+2xy_1-2nxy_1-2ny=0$$

$$\Rightarrow (x^2-1)y_2+2(1-n)xy_1-2ny=0$$

बोध प्रश्न : 1.4 (ख)

1. निम्न लिखित फलनों का द्वितीय क्रम का अवकलन ज्ञात कीजिए:
   $(i)\, y=x^2\log x \qquad (ii)\, y=a\sin x+b\cos x$
2. यदि $y=Ae^{ax}+B^{e-ax}$ हो,तो कीजिए कि $y_2-a^2y=0$
3. यदि $y=\left\{x+\sqrt{1+x^2}\right\}m,$ सिद्ध कीजिए कि:

   $(1+x^2)y_2+xy_1-m^2y=0$

नोट :- कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर, अन्त में दिये गये उत्तरों से मिलान कर लेगें ।

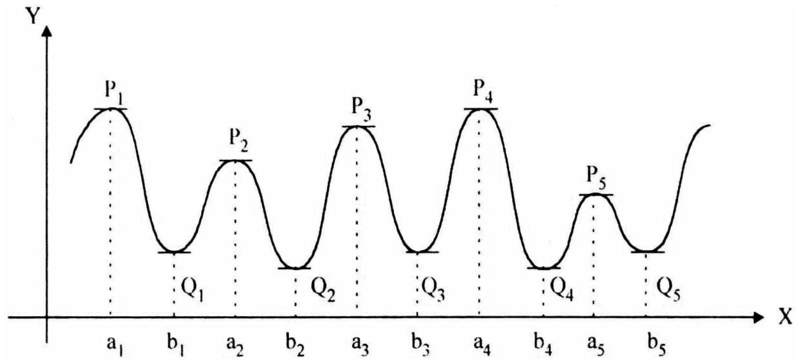
1.5. उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ फलन (Maxima And Minima of Functions)

1.5.1 एकदिष्ट वर्धमान तथा ह्रासमान फलन (Monotonically Increasing and Decreasing Function)

एक दिये हुए अन्तराल में एक फलन $y=f(x)$, एकदिष्ट वर्धमान कहलाता है यदि चर x के बढ़ने से फलन भी बढ़ता है । यदि दिये हुए अन्तराल में x_1,x_2, चर x के दो मान इस प्रकार है कि $x_1>x_2$ है तो $f(x_1)\geq f(x_2)$ होने पर फलन $y=f(x)$ एकदिष्ट वर्धमान कहलायेगा । यदि $x_1>x_2$ होने पर $f(x_1)>f(x_2)$ हो तो फलन निश्चित रूप से वर्धमान (Strictly increasing) कहलाता है ।

इसी प्रकार यदि $x_1>x_2$ होने पर $f(x_1)\leq f(x_2)$ हो तो फलन उस अन्तराल में एकदिष्ट ह्रासमान कहलाता है अर्थात् चर x के बढ़ने से फलन घटता है । यदि $x_1>x_2$ होने पर $f(x_1)<f(x_2)$ हो तो फलन निश्चित रूप से ह्रासमान (strictly decreasing) कहलाता है ।

माना $y=f(x)$,x का एक फलन है । इस फलन का कल्पित वक्र चित्र 1.9 में प्रदर्शित है ।



चित्र 1.9 उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ

कोई फलन, बिन्दु x=a माना पर उच्चिष्ठ कहलाता है यदि फलन का मान बिन्दु x=a पर $f(a)$, बिन्दु x=a के लघु सामीप्य में दोनो ओर उन सभी मानों से बड़ा हो जो x के प्रत्येक मान के लिए $f(x)$ ग्रहण कर सकता है । चित्र 1.9 में बिन्दु p_1,p_2,p_3,p_4,p_5 क्रमशः $x=a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$ पर उच्चिष्ठ है । उच्चिष्ठ बिन्दु के बाँयी ओर फलन वर्धमान तथा दाँयी ओर ह्रासमान होता है । इसी प्रकार फलन, बिन्दु a=b (माना) पर निम्निष्ठ कहलाता हे यदि फलन का मान बिन्दु x=b पर, $f(b)$, , बिन्दु x=b के लघु-सामीप्य में दोनो ओर उन सभी मानो से छोटा हो जो x के प्रत्येक मान के लिए $f(x)$ ग्रहण कर सकता है । चित्र 1 .9 में बिन्दु Q1, Q2, Q3, Q4, Q5 क्रमशः $x=b_1,b_2,b_3,b_4,b_5$ पर निम्निष्ठ है । निम्निष्ठ बिन्दु के बाँयी ओर फलन ह्रासमान तथा दाँयी ओर फलन वर्धमान होता है ।

अवकलन के द्वारा भी किसी फलन का किसी बिन्दु पर उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात किया जा सकता है । ' 'यदि फलन $y=f(x)$ का किसी बिन्दु $x=x_1$ (माना) पर प्रथम अवकलन का मान शून्य हो जाए तो दिया गया फलन बिन्दु $x=x_1$। पर उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ होता है तथा पुन: उसी फलन का द्वितीय अवकलन का मान उसी बिन्दु $x=x_1$ पर यदि ऋणात्मक हो जाए तो बिन्दु $x=x_1$ पर उच्चिष्ठ तथा यदि बिन्दु $x=x_1$ पर धनात्मक हो जाए तो फलन निम्निष्ठ होगा

टिप्पणी :

1. एक फलन के कई उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ बिन्दु हो सकते है ।
2. उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ बिन्दु को चरम बिन्दु (extreme point) भी कहते है ।

1.5.2 फलन का उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात करने की क्रिया विधि (Working Rule for Finding Maxima and Minima of a Function)

किसी दिये गए फलन का उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित क्रिया-विधि काम में लेते है ।

(i) दिये गये फलन $f(x)$ को y के बराबर अर्थात् $y=f(x)$ मान लीजिए।

(ii) सर्वप्रथम $\frac{dy}{dx}$ (प्रथम अवकलन) ज्ञात करके उस प्रथम अवकलन को शून्य के बराबर रख कर समीकरण $\frac{dy}{dx}=0$ को हल करके x के सभी सम्भव मान ज्ञात कीजिए|

(iii) $x=\frac{4}{3}$ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए तथा चरण (ii) में प्राप्त x के प्रत्येक मान के लिए $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए । अब यदि $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ऋणात्मक हो तो उस x के मान पर फलन उच्चिष्ठ होगा तथा यदि $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान धनात्मक हो तो उस x के मान पर फलन निम्निष्ठ होगा अर्थात्

यदि $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) <0$

$X=x_1$ पर फलन उच्चिष्ठ होगा तथा

यदि $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x1} >0$

तो $x=x_1$पर फलन निम्निष्ठ होगा ।

टिप्पणी : फलन का उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ बिन्दु ज्ञात करके, फलन का अधिकतम अथवा न्यूनतम मान ज्ञात किया जा सकता है । इसके लिए फलन $y=f(x)$ में उच्चिष्ठ या

निम्निष्ठ बिन्दु का मान रखने पर उस बिन्दु के संगत अधिकतम अथवा निम्नतम मान ज्ञात कर लेते है ।

उदाहरण 1.31 : फलन x^3-2x^2+6 के अधिकतम तथा न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए ।

हल : माना $y= x^3-2x^2+6$

$$\because \frac{dy}{dx}=3x^2-4x \qquad ......(1)$$

अब उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के लिए $\frac{dy}{dx}=0$ रखने पर

$$3x2-4x=0$$
$$\Rightarrow x(3x-4)=0$$
$$\Rightarrow x=0 \text{ या } x=\frac{4}{3} \qquad ......(2)$$

पुन: समीकरण (1) से

$$\frac{d^2y}{dx^2}=6x-4 \qquad ......(3)$$

बिन्दु x=2 पर

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0} \text{पर} = 6.0-4=-4<0 \text{ (ऋणात्मक)} \qquad ......(4)$$

अत: बिन्दु x=0 पर फलन उच्चिष्ठ होगा

बिन्दु $x=\frac{4}{3}$ पर

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=4/3} \text{पर} \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=4/3}$$

=4>0 (धनात्मक) ......(5)

अत: बिन्दु x=4/3 पर फलन निम्निष्ठ होगा ।

पुन: फलन का अधिकतम मान के लिए दिये गये फलन में x=0 रखने पर

$$f(x)]_{x=0} = [x_3-2x_2+6]_{x=0}$$

$$\Rightarrow f(x)]_{\text{अधिकतम}}=6 \qquad ....(6)$$

तथा $x=\frac{4}{3}$ फलन का न्यूनतम मान के लिए

$$=2\sqrt{3} \quad f(x)]_{x=4/3} = [x^3-2x^2+6]^{x=4/3}$$

$$=\left(\frac{4}{3}\right)^3-2\left(\frac{4}{2}\right)^2+6$$

$$f(x)]_{\text{न्यूनतम}} = \frac{130}{27} \text{ उत्तर} \qquad ....(7)$$

उदाहरण 1.32 : फलन $x^3-12x^2+36x+17$ का अन्तराल 1≤x≤10 में उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए ।

हल : माना y= $x^3-12x^2+36x+17$

तब $\frac{dy}{dx}=3x^2-24x+36=3(x^2-8x+12)$ ....(1)

या $\frac{dy}{dx}=3(x-2)(x-6)$

अत: उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के लिए $\frac{dy}{dx}=0$ रख कर x के लिए हल करने पर

3(x-2)(x-6)=0

$\Rightarrow x=2$ अथवा x=6 ......(2)

यहाँ पर दिये गये फलन का अधिकतम तथा न्यूनतम दिये गये अन्तराल 1≤x≤10 में ज्ञात करने के लिए दिये गये फलन में x के मान 1,2,6 तथा 10 रखने पर क्रमश:

f(1)=42, f(2)=49, f(6)=17 तथा f(10)=17

अत: उपरोक्त फलन के मानो से दिये गये फलन का न्यूनतम मान 17 तथा अधिकतम मान 177 है ।

उदाहरण 1.33 : फलन y=sin2x-x $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ बिन्दु ज्ञात करते हुए फलन का अधिकतम तथा न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया हुआ y=sin2x-x

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\sin 2x)-\frac{d}{dx}(x)$$

$$=\cos 2x,\frac{d}{dx}(2x)-1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=2\cos 2x-1$$ ....(1)

अब उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के लिए $\frac{dy}{dx}=0$ रख कर x के लिए हल करने पर

$$2\cos 2x-1=0$$

$$\Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$ $\{\because \cos 60^0=1/2$ तथा $60^0=\pi/3\}$

$$\Rightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{6} \text{ या } -\frac{\pi}{6}$$ ......(2)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(2\cos 2x-1)$$

पुन: (1) से $=-2\sin 2x.\frac{d}{dx}(2x)-0$ ......(3)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=4\sin 2x$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\pi/6}=-4\sin 2.\frac{\pi}{6}$$

$=-4\sin 2.\frac{\pi}{6}$

$=-2\sqrt{3}$ <0 (ऋणात्मक)

अत: x=$\pi/6$ पर फलन उच्चिष्ठ होगा तथा अधिकतम मान के लिए

(y)अधिकतम $=\sin.\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$

$=\sin 2.\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow (y)$ अधिकतम $=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$ उत्तर ....(4)

पुन: बिन्दु $x=-\pi/6$ पर

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=-\pi/6}=-4\sin 2.(-\pi/6)$$

$=-4\sin(-\pi/3)$

$=2\sqrt{3}$ >0 (धनात्मक)

अत: पर फलन निम्निष्ठ होगा तथा न्यूनतम मान के लिए

(y)न्यनतम $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ $=\sin 2.(-\pi/6)-(-\pi/6)$

$=\sin(-\pi/3)+\pi/6$

$=-\sin(\pi/3)+\pi/6$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$ उत्तर

बोध प्रश्न 1.4 (ग)

1. फलन x^5- $5x^4$ + $5x^3$ - 10 का अन्तराल 0<X<10 मे उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात कीजिए ।
2. फलन f(X) =$2X^2$-X^3 के अधिकतम तथा न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए ।

3. फलन X^3-18 X^2+96 का अन्तराल (0,9) मेंअधिकतम तथा न्युनतम मान ज्ञात कीजिए |

नोट:- कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर, अन्त मे दिये गये उत्तरों से मिलान कर लेवे ।

1.6 आंशिक अवकलन (Partial Differentiation)

अब तक हमने ऐसे फलनों के अवकलन से संबंधित अध्ययन किया है जिनमें केवल एक ही स्वतंत्र चर था । परन्तु बहुधा व्यवहार में ऐसे फलनों की जरूरत पड़ती है जो एक से अधिक स्वतंत्र चरो पर आधारित होते है । उदाहरणार्थ एक आयतफलकी का आयतन उसकी लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई पर निर्भर करता है । सामान्यतया यदि कोई फलन दो चरो x तथा y का फलन हो तो उसे $z=f(x, y)$ से निरूपित किया जाता है तथा यदि कोई फलन तीन चरो x, y तथा z का फलन हो तो उसे $u=f(x, y, z)$ से निरूपित किया जाता है ।

जब कोई फलन दो या दो से अधिक स्वतंत्र चरों का फलन हो तथा उस फलन का किसी एक स्वतंत्र फलन के सापेक्ष अवकलन गुणांक को आशिक अवकलन गुणांक कहते है । आशिक अवकलन गुणांक ज्ञात करते समय जिस स्वतंत्र चर के सापेक्ष फलन का अवकलन करना होता है उस चर के अलावा बाकी सभी चरों को अचर मान कर साधारण अवकलन गुणांक (एक चरीय फलन का अवकलन गुणांक) ज्ञात कर लेते है ।

यदि $z=f(x, y)$, दो चरो x तथा y का फलन हो तो

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}$ की यह सीमा अगर विद्‌यमान हो, तो इसे z या (x, y) का x के सापेक्ष आशिक अवकल गुणांक कहते है तथा इसे $\frac{\partial z}{\partial x}$ या $\frac{\partial f}{\partial x}$ या f_x से निरूपित करते है (इसे डेल्टा जेड बाई डेल्टा एक्स या डेल्टा एफ बाई डेल्टा एक्स या एफ-एक्स पढ़ा जाता है) ।

इसी प्रकार $\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y)-f(x,)}{\Delta y}$ की, यदि यह सीमा विद्‌यमान हो, तो इसे z या $f(x, y)$ का y के सापेक्ष आशिक अवकल गुणांक कहते है तथा इसे $\frac{\partial z}{\partial y}$ या $\frac{\partial z}{\partial y}$ या f_4 से निरूपित करते है ।

उपर्युक्त से यह निष्कर्ष निकलता है कि $f(x, y)$ का किसी एक चर के सापेक्ष आशिक अवकल गुणांक, उस फलन का दूसरे चर को अचर मानते हुए, प्रथम चर के सापेक्ष साधारण अवकल गुणांक ही है । यदि z, n चरो $x_1,x_2x_3,...x_n$ का फलन हो, तो z का x_1 के सापेक्ष आशिक अवकल गुणांक x_1 के सापेक्ष साधारण अवकल गुणांक ही है जबकि अन्य चर

$X_2,x_3,....x$ को अचर मान लिया जाता है तथा इसे $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ से निरूपित करते है । यदि फलन $z=f(x, y)$ के आशिक

अवकल गुणांक $\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$ हो तथा ये x तथा y के फलन हो तो पुन: इनका आशिक अवकलन करने पर द्‌वितीय क्रम के आशिक अवकल गुणांक कहलाते है ।

अत: $\frac{\partial z}{\partial x}$ व $\frac{\partial z}{\partial y}$ का x के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ तथा $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ प्राप्त होता है । इसी प्रकार $\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$ का y के सापेक्ष आशिक अवकल गुणांक $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ तथा $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ प्राप्त होते है।

संकेतन

(i) $\frac{\partial z}{\partial x}$ या $\frac{\partial f}{\partial x}$ या f_x तथा $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2$ $\frac{\partial z}{\partial y}$ या $\frac{\partial f}{\partial y}$ या fy - प्रथम आशिक अवकलन

(ii) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ या $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ या f_{xx}, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ या $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ या f_{xy}

तथा $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ या $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ या f_{yy}, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ या $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ या f_{xy} इत्यादि । (द्‌वितीय आंशिक अवकलन)

अंशिक अवकलजो का क्रम विनिमेय गुणधर्म:-

यदि z=f(x, y) के आशिक अवकलज सतत हो तो $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

उदाहरण 1.34: यदि $z=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ हो, तो $\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$ ज्ञात कीजिए ।

हल: दिया हुआ $z=ax^2+hxy+by^2+2gx+2fy+c$ ....(1)

दोनो पक्षों का म् के सापेक्ष आशिक अवकलन (y को अचर मानते हुए) करने पर

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c)$$

$$=a.2x+2hy.1+0+2g.1+0+0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2ax+2hy+2g \quad \text{उत्तर} \qquad ....(2)$$

पुन: समीकरण (1) के दोनों पक्षों का y के सापेक्ष आंशिक अवकलन (x को अचर मानते हुए) करने पर

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c)$$

$$=0+2hx.1+2by+0+2f+0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2hx+2by+2f \qquad \text{........(3)}$$

उदाहरण 1.35: यदि $z=x^4+2x^2y^2+y^4$ हो तो क्रम विनिमेय $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ की पुष्टि कीजिए ।

हल : दिया हुआ $z=x^4+2x^2y^2+y^4$ ......(1)

X के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3+4xy^2 \qquad \text{........(2)}$$

पुन: (1) का y के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर ।

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4x^2y+4y^3 \qquad \text{.........(3)}$$

अब समीकरण (2) का y के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(4x^3+4xy^2)=0+4.x.2y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=8xy \qquad \text{..........(4)}$$

इसी प्रकार समीकरण (3) का x के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(4x^2y+4y^3)=4.2x.y+0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=8xy \qquad \text{..........(5)}$$

समीकरण (4) तथा (5) स्पष्ट है होता है कि

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

उदाहरण 1.36 : यदि $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ हो तो प्रदर्शित करो कि

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

हल : दिया हुआ $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ ....(1)

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}-1}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.(2x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \qquad \text{........(2)}$$

पुन x के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{x.(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left\{x.\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} + (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}.\frac{\partial}{\partial x}x\right\}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$= -\left\{x.\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}-1}.\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2) + (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.1\right\}$$

$$= -\left\{-\frac{3x}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}.(2x) + (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right\}$$

$$= -\left\{-3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} + (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} - (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \qquad \text{........(3)}$$

इसी प्रकार सममिति (symmetry) से हम प्राप्त कर सकते है कि

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} - (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \qquad \text{.........(4)}$$

तथा $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} - (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$ ....(5)

(3), (4) तथा (5) का योग करने पर

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} + 3y^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$+3z^2(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} - 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(x^2+y^2+z^2) - 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 0$$

उदाहरण 1.37 : फलन $u=x^2+2xy+y^2+3$ के द्वितीय क्रम के सभी अवकलज ज्ञात कीजिए ।

हल : दिया हुआ $u=x^2+2xy+y^2+3$ .....(1)

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+2y \qquad \text{.........(2)}$$

पुन: x के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर ।

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2 \qquad \text{............(3)}$$

समीकरण (2) का y के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2x+2y)=0+2.1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=2 \qquad \text{.............(4)}$$

पुन: समीकरण (1) का y के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2+2xy+y^2+3)=2x+2y \qquad \text{..............(5)}$$

पुन:x के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2x+2y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2 \qquad \text{............(6)}$$

इसी प्रकार समीकरण (5) का x के सापेक्ष आशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2x+2y)=2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=2 \qquad \text{.............(7)}$$

1.6.1 समघातीय फलन) Homogeneous Function):

यदि दो या दो से अधिक चरो का फलन, एक व्यंजक के रूप में इस प्रकार हो कि इसके प्रत्येक पद में चरो की घातों का योग सदैव समान रहता है तो वह फलन समघातीय फलन कहलाता है तथा चरों की घात का योग समघातीय फलन की घात होती है । उदाहरणार्थ फलन $f(x,y)=x^3+4x^2y+2xy^2+y^3$ एक तीन घात का समघातीय फलन है ।

यदि फलन f(x,y), एक n घात का समघातीय फलन हो तो $f(kx,ky)=k^n f(x,y)$

उदाहरणार्थ यदि $f(x,y)=x^3+4x^2y+2xy^2+y^3$ हो तो यदि x को kx तथा y को ky प्रतिस्थापित करने पर

$F(kx,ky) \quad =(kx)^3+4(kx)^2(ky)+2(kx)(ky)^2+(ky)^3$

$=k^3x^3+4k^3x^2y+2k^3xy^2+k^3y^3$

$=k^3(x^3+rx^2y+2xy^2+y^3)$

$\Rightarrow (kx,ky) =k^3 f(x,y)$

अतः f(x,y), तीन घात का समघातीय फलन है ।

व्यापक रूप में, $u=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+a_2x^{n-2}y^2+a_3x^{n-3}y3+.....+a_ny^n$

n घात का समघातीय फलन है जिसमें प्रत्येक पद की घात n है) अर्थात प्रत्येक पद में x तथा y के घातांकों का योग n है(u निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है ।

$$u = x^n\left[a_o + a_1\left(\frac{y}{x}\right) + a_2\left(\frac{y}{x}\right) + a_3\left(\frac{y}{x}\right)^3 + ...+ a_n\left(\frac{y}{x}\right)^n\right]$$

अथवा

$$u = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$$

इस प्रकार, x तथा y में व्यंजक को n घात का समघातीय फलन कहा जाता है यदि उसे $x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$ के रूप में लिखा जा सकता है ।

1.6.2 समघात फलन के लिए ऑयलर का प्रमेय (Euler's Theorem on Homogeneous Function)

कथन -यदि u=f(x,y), x तथा y चरों का n घात का एक समघातीय फलन हो तो

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nu$$

उपपति -चूंकि u=f(x,y),n घात का समघातीय फलन है अत :इसे निम्नप्रकार से लिख सकते है ।

$U=x^nF(y/x)$

अब दोनो पक्षी का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर ......(1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{x^n . f(y/x)\right\} = x^n \frac{\partial}{\partial x}\left\{f(y/x)\right\} + f(y/x).\frac{\partial}{\partial x}(x^n)$$

$$= x^n . f^1\left(\frac{y}{x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) + F\left(\frac{y}{x}\right).nx^{n-1}$$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = x^n.F^1\left(\frac{y}{x}\right).\left(-\frac{y}{x^2}\right) + nx^{n-1}F(y/x)$$

.........(2)

$$= x^{n-2} f^1\left(\frac{y}{x}\right) + nx^{n-1}F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\left\{\because \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-y}{x^2}\right\}$$

पुन :समीकरण (1) का दोनो पक्षों का y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{x^n . f(y/x)\right\} = x^n \frac{\partial}{\partial y}\left\{F\left(\frac{y}{x}\right)\right\} = x^n . F^1\left(\frac{y}{x}\right) . \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^n . F^1\left(\frac{y}{x}\right) . \frac{1}{x} = x^{n-1} F^1\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3).....$$

अब (2) को x से तथा (3) को y से गुणाकर, योग करने पर

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} x\left\{-yx^{n-2}F^1\left(\frac{y}{x}\right) + nx^{n-1}F\left(\frac{y}{x}\right)\right\} + y\left\{x^{n-1}F^1\left(\frac{y}{x}\right)\right\}$$

$$= yx^{n-1}F^1\left(\frac{y}{x}\right) + nx^n F\left(\frac{y}{x}\right) + yx^{n-1}F^1\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= nx^n F\left(\frac{y}{x}\right)$$

=nu

$$\Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nu$$

टिप्पणी (1) : आयलर के उपरोक्त प्रमेय को $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$, जहाँ $f(x,y)$, एक n घात का समघातीय फलन है, के रूप में भी लिखा जाता है ।

(ii) यदि(fx,y,z), तीन चरो x,y तथा z में n घात का समघातीय फलन हो तो

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial f} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf$$

(iii) यदि $f(x_1,x_2,x_3,.........x_m)$, m चरो $x_1,x_2,x_3,.......x_m$ में n घात का समघातीय फलन हो तो

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_3} + ... + x_m\frac{\partial f}{\partial x} = n.f$$

उपप्रमेय : यदि फलन $f(x,y)$, चरो x तथा y में n घात का एक समघातीय फलन हो, तो

(i) $x\frac{\partial^2 f}{ax^2} + y\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = (n-1)\frac{\partial f}{\partial x}$

(ii) $x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (n-1)\frac{\partial f}{\partial y}$

(iii) $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=n(n-1)f$

उदाहरण 1.38 : फलन $u=x^3+3x^2y+4xy^2+y^3$ के लिए आयलर प्रमेय का सत्यापन कीजिए ।

हल : दिया हुआ $u=x^3+3x^2y+4xy^2+y^3$

यहाँ u,x तथा y में तीन घात का समघातीय फलन है अत :सत्यापन करना है कि

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}=3u \qquad .....(1)$$

अब u का क्रमश :x तथा y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy+4y^2 \qquad ....(2)$$

तथा $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+8xy+3y^2$ ....(3)

समीकरण (2) को x से तथा समीकरण (3) को y से गुणा करके जोड़ने पर

$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}=(3x^2+6xy+4y^2)+y(3x^2+8xy+3y^2)$

$=3x^3+6x^2y+4xy^2+3x^2y+8xy^2+3y^2)$

$=3x^3+9x^2y+12xy^2+3y^3$

$=3(x^3+3x^2y+4xy^2+y^3)$

$=3u$

$\Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3u$

अत :दिये हुए फलन के लिए ऑयलर प्रमेय का सत्यापन हुआ ।

उदाहरण 1.39 : यदि $u=x\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ हो, तो सिद्ध करो कि

$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u$

हल : दिया हुआ फलन $u=x\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

इसे हम लिख सकते है $u=x^1f\left(\frac{y}{x}\right)$ ....((1

अर्थात् u,x तथा y में एक घात का समघातीय फलन है । अत :ऑयलर प्रमेय से

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=1.u=u \text{ उत्तर}$$

उदाहरण : 1.40 यदि $u=\sin^{-1}\left[\frac{x^2+y^2}{x+y}\right]$ हो तो सिद्ध करो कि

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}=\tan u$$

हल :दिया हुआ u=sin$^{-1}\left[\frac{x^2+y^2}{x+y}\right]$

$$\Rightarrow \text{ sin u } \left[\frac{x^2+y^2}{x+y}\right]$$

$$\Rightarrow \text{ sin x } \left\{\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)}\right\}=x^1 f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ (1)......}$$

Sin, x u तथा y में एक घात का समघातीय फलन है ।

अत :ऑयलर के प्रमेय से

$$x\frac{\partial}{\partial u}(\sin u)+y\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial u}(\sin u)=1.\sin u$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{\partial}{\partial u}(\sin u).\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}(\sin u)\frac{\partial u}{\partial y}=\sin u \quad \text{\{श्रृंखला-नियम से\}}$$

$$\Rightarrow \quad x.\cos u.\frac{\partial u}{\partial x}+y.\cos u.\frac{\partial u}{\partial y}=\sin u$$

$$\cos u\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\sin u$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{\partial}{\partial u}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{(\sin u)}{\cos u}=\tan u$$

$$x\frac{\partial}{\partial u}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\tan u$$

1.7 सारांश (Summary)

1. यदि a^x=b) धातीकीय रूप (हो तो इसे $\log_a b=x$) लघुगणक के रूप (के द्वारा लिखा जाता है ।
2. $\log_a$(mn)=logm=logn
3. log$\left(\frac{m}{n}\right)$=logm-logn
4. log$(m)^n$=nlogm
5. $\log_a$ a=1 तथा $\log_a 1=0$

6. .रेखा y=ax=b में 'a' (x का गुणांक (को रेखा का ढलान तथा 'b' (अचर पद (को y-अक्ष पर काटे गये अन्त :खण्ड कहतें है ।

7. यदि y=f(x) कोई फलन हो तो

$\lim_{x\to\infty}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ को y का x के सापेक्ष अवकलन गुणांक कहते है तथा इसे $\frac{dy}{dx}$ से निरूपित कहते है ।

8. किसी फलन का प्रथम अवकलन शून्य के बराबर रख कर समीकरण को हल करते है । तत्पश्चात् दिये गये फलन का द्वितीय अवकलन ज्ञात करते है । अब यदि द्वितीय अवकलन का मान उपरोक्त समीकरण के हल के किसी मान पर ऋणात्मक आ जाये तो दिया गया फलन उस x के मान पर उच्चिष्ट होगा तथा यदि द्वितीय अवकलन का मान धनात्मक हो तो दिया गया फलन उस x के मान पर निम्निष्ट होगा ।

9. यदि कोई फलन दो या दो से अधिक स्वतन्त्र चरों का फलन हो तो किसी एक चर के सापेक्ष अवकलन आंशिक अवकलन कहलाता है तथा इसे $\frac{\partial f}{\partial x}$ या $\frac{\partial f}{\partial y}$ या $\frac{\partial f}{\partial z}$ इत्यादि से निरूपित करते है ।

10. यदि u= f)x,y(,n घात का x तथा y चरों का फलन हो तो आयॅलर के प्रमेय द्वारा

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=n.u$$

1.8 शब्दावली (Glossary)

परिमेय संख्या	–	Integer number
घातांक	–	Power, indices
संख्यात्मक	–	Numerical
व्यजंक	–	Expression
वास्तविक	–	Real
प्रणालियॉ	–	Systems
चर	–	Variable
निरूपित	–	Represent
बिन्दु	–	point
विशिष्ट	–	Special
एकदिष्ट	–	Strictly
वर्धमान	–	Inereasing
ह्रासमान	–	Decreasing
अन्तराल	–	Interval

सम्भवमान	–	Possible values
प्रमेय	–	Theorem
सत्यापन	–	Proof

1.9 सन्दर्भ ग्रन्थ(Bibliography)

1. सिंह, यू एन - .गणित कक्षा IX तथा कक्षा X, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
2. भागचन्दानी पी - .भौतिक रसायन विज्ञान, साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा
3. बंसल, जे .एल .भार्गव, एस .एल .तथा अग्रवाल, एस .एम - .अवकलन गणित -I तथा II, जयपुर पब्लिसिंग हाउस, जयपुर
4. .गोखरू, डी .सी - .प्रारम्भिक जैविक गणित जयपुर पब्लिसिंग हाउस, जयपुर

1.10 .अभ्यासार्थ प्रश्न) Exercise)

1. निम्नलिखित को लघुगणक के रूप में लिखिये:

   (i) $4^5=1024$ (ii) $(216)^{1/3}=6$ (iii) $10^{-4}=0.0001$

2. निम्न लिखित को घातांकीय रूप में लिखिये:

   (i) $\text{Log}_7 16807=5$ (ii) $\text{Log}_{10} 1000000=6$

   (iii) $\text{Log}_{10}(0.00000)=-6$

3. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिये:

   (i) $\log_8 4096$ (ii) $\log_5 78125$ (iii) $\log_{10}(0.00001)$

4. दिखाइए कि

   (i) $\log\left(\frac{a^2}{bc}\right)+\log\left(\frac{b^2}{ac}\right)+\log\left(\frac{c^2}{ab}\right)=0$

   (ii) $2\log\left(\frac{8}{45}\right)+3\log\left(\frac{25}{8}\right)-4\log\left(\frac{5}{6}\right)=\log 2$

   (iii) $\log_5 3.\log_3 4.\log_2 5=2$

5. लघुगणक सारणी का प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक संख्या का लघुगणक ज्ञात कीजिये ।

   (i) 6 (ii) 12.0567 (iii) 722.8 (iv) 0.2351 (v) 0.3006

   (vi) 0.004301 (vii) 0.00056

6. निम्नलिखित फलनों का अवकलन कीजिये:

   (i) y= $y=\frac{(1-x)^2}{x^2}$ (ii) $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

(iii) y=(3x^2+5)(2x^{3}x+7) (iv) $y=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$

7. निम्नलिखित फलनों से $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिये ।

(i) $y=\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ (ii) $y=\log\left\{\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right\}$

(iii) y=$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (iv) $y=x^a+a^x+x^x$

8. यदि y=$\left(\sqrt{x}\right)^{(\sqrt{x})^{(\sqrt{x})}}$

तो सिद्ध कीजिये कि $x\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{2-y-\log x}$

9. यदि y=$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ हो तो सिद्ध कीजिये कि

$(1-x^2)\frac{dy}{dx}+y=0$

10. यदि y=Asin mx+Bcos mx हो तो सिद्ध कीजिये कि $\frac{d^2y}{dx^2}+m^2y=1$

11. फलन)x-1)(x-2)(x-3) का निम्नतम / अधिकतम मान ज्ञात कीजिये ।

12. यदि u=xsin+y+sinx हो तो सिद्ध कीजिये कि $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2u}{xy\partial x}$

13. यदि z)x+y)=x^{2}y^2, तो सिद्ध करों:

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=4\left(1-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

14. फलन u=Sin-1$\left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$तो सिद्ध कीजिये कि

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\tan u.$$

बोध प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न 1.2 (अ)

1. (i) (log$_3^{81}$=4)	(ii) log$_{10}^{1000}$=3	(iii) log$_{128}^{2}$
(iv) log$_{16}$=1/4	(v) log$_{10}^{0.1}$=-1	(vi) log$_{10}^{(0.00001)}$= -5
2. (i) 5^4=625	(ii) 3^5=243	(iii) 4^0=1
(iv) $\bar{3}$10^4=10000	(v) 9$^{1/2}$=3	(vi) 10-^{3}=0.001

बोध प्रश्न 1.2 (ब)

1. (i) 2 (ii) 8 (iii) 5/2 (iv) 4 (v) -6

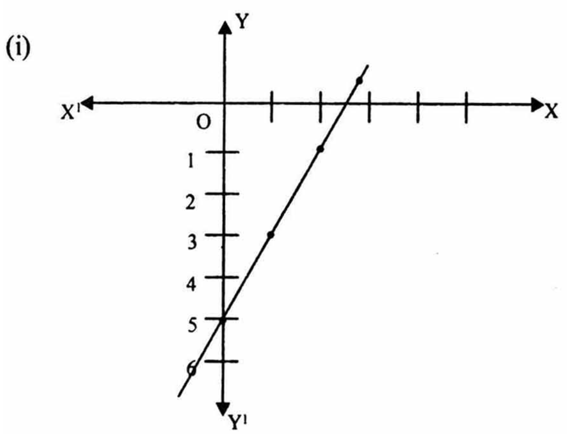
बोध प्रश्न 1.2 (स)

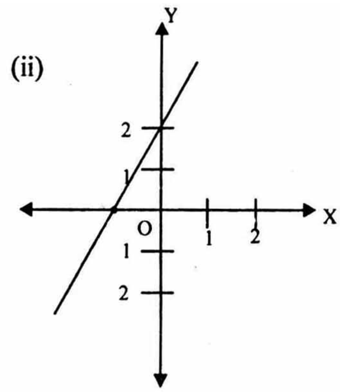
1. (i) 1 (ii) 3 (iii) $\bar{I}$ (iv) $\bar{3}$ (v) $\bar{5}$
2. (i) 3.0913 (ii) 1.0913 (iii) 2.3957 (iv) 0.0504
   (v) $\bar{3}.0792$ (vi) $\bar{4}.6326$ (vii) $\bar{5}.1396$
3. (i) 3.9830 (ii) 918.5 (iii) 73830.0 (iv)0.6216 (v)0.03489
   (vi) 0.03489 (vii0.0006001

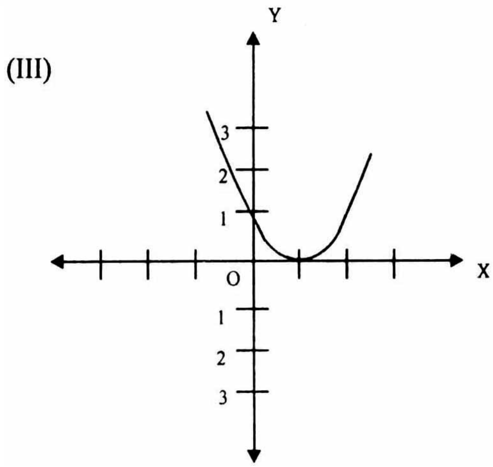
बोध प्रश्न 1.2 (द)

1. 17.52 8.034 0.004204 29670
2. 0.1812 1.796 1.047 0.005183
3. $\bar{1}.1267$ $\bar{1}.8573$
4. 0.08878

बोध प्रश्न1.3







2. (i) ढ़ाल=3, अन्त: खण्ड=6 (ii) ढ़ाल=-4, अन्त: खण्ड=3

(iii) ढ़ाल=5, अन्त: खण्ड=-6 (iv) ढ़ाल=4/3, अन्त: खण्ड=5/3

बोध प्रश्न1.4 (क)

1. **(i)** 1- $\frac{1}{x^2}$ **(ii)** $(x+1)e^x$ **(iii)** $3x^2+6x+2$ **(iv)** $-\frac{4x}{(1+x^2)^2}$

2. **(i)** na^nx^{n-1} (ii) $\frac{2ax+b}{ax^2+x+c}$ (iii) $\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2+x^4)}$ या $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$ - $\frac{(2x+1)}{(x^2+x+1)}$

(iv) $x^{e^x}\left(\frac{1}{x}+\log\right)e^x$ (v) $\frac{3-x}{y-2}$

बोध प्रश्न 1.4 (ख)

1. (i) 3+2 logx (ii) -asin x-b cos x

बोध प्रश्न 1.4 (ग)

1. X=1पर उच्चिष्ठ तथा x=3 पर निम्निष्ठ
2. X=0 पर निम्निष्ठ तथा f(0)=0 न्यूनतम तथा x=$\frac{4}{3}$ पर उच्चिष्ठ एंव

   अधिकतम मान= $\frac{32}{27}$
3. अधिकतम मान 160 = तथा न्यूनतम मान=0

बोध प्रश्न 1.5

1. $\frac{\partial u}{\partial x}=24x^2,\frac{\partial u}{\partial y}=-8y$ **2.** $\frac{\partial 4}{\partial x}=\frac{4xy^2}{x^4-y^4},\frac{\partial 4}{\partial y}=\frac{4x^2y}{x^4-y^4}$

3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-4=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4$

बोध प्रश्न 1.6

1. यदि z=8 x^3-4 y^2+10 हो तो $\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$ ज्ञात कीजिए ।

2. यदि $u=\log\left(\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}\right)$ हो तो $\frac{\partial u}{\partial y}$ ज्ञात कीजिए ।

3. यदि $u=3x^2-4xy+2y^2$ हो तो द्रीतीय क्रम के सभी आशिक अवकलज ज्ञात

4. फलन $u = x^2 + y^2 + z^2$ के लिए ऑयलर प्रमेय का सत्यापन कीजिए ।

5. यदि $u = \sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $u\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$

अभ्यासार्थ प्रश्न

1. (i) $\log_4 1024 = 5$ (ii) $\log_{216} 6 = \frac{1}{3}$ (iii) $\log_{10}(0.0001) = -4$

2. (i) $7^5 = 16807$ (ii) $10^6 = 1000000$ (iii) $10^{-6} = 0.000001$

3. (i) 4 (ii) 7 (iii) -45

5. (i) 0.7782 (ii) 1.0813 (iii) 2.8588 (iv) 1.3713
 (v) $\bar{1}.4780$ (vi) $\bar{4}.6326$ (vii) $\bar{5}.13713$

6. (i) $\frac{-2}{x^3} + \frac{2}{2^2}$ (ii) $\frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}^3}$

 (iii) $30x^4 + 39x^2 + 42x + 5$ (iv) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x\left(\sqrt{a-\sqrt{x}}\right)^2}}$

7. (i) $\frac{-2}{1-x^2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

 (iii) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right\}$ (iv) $ax^{a-1} + a^x \log a + x^x \log ex$

11. $x = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ पर निम्नतम, तथा $x = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ पर अधिकतम मान $= \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

इकाई-2

गणितीय संकल्पनाएँ (ब)

Mathematical Concepts (b)

इंकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य(objective)

इस इकाई का उद्देश्य

- .भौतिकी रसायन में प्रयुक्त फलनों का समाकलन ज्ञात करना है ।
- भौतिकी रसायन में प्रयुक्त प्रयोगों के बारे मे प्रायिकताएँ ज्ञात करना है ।

1.2 प्रस्तावना (Introduction)

भौतिकी रसायन में ऐसे कई फलन है जिनका परिवर्तन दर दिये हुऐ होते है । दिये हुए परिवर्तन दर से फलन ज्ञात करने हेतु समाकलन की आवश्यकता होती है । इसी प्रकार कई प्रयोग भी वैसे होते है जिनको समान अवस्थाओं मे बार बार दोहराने पर भी परिणाम एक सा नही आता है ऐसे प्रयोगो के लिए प्रायिकता की जरूरत पडती है । फलनों का समाकलन, विभिन्न प्रयोगो, किसी प्रयोग हेतु विभिन्न अवस्थाओं तथा पदार्थो का संयोजन विज्ञान के क्षेत्र में, विशेषकर भौतिकी रसायन में बहुत महत्वपूर्ण होता है ।

2.1 समाकलन (Integration)

अवकलन गणित में हम दिये हुए फलनों के अवकल गुणांक ज्ञात करते है जबकि समाकलन गणित में दिये फलनों को ज्ञात किया जाता है जिनके अवकलन गुणांक दिये हुए हो । अर्थात् यदि किसी फलन का अवकलज ज्ञात हो तो फलन ज्ञात करने की प्रक्रिया समाकलन कहलाती है । यदि कोई फलन $f(x)$ का चर x के सापेक्ष अवकलज $f(x)$ हो अर्थात $\frac{d}{dx}\{F(x)\} = f(x)$ दिया हुआ हो तो फलन $F(x)$ का फलन $f(x)$ का प्रति अवकलज anti-darivative कहते है तथा इसे $\int f(x)dx = F(x)$ से निरूपित करते हैं । यहाँ संकेत $\int$ का प्रयोग समाकलन के लिए) अंग्रेजी अक्षर S का बढ़ा हुआ रूप (किया जाता है तथा dx का अर्थ चर -x के सापेक्ष समाकलन करना है । फलन $f(x)$ जिसका समाकलन करना होता है उसे समाकल्य (integram) कहते है तथा प्राप्त परिएग़म $F(x)$ को समाकल (integral) कहते हैं| उदाहरणार्थ

चूंकि $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$ होता है तब $\int \frac{1}{x}dx = \log_e x$ होगा । इसी प्रकार $\frac{d}{dx}(\sin) = \cos x$ तब $\int \cos x dx = \sin x$ होगा । अत :समाकलन की प्रक्रिया, अवकलन की प्रतिलोम प्रक्रिया) inverse process (है ।

हम जानते है कि किसी अचर फलन) consant function (का अवकलज शून्य होता है।

अत :यदि $\frac{d}{dx}\{F(x)\} = f(x)$ हो तो

$$\frac{d}{dx}\{F(x)+c\}+\frac{dc}{dx}+\frac{dc}{dx}$$

$$= f(x)+0$$

$$= f(x)$$

तब समाकलन की परिभाषा से $f(x)\ dx = F(x)+c$ यहाँ पर c, अचर है तथा इसे समाकलन -अचर है) constant of intigration (कहते हैं एवं यह चर x से स्वतंत्र होता है।c के भिन्न-भिन्न मान रखने पर दिये हुए फलन $f(x)$ के भिन्न-भिन्न समाकल प्राप्त होते है जिनमें फलन $f(x)$ वही रहता है । अत : $f(x)$ का व्यापक समाकल मे c होता है । इस व्यापक समाकल में c निश्चित नही होता है । c की इस अनिश्चितता के कारण यह समाकल अनिश्चित समाकल) indefinite integral (कहलाता है ।

उदाहरणार्थ चूंकि- $\frac{d}{dx}\ \{\log x+c\}=\frac{1}{x}\ \therefore\ \int\frac{1}{x}dx=\log x+c$

इसी प्रकार $\frac{d}{dx}\sin x$, $\therefore \int\cos x dx=\sin x+c$

टिप्पणी : हर अनिश्चित समाकलन के परिणाम में समाकलन अचर लिखा जाता है । यह समाकलन की प्रक्रिया के बाद अन्त में जोड़ा जाता है । सुविधा के लिए हम इसे बार-बार नहीं लिखते है ।

समाकलन की उपरोक्त परिभाषा) प्रति-अवकलज (के आधार पर यहाँ पर कुछ फलनों के समाकल दिये है जिनको आगे प्रयोग करने हेतु याद कर लिये जाए:

समाकलन के मानक सूत्र (standard formulae of integration):

(1) $\frac{d}{dx}\left\{\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\right\}=x^n$ $\Rightarrow \int x^n dx=\frac{x^{n=1}}{1}+c, n\neq -1$

(2) $\frac{d}{dx}\{\log|x|+c\}=\frac{1}{x}$ $\Rightarrow \int x^{-1}dx=\log|x|+c$

(3) $\frac{d}{dx}\{e^x+c\}=e^x$ $\Rightarrow \int e^x dx=e^x+c$

(4) $\frac{d}{dx}\{a^x+c\}=a^x\log_e a ==$ $\Rightarrow \int a^x dx=\frac{a^x}{\log_e a}+c$

(5) $\frac{d}{dx}\{\sin x+c\}=\cos x$ $\Rightarrow \int\cos x dx=\sin x+c$

(6) $\frac{d}{dx}\{\cos x + c\} = -\sin x$ $\Rightarrow \int \sin x dx = -\cos x + c$

(7) $\frac{d}{dx}\{\tan x = c\} = \sec^2 x$ $\Rightarrow \int \sec^2 x dx = \tan x + c$

(8) $\frac{d}{dx}\{\cot x + c\} = -\cos ec^2 x$ $\Rightarrow \int \cos ec^2 x dx = -\cot x = c$

(9) $\therefore \frac{d}{dx}\{\sec x + c\} = \sec x \, \tan x \Rightarrow$ $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$

(10) $\frac{d}{dx}\left(\cos ecx + c = -\cos ecx \cot x\right)$ $\Rightarrow \int \cos ecx \cot x dx = -\cos ecx + c$

(11) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x + c\right) = \frac{1}{1+x^2}$ $\Rightarrow \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \tan^{-1} x + c$

(12) $\frac{d}{dx}\left\{\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c\right\} = \frac{1}{\sqrt{a^{2-}x^2}}$ $\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(13) $\frac{d}{dx}\left\{\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c\right\} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

2.2.1 समाकलों के गुणधर्म(Properties Of Integrals)

1. $\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$

अर्थात् एक अचर तथा फलन के गुणनफल का समाकल उस अचर तथा फलन के समाकल के गुणनफल के बराबर होता है ।

2. $\int \{ f(x) \pm g(x) \} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

अर्थात् दिये हुए फलनों के बीजीए योग) अथवा व्यवकलन (का समाकल इन फलनों के समाकलो के बीजीय योग

(अथवा व्यवकलन) के बराबर होता है ।

उपरोक्त मानक सूत्रो तथा समाकलों के गुणधर्म का सीधे प्रयोग करते हुए हम सरल फलनों के समाकलन आसानी से ज्ञात कर सकते है । निम्न उदाहरणों के द्वारा सरलता से समझा जा सकता है

उदाहरण 1: मान ज्ञात कीजिए $\int (ax^2 + bx + c) dx$

हल: $\int (ax^2 + bx + c) dx$ $= \int ax^2 dx + \int bx dx + \int c dx$

$= a\int x^2 dx + b\int x dx + c\int dx$

$$= a.\frac{x^3}{3} + b.\frac{x^2}{2} + cx + k$$ उत्तर

जहाँ k, समाकल अचर है।

उदाहरण 2: समकलना कीजिए: $\int \frac{(3x^5 + 4x^3 + 5x + 7)}{x^2} dx$

हल: $\int \frac{(3x^5 + 4x^3 + 5x + 7)}{x^2} dx$

$$= \int \left(3x^3 + 4x + \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2} \right) dx$$

$$= 3\int x^3 dx + 4\int x dx + 5\int \frac{dx}{x} + 7\int \frac{dx}{x^2}$$

$$= 3.\frac{x^4}{4} + 4.\frac{x^2}{2} + 5\log|x| + 7\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{(3x^5 + 4x^3 5x + 7)}{x^2} dx = \frac{3}{4}x^4 + 2x^2 + 5\log|x| - \frac{7}{x} + c$$ उत्तर

जहाँ c समाकल-अचर है।

उदाहरण 3: मान ज्ञात कीजिए : $\int (\sqrt{x} - \sin x + cox - e^x) dx$

हल: $\int (\sqrt{x} - \sin x + cox - e^x) dx$

$$= \int x^{1/2} dx - \int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx - \int e^x dx$$

$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} - (-\cos x) + \sin x - e^x + c$$

$$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \cos x + \sin x - e^x + c$$ **उत्तर**

जहाँ c, समाकल अचर है।

उदाहरण 4: मान ज्ञात कीजिए : $\int \sqrt{1 + \sin 2x}\, dx$

हल: चूंकि हम जानते है की $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

तथा $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

अतः दिया हुआ समाकल

$$\int \sqrt{1 + \sin 2x} dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}\, dx$$

$$= \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\; dx$$

$$= \int (\sin x + \cos x) dx$$

$$= \int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx$$

$$= -\cos x + \sin x + c$$ **उत्तर**

2.2.2 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by Substitution)

अब तक आमने समाकल के मानक सूत्रों की सहायता से समाकलन किये है। जब दिया हुआ फलन समाकलन के उन मानक सूत्रों द्वारा सीधा समाकलित नहीं होता है, परंतु दिये हुए फलन में उचित प्रतिस्थापन से स्वतंत्र चर को नये चर में परिवर्तन करके समाकल को मानक रूप में लाया जा सकता है तथा इसके पश्चात मानक सूत्र का प्रयोग करके समाकलन किया जाता हैं। यह प्रक्रिया प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन कहलाती है। प्रतिस्थापन करने का कोई व्यापक नियम नहीं है कि उनमें से एक गुणनखण्ड जिस फलन अवकल गुणांक हो, दूसरा गुणनखण्ड उसके पदों में व्यक्त किया जा सकें

उदाहरण 5: मान ज्ञात कीजिए: $\int \frac{\cos(\log x)dx}{x}$

हल: माना $\log x = t$

तब $\frac{1}{x}dx = dt$ (अवकलन करने पर)

अतः उपरोक्त प्रतिस्थापन से दिया गया समाकल

$$\int \frac{\cos(\log x)dx}{x} = \int \cos t\, dt$$

$$= \sin t + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos(\log x)dx}{x} = \sin(\log x) + c$$

(पुनः प्रतिस्थापन को वापिस मूल चर में बदलने पर)

उत्तर

उदाहरण 6: मान ज्ञात कीजिए : $\int \sqrt{\sin^3 x} \cos x\, dx$

हल: माना $\sin\ x = t$,तब $cox\, x\, dx = dt$

$$\therefore \int \sqrt{\sin^3 x} \cos x\, dx = \int \sqrt{t^3}.dt$$

$$= \int t^{3/2}\ dt$$

$$= \frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c$$

$$= \frac{2}{5}t^{5/2} + c$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{\sin^3 x}\, cox\, x\, dx = \frac{2}{5}(\sin x)^{5/2} + c$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{\sin^5 x + c}$$ **उत्तर**

उदाहरण 7: मान ज्ञात कीजिए: $\int \frac{dx}{5x+2}$

हल: माना $5x + 2 = t,$ तब $5dx = dt$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{5}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{5x+2} \quad = \int \frac{1}{t}.\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{5}\log|t| + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{5x+2} \quad = \frac{1}{5}\log|5x+2| + c$$ उत्तर

उदाहरण 8: मान ज्ञात कीजिए: $\int \cos(ax+b)dx$

हल: माना $ax+b=t,$ तब $adx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

$$\therefore \int \cos(ax+b)bx \quad = \int \frac{\cos t.dt}{a} = \frac{1}{a}\sin t + c$$

$$\Rightarrow \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$$ **उत्तर**

उदाहरण 9: मान ज्ञात कीजिए : $\int \frac{dx}{x(1+\log x)}$

हल: माना $1+\log x = t,$ तब $\frac{1}{x}dx = dt$

$$\therefore \int \frac{dx}{x(1+\log x)} \quad = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log|t| + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x(1+\log x)} \quad = \log|1+\log x| + c$$ **उत्तर**

उदाहरण 10: मान ज्ञात कीजिए: $\int tun\, x\, dx$

हल: $\because \int tun\ x\ dx = \int \frac{\sin\ x}{\cos\ x}dx$

अब माना $\cos\ x = t,$ तब $-\sin xdx = dt$

$$\Rightarrow \sin\ xdx = -dt$$

$$\therefore \int tun\ x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx \quad = \int \frac{-dt}{t}$$

$$= -\log|t| + c$$

$$\Rightarrow \int tun\, x\, dx \quad = -\log|\cos x| + c$$ **उत्तर**

या

$$= \log|\cos\ x|^{-1} + c$$

$$= \log \left\{ \frac{1}{|\cos x|} \right\} + c$$

$$\Rightarrow \int tun\ x\ dx \qquad = \log|\sec x| + c$$ **उत्तर**

टिप्पणी : इसी प्रकार हम प्राप्त का सकते है।

$$\int \cot x\, dx = \log|\sin x| + c$$

2.2.3 खण्डश: समाकलन (Intergration by parts)

अभी तक हमने फलनों के योगफल तथा व्यवकलन, तथा कुछ फलनों के गुणन फल एवं भागफल का समाकलन प्रतिस्थापन विधि से प्राप्त किये। प्रतिस्थापन विधि उन फलनों में प्रयुक्त कि जाती है जहाँ दो फलनों के गुणनफल अथवा भागफल में एक दूसरे के अवकल गुणांक के रूप में होते हैं जो इस प्रकार व्यक्त नहीं किये जा सकते। ऐसी स्थिति में फलनों के गुणनफल का समाकलन खण्डश: समाकलन द्वारा करेंगे।

खण्डश: समाकलन का नियम (Rule of Intergration by Parts):-

यदि u तथा v,x के दो फलन है तो

$$\int u.v dx = u.\int \left\{ \frac{du}{dx}.\int v dx \right\} dx$$

अर्थात्

दो फलनों के गुणनफल का समाकलन

=(प्रथम फलन) × (द्वितीय फलन का समाकलन)

-[(प्रथम फलन का अवकलन) ×(द्वितीय फलन का समाकलन)]

का समाकलन

खण्डश: समाकलन विधि कि सफलता पहले तथा दूसरे फलन को सही प्रकार से चुनने पर निर्भर करती है। फलनों के चयन का कोई व्यापक नियम नहीं है फिर भी निम्न बिन्दुओं को ध्यान में रखकर खण्डश: समाकलन विधि को सरल बनाया जा सकता है।

(i) यदि समाकल्य x की घात (धनात्मक) तथा त्रिकोणमितीय या चरघातांकी फलनों का गुणनफल हो तो x की घात के फलन को प्रथम फलन लेना चाहिये। फलनों के चयन हेतु कभी कभी "I L A T E" शब्द का प्रयोग करते हैं जहाँ I- प्रतिलोमी-त्रिकोणमितीय (inverse-trigonometric) L- लघुगणकीय (logarithmic), A- बीजीय (x की धनात्मक घात) (algebraic), T- त्रिकोणमितीय (trigonometric) तथा E - चरघातांकी (exponential) फलन को निरूपित करते है। फलनों के गुणन को समाकलन करने हेतु " I L A T E" में जो बायें आये उसे प्रथम फलन तथा अन्य को द्वितीय फलन लेकर समाकलन किया जाता है।

(ii) अकेले लघुगुणकी या प्रतिलोमी - त्रिकोणमितीय फलनों के समाकलन के लिए इकाई (1) को द्वितीय फलन मानते हुए खण्डश: समाकलन किया जाता है।

(iii) आवश्यकता पड़ने पर खण्डश: समाकलन का सूत्र एक से अधिक बार भी प्रयोग में लिया जा सकता हैं।

(iv) खण्डश: समाकलन करते समय कभी -कभी दांयी ओर का समाकलन मूल रूप में या तो चिन्ह परिवर्तन के साथ या उसके गुणन के रूप में वापस आ जाता है। ऐसी स्थिति में समाकलन का मान पक्षान्तरण द्वारा किया जा सकता है।

उदाहरण 11: मान ज्ञात कीजिए: $\int x^2 \log\ x\,dx$

हल: यहाँ log x को प्रथम (चूंकि log x का समाकलन ज्ञात नहीं है) तथा x^2 को द्वितीय फलन लेकर खण्डश: समाकलन करने पर

$$\int x^2 \log x\,dx \quad = \log\ x.\int x^2dx - -\int\left\{\frac{d}{dx}(\log x).\int x^2dx\right\}dx$$

$$= \log x.\frac{x^3}{3} - \int\left\{\frac{1}{x}.\frac{x^3}{3}\right\}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\int x^2dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}.\frac{x^3}{3} + c$$

$$\Rightarrow \quad \int x^2 \log x\,dx = \frac{x^3}{3}\left\{\log x - \frac{1}{3}\right\} + c \quad \textbf{उत्तर}$$

उदाहरण 12: मान ज्ञात कीजिए : $A+B=0 \quad \int x^2 \sin 2x dx$

हल : यहीं x^2 को प्रथम फलन मानते हुए खण्डश: समाकलन करने पर

$$\int x^2 \sin 2xdx = x^2\int \sin 2xdx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x^2).\int \sin 2xdx\right\}dx$$

$$= x^2\left[\frac{-\cos 2x}{2}\right] - \int\left\{2x.\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\right\}dx$$

$$= \frac{-x^2}{2}\cos 2x + \int x\cos 2xdx$$

पुन: दांयीं ओर के समाकल में x को प्रथम फलन मानते हुए खण्डश: समाकलन करने पर

$$\Rightarrow \int x^2 \sin 2xdx = -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \left[x.\int \cos 2xdx - \int\left\{\frac{dx}{dx}.\int \cos 2xdx\right\}\right]dx$$

$$= \frac{-x^2}{2}\cos 2x + \left[x.\frac{\sin 2x}{x} - \int 1.\frac{\sin 2x}{2}dx\right] + c$$

$$= \frac{-x^2}{2}\cos 2x + \frac{x\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 2x}{2}\right] + c$$

$$= \frac{-x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{\cos 2x}{4} + c$$

$$\Rightarrow \int x^2 \sin 2xdx = \frac{\cos 2x}{2}\left\{\frac{1}{2} - x^2\right\} + \frac{x}{2}\sin 2x + c \quad \text{उत्तर}$$

जहाँ c समाकल -अचर है।

उदाहरण 13: मान ज्ञात कीजिए: $\int \log x dx$

हल : यहीं log x को प्रथम तथा इकाई (1) को द्वितीय फलन मानते हुए खण्डश: समाकलन करने पर

$$\int \log x.1dx \;= \log x.\int 1dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(\log x).\int dx \right\} dx$$

$$= \log x.x - \int \left\{ \frac{1}{x}.x \right\} dx$$

$$= x\log x - \int dx$$

$$\Rightarrow \int \log x \quad dx = x\log x - x + c$$

$$\Rightarrow \int \log x \quad dx = x(\log x - 1) + c$$ **उत्तर**

2.2.4 परिमेय बीजीय फलनों का समाकलन (Integration of Rational Algebraic Functions):-

यदि f(x) और g(x),x के दो बहुपद हों तो फलन $\frac{f(x)}{g(x)}$ को x का परिमेय बीजीय फलन कहते है । जैसे $\frac{x^2-2x+3}{x^4+3x+1}, \frac{x+2}{x^2+5x+3}, \frac{x^3+2x^2+x+5}{x^2+4x+1}$ इत्यादि ।

पुन: यदि किसी परिमेय बीजीय फलन में अंश की घात, हर की घात से कम हो तो उसे परिमेय उचित भिन्न (Rational proper fraction) कहते है तथा यदि अंश की घात, हर की घात के बराबर या अधिक हो तो उसे परिमेय विषम भिन्न (Rational Improper fraction) कहते है । यदि परिमेय विषम भिन्न है तो उसे हर का अंश में भाग देकर (जब तक की शेषफल की घात हर की घात से कम न हो जाये) दी गई भिन्न को बहुपद तथा उचित भिन्न के योग के रूपमें व्यक्त किया जाता है, जैसे $\frac{x^3+3x+1}{x^2-3x+2}$ एक परिमेय विषम भिन्न है । इसे परिमेय उचित भिन्न में बदलने के लिए हर (x^2-3x+2) का अंश (x^3+3x+1) में भाग देने पर हम प्राप्त करते है ।

$$\frac{x^3+3x+1}{x^2-3x+2} \;= x+3+\frac{10x-5}{x^2-3x+2}$$

$$= x+3+\frac{10x-5}{(x-2)(x-1)}$$

अत: दी गई प्रत्येक विषम भिन्न को बहुपद तथा उचित भिन्न में व्यक्त कर सकते है । अब यदि किसी परिमेय बीजीय फलन का समाकलन ज्ञात करना हो तो सर्वप्रथम परिमेय बीजय

फलन को परिमेय उचित भिन्न में व्यक्त करते है (यदि दिया गया फलन विषम भिन्न हो तो) तथा उचित भिन्न का समाकलन करने हेतु इसे आशिक भिन्नो (partial fractions) में वियोजित कर प्रत्येक भिन्न का समाकलन किया जाता है ।

उचित भिन्न को आशिक भिन्नों में वियोजित करना (Resolving Proper Fraction into Partial Fraction):-

यदि दी गई भिन्न में हर गुणनखण्ड के रूप में नहीं हो तो सर्वप्रथम हर के गुणनखण्ड किये जाने चाहिये (यदि सम्भव हो) । ये गुणनखण्ड एक घातीय या द्विघातीय होगें व इनमें कुछ की पुनरावृत्ति भी हो सकती है ।

स्थिति-I: जब हर बिना पुनरावृत्ति के एक घातीय गुणनखण्ड के रूप में हो तो हर में प्रत्येक एकघातीय गुणनखण्ड (ax+b) के संगत $\frac{A}{(ax+b)}$ के रूप की आशिक भिन्न होती है, जहाँ A एक अचर है । अत: यदि हर एक घातीय गुणनखण्डों $(a_1x+b1),(a_2x+b2)...$ ...(a_nx+b_n) के रूप में हो तो दी गई । भिन्न को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$\frac{\text{अंश}}{(a_{1.}x+b_1)(a_2x+b_2).....(a_nx+b_n)}=\frac{A_1}{(a_1x+b_1)}+\frac{A_2}{(a_2x+b_2)}+......+\frac{A_n}{(a_nx+b_n)}$$

जहाँ $A_1,A_2,......A_n$ अचर राशियाँ है । इन अचर राशियों का मान ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम दाहिने पक्ष का लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) लेते है । चूंकि दोनों पक्ष समान है तथा उनके हर भी समान है । अत: दोनो पक्षों के अंश भी समान होगें, इसके बाद दोनों पक्षों के अंश में x के समान घातों के गुणांकों तथा अचर पद की तुलना कर समीकरण प्राप्त किये जाते है व इन समीकरणों को हल कर अचर राशियों $A_1,A_2,......A_n$ अत के मान प्राप्त किये जाते है ।

स्थिति II : जब हर में पुनरावृत्ति के एक घातीय गुणनखण्ड हो तो पुनरावृत्ति वाले गुणनखण्ड $(ax+b)^n$ के रूप में एक घातीय गुणनखण्ड के संगत x आंशिक भिन्नों का निम्न रूप का समूह होता है ।

$$\text{अंश}\ \frac{}{(ax+b)^n}=\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+.....+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

जहाँ $A_1,A_2,A_3......A_n$ अचर राशियां है, जिनके मान दोनों पक्षों के अंश में x की समान घातों के गुणांकों तथा अचर राशि की तुलना कर प्राप्त किये जाते है ।

स्थिति III : जब हर में बिना पुनरावृत्ति के द्विघात गुणनखण्ड हो तो बिना पुनरावृत्ति के द्विघात गुणनखण्ड (ax^2+bx+c) के संगत के रूप की आशिक भिन्न होती है, जहाँ A व B अचर राशियाँ है तथा इनके मान भी उपर बतायी गई प्रक्रिया के द्वारा ज्ञात करते है ।

उदाहरण 14: मान ज्ञात कीजिए: $\int \frac{dx}{x^2-a^2}(x>a)$

हल :यहाँ समाकल्य फलन उचित भिन्न के रूप में है अतः

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)} \qquad \text{...... (1)}$$

माना $\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+a}$ ....(2)

दायें पक्षों का ल.स.प. लेकर दोनो पक्षों में अंश की तुलना करने पर

$$1=A(x-a)+B(x-a)$$

$$\Rightarrow \; 1=(A+B)x+a(A-B) \qquad \text{........(3)}$$

अतः समान पदों के गुणांकों की तुलना करने पर

$a(A-B)=1$ तथा $A+B=0$ ....(4)

युगपत् समीकरण (4) को हल करने पर

$A=\frac{1}{2a}$ तथा $B=-\frac{1}{2a}$

अतः $\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a}.\frac{1}{(x+a)}$

$$=\frac{1}{2a}\left\{\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right\}$$

$$\therefore \int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left\{\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\log(x-a)-\log(x+a)\right]+c$$

$\Rightarrow \int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\log\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+c$ उत्तर

उदाहरण 15: मान ज्ञात कीजिए: $\int\frac{\left(x^2+x+2\right)}{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}dx$

हल : यहाँ समाकल्य एक विषम भिन्न है । अतः अंश में हर का भाग देने पर

$$\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x-2)}=1+\frac{4x}{(x-1)(x-2)} \qquad \text{........(1)}$$

अब माना $\frac{4x}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)}$ ....(2)

$$\therefore 4x=A(x-2)+B(x-1)$$

या $4x=(A+B)x-2A-B$ ....(3)

दोनो पक्षों के समान गुणांकों की तुलना करने पर

$A+B=4$ तथा $-2A-B=0$

इनको हल करने पर A=- 4 तथा B=8

'अत: $\frac{x^2+x+2}{(x-1)(x-2)}=1-\frac{4}{x-1}+\frac{8}{x-2}$

$$\therefore \int \frac{\left(x^2+x+2\right)}{(x-1)(x-2)}dx=\int\left\{1-\frac{4}{(x-1)}+\frac{8}{(x-2)}\right\}dx$$

$$=\int dx-4\int\frac{dx}{x-1}+8\int\frac{dx}{x-2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\left(x^2+x+2\right)}{(x-1)(x-2)}dx=x-4\log|x-1|+8\log|x-2|+c$$ उत्तर

उदाहरण 16: मान ज्ञात कीजिए: $\int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

हल :समाकल्य को आशिक भिन्न में बदलने के लिए माना

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)} \quad ....(1)$$

$$\therefore 1=A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2$$

$$=\left(A+C\right)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(A+c+2D)x+(A+B+D) \quad ....(2)$$

समान पदो के गुणांकों की तुलना करने पर

$$A+C=0, A+B+2C+D=0, A+C+2D=0, A+B+D=1 \quad ....(3)$$

युगपत समीकरण संकाय (3) को हल करने पर

$$A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}, D=0$$

अत: $\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2\left(x+1\right)}+\frac{1}{2\left(x+1\right)^2}-\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}$

$$\therefore \int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}=\int\left\{\frac{1}{2\left(x+1\right)}+\frac{1}{2\left(x+1\right)^2}-\frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{1}{2}\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1}-\frac{1}{4}\log|(x^2+1)|+c\,]$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\log|x+1|-\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{4}\log|x^2+1|+c$$ उत्तर

बोध प्रश्न 2.2

1, मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\int \frac{ax^3+bx^2+c}{x}dx$ (ii) $\int\left(5e^x+4\sec^2 x-\frac{3}{x}\right)dx$

2. मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\int \frac{(\log x)^3}{x}dx$ (ii) $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}dx$ (iii) $\int\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)dx$

3. मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\int x.\log x dx$ (ii) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt,$ (iii) $\int \tan^{-1} x dx$

(iv) $\int x\sec^2 x dx$

4. निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए:

(i) $\frac{1}{a^2-x^2}(x<a)$ (ii) $\frac{dx}{x^2-x-2}$

(iii) $\frac{x^2}{(x+1)(x-2)}$ (iv) $\frac{1}{x(x^n+1)}$

नोट:- कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर, अन्त में दिये गये उत्तरों से मिलान कर लेगें ।

2.3 निश्चित समाकल (Definite Integrals)

यदि $\frac{d}{dx}\{F(x)\}=f(x)$ तथा स्वतंत्र चर x के दो मान a और b हो, तो

$$\int f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

को a तथा b सीमाओं के मध्य f(x) का निश्चित समाकल (Definiet integral) कहते है । यहाँ प्र को समाकलन की निम्न सीमा (Lower Limit)तथा b को उच्च सीमा (upper limit) कहते है । अन्तराल (a,b) को समाकल परिसर (Range of Integration) कहते है । निश्चित

समाकल $\int_a^b f(x)dx$ को "a से b तक समाकल" से पढ़ा जाता है । निश्चित समाकल का मान निश्चित होता है इसलिए समाकलन करने के पश्चात् अचर ० को नहीं लिखा जाता है । एक दिये हुए फलन का समाकलन पहले बताई गई अनिश्चित समाकल की विधियों द्वारा ज्ञात किया जाता है फिर परिणाम में चर के स्थान पर उच्च सीमा तथा निम्न सीमा रख कर अन्तर ज्ञात करते हुए मान निकाल लिया जाता है । उदाहरणार्थ-

(i) $$\int_1^2 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{1}{3}\left[(2)^3-(1)^3\right]=\frac{1}{3}[8-1]=\frac{7}{3}$$

(ii) $\int_0^1 \frac{dx}{x+5} = [\log|x+5|]_0^1 = \log|1+5| - \log|0+5| = \log|6| - \log 5$

$= \log\left|\frac{6}{5}\right|$ इत्यादि ।

यदि निश्चित समाकलन में फलन का समाकल प्रतिस्थापन द्‌वारा ज्ञात करना हो तो माने हुए प्रतिस्थापन द्‌वारा स्वतंत्र चर को नये चर में परिवर्तन के साथ-साथ समाकल की सीमाओं को भी नई प्रतिस्थापन चर राशि के अनुसार बदला जाता है । ऐसा करने से पहले वाली चर राशि का नये समाकल से कोई सम्बन्ध नही रहता है । उदाहरणार्थ:

$\int_0^1 \frac{dx}{x+5}$ मे x+5=t रखे तो dx=dt तथा नई चर राशिt के संगत समाकल की उच्च व निम्न सीमायें क्रमश: 6 तथा 5 होगी । अत:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+5} = \int_5^6 \frac{dt}{t} = [\log|t|]_5^6 = \log|6| - \log|5|$$

$$= \log\left|\frac{6}{5}\right|$$

2.3.1 निश्चित समाकल के गुणधर्म (Properties of Definite Integrals) : -

प्राय: निश्चित समाकल ज्ञात करने के लिए उन्हीं विधियों का प्रयोग करते है जो अनिश्चित समाकल हेतु काम में ली जाती है, परन्तु निश्चित समाकल के कुछ गुणधर्म है जिनका उपयोग करने पर निश्चित समाकल सरलता से ज्ञात कर सकते है ।

गुणधर्म -I: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt,$ अर्थात निश्चित समाकल की सीमाएँ समान रहे तो चर राशि को किसी अन्य चर राशि में बदलने पर निश्चित समाकल के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है ।

गुणधर्म -II: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ अर्थात् निश्चित समाकल की सीमाओं को परस्पर बदलने पर समाकल का मान तो वही रहता है परन्तु चिन्ह बदल जाता है ।

गुणधर्म -III : यदि a<c<.b तो

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

गुणधर्म -IV: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

टिप्पणी : यदि a=0 हो तो $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(b-x)dx$

गुणधर्म -V: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, \text{ यदि } f(x) \text{ सम फलन हो} \\ 0, \text{ यदि } f(x) \text{ विषम फलन हो} \end{cases}$

टिप्पणी. यदि $f(-x) = f(x)$ हो, तो फलन f(x) सम (even) फलन कहलाता है, तथा यदि $f(-x) = -f(x)$ हो, तो फलन $f(x)$ विषम फलन कहलाता है ।

गुणधर्म -VI: $\int_0^{2a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, \text{ यदि } f(2a-x) = f(x) \\ 0, \text{ यदि } f(2a-x) = -f(x) \end{cases}$

गुणधर्म - VII : $\int_0^{na} f(x)dx = n\int_0^a f(x)dx,$ यदि $f(a+x) = f(x)$

उदाहरण 17: मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^1 x^2 e^x dx$

हल: x^2 को प्रथम फलन मानते हुए खण्डश समाकलन करने पर

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2.e^x\right]_0^1 - \int_0^1 \{2x.e^x\}dx$$

$$= \left(1.e^1 - 0.e^0\right) - 2\int_0^1 xe^x dx$$

पुन: x को प्रथम फलन मानते हुए खण्डश: समाकलन करने पर

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2\left\{\left[x.e^x\right]_0^1 - \int_0^1 \{1.e^x\}dx\right\}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2\left\{\left[1e^1 - 0\right) - \int_0^1 e^x dx\right\}$$

$$= e - 2\left\{e - \left[e^x\right]_0^1\right\}$$

$$= e - 2\{e - e + 1\} \quad \{\because e^0 = 1\}$$

$$\therefore \int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2 \text{ उत्तर}$$

उदाहरण 18 : मान ज्ञात कीजिए: $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$

हल : माना sin x=t, तब cos xdx=dt

सीमाएँ: जब x=0 तब t=sin0=0 और जब

$x = \frac{\pi}{2}$ तब t=sin$\pi/2 = 1$, अत:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)(2+t)}$$

$= \int_0^1 \left\{\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2+t}\right\} dt$ (आंशिक भित्तों मे बदलने पर)

$$=\int_0^1 \frac{dt}{1+t}-\int_0^1 \frac{dt}{2+t}$$

$$=\left[\log|1+t|\right]_0^1-\left[\log|2+t|\right]_0^1$$

$$=\{\log|2|-\log|1|\}-\{\log|3|-\log|2|\}$$

$$=\log|2|-0-\log|3|+\log|2|$$

$$=2\log|2|-\log|3|$$

$$=\log|2|^2-\log|3|$$

$$=\log|4|-\log|3|$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)} \quad =\log\left|\frac{4}{3}\right|$$ **उत्तर**

उदाहरण 19: मान ज्ञात कीजिए: $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x}}$

हल : माना I= ....(1)

$$\int_{-1}^1 x^4 dx=2\int_0^1 x^4 dx=2\left[\frac{x5}{5}\right]_0^1$$

या $\quad =2\left[\frac{1}{5}-0\right]=\frac{2}{5}$

$$I=\int_1^3 \frac{\sqrt{(1+3)-x}}{\sqrt{4-(1+3-x)}} \quad \frac{dx}{+\sqrt{1+3-x}}$$ [गुणधर्म

$$\therefore \int_{-1}^1 x^4 dx=\frac{2}{5}$$

IV से अर्थात

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$$

या $\quad I=\int_1^3 \frac{\sqrt{4-x}dx}{\sqrt{x}+\sqrt{4-x}}$

समीकरण (1) तथा (2) को जोड़ने पर {$\because$ दोनो समीकरणों में समाकल्य का हर समान है}

$$2I=\int_1^3 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x}}+\int_1^3 \frac{\sqrt{4-x}dx}{\sqrt{x}+\sqrt{4-x}}$$

$$=\int_1^3 \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{4-x}\right)dx}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{4-x}\right)}$$

$$=\int_1^3 1.dx$$

$$=[x]_1^3=[3-1]=2$$

$=[x]_1^3=[3-1]=2$

$\therefore 2I=2$

$\therefore I=I$

$$\Rightarrow \int_1^3 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{4-x}+\sqrt{x}}=1$$

उदाहरण 20: मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^5 \cos^2 x dx$ (ii) $\int_{-1}^{1} x^4 dx$

हल (i) यहाँ f(x) $= x^5 \cos^2 x$

$\because f(-x) = (-x)^5 \cos^2 (-x)$

$=(-1)^5 x^5 \cos^2 x$

$=-x^5 \cos^2 x = -f(x)$

f(x) विषम फलन है

अत: $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^5 \cos^2 dx = 0$ उत्तर

(ii) यहाँ $f(x)=x^4, \because f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$

$\therefore f(x)$ समफलन है|

अत: $\int_{-1}^{1} x^4 dx = 2\int_0^1 x^4 dx = 2\left[\frac{x5}{5}\right]_0^1$

$=2\left[\frac{1}{5}-0\right]=\frac{2}{5}$

$\therefore \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}$ **उत्तर**

बोध प्रश्न 2.3

निम्नलिकित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{2x+3}$ 2. $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx$

3. ${}^n\mathrm{P}_\mathrm{r} = \int_1^2 \frac{x^2 dx}{x2+4x+3}$ 4. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$

5. $\int_{-2}^{2} (x^5+4x^3-x)dx$ 6. $\int_{-1}^{1} (5x^4+3x^2+2)dx$

नोट :- कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर, अन्त में दिये गये उत्तरों से मिलान कर लेगें ।

2.4. क्रमचय तथा संचय (Permutations and Combination)

क्रमचय (Permutations): दी हुई वस्तुओं अथवा संकेतों में से एक बार में कुछ अथवा सभी वस्तुओं अथवा संकेतों को लेने पर जो भिन्न-भिन्न विन्यास (arrangements) बनते है, उनमें से प्रत्येक को क्रमचय कहते है ।

उदाहरणार्थ- यदि हमारे पास तीन वस्तुएँ x,y,z हों तथा एक बार में दो वस्तुएँ लेना चाहे तो भिन्न-भिन्न विन्यास निम्न प्रकार से हो सकते है ।

xy,xz,yz,zx,yx,zy

इस प्रकार क्रमचयों की संख्या 6 है ।

इसी प्रकार यदि हमें तीन अंको 1, 2, 3, में से कोई दो अंको को ले कर भिन्न-भिन्न विन्यास अथवा संख्याएँ बना सकते है:

12, 13, 23, 21, 31, 32

इस प्रकार कुल क्रमचयों की संख्या 6 प्राप्त होती है ।

संचय (Combinations):- दी हुई वस्तुओं अथवा संकेतों में से एक बार में कुछ अथवा सभी वस्तुओं अथवा संकेतों को लेने पर जो भिन्न-भिन्न समूह (groups) (क्रम का ध्यान न रखते हुएं) बनते है, उन्हे संचय कहते है ।

उदाहरणार्थ- ऊपर के उदाहरण में चूंकि xy तथा yx एक ही समूह है, इसी प्रकार xz तथा zx,yz तथा zy भी एक ही समूह को प्रदर्शित करते है । अत: दी गई तीन वस्तुएँ x,y,z में केवल तीन समूह xy,yz तथा श्र बनते है । इस प्रकार x,y,z में से दो एक साथ लेकर तीन संचय प्राप्त होते है ।

अत: उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि संचय में तो केवल समूह ही बनाये जाते है किन्तु क्रमचय में यह भी देखना होता है कि प्रत्येक समूह की वस्तुओं या संकेतों को कितने प्रकार के भिन्न-भिन्न क्रमों में रखा जा सकता है ।

2.4.1 क्रमगुणित संकेतन (Factorial Notation):-

प्रथम n प्राकृत संख्याओं के गुणनफलन को संकेतन $\underline{|n}$ छ n! से व्यक्त करते है तथा इसे ' 'क्रमगुणित n " अथवा " n क्रमगुणित' ' पढ़ते है । अत:

$\underline{|n} = n(n-1)(n-2)......3.2.1$

या

$\underline{|n} = 1x2x3x.........x(n-2)x(n-1)xn$

उदाहरणार्थ : (i) $\underline{|5} = 5x4x3x2x1 = 120$

(ii)$\underline{|3} = 3x2x1 = 6$

(iii)$\underline{|1} = 1$ इत्यादि

टिप्पणी : (i)$\underline{|0} = 1$

(ii)$\because \underline{|n} = nx(n-1)x(n-2)x......x3x2x1$

$$= nx\{(n-1)x(n-2)x......x3x2x1\}$$
$$= nx\underline{|n}-1$$
$$\Rightarrow \underline{|n} = n\underline{|n-1}$$

2.4.2 गुणन नियम (Product Rule)

यदि कोई क्रिया n विधियों से हो सके और जब यह उनमें से किसी एक विधि से की जा चुकी हो तब दूसरी क्रिया n विधियों से हो सके तो दोनो क्रियाएँ साथ-साथ mxn विधियों से की जा सकती है ।

उदाहरणार्थ- कोटा तथा जयपुर के मध्य 5 रेलगाड़ियाँ चलती है, कितनी विधियों से एक आदमी कोटा से जयपुर जा कर दूसरी गाड़ी से लोट सकता है ।

चूंकि कोटा से जयपुर 5 रेलगाड़ियों में से किसी एक से जाया जा सकता है । अत: जाने की पाँच विधियाँ हुई। अब लोटते समय किन्हीं चार रेलगाड़ियों का ही प्रयोग किया जा सकता " है क्यों कि जिस रेलगाडी से जाना हुआ था उससे लौटना नहीं है । इस प्रकार लौटने की केवल चार ही गाड़ियाँ है । अत: किसी रेलगाड़ी से कोटा से जयपुर जाकर किसी अन्य रेलगाड़ी से लौटने की कुल 5x4 अर्थात 20 विधियाँ हुई।

2.4.3 क्रमचय. जब सभी वस्तुएँ भिन्न-भिन्न है (Permutations when all the Object are Distict) '

दी हुई n भिन्न-भिन्न (distinct) वस्तुओं में से कोई r वस्तुओं को लेने पर बने क्रमचयों की संख्या वही होगी जो r रिक्त स्थानों को n वस्तुओं से भरने की होगी । अब पहला स्थान n वस्तुओं में से किसी एक वस्तु द्वारा भरा जा सकता है अर्थात इस स्थान को भरने की n विधियाँ है । पहला स्थान भर चुकने के बाद (n-1) वस्तुएँ बची जिनमें से कोई एक वस्तु को दूसरे स्थान पर रख सकते है, इस प्रकार दूसरे स्थान को भरने की (n-1) विधियाँ हुई। अत: पहले दो स्थानों को भरने की n(n-1) विधियाँ हुई। पुन: पहले दो स्थानों को भरने के पश्चात् (n-2) वस्तुएँ बची जिनमें से कोई एक वस्तु तीसरे स्थान पर रख सकते है । अत: पहले तीन स्थानों को भरने के लिए कुल n(n-1)(n-2) विधियाँ हुई।

इसी प्रकार अन्य स्थानों को भरा जा सकता है । अब इस बात का ध्यान रखते हुए कि प्रत्येक स्थान के लिए एक गुणनखण्ड बढ़ता जाता है और गुणनखण्ड का मान अपने पूर्वगामी गुणनखण्ड से 1 कम हो जाता है । अत: n वस्तुओं में से r स्थानों को भरने की कुल विधियों की संख्या

$$= n(n-1)(n-2).......(\text{r गुणनखण्ड})$$
$$= n(n-1)(n-2).......(n-r+1)$$

इस संख्या को साधारणत: संकेत $^{n}p_{r}$ से व्यक्त करते है, जिसका अर्थ n वस्तुओं में से r के क्रमचय होता है ।

अत: $^{n}p_{r} = n(n-1)(n-2)......(n-r+1)$ (1)

जहाँ $0 \le r \le n$

उदाहरणार्थ- $(i)^5 P_3 = 5x4x3 = 60$

(ii) $(i)^5 P_3 = 6x5x4x3x2 = 720$

पुन: $\because {}^n\mathrm{P_r} = nx(n-1)x(n-2).........x(n-r+1)$ ......(2)

दायें पक्ष में $(n-r)x(n-r-1)x.....x3x2x1,$ से गुणा करते हुए इसी से भाग देने पर, हम प्राप्त करते है कि

$${}^n\mathrm{P_r} = \frac{nx(n-1)x(n-2)x.....x(n-r+1)x(n-r)x(n-r-1)x.....3x2x1}{(n-r)x(n-r-1)x....x3x2x1}$$

$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$ $\{\underline{|n}$ की परिभाषा से $\underline{|n} = n(n-1)(n-2)....3.2.1$

$= n(n-1)(n-2).....(n-r+1)(n-r).$

$(n-r-1).....3.2.1\}$

अत: ${}^n\mathrm{P_r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}},\ \ 0 \le r \le n$ .....(3)

इस प्रकार ${}^n\mathrm{P_r}$ ज्ञात करने के दो सूत्र, सूत्र (1) तथा सूत्र (3) का प्रयोग किया जाता है । परन्तु सूत्र (3), सूत्र (1) की अपेक्षा अधिक सुविधाजनक व्यंजक है ।

टिप्पणी : (i) दी हुई सभी n वस्तुओं को एक साथ लेने पर उनके क्रमचय होगें:

${}^n\mathrm{P}_n = n(n-1)(n-2).......3.2.1$

या ${}^n\mathrm{P}_n = \underline{|n}$

(ii) ${}^n\mathrm{P}_n = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$ में r के स्थान पर n तथा ${}^n\mathrm{P}_n = \underline{|n}$ रखने पर

$\underline{|n} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-n}} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|0}}$

$\Rightarrow \underline{|0} = 1$

उदाहरण 21 : निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) ${}^{10}P_4$ (ii) ${}^{15}P_3$ (iii) $\underline{|8}$

हल - (i) ${}^{10}P_4 = 10x9x8x7 = 5040$

वैकल्पिक : ${}^{10}P_4 = \frac{\underline{|10}}{\underline{|10-4}} = \frac{\underline{|10}}{\underline{|6}} = \frac{10x9x8x7x\underline{|6}}{\underline{|6}}$

$10x9x8x7x = 5040$

(ii) ${}^{15}P_3 = 15x14x13 = 2730$

(iii) $\underline{|8} = 8x7x6x5x4x3x2x1 = 40320$

उदाहरण 22: यदि ${}^{10}P_r = 720$, हो, तो r का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : $\because\ {}^{10}P_r = 10x9x8x7x......r$ खण्डों तक

तथा 720=10x9x8

अत: स्पष्ट है कि r=3 उत्तर

उदाहरण 23: यदि ${}^{n}P_5 : {}^{n}P_3 = 2:1,$ तो n का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : $\because \; {}^{n}P_5 = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$

तथा ${}^{n}P_3 = n(n-1)(n-2)$

$$\therefore \frac{{}^{n}P_5}{{}^{n}P_3} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{2}{1}$$

$$\Rightarrow (n-3)(n-4) = 2$$

$$\Rightarrow n^2 - 7n + 12 = 2$$

$$\Rightarrow n^2 - 7n + 10 = 0$$

$$\Rightarrow (n-2)(n-5) = 0$$

$\Rightarrow n = 2$ या 5

परन्तु n=2 निरर्थक हैं क्योंकि ${}^{2}P_5$ तथा ${}^{2}P_3$ का कोई अर्थ नहीं होता है अत:n=5 **उत्तर**

उदाहरण 24: 'CHEMISTERY' शब्द के अक्षरों से बनने वाले क्रमचयों की संख्या ज्ञात कीजिए ।

हल : चूंकि अक्षरों की कुल संख्या 9 है तथा प्रत्येक बार 9 ही अक्षर लेने है । अत:

${}^{9}P_9 = \lfloor 9 = 9x8x7x6x5x4x3x2x1 = 362880$

2.4.4 क्रमयच जब सभी वस्तुएँ भिन्न-भिन्न नहीं है (Permutations when all the Objects are not Districts Object):-

यदि कुल n वस्तुओं में से p वस्तुएँ एक ही प्रकार की है, q वस्तुएँ दूसरे प्रकार की है तथा r वस्तुएँ तीसरे प्रकार की है, और शेष वस्तुएँ भिन्न-भिन्न है तो क्रमचयों की संख्या $\frac{\lfloor n}{\lfloor p \lfloor q \lfloor r}$ होगी ।

टिप्पणी : n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या, जहाँ p वस्तुएँ समान प्रकार की और शेष भिन्न प्रकार की है होगी: $\frac{\lfloor n}{\lfloor p}$

उदाहरण 25 : 'ALLAHABAD' शब्द के अक्षरों से कितने भिन्न-भिन्न शब्द बन सकते है?

हल. यहाँ पर कुल 9 अक्षर है, जिनमें A, 4 बार एंव L, 2 बार आया है तथा शेष भिन्न-भिन्न है । अत: शब्दों की अभीष्ट संख्या $= \frac{\lfloor 9}{\lfloor 4 \lfloor 2}$

$$= \frac{9x8x7x6x5}{2x1}$$

$= 7560$ उत्तर

उदाहरण 26: 100 से 1000 के बीच स्थित कितनी संख्याएँ है, जिन्हें अंक 0, 1, 2, 3, 4, 5 से बनाई जा सकती है, यदि अंको के पुनरावृत्ति की अनुमति नहीं है ।

हल : 100 से 1000 के बीच स्थिति प्रत्येक संख्या 3 अंको की एक संख्या होगी तथा कुल 6 अंक दिये हुए है । अंत: 6 अंकों में से 3 अंकों की बनने वाली संख्याओं की संख्या ${}^6P_3$ होगी, परन्तु इन संख्याओं में वे भी सम्मिलित है, जिनमें 0 (शून्य), सैकड़े के स्थान पर है, जो वास्तव में 2 अंकों की है । अब इन 2 अंको की संख्याओं की संख्या ज्ञात करने के लिए, हम 0 को सैकड़े के स्थान पर स्थिर कर देते है और शेष 5 अंको से एक साथ 2 अंको को लेकर बनने वाले क्रमचय होगें ${}^5P_2$ अत: अभीष्ट संख्या को ज्ञात करने के लिए कुल तीन अंको की संख्याओं की संख्या मे से इन दो अंको की संख्याओं की संख्या को घटने पर प्राप्त होगी । अत:

अभीष्ट संख्या

$= {}^6P_3 - {}^5P_2$

$= 6x5x4 - 5x4$

$= 5x4x(6-1)$

$= 5x4x5$

$= 100$ उत्तर

टिप्पणी:

1. दी हुई n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बने क्रमचयों की संख्या, जबकि वस्तुओं के पुनरावृत्ति की अनुमति हो, n^r होती है ।
2. जब n वस्तुओं को एक सीधी रेखा में भिन्न-भिन्न क्रमों में रखा जाता है तो $\lfloor n$ विन्यास प्राप्त होते है । परन्तु यदि उन्हीं n वस्तुओं को किसी वृत के चारों ओर रखा जाय तो $\lfloor n-1$ विन्यास प्राप्त होगें ।
3. उपरोक्त वृत्तीय विन्यास (क्रमचय) में यदि दक्षिणावर्त तथा वामावर्त में कोई भेद नहीं हो तो कुल क्रमचयों की संख्या $= \frac{1}{2}\lfloor n-1$ होगी |

उदाहरण 27: 10 पुरूष किसी गोल मेज के चारों ओर कितनी प्रकार से बैठ सकते है । यदि किन्हीं दो क्रमों में सबके पड़ौसी समान न हो तो व कितने प्रकार से बैठगें?

हल: 10 पुरूष गोल मेज के चारो और प्रकार से बैठेंगे । पुन: दक्षिणावर्त तथा वामावर्त विन्यासों में ही वही पुरूष पड़ौसी समान बने रहते है किन्तु हमें यह देखना है कि पड़ोसी समान न हो ।

अत: पड़ौसी समान नहीं रहने पर अभीष्ट संख्या

$= \frac{1}{2}\lfloor 10-1 = \frac{1}{2}\lfloor 9$

बोध प्रश्न: 2.4

1. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

(i) ${}^{11}P_2$ (ii) ${}^{5}P_3$ (iii) $\underline{|4} - \underline{|3}$ (iv) ${}^{9}P_9$

2. यदि ${}^{n}P_4 : {}^{n}P_5 = 1:3$ तो n का मान ज्ञात कीजिए ।

3. 1 से 9 तक के अंको का प्रयोग करके कितनी 4 अंको की संख्याएँ बनाई जा सकती है, यदि अंको की पुनरावृत्ति की अनुमति नही हो?

4. 'COMMITTEE' शब्द के अक्षरों को कितने भिन्न-भिन्न क्रमों में लिख सकते है?

5. 20 भिन्न-भिन्न प्रकार के फूलों से कितने प्रकार की मालाएँ बनायी जा सकती है ।

नोटः- कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर, अन्त में दिये गये उत्तरों से मिलान कर लेगें ।

2.5 संचय (Combinations)

दी हुई वस्तुओं में से एक बार में कुछ अथवा सब वस्तुओं को लेने पर जो भिन्न-भिन्न समूह बनते है संचय कहलाता है । संचय में चयनित वस्तुओं का क्रम महत्वपूर्ण नहीं होता है । n विभिन्न वस्तुओं में से एक समय में r वस्तुओं को लेकर बनने वाले संचयो की संख्या को संकेतन ${}^{n}C_r$ से प्रकट करते है तथा इसे 'एन सी आर' अर्थात 'n में से r के संचय' पढ़ा जाता है।

का मान ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र काम में लिया जाता है । ${}^{n}C_r = \dfrac{{}^{n}\mathrm{P}_{\mathrm{r}}}{\underline{|r}}$

या $${}^{n}C_r = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r(r-1)(r-2).....3.2.1}$$

पुनः सूत्र (1) के दांयी पक्ष के अंश व हर को $\underline{|n-r}$ से गुणा करने पर

$${}^{n}C_r = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)(n-r)(n-r-1).....3.2.1}{\underline{|r}.\underline{|n}-r}$$

$$\Rightarrow \quad {}^{n}C_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\underline{|n-r'}} \quad {}^{n}C_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\underline{|n-r'}} \quad 0 < r \le n \quad .....(2)$$

टिप्पणी : (i) ${}^{n}C_r = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n}\underline{|0}} = 1$

(ii) ${}^{n}C_0 = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n}\underline{|0}} = 1$

महत्वपूर्ण सूत्र (Important formulae):-

1. ${}^{n}C_r = {}^{n}C_{n-r}$
2. ${}^{n}C_r + {}^{n}C_{n-r} = {}^{n+1}C_r$

उदाहरण 28: ${}^{12}C_6$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : $\because {}^{n}C_r = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\underline{|n-r}}$

$\because {}^{12}C_6 = \frac{\lfloor 12}{\lfloor 6 \lfloor 12-6}$

$= \frac{\lfloor 12}{\lfloor 6 \lfloor 6} = \frac{12x11x10x9x8x7x\lfloor 6}{\lfloor 6 \lfloor 6}$

$= \frac{12x11x10x9x8x7}{6x5x4x3x2x1}$

$\Rightarrow {}^{12}C_6 = 924$ **उत्तर**

उदाहरण 28 (ii) : यदि ${}^nC_9 = {}^nC_8$ हो तो ${}^nC_{15}$ ज्ञात कीजिए ।

हल : $\because$ दिया हुआ है ${}^nC_9 = {}^nC_8$

$\Rightarrow \frac{\lfloor n}{\lfloor 9 \lfloor n-9} = \frac{\lfloor n}{\lfloor 8 \lfloor n-8}$

$\Rightarrow \frac{1}{9\lfloor 8 \lfloor n-9} = \frac{1}{\lfloor 8 (n-8) \lfloor n-9}$ $\{\because \lfloor n = n \lfloor n-1$

$\Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{n-8}$

$\Rightarrow n-8 = 9 \Rightarrow n = 17$

अत: ${}^{17}C_{15} = \frac{\lfloor 17}{\lfloor 15 \lfloor 17-15}$

$= \frac{17x16x\lfloor 15}{\lfloor 15 . \lfloor 2}$

$\Rightarrow {}^{17}C_{15} = \frac{17x16}{2x1}$

$= 17x8 = 136$

$\therefore {}^{17}C_{15} = 136$ **उत्तर**

उदाहरण 29:6 पुरूषों तथा 4 महिलाओं में से 5 की एक समिति बनानी है । बताइये यह समिति कितने प्रकार से बनायी जा सकती है जबकि समिति में (अ) दो महिलाएँ हो, (ब) कम से कम दो महिलाएँ हो तथा (स) अधिक से अधिक दो महिलाएँ हो ।

हल : (अ) पाँच सदस्यों में से यदि दो महिलाएँ हो तो बाकी तीन पुरूष होगें ।

6 पुरूषों में से 3 पुरूष ${}^6C_3$ प्रकार से चुने जा सकते है तथा 4 महिलाओं में से 2 महिलाएँ ${}^4C_2$ प्रकार से चुनी जा सकती है । अब चूंकि पहले में से प्रत्येक समूह के साथ दूसरे प्रकार का कोई भी समूह रखा जा सकता है । अत: अभीष्ट प्रकार की संख्या

$= {}^6C_3 x {}^4C_2$

$= \frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \lfloor 3} x \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2}$

=120

(ब) समिति में कम से कम दो महिलाएँ होने के लिए 2 महिलाएँ तथा 3 पुरूष या 3 महिलाएँ तथा 2 पुरूष या 4 महिलाएँ तथा 1 पुरूष हो सकते है । अत: अभीष्ट प्रकार की संख्या

$= {}^6C_3 x {}^4C_2 + {}^6C_2 x {}^4C_3 + {}^6C_1 x {}^4C_4$

$120 + \frac{\lfloor 6}{\lfloor 2 \lfloor 4} x \frac{\lfloor 4}{\lfloor 3 \lfloor 1} + \frac{\lfloor 6}{\lfloor 1 \lfloor 5} x1$

=120+60+6

=186 उत्तर

(स) समिति में अधिक से अधिक दो महिलाएँ हो इसके लिए समिति में 3 पुरूष तथा 2 महिलाएँ या 4 पुरूष तथा 1 महिला अथवा केवल 5 पुरूष हो सकते है । अत: अभीष्ट प्रकार की संख्या

$= {}^6C_3 x {}^4C_2 + {}^6C_4 x {}^4C_1 + {}^6C_5 x {}^4C_0$

$= 120 + \frac{\lfloor 6}{\lfloor 4 \lfloor 2} x \frac{\lfloor 4}{\lfloor 1 \lfloor 3} + \frac{\lfloor 6}{\lfloor 5 \lfloor 1} x1$

=120+60+6

=186 उत्तर

उदाहरण 30: 10 व्यजनों (consonants) और 4 स्वरों (vowels) में से कितने ऐसे शब्द बनाये जा सकते हैं, जिनमें 3 व्यंजन तथा 2 स्वर हो ।

हल : 10 व्यजनों में सें 3 व्यंजन चुनने के संचयों की संख्या

$= {}^{10}C_3$

तथा 4 स्वरों में से 2 स्वर चुनने के संचयों की संख्या

$= {}^4C_2$

पहले प्रकार के संचयों में से प्रत्येक को दूसरे प्रकार के प्रत्येक संचयों से मिलकर कुल संचयों की संख्या

$= {}^{10}C_3 x {}^4C_2$

इस नये समूहों, जिनमें तीन व्यंजन तथा 2 स्वर है में से प्रत्येक में 5 भिन्न-भिन्न अक्षर है जिनका पारस्परिक विन्यास $\lfloor 5$ प्रकार से होगा ।

अत: अभीष्ट शब्दों की संख्या $= {}^{10}C_3 x {}^4C_2 x \lfloor 5$

$= \frac{10x9x8}{3x2x1} x \frac{4x3}{2x1} x5x4x3x2x1$

$= 120x60x120$

=86400 **उत्तर**

बोध प्रश्न 2.5

1.निम्न लिखित का नाम ज्ञात कीजिए ।

(i) ${}^{14}c_3$ (ii) ${}^{25}c_{24}$ (iii) ${}^{13}c_{11}$

2. यदि ${}^nc_{10} = {}^nc_{14}$ ${}^nc_{20}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. 2 पुरुषों और 3 महिलाओं के एक समूह से 3 सदस्यों की एक समिति बनानी है ।
यह कितने प्रकार से किया जा सकता है ? इनमे से कितनी समितियाँ ऐसी है जिसमें 1 पुरुष तथा 2 महिलांए है।

4. 17 खिलाडियों मे से , जिनमें केवल 5 खिलाडी गेंद्‌बाजी कर सकते है, एक क्रिकेट टीम के 11 खिलाडियों का चयन कितने प्रकार से किया जा सकता है, यदि प्रत्येक टीम मे तथ्यत: 4 गेंदबाज है ।

5.“INVOLUTE” शब्द के अक्षरों से, अर्थपूर्ण या अर्थ हीन प्रत्येक 3 स्वरों तथा 2 व्यंजनों वाले कितने शब्दों की रचना की जा सकती है ?

नोट : कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर, अन्त मे दिये गये उत्तरों से मिलान कर लेगें ।

2.6 प्रायिकता (Probability)

आदि काल से ही मनुष्य अपने विवेक तथा पूर्व व प्रचलित धारणाओं के आधार पर भविष्य में घटित होने वाली घटनाओं के बारे में कुछ भविष्यवाणियाँ करता रहा है । जैसे- 'सम्मवत: अमुक घटना घटेगी" या "कोई अमुक घटना घटित होने की सम्भावना" इत्यादि शब्दों का प्रयोग करते है । किसी घटना के घटित होने से पूर्व वर्तमान समय में उपस्थित परिस्थितियों एवं सूचनाओं के आधार पर घटना घटित होने के बारे में अनुमान लगाने की क्रिया को -गणित में प्रायिकता के नाम से जाना जाता है । प्रायिकता के अध्ययन में काम आने वाले कुछ महत्वपूर्ण शब्दों जैसे- याद‌ृच्छिक परीक्षण, प्रतिदर्श समाष्टि, घटनाएँ इत्यादि को परिभाषित करेगें ।

2.6.1 याद‌ृच्छिक परीक्षण (Random Experiment):-

देनिक जीवन में हम ऐसे कई प्रायोगिक क्रिया कलाप करते है जिन्हें समान परिस्थितियों में दोहराने पर भी परिणाम सदैव एक सा नहीं आता है । उदाहरणार्थ- जब एक सिक्के को उछाला जाता है तो चित या पट्ट आ सकता है लेकिन हम यह निश्चित तौर पर नहीं कह सकते है कि वास्तविक परिणाम इन दोनों में से क्या होगा? इस प्रकार के परीक्षण को याद‌ृच्छिक परीक्षण कहते, है । अत: एक परीक्षण को याद‌ृच्छिक परीक्षण कहा जाता है यदि परीक्षण के एक से अधिक संभावित परिणाम हो तथा परीक्षण के पूर्ण होने से पहले परिणाम बताना संभव न हो । याद‌ृब्दिक परीक्षण को कभी-कभी अभिप्रयोग की पुनरावृत्ति (repeated trials) भी कहते है ।

2.6.2 परिणाम तथा प्रतिदर्श समष्टि (Outcomes and Sample Space):-

किसी याद‌ृच्छिक परीक्षण के संभावित नतीजे को परिणाम (outcomes) कहते है । उदाहरणार्थ- एक सिक्के को उछालने पर चित (H) अथवा पट् (T) आता है । चित पट् या को ही परिणाम कहते है । परिणामों का समुच्चय {H, T} इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है । इसी प्रकार एक पासा (dice)फेंकेने पर पासे के ऊपरी फलक पर अंकित बिन्दुओं की संख्या में रूचि रखते है तो इस परीक्षण के परिणाम 1,2,3,4,5 या 6 है एवं समुच्चय {1,2,3,4,5,6} परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि होगा । अत: किसी याद‌ृच्छिक परीक्षण के सभी संभावित परिणामों

का समुच्चय उस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है । प्रतिदर्श समष्टि को सकेत S द्वारा प्रकट किया जाता है । प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक अवव्यव एक प्रतिदर्श बिन्दु (sample point) कहलाता है । एक प्रतिदर्श समष्टि में प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या परिमेय अथवा अनन्त हो सकती है ।

उदाहरण 3I: दो सिक्कों को एक बार उछाला गया है । प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए ।

हल. दोनो सिक्कों में से किसी पर चित (H) या पट् (T) प्रकट हो सकते है, इसलिए संभव परिणाम निम्नलिखित हो सकते है:

दोनो सिक्को पर चित = HH

प्रथम सिक्के पर चित तथा दूसरे पर पट् =HT

प्रथम सिक्के पर पट् तथा दूसरे पर चित =TH

दोनो सिक्को पर पट् =TT

अत: दिये हुए परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि

$S=\{HH, HT, TH, TT\}$

उदाहरण 32: एक सिक्के को तब तक उछालते रहते है जब तक उस पर चित प्रकट न हो जाए । प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए ।

हल : इस यादृच्छित परीक्षण में चित प्रथम उछाल या द्वितीय उछाल, या तृतीय उछाल .... इत्यादि में से किसी में भी प्रकट हो सकता है । अत: अभीष्ट प्रतिदर्श समष्टि

$S=\{H, TH, TTH, TTHH, TTTTH, ...\}$

टिप्पणी : उपरोक्त उदाहरण में प्रतिदर्श बिन्दुओं की संख्या अनन्त होगी ।

2.6.3 घटना (Event):-

किसी प्रयोग के संभव परिणामों का प्रतिदर्श समष्टि का कोई एक उप समुच्चय को एक घटना कहा जाता है । अर्थात् किसी घटना का होना तब कहा जाता है जबकि प्रेक्षित परिणाम निर्दिष्ट उपसमुच्चय का एक सदस्य हो । उदाहरणार्थ- एक सिक्के को दो बार उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि $S=\{HH, HT, TH, TT\}$ होता है । अब माना कि हमारी रूचि उन परिणामों में है जो तथ्यत: एक चित प्रकट होने के अनुकूल होते है, तब इस घटना के होने के अनुकूल S के अवयव HT तथा TH है । यह दो अवयव समुच्चय S का एक उपसमुच्चय E ={HT,TH} बनाते है । इसी प्रकार एक पासा फैंकने पर प्रतिदर्श समष्टि $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ तथा पासे के ऊपरी फलक पर विषम संख्या घटित होने का उपसमुच्चय E ={1, 3, 5,} होगा ।

अत: किसी यादृच्छित परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि 5 की घटना हघटित हुई कही जाती है यदि परीक्षण का परिणाम x इस प्रकार है कि $x \in E$ (अर्थात् परीणाम x, उप समुच्चय E का सदस्य अथवा अवयव है) । यदि परिणाम ऐसा है कि $x \notin E$ (अर्थात परिणाम x, E का अवयव नहीं है) तो हम कह सकते है कि घटना E घटित नहीं हुईं है ।

2.6.4 सरल घटना (Simple Event):-

यदि किसी घटना E में केवल एक ही प्रतिदर्श बिन्दु हो, तो घटना E को सरल या प्रारम्भिक घटना कहते है । ऐसा परिक्षण जिसके प्रतिदर्श समष्टि जिसमें n पृथक अवयव हो, में n सरल घटनाएँ विद्‌यमान होती है । उदाहरणार्थ- एक सिक्के के तीन उछालों वाले परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$ है । यहाँ इस प्रतिदर्श समष्टि की आठ सरल घटनाएँ है, जो निम्नलिखित है ।

$E_1 = \{HHH\}, E_2 = \{HHT\}, E_3 = \{HTH\}, E_4 = \{THH\}, E_5 = \{HTT\},$

$E_6 = \{THT\}, E_7 = \{TTH\}, E_8 = \{TTT\}$

2.6.5 मिश्र घटना (Compound Event):-

यदि किसी घटना में एक से अधिक प्रतिदर्श बिन्दु होते है, तो उसे मिश्र घटना कहते है। उदाहरणार्थ- एक सिक्के के तीन उछालों के परीक्षण में निम्नलिखित घटनाएँ मिभ्र घटनाएँ है |

E_1 =तथ्यत:एक पट् प्रकट होना

E_2 = न्यूनतम एक पट् प्रकट होना

E_3 = अधिकतम एक पf प्रकट होना, इत्यादि ।

इन घटनाओं के संगत S के उपसमुच्चय निम्नलिखित है:

$E_1 = \{HHH, HTH, THH\}$

$E_2 = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTT\}$

$E_3 = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$

उपर्युक्त प्रत्येक उपसमुच्चय में एक से अधिक प्रतिदर्श बिन्दु है इसलिए यह सभी मिभ्र घटनाएँ है ।

2.6.6 परस्पर अपबर्जी घटनाएँ (Mutually Exclusive Event):-

दो घटनाएँ A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ कहलाती है, यदि इनमें से किसी एक की घटित होना दूसरी के घटित होने को अपवर्जित करता है अर्थात् दोनो घटनाएँ एक साथ घटित नहीं हो सकती है । इस दशा में समुच्चय A तथा B असंयुक्त (Disjoint sets) होते है ।

उदाहरणार्थ- एक पासा फेंकेने के परीक्षण के परिणामों को घटना A एक सम संख्या तथा घटना B एक विषम संख्या का प्रकट होना' को व्यक्त करे तो घटनाएँ A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनाएँ है । अर्थात्

$A = \{2, 4, 6\}$ तथा $B = \{1, 3, 5\}$

स्पष्टतया $A \cap B = \phi$ अर्थात A तथा B असंयुक्त समुच्चय है । पुन: यदि उपरोक्त उदाहरण में घटना A एक सम संख्या का प्रकट होना' तथा घटना B '4 से छोटी संख्या प्रकट होना' तो देखते है कि: तथा $B = \{1, 2, 3\}$ अब $2 \notin A$ तथा साथ ही $2 \notin B$, इसलिए समुच्चय A तथा B असंयुक्त नहीं है । अत: घटनाएँ A तथा B परस्पर अपवर्ती घटनाएँ नहीं है ।

2.6.7 निःशेष घटनाएँ (Exhaustive Event):-

घटनाएँ $E_1, E_2, E_3, ...E_n$ निःशेष घटनाएँ कहलाती है यदि यादृच्छित परीक्षण करने पर इनमें से कम से कम एक घटना अवश्य ही घटित हो । अर्थात यदि घटनाएँ $E_1, E_2, E_3, ...E_n$ किसी प्रतिदर्श समष्टि S की n घटनाएँ है और यदि $E_1 \cup E_2 \cup, E_3 \cup, ... \cup E_n = s$

तब $E_1, E_2, E_3, ...E_n$ को निःशेष घटनाएँ कहते है । उदाहरणार्थ- एक पासे को फेंकेने पर प्रतिदर्श समष्टि S={1, 2,3,4,5,6}

अब निम्नलिखित घटनाओं को परिभाषित करे:

A: '3 से छोटी संख्या प्रकट होना

B: '2 से बडी किंतु 5 से छोटी संख्या प्रकट होना

तथा c: '3 से बड़ी संख्या प्रकट होना

तब $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}, C = \{4, 5, 6\}$

हम देखते है कि $A \cup B \cup C = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{4, 5, 6\}$

अत: घटनाएँ A,B तथा C, निःशेष घटनाएँ है ।

2.6.8 समप्रायिक घटनाएँ (Equally Likely Event):-

यदि किसी प्रयोग में सभी घटनाओं के घटित होने की समान सम्भावना हो अर्थात किसी एक घटना घटने में किसी अन्य के घटने से प्राथमिकता नही हो, तो ऐसी घटनाएँ समप्रायिक घटनाएँ कहलाती है । उदाहरणार्थ- एक पासे के उछाल में उपरी फलक में 1 या 2 या 3 या 4 या 5 या 6 अकं आना समप्रायिक घटनाएँ हे ।

2.6.9 अनुकूल घटनाएँ (Favorable Event):-

किसी यादृच्छित प्रयोग में एक विशेष घटना के अनुकूल घटनाएँ या स्थितियों उस प्रयोग के उन सम्भावित परिणामों की संख्या है जिनमें वह घटना घटित होती है । उदाहरणार्थ- दो पासी को एक साथ फेंकेने पर अंको का योग 10 आने के लिए 3 अनुकूल स्थितियाँ (4, 6),(5, 5), (6, 4) होंगी ।

2.6.10 प्रायिकता की गणितीय परिभाषा (Mathematical Definition of Probability):-

यदि किसी यादृच्छिक प्रयोग में कुल n परिणाम जो निःशेष, परस्पर अपवर्जी एवं समप्रायिक हो, और उनमें से m परिणाम किसी विशेष घटना A के अनुकूल हो तो घटना A के घटने की प्रायिकता अनुपात m/n द्वारा परिभाषित की जाती है तथा इसे P(A) द्वारा व्यक्त किया जाता है । अत:

$$P(A) = \frac{\text{घटना A के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के कुल परिणामों की संख्या}} = \frac{m}{n}$$

पुन: घटना A के घटित न होने के पक्ष में अनुकूल परिणामों की संख्या n-m होंगी ।

अत: यदि घटना A के घटित नहीं होने की प्रायिकता को $P(\overline{A})$ से निरूपित करे तो

P (A) $= \dfrac{\text{घटना A के प्रतिकूल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के कुल परिणामों की संख्या}} = = \dfrac{n-m}{n}$

$$\Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$$

$\therefore P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ या $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

निश्चितता की अवस्था में m=n होगा, अत: इस दशा में P(A) तथा असम्भवता की अवस्था में m=0 होगा, अत: इस दशा में P(A)=0 अत: प्रत्येक घटना A के लिए $0 \le P(A) \le 1.$

टिप्पणी : यदि $P(A) = \dfrac{m}{n}$ तथा $P(\overline{A}) = \dfrac{n-m}{n}$ है तो हम कहेंगे कि घटना A के पक्ष में संयोगानुपात =m::(n-m)

तथा घटना A के विपक्ष में संयोगानुपात $= \dfrac{n-m}{m}$

उदाहरण 33: एक पासे को फेंकने पर उपरिफलक में 2 से बड़ा अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

हल : एक पासे को फेंकने पर कुल 6 तरह के अंक 1 या 2 या 3 या 4 या 5 या 6 आने की सम्भावना रहती है । अत: यहाँ कुल परिणामों की संख्या 6 है । दी हुई घटना के अनुकूल परिणाम 3 या 4 या 5 या 6 हो सकते है अत: घटना A(2 से बड़ा अंक) के लिए 4 अनुकूल स्थितियाँ होगी ।

अत: अभीष्ट प्रायिकता (P(A)) $= \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ उत्तर

उदाहरण 34: ताश की एक गड्डी में से यादृच्छिक रूप से एक पत्ता खींचने पर इस पत्ते के (i) बादशाह होने (ii) लाल रंग के होने तथा (iii) ईट का बादशाह होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

हल: ताश के 52 पत्तों में से एक पत्ता 52 तरीकों से खींचा जा सकता है । अत: कुल समप्रायिक निःशेष स्थितियाँ=52

(i) चूंकि 52 पत्तों में 4 पत्ते बादशाह के होते है अर्थात बादशाह का पता 4 तरीकों से खींचा जा सकता है । इस प्रकार बादशाह के अनुकूल स्थितियाँ = 4

अत: बादशाह होने की प्रायिकता $= \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$

(ii) चूंकि ताश के 52 पत्तों में लाल रंग के पत्तों की संख्या 26 होती है अर्थात् एक लाल रंग का पत्ता 26 तरीकों से खींचा जा सकता है । इस प्रकार लाल रंग के अनुकूल स्थितियाँ=26

अत: लाल रंग का पता होने की प्रायिकता $= \dfrac{26}{52} = \dfrac{1}{2}$

(iii) चूंकि ताश के 52 पत्तों में सिर्फ एक ईट का बादशाह होता है अर्थात ईट का बादशाह 1 तरीके से खींचा जा सकता है । इस प्रकार ईट के बादशाह आने की अनुकूल स्थितियाँ=1

अत: ईट का बादशाह आने के प्रायिकता$=\frac{1}{52}$

2.6.11 कुछ संकेतन (Some Notations):-

यदि किसी यादृच्छिक प्रयोग के A तथा B दो घटनाएँ है, तो यहाँ हम निम्न संकेतों का प्रयोग करेंगे ।

(i) किसी एक अथवा कम से कम एक के घटित होने की प्रायिकता को P(A या B) अथवा P(A+B) अथवा P$\left(A\cup B\right)$से दर्शाते है ।

(ii) A तथा B, दोनों के एक साथ घटने की प्रायिकता को P(A तथा B) अथवा P(AB) अथवा P$\left(A\cup B\right)$ से दर्शातें है ।

(iii) A के घटित होने की प्रायिकता जबकि B घटित हो चुकी हो को A की सप्रतिबंध प्रायिकता कहते है तथा इसे P(A/B) से दर्शाते है । इसी प्रकार P(B/A),B के घटने की संप्रतिबंध प्रायिकता है जबकि A घटित हो चुकी हो ।

2.6.12 प्रायिकता का योग का नियम (Addition Law of Probability):-

स्थिति- I जब घटनाएँ परस्पर अपवर्ती न हो (When the event are not mutually exclusive) यदि दो घटनाएँ A तथा B परस्पर अपवर्जी नही हो तो इनमें से किसी एक घटना घटने की प्रायिकता होगी:

P (A या B) = P (A+B) =P (A) +P (B)-P (AB)

या

P$\left(A\cup B\right)$=P (A) +P (B)-P$\left(A\cup B\right)$ .....(1)

इसी प्रकार यदि कोई तीन घटनाएँ A,B तथा C जो परस्पर अपवर्जी नहीं हो तो इनमें से किसी एक घटना घटने की प्रायिकता होगी :

P (A या B या C) =P (A+B+C)

=P (A) +P (B) +P(C)-P (AB)-P (BC)-P (AC) +P (ABC)

या

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C) \quad \text{.... (2)}$$

उदाहरण 35: ताश के 52 पत्तों की एक भली-भांति फेंटी हुई गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया है । निकाले गये पत्ते की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि वह पत्ता इक्का या ईट का पता हों ।

हल: चूंकि 52 पत्तों में से एक पता 52 तरीकों से निकाला जा सकता है अत: कुल सम्भावित परिणाम = 52

माना निकाला गया पत्ता इक्का होने की घटना को A तथा ईट का होने की घटना B से निरूपित करें तो हम प्राप्त करते है

$$P\ (A) = \frac{\text{A के अनुकूल स्थितियों की संख्या}}{\text{कुल सम्मावित परिणामों की संख्या}} = \frac{4}{52}$$

इसी प्रकार

$$P\ (B) = \frac{\text{ईट का पला होनेकेअनुकूल स्थितियों की संख्या}}{\text{कुल सम्मावित परिणामों की संख्या}} = \frac{13}{52}$$

पुन: चूंकि घटनाएँ A तथा B परस्पर अपवर्जी नहीं है ($\because$ निकाला गया पत्ता ईट का ही इक्का हो सकता है)

$$P\ (AB) = \frac{\text{निकाले गये पत्ते के ईट का ही ईक्का होने के अनुकूल स्थितियों की संख्याबी}}{\text{कुल सम्भावित परिणामों की संख्या}} = \frac{1}{52}$$

अत: प्रायिकता के योग के नियम से

P (A या B) =P (A) +P (B)-P (AB)

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52}$$

$$= \frac{16}{52}$$

P (इक्का या ईट का पत्ता) $= \frac{4}{13}$ उत्तर

उदाहरण 36: दो पासे के फेंके जाने पर, ऐसे योग के प्राप्त करने की क्या प्रायिकता है जो 2 या 3 से विभाजित हो?

हल : दो पासों के फेंके जाने पर कुल संभावित परिणामों की संख्या =6x6=36 माना कि घटना A, योग 2 से भाज्य तथा घटना B, योग. 3 से भाज्य को निरूपित करती है ।

अब योग दो से भाज्य हो तो योग 2,4,6,8,10,12 हो सकता है ।

2 का योग के अनुकूल स्थितियाँ =(1,1)

4 का योग के अनुकूल स्थितियाँ = (1, 3), (2, 2), (3, 1)

6 का योग के अनुकूल- स्थितियाँ? (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)

8 का योग के अनुकूल स्थितियाँ = (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6,3)

10 का योग के अनुकूल स्थितियाँ? (4 6), (5, 5) (6, 4)

12 का योग के अनुकूल स्थितियाँ = (6, 6)

अत: 2 से भाज्य योग के अनुकूल कुल स्थितियाँ की संख्या=18

$\therefore$ P (A) P (2 से भाज्य योग) $=\frac{18}{36}$

पुन: योग 3 से भाज्य हो तो योग 3,6,9,12 हो सकता है ।

3 का योग के अनुकूल स्थितियाँ? (1, 2), (2, 1)

6 का योग के अनुकूल स्थितियाँ? (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)

9 का योग के अनुकूल स्थितियाँ = (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)

12 का योग के अनुकूल स्थितियाँ = (6,6)

अत: 3 से भाज्य योग के अनुकूल कुल स्थितियाँ की संख्या=12

$\therefore$ P (B) =P (3 से भाज्य योग) $=\frac{12}{36}$

परन्तु योग 6 तथा 12, दोनों संख्याओं 2 तथा 3 से भी भाज्य है । अत: 2 तथा 3, दोनों से भाज्य योग के अनुकूल कुल स्थितियाँ=6

$\therefore$ P (AB) =P (2 तथा 3, दोनों से भाज्य योग) $=\frac{6}{36}$

अत: प्रायिकता के योग के नियम से

P (A या B) =P (A) +P (B)-P (AB)

$$=\frac{18}{36}+\frac{12}{36}-\frac{6}{36}$$

$\Rightarrow P(A$ या B)= $=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$ उत्तर

स्थिति-II जब घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हो (When the events are mutually exclusive):-

यदि दो घटनाएँ A तथा B, परस्पर अपवर्जी हो तो इनमें से किसी एक घटना घटने की प्रायिकता होगी:

P(A या B)=P(A+B)=P($A\cup B$)=P(A)+P(B) ....(3)

इसी प्रकार यदि कोई तीन घटनाएँ A,B तथा C जो परस्पर अपवर्जी हो तो इनमें से किसी एक घटना घटने की प्रायिकता होगी:

P(A या B या C)=P(A+B+C)=P($A\cup B\cup C$)=P(A)+P(B)+P(C) .....(4)

टिप्पणी : कई परस्पर अपवर्जी घटनाएँ $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ में से किसी एक के घटित होने की प्रायिकता

P (A_1 या A_2 या A_3.... या A_n) =P ($A_1+A_2+A_3+......+A_n$)

$=P(A_1)+P(A_2)+A_3+......+P(A_n)$

उदाहरण 37: ताश के 52 पत्तों की अच्छी तरह से फेंटी गई गड्डी में से एक पत्ता याद्दच्छिक रूप से निकाला जाता है । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाला गया पत्ता इक्का, बादशाह अथवा बेगम होगा ।

हल : चूकि ताश के 52 पत्तों में से एक पत्ता 52 तरीकों से निकाला जा सकता है । अत: कुल संभावित परिणामों की संख्या=52

पुन: चूंकि 52 पत्तों में से 4 पत्ते इक्कों के है, इसलिए इक्के का पत्ता 4 तरीकों से निकाला जा सकता है ।

अत: इक्का निकालने की अनुकूल स्थितियाँ = 4

$\therefore$ निकाले गये पत्ते के इक्का होने की प्रायिकता =P(इक्का)= $\frac{4}{52}$

इसी प्रकार निकाले गये पत्ते के बादशाह होने की प्रायिकता

=P (बादशाह) $=\frac{4}{52}$

तथा निकाले गये पत्ते के बेगम होने की प्रायिकता

=P (बेगम) $=\frac{4}{52}$

चूंकि तीनों घटनाएँ परस्पर अपवर्जी है । अत: प्रायिकता के योग के नियम से

P (इक्का या बादशाह या बेगम) =P (इक्का) +P (बादशाह) +P (बेगम)

$=\frac{4}{52}+\frac{4}{52}+\frac{4}{52}$

$=\frac{12}{52}$

$=\frac{3}{13}$ उत्तर

उदाहरण 38: दो पासे फेंके जायें तो दोनो पासों के उपरिफलको पर योग 8 या 11 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

हल : दो पासों को फेंके जाने पर कुल नि: शेष स्थितियों की संख्या =6x6=36 माना कि घटना A, योग 8 आने तथा घटना A योग 11 आने को व्यक्त करते है । अब घटना A, अर्थात योग 8 आने की अनुकूल स्थितियाँ

= (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)

अत: योग 8 आने की प्रायिकता=P(A)= <u>A के अनुकूल स्थितियों की संख्या</u>

कुछ संभावित परिणामों की संख्या

$\Rightarrow P(A)=\frac{5}{36}$

पुन: घटना B, अर्थात योग 11 आने की अनुकूल स्थितियाँ

= (5, 6), (6, 5)

अत: योग 11 आने की प्रायिकता P(B)= <u>B के अनुकूल स्थितियों की संख्या</u>

कुछ संभावित परिणामों की संख्या

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2}{36}$$

चूंकि दोनों घटनाएँ परस्पर अपवर्जी है ।

अत: प्रायिकता के योग के नियम से

P (A या B) =P (A) +P (B)

$$= \frac{5}{36} + \frac{2}{36}$$

$$= \frac{7}{36} \text{ उत्तर}$$

2.6.13 प्रायिकता का गुणन नियम (Multiplication Law of Probability):-

यदि कोई दो घटनाएँ A तथा B है तो दोनों के एक साथ घटित होने की प्रायिकता होगी:

P (A तथा B) =P (AB) =P ($A \cap B$) =P (A).P (B/A)

या

P (B).P (A/B) ...... (5)

जहाँ P(B/ A), घटना B की प्रतिबान्धित प्रायिकता (जब घटना A घटित हो चुकी हो) तथा A(A/ B), घटना A की प्रतिबन्धित प्रायिकता (जब घटना B घटित हो चुकी हो) को व्यक्त करती है ।

विशेष स्थिति: जब दोनों घटनाएँ परस्पर स्वतंत्र घटनाएँ हो तो P(B/ A)=P(B) तथा P(A/ B)=P(A), अत: इस स्थिति में

P (A तथा B) =P (AB) =P ($A \cap B$) =P (A) .... (6)

टिप्पणी :- दो या दो से अधिक घटनाएँ स्वतंत्र घटनाएँ कहलाती है जब उनमें से किसी एक का घटित होना, शेष के घटित होने पर कोई प्रभाव नही डालता । यदि किसी एक का घटित होना शेष के घटने पर प्रभाव डालती है तो वे परस्पर आश्रित घटनाएँ कहलाती है ।

उदाहरण 39: एक थैले में 6 सफेद तथा 9 काली गेंद है, इनमें से 4 गेंद एक साथ निकाली जाती है । प्रथम बार इन गेंदों के सफेद गेंदे होने तथा दूसरी बार इन गेंदों का काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जबकि

(i) दूसरी बार गेंद निकालने से पहले गेंदे थैले में वापस नहीं डाली जाती हो, तथा

(ii) दूसरी बार निकालने से पहले गेंदे वापिस थैले में डाल दी जाती हो ।

हल: (i) जब गेंदें थैले में वापिस नहीं डाली जाती:

पहली बार में 4 गेंदें निकाले जाने के कुल तरीके $= {}^{15}C_4$

पहली बार में 4 सफेद गेंदें निकाले जाने के कुल तरीके $= {}^{6}C_4$

$\therefore$ प्रथम बार में 4 सफेद गेंदें आने की प्रायिकता $= \frac{{}^{6}C_4}{{}^{15}C_4}$

दूसरी बार गेंदें निकालते समय थैले में 2 सफेद +9 काली =11 गेंदें रह जाती है ।

अतः दूसरी बार में 4 गेंदें निकाले जाने के कुल तरीके $= {}^{11}C_4$

तथा दूसरी बार में 4 काली गेंदें निकाले जाने के कुल तरीके $= {}^{9}C_4$

द्वितीय बार में 4 काली गेंदें आने की प्रायिकता $= \frac{{}^{9}C_4}{{}^{11}C_4}$

अतः प्रायिकता के गुणन नियम से

अभीष्ट प्रायिकता दास्थ्यद्र$= \frac{{}^{9}C_4}{{}^{15}C_4} x \frac{{}^{8}C_4}{{}^{11}C_4}$

$= \frac{1}{91} x \frac{21}{55} = \frac{3}{715}$

(ii) जब गेदें थैले में वापिस डाल दी जायें:

थैले में कुल गेदें =6+9=15

$\therefore$ थैले में से 4 गेदें निकाले जाने के कुल तरीके $= {}^{15}C_4$

चूंकि थैले में कुल 6 सफेद गेंदें हैं

$\therefore$ 4 सफेद गेंदें निकाले जाने के कुल तरीके $= {}^{6}C_4$

अतः प्रथम बार में 4 सफेद गेंदें आने की प्रायिकता $(p_1) = \frac{{}^{6}C_4}{{}^{15}C_4}$

चूंकि दूसीर बार निकालने से पहले गेंदें थैले में वापिस रख दी जाती हैं अतः थैले में कुल गेंदें 15 ही होंगी ।

अतः दूसरी बार में 4 गेंदे निकाले जाने के कुल तरीके $= {}^{15}C_4$

पुनः चूंकि थैले में कुल 9 काली गेंदे हैं

$\therefore$ 4 काली गेंदे निकाले जाने के कुल तरीके $= {}^{9}C_4$

अतः द्वितीय बार में 4 काली गेंदें आने की प्रायिकता $(p_2) = \frac{{}^{9}c_4}{{}^{15}c_4}$

चूंकि उपरोक्त दोनों घटनाएँ स्वतन्त्र हैं ।

अतः प्रायिकता के गुणन नियम हैं ।

अभीष्ट प्रायिकता $p_1 X p_2$

$$= \frac{{}^{6}C_4}{{}^{15}C_4} X \frac{{}^{9}C_4}{{}^{15}C_4}$$

$$= \frac{\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}}{\frac{15.14.13.12}{1.2.3.4}} X \frac{\frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}}{\frac{15.14.13.12}{1.2.3.4}} = \frac{1}{91} X \frac{6}{65} X \frac{6}{5915}$$

उदाहरण 40: बच्चों के तीन समूहों में क्रमशः 3 लड़कियाँ और 1 लड़का, 2 लड़कियाँ और 2 लड़के, 1 लड़की और 3 लड़के है । प्रत्येक समूह में से एक बच्चा याद्दच्छिक रूप से चुना जाता है । 1 लड़की तथा 2 लड़के चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

हल : 1 लड़की और 2 लड़को को चुने जाने की निम्न तीन घटनाएँ हो सकती है ।

	पहला समूह	दूसरा समूह	तीसरा समूह
A:	लड़की	लड़का	लड़का
B:	लड़का	लड़की	लड़का
C	लड़का	लड़का	लड़की

अब घटना A के लिए:

पहले समूह से लड़का चुनने की प्रायिकता $=\frac{3}{4}$

दूसरे समूह से लड़का चुनने की प्रायिकता $=\frac{2}{4}$

तीसरे समूह Kसे लड़का चुनने की प्रायिकता $=\frac{3}{4}$

चूंकि ये तीनों चुनाव परस्पर स्वतंत्र हैं ।

$\therefore \qquad P(A)=\frac{3}{4}X\frac{2}{4}X\frac{3}{4}=\frac{9}{32}$

इसी प्रकार $\qquad P(B)=\frac{1}{4}X\frac{2}{4}X\frac{3}{4}=\frac{3}{32}$

तथा $\qquad P(C)=\frac{1}{4}X\frac{2}{4}X\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$

चूकी घटनाएँ A ,B,,C परस्पर अपवर्जी है, अत: प्रायिकता के योग नियम से अभीष्ट प्रायिकता $=P(A)+P(B)+P(C)$

$$=\frac{9}{32}+\frac{3}{32}+\frac{1}{32}=\frac{13}{32}$$

2.6.14 कम से कम एक घटना की प्रायिकता (Probability of atlest one event):-

यदि n स्वतंत्र घटनाएँ A\$_1$,A.$_2$,A.$_3$....An $_n$ अंत हो तथा इनकी प्रायिकताएँ क्रमश: P_1, P2, P3............P_n हो, तो उनमें से कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता होगी:

P (कम से कम एक घटना) =1-[(1-P_1)] [(1-P_2) (1-P_3)............ (1-P_n)]......... (7)

उदाहरण 41: गणित की एक समस्या तीन विद्‌यार्थियों A,B तथा C को दी जाती है, जिनके उसे हल करने की प्रायिकताएँ क्रमश: $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ व $\frac{1}{4}$ है । समस्या हल होने की क्या प्रायिकता होगी?

हल: दिया हुआ है कि विद्‌यार्थी A द्‌वारा समस्या हल करने की प्रायिकता अर्थात् $P(A)=\frac{1}{2}$

इसी प्रकार दिया हुआ है कि $P(B)=\frac{1}{3}$

तथा $P(C)=\frac{1}{4}$

अब चूंकि समस्या हल होने की प्रायिकता ज्ञात करनी है । समस्या तीनों विद्यार्थियों में से किसी एक या दो या तीनों द्वारा हल की जा सकती है । अत: कम से कम एक विद्यार्थी द्वारा समस्या का हल ही अभीष्ट प्रायिकता होगी, अर्थात् समस्या हल होने की प्रायिकता =P (कम से कम एक विद्यार्थी द्वारा हल) =1-[{1-P} {1-P(B)} {1-P(C)}]

$$=1-\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$=1-\frac{1}{2}X\frac{2}{3}X\frac{3}{4}$$

$$=1-\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ समस्या हल होने की प्रायिकता $=\frac{3}{4}$ **उत्तर**

बोध प्रशन-2.6

1. एक लीप वर्ष (जब फरवरी माह 29 दिनों का हो) में 53 सोमवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

2. थैले में 9 गेंदे है जिनमें से 4 लाल रंग की, 3 नीले रंग की और 2 पीले रंग की है । थैले में से एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई गेंद (i) लाल रंग की है (ii) पीले रंग की है (iii) नीले रंग की नहीं है (iv)लाल रंग की या पीले रंग की है ।

3. निम्नलिखित सारणी में खाली स्थान भरिए:

	P(A)	P(B)	$P(A\cap B)$	$P(A\cup B)$
(i)	1/3	1/5	1/15	----------
(ii)	0.5	0.35	-------	0.7
(iii)	0.35	------	0.25	0.6

4. एक कक्षा में 60 विद्यार्थियों में से 30 विद्यार्थी गणित पढ़ते है, 32 विद्यार्थी जीव विज्ञान पढ़ते है तथा 24 विद्यार्थी गणित और जीव विज्ञान दोनो पढ़ते है । यदि कक्षा का एक विद्यार्थी यादृच्छियाँ चुना जाता है । तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह गणित या जीव विज्ञान पढ़ता होगा ।

5. एक थैले में 4 लाल और 3 काली गेदें है । थैले में से दो बार 2-2 गेंदें यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है । प्रथम बार में दोनों लाल और दूसरी बाद दोनों काली गेदें निकलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जबकि

(i) पहली बार निकालने के बाद गेंदे थैले में वापिस नहीं डाली जाती हो

(ii) पहली बार निकालने के बाद गेंदे थैले में वापिस रख दी जाती हो

नोट:- कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर, अन्त में दिये गये उत्तरों से मिलान कर लेगें ।

2.7 सारांश (Summary)

1. समाकलन तथा अवकलन परस्पर प्रतिलोम प्रक्रियाएँ होती है ।
2. यदि $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ तो $\int f(x)dx = F(x)+c$
3. $\int u.vdx = u\int vdx - \int\left\{\frac{du}{dx}.\int vdx\right\} dx$
4. यदि $\int f(x)dx = F(x)+c$ हो तो $\int_a^b f(x)dx = F(b)-f(a)$
5. $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{यदि } f(x) \text{ सम फलन है} \\ 0, & \text{यदि } f(x) \text{ विषम फलन है} \end{cases}$
6. ${}^{n}P_{r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}$
7. ${}^{n}c_{r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}$
8. P (A) = $\frac{\text{घटना A के अनुकुल परिणामों की संख्या}}{\text{प्रयोग के कुल परिणामों की संख्या}}$
9. यदि $A\Omega B = \varnothing$ तो घटनाएँ A तथा B परस्पर अपवर्जी होती है ।
10. P(A या B)=P(A)+P(B)-P(AB)
11. P(A या B)=P(A).P(B/A)
12. यदि घटनाएँ A तथा B परस्पर स्वतंत्र हो तो P(B/A)=P(B)

2.8 शब्दावली (Glossary)

प्रक्रिया	Procedure
व्यापक	General
प्रकृति	Nature
गुणनखण्ड	Factor
त्रिकोणमितीय	Trigonometrical
चरघातांकी	Exponential
अंश	Numerator
हर	Denominator
बहु पद	Polynomial
पुनरावृत्ति	Repeat
एक घातीय	Linear
भिन्न-भिन्न	Different

फैकना/उछालना	Toss
पक्ष में संयोगानुपात	Odds in favour
विपक्ष में संयोगानुपात	Odds against
फलक	Face
उपरिफलक	Upper face

2.9 संदर्भ ग्रन्थ (Reference books)

विस्सु सुशील कुमार, शर्मा राजनारायण तथा झंवर रामेश्वर प्रसाद	समाकलन गणित एवं अवकल समीकरण	माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान अजमेर
बंसल जे. एल., भार्गव एस. एल. तथा अग्रवाल एस एम	समाकलन गणित-I	जयपुर पब्लिशिंग हाऊस, जयपुर
जैन सी. के. तथा हुकुम सिंह	गणित-I	राष्ट्रिय शैक्षिक अनुसंधान और परिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
भागचन्दानी पी.		साहित्य भवन पब्लिकेशन

2.10 प्रश्नावली-2 (अभ्यास कार्य)

1. निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए ।

 (i) $\dfrac{ax^3 - bx^2 + c}{x^2}$ (ii) 5cos x +2sec^2 x-6 (iii) $\log_x x$

 (iv) $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos}$

2. निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए-

 (i) $\int \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ (ii) $\int \dfrac{\log\left\{x+\sqrt{1+x^2}\right\}}{\sqrt{1+x^2}}dx$

 (iii) $\int \dfrac{e^m \tan^{-1} x}{1+x2}dx$ (iv) $\int \cot x dx$

3. निम्नलिखित का मान इप्रत कीजिए-

 (i) $\int xe^x dx$ (ii) $\int \tan^{-1} x dx$

 (iii) $\int x \sec^2 x dx$ (iv) $\int e^x(\sin x + \cos x)dx$

4. निम्नलिखित समाकल का मान ज्ञात कीजिए-

 (i) $\int \dfrac{dx}{x^2 - x - 2}$ (ii) $\int \dfrac{dx}{x^2 - 36}$

(iii) $\int \frac{(x2+1)}{(x^2-1)}dx$ (iv) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$

5. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए ।

(i) $\int_2^5 \frac{dx}{x}$ (ii) $\int_0^1 \frac{2xdx}{5x^2+1}$

(iii) $\int_{-1}^1 \log\left(\frac{2-x}{2+x}\right)dx$ (iv) $\int_2^5 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+\sqrt{7-x}}$

6. दो पासों को एक बार फेंकने के परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए ।

7. एक सिक्के को तीन बार उछाला गया है । निम्नलिखित घटनाओं को व्यक्त करते है ।

A: कोई चित्त प्रकट नहीं होना

B. तथ्यत: एक चित्त प्रकट होना

C: कम से कम दो चित्त का प्रकट होना ।

क्या यह परस्पर अपवर्जी तथा निःशेष घटनाओं का समुच्चय है?

8. ताश के 52 पत्तों की एक भली-भांति फेंटी गई गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है । निकाले गये पत्ते की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि (i) पत्ता हुकुम का हो । (ii) पत्ता काले रंग का हो ।

9. दो विद्यार्थियों A तथा B एक परीक्षा में प्रविष्ट हुए। A के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 00.5 है और B के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.10 है । दोनों के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 0.02 है । विद्यार्थी A या B के परीक्षा में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

10. ताश के 52 पत्तों की एक अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी में से 4 पत्ते निकाले जाते है । इस बात की क्या प्रायिकता है कि निकाले गये पत्तों में 3 ईट और एक हुकुम का पत्ता हो?

11. एक थैले में 8 गेंदें है जिनमें 5 लाल और 3 सफेद है । दो गेंदें एक-एक करके थैले से निकाली जाती है । क्या प्रायिकता होगी, जबकि

(i) एक गेंद सफेद तथा दूसरी लाल हो,

(ii) दोनों गेंदें समान रंग की हो ।

12. किसी परीक्षा में एक छात्र के उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 2/5 है तथा एक छात्रा के उत्तीर्ण होने की प्रायिकता 1/5 है । इनमें से कम से कम एक के उत्तीर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

2.11 उत्तरमाला

बोध प्रशन 2.2

1. $(i)\ \frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+c\log|x|+k$ (ii) $5ex+4\tan x-3\log|x|+c$

2.(i) $\frac{(\log x)^4}{4}+c$ (ii) $e^{\tan^{-1}x}+c$ (iii) $\log\left|e^x-e^{-x}\right|+c$

3.(i) $\frac{x^2}{2}\log|x|-\frac{x^2}{4}+c$ (ii) $-e-x(x^2+2x+2)+c$

(iii) $x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log\left|1+x^2\right|+c$ (iv) $x\tan x-\log\left|\sec x\right|+c$

4.(i) $\frac{1}{2}log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$ (iii) $\frac{1}{3}log\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+c$

बोध प्रश्न - 2.3

1. $\frac{1}{2}log\left|\frac{5}{3}\right|$ 2. $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ 3. $1+\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}-\frac{9}{2}\log\frac{5}{4}$

4. $\pi/4$ 5.0 6. 12

बोध प्रश्न-2.4

1.(i) 110 (ii) 60 (iii) 4 (iv) $\lfloor 9$ या 362880

2.7 3. 3024 4. $\frac{\lfloor 9}{\lfloor 2\lfloor 2\lfloor 2}$ अर्थात 45360 5. $\frac{\lfloor 9}{2}$

बोध प्रश्न-2.5

1.(i) 364 (ii) 25 (iii) 78

2.10626 3. 10,6 4. 3960 5. 2880

बोध प्रश्न-2.6

1. 2/7 2. (I) 4/9, (ii) 2/9,(iii) 2/3 (iv) 7/9

प्रश्नावली-2

1. (i) $\frac{ax}{2}-x-\frac{c}{x}+k$ (ii) 5sin x+2tan x-6x+k

(iii) x+c(iv) x-sin x+c

2. (i) -2cos $\sqrt{x}+c$ (ii) $\frac{1}{2}\left[log\left\{x+\sqrt{1+x^2}\right\}\right]^2+c$

(iii) $\frac{e^{m\tan^{-1}x}}{m}+c$ (iv) log sin x+c

3. (i) $e^x(x-1)+c$(ii) x $\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+c$

(iii) x tan x-log sec x +c(iv) e^x sin x+c

4. (i) $\frac{1}{3}\log\left(\frac{x-2}{x+1}\right)+c$ (ii) $\frac{1}{12}\log\left(\frac{x-6}{x+6}\right)+c$

(iii) $x+\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+c$ (iv) $\tan^{-1}(x+1)+c$

5. (i) $\log\left(\frac{5}{2}\right)$ (ii) $\frac{1}{5}\log 6$ (iii)0(iv) $\frac{3}{2}$

6.{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,5),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

7. हाँ, A,B तथा परस्पर अपवर्जी व निःशेष घटनाओं का समुच्चय बनाते है ।

8. (i)1/4,(ii)1/2, (iii)1/13

9. 0.13या $\left(\frac{13}{100}\right)$

10. $\frac{{}^{13}c_3 X\, {}^{13}C_1}{{}^{52}c_4}$

11. (i)30/76 (ii) 26/56

12. 13/25

इकाई 3

कम्प्यूटर (अ)
Computers (A)

ईकाई की रूपरेखा

3.0 उद्देश्य (Objective)

इस अध्याय में आप कम्प्यूटर के बारे में, कम्प्यूटरों के विभिन्न प्रकार, इनके विभिन्न मुख्य भाग तथा उनके कार्य क्षेत्र इत्यादि के बारे में अध्ययन करेंगे ।

3.1 प्रस्तावना (Introduction)

जब भी किसी के सामने देशा या विदेश की प्रगति के बारे में बात करते है तो हर किसी से यही वाक्य निकलता है कि "आज का युग तो कम्प्यूटर युग है.।"कम्प्यूटरों ने जितनी तीव्र गति से प्रगति की है, उतनी आज तक किसी क्षेत्र में नहीं की है । कम्प्यूटर ने जीवन के हर क्षेत्र में मौलिक परिवर्तन कर दिये है । अब कम्प्यूटर केवल कार्यो को जल्दी से पूरा कर लेने का, या सूचनाओं को ढग से एकत्रित करने इत्यादि का ही साधन नहीं रहा, अपितु वह तो व्यापार और उद्योगों में व्यवस्था को नई दिशाएँ दिखाने का साधन बन गया है । बहुत अधिक मात्रा में सूचनाओं को एकत्र कर के उन्हें विद्युत-गति से उपयोग में ले सकने की अपनी क्षमता के कारण आज कम्प्यूटर हमारे जीवन के हर पहलू में प्रवेश कर चुका है । आज कम्प्यूटर के माध्यम से बैंको में कामकाज हो रहा है । कम्प्यूटर द्वारा वायुयान, रेलवे तथा होटलों में सीटों का आरक्षण होता है । विश्वभर के कम्प्यूटरों के परस्पर संयोजन से बना एक संचार जाल, जिसे हम 'इन्टरनेट' कहते है, कम्प्यूटर युग की सबसे बड़ी उपलब्धि है ।

यद्यपि अब पर्सनल कम्प्यूटर बाजार में खुले मिलने लगें है, तब भी उनके विभिन्न आकार, प्रकार तथा उनकी कार्य करने की क्षमता आदि के बारे में हर किसी को जानने की आवश्यकता होती है । इस अध्याय मे हम कम्प्यूटर के बारे में संक्षिप्त जानकारी प्राप्त करेंगे अर्थात् कम्प्यूटर के विभिन्न भागों के बारे में तथा वह कैसे तथा क्या-क्या कर सकता है आदि के बारे में अध्ययन करेंगे ।

3.2 कम्प्यूटर का सामान्य परिचय (General Introduction to Computer)

कम्प्यूटर एक इलेक्ट्रॉनिक यंत्र है जो सूचनाओं को स्वीकार करके, उनकी गणनाएँ करके वांछित परिणाम देता है । यहाँ सूचनाएँ जो कम्प्यूटर को प्रेषित की जाती है तथा जिनकों 'डाटा अथवा ऑकड़े कहते है वह व्यक्तियों के पते हो सकते है, रेलवे रिजर्वेशन की सूचियाँ हो सकती है, मौसम की भविष्यवाणी सम्बन्धी जानकारी हो सकती है, इत्यादि ।

3.3 कम्प्यूटरों का वर्गीकरण (Classification of Computer)

साधारण तौर पर कम्प्यूटरों को तीन प्रकार से वर्गीकरण कर सकते है ।

(i) अनुरूप अथवा एनलॉग कम्प्यूटर

(ii) अंकीय अथवा डिजिटल कम्प्यूटर तथा

(iii) संकर अथवा हाइब्रिड कम्प्यूटर

3.31 (i) अनुरूप अथवा 'एनलॉग कम्प्यूटर (Analog Computer)

उन भौतिकीय राशियों जिनमें निरन्तर बदलाव अथवा सतत् प्रवाह होता है, को मापने के जिस यंत्र को काम में लेते है उन्हे एनलॉग कम्प्यूटर की श्रेणी में रखा गया है । जैसे-पैट्रोल पम्प पर लगी हुई मशीन जो पम्प के द्वारा निकले हुए पैट्रोल की मात्रा को मापने के साथ-साथ मूल्य की गणना करके भी दिखाती है यह एनलॉग कम्प्यूटर का उदाहरण ले सकते है । इसी प्रकार घरों या कार्यालयों में बिजली मापने में प्रयुक्त 'बिजली मीटर' वाहनों में लगने वाले स्पीडो-मीटर शरीर का तापक्रम मापने के काम में आने वाला 'थर्मामीटर, इत्यादि एनलॉग कम्प्यूटर के सरलतम उदाहरण है । एनलॉग कम्प्यूटर मुख्य रूप से औद्योगिक इकाइयों अथवा प्रयोग शालाओं में प्रयोग में लिए जाते है । जैसे केमिकल प्लान्टस, इलेक्ट्रिक पावर प्लांट इत्यादि ।

3.3.2 (ii) अंकीय अथवा 'डिजिटल' कम्प्यूटर (Digital Computer)

गणना या तार्किक क्रियाएँ अथवा मापन में प्रयुक्त होने वाले यंत्रों को 'डिजिटल' कम्प्यूटर की श्रेणी में रखा गया है । डिजिटल कम्प्यूटर सुचनाओं को विवृत अंक अथवा संकेत के रूप में ग्रहण करता है । तथा साथ ही ढेर सारी सूचनाएँ व निर्देशों को एक साथ ले सकता है तथा उन सुचनाओं तथा निर्देशों के अनुसार गण्नाएँ अथवा प्रक्रियाएँ करके एक साथ परिणाम देते है । 'केलकुलेटर स्केल इसका सरलतम उदाहरणहै ।

3.3.3 (iii) संकर अथवा हाइब्रिड कम्प्यूटर (Hybrid Computer)

हाइब्रिड कम्प्यूटर में एनलॉग तथा डिजिटल दोनों कम्प्यूटरों के गुण विद्यमान होते है । यह कम्प्यूटर गणना के साथ-साथ मापने का कार्य भी करते है । यह तापमान, विद्युत प्रवाह आदि संकेतों पर कार्य करते हुए संख्याओं की गणना का कार्य भी कर सकते है । जैसे 'ईसीजी मशीन' (दिल की धड़कन मापने का यंत्र) सुपर कम्प्यूटर इत्यादि हाइब्रिड कम्यूटर के उदाहरण है।

जब कोइ सामान्य व्यक्ति कम्प्यूटर के बारे में बात करता है तो वह डिजिटल कम्प्यूटर ही होता है । कम्प्यूटर अर्थात् 'डिजिटल कम्प्यूटर' को पुन: दो भागों में वर्गीकृत कर सकते हैं । (i) विशिष्ट - उद्देश्य कम्प्यूटर तथा (ii) सामान्य - उद्देश्य कम्प्यूटर

3.3.4 (i) विशिष्ट - उद्देश्य कम्प्यूटर (Special Purpose Computer)

जैसा कि नाम से स्पष्ट है कि ये कम्प्यूटर किसी विशिष्ट प्रकार के कार्य करने हेतु इनका निमार्ण किया जाता है । इन कम्प्यूटरों में किसी विशिष्ट कार्य के लिए वांछित निर्देशों के क्रम कम्प्यूटर की मशीन (मेमोरी) में स्थायी रूप से संग्रहित रहते है । 'एटीएम मशीन' (कार्ड के द्वारा रूपये निकालने अथवा जमा करवाने की मशीन) इसका सरलतम उदाहरण है ।

3.3.5 (ii) सामान्य - उद्देश्य कम्प्यूटर (General Purpose Computer)

सामान्य-उद्देश्य कम्प्यूटर विभिन्न प्रकार तथा भिन्न-भिन्न क्षेत्रों में सामान्य कार्य करने की क्षमता रखते हैं । इन कम्प्यूटरों को जिस क्षेत्र में काम में लेना होता है उसी के अनुरूप सूचनाओं को निर्देशित करते है हुए उस क्षेत्र की गणना अथवा तार्किक क्रियाएँ की जाती है । उक्त सूचनाओं के लिए निर्देशों के क्रम को स्थायी रूप से कम्प्यूटर की मैमोरी में संग्रहित नहीं किया जाता है, बल्कि इन्हे जब जरूरत हो तभी इनपुट डिवाइस के द्वारा कम्प्यूटर को प्रेषित किया जाता है । किसी दुकान (दवाइयों की) या विभागीय स्टोर पर वस्तुओं की रिकार्ड रखना बैंकों में लेने देने का हिसाब, डाकघरों में रजिस्ट्री अथवा 'स्पीड पोस्ट' एवं टेलीफोन बिलों का भुगतान इत्यादि सामान्य - उद्देश्य कम्प्यूटर के उदाहरण है ।

वर्तमान मे सामान्य - उद्देश्य कम्प्यूटर घरों में, ऑफिस में, बड़ी-बड़ी अनुसधान प्रयोगशालाओं आदि क्षेत्रों में प्रयोग किये जाते है । अत: सामान्य - उद्देश्य कम्प्यूटर को उनके आकार, संग्रहण क्षमता, संसाधन गति इत्यादि के अनुसार पुन: इनकों विभिन्न - वर्गो में वर्गीकृत कर सकते है । जैसे (i) माइक्रो-कम्प्यूटर (ii) व्यक्तिगत-कम्प्यूटर (iii) मिनी-कम्प्यूटर (iv) मेन-फ्रेम-कम्प्यूटर (v) सुपर-कम्प्यूटर आदि

3.3.6 (i) माइक्रो-कम्प्यूटर (Micro Computer)

माइक्रो-कम्प्यूटर का आकार बहुत छोटा होता है परन्तु पूर्ण कम्प्यूटर सिस्टम होते है । यह कम्प्यूटर घरों में विद्यालयों, कार्यालयों इत्यादि में काम में लिया जाता है । घरों में मनोरंजन या छोटी-मोटी गणना आदि कार्यो हेतु प्रयोग में लिए जाते है ।

3.3.7 (ii) व्यक्तिगत कम्प्यूटर (Personal Computer)

व्यक्तिगत - कम्प्यूटर, माइक्रो - कम्प्यूटर का ही वर्ग है । निजी उपयोग में आने के कारण इनको व्यक्तिगत अथवा 'पर्सनल'- कम्प्यूटर अथवा पी.सी.(P.C.) कहलाता है । ये है यह कम्प्यूटर व्यक्तिगत

3.3.9 (iv) मेन-फ्रेम कम्प्यूटर (Mainframe computer)

ये उन बड़े कम्प्यूटरों को कहते है जो बड़ी-बड़ी अनुसधान प्रयोगशालाओं अथवा कम्पनियों अथवा बैकों में प्रयोग में लिए जाते है । इन कम्प्यूटरों की संग्रहण क्षमता एवं प्रोसेसिंग (कार्य क्षमता) गति अधिक होती है । इन कम्प्यूटरों को प्राय: एक केन्द्रीय कक्ष में रखा जाता है तथा इनको काम मे लेने के लिए इसके सैकड़ो टर्मिनल, पुरी संस्था अथवा कार्यक्षेत्र में प्रयोगकर्ताओं के पास होते है । यें कम्प्यूटर टाइम-शेयरिंग (एक साथ कई प्रयोग कर्ताओं को समय देना), मल्टी-टास्किंग (एक साथ कई कार्य) पर आधारित होते है ।

3.3.10 (v) सुपर कम्प्यूटर (Supper Computer)

सुपर-कम्प्यूटर आकार में बहुत बड़े होते है । यह अधिक संग्रहण क्षमता वाले, तीव्रगति वाले होते है । यह जटिल से जटिल गणनाओं को शीघ्रता से हल करने में सक्षम होते है । इन्हे

प्राय: मौसम की भविष्यवाणी, सुरक्षा-अनुसंधान, अतंरिक्ष अनुसंधान इत्यादि कार्य हेतु प्रयोग में लिए जाते है ।

उपर्युक्त सभी वर्गो के कम्प्यूटर में वयक्तिगत-कम्प्यूटर अर्थात् 'पर्सनल-कम्प्यूटर'(P.C) के अधिक प्रचलन तथा लोकप्रियता के कारण अधिकाधिक प्रयोग में लिए जा रहे है इस इकाई में पर्सनल-कम्प्यूटर' के बारे में ही विस्तार से चर्चा करेंगे तथा 'पर्सनल-कम्प्यूटर' की जगह कम्प्यूटर शब्द ही प्रयोग में लेगें ।

3.4 कम्प्यूटर के विभिन्न भाग (Different Components Of A Computer)

यहाँ हम कम्प्यूटर के बाहर से दिखाने वाले भिन्न-भिन्न भागों के बारे में अध्ययन करेंगे । मुख्यत: किसी कम्प्यूटर को हम मोटे तौर पर तीन भागों में बॉट सकते है । (i) इन-पुट इकाई (ii) सेंट्रल प्रोसेसिंग इकाई तथा (iii) आउट-पुट इकाई

3.4.1 (i) इनपुट इकाई (Input unit)

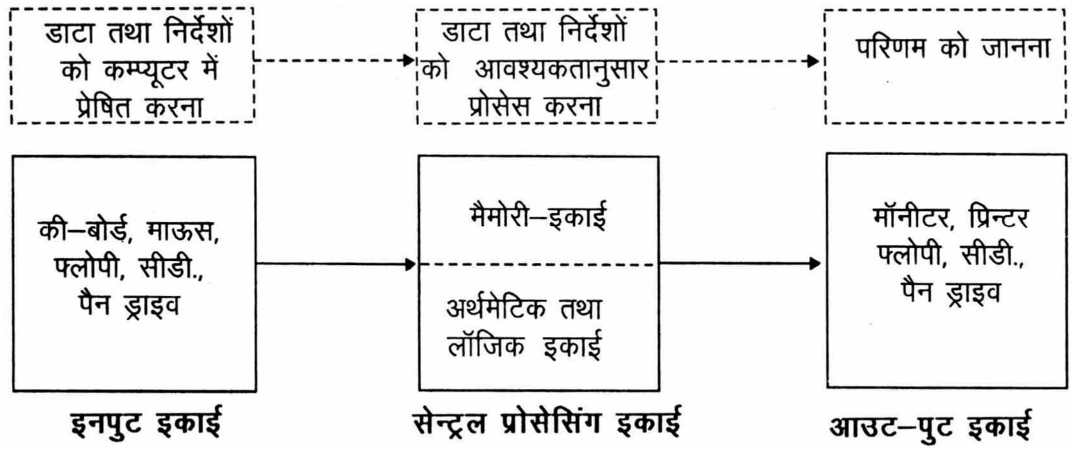
कम्प्यूटर के वह भाग जिसके द्‌वारा कम्प्यूटर को सूचनाएँ प्रेषित की जाती है अर्थात् वह भाग जिसके द्‌वारा कम्प्यूटर सूचनाएँ ग्रहण करता है इनपुट भाग अथवा इनपुट-इकाई कहलाती है । इनपुट इकाई में की-बोर्ड, माऊस मुख्य भाग होते है ।

3.4.2 (ii) सेंन्ट्रल प्रोसेसिंग इकाई (Central Processing Unit)

सेंन्ट्रल प्रोसेसिंग- इकाई जिनको संक्षेप में सी. पी.यू. (C.P.U) भी कहते है। कंम्प्यूटर का मुख्य भाग होता है। यह अन्दर से एक अत्यन्त ही जटिल प्रकार का छोटा सा बॉक्स नुमा होता हैं। कम्प्यूटर का प्रत्येक भाग सी.पी.यू. के इशारे के अनुसार ही कार्य करता है। इसे कम्प्यूटर का दिमाग भी कहा जा सकता है। मुख्य रूप से सी.पी.यू. को तीन भागो में बांटा जा सकता है। नियन्त्रण- इकाई अर्थात्

3.4.3 (iii) आउट-पुट इकाई (Out Unit)

कम्प्यूटर का वह भाग जिसके द्‌वारा कम्प्यूटर से वांछित परिणाम प्राप्त किये जाते है आउट-पुट इकाई कहलाती है। ऐसे उपकरण जो कि कम्प्यूटर जनित परिणाम या आउट पुट दिखाते है उन्हे आउटपुट उपकरण भी कहते है। जैसे मॉनीटर, प्रिन्टर आदि।

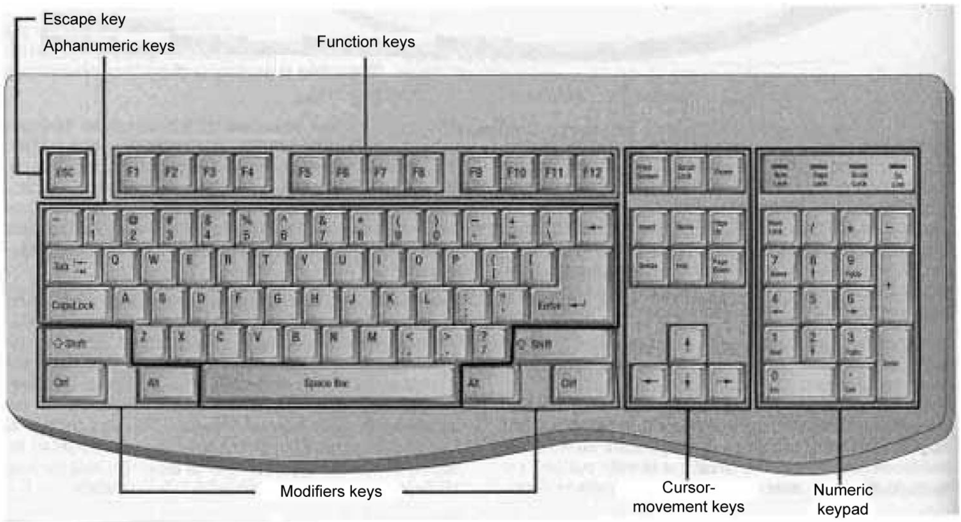


चित्र 3.1 कम्प्यूटर का ब्लॉक आरेख

चित्र 3.2 कम्प्यूटर सिस्टम

3.4.4 की बोर्ड (Key-board)

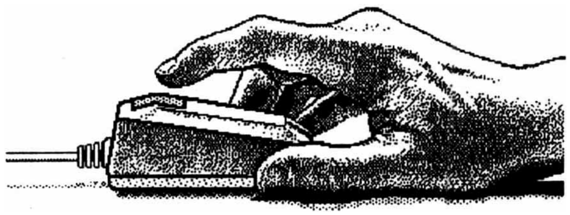
की-बोर्ड सबसे अधिक उपयोग मे आने वाली इनपुट इकाई है इसमें टाइपराइटर के निचले आधे भाग जैसा उपकरण है, जिससे कम्प्यूटर में प्रेषित सूचनाओं को टाइप किया जाता है । इसमें सभी अक्षर, अंक संकेत तथा कुछ अन्य प्रकार के फंन्कसन लिखे रहते है । टाइप की गई सुचना हमको मॉनिटर पर भी दिखाइ देती है । टाइप की गई सुचना में यदि कोई त्रुटि हो तो हम आसानी से मॉनिटर पर देख कर उनकों आसानी से सुधार सकते है । आमतौर पर की-बोर्ड के दो मॉडल ज्यादा प्रचालित है । 83-84 की वाला स्टेण्डर्ड मॉडल तथा एनहेस्ड मॉडल (enhanced model) I



चित्र 3.3 की - बोर्ड

3.4.5 माऊस (Mouse)

कम्प्यूटर का दुसरा आवश्यक इन-पुट उपकरण माऊस है माऊस एक छोटा सा यंत्र, जो हमारे हथेली की पकड़ में आसानी से आ जाता है, तार के द्वारा सी. पी. यू. से जुड़ा होता है । इसे किसी समतल स्थान पर रख कर आगे-पीछे, दायें-बायें घुमाया जाता है तो एक तीरनुमा निशान, जिसकों प्वाइंटर भी कहते है, स्क्रीन पर घूमता है वांछित स्थान पर माऊस के दाये या बायें बटन पर क्लिक करने से निश्चित क्रियाएँ की जा सकती है । यह स्क्रीन पर चित्र या ग्राफिक्स तैयार करने मे भी काम आते है ।



चित्र 3.4 माऊस

3.4.6 कंट्रोल इकाई अथवा नियंत्रण इकाई(Control Unit)

यह इकाई सी. पी. यू. के सभी कार्यो की नियंत्रित करती है । यह कम्प्यूटर में होने वाली विभिन्न अभिक्रियाओं को परस्पर समन्वय बनाते हुए सुचनाओ का आदान प्रदान करती है । इस इकाई को पुन: मुख्यत: दो इकाइयों में बांटा जाता है गणना व तार्किक इकाई तथा मैमोरी इकाई।

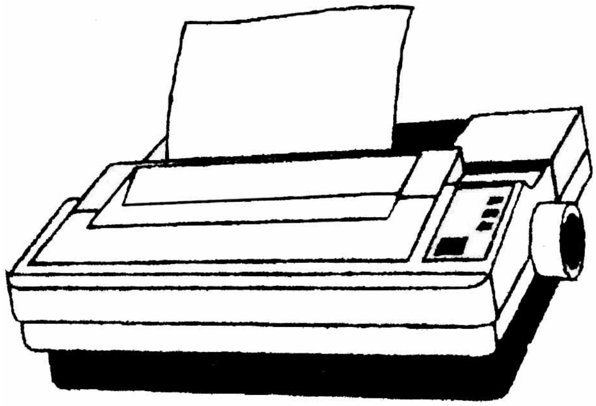
गणना व तार्किक इकाई अर्थात् अर्थमेटिक एवं लॉजिक इकाई (Arithmetic and logic unit) :-सभी प्रकार की अंक गणितीय गणनाएँ तथा तार्किक क्रियाएँ इसी इकाई के द्वारा सम्पन होती है । यह इकाई कंट्रोल इकाई के आदेश पर डेटा को मैमोरी से लाकर उस पर अभीष्ट क्रियाएँ कर परिणाम को पुन: मैमोरी में भेज देती है ।

मैमोरी इकाई (Memory Unit) :- कम्प्यूटर का वह भाग जहाँ समस्त सूचनाएँ अथवा डाटा, निर्देश एवं परिणाम संग्रहित या स्टोर रहते है ।

3.4.7 प्रिंटर (Printer) :

यह एक ऐसा उपकरण होता है जिसके द्वारा, जो भी कार्य हम कम्प्यूटर पर करते है तथा जो हमें मोनिटर की स्कीन पर दिखाई देता है उसे किसी पेपर पर आउटपुट के रूप में प्रिन्ट कर सकते है । इस प्रकार पेपर पर प्रिन्टआउट को हार्ड कॉपी या स्थायी आउटकॉपी भी कहते है । यह कम्प्यूटर से प्राप्त कम्प्यूटर की कोडीय भाषा को मानवीय भाषा में परिवर्तित कर तेज गति से कागज पर छापता है जिसे हम पढ़ सकते है । प्रिन्टर को दो श्रेणियों में बाँट सकते है । (i) इम्पेक्ट प्रिन्टर तथा (ii) नॉन-इम्पेक्ट प्रिन्टर ।

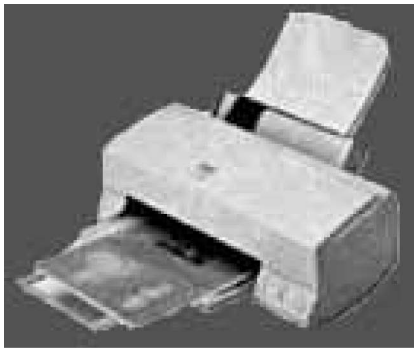
(i) **इम्पेक्ट-प्रिंटर (Impact printer) :** इस तरह के प्रिंटर के अन्तर्गत एक टाइप प्रणाली होती है जिस पर अक्षर लिखे रहते है । यह एक स्थाही की रिबिन पर प्रहार करते हुए अक्षर को कागज पर छापता है । डॉट मैट्रिक्स प्रिन्टर, डेजी व्हील प्रिंटर, चैन प्रिंटर, ड्रम प्रिंटर इत्यादि इस श्रेणी के अन्तर्गत आते है ।



चित्र 3.5 डॉट मैट्रिक्स प्रिन्टर

(ii) **नॉन-इम्पेक्ट प्रिंटर (Non-Impact Printer) :** नॉन-इम्पेक्ट प्रिंटर, रिबन पर प्रहार नहीं करते वरन् रासायनिक, स्थिरवैद्युत तथा इकंजेट तकनीक का प्रयोग करते हुए कागज पर प्रिंटआउट देते है । नॉन-इम्पेक्ट प्रिंटर को इनकी कार्य-शैली-तकनीकी के कारण तीन श्रेणियों में बाटा जा सकता है (a) इंक जेट प्रिंटर (b) लेजर प्रिंटर तथा (c) ग्राफिक्स प्रिंटर ।

(a) इंक जेट प्रिन्टर (Ink-Jet Printer):- इस प्रिंटर में बहुत अधिक घनत्व की इंक (या स्याहि) होती है जो कि एक विशेष प्रकार के पेक में रहती है जिसे कारटेज कहते है । इस कारटेज में एक नौजल से कागज पर स्याही की बूंदों की बौछार करके अक्षर व आकृतियाँ छापी जाती है । प्रिन्ट हैड के नोजल में स्याही की बूंदों को आवेशित करके कागज पर उचित दिशा में छोड़ा जाता है इंक जेट प्रिंटर के कई मॉडल रंगीन आउटपुट भी देते है ।



चित्र 3.6 इंक जेट प्रिन्टर

(b) लेजर प्रिंटर (Laser Printer) :- यह प्रिंटर लेजर किरणों पर आधारित होता है । किसी अक्षर को छापने के लिए लेजर किरणें ही उस अक्षर पर पड़ती है । इसमें अक्षर को छापने हेतु स्याही के पैक को टॉनर कहते है । यह प्रिंटर अधिक तीव्र गति के उच्च क्वालिटी की छपाई करने में सक्षम होते है ।

चित्र 3.7 लेजर प्रिन्टर

(c) ग्राफिक्स प्लॉटर (Graphies Plotterpp) :- इस आउट पुट प्रणाली से चार्ट, चित्र, नक्शे, इंजीनियरिंग डिजाइन, त्रिविमीय रेखाचित्र इत्यादि बनाने या छापने में मदद मिलती है ।

चित्र 3.8 ग्राफिक्स प्लॉटर

3.4.8 मॉनीटर (Monitor)

यह एक टेलीविजन के पर्दे के समान आउटपुट प्रणाली के अन्तर्गत आता है इस पर प्रयोक्ता द्वारा दिया गया इनपुट तथा कम्प्यूटर द्वारा आउटपुट दोनों आते है परन्तु इससे आउटपुट की स्थायी कॉपी प्राप्त नहीं होती है । मॉनीटर ब्लेक एण्ड व्हाइट तथा कलर (रंगीन) एवं साथ ही सामान्य प्रकार (सी.आर.टी1) तथा चपटे स्क्रीन में मिलते है ।

चित्र 3.9 मॉनिटर

3.4.9 फ्लोपी/सी.डी/पेन ड्राइव (Floppy/ C.D/Pen Drive)

जिस प्रकार म्यूजिक अथवा गानों को कैसेट्स में संग्रह करते है तथा उन कैसेट्स के द्वारा किसी भी टेप रिकॉर्डर पर संग्रहित गानों को सुना जा सकता है । कुछ इसी तरह से कम्प्यूटर के प्रोग्राम, सूचनाएँ, आँकडे,इत्यादि को भी संग्रहित करके एक कम्प्यूटर से दूसरे कम्प्यूटर तथा जब जरूरत पड़े उसी समय संग्रहित सूचनाओं इत्यादि का उपयोग हेतु फ्लॉपी अथवा सी. डी. अथवा पैन ड्राइव का उपयोग किया जाता है । इस प्रकार फ्लोपी /सी डी./पैन ड्राइव के द्वारा इनपुट तथा आउटपुट दोनों तरह का कार्य किया जाता है । सी.डी. तथा पैन ड्राइव के द्वारा गाने सुनने के साथ-साथ फिल्में भी कम्प्यूटर पर देखी जा सकती है

3.4.10 स्केनर (Scanner)

स्केनर कम्प्यूटर में इनपुट का कार्य करता है । इसके द्वारा किसी दस्तावेज या चित्र या फोटो या उपरोक्त में से इनके संयुक्त रूप से कम्प्यूटर को प्रेषित किया जाता है । कम्प्यूटर में उपलब्ध सॉफ्टवेयर के द्वारा इस प्रकार के प्रेषित दस्तावेज/फोटो/चित्रों का संशोधन, किसी एक हिस्से को अन्य दस्तावेज में शामिल करना एवं इनका प्रिंट लेना कार्य कर सकते है

चित्र 3.10 स्केनर

3.5 हार्डवेयर तथा सॉफ्टवेयर (Hardware and Software)

कम्प्यूटर को मुख्य रूप से दो भागो में विभाजित किया जा सकता है । (i)हार्डवेयर तथा (ii)सॉफ्टवेयर

3.5.1 हार्डवेयर (Hardwarep)

कम्प्यूटर के वह सभी यांत्रिक भाग या उनसे जुड़े हुए भौतिक भागों को जो कम्प्यूटर के बाहर तथा अन्दर कहीं भी हो सकते है तथा जिन्हें हम देख सकते है एंव छू सकते है हार्डवेयर कहलाते है । की-बोर्ड मॉनिटर, माऊस इत्यादि हार्डवेयर के अन्तर्गत आते है । हार्डवेयर के अतिरिक्त भाग, जिन्हें हम कम्प्यूटर के साथ जोड़ सकते है - प्रिन्टर, स्केनर, सीडी ड्राइव इत्यादि।

3.5.2 सॉफ्टवेयर (Softwarep)

कम्प्यूटर को उपयोग में लेने के लिए या कम्प्यूटर में किसी कार्य को सम्पन्न करने के लिए कम्प्यूटर को दिये जाने वाले निर्देशों के समूह को सॉफ्टवेयर कहते है । कम्प्यूटर में किसी एक निश्चित कार्य को करने के लिए दिये जाने वाले निर्देशों के समूह को प्रोग्राम कहते है । एक सॉफ्टवेयर में कई प्रोग्राम हो सकते है । सॉफ्टवेयर में वे तर्कपूर्ण प्रोग्राम होते है जो कम्प्यूटर के विभिन्न भागों को एक-दूसरे के साथ मिलकर काम करने में सहज तरीके से मदद करते है । इन्हे न तो देखा जा सकता है तथा न ही छुआ जा सकता है । कम्प्यूटर का कोई भी हार्डवेयर तब तक कार्य नहीं कर सकता जब तक उससे सम्बन्धित सॉफ्टवेयर से उसे निर्देश नहीं मिलते ।

सॉफ्टवेयर को आगे दो वर्गो में विभाजित किया जा सकता है । (i) सिस्टम सॉफ्टवेयर तथा (ii) एप्लीकेशन सॉफ्टवेयर ।

3.5.3 (i) सिस्टम सॉफ्टवेयर (Ststem Software)

वह सॉफ्टवेयर जो कम्प्यूटर सिस्टम के विभिन्न हार्डवेयर को संचालित करने के लिये होते है उन्हें सिस्टम सॉफ्टवेयर कहते है । यह सॉफ्टवेयर, कम्प्यूटर पर कार्य करने वाले व्यक्ति (जिसे कम्प्यूटर की भाषा में यूजर (ZUser) कहा जाता है) तथा हार्डवेयर में समन्वय स्थापित करते हुए व्यक्ति द्वारा दिये गये निर्देशों को स्वीकार करते हुए किसी कार्य करने हेतु कम्प्यूटर को तैयार करते है । सिस्टम सॉफ्टवेयर को ऑपरेटिग सिस्टम भी कहते है ।

3.5.4 (ii)एप्लीकेशन सॉफ्टवेयर (Application Software)

किसी एक निश्चित कार्य को सम्पन्न करने हेतु प्रोग्राम या प्रोग्रामों का समूह को एप्लीकेशन सॉफ्टवेयर कहते है । जैसे किसी महाविद्यालय या विश्वविद्यालय द्वारा परिक्षा परिणाम तैयार करना, किसी कार्यालय में कर्मचारियों के वेतन एवं अन्य जानकारियाँ को रखना इत्यादि ।

3.6 इनपुट-आउटपुट प्रणालियाँ (Input-Output Devices)

इनपुट तथा आउटपुट प्रणालियाँ, कम्प्यूटर तथा मानव के मध्य सम्पर्क की सुविधा प्रदान करते है । इनपुट प्रणालियों के द्वारा व्यक्ति या प्रयोक्ता, सूचनाओं अथवा डाटा, निर्देश कम्प्यूटर को प्रेषित करते है । तथा आउटपुट प्रणालियों के द्वारा प्रयक्तो कम्प्यूटर से परिणाम प्राप्त करता है ।

3.6.1 इनपुट प्रणालियों (Input Devices)

इनपुट-प्रणालियों की सहायता से कम्प्यूटर पर कार्य करने वाला व्यक्ति, प्रयोक्ता अथवा यूज़र (User), कम्प्यूटर में सूचनाएँ निर्देश तथा ऑकड़े अथवा डाटा प्रेषित करते हैं । इनपुट-प्रणनियाँ प्रयोक्ता द्वारा मानवीय भाषा में दिये गये मूल ऑकड़े, निर्देश एवं अन्य सूचनाओं को कम्प्यूटर की भाषा- '0' और '1' बिट (Bit) में अनुवाद भी करते है ताकि कम्प्यूटर उन्हे समझ सकें । इसके पश्चात् ही डाटा प्रक्रिया संभव हो पाती है । इनपुट प्रणालियाँ को हम दो श्रेणियों में बाट सकते है ।

(i) **ऑन-लाइन इनपुट प्रणालियाँ (On Line Input Device)** : ऑन लाइन इनपुट प्रणालियों में वह उपकरण आते है जो कम्प्यूटर से सीधे सम्पर्क में रहते हैं ।

(ii) **ऑफ लाइन इनपुट प्रणालियाँ (Offline Input Device) :** वह उपकरण जो कम्प्यूटर से सीधे सम्पर्क में नहीं रहते है तथा स्वयं अपने नियन्त्रण में कार्य करते है, ऑफ लाइन इनपुट प्रणालियाँ कहलाती है ।प्रमुख इनपुट प्रणालियाँ कि-बोर्ड माऊस, स्केनर, मॉडेम, जाँय स्टिक, ऑडीकल मार्क रीडर अर्थात् ओ एम आर (OMR) इत्यादि ।

3.6.2 आउटपुट प्रणालियाँ (Output Devices)

आउटपुट प्रणालियाँ के द्वारा, कम्प्यूटर प्रक्रिया के पश्चात् कम्प्यूटर, परिणामों को प्रयोक्ता को प्रदान करता है । ये प्रणालियाँ कम्प्यूटर की कोड भाषा 0 तथा 1 बिट को मानवीय भाषा में अनुवादित कर परिणाम को मॉनिटर की स्कीन-अथवा प्रिन्टर पर प्रेषित करते है । मॉनिटर, प्रिंटर, स्पीकर्स, डिजिटल केमरा इत्यादि आउटपुट प्रणालियों में आतें है ।

बोध प्रश्न

1. कम्प्यूटर के सभी भौतिक भाग कहलाते है :-
   (अ) सॉप्टवेयर (ब) हार्डवेयर
   (स) शेयरवेयर (द) फ्रीवेयर
2. की-बोर्ड जिस काम आता है, वह है:
   (अ) निर्देश के लिए (ब) डेटा इनपुट करने के लिए
   (स) डेटा संशोधन के लिए (द) उपरोक्त सभी
3. प्रिंटर का कार्य है.
   (अ) डेटा इनपुट करने के लिए
   (ब) डेटा को दर्शाने के लिए
   (स) डेटा को कागज पर छापने के लिए

(द) उपरोक्त सभी

4. ऐसे प्रोग्रामों का समूह जो किसी कम्प्यूटर सिस्टम में स्वत: ही चलते है, कहलाते है:

(अ) सिस्टम सॉप्टवेयर (ब) लैगवेज प्रोसेसर

(स) एप्लीकेशन सॉप्टवेयर (द) उपरोक्त सभी

5. सॉप्टवेयर किसे कहते है ?

(अ) कम्प्यूटर के विभिन्न भागों के समूह को

(ब) इलेक्ट्रानिक स्विच समूह को

(स) कम्प्यूटर कार्य सम्बन्धी निर्देशों के समूह को

(द) उपरोक्त सभी

6. प्रोग्राम किसे कहते है?

(अ) निम्नस्तरीय कम्प्यूटर की भाषा को

(ब) उच्चस्तरीय कम्प्यूटर की भाषा को

(स) ऑपरेटिंग सिस्टम को

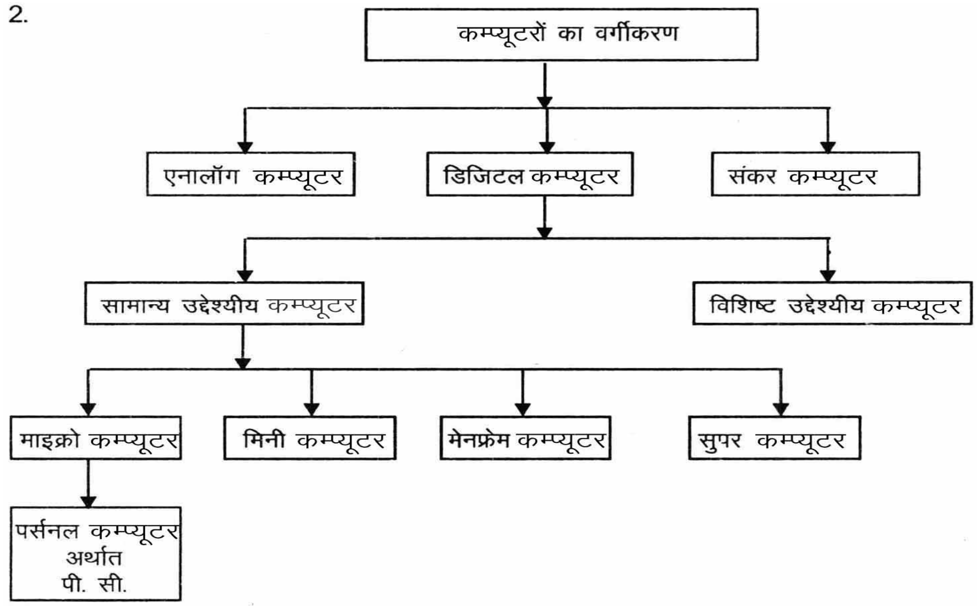
(द) कम्प्यूटर पर कार्य करवाने सम्बन्धी निर्देशों के समूह को

नोट :- कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर अन्त में दिये गये उत्तरों से मिलान कर लेगें ।

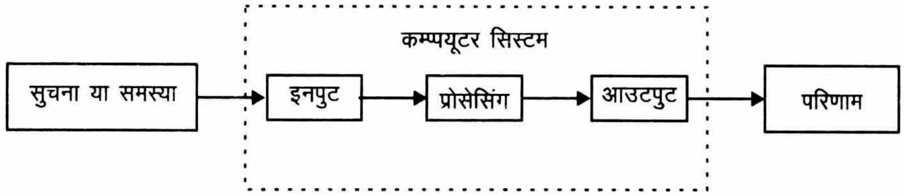
3.7 संराश (summary)

1. वह मशीन या यंत्र जो मानव की सुचना अथवा आंकडों पर कार्य कर वांछित परिणाम देता है कम्प्यूटर कहलाता है

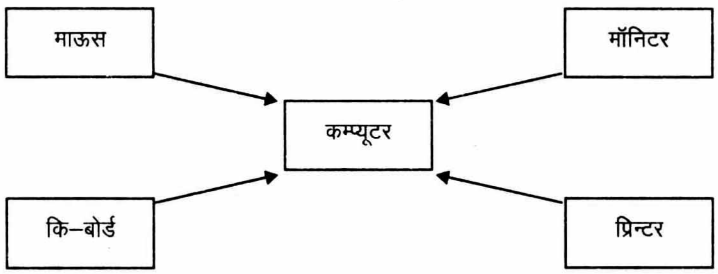
2.



3.



4. कम्प्यूटर सिस्टम



3.8 शब्दावली (Glossary)

प्रगति	–	Progress
सूचनाएँ	–	Information
यंत्र	–	Machine
राशियों	–	Quantities
गणना	–	Calculation
तार्किक	–	Logical
मापना	–	Measurement
क्षमता	–	Capacityr
संग्रहण	–	Storage
अनुसंधान	–	Research
गति	–	Speed
वांछित	–	Required

3.9 सन्दर्भ ग्रंथ (Refference Books)

Tim Huddleston-'Peter Norton's Introduction to Computer"-Tata Mc Graw-Hill Publishing Company Ltd.,New Delhi

एम. सी. शर्मा-कम्प्युटर (एक पूर्ण परिचय)-बी.पी.बी. पब्लिकेशन्स, नई दिल्ली

एम. सी. शर्मा- कम्प्यूटर (एक पूर्ण परिचय)-बी. पी. थी. पब्लिकेशन्स, नई दिल्ली

डी. पी. चिरानिया तथा मान चन्द खंडेला-प्रारम्भिक कम्प्यूटर विज्ञान रमेश बुक डिपो, जयपुर

विभु गुप्ता-संजीव कम्प्यूटर विज्ञान संजीव प्रकाशन, जयपुर

पी. भागचन्दानी-भौतिक रसायन विज्ञान-साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

3.10 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercises)

1. कम्प्यूटर क्या है समझाइये?
2. कम्प्यूटरों का वर्गीकरण करते हुए विभिन्न वर्गो के कम्प्यूटरों के नाम लिखिए ।
3. कम्प्यूटर के विभिन्न भागों के नाम लिखिये ।
4. हार्डवेयर तथा सॉफ्टवेयर को परिभाषित करते हुए अन्तर स्पष्ट कीजिए ।
5. इनपुट तथा आउटपुट प्रणालियाँ को समझाइये ।
6. सॉफ्टवेयर को परिभाषित करते हुए सिस्टम सॉफ्टवेयर तथा एप्लीकेशन सॉफ्टवेयर में अन्तर को समझाइये ।

3.11 अभ्यासार्थ प्रश्नों के उत्तर (Answers)

बोध प्रश्न

1.ब 2.द 3.स 4.अ 5.स 6.द

अभ्यासार्थ प्रश्न

1. कम्प्यूटर एक इलेक्ट्रॉनिक यंत्र है जो सूचनाओं को स्वीकार करके, उनकी गणनाएँ करके वांछित परिणाम देता है ।
2. एनलॉग कम्प्यूटर, डिजिटल कम्प्यूटर, हाइब्रिड कम्प्यूटर, विशिष्ट उद्देश्य कम्प्यूटर तथा सामान्य उद्देश्य कम्प्यूटर
3. इनपुट इकाई, सेन्ट्रल-प्रोसेसिंग इकाई तथा आउटपुट इकाई
4. कम्प्यूटर के यांत्रिक भागों को हार्डवेयर तथा कम्प्यूटर को उपयोग में लेने हेतु निर्देशों के समूह को सॉफ्टवेयर कहते है ।
5. इनपुट प्रणालियों के द्वारा प्रयोक्ता, सूचनाओं को कम्प्यूटर में प्रेषित करते है तथा आउटपुट प्रणालियों के द्वारा प्रयोक्ता कम्प्यूटर से परिणाम प्राप्त करता है ।
6. कम्प्यूटर को उपयोग में लेने के लिए कम्प्यूटर को चलाने के लिए सॉफ्टवेयर को सिस्टम सॉफ्टवेयर कहते हैं जबकि किसी विशेष समस्या हेतु तैयार सॉफ्टवेयर को एप्लीकेशन सॉफ्टवेयर कहते हैं । एप्लीकेशन सॉफ्टवेयर को चलाने के लिए सिस्टम सॉफ्टवेयर की आवश्यकता होती है ।

इकाई 4

कम्प्यूटर (ब)

Computer (B)

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य (objective)

इस इकाई का उद्देश्य:

1. कम्प्यूटर में प्रयुक्त होने वाली द्विआधारी संख्या पद्धति के बारे में विस्तृत जानकारी प्राप्त करते हुए द्विआधारी संख्या को दशमलव संख्या में परिवर्तन के साथ ही द्विआधारी संख्या के अंकगणित के बारे में विस्तार से चर्चा करेंगें ।
2. कम्प्यूटर में प्रयुक्त होने वाली विभिन्न भाषाओं के प्रकार के बारे में. अध्ययन करेंगे ।
3. कम्प्यूटर का उपयोग हेतु ऑपरेटिंग सिस्टम के बारे में अध्ययन करेगें ।

4.1 प्रस्तावना (Introduction)

कम्प्यूटर डिजिटल इलेक्ट्रॉनिक परिपथ से निर्मित होता है । इसके परिपथ के मुख्य भाग ट्रांजिस्टरों होते है जिनकी प्रकृति द्विआधारी होती है । द्विआधारी प्रकृति का अर्थ है कि ट्रांजिस्टरों केवल दो अवस्थाओं में कार्य करता है- ऑन तथा ऑफ । इन द्विआधारी अवस्थाओं को कम्प्यूटर डाटा को व्यक्त करने के लिए सकेत '0' तथा '1' की सहायता ली जाती है । इन दो अवस्थाओं को द्विआधारी अंक मान कर कम्प्यूटर के स्मृति कोष को द्विआधारी संख्याओं के रूप में देखा जा सकता है । अत: कम्प्यूटर के संदर्भ में सारी गणनाएँ द्विआधारी प्रणाली में होती है । जब किसी आकड़े या सुचना को कम्प्यूटर में इनपुट करते है तो की-बोर्ड की दबाई गई प्रत्येक 'की' (कुन्जी) के संकेत को द्विआधारी केरेक्टर सकेत (0 या 1) में परिवर्तित कर देता है । यह सकेत कम्प्यूटर में संचरित होता है । पुन: जब कम्प्यूटर आंकडें या परिणाम को मॉनिटर या प्रिंटर की ओर संचरित करता है तो प्रत्येक केरेक्टर द्विआधारी संकेत में होता है । यह द्विआधारी सकेत मॉनिटर की स्कीन पर दिखाई देते समय या कागज पर छपते समय पुन: केरेक्टर में परिवर्तित हो जाता है । समान्य गणितीय प्रक्रियाओं के लिए दशमलव संख्या पद्धति का प्रचलन विश्वव्यापी है । दशमलव संख्या प्रणाली में संख्या का मान के लिए स्थानीय मान" का सिद्धान्त है जिसके प्रत्येक अंक का मान उसके स्थान से निर्धारित होता है ।कम्प्यूटर में संख्याओं के निरूपण के लिए द्वि-आधारी संख्या पद्धति काम में ली जाती है । अत: इस पाठ में हम सबसे पहले स्थानीय मान के सिद्धान्त का अध्ययन करेंगे । इसके पश्चात अगले अनुच्छेद में इस सिद्धान्त पर आधारित द्विआधारी संख्या प्रणाली का अध्ययन करेंगे । इसके पश्चात् अगले अनुच्छेद में हम कम्प्यूटर में प्रयुक्त होने वाली भाषाओं के बारे में जानकारी लेगें । तत्पश्चात् हम ऑपरेटिंग सिस्टम, जो कि एक कम्प्यूटर सॉफ्टवेयर है जिसके द्वारा कम्प्यूटर की विभिन्न ईकाइयों में सामजस्य स्थापित करने तथा उन्हें नियंत्रित करने के लिए है का अध्ययन करेंगें ।

4.2 स्थानीय संख्या प्रणाली (दशमलव संख्या प्रणाली) (Local Number System (Decimal Number System)

हमारी वर्तमान संख्या पद्धति में दस सकेत (प्रतीक) है : 0,1, 2,3,4,5,6,7,8,9, जिन्हें हम अंक कहते है । इन्ही दस अंको की सहायता से हम 9 से बड़ी या शून्य से छोटी या अन्य कोई भी संख्या का निर्माण कर सकते है । संख्या का मान उसमें प्रयुक्त होने वाले अंको के

स्थान पर निर्भर करता है । उदाहरण के लिए संख्या 625 को शब्दों में इसे, 'छः सौ पच्चीस। कहा जाता है । अर्थात् इसमें प्रयुक्त पहले अंक '6' का स्थानीय मान 600 है क्योंकि इसको सैकड़े के स्थान पर लिखा गया है, दुसरा अंक '2' का मान 20 तथा तीसरा अंक '5' का मान 5 है । अर्थात 625=600+20+5 ।

किसी भी स्थानीय पद्धति में प्रयुक्त होने वाले अंको की संख्या को उस संख्या प्रणाली का आधार कहते है । उपरोक्त दशमलव संख्या पद्धति में दश अंक प्रयुक्त होते है इसलिए इसका आधार 100 है । परन्तु स्थानीय पद्धति के लिये आवश्यक नही कि आधार 10 चुना जायें । 10 के अलावा कितने भी प्रतीकों का चुनाव कर स्थानीय संख्या पद्धति द्वारा बड़ी संख्यायें बनायी जा सकती है । b-आधार वाली संख्या प्रणाली में संख्या का मान स्थानीय मान' की परिकल्पना के आधार पर निर्धारण होता है । b-अर्थात् आधारी संख्या प्रणाली में संख्याओं को निरूपित करने का नियम निम्न है:

$$d_1.b^n+d_2.b^{n-1}+d_3.b^{n-2}+...+d_{n-1}.b+d_n.b^0$$

को हम $d_1.b_2d_3....d_{n-1}d_n$ लिख सकते हैं, जहाँ $d_{1=,2,....n}$ आधारी संख्या पद्धति में विभिन्न अंको को निरूपित करते है । उदाहरणार्थ, उपरोक्त उदाहरण में 625 को हम 6.10^2+s2. 10+5.10^0लिख सकते है जहाँ b- आधार 10 है तथा $d_1=6,d_2=2$ एवं $d_3=5$ है ।

4.3 द्वि-आधारी संख्या प्रणाली (Binary Number System)

यह एक स्थानीय संख्या प्रणाली है जिसका आधार 2 है तथा इसमें दो अंक 0 (शून्य) तथा 1 (इकाई या एक) प्रयुक्त होते है । कम्प्यूटर के स्मृति कोष की सबसे छोटी इकाई को बिट (Bit) अर्थात् बाइनरी अंक (Binary Digit) कहते है । बिट की केवल दो अवस्थायें हो सकती है । इन दो अवस्थाओं को द्वि-आधारी संख्याओं के रूप में देखा जा सकता है । अतः कम्प्यूटर के संदर्भ में सारी गणनायें द्वि-आधारी पद्धति में होती है । द्वि-आधारी में यदि हम शून्य को निरूपित करना चाहें तो इसका निरूपण दशमलव पद्धति की तरह 0 से किया जाता है । इस तरह एक का निरूपण दोनों पद्धतियों में 1 है । दो के लिए दशमलव पद्धति में तो निर्धारित अंक 2 है परन्तु द्वि-आधारी पद्धति में सिर्फ 0 तथा 1 अर्क निर्धारित होते है । अतः संख्या 2 का निरूपण स्थानीय मान के सिद्धान्त को ध्यान में रख कर द्विआधारी संख्या पद्धति में व ० से निरूपित करते है । अर्थात् $10=1x2^1+0x2^0$ । इसी तरह अंक 3 को द्विआधारी संख्या पद्धति में 11 के द्वारा निरूपित करते है अर्थात् $11=1x2^1+1x2^0$ इत्यादि ।

अतः हम दशमलव संख्या को द्विआधारी तथा द्विआधारी को दशमलव में बदल सकते है ।

4.3.1 द्विआधारी संख्या को दशमलव संख्या में परिवर्तित करना (Converting a Binary Number into a Decimal Number):-

जिस प्रकार हम दशमलव संख्या पद्धति में संख्या का मान उसमें प्रयुक्त अंको का स्थानीयमान के अनुसार अर्थात् दशमलव संख्या पद्धति में आधार '10' की विभिन्न घात अर्थात्....$10^4,10^3,10^2,10^1,10^0,10^{-1},10^{-2},10^{-3},10^{-4}$... द्वारा ज्ञात करते है । उसी प्रकार

द्विआधग़री संख्या का मान दशमलव संख्या के तुल्य ज्ञात करने के लिए स्थानीय मान का सिद्वान्त को काम में लेते है । अर्थात् द्विआधारी संख्या पद्धति में आधा '2' की विभिन्न घात अर्थात्....$2^4,2^3, 2^2,2^1,2^0,2^{-1},2^{-2},2^{-3},2^{-4}$..... के द्वारा व्यक्त करके ज्ञात करते है । जहाँ 2^0 इकाई के मान को व्यक्त करता है । उदाहरणार्थ - दशमलव संख्या $(963.05)_{10}$ को हम $9x10^2+6x101+3x10^0+0x10^{-1}+5x10^{-2}$ के द्वारा व्यक्त कर सकते है इसी प्रकार द्विआधारी संख्या $(10111.01)_2$, को दशमलव संख्या के तुल्य रूपान्तरण करने के लिए हम इस प्रकार व्यक्त करते है.

$$(10111.01)_2=1x2^4+0x2^3+1x2^2+12^1+1+1x2^0+0x2^{-1}+1x2^{-2}$$

$$=001x16+0+1x4+1x2+1x1+0+1x\frac{1}{4}$$

$$= 16+4+2+1+\frac{1}{4}$$

$$(10111.01)_2=23+0.25$$

$$\Rightarrow (10111.01)_2= (23.25)_{10}$$

अत: द्विआधारी संख्या $(10111.01)_2$, का दशमलव संख्या में तुल्य मान $(23.25)_{10}$ होता है ।

टिप्पणी : किसी भी संख्या को प्रदर्शित करते समय उसका आधार व्यक्त करने के लिए संख्या को कोष्ठक '()' में बन्द करके दांयी ओर नीचे उस संख्या पद्धति का आधार लिखा जाता है । जैसे संख्या (10111.01) द्विआधारी संख्या को निरूपित करते है । जबकि संख्या $(23.25)_{10}$ दशमलव संख्या को निरूपित करते है ।

निम्नलिखित उदाहरणों के द्वारा किसी दी गई द्वि-आधारी संख्या का मान दशमलव संख्या के तुल्य ज्ञात करने की विधि को सरलता से समझा जा सकता है ।

उदाहरण 1: द्विआधारी संख्या $(1011010)_2$ को दशमलव संख्या में परिवर्तन कीजिए ।

हल: क्योंकि $(10110410)_2=1x2^6+0x2^5+1x2^4+1x2^3+0x2^2+1x2^1+0x2^0$ Z

$$\Rightarrow (1011010)_2=1x64+0+1x16+1x8+0+1x2+0$$

$$= 64+16+8+2$$

$$= (90)_{10}$$

अत: $(1011010Z)_2=(90)_{10}$ **उत्तर**

उदाहरण 2 : द्विआधारी संख्या 11001101.1011 को दशमलव संख्या में परिवर्तित कीजिये ।

हल : $(11001101.1011)_2=1x2^7+1x2^6+0x2^5+0x2^4+1x2^3+1x2^2+0x2^1+1x2^0+1x2^{-1}+0x2^{-2}+1x2^{-3}+1x2^{-4}$

$$=2^7+2^6+0+0+2^3+2^2+0+2^0+2^{-1}+0+2^{-3}+2^{-4}$$

$$=128+64+8+4+1+0.5+0.125+0.0625$$

$$=205.6875$$

अत: $(11001101.1011)_2=(205.6875)_{10}$Z उत्तर

4.3.2 दशमलव संख्या को द्विआधारी संख्या में परिवर्तित करना (Converting a Decimal Number into a Binary Number)

किसी दि गई दशमलव संख्या को द्विआधारी संख्या में बदलने के लिए दशमलव पूर्णांक भाग (Decimal integer part) तथा दशमलव भिन्नात्मक भाग (Decimal fractional part) को अलग-अलग विधियों द्वारा द्विआधारी संख्या में रूपांतरित करते है ।

4.3.2 (i) दशमलव पूर्णांक भाग को द्विआधारी में रूपान्तरण

दशमलव पूर्णांक भाग को द्विआधारी संख्या में रूपान्तरण करने हेतु निम्न चरण अपनाते है (भाग विधि):

चरण 1 : दिया गया दशमलव पूर्णांक भाग में द्विआधारी संख्या के आधार 2 का भाग देते है ।

चरण 2 : भागफल को संख्या के नीचे तथा शेषफल को दाई ओर लिखते है ।

चरण 3 : चरण 2 में प्राप्त भागफल को पुन: 2 का भाग देकर नये भागफल को नीचे तथा शेषफल को दाई ओर लिखते है ।

चरण 4 : इसी प्रकार प्राप्त भागफल को उपरोक्त चरण 1 से चरण 3 तक तब तक दोहराते रहते है जब तक कि भागफल का मान 0 (शून्य) प्राप्त न हो जाए ।

चरण 5 : उपरोक्त चरणों से प्राप्त शेषफल जो कि 1 या 0 होगें को नीचे से ऊपर के क्रम में लिखकर प्राप्त एकत्रित शेषफल ही दिया गया दशमलव पूर्णांक भाग का द्विआधारी में रूपान्तरण प्राप्त होता है ।

उपरोक्त प्रक्रिया को निम्न उदाहरणों द्वारा सरलता से समझा जा सकता है ।

उदाहरण 3: दशमलव संख्या 301 को द्विआधारी संख्या में परिवर्तित कीजिए ।

हल :

भाज्य	संख्या / भागफल	शेषफल
2	301	
2	150	1
2	75	0
2	37	1
2	18	1
2	9	0
2	4	1
2	2	0
2	1	0
	0	1

$= (100101101)_2$

अतः $(301)_{10} = (100101101)$

उदाहरण 4 : निम्न लिखित का मान ज्ञात कीजिए

$$(176)_{10} = (\underline{\ \ })_2$$

हल :

2	176
2	88..0
2	44..0
2	22..0
2	11..0
2	5..1
2	2..1
2	1..0
	0..1

$= (10110000)_2$

अतः $(176)_{10} = (10110000)_2$ **उत्तर**

4.3.2 (ii) दशमलव भिन्नात्मक भाग को द्विआधारी में रूपान्तरण

दशमलव भिन्नात्मक भाग को द्विआधारी में रूपान्तरण करने हेतु निम्न चरण अपनाते है (गुणन विधि):

चरण 1: दिया गया दशमलव भिन्नात्मक भाग को द्विआधारी संख्या के आधार 2 से गुणा करते है ।

चरण 2 : गुणनफल के भिन्नात्मक भाग को इसके नीचे तथा पूर्णांक (यदि हो तो) को गुणनफल के बॉयी ओर लिख देते है ।

चरण 3 : उपरोक्त चरण 2 में प्राप्त गुणनफल के भिन्नात्मक भाग को (पूर्णांक को छोड़ने पर) यदि शून्य नहीं हो तो पुन: 2 से गुणा करते है तथा चरण 2 के अनुसार गुणनफल का भिन्नात्मक भाग तथा पूर्णांक (यदि हो तो) को लिख देते है ।

चरण 4 : इसी प्रकार प्राप्त गुणनफल के भिन्नात्मक भाग को उपरोक्त चरण 1 से चरण 3 तक तब तक दोहराते है जब तक कि गुणनफल का मान शून्य अथवा पुनरावृत्ति न हो जाये ।

चरण 5 : उपरोक्त चरणों से प्राप्त पूर्णांक भाग जो कि 1 या 0 होगें को ऊपर से नीचे के क्रम में लिखकर प्राप्त एकत्रित पूर्णांक ही दिया गया दशमलव भिन्नात्मक भाग का द्विआधारी में रूपान्तरण हो जाता है तथा यह द्विआधारी बिन्दु (.) के दाँयी ओर लिखा जाता है । उपरोक्त प्रक्रिया को निम्न उदाहरणों से सरलता से समझा जा सकता है ।

उदाहरण 5(i). दशमलव भिन्नसंख्या 0.8125 को द्विआधारी संख्या में परिवर्तित कीजिए।

हल :

$$
\begin{array}{lcl}
 & & 0.8125 \\
 & & \times 2 \\
 & 1 \leftarrow & \cancel{1}.6250 \\
 & & \times 2 \\
(1101) \Leftarrow & 1 \leftarrow & \cancel{1}.2500 \\
 & & \times 2 \\
 & 0 \leftarrow & 0.5000 \\
 & & \times 2 \\
 & 1 \leftarrow & .\cancel{1}0000
\end{array}
$$

अतः $(0.8125)_{10}=(0.1101)_2$ उत्तर

उदाहरण 5 (ii) : दशमलव भिन्नात्मक संख्या 0.625 को द्विआधारी संख्या में परिवर्तित कीजिए ।

हल :

$$
\begin{array}{cl}
 & 0.625 \\
 & \times 2 \\
1 \leftarrow & \cancel{1}.250 \\
 & \times 2 \\
0 \leftarrow & 0.500 \\
 & \times 2 \\
1 \leftarrow & \cancel{1}.000
\end{array}
$$

$$\therefore (0.625)_{10} = (0.101)_2$$

उदाहरण 6 दशमलव संख्या $(28.25)_{10}$ को द्विआधारी संख्या में परिवर्तित कीजिए ।

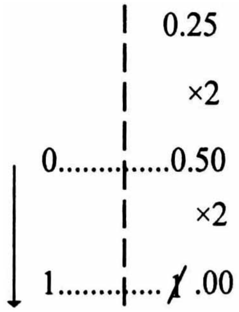
हल : यहाँ दी गई दशमलव संख्या पूर्णांक तथा भिन्नात्मक दोनों रूपों में है । अत: दोनों भागों को अलग-अलग रूपान्तरण करेंगें ।

पूर्णांक का रूपान्तरण :

2	26
2	13........0
2	6........1
2	3........0
2	1........1
	0........1

$(26)_{10} = (11010)_2$

पुन: दशमलव भिन्नात्मक भाग का रूपान्तरण :



$\therefore (0.25)_{10} = (11010)_2$

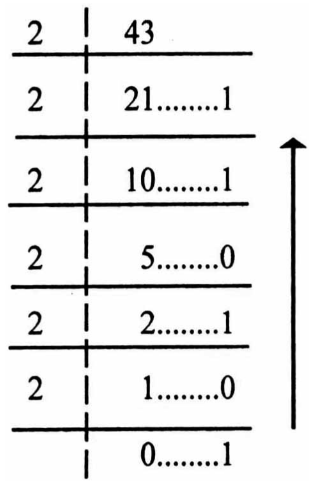
अतः $(26.25)_{10} = (11010.01)_2$ उत्तर

उदाहरण 7: निम्नलिखित का रूपान्तरण कीजिए :

$(43.375)_{10} = ()_2$

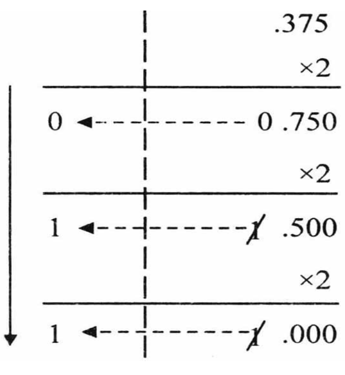
हल : दी गई दशमलव संख्या का पूर्णांक तथा भिन्नात्मक भागों का अलग-अलग रूपान्तरण करनें पर

पूर्णांक का रूपान्तरण :



$\therefore (43)_{10} = (101011)_2$

भिन्नात्मक का रूपान्तरण



$\therefore (0.375)_{10} = (0.11)_2$

अत: $(43.375)_{10}=(101011.011)_2$ उत्तर

बोध प्रश्न 4.1

1. निम्नलिखित द्विआधारी संख्याओं को दशमलव संख्याओं मे परिवर्तित कीजिए :

   (i) 100110011 (ii) 11011011011

   (iii) 1010.1011 (iv) 100111.101

2. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं को द्विआधारी संख्याओं मे परिवर्तित कीजिए ।

   (i) 786 (ii) 54171

   (iii) 39.625 (iv) 74.9375

3. निम्नलिखित दि गई संख्याओं का आधार परिवर्तित कीजिए:

   (i) (11010.01)2= $()_{10}$

   (ii) (101011.101)2$()_{10}$

   (iii)(4096.125)10=$()_2$

   (iv) (10035.05)10 =$()_2$

नोट:- कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर मे दिये गये उत्तरों से मिलान कर लेवे ।

4.4 द्विआधारी अंकगणित (Binary Arithmetic)

दशमलव संख्या प्रणाली की समस्त अंकगणितीय प्रक्रियायें - योग, व्यवकलन, गुणन एवं भाग द्विआधारी संख्या प्रणाली में भी ज्यो की त्यों लागू की जा सकती है । इसका कारण यह है कि मूलत: ये सभी संक्रियाये स्थानीय संख्या प्रणाली पर आधारित है, आधार चाहे कोई भी हो ।

4.4.1 द्विआधारी संख्याओं का योग (Summation of Binary Number)

द्विआधारी प्रणाली के दोनों अंको का इस प्रकार योग कर सकते है :-

0+0=0, 0+1=1+0,

1+1+1= (1+1) +1= (10) +1=11, इत्यादि

निम्न उदाहरणों के द्वारा प्रक्रिया को सरलता से समझा जा सकता है:

उदाहरण 8: $(1010)_2$ तथा $(1001)_2$ का योग ज्ञात कीजिए :

हल : $(1010)_2$ + $(1001)_2$

1................ ← हासिल

$\Rightarrow$ 1010

+1001

10011

अत: $(1010)_2+(1001)_2=(10011)_2$ उत्तर

उदाहरण 9 : निम्नलिखित योग ज्ञात कीजिए

$(111)_2$ $+(100)_2$ $+(101)_2+(1101)_2$

हल : ∵ $(111)_2+(100)_2+(101)_2+(1101)_2$

$$
\begin{array}{r l}
 & 1 \leftarrow \\
 & 1111 \leftarrow \text{------- हासिल} \\
\Rightarrow & 111 \\
+ & 100 \\
+ & 101 \\
+ & 1101 \\
\hline
 & 11101 \\
\hline
\end{array}
$$

अत : $(111)_2+(100)_2+(101)_2+(1101)_2=(11101)_2$ उत्तर

4.4.2 द्विआधारी संख्याओं का व्यवकलन (Subtraction of Binary Number) :

द्विआधारी संख्याओं का व्यवकलन इस प्रकार किया जा सकता है :

0-0=0, 1-0=1, 0-1=1, 1-1=0 इत्यादि ।

टिप्पणी :- यदि 0 में से 1 को घटाने हो तो बायी ओर के स्थान से द्विआधारी संख्या का आधार '2' स्थानांतरित (हासिल उधार) करते हुए 0 की जगह 2 मानकर अब 2 में से 1 घटाने पर शेष व रहेगा । निम्न उदाहरणों द्वारा व्यवकलन प्रक्रिया को सरलता से समझा जा सकता है ।

उदाहरण 10 : $(11001)_2$ में से $(1010)_2$ घटाइये ।

हल : $(11001)_2-(1010)_2$

$\rightarrow 10 \rightarrow 10 \rightarrow 10 \leftarrow$ हासिल उधार

$\Rightarrow$ 11 0 0 1

-1 0 1 0

$\overline{\underline{01111}}$

अत: $(11001)_2-(1010)_2(1111)_2$ उत्तर

उदाहरण 11: निम्न व्यवकलन कीजिए :

$(100001)-(11111)_2$

हल : $(100001)_2-(11111)_2$

$\rightarrow 10 \rightarrow 10 \rightarrow 10 \rightarrow 10 \leftarrow$ हासिल उधार

$\Rightarrow$ 100001

-11111

$\overline{\underline{000010}}$

अत: $(100001)_2-(11111)_2=(000010)_2$

या

$= (10)_2$ उत्तर

4.4.3 द्विआधारी संख्याओं का गुणन (Multiplication of Binary Number):-

द्विआधारी संख्याओं का गुणन इस प्रकार किया जा सकता है ।

0x0=0,0x1=0=1x0,1x1=1; इत्यादि

निम्न उदाहरणों द्वारा गुणन प्रक्रिया को सरलता से समझा जा सकता है ।

उदाहरण 12 : $(1101)_2$ तथा $(101)_2$ का गुणा कीजिए ।

हल :$(1101)_2$ x$(101)_2 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} 1101 \\ \times 101 \\ 11101 \\ 0000\times \\ 1101\times \\ \hline \underline{1000001} \end{array}$$

अत: $(1101)_2 X(101)_2=(100000)_2$ उत्तर

उदाहरण 13: निम्न गुणन प्रक्रिया कीजिए :

$(10110)_2 x(111)_2$

हल: $(10110)_2$ x$(111)_2 \Rightarrow$

$$\begin{array}{l} 10110 \\ \underline{\times 111} \\ 10110 \\ 10110\times \\ 10110\times \\ \hline \underline{10011010} \end{array}$$

अत: $(10110)_2 X(111)_2=(10011010)_2$ **उत्तर**

4.4.4 द्विआधारी संख्याओं का भाग (Division of Binary Number)

द्विआधारी संख्याओं का भाग इस प्रकार कर सकते है:

$0\div 1=0;\ 1\div 1=1$

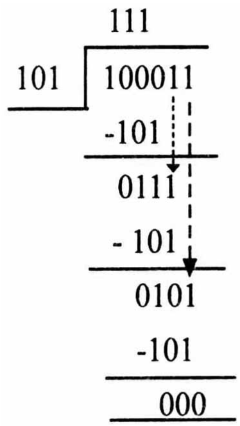
टिप्पणी : 0 या 1 में 0 से भाग देना परिभाषित नहीं हैं ।

निम्न उदाहरणों द्वारा भाग की प्रक्रिया को सरलता से समझा जा सकता है ।

उदाहरण 14 : $(100011)_2$ में $(101)_2$ में का भाग दीजिए ।

हल :

$(100011)_2 \div(101)_2 \quad \Rightarrow$

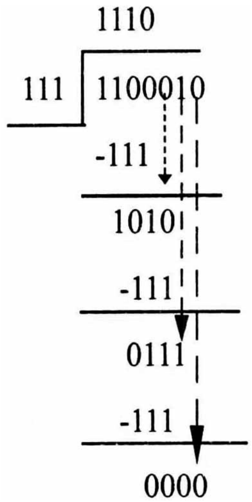


अत: $(100011)_2 \div (101)_2 = (111)_2$ उत्तर

उदाहरण 15 : निम्न का भाग ज्ञात कीजिए ।

$(1100010)_2 \div (111)_2$

हल :- $\because (1100010)_2 \div (1110_2 \Rightarrow$



अत: $(1100010)_2 \div (111)_2 = (1110)_2$ **उत्तर**

बोध प्रश्न -4.2

1. निम्न द्विआधारी संख्याओं का योग कीजिए ।

   (i) 111111+101010 (ii) 110101+100100

   (iii) 11111+111+10111 (iv) 1001011+101101

2. निम्न द्विआधारी सख्याओं का व्यवकलन कीजिए ।

   (i) (11011)2-(10010)2

   (ii) (1101001)2-(110100)2

   (iii) (11101)2-(1111)2

   (iv) (10001)2-(1111)2

3. निम्न द्वीआधारी सख्याओं का गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

	(i) (10110)2x(110)2 (ii) (111)x(101)2
4.	निम्न द्वीआधारी सख्याओं का भागफलन ज्ञात कीजिए ।
	(i) (11001)2 ÷(101)2 (ii) (1001)2 ÷(11)2

नोट :- कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर अन्त में दिये गये उत्तरों से मिलान कर लेवे ।

4.5 कम्प्युटर भाषाएँ तथा प्रक्रमन (Computer Languages and Programming)

व्यक्तियों या समूहों के मध्य परस्पर सम्पर्क स्थापित करने एवं एक दूसरे के विचारों का आदान प्रदान करने हेतु किसी भाषा का प्रयोग करते है जैसे हिन्दी, अग्रेंजी, राजस्थानी, तमिल इत्यादि । कम्प्यूटर एक बहुपयोगी इलेक्ट्रॉनिक मशीन है जो मानव के लिए विभिन्न कार्यो को करने में सहायता करते है । अत: कम्प्यूटर पर विभिन्न कार्य करने हेतु मानव तथा कम्प्यूटर के मध्य सम्पर्क स्थापित करने हेतु भी किसी भाषा का ही सहारा लेना पड़ता है । कम्प्यूटर तथा मानव या प्रयुक्ता के मध्य सम्पर्क स्थापित करने हेतु जिस भाषा का प्रयोग किया जाता है वह कम्प्यूटर भाषा कहलाती है । कम्प्यूटर भाषा में हम कम्प्यूटर को अपनी समस्या के अनुसार निर्देश देकर विभिन्न कार्य करवा सकते है ।

कम्प्यूटर को यह बताना कि क्या करना है तथा कैसे करना है, के लिए कम्प्यूटर को एक ऐसी भाषा में क्रम - बद्व निर्देशों के रूप में लिखना पडता है जिसें कम्प्यूटर समझ सकें । इन क्रम - बद्ध निर्देशों के समूह को 'प्रोग्राम (Programme) कहते है । जब कोई 'प्रोग्राम' कम्प्यूटर पर चलाया जाता है तो कम्प्यूटर उन निर्देशों में निहित कार्यो को उसी क्रम से करता है, और इस प्रकार से हमारी समस्या हल हो जाती है । कम्प्यूटर प्रोग्राम का लाभ यह है कि एक बार कम्प्यूटर का प्रोग्राम बन जाने पर यदि उसे कम्प्यूटर की मैमोरी में स्थित कर देने पर, कम्प्यूटर उसी प्रकार की समस्याएँ अनेक बार बड़ी फुर्ती से हल कर सकता है । उदाहरणार्थ, यदि किसी कम्प्यूटर में किसी कार्यालय या संस्था में अलग-अलग मूल वेतन के अनुसार वेतन तैयार करने का प्रोग्राम स्थापित है, तो वह बड़ी तेजी से एक-एक करके हजारों कर्मचारियों के वेतन की एक रिर्पोट तुरन्त प्रिन्ट कर देगा, जबकि इतना सारा कार्य वैसे कई व्यक्तियों द्वारा कई दिनों में पूरा किया जा सकेगा ।

कम्प्यूटर भाषाओं का निरन्तर विकास हुआ है । अलग-अलग क्षेत्रों के लिए अलग-अलग कम्प्यूटर भाषाएँ उपलब्ध है । बच्चों के लिए कम्प्यूटर भाषाएँ अलग होती है । जबकि व्यापारिक कार्यो एवं अनुसंधान कार्य हेतु अलग-अलग भाषाएँ प्रयुक्त की जाती है । इसी प्रकार इन्टरनेट ,वेब डिजाइनिंग, रोबोटिक्स, कृत्रिम बुद्धिमता, इत्यादि क्षेत्रों के लिए कम्प्यूटर भाषाएँ प्रचलन में है।

प्रोग्राम बनाने की कला में निरन्तर उत्तरोत्तर विकास हुआ है । कम्प्यूटर तो एक मशीन होने के कारण वह मशीनी भाषा को ही समझता है । यह मशीनी भाषा द्विआधारी चिन्ह ‘0' तथा '1' के प्रयोग से ही बनती है । आरम्भ में सभी कार्य इसी भाषा में किये जाते थे ? इसके बाद ‘समाहार भाषा’ अर्थात् 'असेबिली भाषा' (Assembly language) का विकास हुआ । यह

भाषा मशीनों को आसानी से समझ में आने के साथ-साथ मनुष्य को भी जल्दी समझ में आ जाती है । परन्तु इसमें यह समस्या बनी रही कि यह, भाषा मशीन पर निर्भर होती थी, अर्थात् एक मशीन के लिए लिखें गये निर्देश दूसरी मशीन के काम में नहीं आ सकते थे ।एलगोल मशीन पर आश्रित होने का दोष संकलन अर्थात् 'कम्पाइलर' (compiler), जिसे प्रोग्राम अनुवादक भी कहते है, की भाषा का विकास से दूर हुआ। जिसे 'संकलन भाषा' (compiler language) भी कहा जाता है । इनमें सर्वप्रथम भाषा 'कोबोल' COBOL थी । कोबोल के बाद अन्य कई भाषाएँ, जैसे कि 'फोरट्रॉन' (FORTRAN), 'एलगोल' (ALGOLp), 'बैसिक' (BASIC), 'सी' ('C') भाषाएँ विकसित हुई । इन भाषाओं को उच्चस्तरीय भाषाएँ (High level languages) कहा गया । अधिकाशं में उच्चस्तरीय भाषाएँ मशीनों पर निर्भर नहीं थी, इसलिए इन भाषाओं में लिखा हुआ कोई भी प्रोग्राम किंसी भी ऐसे कम्प्यूटर पर चलाया जा सकता था, जिसमें उस भाषा का कम्पाइलर होता था, क्योकि 'कम्पाइलर' उस उच्चस्तरीय भाषा को तुरन्त मशीनी भाषा में अनुवाद कर देता था ।

अतः कम्प्युटर भाषाओ को दो मुख्य श्रेणियों में वर्गीकृत किया जाता है । - निम्न स्तरीय भाषा (Low level language) जिसे मशीनी भाषा (Machine language) भी कहते है तथा उच्चस्तरीय भाषा (High level language) ।

4.5.1 निम्नस्तरीय भाषा (Low level language)

कम्प्युटर के आन्तरिक भाग में सभी कार्य इसके विद्युत परिपथ में विद्युत के संकेतों के संचरण से सम्पन्न होते है । कम्प्यूटर प्रत्येक निर्देश को विद्युत संकेत जिन्हें बीट्स कहते है में 0 तथा 1 के रूप में काम में लेता है । जब 0 तथा 1 के संकेतो में कम्प्यूटर को निर्देश दिए जाते है तो इसे निम्नस्तरीय भाषा कहा जाता है अर्थात् कम्प्यूटर के आन्तरिक परिपथ के लिए सीधे समझने योग्य भाषा निम्नस्तरीय भाषा होती है । इसका स्तर कम्प्यूटर की संरचना के स्तर पर होता है जो मानवीय भाषा में समानता नहीं रखता है । प्रत्येक कम्प्यूटर की स्वयं की मशीनी भाषा होती है तथा अधिकतर कम्प्यूटर असेमबली भाषा का भी प्रयोग करते है ।

4.5.2 उच्च स्तरीय भाषा (High level language)

वह कम्प्यूटर भाषाएँ जिनके निर्देश अग्रेंजी भाषा या अन्य मानवीय भाषा में लिखें जाएँ तथा बाद में इन्हें अनुवाद प्रोग्राम के द्वारा मशीनी भाषा में अनुवादित किया जा सके, उच्च स्तरीय भाषा कहलाती है । प्रत्येक उच्चस्तरीय भाषा के प्रोग्राम को कम्प्यूटर में क्रियान्वित करने से पहिले मशीनी भाषा में अनुवादित करना आवश्यक होता है । इस कार्य के लिए अनुवादक प्रोग्राम (Translator Programme) की सहायता ली जाती है । अनुवादक प्रोग्राम प्राय: कम्प्यूटर की असेम्बली भाषा में लिखें जाते है । अनुवादक प्रोग्राम दो प्रकार के होते है : इन्टरप्रेंटर तथा कम्पाइलर ।

इन्टरप्रेटर (Interpreter):- वह अनुवादक जो उच्चस्तरीय भाषा के प्रोग्राम के एक-एक निर्देश को बारी-बारी से मशीनी भाषा में अनुवादित करके क्रियाविन्त करते है, इन्टरप्रेटर कहलाते है । ये प्रोग्राम को क्रियाविन्त करने में कम समय लेते है ।

कम्पाइलर (Compiler):- वह अनुवादक जो उच्चस्तरीय भाषा के प्रोग्राम के सभी निर्देशों को एक बार में ही मशीनी भाषा में अनुवादित करते है, कम्पाइलर कहलाते है । ये प्रोग्राम को क्रियाविन्त करने में अधिक समय लेते है ।

वर्तमान में अनेक उच्चस्तरीय भाषाएँ उपलब्ध है । कुछ लोकप्रिय उच्चस्तरीय भाषाओं के उदाहरण निम्नलिखित है ।

कोबोल (COBOLp) ;- प्रोग्रामिंग की भाषा कोबोल व्यापारिक कार्यो के उपयोग के लिए बनी भाषा है । कोबोल का शब्द (COBOL= Common Business Oriented Language)का संक्षिप्त रूप है ।

फोरट्रॉन (FORTRAN);- फोरट्रॉन गणित तथा विज्ञान कार्यो के लिए उपयोगी भाषा है । फोरट्रॉन शब्द (FORmula

TRANslation का संक्षिप्त रूप है । यह भाषा फॉरमुला लिखने, समीकरण लिखने तथा गणनाएँ करने में काम आती है । साधारणतया यह भाषा इजिनियरिंग तथा वैज्ञानिक कार्यो में काम आती है ।

पास्कल (PASCAL):- पास्कल भाषा का विकास ज्यूरीक के प्रोफेसर नीकलस विर्थ ने 1960 वाले दशक के अन्त में किया । इसका नाम फ्राँस के दार्शनिक -तथा आविष्कारक (गणितज्ञ)ब्लेज पास्कल के नाम पर रखा गया, जिसने कि 16 वर्ष की आयु में ही एक यात्रिंक गणना मशीन (Mechanical calculator) का आविष्कार किया था । यह भाषा मूलरूप से ब्लॉक स्ट्रक्चर तथा मोड्यूलर प्रोग्रामिंग को बनाने में उपयोगी है ।

'सी' भाषा ('C' language);- 'सी' भाषा का विकास अमेरिका की बैल लेबोरेट्री में 1970 के दशक में प्रतिपादित किया । 'सी' भाषा की विशेष बात यह है कि सिस्टम सॉफ्टवेयर तथा प्रायोगिक सॉफ्टवेयर दोनों के बनाने में उपयोगी है । इसकी लाइब्रेरी बहुत बड़ी है जिसके कारण यह एक शक्तिशाली बन गई है । इस भाषा में विज्ञान तथा व्यापार सम्बंधी दोनों प्रकार के प्रोग्राम बनाये जा सकते है ।

बैसिक (BASIC) ;- बेसिक शब्द B eginner'sAllPurposeSymbolicInstructionCode का संक्षिप्त रूप है । यह भाषा भी व्यापार तथा वैज्ञानिक दोनों क्षेत्रों में अत्यन्त उपयोगी है ।

डी-बैस (d BASE):- यह मुख्य रूप से आँकड़ो का प्रबन्धन (Data Base Management System) से सम्बन्धित भाषा है । इसके प्रयोग से सरल प्रोग्रामों द्वार। 'डाटा बैस' में सूचनाऐं एकत्रित भी की जा सकती है तथा 'मेनेज (Manage) भी की जा सकती है ।

उपरोक्त भाषाओं का चुनाव करने के लिए सबसे पहिले तो आपकों जो कार्य या समस्या का हल कम्प्यूटर के द्वारा करना है उसके लक्षणों तथा कार्यक्षेत्रों पर विचार करना होगा । उसके बाद आपकों कम्प्यूटर की भाषाओं में वे गुण ढूँढने होगें जो आपको उस कार्य के लिए चाहिये तथा आपके कम्प्यूटर पर उपलब्ध हो । इस प्रकार आपकी समस्यानुसार भाषा का चुनाव करना चाहिये।

4.6 ऑपरेटिंग सिस्टम (Operating System)

कम्प्यूटर एक अत्यन्त शक्तिशाली मशीन है । वह अपनी मैमोरी में ढेरसारी सूचनाएँ याद रख सकता है तथा उन सूचनाओं को उलट-पलट तथा जटिल गणनाएँ बड़ी शीघ्रता से कर सकता है । दिये हुए निर्देशों के द्वारा वह एक ही प्रकार का कार्य बार-बार बढ़ी फुर्ती से कर सकता है । जिस प्रकार कार चालक कार को चलाने के लिए आवश्यक है उसी प्रकार कम्प्यूटर को चलाने के लिए सॉफ्टवेयर की आवश्यकता होती है । कम्प्यूटर तथा सॉफ्टवेयर मिलकर एक पूर्ण तथा उपयोगी कम्प्यूटर सिस्टम का निर्माण करते है । जैसा कि आप पढ़ चुके है कि कम्प्यूटर सॉफ्टवेयर दो प्रकार के होते है सिस्टम सॉफ्टवेयर तथा अनुप्रयोग सॉफ्टवेयर । अनुप्रयोग सॉफ्टवेयर किसी विशेष अनुप्रयोग जैसे अकाउन्टिग इन्जीनियरिंग इत्यादि से सम्बंधित कार्यो को करने के लिए निर्मित किये जाते है । सिस्टम सॉफ्टवेयर किसी विशेष अनुप्रयोग आधारित नहीं होते है । ये हार्ड-वेयर की आवश्यकताओं को पूरा करते है तथा प्रोग्राम लिखने तथा प्रोग्रामों को चलाने की सुविधा प्रदान करते है ।

सिस्टम सॉफ्टवेयर में प्रमुख सॉफ्टवेयर है ऑपरेटिंग सिस्टम जो सभी कम्प्यूटरों में निश्चित रूप से विद्यमान होते है । ऑपरेटिंग सिस्टम एक कम्प्यूटर सॉफ्टवेयर है जिसे कम्प्यूटर की विभिन्न ईकाइयों में सामजस्य स्थापित करने तथा उन्हें नियंत्रित करने के लिए बनाया जाता है । यह कम्प्यूटर तथा उसका उपयोग करने वाले प्रयोगकर्ता की बीच की कड़ी का कार्य करता है । यह एक कंट्रोल प्रोग्राम है । यह प्रोग्राम किसी कम्पनी के मैनेजर की भांति पूर्ण कम्प्यूटर सिस्टम को सुचारू रूप से तथा दक्षता से चलाने का दायित्व निभाता है तथा कम्प्यूटर प्रयोगकर्ता के लिए सिस्टम प्रयोग को आसान बनाता है ।

अत: ऑपरेटिंग सिस्टम, कम्प्यूटर में हार्डवेयर तथा सॉफ्टवेयर के बीच की कड़ी है तथा साथ ही यह कम्प्यूटर की सभी क्रियाओं पर नियन्त्रण रखते हुए प्रबन्धन का कार्य करते है । आजकल एम एस - डॉस (Ms-Dos), विन्डोज (WINDOWSD), युनीक्स (UNIX) इत्यादि प्रमुख ऑपरेटिंग सिस्टम प्रचलन में है ।

4.6.1 डिस्क ऑपरेटिंग सिस्टम (डॉस) (Disk Operating system-DOS)

ऑपरेटिंग सिस्टम, जिसका संक्षिप्त नाम - डॉस है । यह व्यक्तिगत कम्प्यूटरों पर प्रयुक्त होने वाला सर्वाधिक प्रचलित ऑपरेटिंग सिस्टम है । डॉस, डिस्क में स्टोर रहता है तथा कोई भी कमाण्ड देने से पहिले यह कम्प्यूटर की मैमोरी में लोड होता है । यदि हम डॉस पर कार्य करना चाहते है । तो हमारे कम्प्यूटर में निम्न तीन फाईलो का होना आवश्यक है । ये फाइलें है: COMMOND.COM,MS DOS.SYS तथा IO.SYS ।अगर कम्प्यूटर को शुरू करने पर उसे यह फाइलें नहीं मिलती है तो वह आगे कोई भी कार्य करने में असमर्थ होता है । इन फाइलों में आवश्यक निर्देशों के अलावा बहुधा काम में आने वाले निर्देश, जैसे फाइल कॉपी करना, फाइल को हटाना, फाइल का नाम बदलना पिन्टर पर लिखना इत्यादि का निर्देशन किया जाता है । डॉस में ज्यादातर निर्देश 'की-बोर्ड। द्वारा ही दिये जाते है ।

4.6.2 विण्डोज ऑपरेटिंग सिस्टम (WINDOWS Operating System)

आप ने अभी तक ऑपरेटिंग सिस्टम - डॉस का अध्ययन किया हैं । कम्प्यूटर के अधिकाधिक उपयोग को ध्यान में रखते हुए माइक्रोसॉफ्ट कम्पनी ने एक ऐसे ऑपरेटिग सिस्टम को तैयार किया जो डॉस की अपेक्षा बहुत अधिक सुविधाजनक है, इसे विन्डोज (Windows) कहा गया । डॉस कमाण्ड (निर्देश) प्रोसेसर अक्षर आधारित इन्टरफेस है । जिसमें कि आपको कमाण्ड प्रीस्ट में कमाण्ड को टाइप करना पड़ता है । इसके लिए आपको विभिन्न कमाण्डों, फाइलों एवं डायरेक्ट्रियों के नाम याद रखने पड़ते है । परन्तु विण्डोज में महत्वपूर्ण बात यह है कि यह पूर्णतया रेखाचित्रों के आधार पर बना हुआ है । अर्थात् इसमें हर कमाण्ड को चित्रों के माध्यम से बताया गया है । हमें विण्डोज में कमाण्ड की-बोर्ड से टाइप करने की आवश्यकता नहीं होती वरन् इसमें उस कार्य से सम्बन्धित चित्र जिसे आईकॉन (Icon) कहते है बना होता है जिस पर माउस की सहायता से क्लिक करके हम वांछित कमाण्ड को एक्टीवेट कर सकते है । रेखाचित्र तथा प्रयोगकर्ता अर्थात् यूजर (User) दोनों का ही इसमें सम्बन्ध होता है । अत: इसे ग्राफिकल-यूज़र-इन्टरफेस तकनीक पर आधारित कहा जाता है । विण्डोज की विशेषता यह भी है कि यह मल्टी-टास्किंग (Zmulti-tasking)की सुविधा प्रदान करता है । मल्टी-टास्किंग का अर्थ है कि हम एक-साथ इसमें कई विण्डोज खोल सकते है । अर्थात् कई कार्य एक साथ कर सकते है । डॉस में यह सुविधा नहीं होती है । स्कीन पर एक समय में अनेक विण्डों खोल सकते है जहाँ प्रत्येक विण्डों में एक अलग प्रोग्राम या डॉक्यूमेन्ट होता है । आप पहले प्रोग्राम को बन्द किये बिना दूसरे प्रोग्राम में आसानी से जा सकते है । विण्डोज के द्वारा आप नेटवर्किंग, फेक्स तथा मल्टीमीडिया पर भी कार्य कर सकते है । इसमें विडियों-गेम भी खेल सकते है ।

विण्डों ऑपरेटिग सिस्टम, डॉस ऑपरेटिग सिस्टम की कड़ी का ही एक अंग है । इसमें वे सभी व्यवस्थाएँ तो है ही, जो डॉस में है परन्तु इसके अलावा अनेक अन्य सुविधायें भी है तथा कार्य करने के तरीके में आधारभूत परिवर्तन है । ग्राफिकल-यूज़र-इन्टरफेस आधारित सिस्टम का उपयोग न केवल ऑपरेटिग सिस्टम में, बल्कि हर एप्लीकेशन के लिए बढ़ रहा है एवं अब प्राय: नये सॉफ्टवेयर इसी आधार पर विकसित हो रहे है ।

बोध प्रश्न - 4.3

1. ऑपरेटिंग सिस्टम से आप क्या समझते है?
2. डॉस पर कार्य करने से पहले कम्प्यूटर में कौन-कौन सी फाइलों का होना आवश्यक है।
3. विण्डोज ऑपरेटिग सिस्टम के अन्तर्गत प्रमुख विशेषताएँ लिखिए ।

नोट :- कृपया अपने प्रश्नों के उत्तर, अन्त में दिये गये उत्तरों से मिलान कर लेवें ।

4.7 इकाई सारांश (Summary)

दो अंको 0 (शून्य) तथा 1 से निर्मित संख्या पद्धति जिसका आधार 2 है द्विआधारी संख्या (बाइनरी संख्या) पद्धति कहलाती है

द्विआधारी संख्या को दशमलव संख्या में तथा दशमलव संख्या को द्विआधारी संख्या में सरलता से बदला जा सकता है ।

द्विआधारी संख्या पद्धति में अकंगणितीय प्रक्रियायें अर्थात् योग, व्यवकलन, गुणन तथा भाग, दशमलव संख्या पद्धति की तरह ही ज्ञात की जाती है । कम्प्यूटर तथा मानव के मध्य सम्पर्क भाषा को कम्प्यूटर भाषा कहते है ।

कम्प्यूटर भाषा को दो वर्गो में निम्नस्तरीय भाषा तथा उच्चस्तरीय भाषा में वर्गीकृत किया जाता है । कम्प्यूटर को उपयोग में लेने हेतु क्रम-बद्ध निदेशों अथवा प्रोगामों के समूह को ऑपरेटिंग सिस्टम कहते है । आजकल सभी कम्प्यूटरों पर विण्डोज ऑपरेटिग सिस्टम का ज्यादातर प्रयोग किया जाता है ।

4.8 शब्दावली (Glossary)

परिपथ – Circuit
द्विआधारी – Binary
गणनाएँ – Calculations
परिवर्तित – Transform
अंक – Digits
आधार – Base
तुल्य – Equivalent
चरण – Step
हासिल – Carry forword
निर्देश – Instruction
क्रम – Order
अनुवाद – Tanslation
सामजस्य – Coordination

4.9 संदर्भ ग्रन्थ (Reference Books)

1. एम. सी. शर्मा-'कम्प्यूटर (एक पूर्ण परिचय)' दी. पी. बी. पब्लिकेशन्स, नई दिल्ली ।
2. आदित्य शास्त्री, रेखा गोविल, प्रतिष्ठा माथुर, तथा सुधा मोखाल - 'कम्प्यूटर अनुप्रयोग एवं प्रोग्रामिंग', जयपुर पब्लिशिंग हाउस, जयपुर
3. पी. भागचन्दाणी-भौतिक रसायन विज्ञान', साहित्य भवन पब्लिकेशन्स, आगरा

4.10 अभ्यासार्थ प्रश्न

1. 1 द्विआधारी संख्या पद्धति क्या है ।
2. द्विआधारी संख्या 11011001 को दशमलव संख्या में परिवर्तित कीजिए ।
3. निम्नलिखित द्विआधारी संख्याओं को दशमलव संख्या पद्धति में परिवर्तित कीजिए ।

   (i) $(11000011)_2$ (ii) $(11111111)_2$

(iii) $(101010.1010)_2$ (iv) (11100011.11110)

4. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं को द्विआधारी पद्धति में परिवर्तित कीजिए:

   (i) 819 (ii) 2079 (iii) 31.75 (iv) (682.65625)

5. निम्न लिखित द्विआधारी संख्याओं का योग कीजिए:

   (i) $(1111111)_2+(111111)_2$

   (ii) $(1000000)_2$ $+(1010101)_2+(101010)_2$ $+(1010101)_2$

6. निम्नलिखित द्विआधारी संख्याओं का व्यवकलन कीजिए ।

   (i) $(10001)_{2-}$ $(1111)_2$ (ii) (1111111)-$_2(1010101)_2$

7. निम्नलिखित द्विआधारी संख्याओं का गुणनफल ज्ञात कीजिए :

   (i) $(11111)_2$ x$(111)_2$ (ii) $(101010)_2$ x $(101)_2$

8. निम्नलिखित द्विआधारी संख्याओं का भागफल ज्ञात कीजिए:

   (i) $(1001000)_2 \div (1100)_2$ (ii) $(10011011)_2 \div (11111)_2$

9. कम्प्यूटर में सॉफ्टवेयर की क्या भूमिका है । ऑपरेटिग सिस्टम की परिभाषा देते हुए डॉस तथा विन्डोज ऑपरेटिंग सिस्टम को समझाइये ।

10. कम्प्यूटर भाषाओं को परिभाषित करते हुए किन्हीं तीन प्रचलित भाषाओं के नाम व उनका कार्य क्षेत्र का बताइये ।

4.11 अभ्यासार्थ प्रश्नों के उत्तर (Answers)

बोध प्रश्न - 4.1

1. (i) 307 (ii) 1755 (iii) 10.6875 (iv) 39.625
2. (i) 1100010010 (ii) 1101001110011011

   (iii) 100111.101 (iv) 1001010.1111
3. (i) $(26.25)_{10}$ Z (ii) $(43.625)_{10}$

   (iii) $(1000000000000.101)_2$

   (iv) $(10011100110011.00001100....)_2$

बोध प्रश्न 4.2

1. (i) $(1101001)_2$ (ii) $(1011001)_2$

   (iii) $(100110)_2$ (iv) $(1111000)_2$
2. (i) $(1001)_2$ (ii) $(110101)_2$

   (iii) $(1110)_2$ (iv) $(00010)_2$
3. (i) $(10000100)_2$ (ii) $(100011)_2$
4. (i) $(101)_2$ (ii) $(011)_2$

बोध प्रश्न 4.3

1. ऑपरेटिंग सिस्टम कुछ विशिष्ट प्रोग्रामों का समूह होता है जो कम्प्यूटर को संचालन करने, कम्प्यूटर कार्य पर नियंत्रण रखने तथा प्रयोगकर्ता तथा कम्प्यूटर के बीच की कड़ी को लगातार जोड़े रखता है ।

2. डॉस पर कार्य करने के लिए कम्प्यूटर में कमाण्ड. कॉम (Commond,com) एम एस डॉस.कॉम (MS DOS. COM) तथा आइ ओं सिस (IO.SYS) का होना आवश्यक होता है ।

3. विण्डोज ऑपरेटिग सिस्टम की प्रमुख विशेषताए :-

ग्राफिकल-यूजर-इन्टरफेस तकनीक पर आधारित, मल्टी- टास्किंग, नेटवर्किग, मल्टीमीडिया तथा गेम की सुविधाएँ ।

अभ्यासार्थ प्रश्न

1.	वह संख्या पद्धति जिसमें ‘0’ (शून्य) तथा ‘1’ (एक) अंकों का ही प्रयोग होता है			
2.	271			
3.	(i)	$(195)_{10}$	(ii)	$(225)_{10}$
	(iii)	$(42.625)_{10}$	(iv)	$(227.9375)_{10}$
4.	(i)	$(1100110011)_2$	(ii)	$(100000011111)_2$
	(iii)	$(11111.11)_2$	(iv)	$(1010101010.10101)_2$
5.	(i)	10111110	(ii)	100010100
6.	(i)	$(001000)_2$	(ii)	$(0101010)_2$
7.	(i)	11011001	(ii)	(11010010)
8.	(i)	110	(ii)	101

इकाई - 5

गैसीय अवस्था-भाग 1 (आदर्श गैसें)
GASEOUS STATE-PART I (IDEAL GASES)

इकाई की रूपरेखा

5.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्न बिन्दुओं को समझ पाएगें -

1. द्रव्य की गैसीय अवस्था के अभिलाक्षणिक गुण एवम् आदर्श व वास्तविक गैसों से तात्पर्य ।
2. दाब व ताप की हर परिस्थिति में आदर्श गैसों द्वारा बॉयल, चार्ल्स आवोगाद्रो आदि के नियमों का पालन ।
3. गैसों का अणुगति सिद्धान्त, इसके अभिगृहीत, उनकी वैधता व अणुगति समीकरण की व्युत्पत्ति ।
4. मैक्सवेल का आण्विक वेगों का वितरण नियम व इसका प्रायोगिक सत्यापन ।
5. आण्विक वेगों के तीन प्रकार - वर्ग माध्य मूल, औसत और प्रायिकता वेग की गणना ।
6. संघट्ट संख्या, संघट्ट आवृति, संघट्ट व्यास और माध्य मुक्त पथ का तात्पर्य ।

5.1 प्रस्तावना (Introduction)

द्रव्य की मुख्यतः तीन प्रावस्थाएँ होती हैं - ठोस, द्रव और गैस । ठोस और द्रव अवस्था में द्रव्य के कणों के मध्य आकर्षण बल अधिक होता है तथा वे एक दूसरे के अधिक निकट होते हैं । गैसीय अवस्था में कणों के मध्य अन्तराकर्षण बल कम होता है और वे अपेक्षाकृत अधिक दूरी पर रहते हैं । गैसों का घनत्व कम होता है व इनमें उच्च संपीड्यता का गुण पाया जाता है । द्रव की तुलना में गैसों का घनत्व लगभग $\frac{1}{1000}$ वाँ भाग तथा संपीड्यता 10^5 गुणा अधिक होती है । गैसों के अणु अत्यधिक गतिशील होते हैं । इनकी निश्चित आकृति अथवा निश्चित आयतन नहीं होता है । दो या दो से अधिक गैसों को एक दूसरे के सम्पर्क में लाने पर वे एक दूसरे में शीघ्रता से विसरित हो कर समांग मिश्रण बनाती है । गैसें भौतिक गुणों के आधार पर सामान्य गैस नियमों - बॉयल नियम, चार्ल्स नियम, ग्राहम का विसरण नियम, आवोग्रादो नियम आदि का पालन करती है ।

गैसों को मुख्यत : दो वर्गों में विभाजित किया गया है - (1) आदर्श गैसें (Ideal gasesD) और (2) वास्तविक गैसें (Real gasesD)

आदर्श गैसें: वे गैसें जो बॉयल नियम, चार्ल्स नियम, आवोग्रादो नियम आदि का पालन करती है आदर्श गैसें कहलाती है । वास्तव में आदर्श गैसें एक काल्पनिक अवधारणा है ।

वास्तविक गैसें : वे गैसें जो निम्न दाब व उच्च ताप पर ही आदर्श गैसों के समान व्यवहार दर्शाती है किन्तु सामान्य दाब व ताप पर गैसों के नियम का पालन नहीं करती है वास्तविक गैसें कहलाती है ।

5.2 गैसों के नियम (Gas laws)

किसी गैस के दाब या ताप में परिवर्तन करने से आयतन पर प्रभाव का अध्ययन कुछ गैस नियमों द्वारा किया जा सकता है जिनका वर्णन निम्नलिखित है -

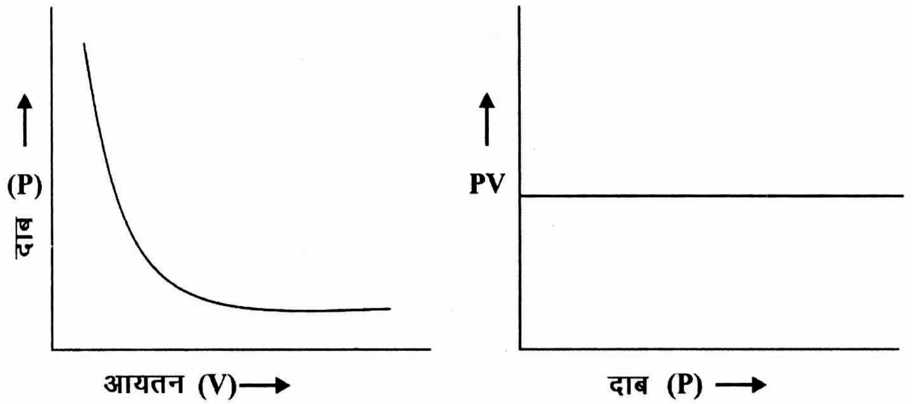
5.2.1 बॉयल का नियम (Boyle's law, 1662)

स्थिर ताप पर गैस की निश्चित संहति का आयतन, उसके दाब के व्युत्क्रमानुपाती होता हैं । इसे गणितीय भाषा से निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है -

$$V a \frac{1}{P}$$

PV =K(स्थिरांक) ...(5.1)

यहाँ K, स्थिर ताप पर एक स्थिरांक है । यदि किसी गैस के दाब और आयतन के मध्य स्थिर ताप पर ग्राफ खींचा जाय तो अतिपरवलय प्रकार (rectangular hyperbola) के वक्र प्राप्त होते हैं, (चित्र 5.1)।



चित्र 5.1 : बॉयल का नियम

5.2.2 चार्ल्स अथवा गैलूसक का नियम (Charles law, 1787 or Gaylussac's law, 1802)

स्थिर दाब पर किसी गैस के आयतन पर ताप के प्रभाव को चार्ल्स ने सन् 1787 में अध्ययन किया जिसे गैलूसक ने सन् 1802 में प्रमाणित किया । इस नियम के अनुसार स्थिर दाब पर गैस की निश्चित संहति का आयतन, ताप में 1°C की वृद्धि अथवा कमी से अपने 0°Cp के आयतन का 1/273 वॉ भाग बढ़ता अथवा घटता है । t^{O}C ताप बढ़ाने पर इस नियम को गणितीय भाषा में निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$V_t = V_0 + \left(\frac{t}{273.15}\right)V_0$$

$$V_t = V_0\left(1 + \frac{t}{273.15}\right)$$

$$V_t = V_0\left(\frac{273.15 + t}{273.15}\right)$$

$$\frac{v_t}{v_0} = \frac{T_t}{T_0}$$

यहाँ $v_t = t^0C$ ताप पर गैस का आयतन

$V_0 = 0^0C$ ताप पर गैस का आयतन

T_t व T0 उनके संगत परम ताप है

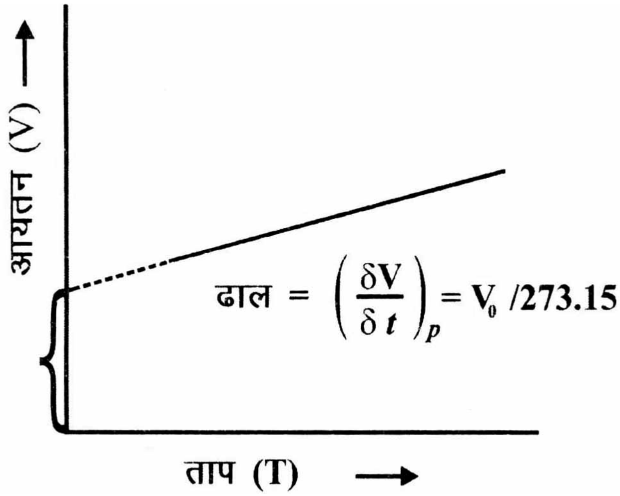
अत: स्थिर दाब पर किसी गैस की निश्चित संहति का आयतन उसके परम ताप के समानुपाती होता है ।

अर्थात् $V \propto T$

V = KT

$\frac{V}{T} = K$ (स्थिरांक) ...(5.3)

ताप व आयतन के मध्य वक्र खींचने पर एक सीधी रेखा प्राप्त होती है (चित्र 5.2)



चित्र 5.2 : चार्ल्स अथवा गैलूसक नियमानुसार किसी गैस के लिए ताप व आयतन में सम्बन्ध

5.2.3 आवोगाद्रों का नियम (Avogadro's law,1812)

ताप व दाब की समान परिस्थितियों में समान आयतन में उपस्थित गैस के अणुओं की संख्या समान होती है । किसी गैस के एक मोल (N.T.P पर 22.4 लीटर) में विद्यमान अणुओं की संख्या को आवोगाद्रो संख्या (Avogadro's number) कहते हैं । इसका मान 6.023 x 10^{23} होता है ।

5.3 आदर्श गैस समीकरण (Ideal gas equationZZ)

बॉयल, चार्ल्स और आवोग्रादो नियम की सहायता से आयतन, दाब, ताप और मोलों की संख्या में संबन्ध निम्न समीकरण द्वारा दर्शाया जाता है ।

बॉयल नियम के अनुसार $Va\frac{1}{P}$

चार्ल्स नियम के अनुसार VaT
आवोगाद्रो नियम के अनुसार Van
उपरोक्त तीनों समीकरणों से

$$Va\frac{nT}{P}$$

$$V=\frac{nRT}{P}$$

$$PV=nRT \qquad \dots (5.4)$$

यहां RS एक स्थिरांक हैं जो गैस स्थिरांक कहलाता है । समीकरण (5.4) को आदर्श गैस समीकरण कहते है ।
इसका मान समस्त गैसों के लिए समान होता है ।

5.3.1 गैस स्थिरांक (R) का विमा निर्धारण

आदर्श गैस समीकरण PV = nRT के अनुसार

$$R=\frac{PV}{nT}=\frac{\text{दाब}\times\text{आयतन}}{\text{मोल}\times\text{ताप}}$$

$$\frac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}}\times\frac{\text{आयतन}}{\text{मोल}\times\text{ताप}}$$

$$\frac{\text{बल}}{(\text{लम्बाई})2}\times\frac{(\text{लम्बाई})3}{\text{मोल ताप}}$$

$$\frac{\text{कार्य}}{\text{मोल ताप}} \quad (\because \text{कार्य} = \text{बल लम्बाई})$$

= कार्य प्रति मोल प्रति डिग्री अथवा ऊर्जा प्रति मोल प्रति केल्विन

5.3.2 गैस स्थिरांक (R) का संख्यात्मक मान (Numerical value of R)

(i) RS का मान लीटर-वायुमण्डल में (Value of R in litter-atmosphere) NTP पर एक मोल गैस का आयतन 2.2.4 लीटर होता है ।
P = 1 वायुमण्डलीय दाब (atm)
V = 22.4 लीटर (l or $dm^{3)}$
T = 273.15 K
n = 1 मोल

अत: $R=\frac{1atmX\,22.41}{1molX\,273.15K}$

0.0821 litter atm K^{-1} mol^{-1}

(ii) R का मान CGS मात्रक में (Value of R in CGS system)
चूंकि NTP पर एक मोल गैस का आयतन 224 लीटर होता है । सामान्य दाब पर Hg के तल की ऊँचाई (h) =76 cm
पारे का घनत्व (d) = 13.6 g/cm^3
गुरूत्व (g) 981 dyne/cm

$$R = \frac{PV}{nT} = \frac{76 X 13.6 X 981 X 22400}{1 X 273}$$

R = 8.314 X 10^7 dynecm$K^{-1}mol^{-1}$

R = 8.314X10^7ergs K^{-1} mol^{-1}

R = 8.314 Joules K-1(; .1 Joule =107ergs

(iii) R का मान कैलोरी में (SValue of R in calories)

∵ 1 कैलोरी =4.18x10^7 अर्ग

$$R = \frac{8.314 X 10^7}{4.18 X 10^7} = 1.987 calk^{-1} mol^{-1}$$

(iv) R का मान SI मात्रक में (Value of R in SI System)

SI मात्रक में दाब पास्कल (Pa) में, आयतन घन मीटर (M^3) व ताप केल्विन (K) में व्यक्त किया जाता है ।

P=1 वायुमण्डल=1.01321× 10^5 Pa

V=22.414 लीटर =22.414 × 10^{-3} m^3

T=273.15 K

n=1 मोल

अत: $R = \frac{1.01321 X 10^5 X 22.414 X 10^{-3}}{1 X 273.15}$

=8.314 Pa m^3 $k^{-1}mol^{-1}$

=8.314 Nm $k^{-1}mol^{-1}$[∵ 1 Pa=1Nm^{-2}]

=8.314J K^{-1} [∵ 1 Joule=1Nm]

बोध प्रश्न

1. निम्नलिखित वाक्यों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये -

(i) गैसें सामान्यत: ....घनत्व व................. संपीड्यता वाली होती है ।

(ii) गैस के अणुओं में अन्तराकर्षण बल .... होता है ।

(iii) वास्तविक गैसें................दाब व.............. ताप पर ही गैसों के नियम का पालन करती हैं ।

(iv) .... दाब व ताप की हर परिस्थिति में .... गैसों के नियम का पालन करती है ।

(v) गैसों की विसरण दर उनके .... के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होती है ।

2. निम्नलिखित कथनों में सही (✓) अथवा गलत (×) का चिन्ह कोष्ठक में लगाइये ।

(i) स्थिर ताप पर किसी गैस की निश्चित संहति का आयतन दाब के समानुपाती होता है । ( )

(ii) निश्चित ताप व दाब पर गैस के दिये गये आयतन में उपस्थित अणुओं की संख्या समान होती है । ( )

(iii) एक मोल आदर्श गैस,N.T.P पर22.414dm^3 आयतन घेरती हैं । ( )

(iv) वास्तविक गैसें उच्च दाब व निम्न ताप पर ही गैसों के नियमों का पालन करती हैं । ( )

3. n मोल गैस के लिए आदर्श गैस समीकरण लिखिए ।

… … … … … … … … … … … … … … … … … …

4. R का मान SI मात्रक में क्या होता है?

… … … … … … … … … … … … … … … … …

नोट:- आप अपने उत्तरों की जाँच इस इकाई के भाग 5.14 में दिये गये उत्तरों से मिलान कर करें ।

5.4 गैसों का अणुगति सिद्धान्त (Kinetic theory of gases)

आप समझ गए होगें कि प्रारम्भ में गैसों के नियम प्रायोगिक तथ्यों के आधार पर प्रतिपादित किए गए किन्तु इनका सैद्धान्तिक पक्ष प्रस्तुत नहीं किया गया । सन् 1738 में बरनूली (Bernaulli) ने गैसों के अणुगति सिद्धान्त के आधार पर इनकी व्याख्या की जिसे उन्नीसवीं शताब्दी में क्रोनिग (kronig), क्लाउसियस (ClausiusZD), मैक्सवेल (Maxwell) और बोल्टजमान (Boltzmann) ने सिद्धान्त के रूप में विकसित किया ।

गैसों के अणुगति सिद्धान्त के प्रमुख अभिगृहीत

(Important Postulates of Kinetic theory of gases)

1. प्रत्येक गैस अनेक समान संहति वाले सूक्ष्म कणों से मिलकर बनती है जिन्हें अणु कहते हैं । गैस के अणुओं का वास्तविक आयतन, गैस के सम्पूर्ण आयतन की तुलना में नगण्य होता है।
2. गैस के अणु ठोस, गोलाकार और पूर्णत: प्रत्यास्थ (perfectly elasticp) होते हैं जिनके मध्य किसी प्रकार का आकर्षण अथवा प्रतिकर्षण बल नहीं होता है ।
3. गैस के अणु सभी सम्भव दिशाओं में सीधी रेखा में निरन्तर गति करते हैं । दूसरे अणुओं अथवा पात्र की दीवारों से टकराने पर ये विपरीत दिशा व सीधी रेखा में गमन करने लगते हैं।
4. अणुओं की टक्कर पूर्णत: प्रत्यास्थ होती है अर्थात् अणुओं के परस्पर तथा दीवार से टकराने पर ऊर्जा का ह्रास नहीं होता है ।
5. किसी गैस का दाब, इसके चलायमान अणुओं के पात्र की दीवारों पर टकराने का परिणाम है ।
6. अणुओं की गति पर गुरुत्वाकर्षण बल का प्रभाव नगण्य होता है ।
7. गैस के विभिन्न अणुओं की गतियाँ भिन्न-भिन्न होती है । अत: इनकी गतिज ऊर्जाएँ भी अलग-अलग होती हैं । गैस के समस्त अणुओं की औसत गतिज ऊर्जा परम ताप के समानुपाती होती है अर्थात् ताप अधिक होने पर अणुओं का वेग ज्यादा होता है फलस्वरूप इनकी गतिज ऊर्जा भी अधिक होगी ।

5.4.2 अणुगति सिद्धान्त के अभिगृहीतों की वैद्यता (Validity of postuiates of kinetic theory of gases)

आप अणुगति सिद्धान्त के उपरोक्त मूलभूत अभिगृहीतों की वैद्यता को निम्न प्रकार समझ सकेंगे-

अभिगृहीत (1) के अनुसार गैस के अणुओं का आयतन गैस के कुल आयतन की तुलना में नगण्य होता है । आप इस तथ्य रवे अनभिज्ञ नहीं है कि सामान्यत: गैसों की संपीड्यता अधिक होती है और प्रायोगिक तौर पर यह देखा गया है कि NTP पर गैसें जैसे ऑक्सीजन, नाइट्रोजन के अणुओं का आयतन, कुल आयतन का 0.014 प्रतिशत होता है जिसे हम नगण्य मान सकते हैं ।
अभिगृहीत (2) को भी हम तर्कसंगत मान सकते है क्योंकि दाब कम करते ही गैस प्रसारित होने लगती है । यह तभी सम्भव है जब अणुओं के मध्य आकर्षण बल नगण्य हो ।

अभिगृहीत (3) भी न्यायसंगत प्रतीत होती हैं । अतिसूक्ष्मदर्शी द्वारा द्रव में निलम्बित कणों या धुएँ में कार्बन कणों की इधर उधर निरन्तर गति को देखा जा सकता है । इस गति को ब्राउनी गति (Brownian movement) कहते हैं ।

अभिगृहीत (4) का मानना न्यायसंगत लगता है क्योंकि यदि गैस के अणु पूर्ण प्रत्यास्थ न हो तो अणुओं की परस्पर टक्कर में अणुओं की गतिज ऊर्जा का ह्रास होता रहता और अन्तत: अणु स्थिर अवस्था में आ जाते अर्थात् इनकी सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा, स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती । किन्तु वास्तव में ऐसा नहीं होता ।

अभिगृहीत (5) की वैद्यता को इस प्रकार समझ सकते हैं कि किसी गैस की निश्चित संहति के अणुओं द्वारा पात्र की दीवारों पर टकराने के कारण, पात्र पर दाब का अनुभव होता है । समान परिस्थितियों में आयतन कम करने पर पात्र की दीवारों पर प्रहारों की संख्या बढ़ जाएगी फलस्वरूप दाब बढ़ जाएगा । इसी प्रकार गैस का आयतन बढ़ाने पर दाब भी कम हो जा जाएगा।

यदि वायु से भरे एक जार को ब्रोमीन वाष्प से भरे जार के ऊपर उल्टा रखें तो ब्रोमीन के लाल-भूरे वाष्प वायु से 5-6 गुना भारी होते हुए भी ऊपर के जार में आ जाते हैं । इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि गुरुत्वाकर्षण का अणुओं की गति पर कोई प्रभाव नहीं पडता है और अभिगृहीत (6) का न्यायोचित आधार मिल जाता है ।

अभिगृहीत (7) के अनुसार किसी गैस के विभिन्न अणुओं की गतिज ऊर्जा भिन्न होती है । गैस के अणुओं की परस्पर टक्कर के परिणामस्वरूप उनकी गतिज ऊर्जा परिवर्तित हो जाती है । इसे विसरण के उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है । विसरण में सूक्ष्म छिद्र से गैस के सभी अणु एक साथ विसरित नहीं होते हैं । साथ ही ताप बढ़ाने के कारण औसत गतिज ऊर्जा भी बढ़ जाती है । यह गैस की प्रकृति पर निर्भर नहीं करती है ।

इस प्रकार गैस के अणुगति सिद्धान्त के सभी अभिगृहीत प्रायोगिक तथ्यों पर आधारित है ।

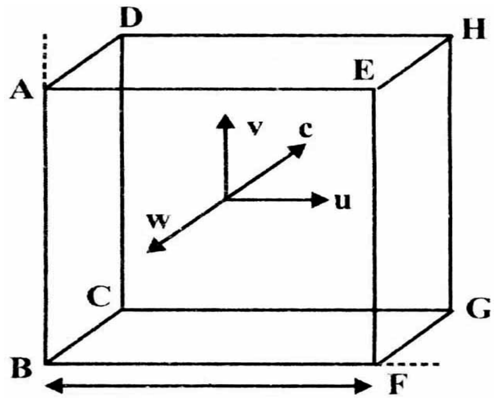
5.4.3 गैसों के अणुगति समीकरण की व्युत्पति

(Derivation of kinetic equation of a gas)

गैसों के अणुगति सिद्धान्त के मूलभूत अभिगृहीतों के आधार पर अणुगति समीकरण को व्युत्पित किया जा सकता है ।

माना कि एक घनाकार पात्र में किसी गैस की निश्चित मात्रा भरी गई है । इस घनाकार पात्र की प्रत्येक भुजा की लम्बाई l है । इसमें अणुओं की कुल संख्या n है तथा प्रत्येक अणु का द्रव्यमान m है ।

इस पात्र में सभी अणु यादृच्छिक गति से विभिन्न दिशाओं में pc_1,c_2,c_3 आदि वेग से चल रहे हैं । इन वेगों का मान शून्य से लेकर लगभग अनन्त तक हो सकता है । आप चित्रानुसार (चित्र 5.3) घन में किसी एक अणु पर अपना ध्यान केन्द्रित कीजिये । हम देख सकते हैं कि किसी निश्चित समय पर अणु के वेग c को x,-y- तथा z- अक्ष के सापेक्ष तीन लम्बवत घटकों u, v और w में वियोजित किया गया है । सर्वप्रथम हम वेग के x- अक्ष के सापेक्ष घटक पर विचार करेगें । इस घटक का प्रभाव घन की सिर्फ दो दीवारों EFGH और ABCDpp दीवारों पर होगा । चूंकि अणु पूर्णत: प्रत्यास्थ है तो EFGH दीवार पर टक्कर के पश्चात् वह उसी वेग से प्रतिक्षिप्त हो जाएगा अर्थात् टक्कर के पश्चात् अणु का वेग वही रहता है जो टक्कर के पहले था, परन्तु इसकी दिशा विपरीत हो जाती है।



चित्र 5.3: आणविक गति और उसके घटक

CG दिशा में दीवार EFGH पर टक्कर से पहले संवेग =mu .Z... (5.5)

टक्कर के पश्चात् संवेग =-mu. ....(5.6)

X-अक्ष के सापेक्ष प्रत्येक टक्कर लगने पर संवेग में परिवर्तन

Δ px=MU-(-mu)=2mu ....(5.7)

चूंकि पात्र की इन दीवारों के मध्य दूरी l cmS है अत: एक टक्कर के बाद दूसरी टक्कर मारने के लिए अणु को l cm की दूरी तय करनी होगी ।

अणु का वेग u सेमी प्रति सेकण्ड है अर्थात् वह एक सैकण्ड में u सेमी दूरी तय करता है।

एक सैहण्ड में टक्करों की संख्या $=\frac{u}{l}$ ....(5.8)

अत: एक सैकण्ड में संवेग परिवर्तन $\left(\frac{\Delta px}{\Delta t}\right)=$

प्रत्येक टक्कर में संवेग परिवर्तन x प्रति सैकण्ड टक्करों की संख्या

$$\frac{\Delta px}{\Delta t}=2mux\frac{u}{l}=\frac{2mu^2}{l} \qquad ....(5.9)$$

घन में कुल छ: दीवारें हैं यानि दीवारों के तीन युग्म होते हैं । चूंकि अणु किसी भी दिशा में गति कर सकता है अत: हम y-व z- अक्ष के सापेक्ष भी संवेग में परिवर्तन दर परिकलित कर सकते है।

$$\frac{\Delta py}{\Delta t}=\frac{2mu^2}{l} \qquad ......(5.10)$$

$$\frac{\Delta pz}{\Delta t} = \frac{2mw^2}{l} \qquad ....(5.11)$$

इस प्रकार एक अणु द्वारा प्रति सैकण्ड संवेग में कुल परिवर्तन समीकरण (5.9) (5.10) व (5.11) से दे सकते हैं

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mu^2}{l} + \frac{2mv^2}{l} + \frac{2mw^2}{l} \qquad .....(5.12)$$

$$\frac{2m}{l}(u^2 + v^2 + w^2) \qquad ...(5.13)$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2m}{l} \quad C_1^{\,2} \qquad .....(5.14)$$

($\because C_1^{\,2} = U^2 + V^2 + W^2$)

इसी प्रकार C_2, C_3, ...Cn वेग से गति करने वाले अणुओं के लिए यदि संवेग परिवर्तन दर की गणना की जाय तो सभी अणुओं के लिए प्रति सैकण्ड संवेग परिवर्तन =

$$= \frac{2m}{l}(C_1^{\,2} + C_2^{\,2} + ... C_n^{\,2}) \qquad .... (5.15)$$

चूंकि प्रत्येक वेग के लिए पृथक समीकरण निकालना संभव नहीं है अत: सामान्यतया गैस के सभी अणुओं का समान वेग C और C^2 अणुओं के अलग अलग वेगों के वर्ग का औसत मान लिया जाता है ।

$$C^2 = \frac{C_1^{\,2} + C_2^{\,2} + ... + C_n^{\,2}}{n} \qquad .... (5.16)$$

$$C = \sqrt{\frac{C_1^{\,2} + C_2^{\,2} + ... + C_n^{\,2}}{n}} \qquad .... (5.17)$$

यहाँ c को वर्ग माध्य मूल वेग (root means square velocity) कहते हैं ।

समीकरण (5.16) से

$$C_1^{\,2} + C_2^{\,2} + ... + C_n^{\,2} = nc^2 \qquad .... (5.18)$$

समीकरण (5.15) में समीकरण (5.18) द्वारा $C_1^{\,2} + C_2^{\,2} + ... + C_n^{\,2}$ का मान प्रतिस्थापित करने पर, n अणुओं के प्रति सेकण्ड संवेग में कुल परिवर्तन $= \frac{2mnc^2}{l}$ .....(5.19)

न्यूटन के गति के द्वितीय नियमानुसार संवेग में परिवर्तन की दर, बल के बराबर होती है ।

$\because$ आरोपित बल $= \frac{2mnc^2}{l}$ ....(5.20)

यदि गैस का कुल दाब P हो तो

$$P = \frac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{2mnc^2}{l} \; x \frac{1}{61^2}$$

[$\because$ घन की प्रत्येक दीवार का क्षेत्रफल l^2 होता है और घन में कुल छ: दीवारें होती है । अत: घन का कुल क्षेत्रफल $6l^2$ होगा ।]

$$P = \frac{mnc^2}{3l^3}$$

$$p = \frac{1}{3}\frac{mnc^2}{v}$$ [l^3=v घनाकार पात्र का आयतन]

...... $PV = \frac{1}{3}mnc^2$ ....(5.21)

समीकरण (5.21) किसी गैस के दाब, पात्र के आयतन, गैस अणुओं की संहति उनकी संख्या में दर्शाता है । इसे गैसों का अणुगति समीकरण (Kinetic equation of gas) कहते हैं ।

अणुगति समीकरण के अन्य रूप (Different equation Kinetic equation of gas)

PV=$\frac{1}{3}mnc^2$

$P = \frac{1}{3}\left(\frac{M}{V}\right)c^2$ [$\because M = mn$]

$P = \frac{1}{3}dc^2$ यहाँ d गैस का घनत्व है ।

5.4.4 अणुगति समीकरण से गैस नियमों की व्युत्पत्ति (Derivation of gas laws from kinetic equation of gas)

(1) **बॉयल का नियम -** गैस के अणुगति समीकरण (5.21) के अनुसार

$$PV = \frac{1}{3}mnc^2$$

$$= \frac{2}{2}x\frac{1}{3}mnc^2$$

$$= \frac{2}{3}x\frac{1}{2}mnc^2$$

PV=$= \frac{2}{3}K.E.$ (औसत गतिज ऊर्जा $K.E. = \frac{1}{2}mnc^2$] .....(5.22)

चूंकि गतिज ऊर्जा परम ताप के समानुपाती होती है अर्थात् स्थिर ताप पर गतिज ऊर्जा परिवर्तित नहीं होगी । अत:

PV=स्थिरांक यही बॉयल का नियम है ।

(2) **चार्ल्स का नियम-**समीकरण (5.22) के अनुसार

$$PV = \frac{2}{3}K.E.$$

$$\because K.E.aT$$

$$\because K.E. = kT$$

$$PV = \frac{2}{3}kT$$

$$V=\frac{2}{3}\quad=\frac{K}{P}T \qquad\qquad \because \text{ स्थिर दाब पर } \frac{2}{3}\frac{K}{P}= \text{ स्थिरांक}$$

अत: स्थिर दाब पर V= स्थिरांक XT

$V \propto T$

यही चार्ल्स का नियम है ।

(3) **आवोगाद्रो का नियम -** इस नियम की व्युत्पति के लिए मान ले कि दो गैसें दाब (P) व ताप (T) की समान परिस्थितियों में हैं । गैसों के अणुओं की संहति क्रमश: m_1 व m_2 तथा इसकी संख्या n_1 व n_2 है । यदि गैस के अणुओं के वर्ग-माध्य-मूल वेग c_1 व c_2 हो तो अणुगति समीकरण से

एक गैस के लिए $PV=\frac{1}{3}M_1N_1C^2{}_1$ ...(5.23)

दूसरी गैस के लिए $PV=\frac{1}{3}M_2N_2C^2{}_2$ ..(5.24)

समीकरण (5.23) व (5.24) से

$$\frac{1}{3}M_1N_1C^2{}_1=\frac{1}{3}M_2N_2C^2{}_2 \qquad ....(5.25)$$

चूंकि दोनों गैसें समान ताप पर हैं अत: उनकी औसत गतिज ऊर्जा भी समान होगी अर्थात्

$$\frac{1}{2}m_1C^2{}_1=\frac{1}{2}m_2C^2{}_2 \qquad ....(5.26)$$

समीकरण (5.25) में (5.26)ए का भाग देने पर

$n_1=n_2$

अत: ताप, दाब व आयतन की समान परिस्थितियों में समस्त गैसों में विद्यमान अणुओं की संख्या समान होती है । यही आवोग्रादो का नियम है ।

(4) **ग्राहम का विसरण नियम -** अणुगति समीकरण के अनुसार

$$PV=\frac{1}{2}mnc^2$$

$$PV=\frac{1}{3}\frac{mn}{V}c^2 \qquad \text{(mn गैस की कुल संहति)}$$

$$P=\frac{1}{3}\frac{mn}{V}dc^2 \qquad \left(\frac{mn}{V}=d \text{ गैस का घनत्व}\right)$$

$$c^2=\frac{3P}{d}$$

$$c=\sqrt{\frac{3P}{d}} \qquad .... (5.28)$$

ताप व दाब की समान परिस्थितियों में यदि दो गैसों के वर्ग माध्य मूल वेग क्रमश: c_1^2 व c_1^2 और आपेक्षिक घनत्व d_1, व d_2 हो तो

$$c_1=\sqrt{\frac{3p}{d_1}} \qquad ....(5.29)$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{3p}{d_2}} \qquad \text{..........(5.30)}$$

समीकरण (5.29) में (5.30) का भाग देने पर

$$\frac{C_1}{c_2} = \sqrt{\frac{3p}{d_1}} / \sqrt{\frac{3p}{d_2}}$$

$$\frac{C_1}{c_2}{}^2 = \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} \qquad \text{.............(531)}$$

चूंकि किसी संरध्र झिल्ली से गैस के अणुओं की विसरण की दर अणुओं के वेग के अनुक्रमानुपाती होती है । अत:

$$\frac{C_1}{c_2} = \frac{r_1}{r_2} \qquad \text{...........(5.32)}$$

यहाँ r_1 व r_2 गैसों की क्रमश: विसरण गतियाँ है । समीकरण (5.31) व (5.32) से

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{d_2}{d_1}} \qquad \text{.........(5.33)}$$

अत: दाब व ताप की समान परिस्थितियों में गैसों के विसरण की गति उसके आपेक्षिक घनत्व के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होती है । यही ग्राहम का विसरण नियम है ।

(5) गतिज ऊर्जा और ताप (Kinetic energy and Temperature)

चूंकि आण्विक वेग ताप बढ़ने पर बढ़ता है तो अणु की गतिज ऊर्जा भी बढ़ जाती है । गैस के अणुगति समीकरण के अनुसार

$$PV = \frac{1}{3}mc^2$$

$$PV = \frac{2}{3}K.E.$$

या $K.E. = \frac{3}{2}PV$

आदर्श गैस समीकरण के अनुसार

$$K.E. = \frac{3}{2}nRT \text{ .... (5.34)}$$

यदि गैस के मोलो की संख्या (n) एक हो तो

$$K.E. = \frac{3}{2}RT \qquad \text{........ (5.35)}$$

अत: K.E.aT

अर्थात् किसी आदर्श गैस के एक मोल की गतिज ऊर्जा परम ताप के अनुक्रमानुपाती होती है और उसकी प्रकृति पर निर्भर नहीं करती है । इसे मैक्सवेल का व्यापीकरण भी कहते है ।

एक अणु की औसत गतिज ऊर्जा $(K.E.) = \frac{3}{2}\frac{R}{N}T$

यहाँ N आवोगाद्रो संख्या है ।

या $K.E. = \frac{3}{2}kT$

यही k बोल्टजमान स्थिरांक है ।

बोध प्रश्न

5. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य / असत्य बताइये

(i) गैसों के अणुओं की गति पर गुरूत्वाकर्षण का प्रभाव नगण्य होता है । ( )

(ii) गैस के अणुओं की परस्पर टक्कर पूर्णतः अप्रत्यास्थ होती है । ( )

(iii) गैस के अणुओं की गतिज ऊर्जा, परम ताप के समानुपाती होती है । ( )

(iv) अणुओं के संवेग में परिवर्तन की दर उनके द्वारा लगाए गए दाब के बराबर होती है । ( )

6. गैसों का अणुगति समीकरण लिखिए ।

... ...

7. एक मोल गैस के 'लिए इसकी गतिज ऊर्जा, गैस स्थिरांक व परम ताप में सम्बन्ध, सूत्र द्वारा दीजिये ।

... ...

नोट : आप अपने उत्तरों की जाँच इस इकाई के भाग 5.14 में दिये गये उत्तरों से मिलान कर करें ।

गतिज ऊर्जा की अवधारणा को आप निम्न आंकिक प्रश्न के उदाहरण से भली भांति समझ पाएगें उदाहरण 5.1 127^{0}C पर 1 मोल नाइट्रोजन गैस की गतिज ऊर्जा परिकलित कीजिए ।

हल: $K.E. = \frac{3}{2}nRT$

$\because$ n=1

R=8.314X10^7 अर्ग प्रति डिग्री प्रति मोल

T=273+127=400K

R, T व, n के मानों को समीकरण में रखने पर

$$K.E. = \frac{3}{2}X1X8.314X10^7X400$$

=4.9884 X 10^{11} अर्ग

= 4.9884 X 10^4 जूल (∵ 10^7 अर्ग=1 जूल)

5.5 आण्विक वेगों का वितरण (Distribution of molecular velocities)

अब तक दी गयी जानकारी से आप समझ गए होंगे कि गैस के सभी अणु समान वेग से गति नहीं करते हैं । अणुओं की परस्पर तथा पात्र की दीवारों पर टक्कर के परिणामस्वरूप इनमें संवेग का विनिमय होता है अर्थात् कुछ अणुओं का वेग बढ़ जाता है और कुछ का घट जाता है । अतः सभी अणु भिन्न-भिन्न वेगों से गमन करने

लगते हैं और उनकी गतिज ऊर्जाऐ भी परिवर्तित हो जाती हैं । अणुओं के मध्य वेगों के वितरण को समझाने के लिए प्रायिकता सिद्धान्त का उपयोग करते हुए सर्वप्रथम जे.सी. मैक्सवेल (J.C. Maxwell) ने सन् 1860 में एक नियम दिया जिसे आण्विक वेगों के वितरण का नियम (Law of distribution of molecular velocities) कहते हैं । इस नियम के अनुसार गैस के अणु किसी भी दिशा में, शून्य से लेकर अनन्त तक किसी भी वेग से गमन कर सकते हैं । यह गणितीय रूप से निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है-

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dc} = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} e^{-mc^2/2RT} C^2 \quad \text{.........(5.36)}$$

यहाँ n = अणुओं की कुल संख्या

c = अणुओं का वेग

dc = वेग में अल्प परिवर्तन

$\frac{dn}{n}$ अणुओं का भिन्न जिनका वेग c और c+dc के मध्य हो

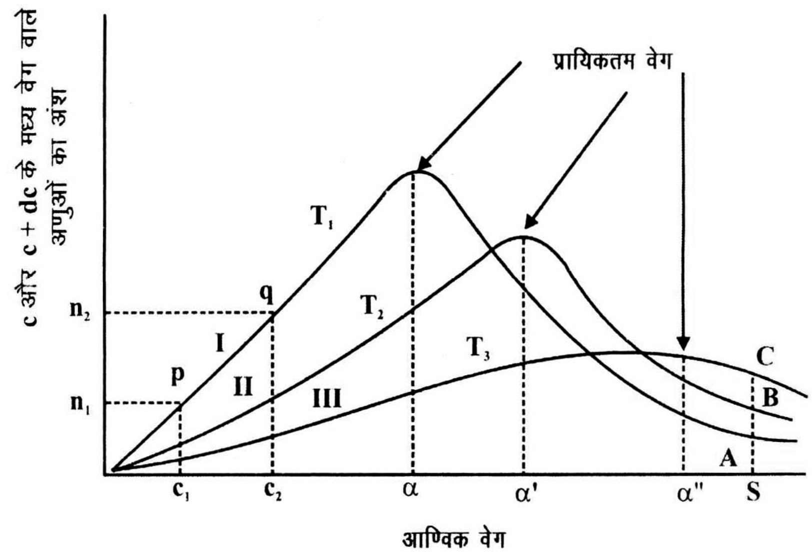
M= गैस का अणुभार

R = गैस स्थिरांक

T = परम ताप

e= प्राकृतिक लॉगरेष्म का आधार

मैक्सवेल नियम को सरलतापूर्वक आलेख (चित्र 5.4) द्वारा निरूपित किया जा सकता है । आलेख में अणुओं का अंश जिनका वेग C और (C+dc) के मध्य होता है को कोटि (y-अक्ष पर तथा वेग को भुजाक्ष (X-अक्ष) पर निरूपित करते हैं । चित्र (5.4) में आण्विक वेगों का वितरण तीन अलग-अलग ताप क्रमश T_1T_2 व T_3 (T_3>T_2>T_1) पर दर्शाया गया है ।



चित्र 5.4: आण्विक वेगों का वितरण

स्थिर ताप पर प्राप्त इन वक्रों की सहायता से निम्नलिखित निष्कर्ष निकालते हैं :-

(i) बहु त कम अथवा बहुत अधिक वेग वाले अणुओं का अंश बहु त कम होता है ।

(ii) लगभग शून्य वेग वाले अणुओं का अंश भी बहु त कम होता है । जैसे-जैसे वेग का मान बढता है तो उन अणुओं के अंश का मान भी बढ़ता जाता है तथा अधिकतम मान को प्राप्त करने के बाद फिर तेजी से कम होने लगता है और वेग के अधिक मान के लिए यह अंश लगभग शून्य हो जाता है ।

(iii) किसी ताप पर अधिकांश अणुओं का जो वेग होता है उसे प्रायिकता वेग (most probable velocity) कहते है । इस वेग को वक्र में उच्चिष्ठ द्वारा इप्रत किया जाता है ।

(iv) उच्चिष्ठ के समीप वक्र असममित होता है । अत: अणुओं का प्रायिकता वेग, औसत वेग (average velocityZ) से भिन्न होता है ।

(v) यदि तीन भिन्न तापों T_1,T_2 व T_3 पर वितरण वक्रों की तुलना करें तो हम यह देखते हैं कि अणुओं के प्रायिकता वेग के मान में वृद्धि होती है यानि

$$\alpha < \alpha' < \alpha''$$

ताप बढ़ने के साथ-साथ वितरण वक्र दाँयी और विस्थापित हो जाते हैं तथा वक्रों की ऊँचाई कम हो जाती है अर्थात् अणुओं का अंश जो विभिन्न वेगों से गति करता है, उनके वेगों में अन्तर कम हो जाएगा । वक्र का चौड़ा होना यह दर्शाता है कि उच्च ताप पर ज्यादातर अणुओं का वेग सामान्य से अधिक हो जाता है । इसे हम आलेख में बिन्दु Pl के संगत वेग पर विचार कर समझ सकते हैं । इस वेग के संगत अणुओं का अंश चित्रानुसार T_1 ताप पर SA, T_2 ताप पर SB तथा T_3 ताप पर SCp है । तीनों अंशों की तुलना करने पर हम यह पाते हैं कि अधिक ताप पर अधिक वेग रखने वाले अणुओं का अंश भी बढ जाता है ।

5.6 आण्विक वेगों के प्रकार (Types of molecular velocities)

आण्विक वेग तीन प्रकार के होते हैं - वर्ग माध्य मूल वेग, औसत वेग और प्रायिकतम वेग । इन आण्विक वेगों की गणना मैक्सवेल नियम की सहायता से कर सकते है ।

5.6.1 वर्ग माध्य मूल वेग (Root mean square velocity)

गैस के समस्त अणुओं के वेगों के वर्गो के औसत का वर्गमूल, वर्ग माध्य मूल वेग कहलाता है । यदि गैस के n अणुओं का वेग क्रमश: $c_1,c_2,c_3,\ldots\ldots\ldots\ldots c_n$Z हो तो माध्य मूल वेग c को हम निम्नलिखित सूत्र के द्वारा व्यक्त कर सकते हैं -

$$c=\sqrt{\frac{c_1^{\,2}+c^2{}_2+c^2{}_3+\ldots\ldots\ldots\ldots+c_n^2}{n}}$$

इसका परिकलन अणुगति समीकरण से किया जा सकता है

$$PV=\frac{1}{3}mnc^2$$

$$c^2=\frac{3PV}{mn}$$

$$c=\sqrt{\frac{3PV}{mn}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=1.7\sqrt{\frac{RT}{M}} \qquad \ldots\ldots(5.37)$$

$$c = \sqrt{\frac{3PV}{\frac{mn}{V}}}$$

5.6.2 औसत वेग (Averatge velocity)

यदि समस्त अणुओं के वेगों के योगफल में अणुओं की कुल संख्या का भाग दे दिया जाय तो औसत वेग निकाला जा सकता है ।

$$\bar{c} = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + c_n}{n} \qquad \textbf{..........(5.38)}$$

इसका मान ज्ञात करने के लिए c dn को 0 से ∞ तक की सीमा में समाकलन कर प्राप्त परिणाम में n का भाग दे दिया जाता है ।

$$\bar{c} = \frac{1}{n}\int_0^\infty c \;\; dn$$

$$= \int_0^\infty c\frac{dn}{n} \qquad \ldots\ldots;..(5.39)$$

समीकरण (5.39) में $\frac{dn}{n}$ का मान समीकरण (5.36)ए से रखने पर

$$\bar{c} = \int_0^\infty 4\pi\left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} e^{-mc^2/2RT} C^3 dc$$

$$\bar{c} = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty C^3 \; e^{-mc^2/2RT} dc \qquad \ldots\ldots\ldots(5.40)$$

उपरोक्त समीकरण में $\left(\frac{M}{2RT}\right)$ के स्थान पर a रखने पर

$$\bar{c} = 4\pi\left(\frac{a}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^\infty C^3 \quad e^{-ac^2} dc$$

$$\bar{c} = 4\pi\left(\frac{a}{\pi}\right)^{3/2} X \frac{1}{2a^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(5.41)$$

समीकरण (5.41) में a का मान रखने पर

$$\bar{c} = 4\pi\left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \frac{1}{2\left(\frac{M}{2RT}\right)^2}$$

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = 1.6\sqrt{\frac{RT}{M}} \qquad \textbf{..........(5.42)}$$

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8PV}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8P}{\pi D}}$$

5.6.3 प्रायिकता वेग (Most probable velocity)

किसी गैस के अधिकांश अणुओं का वेग प्रायिकतम वेग a कहलाता है । इसकी गणना समीकरण (5.36) को cp के सापेक्ष अवकलन कर उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ का प्रतिबन्ध लगाकर, प्राप्त परिणाम को शून्य के बराबर रख कर की जाती है ।

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dc} = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} e^{-Mc^2/2RT}c^2$$

या $= 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2}\left[2ce^{-Mc^2/2RT}c^2e^{-Mc^2/2RT}c^2\left(\frac{-2Mc}{2RT}\right)\right] = 0$

या c $e^{-Mc^2/2RT}\left(2-\frac{Mc^2}{RT}\right) = 0$

उपर्युक्त समीकरण में c, a के बराबर होगा । चूँकि प्रथम c $e^{-Mc^2/2RT}$ का मान शून्य नहीं हो सकता अत:

$$2-\frac{Mc^2}{RT}=0$$

$$c^2 - \frac{2RT}{M}$$

$$c = a = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = 1.4\sqrt{\frac{RT}{M}}$$

$$c = a = \sqrt{\frac{2PV}{M}} = \sqrt{\frac{2P}{d}}$$

5.6.4 वर्ग माध्य मूल वेग, औसत वेग और प्रायिकता वेग में सम्बन्ध (Relation between Root mean square, Average and Most Probable Velocities)

समीकरण (5.37), (5.42) व (5.43) से

$$C:\overline{C}:a = \sqrt{\frac{3RT}{M}}:\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}:\sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

$$=1:\sqrt{\frac{8}{3X3.14}}:\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{............(5.44)}$$

=1:0.921:0.816

a=0.816C ………..(5.45)

$\bar{c}$ =0.921C …….(5.46)

वर्ग माध्य मूल वेग के सूत्र में यदि इS का मान रखें तो निम्नलिखित सरल सूत्र प्राप्त होगा जिसमें ताप व अणुभार का मान ज्ञात होने पर वेग परिकलित किया जा सकता है।

$$C = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

(i) CGS मात्रक में

$$c=\sqrt{\frac{3X8.314X10^{7}\,XT}{M}}$$ (R =8.314 X 10^7 अर्गप्रति डिग्री प्रति मोल)

C=1.579X10^4 $\sqrt{\frac{T}{M}}$ सेमी प्रति सेकण्ड

(ii) SI मात्रक में

$$c=\sqrt{\frac{3X8.314XT}{M}}=4.994\sqrt{\frac{T}{M}}$$ मीटर प्रति सेकण्ड ...(5.48)

निम्न उदाहरण से आप गैस के अणुओं की वर्ग माध्य मूल, औसत और प्रायिकता वेग की गणना करना सीख पायेगें।

उदाहरण 5.2 27^0C पर ऑक्सीजन गैस के अणुओं के वर्ग माध्य मूल, औसत और प्रायिकता वेगो की गणना कीजिये।

हल ऑक्सीजन के लिए M=32,T=273+27=300K

वर्ग माध्य मूल वेग C=1.58X$10^4\sqrt{\frac{T}{M}}$

$=1.58\ X10^4\sqrt{\frac{300}{32}}$

=1.58X10^4X3.0618

=4.837X10^4CM/SEC

औसत वेग $\overline{C}$ =0.921XC

0.921X10^4 cm/sec

प्रायिकता वेग a=0.816 x c

0.816 x 4.837 x 10^4

2.498x10cm/sm

उदाहरण 5.3 किस ताप पर मेथेन का प्रायिकता वेग एथेन के 27˚cp ताप पर वर्ग माध्य मूल वेग के बराबर होगा?

हल:

एथेन का अणुभार (M)= 30

मेथेन का अणुभार (M)= 16

हल: 27˚Cp ताप पर एथेन का वर्ग माध्य मूल वेग

$$\sqrt{\frac{3RT}{M}}=\sqrt{\frac{3RX300}{30}}$$ (T=27+273=300K)

$$=\sqrt{30R}$$

ताप T पर मेथेन का प्रायिकतम वेग

$$=\sqrt{\frac{2RT}{m}}\ =\sqrt{\frac{2RT}{16}}$$

प्रश्ननुसार

$$=\sqrt{30R}=\sqrt{\frac{2RT}{16}}$$

$$30R=\frac{2RT}{16}$$

$$T==\frac{30X16}{2}=240K$$

उदाहरण 5.4 किस ताप पर SO_2 के वर्ग माध्य मूल वेग का मान O_2 के $27^{O}CD$ ताप पर प्रायिकतम वेग के बराबर होगा?

हल: O_2 का 27∘Cp ताप पर प्रायिकता वेग =

$$=\sqrt{\frac{2RT}{M}}=\sqrt{\frac{2RX300}{32}} \quad (T=27+273=300K)$$

SO_2 का वर्ग माध्य मूल वेग $==\sqrt{\frac{3RT}{M}}=\sqrt{\frac{3RT}{64}}$

$$\sqrt{\frac{2RX300}{32}}=\sqrt{\frac{3RT}{64}}$$

$$T=\frac{2X300X64}{32X3}=400K$$

बोध प्रश्न

8. आण्विक वेगों के वितरण का नियम किसने दिया?
9. अधिकांशतः अणुओं द्वारा रखने वाले वेग को क्या कहते है?
10. आण्विक वेगों के वितरण का वक्र उच्चिष्ठ के समीप कैसा होता है?
11. औसत वेग परिभाषित कीजिये ।
12. निम्नलिखित में सम्बन्ध सूत्र बताइये ।
    (क) वर्ग माध्य मूल व औसत वेग
    (ख) वर्ग माध्य मूल व प्रायिकतम वेग

नोटः- आप अपने उत्तरों की जाँच इस इकाई के भाग 5.14 में दिये गये उत्तरों से मिलान कर करें ।

5.7 मैक्सवेल के वेग वितरण नियम का प्रायोगिक सत्यापन (Experimental verification of Maxwell law of distribution of molecular velocities)

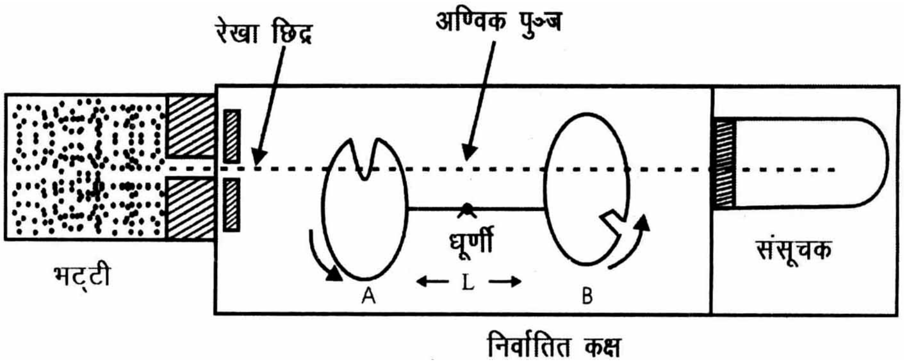
मैक्सवेल के वेग वितरण नियम का प्रायोगिक सत्यापन निम्न प्रत्यक्ष विधियों से किया जा चुका है -

(1) लेमर्ट वेग विधि (Lammert Velocity method)

(2) स्टर्न विधि (Streem methods)

(3) जार्टमेन एवम् को विधि (Zartman and ko method)

यहा लेमर्ट वेग विधि में प्रयुक्त उपकरण चित्र (5.5) में दर्शाया गया है ।

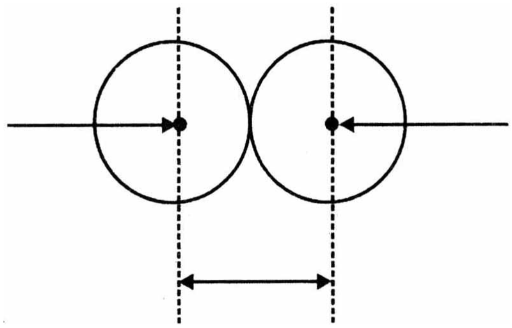


चित्र 5.5 आण्विक वेगों का प्रायोगिक निर्धारण

इस उपकरण में दो छिद्रदार प्लेटे A व B एक निश्चित दूरी pL पर एक घूमते हुए शाफ्ट से जुडी रहती है । इसमें एक भट्टी होती है जिससे निश्चित ताप पर अणुओं का पुञ्ज प्राप्त होता है जो समातरकारी रेखाछिद्र में गुजरकर निर्वातित कक्ष में से होती हुई वेग संसूचक की ओर जाती है । दोनों प्लेटों के छिद्रों का समायोजन इस प्रकार किया जाता है कि किसी निश्चित वेग वाले अणु ही संसूचक तक पहुँचते हैं । दोनों प्लेटों को जोड़ने वाले शाफ्ट को विभिन्न गति से घुमाया जाता है और भिन्न-भिन्न वेगों के लिए संसूचक में पहुँचने वाले अणुओं की संख्या इप्रत कर ली जाती है । अब अणुओं की संख्या और उसके अनुरूप वेगों में ग्राफ खींचने पर प्राप्त वक्र आण्विक वेगों के सैद्धान्तिक रूप से प्रयुक्त वेगों के मैक्सवेल वितरण वक्रों के समान प्राप्त होते हैं । इससे नियम का सत्यापन होता है ।

5.8 संघट्ट व्यास (Collision diameter)

किसी गैस के दो अणु जब एक दूसरे के नजदीक आते हैं तो एक स्थिति ऐसी आती है जिससे और अधिक नजदीक आने पर प्रतिकर्षण बल अधिक प्रभावी हो जाता है । इस दूरी को निकटतम उपगमन की दूरी (distance of closest approach) कहते हैं । इसके फलस्वरूप गैस के दो अणुओं के मध्य संघट्ट में भौतिक सम्पर्क नहीं होता है । इस परिस्थिति में अणुओं में आकर्षण व प्रतिकर्षण बल बराबर हो जाते हैं । अत: संघट्ट के समय अणुओं के केन्द्रों के बीच की न्यूनतम दूरी को संघट्ट व्यास कहते हैं । इसे सिग्मा (σ Z) से व्यक्त करते हैं ।



चित्र 5.6 दो अणुओं की टक्कर में संघट्ट व्यास

उदाहरणार्थ-1 वायुमण्डलीय दाब व 298K पर हाइड्रोजन के लिए संघट्ट व्यास 2.73A° है ।

5.9 संघट्ट संख्या (Collision numberS)

किसी गैस की निश्चित मात्रा में दिये गये ताप व दाब पर एकल अणुओं से इकाई समय और इकाई आयतन में टक्करों की संख्या को संघट्ट संख्या कहते हैं । अणुगति के सिद्धान्त के आधार पर गैस के अणुओं की संख्या जिनसे एकल अणु इकाई समय में टकराता है, $\sqrt{2}\pi\sigma^{2-}_{c} p^{2}$ rS के बराबर होती है । यहाँ $\bar{}_{c}$ rp औसत वेग p संख्या घनत्व अर्थात् इकाई आयतन में अणुओं की संख्या है ।

अत: $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi\sigma^{2-}_{c} p^{2}$ ....(5.49)

इस प्रकार इकाई समय, इकाई आयतन में संघट्ट वाले अणुओं की कुल संख्या $\sqrt{2}\pi\sigma^{2-}_{c} p^{2}$ होगी । चूंकि प्रत्येक टक्कर में दो अणु भाग लेते हैं अत: समान अणुओं में इकाई समय व इकाई आयतन में होने वाले टक्करों की संख्या

$$z_{11} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\pi\sigma^{2-}_{c} p^{2}\right) \text{.............(5.49)}$$

यहाँ Z_{11} गैस की संघट्ट आवृति (Collision frequency) है ।

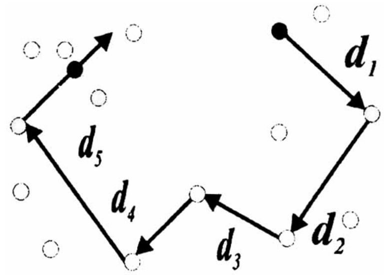
यदि यह टक्कर दो अलग प्रकार के अणुओं में हो तो संघट्ट आवृति

$$z_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}\pi\sigma^{2-}_{c} p1p2$$

यहाँ p1 और p2 क्रमश: पहले व दूसरे प्रकार के अणुओं का संख्या घनत्व है ।

5.10 माध्य मुक्त पथ (Mean free path)

जैसा कि आप समझ गए है कि गैस के अणु हर सम्भव दिशाओं में विभिन्न वेगों से गति करते हुए परस्पर अथवा पात्र की दीवारों से टकराते हैं जिससे उनकी गति और दिशा बदलती रहती है । टक्कर के पूर्व अणुओं द्वारा तय की गयी दूरी (d_1,d_2......) भिन्न-भिन्न होती है (चित्र 5.7) अत: दो क्रमागत टक्करों के मध्य अणु द्वारा तय की गयी औसत दूरी को माध्य मुक्त पथ (maens free path) कहते हैं । इसे λ से व्यक्त करते हैं



चित्र 5.7 : माध्य मुक्त पथ का प्रदर्शन

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}II\sigma^2 P}$$

यहाँ $\lambda =$ माध्य युक्त पथ

$\sigma =$संघट्ट व्यास

P= प्रति घन सेमी में अणुओं की संख्या है ।

λ के मान मान प्राय: 10^{-6} या 10^{-5} सेमी की कोटि के होते हैं । माध्य मुक्त पथ पर गैस की श्यानता की निर्भरता निम्नलिखित सम्बन्ध द्वारा व्यक्त की जाती है -

$$\lambda = \eta\sqrt{\frac{3}{Pd}} \quad ......(5.51)$$

यहाँ η = गैस का श्यानता गुणांक

P=गैस का दाब

d= गैस का घनत्व

λ =माध्य मुक्ता पथ है ।

बोध प्रश्न

13. माध्य मुक्त पथ किसे कहते हैं?

... ...

14. किसी गैस के समान अणुओं की संघट्ट आवृति को सूत्र द्वारा दर्शाइये ।

... ...

15. संघट्ट व्यास किसे कहते हैं?

... ...

नोट : आप अपने उत्तरों की जाँच इस इकाई के भाग 5.14 में दिये गये उत्तरों से मिलान कर करें ।

5.11 सारांश (Summary)

- द्रव्य की तीन अवस्थाएँ होती है - ठोस, द्रव और गैस ।
- गैसीय अवस्था में अणुओं के मध्य आकर्षण बल, ठोस और द्रव अवस्था की तुलना में कम होता है ।
- गैसों का अल्प 'घनत्व और उच्च संपीड्यता होती है ।

- आदर्श गैस ताप व दाब की हर परिस्थिति में गैस नियमों - बॉयल, चार्ल्स ग्राहम विसरण व आवोगाद्रो के नियम का पालन करती है ।
- वास्तविक गैसें निम्न दाब और उच्च ताप पर ही गैस के नियमों का पालन करती है तथा आदर्श गैस का व्यवहार दर्शाती है ।
- गैसों की चार मापीय विशेषताओं-दाब, ताप, आयतन और मोलों की संख्या में व्युत्पित सम्बन्ध को सामान्य गैस समीकरण कहते है ।
- गैसों का अणुगति सिद्धान्त, गैसों के नियमों की सैद्धान्तिक आधार देता है ।
- गैस के अणुओं के वेग की परास शून्य से अनन्त तक होती है । इन आण्विक वेगों का वितरण का नियम मैक्सवेल ने दिया ।
- गैसों के आण्विक वेगों के तीन प्रकार होते है - वर्ग माध्य मूल वेग, औसत वेग और प्रायिकता वेग

5.12 शब्दावली (Glossary)

घनत्व	density
संपीड्यता	compressibility
समांग	homogenous
नगण्य	negligible
लम्बवत्	perpendicular
संवेग	momentum
विसरण गति	rate of diffusion
असममित	msymmetricp
उच्चिष्ठ	maxima
निम्निष्ठ	minima
समान्तरकारी रेखाछिद्र	collimating slit
संसूचक	detector

5.13 संदर्भ ग्रन्थ (Reference book)

1. physical Chemistry – B.R. Puri, L.R. Sharma and M.S. Pathania
2. physical Chemistry – P.C. Rakshit
3. Text book o f Physical chemistry –s. Glasstone
4. Physical Chemistry- Bajpai
5. Physical Chemistry-K.L. Kapoor vol. 1-4.
6. Physical Chemistry - kunda & Jain
7. Physical Chemistry- D.V.S Jain & Johar
8. Physical Chemistry – w. Moore
9. Text book of physical Chemistry- adamson

5.14 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. (i)अल्प, उच्च (ii) नगण्य (iii) निम्न, उच्च
   (iv)आदर्श गैसें (v) घनत्व
2. (i)X (ii) ✓ (iii) ✓ (iv) X
3. PV=nRT
4. 8.314 Joule k^{-1} mol^{-1}
5. सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य
6. PV=$\frac{1}{3}mnc^{-2}$p
7. $K.E. = \frac{1}{3}RT$
8. मैक्सवेल
9. प्रायिकता वेग
10. असममित
11. किसी गैस के समस्त अणुओं के वेग के औसत को औसत वेग कहते है ।
    (क) औसत वेग $\overline{C}$=0.921 X वर्ग माध्य मूल वेग (C)
    (ख) प्रायिकता वेग (a) =0.816 x वर्ग माध्य मूल वेग (c)
12. दो क्रमागत टक्करों के मध्य अणु द्वारा तय की गयी औसत दूरी को माध्य मुक्त पथ कहते है ।
13. $z_{11} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi\sigma^{2-}_{c}p$
14. संघट्ट के समय अणुओं के केन्द्रों के बीच की दूरी को संघट्ट व्यास कहते है ।

5.15 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise questions)

1. आदर्श गैस समीकरण से आप क्या समझते हैं ' n मोल गैस के लिए आदर्श गैस समीकरण लिखिए ।
2. गैस नियतांक R की विमा SI मात्रक में क्या होगी?
3. आदर्श गैस और वास्तविक गैस से क्या अभिप्राय है? समझाइये ।
4. गैस के अणुगति सिद्धान्त के प्रमुख अभिगृहीत लिखिए तथा इनकी वैद्‌यता समझाइये ।
5. गैस के अणुगति समीकरण को व्युत्पिंत कीजिए तथा दर्शाइये कि एक मोल गैस की गतिज ऊर्जा $\frac{3}{2}RT$ होती है ।
6. गैस के अणुगति समीकरण की सहायता से बॉयल का नियम, चार्ल्स का नियम और आवोगाद्रो नियम को निगमित कीजिए ।

7. मैक्सवेल के आण्विक वेगों के वितरण नियम की व्याख्या कीजिए तथा आण्विक वेग पर ताप के प्रभाव की विवेचना कीजिए । इस नियम का प्रायोगिक सत्यापन कैसे किया जाता है ।
8. प्रायिकता वेग, वर्ग माध्य मूल वेग और औसत वेग को परिभाषित कीजिए तथा इनके मध्य सम्बन्ध स्थापित कीजिए ।
9. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए -
   (i) माध्य मुक्त पथ
   (ii) संघट्ट व्यास
   (iii) संघट्ट संख्या व संघट्ट आवृति
10. बन्द पात्र में किसी एक मील गैस का दाब p है । यदि इस पात्र में गैस के एक मोल और मिला दिया जाय तो इसके दाब पर क्या प्रभाव पड़ेगा ।
11. NTP पर O_2 अणुओं को वर्ग माध्य मूल वेग परिकलित कीजिए ।

    हल संकेत NTP पर O^2 का वर्ग माध्य मूल वेग

$$=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

$$=\sqrt{\frac{3X8.314X273}{32}}$$

[उत्तर 46.12 X 10^3 CM/SEC]

12. किस ताप पर SO_2 का वर्ग माध्य मूल वेग का मान 0_2 के 300Kr पर प्रायिकता वेग के बराबर होगा ?

    हल संकेत: $=\sqrt{\frac{2RT}{M_{02}}}=\sqrt{\frac{3RT}{M_{02}}}$ [उत्तर 400K]

13. 25^0C पर 1 मोल ऑक्सीजन गैस की गतिज ऊर्जा का मान SI मात्रक में ज्ञात कीजिए ।

    हल संकेत: $\left[K.E.=\frac{3}{2}nRT\right]$ (उत्तर 3718.22J]

14. उस ताप (^{O}C) का परिकलन कीजिए जिस पर CO_2 के अणुओं का वर्ग माध्य मूल वेग, O_2 के अणुओं के 47^OCD पर वर्ग माध्य मूल वेग के बराबर होगा?

    (उत्तर 167˚C)

15. नाइड्रोजन गैस के 25^0Cp और 75 सेमी दाब पर वर्ग माध्य मूल वेग की गणना कीजिए

    हल संकेत: $\frac{76X22400}{273}=\frac{75XV_2}{298}$

$$C=\sqrt{\frac{3PV}{M}}$$

(उत्तर 5.153X10^4 pcm/sec)

इकाई - 6

गैसीय अवस्था-भाग 11 (वास्तविक गैसें)

GASEOUS STATE-PART II (REAL GASES)

इकाई की रूपरेखा

6.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्न बिन्दुओं को समझ पाएँगे-

1. वास्तविक गैसों का आदर्श व्यवहार से विचलन तथा इसके कारण ।

2. गैसों के अणुगति सिद्धान्त के दो अभिगृहीतों में सुधार की आवश्यकता, आदर्श गैस समीकरण में आयतन व दाब संशोधन द्वारा वान्डर वाल्स समीकरण की व्युत्पित तथा इसके अनुसार आदर्श व्यवहार से विचलन की व्याख्या ।
3. वान्डर वाल्स समीकरण और बॉयल ताप में सम्बन्ध ।
4. क्रान्तिक अवस्था तथा क्रान्तिक स्थिरांकों का प्रायोगिक निर्धारण
5. वास्तविक गैसों के समतापी P-V वक्रों द्वारा अवस्था सातत्य एवम् वान्डर वाल्स समीकरण के P-V समतापी वक्रों से तुलना ।
6. क्रान्तिक स्थिरांकों तथा वान्डर वाल्स स्थिरांकों की गणना एवम् वान्डर वाल्स समीकरण की सीमाएँ ।
7. संगत अवस्थाओं का नियम
8. गैसों का द्रवण ।

6.1 प्रस्तावना (Introduction)

आप पूर्व अध्याय में यह पढ़ चुके हैं कि आदर्श गैस समीकरण PV=nRT का पूर्ण रूप से पालन करने वाली गैस आदर्श गैस कहलाती हैं । बॉयल के नियमानुसार स्थिर ताप पर गैस का दाब दुगुना अथवा चौगुना करने पर आयतन आधा अथवा एक-चौथाई रह जाना चाहिए और इसी प्रकार गैस का दाब बढ़ाते रहने पर एक ऐसी अवस्था आनी चाहिए जब गैस का आयतन शून्य हो जाए लेकिन वास्तव में ऐसा नहीं होता है । गैस का दाब बढ़ाने पर आयतन कम होता तो है लेकिन साथ ही इसका घनत्व बढ़ जाता है जिसके फलस्वरूप गैस की संपीड्यता (Compressibility) घटती जाती है । अत: उच्च दाब पर गैस का व्यवहार, आदर्श गैस व्यवहार से विचलित हो जाता है ।

इसी प्रकार चार्ल्स और गैलूसक के नियमानुसार स्थिर दाब पर किसी गैस का आयतन, ताप कम करने पर कम होना चाहिए । इसी घटते क्रम में एक ऐसी अवस्था आनी चाहिए कि -273˚Cp ताप पर गैस का आयतन शून्य रह जाय लेकिन वास्तव में ऐसा नहीं होता है । अत: निम्न ताप पर भी गैसों का व्यवहार, आदर्श गैस व्यवहार से विचलित हो जाता है ।

रेग्नोल्ट (Regnault), एण्ड्रयूज (AndrewsD), एमेगेट (Amagat) आदि ने गैसों' के व्यवहार का अध्ययन दाब व ताप के दीर्घ परिसर में किया तथा पाया कि कोई भी गैस पूर्ण रूपेण आदर्श नहीं होती

6.2 गैसों का आदर्श व्यवहार से विचलन (Deviations of gases from Ideal behaviour)

किसी गैस के आदर्श व्यवहार के विचलन को संपीड्यता गुणांक (Compressibility Factor), Z की सहायता से आसानी से समझाया जा सकता है ।

एक मोल गैस के लिए आदर्श गैस समीकरण

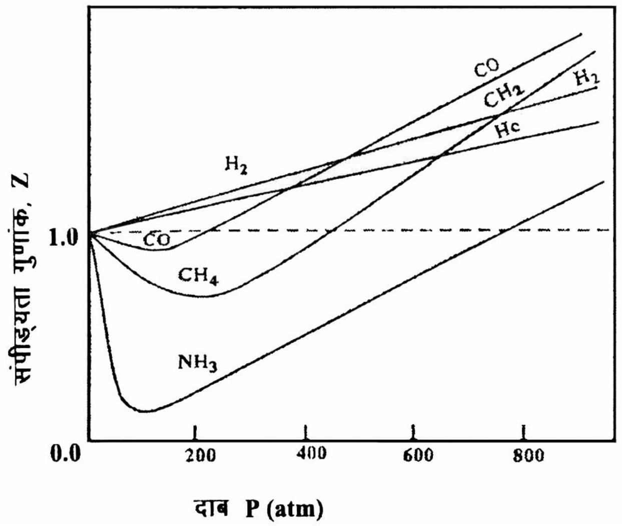
$$P_iV_i=RT \qquad \dots (6.1)$$

संपीड्यता गुणांक Z को निम्न प्रकार परिभाषित करते है

$$Z = \frac{PV}{(PV)} = \frac{PV}{P_iV_i} = \frac{PV}{RT}$$

अत: किसी आदर्श गैस के लिए संपीड्यता गुणांक सदैव इकाई होना चाहिए । सन् 1818 में ऐमेगट द्वारा स्थिर ताप पर कुछ गैसों के लिए संपीड्यता गुणांक व दाब के मध्य ग्राफ आलेखित किए गए (चित्र 6.1) ।

$$Z = \frac{PV}{nRT}$$ (n मोल गैस के लिए)



चित्र 6.1. वास्तविक गैसों का आदर्श व्यवहार से विचलन ।

उपरोक्त चित्र के द्वारा निम्नलिखित प्रेक्षण प्राप्त होते है -

(i) आदर्श गैस के लिए आलेख को बिडकित रेखा द्वारा दर्शाया गया है । यह रेखा दाब अक्ष के समानान्तर होती है अर्थात् आदर्श गैस के लिए सभी दाबों पर Z का मान इकाई (Z=1) होगा ।

(ii) हाइड्रोजन व हीलियम गैसों के लिए सभी दावों पर Z का मान इकाई से अधिक होता है (Z>1) अर्थात् इनकी संपीड्यता आदर्श गैस से कम होती है ।

(iii) दाब अत्यन्त कम होने पर गैसों के संपीड्यता गुणांक Z का मान लगभग इकाई (Z =1) आता है अर्थात् अत्यन्त कम दाब पर सभी गैसे आदर्श गैसों के समान व्यवहार दर्शाती है।

(iv) उच्च दाबों पर गैसों के लिए Z का मान इकाई से अधिक (Z>1) आता है अर्थात् उच्च दाब पर गैसों की संपीड्यता कम हो जाती है ।

(v) साधारण से कम दाब (moderately low pressure) पर COZ, CH_4,NH_3 आदि गैसों के लिए Z का मान इकाई से कम (Z<1) आता है अर्थात् यह गैसें इन परिस्थितियों में आदर्श गैस की तुलना में अधिक संपीड्य होती हैं । चूँकि कम दाब पर दीर्घ परासी आकर्षण बल अधिक प्रभावी हो जाता है और संपीड्यता कम होने लगती है । दाब बढ़ने के साथ-साथ Z का मान कम होता जाता है तथा एक निश्चित दाब पर निम्नतम होकर

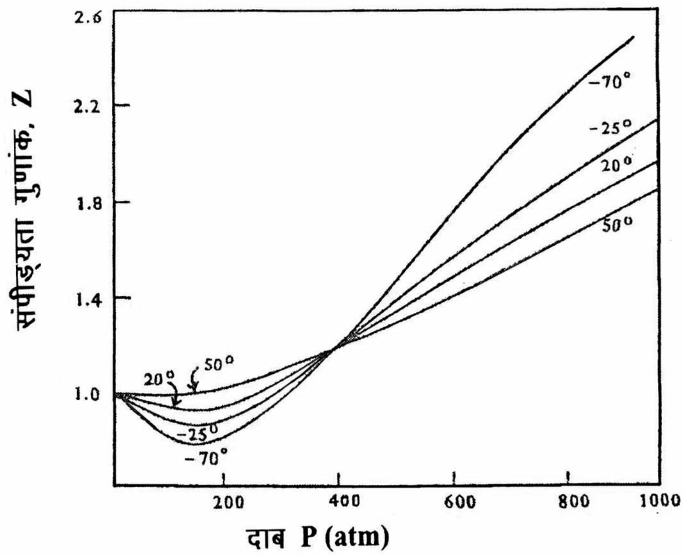
दाब के साथ पुन: बढ़ने लगता है और' अब गैरों, आदर्श गैस की तुलना में कम संपीड्यता दर्शाती हैं क्योंकि इस परिस्थिति में अणुओं के मध्य प्रतिकर्षी बल अधिक प्रभावी हो जाता है ।

(vi) CH_4 व CO उच्च दाब पर तथा NH_3 गैस कम दाब पर आदर्श गैस की तुलना में अधिक विचलन दर्शाती है ।

6.2.1 आदर्श व्यवहार से विचलन पर ताप का प्रभाव

(Effect of temperature on deviation from ideal behaviour)

एंमेगेट ने ताप परास । (-70^0 से 50^0C तक) में नाइड्रोजन गैस के लिए संपीड्यता गुणांक व दाब में आलेख खींचे जो चित्र 6.2 में दर्शाए गए हैं



चित्र 62. 'नाइट्रोजन गैस के आदर्श व्यवहार से विचलन पर ताप का प्रभाव ।

उपरोक्त चित्र में आप देख सकते है कि ताप बढ़ने के साथ-साथ वक्र का नमन (DIP) कम होता जाता है तथा यह निम्निष्ठ, कम दाब की ओर खिसकता जाता है । एक विशेष ताप पर यह नमन बिन्दु (यहाँ 50^0C पर) संपीड्यता अक्ष पर पहुँच जाता है । इस ताप पर दाब परिसर 0 से 100 वायुमण्डलीय दाब में नाइट्रोजन गैस के लिए Z का मान लगभग 1 के बराबर होता है अर्थात् नाइट्रोजन गैस आदर्श गैस के समान व्यवहार दर्शाती है । इस ताप को नाइट्रोजन का बॉयल बिन्दु अथवा बॉयल ताप कहते हैं ।

अत: वह ताप जिस पर वास्तविक गैस, दाब के सुप्रेक्ष्य परिसर में आदर्श गैस के नियम का पालन करती है बॉयल ताप (Boyle's temperature) अथवा बॉयल बिन्दु कहलाता है । इसे T_B से व्यक्त करते हैं । अलग-अलग गैसों के लिए इसका मान अलग-अलग होता है । हाइड्रोजन और हीलियम गैसों के लिए बॉयल ताप (T_B) का मान क्रमश:-165^0Cp और -240^0Cp है । इस प्रकार गैसें कम ताप व अधिक दाब पर आदर्श आचरण से अधिक विचलन प्रदर्शित करती हैं ।

6.2.2 चार्ल्स अथवा गैलूसक नियम से विचलन

इस नियम के अनुसार सभी दाबों पर गैसों के आयतन प्रसार गुणांक का मान $\frac{1}{273.15}$ अथवा 0.00361 होना चाहिए । एमेगेट ने बताया कि यह प्रेक्षण केवल कम दाब पर प्राप्त होता है और दाब के बढने के साथ साथ विचलन में वृद्धि होती जाती है ।

6.2.3 आवोग्रादो नियम से विचलन

इस नियम के अनुसार किसी गैस के एक मोल का आयतन, 273.15K ताप व एक वायुमण्डलीय दाब पर 22.415 लीटर होता है । प्रयोगों द्वारा ज्ञात होता है कि यह आयतन केवल निम्न दाब पर ही आता है । सामान्यतया सरलता से द्रवित होने वाली गैसें अधिक विचलन दर्शाती हैं । इन गैसों के सामान्य ताप व दाब पर मोलर आयतन के मान सारिणी 6.1 में दिये गये है

सारिणी 6.1 : गैसों के मोलर आयतन व आदर्श गैस से विचलन

गैस	**गैसों का मोलर आयतन (लीटर)**	**विचलन**	**क्वथनांक (K)**
हाइड्रोजन	22.425	0.010	20
नाइट्रोजन	22.402	-0.013	77
ऑक्सीजन	22.394	-0.021	90
कार्बनडाईअक्सक्साइड	22.264	-0.151	195
अमोनिया	22.084	-0.331	240
मेथिल क्लोराइड	21.879	-0.545	249

6.2.4 आदर्श आचरण से विचलन के कारण (Causes of deviations from ideal behaviour)

गैसों के आदर्श आचरण से तात्पर्य है कि गैसें सभी गैस नियमों जैसे बॉयल, चार्ल्स आदि नियमों का पालन करें किन्तु वास्तविक गैसों का आचरण आदर्श गैस के समान नहीं होता है । गैसों के अणुगति सिद्धान्त के आधार पर आदर्श गैसों के व्यवहार की व्याख्या तो की जा सकती है किन्तु वास्तविक गैसों के आदर्श आचरण से विचलन को नहीं समझा जा सकता है । अत: अणुगति सिद्धान्त के अभिगृहीत पर पुन: विचार कर आवश्यकतानुसार उनमें सुधार करना चाहिए । अणुगति सिद्धान्त की दो अभिगृहीतों में सुधार किया गया जो निम्न प्रकार है -

(1) गैसों के अणुओं का आयतन, गैस के कुल आयतन की तुलना में नगण्य होता है । गैसों के आयतन का अधिकांश भाग रिक्त होता है जिसमें अणु सभी दिशाओं में स्वतन्त्रतापूर्वक विचरण करते हैं । ताप व दाब की सामान्य स्थिति में इस अभिगृहीत को लगभग सही माना जा सकता है क्योंकि इस परिस्थिति में गैस के अणुओं का आयतन, गैस के कुल आयतन का लगभग 0.014 प्रतिशत होता है जिसकी हम उपेक्षा कर सकते हैं । किन्तु यदि गैस का दाब 100 गुणा बढ़ा दिया जाय तो यह 1.4 प्रतिशत

हो जाएगा तथा दाब को 1000 गुणा बढ़ाने पर अणुओं का आयतन 1.4 प्रतिशत हो जाएगा । ऐसी अवस्था में गैस के कुल आयतन की तुलना में गैसों के अणुओं के आयतन को नगण्य नहीं माना जा सकता है । इसी कारण उच्च दाब पर गैसें आदर्श व्यवहार से अधिक विचलन दर्शाती है ।

(2) गैसों के अणुओं के मध्य आकर्षण बल नहीं पाया जाता । यह अभिगृहीत सामान्य ताप व दाब पर तो सही है परन्तु कम ताप व अधिक दाब पर गैस का आयतन कम होने से गैस के अणु एक दूसरे के काफी निकट आ जाते है । ऐसी अवस्था में गैस के अणुओं में परस्पर आकर्षण बल होना स्वाभाविक है । इस पक्ष को हम प्रमाणित कर सकते हैं । यदि गैसों के अणुओं के मध्य आकर्षण बल नहीं होता तो इनका द्रवीकरण करना सम्भव नहीं होता । किसी गैस को निर्वात में प्रसारित करने पर गैस का ताप कम हो जाता है, इसे जूल थॉमसन प्रभाव (joule Thomson's effect) कहते हैं । यह प्रभाव इस प्रकार समझाया जा सकता है कि गैसों के प्रसारित होने पर अणुओं को अपने आकर्षण बल के विरूद्ध कार्य करना पड़ता है । इस कार्य के लिए ऊर्जा व्यय होती है जो अणुओं के स्वयं की गतिज ऊर्जा से प्राप्त होती है जिससे इनका ताप कम हो जाता है और गैसों का शीतलन हो जाता है ।

इन कारणों से वास्तविक गैसों का आचरण, आदर्श आचरण से विचलित हो जाता है ।

बोध प्रश्न

1. निम्नलिखित कथनों में सही (√) अथवा गलत (x) का चिन्ह कोष्ठक में लगाइये।

(i) आदर्श गैस के लिए सभी दाबों पर संपीड्यता गुणांक का मान इकाई होता है । ( )

(ii) हाइड्रोजन गैस की संपीड्यता सभी दाबों पर आदर्श गैस से अधिक होती है। ( )

(iii) अत्यन्त कम दाब पर अधिकांश गैसें, आदर्श गैसों के समान व्यवहार दर्शाती है। ( )

(iv) ताप व दाब की सामान्य परिस्थिति में गैस के अणुओं का आयतन, गैस के कुल आयतन का 14 प्रतिशत होता है । ( )

(v) निम्न ताप व उच्च दाब पर गैस के अणुओं के मध्य उपस्थित आकर्षण बल को जूल थॉमसन प्रभाव द्वारा समझाया जा सकता है । ( )

2. बॉयल ताप की परिभाषा लिखिए

....

3. मोल गैस के लिए संपीड्यता गुणांक का सूत्र लिखिए ।

....

नोट: आप अपने उत्तर इस इकाई के भाग 6.17 में दिए गए उत्तरों से मिलान करे ।

6.3 वान्डर वाल्स समीकरण (Vander Waals' equation)

सन् 1873 में वान्डर वाल ने वास्तविक गैसों के आदर्श आचरण से विचलन के कारणों को ध्यान में रख कर आदर्श गैस समीकरण PV=nRT में दाब व आयतन से सम्बन्धित संशोधन कर, एक नया समीकरण व्युत्पित किया जिसे वान्डर वाल्स समीकरण कहते हैं । ये संशोधन निम्न है ।

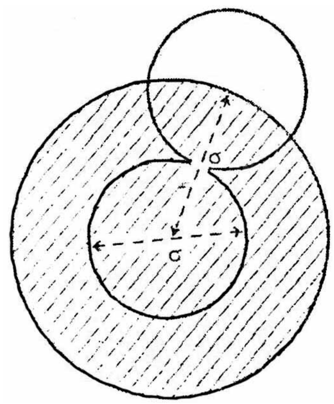
(i) आयतन संशोधन (volume correction)

आदर्श गैस के अणुओं का वास्तविक आयतन नगण्य माना गया है अर्थात् PVZ=nRT मे V उस आयतन को प्रदर्शित करता है जो अणुओं के स्वतन्त्र रूप से विचरण के लिए उपलब्ध है । चूंकि वास्तविक गैस के अणुओं का आयतन नगण्य नहीं माना जा सकता है अत: इसमें गैसों के विचरण के लिए रिक्त स्थान V से कुछ कम होगा । यदि एक मोल गैस के अणुओं का आयतन b मान ले और n मोल गैस का कुल आयतन v हो तो अणुओं का वास्तविक आयतन nb होगा यहाँ b को वर्जित आयतन (excluded volume) भी कहते हैं ।

अत: अणुओं के स्वतन्त्र विचरण अथवा संपीडन के लिए उपलब्ध आयतन, Vi-V-nb......(6.2)
यही b किसी गैस के लिए अभिलाक्षणिक स्थिरांक है जो अणुओं के आकार पर निर्भर करता है । इसे परिकलन द्वारा दर्शाया जा सकता है कि यह आयतन अणुओं के वास्तविक आयतन का चौगुना होता है ।

वर्जित आयतन का परिकलन (Calculation of excluded volume)

यदि गैस के अणुओं की हम गोलाकार रचना के रूप में कल्पना करें और मान लें कि इनका व्यास Zσ है । जब दो अणु गति करते हुए एक दूसरे के समीप आते हैं तो एक निश्चित दूरी के बाद ये ओर नजदीक नहीं आ सकते जैसा कि चित्र (6.3) में दर्शाया गया है । एक अणु द्वारा दूसरे अणु के चारों ओर Zσ अर्द्धव्यास के गोले के बराबर आयतन में जाना संभव नहीं है । चित्र में इस अपवर्जित आयतन को छायांकित भाग द्वारा दिखाया गया है ।



चित्र 6.3. अणुओं का वर्जित आयतन लाइनों वाला वृत

अणुओं के एक युग्म के लिए वर्जित क्षेत्र का आयतन $=\frac{4}{3}\pi\sigma^3$

अत: प्रति अणु वर्जित आयतन $==\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi\sigma^{3}\right]$ Z

$$=\frac{4}{6}\pi\sigma^{3}$$ ......(6.3)

एक अणु का वास्तविक आयतन $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{3}$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{4}{3}\pi\sigma^{3}\right]$$ ... (64)

अत: समीकरण (6.3) व (6.4) से स्पष्ट है कि वर्जित आयतन, अणु के वास्तविक आयतन से चौगुना होता है ।

इस प्रकार वर्जित आयतन प्रति मोल (b) =4x आवोगाद्रो संख्या (N)

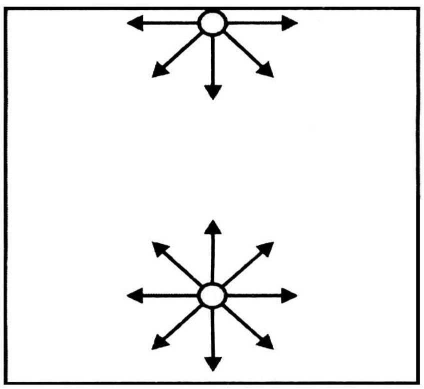
X एक अणु का वास्तविक आयतन Z

$$b=4X\ N\ X\ \frac{4}{3}\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{3}$$ ... (6.5)

समीकरण (6.5) की सहायता से एक मोल अणुओं का वर्जित आयतन परिकलित किया जाता है । n मोल अणुओं के लिए वर्जित आयतन nb होगा । इसका मान समीकरण (6.2) में रखकर संशोधित आयतन का मान निकाल लिया जाता है । यह संशोधन सर्वप्रथम हर्न (Hirm) ने सच 1865 में किया था ।

(ii) दाब संशोधन (Pressure correctionZ)

आदर्श गैस के अणुओं में परस्पर- आकर्षण बल नहीं होता है किन्तु वास्तविक गैसों में उच्च दाब पर यह आकर्षण बल अधिक प्रभावी हो जाता है । यदि किसी पात्र जिसमें गैस हैं पर विचार करें तो हम यह देखते हैं कि अणु हर सम्भव दिशा में गति कर रहे हैं । अब हम पात्र के मध्य किसी अणु पर ध्यान केन्द्रित करे तो ज्ञात होता है कि यह चारों ओर के अणुओं द्वारा समान आकर्षण बल का अनुभव करता है और विपरीत दिशा में काम करने वाले समान बल एक दूसरे को प्रभावहीन कर देते हैं (चित्र 6.4) अत: अणु पर परिणामी आकर्षण बल (resultant force of arrraction) शून्य हो जाता है । इसी प्रकार अन्य अणु जो पात्र की दीवार के निकट है, अपने पीछे उपस्थित द्वारा कुछ परिणामी आकर्षण बल द्वारा आकर्षित हर्पि है अणुओं फैंऐ अइन्दर की ओर काम करने फलस्वरूप ये अन्दर की ओर खिंचाव का अनुभव करते है और उतनेवेग से पात्र की दीवार पर नहीं टकरा सकते हैं जितने वेग से वह आकर्षण बलों की अनुपस्थिति में टकरा सकते थे । इसके



चित्र 6.4 किसी गैस में किनारे के अणुओं के अन्दर की ओर काम करने वाले परिणामी बल

परिणामस्वरूप वे दीवारों पर कम दाब डालते है और गैस का दाब, आदर्श गैस के दाब की तुलना में कम होता है । हर्न ने इस परिणामी आन्तरिक खिंचाव का समावेश करने लिए गैस के दाब (P) में एक ओर पद आन्तरिक दाब P जोड़ दिया ।

$$P_i = P + P \quad ....(6.6)$$

अतः वास्तविक गैस का दाब $P = P_i - P$

आन्तरिक दाब (P') का परिकलन (Calculation of intrinsic Pressure)

यह आन्तरिक दाब मुख्यतया दो कारकों पर निर्भर करता है -

(i) इकाई आयतन में गैस के अणुओं की संख्या अर्थात् गैस का घनत्व

(ii) इकाई समय में दीवार से टकराने वाले अणुओं की संख्या । यह भी गैस के घनत्व पर निर्भर करती है ।

यदि n मोल गैस का आयतन v लीटर है और गैस का मोलर द्रव्यमान M है तो गैस का घनत्व

$$P = \frac{nM}{V} \quad ...... (6.7)$$

पात्र के किनारे के निकट अणुओं पर लगने वाला आकर्षण बल इन अणुओं की संख्या व अन्दर की सतह के अणुओं की संख्या के समानुपाती होगा । चूंकि अणुओं की संख्याएँ उनके घनत्व के समानुपाती होती है अत:

आकर्षण बल $\alpha \left(\frac{nM}{V}\right)^2$

$\alpha \left(\frac{n}{V}\right)^2$ (चूंकि किसी गैस के लिए M का मान स्थिर होता है।)

$$P' = \frac{an^2}{V^2} \quad \textbf{...(6.8)}$$

यहाँ a एक स्थिरांक है । P' का मान समीकरण (6.8) से समीकरण (6.6) में प्रतिस्थापित करने पर

$$P_i = P + \frac{an^2}{V^2} \quad .....(6.9)$$

आदर्श गैस समीकरण (6.1) में आयतन तथा दाब संशोधन के मान क्रमशः समीकरण (6.2) व (6.9) द्वारा रखने पर

$$\left(P = P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad ....(6.10)$$

समीकरण (6.10) को वान्डर वाल्स समीकरण (Vander Walls equation) कहते हैं । एक मोल गैस के लिये समीकरण (610) का निम्न स्वरूप होगा

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad ..(6.11)$$

इसमें a व b को वान्डर वाल्स स्थिरांक (Vander Walls constants) कहते हैं जो गैस की प्रकृति पर निर्भर करते हैं ।

समीकरण (6.8) के अनुसार

$$P' = \frac{an^2}{V^2}$$

$$a = \frac{p'V^2}{n^2} = \frac{\text{दाब} \times \text{आयतन}}{(\text{मोल})^2}$$

यदि a को वायुमण्डल (atm) में तथा आयतन लीटर (litter) में व्यक्त किया जाय तो a का मात्रक atm litre^2 mole^{-2} होगा ।

इसी प्रकार nb एक आयतन पद है ।

$$b = \frac{V}{n} = \frac{\text{आयतन}}{\text{मोल}}$$

b का मात्रक लीटर प्रति मोल (litter mole^{-1}) होगा ।

वान्डर बाल स्थिरांकों a व b का SI पद्धति में मात्रक:

SI पद्धति में दाब को न्यूटन मीटर^{-2} (Nm^{-2}) में तथा आयतन को मीटर^3 (M^3) में व्यक्त किया जाता है, अत:

$$a = \frac{Nm^{-2} x m^6}{(mole)^2} = Nm^4 mol^{-2}$$

$$b = \frac{m^3}{mole} = m^3 mol^{-1}$$

कुछ गैसों के वान्डर वाल स्थिरांकों के मान सारिणी 6.2 में दिये जा रहे हैं वे गैसें जो सरलता से द्रवित हो जाती हैं उनके प्राय: a के मान अधिक होते हैं तथा आदर्श गैसों के लिए a का मान बहु त कम होता है ।

सारिणी 6.2 कुछ गैसों के वान्डर वाल्स स्थिरांक

गैस	A [atm liter^2 mol^{-2}]	B [liter mol-$^{-1}$]
हाइड्रोजन (H_2)	0.244	0.0266
हीलियम (He)	0.034	0.0237
नियॉन (Ne)	0.0211	0.0171
नाइट्रोजन (N_2)	1.39	0.0391
ऑक्सीजन (O_2)	1.36	0.0381
कार्बन मोनो ऑक्साइड (CO)	1.49	0.0399
कार्बनडाई ऑक्साइड (CO_2)	3.59	0.0427
हाइड्रोजन क्लोराइड (HCl)	3.67	0.0408
कार्बन टेट्राक्लोराइड (CCl_4)	20.39	0.01383

जलवाष्प (H_2O)	5.46	0.0305
क्लोरीन (Cl_2)	6.49	0.0562
अमोनिया (NH_3)	4.17	0.0371

किसी गैस के दाब की, आदर्श गैस समीकरण व वान्डर वाल्स समीकरण द्वारा गणना को आप निम्न आंकिक उदाहरण द्वारा भली भांति समझ पाएगें ।

उदाहरण 6.1

27^0 Cताप पर एक मोल कार्बन डाईऑक्साइड गैस का आयतन 1.2 लीटर है । यदि co_2 के लिए a व b के मान क्रमश: 3.59 वायुमण्डल लीटर ^{2} मोल $^{-2}$ तथा 0.04267 लीटर मोल $^{-1}$ है तो (i) आदर्श गैस समीकरण तथा (ii) वान्डर वाल्स समीकरण के आधार पर गैस के दाब की गणना कीजिए ।

हल:

(i) आदर्श गैस समीकरण के अनुसार

PV=nRT

n= 1 मोल

V = 1.2 लीटर

T= 273 + 27 = 300K

$$P=\frac{nRT}{V}$$

$$P=\frac{1X\,0.0821X\,300}{1.2}$$

P= 20.52 वायुमण्डल

(ii) वान्डर वाल्स समीकरण के अनुसार

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$$

n = मोल

V= 1.2 लीटर, a =3.59 वायुमण्डल लीटर ^{2} मोल$^{-2}$

V=1.2 लीटर मोल$^{-1}$

$$P=\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2}$$

$$P=\frac{0.0821X300}{1.2-0.04267}-\frac{3.59}{(1.2)^2}$$

P = 18.78 वायुमण्डल

बोध प्रश्न

4. किसी गैस के अणु के वास्तविक आयतन और वर्जित आयतन में सम्बन्ध सूत्र द्वारा दर्शाइए ।

…………………………………………………………………………………………

5. एक मोल गैस के लिए वान्डर वाल्स समीकरण दीजिए ।

…………………………………………………………………………………………

6. वान्डर वाल्स स्थिरांकों के SI पद्धति में मात्रक लिखिए

a. …………………………………………………………………………………………

b. …………………………………………………………………………………………

नोट : आप अपने उत्तर इस इकाई के भाग 6.17 में दिए गए उत्तरों से मिलान करे ।

6.4 वान्डर वाल्स समीकरण द्वारा आदर्श व्यवहार से विचलन की व्याख्या (Example of deviation from ideal benhaviour by vander waals' equation)

वास्तविक गैस द्वारा आदर्श व्यवहार से विचलन को वान्डर वाल्स समीकरण द्वारा आसानी से समझाया जा सकता है । वान्डर वाल्स समीकरण (6.11) को हल कर निम्नलिखित समीकरण प्राप्त किया जाता है ।

$$PV - Pb + \frac{a}{V} - \frac{ab}{V^2} = RT \quad ....(61.2)$$

आदर्श गैस समीकरण द्वारा RT के स्थान पर हम समीकरण (6.12) में P_iP_i लिख सकते हैं और $\frac{ab}{V^2}$ का मान बहुत कम होने के कारण उपेक्षणीय मान सकते हैं । इस स्थिति में समीकरण (6.12) को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है -

$$PV - Pb + \frac{a}{V} = P_iV_i$$

$$PV - P_iV_i + Pb - \frac{a}{V} \quad ....(6.13) -$$

(i) **अत्यन्त कम दाब पर (At very low pressure) -** जब दाब अत्यन्त कम होगा तो आयतन V का मान अधिक हो जाता है । अत: पद a/V और Pb के मान बहुत कम हो जाने के कारण इन्हें नगण्य माना जा सकता है । इस स्थिति में समीकरण (6.13) निम्न स्वरूप ले लेती है ।

$PV = P_iV_i$

अर्थात् गैस का आचरण आदर्श गैस के समान हो जाएगा ।

(ii) **निम्न दाब पर (At low preassure)**

जब दाब निम्न होगा तो आयतन v का मान अधिक होगा और Pb का मान बहुत कम हो जाएगा । अत: Pb को a/v की तुलना में नगण्य मान कर इसकी उपेक्षा कर सकते है जिसके फलस्वरूप समीकरण (6.13) का निम्न स्वरूप

$$PV = P_i V_i - \frac{a}{V} \quad ....(6.14)$$

प्राप्त होता है अर्थात् वास्तविक गैस के लिए PV का मान आदर्श गैस के लिए $P_i v_i$ के मान से कम होता है । इसी कारण एमेगेट वक्र [चित्रानुसार (6.13) और (6.2)] कम दाब पर, आदर्श गैस के वक्र से नीचे की ओर चला जाता है और दाब बढ़ने पर एक निम्निष्ठ को प्राप्त कर बढ़ने लगता है ।

(iii) **उच्च दाब पर (At high pressure) -** दाब अधिक होने पर आयतन, v का मान कम हो जाएगा अत: Pb की तुलना में $\frac{a}{V}$ का मान कम रह जाने के कारण समीकरण (6.13) में इसकी उपेक्षा की जा सकती है और परिणामस्वरूप निम्न समीकरण प्राप्त होगा

$$PV = P_i V_i \quad ....(6.15)$$

अर्थात् वास्तविक गैसों के लिए PV का मान, आदर्श गैसों की तुलना में अधिक होगा । यही कारण है कि एमेगेट वक्र उच्च दाब पर, आदर्श गैस से ऊपर की ओर बढते जाते हैं ।

इस प्रकार आप समझ गए होंगे कि $\frac{a}{V}$ व PV दोनों ही पद एक दूसरे के विपरीत दिशा में कार्यरत हैं । उच्च दाब पर पद Pb तथा न्यून दाब पर $\frac{a}{V}$ अधिक प्रभावी हो जाता है । अत: इन दोनों के मध्य एक ऐसा दाब परिसर होता है जिसमें दोनों पदों के प्रभाव एक दूसरे को संतुलित कर देते हैं तथा PV,$P_i P_i$ के बराबर हो जाता हैं अर्थात् इस दाब परिसर मे वास्तविक गैस, आदर्श गैस के समान आचरण दर्शाती है ।

(iv) **निम्न ताप पर (At low temperature)** - ताप कम होने पर आयतन V कम होगा और $\frac{a}{V}$ का मान Pb की तुलना में बढ़ जाएगा । इस प्रकार $\left(\frac{a}{V} - Pb\right)$ का मान धनात्मक होने के कारण इसे उपेक्षित नहीं किया जा सकता ।

$$PV = P_i V_i - \left(\frac{a}{V} - Pb\right) \quad ....(6.16)$$

अत: वास्तविक गैस, आदर्श आचरण से विचलन दर्शाती हैं ।

(v) **उच्च ताप पर (At high temperature)-** उच्च ताप पर V का मान अधिक हो जाने पर $\frac{a}{V}$ व $-Pb$ दोनों ही पदों को उपेक्षित किया जा सकता है । अत: समीकरण (6.13) को निम्न प्रकार लिख सकते हैं -

$$PV = P_i V_i$$

अर्थात् उच्च ताप पर वास्तविक गैसों का व्यवहार आदर्श गैसों के समान हो जाता है ।

(vi) हाइड्रोजन और हीलियम का अपवादात्मक आचरण (Exceptional behavior of H_2 and He)

हाइड्रोजन, हीलियम आदि कम अणुभार वाली गैसों के लिए VP का मान सदैव आदर्श गैस के P_iV_i के मान से अधिक होता है । इनके द्रव्यमान कम होने के कारण इनके मध्य परस्पर आकर्षण बल नगण्य होता है अत: pb की तुलना में a/v की उपेक्षा की जा सकती है और समीकरण (6.13) का निम्न स्वरूप हो जाता है -

अर्थात् इन गैसों के एमेगेट वक्र, आदर्श गैस के वक्र से ऊपर ही रहते हैं ।

वान्डर वाल्स समीकरण और बॉयल ताप (vander waals' equation and Boyle's temperature)

वान्डर वाल्स समीकरण की सहायता से किसी गैस के बॉयल ताप की गणना की जा सकती है । समीकरण (6.12) में $\frac{ab}{V^2}$ का मान बहुत कम होने के कारण इसे उपेक्षणीय मान लेते हैं

$$PV + \frac{a}{V} - Pb = RT \qquad \text{............(6.17)}$$

जैसा कि आप जान गए हैं कि बॉयल ताप पर गैसें, आदर्श गैस के समान आचरण दर्शाती हैं अत: समीकरण (6.17) मे PV के स्थान पर RT और Pb के स्थान पर $\frac{RT}{V}.b$ प्रतिस्थापित करने पर समीकरण (6.17) का निम्न स्वरूप प्राप्त होता है -

$$RT + \frac{a}{V} - \frac{RT}{V}b = RT$$

$$\frac{a}{V} = \frac{RT}{V}b$$

या $T = T_B = \frac{a}{Rb}$

यहाँ T_B बॉयल ताप कहलाता है । इसका परिकलन आप निम्न आंकिक उदाहरण द्वारा समझ सकते है -

उदाहरण 6.2

वान्डर वाल्स गैस CO_2 के लिए बॉयल ताप की गणना कीजिए यदि इनके लिए वान्डर वाल्स स्थिरांक a व b के मान क्रमश: 3.59 वायुमण्डल लीटर ^{2} मोल $^{-2}$ व 0.04267लीटर मोल $^{-1}$ है ।

हल: बॉयल ताप $T_B = \frac{a}{Rb}$

$$T_B = \frac{3.59}{0.0821 X 0.04267}$$

T_B= 1025.7 K

बोध प्रश्न

7. किसी वान्डर वाल्स गैस के लिए बॉयल ताप का सूत्र लिखिए

…………………………………………………………………………………………………

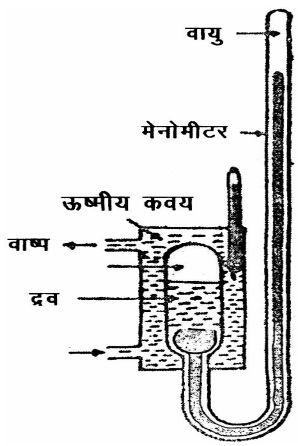
नोट : आप अपने उत्तर इस इकाई के भाग 6.17 में दिए गए उत्तरों से मिलान करे ।

6.5 क्रान्तिक परिघटना (critical Phenomenon)

सामान्यतया उच्च ताप व निम्न दाब पर गैसों के अणु स्वतन्त्र रूप से सभी दिशाओं में यादृच्छिक वेगों से गति करते हैं । लेकिन ताप कम करने पर अणुओं की गतिज ऊर्जा कम होती जाती है तथा साथ ही दाब बढ़ाने पर गैस के अणुओं के मध्य दूरियाँ कम होगी और परस्पर आकर्षण बल बढ़ जाता है जिसके फलस्वरूप गैस द्रव अवस्था में परिवर्तित हो जाएगी । इस प्रकार कम ताप व अधिक दाब पर गैसों का द्रवीकरण किया जा सकता है । यह ध्यान देने योग्य है कि प्रत्येक गैस के लिए एक विशिष्ट ताप होता है जिससे अधिक ताप पर उस गैस का द्रवीकरण केवल दाब बढ़ाने से ही नहीं किया जा सकता । इस विशिष्ट ताप को क्रान्तिक ताप (Critical temperature) कहते हैं । विभिन्न गैसों के लिए इसका मान भिन्न-भिन्न होता है । इस क्रान्तिक ताप पर किसी गैस का वह निम्नतम दाब जिस पर गैस को द्रवित किया जा सके, क्रान्तिक दाब (Critical pressuer) कहलाता है । किसी गैस के क्रान्तिक ताप व क्रान्तिक दाब पर उस गैस के एक मोल का आयतन क्रान्तिक आयतन (Critical volume) तथा क्रान्तिक अवस्था में गैस के एक मिली आयतन की संहति को क्रान्तिक घनत्व (Critical density) कहते हैं । ऐसी अवस्था में द्रव व गैसीय प्रावस्थाओं में विभेद नहीं किया जा सकता है, इस घटना को क्रान्तिक घटना (critical phenomenon) कहते हैं । क्रान्तिक ताप, क्रान्तिक दाब व क्रान्तिक आयतन को क्रमश T_c, P_c व V_c द्वारा प्रदर्शित किया जाता है, इन्हें सम्मिलित रूप से क्रान्तिक स्थिरांक (Critical constants) कहते है ।

कार्बन डाईऑक्साइड के लिए T_C, P_C व V_C का मान क्रमश: 31.1°C, 72.9 atm और 940.0 मिली प्रति मोल है । यह ध्यान देने योग्य है कि गैस के क्रान्तिक ताप व क्रान्तिक दाब उसकी मात्रा पर निर्भर नहीं करता है जबकि क्रान्तिक आयतन, मात्रा पर निर्भर करता है ।

6.5.1 क्रान्तिक स्थिरांकों का प्रायोगिक निर्धारण (Experimental Determiation of Critical Contants)



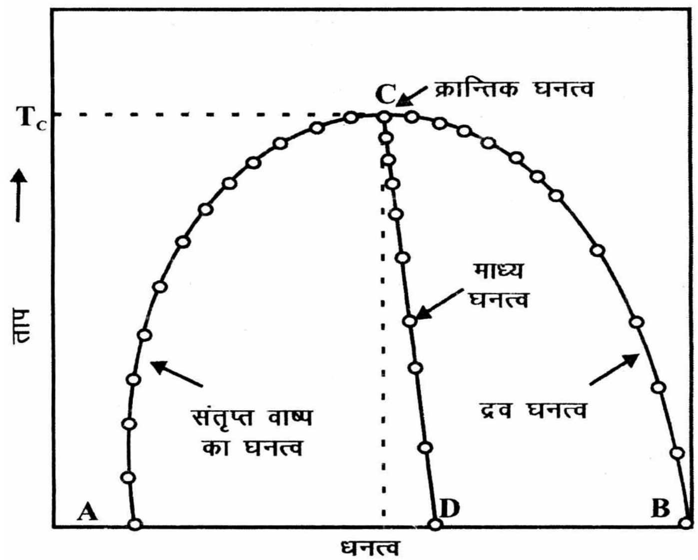
क्रान्तिक स्थिरांकों का प्रायोगिक निर्धारण इस सिद्धान्त पर आधारित है कि गैस के द्रवीकरण की अवस्था में उसकी वाष्प व द्रव का घनत्व समान हो जाता है । इस समय गैस व द्रव अवस्था को विभेदित नहीं किया जा सकता है ।

क्रान्तिक स्थिरांकों का प्रायोगिक निर्धारण कान्यार डी ला तूर (Cagniard de la Tour) के उपकरण (चित्र 6.5) द्वारा किया जाता है । इस उपकरण में कॉच की एक U आकार की

मोटी नली होती है जिसके एक सिरे पर बल्ब होता है । बल्ब में द्रव को भरा जाता है । इसके पश्चात् U नली में पारा भर दिया जाता है । पारे के ऊपर वायु होती है । इस सिरे को सीलबन्द कर दिया जाता है । अब यह मैनोमीटर (Manometer) की तरह कार्य करता है । नली के बल्ब वाले सिरे को तापस्थापी में रख कर, गरम जल प्रवाहित कर गरम किया जाता है । तापस्थापी में लगे थर्मामीटर की सहायता से ताप का मापन किया जा सकता है । ताप बढ़ने के कारण द्रव गरम हो वाष्प अवस्था में परिवर्तित होने लगता है और एक ऐसी अवस्था आती है जब द्रव और गैस के मध्यविभेद नहीं कर सकते है,

इस ताप का पाठ्यांक थर्मामीटर की सहायता से ज्ञात कर लिया जाता है । इसी समय मैनोमीटर द्वारा संगत दाब का मान भी इप्रत कर लिया जाता है । अब बल्ब को धीरे-धीरे ठण्डा करते हैं । जैसे ही द्रव व गैस की अलग-अलग सतह पृथक होने लगती है, इस ताप व संगत दाब को भी ज्ञात कर लेते हैं । इन दोनों पाठ्यांकों के माध्य से सही क्रान्तिक ताप (T_C) व क्रान्तिक दाब (P_C) ज्ञात कर लेते हैं । इस समय 1 मोल गैस का आयतन माप कर सही क्रान्तिक आयतन V_C ज्ञात नहीं किया जा सकता है क्योंकि ताप व दाब के थोड़े परिवर्तन से ही आयतन में अधिक परिवर्तन हो जाता है । अत: क्रान्तिक आयतन का निर्धारण औसत घनत्व ज्ञात कर किया जाता है । यह विधि केलीटेट व मेथाइस (Calletet & Mathias) के प्रेक्षणों पर आधारित है । इसमें किसी द्रव और संतृप्त वाष्प के घनत्वों के माध्य मानों को संगत ताप के विरूद्ध आलेखित किया जाता है तो एक सरल रेखा DC प्राप्त होती है (चित्र 6.6), इसे सरल रेखीय व्यास का नियम (law of rectilinear diameter) कहते हैं । यह सरल रेखा वक्र AB को बिन्दु C पर काटती है । वक्र AC संतृप्त वाष्प के घनत्व तथा वक्र AC द्रव के घनत्व का ताप के साथ परिवर्तन दर्शाता है । क्रान्तिक बिन्दु C पर द्रव और संतृप्त वाष्प का घनत्व समान हो जाता है । अत: क्रान्तिक ताप के संगत घनत्व को क्रान्तिक घनत्व (Critical density) D_C कहते हैं । चूंकि वक्र का शिखर तीक्षा नहीं होता है इसलिए बिन्दु C की सही स्थिति का निर्धारण सरल रेखीय व्यास के नियम का उपयोग कर किया जा सकता है । क्रान्तिक आयतन का मान, गैस के अणुभार में क्रान्तिक घनत्व D_C का भाग देकर ज्ञात किया जाता है ।

$$V_C = \frac{M}{D_C}$$



चित्र 6.6 : क्रान्तिक ताप व दाब का निर्धारण

बोध प्रश्न

8. क्रान्तिक अवस्था से क्या तात्पर्य है ।

   ……………………………………………………………………

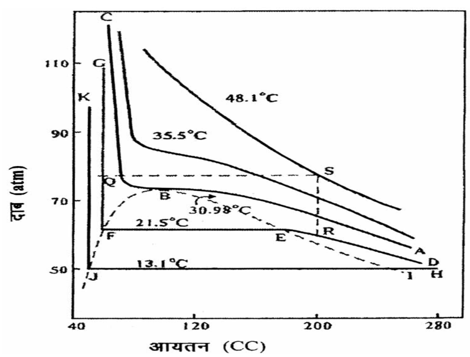
9. क्रान्तिक आयतन के निर्धारण में किस नियम का उपयोग किया जाता है?

   ……………………………………………………………………

नोट : आप अपने उत्तर इस इकाई के भाग 6.17 में दिए गए उत्तरों से मिलान करे ।

6.6 वास्तविक गैसों के P-7 समतापी वक्र (P-V isotherms of Real gases)

सन् 1869 में सेंट एन्द्रज (S.t Andrews) ने सर्वप्रथम क्रान्तिक अवस्था का विस्तृत अध्ययन किया जिनके प्रायोगिक परिणाम, co_2, गैस के लिए चित्र (6.7) में दर्शाए गए हैं ।



एक निश्चित ताप पर किसी गैस के दाब व आयतन के मध्य खींचे गए वक्र को वक्र कहते हैं । चित्र (6.7) में co_2 गैस के दाब व हुइ आयतन विभिन्न तापों पर आलेखित किए गए हैं । चूंकि आदर्श गैसों के लिए PV का मान स्थिर ताप पर स्थिरांक के बराबर होता है अत: इनके समतापी वक्र समकोणीय अतिपरलय की आकृति के होते हैं।

चित्र 6.7 कार्बन डाइऑक्साइड गैस के समतापी वक्र

लेकिन वास्तविक गैसों के लिए इस प्रकार के वक्र प्राप्त नहीं होते हैं । यदि हम निम्न ताप 13.1^0C पर CO_2 के समतापी समतापी वक्र HIJK पर विचार करें तो

हमें यह ज्ञात होता है कि-

(i) H बिन्दु पर CO_2 गैसीय अवस्था में होती है तथा H से I तक दाब बढ़ाने पर इसके आयतन में कमी आती है अर्थात् यह गैस बॉयल के नियम का पालन करती है ।

(ii) बिन्दु I(49.8 atm) पर गैस का द्रवण प्रारम्भ हो जाता है तथा तन्त्र में दो प्रावस्थाऐ प्राप्त होती हैं । गैस का द्रवीकरण बिन्दु J तक, एक क्षैतिज रेखा I J द्‌वारा दर्शाया गया है जो समान दाब पर आयतन में कमी को दर्शाता है ।

(iii) बिन्दु J पर केवल द्रव अवस्था पायी जाती है । इसके बाद दाब बढ़ाने पर आयतन में कोई परिवर्तन नहीं होता है, जैसा कि चित्र में उर्ध्वाधर वक्र JK द्‌वारा स्पष्ट हो जाता है । चूंकी द्रव लगभग असंपीड्‌यता का गुण दर्शाते हैं अत: यह प्रेक्षण सही माना जा सकता है ।

(iv) कार्बन डाईऑक्साइड के लिए 21.5^0C पर समतापी वक्र DEFG का अध्ययन करने पर यह ज्ञात होता है कि इसका आचरण पूर्वानुसार ही पाया जाता है । इनमें केवल एक अन्तर पाया जाता है कि ताप बढ़ाने पर क्षैतिज भाग कम हो जाता है ।

(v) गैस का ताप 31^0C (30.98^0C) तक बढ़ाने पर क्षैतिज भाग एक बिन्दु B मात्र के रूप में रह जाता है । गैस बिन्दु A से B तक आदर्श व्यवहार दर्शाती है किन्तु बिन्दु B पर आकर द्रवित हो जाती है ।

(vi) 35.5^0C व 48.1^0C ताप पर गैस का दाब बढ़ाने पर आयतन में कमी आती है और समकोणीय अतिपरवलय समतापी वक्र प्राप्त होता है । इरा प्रकार यही गैस का आचरण आदर्श गैस के समान हो जाता है ।

(vii) चूंकि CO_2 गैस का 31^0c से अधिक ताप पर दाब बढ़ाने से द्रवीकरण नहीं किया जा सकता, अत: यह ताप (30.98^0C) CO_2 का क्रान्तिक ताप है और बिन्दु B का संगत दाब (73 atm) क्रान्तिक दाब है । यह समतापी वक्र जो बिन्दु B से गुजरता है क्रान्तिक समतापी वक्र कहलाता है । इस प्रकार बिन्दु B पर तन्त्र क्रान्तिक अवस्था में होता है ।

(viii) समतापी वक्रों के क्षैतिज भागों के सिरों को मिलाने पर एक परवलय वक्र प्राप्त होता है जिसे चित्र में बिन्दुकित वक्र द्‌वारा दर्शाया गया है । इसका शीर्ष बिन्दु B है । परवलय के अन्दर द्रव और गैस अवस्था दोनों ही उपस्थित रहती है जबकि परवलय और B C वक्र के बायीं ओर केवल द्रव तथा परवलय और BC वक्र के दायीं ओर केवल गैस अवस्था पायी जाती है ।

प्राय: सभी गैसें इस प्रकार का व्यवहार दर्शाती है । इनके क्रान्तिक स्थिरांकों का निर्धारण किया जा सकता है । कुछ गैसों के क्रान्तिक स्थिरांक सारिणी 6.3 में दिये जा रहे हैं -

सारिणी 6.3 कुछ गैसों के क्रान्तिक स्थिरांक

गैस	क्रान्तिक दाब P_C (atm)	क्रान्तिक आयतन V_C (cc/mol)	क्रान्तिक ताप T (K)
H_2	12.8	65.0	33.3
H_e	2.26	57.6	5.3
N_2	33.5	90.0	126.1
O_2	49.7	74.4	153.4
CO_2	73.7	95.7	304.4
H_20	217.7	45	647.2

6.7 अवस्था का सांतत्य (Continuity of state)

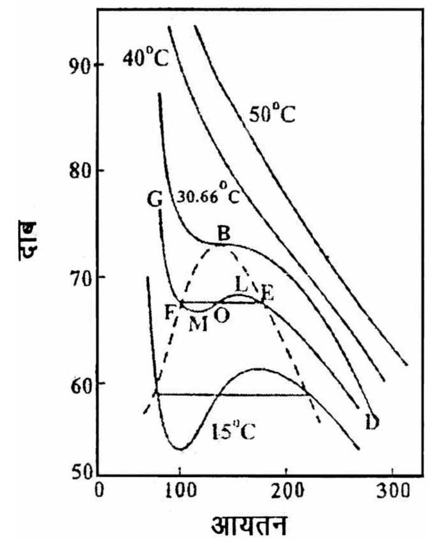
जैसा कि आप जान चुके हैं कि क्रान्तिक ताप से कम ताप पर गैस का द्रवण दाब बढ़ा कर किया जा सकता है । इस अवस्था में गैस और द्रव दोनों ही अवस्थाएँ उपस्थित होती हैं तथा हम इनमें विभेद कर सकते हैं । इस प्रकार यह परिवर्तन सतत नहीं होता है । किन्तु क्रान्तिक ताप पर 'दाब बढ़ा कर द्रवण कराने पैर, गैस से द्रव अवस्था में परिवर्तन सतत होता है अर्थात् इस समय दोनों प्रावस्थाओं में विभेद करना संभव नहीं होता है ।

चित्र (6.7) में 21.5^0C के समतापी वक्र पर यदि R बिन्दु पर विचार करें तो यहाँ तन्त्र गैसीय अवस्था में होता है । इस ताप पर, दाब बढ़ा कर गैस को द्रव में परिवर्तित किया जा सकता है और यह परिवर्तन REFQ द्वारा निरूपित किया गया है । किन्तु यदि R बिन्दु से शुरू कर यह द्रवण इस प्रकार कराया जाय कि यह परवलय क्षेत्र में से न गुजर कर सीधे ही द्रव अवस्था में परिवर्तित हो जाए तो इस प्रक्रिया में कहीं भी गैस द्रव अवस्था दोनों ही उपस्थित नहीं होगी । बिन्दु R पर CO^2 गैस का आयतन स्थिर रख कर S बिन्दु तक गरम किया जाता है जिसके फलस्वरूप इसका दाब बढ़ जाएगा । अब स्थिर दाब पर गैस का ताप कम करने पर आयतन में कमी आएगी तथा तन्त्र Q बिन्दु पर पहुँच जाता है जहाँ तन्त्र में केवल द्रव अवस्था उपस्थित होगी । इस परिवर्तन मार्ग में कहीं भी ऐसा बिन्दु नहीं पाया गया जहाँ CO_2, द्रव व गैस दोनों ही प्रावस्थाओं में स्पष्ट रूप से उपस्थित हो । अत: CO_2 गैस का द्रव में परिवर्तन एक सतत परिवर्तन है । इसी प्रकार यदि इसके विपरीत प्रक्रम द्वारा द्रव CO_2 को गैसीय अवस्था में बिना किसी असांतत्य के परिवर्तित किया जा सकता है ।

जब किसी पदार्थ की एक अवस्था से दूसरी अवस्था में परिवर्तन इस प्रकार हो कि दोनों प्रावस्थाओं में विभेद करना संभव न हो, अवस्था सांतत्य कहलाता है ।

6.8 वान्डर वाल्स समीकरण के समतापी वक्र (Isotherms of Vander Waals' equation)

चित्र (6.7) में CO_2 गैस के लिए समतापी वक्र प्रायोगिक तथ्यों पर आधारित हैं । वान्डर वाल्स समीकरण का उपयोग कर, संगत a और b के मानों के द्वारा विभिन्न ताप पर समतापी वक्र बनाए जाते हैं । इन्हें वान्डर वाल्स गैस के समतापी वक्र कहते हैं । CO_2 गैस के लिए वान्डर वाल्स स्थिरांकों a व b के मान को समीकरण (6.11) में रखकर निश्चित ताप पर P के विभिन्न मानों के संगत V के मानों की गणना कर ली जाती है । इस प्रकार । और V के सैद्धान्तिक मानों के मध्य ग्राफ खींचें तो वान्डर वाल्स समतापी वक्र प्राप्त होते हैं जिन्हें चित्र 6.8 में दर्शाया गया है । चित्र 6.7 व चित्र 6.8 की तुलना करने पर ज्ञात होता है कि दोनों में समरूपता पायी जाती है लेकिन अन्तर केवल इतना ही है कि वास्तविक गैसों के समतापी वक्र की क्षैतिज रेखा के स्थान पर इनमें लहरदार (~) भाग ELOMF होता है । इस प्रकार की लहरदार रेखाएं यर्थाथ में प्राप्त नहीं की जा सकती हैं । चूंकि चित्र (6.8) में वक्र का L O M भाग देखने से ज्ञात होता है कि CO_2 गैस का दाब घटाने पर आयतन घटता है जो असंभव सा प्रतीत होता है ।



चित्र 6.8 वान्डर वाल्स समीकरण के आधार पर CO_2 के समतापी वक्र

ताप के बढ़ने पर वक्र का लहरदार भाग छोटा होकर एक बिन्दु B पर सीमित हो जाता है । इस प्रकार क्रान्तिक बिन्दु पर दोनों प्रकार के वक्रों में समानता पायी जाती है । अत: वान्डर वाल्स समतापी वक्रों की सहायता से भी क्रान्तिक स्थिरांकों के मान इप्रत किये जा सकते हैं ।

बोध प्रश्न

10. निम्नलिखित कथनों के लिए सत्य / असत्य दिए गए कोष्ठक में लिखिए ( )

(i) आदर्श गैसों के लिए समतापी वक्र समकोणीय अतिपरवलय की आकृति के होते हैं । ( )

(ii)	किसी गैस का द्रवण क्रान्तिक बिन्दु के नीचे परवलय क्षेत्र में किया जा सकता है।	( )
(iii)	क्रान्तिक ताप पर दाब बढ़ा कर द्रवण करने पर अवस्था परिवर्तन सतत नहीं होता है ।	( )
(iv)	वान्डर वाल्स समतापी वक्र में गैस के दाब के किसी एक मान के लिए आयतन के दो मान होते हैं ।	( )

नोट: आप अपने उत्तर इस इकाई के भाग 6.17 में दिए गए उत्तरों से मिलान करे ।

6.9 क्रान्तिक स्थिरांकों की गणना (Calculation of Critical Constants)

कार्बन डाइऑक्साइड के समतापी वक्र (चित्र 6.7) के परवलय क्षेत्र को देखने पर यह स्पष्ट हो जाता है कि एक दाब पर आयतन के अलग-अलग मान हो सकते हैं क्योंकि यहाँ पर गैस का द्रवण हो रहा है । क्षैतिज रेखा के दोनों सिरों पर विचार करने पर P के प्रत्येक मान के लिए V के दो मान प्राप्त होते हैं । किन्तु चित्र (6.8) में P के प्रत्येक मान के लिए V के तीन मान प्राप्त होते हैं । चूंकि 30.66^0C ताप पर यह लहरदार भाग एक बिन्दु मात्र के रूप में रह जाता है अर्थात् क्रान्तिक बिन्दु पर एक दाब के लिए आयतन का एक ही मान होता है । क्रान्तिक ताप से अधिक ताप पर एक दाब के लिए एक ही आयतन प्राप्त होता है । अत: क्रान्तिक अवस्था में वान्डर वाल्स समीकरण की सहायता से क्रान्तिक स्थिरांकों की गणना की जा सकती है । समीकरण (6.11) को हल करने पर -

$$PV - Pb + \frac{a}{V} - \frac{ab}{V^2} - RT = 0 \quad \text{........ (6.19)}$$

समीकरण (6.19) के बायीं तरफ के पदों को V^2 से गुणा करने पर

$$PV^3 - V^2(RT+Pb) + av - ab = 0$$

या $$V3 - \left(b + \frac{RT}{P}\right)V^2 + \frac{a}{p}V - \frac{ab}{p} = 0 \quad \text{............(6.20)}$$

चूंकि समीकरण (6.20) में आयतन v घनीय है अर्थात् किसी निश्चित ताप और दाब पर गैस के आयतन v के तीन मान होगें जिनमें एक वास्तविक व दो अधिकल्पित होगें जो चित्र (6.8) द्वारा स्पष्ट हो जाता है । वान्डर वाल्स समतापी वक्रों के अनुसार क्रान्तिक ताप से कम ताप पर, किसी दाब के लिए आयतन के तीन मान होते हैं । उदाहरणार्थ 25^0c पर क्षैतिज रेखा FE समतापी वक्र को तीन बिन्दुओं F, O व E पर काटती है तथा क्रान्तिक बिन्दु B पर ये तीनों मान एक हो जाते हैं अर्थात् इस बिन्दु पर V का मान क्रान्तिक आयतन V_C के बराबर होता है ।

$$V = V_C$$

या $$(V - V_C) = 0$$

या $$(V - V_C)^3 = 0$$

या $$V^3 - 3V_CV^2 + 3V_C^2V - V_C^3 = 0 \quad \text{............(6.21)}$$

क्रान्तिक अवस्था में, वान्डर वाल्स समीकरण के स्वरूप (6.20) में P= P_C और T=TC रखने पर

$$V3-\left(b+\frac{RT_C}{P_C}\right)V^2+\frac{a}{p_C}V-\frac{ab}{p_C}=0 \qquad \text{...............(6.22)}$$

चूंकि समीकरण (6.21) और (6.22)ए दोनों ही क्रान्तिक समतापी वक्र के लिए है, अत: V^2 व V के गुणांकों और इनके स्थिर पदों की तुलना करने पर निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं -

$$3V_C=b\frac{RT_C}{P_C} \qquad \text{..................(6.23)}$$

$$3V_C{}^2=\frac{a}{P_C} \qquad \text{...........................(6.24)}$$

$$V_C{}^3=\frac{ab}{P_C} \qquad \text{..............................(6.25)}$$

उपर्युक्त समीकरणों से p_c,v_c व T_C के मान a,b व R के रूप में प्राप्त किये जा सकते हैं । समीकरण (6.25) में (6.25) मे (6.25) का भाग देने पर

V_C=3b

V_C का मान समीकरण (6.24) में रखने पर ....(6.26)

$$3V_C{}^2=\frac{a}{P_C}$$

या $P_C=\dfrac{a}{72b^2}$

समीकरण (6.23) में v_c और P_C का मान क्रमश समीकरण (6.26) व (6.27) में रखने पर

$$3(3b)=b+\frac{RT}{27b^2}$$

$$8b=\frac{RT_c27b^2}{a}$$

$$T_C=\frac{8a}{27Rb} \qquad \text{.................(6.28)}$$

अत: किसी गैस के वान्डर वाल्स स्थिरांक a व b के मान ज्ञात होने पर V_C, P_C, व T_C क्रमश: समीकरण (6.26), (6.27) व (6.28) द्वारा परिकलित किये जा सकते हैं ।

6.10 वान्डर वाल्स स्थिरांकों की गणना (Calculation of vander waals' constants)

किसी गैस के क्रान्तिक स्थिरांक ज्ञात होने पर इसके वान्डर वाल्स स्थिरांकों की गणना की जा सकती है ।

समीकरण (6.24) से

$a=3P_C\ V_C{}^2$ ...(6.29)

और समीकरण (6.26) से

$$b = \frac{V_C}{3} \quad ....(6.30)$$

चूंकि किसी गैस के लिए P_C व T_C के मान तो इप्रत किए जा सकते हैं किन्तु V_C के मान का सही निर्धारण नहीं हो पाता है, अत: हम a व b का मान P_C, T_C के रूप में ज्ञात करते हैं ।

समीकरण (6.23) में V_C का मान समीकरण (6.26) से रखने पर

$$9b = b + \frac{RT_C}{P_C}$$

या $$8b = \frac{RT_C}{P_C}$$

$$b = \frac{RT_C}{8P_C}$$

इसी प्रकार समीकरण (6.25) में V_C का मान समीकरण (6.26) से रखने पर

$$(3b)^3 = \frac{ab}{p^c}$$

$$a=27b^2P^c \quad ....(6.32)$$

समीकरण (6.31) व (6.32)ए से

$$a = 27\left(\frac{RT_c}{8P_c}\right)^2 P_c$$

$$\frac{a = 27R^2T^2}{64P_c} \quad ....(6.34)$$

इसी प्रकार. समीकरण (6.26)ए व (6.31) से R का मान क्रान्तिक स्थिरांकों के रूप में इग्नत किया जा सकता है ।

$$\frac{V_c}{3} = \frac{RT_c}{8P_c}$$

$$\boxed{\frac{RT_c}{P_cV_c} = \frac{8}{3} = 2.67} \quad .....(6.34)$$

अत: वान्डर वाल्स समीकरण के अनुसार क्रान्तिक बिन्दु पर सभी गैसों के लिए $\frac{RT_c}{P_cV_c}$ का मान 2.67 सदैव स्थिर रहता है किन्तु प्रयोगों द्वारा यह मान 3 और 4 के मध्य पाया जाता है । इसी प्रकार गैसों के लिए क्रान्तिक संपीड्यता गुणांक का मान समीकरण (6.34) के द्युछाम द्वारा ज्ञात किया जा सकता है

$$\frac{P_cV_c}{RT_c} = \frac{3}{8} = 0.375 \qquad \text{.......(6.35)}$$

आदर्श गैसों की भांति, वान्डर वाल्स गैस के आचरण की व्याख्या भी समीकरण (6.35) द्वारा की जा सकती है ।

इसी प्रकार किसी गैस के क्रान्तिक ताप और बॉयल ताप में सम्बन्ध भी प्राप्त कर सकते हैं ।

गैस का क्रान्तिक ताप समीकरण (6.28)ए के अनुसार

$$T_c = \frac{8a}{27Rb}$$

गैस का बॉयल ताप समीकरण (6.18) से $T_B \frac{a}{Rb}$

$$\frac{T_B}{T_c} = \frac{a}{Rb} x \frac{27Rb}{8a} = \frac{27}{8}$$

$$\frac{T_B}{T_c} = 3.375$$

$$T_B = 3.375\,Tc \quad \text{... (6.36)}$$

किसी गैस के क्रान्तिक स्थिरांक और वान्डर वाल्स स्थिरांकों की गणना आप निम्न आकिक उदाहरणों की सहायता से समझ सकते हैं ।

उदाहरण 6.3 यदि कार्बन डाइऑक्साइड के लिए वान्डर स्थिरांक a व b के मान क्रमश: 3.59 atm litre^{2}mol^{-2} व 0.0427 litter mol^{-1} है तो इस गैस के क्रान्तिक स्थिरांकों का परिकलन कीजिये ।

(R = 0.0821 litre atm K^{-1} mol^{-1})

हल क्रान्तिक ताप $T_c = \frac{8a}{27Rb}$

$$T_c = \frac{8x3.5a}{27x0.0821x0.0427} = 303.42K$$

क्रान्तिक दाब $P_c = \frac{a}{27b^2}$

$$P_c = \frac{3.59}{27x(0.0427)^2} = 72.92atm$$

क्रान्तिक आयतन Vc=3b

=3x0.0427=0.1281 litter mol^{-1}

उदाहरण 6.4 यदि किसी गैस का क्रान्तिक ताप व क्रान्तिक दाब क्रमश 400K और 95 atm है तो इसके वान्डर वाल्स स्थिरांकों का परिकलन कीजिए । (R=0.0821 litter atm K^{-1}mol^{-1})

वान्डर वाल्स स्थिरांक $a = \frac{27R^2T_c^{\,2}}{64P_c}$

$$a = \frac{27x(0.0821)^2x(400)^2}{64x95} = 4.789 \text{ atm litre}^2\text{mol}^{-2}$$

$$b = \frac{RT_C}{8P_C}$$

$$= \frac{0.0821x400}{8x95} = 0.0432 \text{ litter mol}^{-1}$$

बोध प्रश्न

11. निम्नलिखित के लिए सूत्र दीजिए

(i) क्रान्तिक आयतन V_c

………………………………………………………

(ii) क्रान्तिक ताप T_C

……………………………………………………….

(iii) क्रान्तिक दाब P_C

……………………………………………………….

(iv) वान्डर वाल्स स्थिरांक a

…………………………………………………………

(v) वान्डर वाल्स स्थिरांक b

………………………………………………………..

(vi) क्रान्तिक ताप व बॉयल ताप के मध्य सम्बन्ध

……………………………………………………………

……………………………………

12. निम्नलिखित में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

(i) वान्डर वाल्स समीकरण के अनुसार क्रान्तिक बिन्दु पर गैसों के लिए $\frac{RT_C}{P_C V_c}$ का मान ………………… आना चाहिए ।

(ii) वाण्डर वाल्स गैसों के लिए क्रान्तिक संपीड्यता गुणांक का मान ………….. आता है ।

नोट : आप अपने उत्तर इस इकाई के भाग 6.17 में दिए गए उत्तरों से मिलान करे ।

6.11 वान्डर- वाल्स समीकरण की सीमाएँ (Limitation of Vander Waals' equation)

वास्तविक गैसों के अधिकांश गुण वान्डर वाल्स समीकरण द्वारा समझाए जा सकते है किन्तु इसकी भी कुछ सीमाएँ हैं जिनके कारण कुछ प्रायोगिक तथ्यों की व्याख्या नहीं की जा सकती है ।

(1) वान्डर वाल्स समीकरण से प्राप्त समतापी वक्र, क्रान्तिक ताप से कम ताप पर लहरदार यानि सतत पाए जाते हैं जबकि वास्तविक गैसों के लिए यह क्षैतिज रेखा के रूप में असतत पाया जाता है ।

(2) वान्डर वाल्स समीकरण द्वारा क्रान्तिक ताप पर समस्त गैसों के लिए $\frac{RT_C}{P_C V_c}$ का परिकलित मान 2.67 आना चाहिए किन्तु वास्तव में यह मान अधिकांश गैसों के लिए 3 और 4 के मध्य आता है ।

(3) वान्डर वाल्स समीकरण के अनुसार क्रान्तिक स्थिरांक V_c का मान 3b होता है किन्तु वास्तव में इनके मान 2b या 4b के बराबर आते हैं ।

(4) बॉयल ताप के सैद्धान्तिक और प्रायोगिक मान समान नहीं पाए जाते हैं । T_B और T_c का अनुपात 3.375 के स्थान पर 2 व 3 के मध्य प्राप्त होता है ।

(5) अधिक उच्च दाब और बहुत निम्न ताप पर विचलन अधिक पाया जाता है ।

वान्डर वाल्स समीकरण की सीमित उपयोगिता का मुख्य कारण यह है कि वान्डर वाल्स स्थिरांक a व b यर्थाथ में स्थिरांक नहीं है क्योंकि ये ताप व दाब परिवर्तन के साथ-साथ परिवर्तित हो जाते है । उदाहरणार्थ कार्बन डाइऑक्साइड गैस के लिए 0°C और 100°C के मध्य, b को स्थिर मान लेने पर a के मान में 20% वृद्धि हो जाती है । इसी प्रकार यदि a को स्थिर मान लिया जाय तो b के मान में पाँच गुना वृद्धि पायी जाती है । दाब बढ़ने के साथ-साथ b के मान में कमी आती है ।

6.12 समानीत अवस्था समीकरण तथा संगत अवस्थाओं का नियम (Reduced equation of state and Law of corresponding sates)

आप समझ गए होंगे कि क्रान्तिक बिन्दु के समीप, सभी गैसों के लिए समतापी वक्र लगभग एक समान होने चाहिए किन्तु स्थिरांक a व b के मान भिन्न-भिन्न होने के कारण, यह समीकरण सभी गैसों के लिए समान रूप से लागू नहीं होती है । सन् 1881 में वान्डर वाल्स के अनुसार, समीकरण में ताप, दाब व आयतन को क्रमश: क्रान्तिक ताप, क्रान्तिक दाब और क्रान्तिक आयतन तथा समानीत ताप, समानीत दाब और समानीत आयतन द्वारा व्यक्त करने पर एक ऐसी समीकरण प्राप्त होती है जिसे समान रूप से सभी गैसों पर लागू किया जा सकता है । किसी गैस के समानीत ताप (T_r), समानीत दाब (P_r) और समानीत आयतन (V_r) को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं -

$$Tr = \frac{T}{T_C}, \mathrm{P_r} = \frac{P}{P_C} \text{ और } V_r = \frac{V}{V_C}$$

ताप (T), दाब (P) और आयतन (V) के मानों को क्रमश: T_r,P_r, व V_r के रूप में लिखने पर वान्डर वाल्स समीकरण (6.11) निम्न स्वरूप लेता है -

$$\left(P_r P_C + \frac{a}{V_r^2 V_c^2}\right) (VrVc - b) = RT_r T_C$$

समीकरण (6.26), (6.27), और (6.28) द्वारा क्रमश: V_C,P_C व T_C के मान समीकरण (6.37) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\left(P_r \frac{a}{27b^2} + \frac{a}{9V_r^2 b^2}\right) (3V_r b - b) = RT_r \frac{8a}{27Rb}$$

$$\frac{a}{27b^2}\left(P_r + \frac{3}{V_r^2}\right) b[3V_r - 1] = \frac{8aT_r}{27b}$$

इस समीकरण के दोनों ओर $\frac{a}{27b}$ का भाग देने पर

$$\left(P_r + \frac{3}{V_r}\right) (3V_r - 1) = 8T_r \quad \text{.............(6.38)}$$

चूंकि समीकरण (6.38) में गैस की प्रकृति पर निर्भर करने वाले वान्डर वाल्स स्थिरांक a व b नहीं है अत: यह समीकरण सभी गैसों के लिए समान रूप से लागू होती है । इसे अवस्था का समानीत समीकरण (Reduced equation of state) कहते हैं । इस समीकरण से स्पष्ट हो जाता है कि यदि दो या दो से अधिक गैसों का समानीत ताप व समानीत दाब समान हो तो उनका समानीत आयतन भी समान होगा । ऐसी अवस्था में इन गैसों को संगत अवस्था (Correspponding states) में कहा जाता है और यह नियम संगत अवस्थाओं का नियम (Law of Corresponding States) कहलाता है ।

इस नियम का उपयोग विभिन्न द्रवों के क्वथनांकों पर उनके आण्विक आयतनों की तुलना करने में किया जाता है । चूंकि क्वथनांक द्रव संगत अवस्था में पाए जाते हैं अत: इनके भौतिक गुणों में नियमितता पायी जानी चाहिए । उदाहरणार्थ कार्बनिक द्रवों के क्वथनांक अपने क्रान्तिक ताप के दो-तिहाई होते हैं जिन्हें सारिणी (6.4) में दर्शाया गया है ।

सारिणी 6.4 कुछ कार्बनिक द्रवों के क्वथनांक तथा क्रान्तिक ताप

द्रव	क्वथनांक T (K)	क्रान्तिक ताप T_C(K)	T/T_C
n- पेन्टेन	313	470	0.67
आइसोपेन्टेन	303	468	0.65
n-हेक्सेन	342	508	0.67
बेन्जीन	353	561	0.63
ईथर	308	467	0.65
क्लोरोबेन्जीन	405	632	0.64

उपरोक्त सारिणी से स्पष्ट है कि द्रवों के क्यूथनांक पर समानीत ताप के मान लगभग समान है । चूंकि द्रव अवस्था में आयतन पर दाब का प्रभाव अपेक्षाकृत नगण्य रहता है अत: इन द्रवों के समानीत आयतन भी समान होगें ।

बोध प्रश्न

13. किसी गैस के लिए समानीत ताप, समानीत दाब और समानीत आयतन के लिए सूत्र दीजिए ।

....

....

....

14. संगत अवस्थाओं का नियम लिखिए ।

....

नोट : आप अपने उत्तर इस इकाई के भाग 6.17 में दिए गए उत्तरों से मिलान करे ।

6.13 गैसों का द्रवण (Liquification of Gases)

आप जान चुके हैं कि गैसों के अणुओं के मध्य उपस्थित अन्तराकर्षण बल के कारण इन्हें उच्च दाब व निम्न ताप पर द्रवित किया जा सकता है और यह ताप क्रान्तिक ताप से कम होना चाहिए । गैसों के द्रवण के लिए उपयोग में ली जाने वाली विधियाँ मुख्यत: निम्न सिद्धान्तों पर आधारित है

(i) जूल थॉमसन प्रभाव (Joule Thomson's effect)

जेम्स जूल और थॉमसन के अनुसार किसी गैस को उच्च दाब से निम्न दाब की ओर प्रसारित करने पर ताप में कमी आती है क्योंकि प्रसरण में अन्तराण्विक आकर्षण के विरूद्व कार्य के लिए ऊर्जा, स्वयम् अणुओं की आन्तरिक ऊर्जा से प्राप्त होती है । जुल थॉमसन प्रभाव प्रत्येक गैस के लिए एक निश्चित ताप से कम ताप पर ही सम्भव है । इस ताप को कुत्कम ताप (T_i) कहते हैं । यह वान्डर वाल्स स्थिरांकों a व b से निम्न प्रकार से सम्बन्धित होता है

$$T^i = \frac{2a}{Rb}$$

उदाहरणार्थ हाइड्रोजन और हीलियम गैस का ताप क्रमश: - 80^0 तथा - 240^0 से कम हो तो इनका द्रवण किया जा सकता है । अत: ये ताप इन गैसों के व्युत्क्रम ताप हैं ।

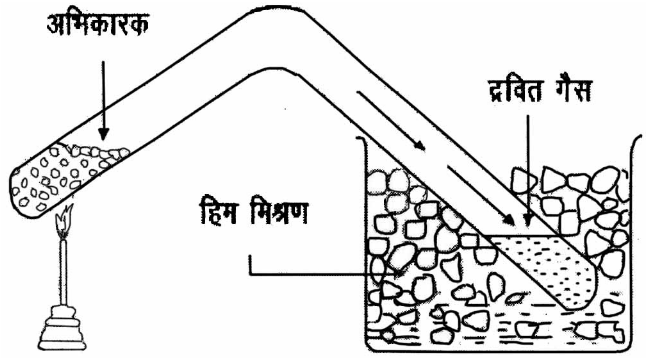
(ii) रूद्धोष्म प्रसार (Adiabatic expansion)

जब किसी गैस को दाब के विरूद्व प्रसारित होने दिया जाता है तो उसे कुछ यांत्रिक कार्य करना पड़ता है जिससे उसके अणुओं की गतिज ऊर्जा व्यय होती है । इस आन्तरिक ऊर्जा में कमी के कारण ताप में कमी आती है ।

इन सिद्धान्तों के आधार पर गैसों का द्रवण निम्न विधियों द्वारा किया जा सकता है -

(1) हिम मिश्रण द्वारा शीतलन (Cooling by freezing mixtuer)

सर्वप्रथम फैराडे ने सन् 1823 में हिम मिश्रण द्वारा कई गैसों जैसे SO_2, H_2S, CO_2 आदि जिनके द्रवण के लिए अधिक दाब व कम ताप की आवश्यकता नहीं है को द्रवित किया । इसके लिए उपयोग में लिए गए उपकरण में एक v आकार की नली होती है । इसकी एक भुजा को गरम कर गैस बनायी जाती है तथा दूसरी भुजा को हिमकारी मिश्रण में रख कर ठण्डा कर लिया जाता है (चित्र 6.9) ।

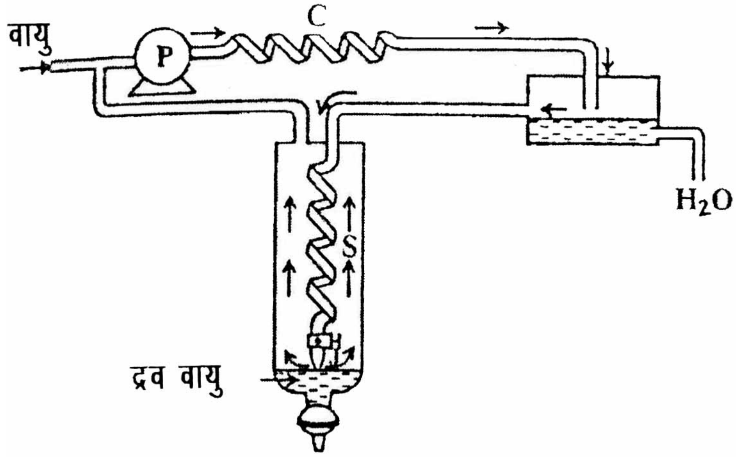


चित्र 6.9. गैसों के द्रवण की फैराडे विधि ।

इसके पश्चात् थिलेरियें ने अधिक दाब सहन करने वाला उपकरण बनाया तथा CO_2, का द्रवण किया तथा बताया कि ठोस CO_2, और ईथर का मिश्रण एक उत्तम प्रशीतक के जैसे कार्य करता है । इन मिश्रण को थिलेरिये मिश्रण भी कहते हैं ।

(2) **लिण्डे विधि (Linde's methods)**

यह विधि जूल थॉमसन प्रभाव पर आधारित है । इसके लिए उपयोग में लाया गया उपकरण चित्र (6.10) में दर्शाया गया है । इस विधि में वायु अथवा गैस जिसका द्रवण करना होता है को उच्च दाब लगभग 200 वायुमण्डल तक सम्पीड़ित कर कुण्डली C में से प्रवाहित करते हैं ताकि संघनित वाष्प अलग हो जाए । इस शुष्क गैस को सर्पिलाकार पाइप S में से प्रवाहित कर जेट J से प्रसरण कराते हैं । इस प्रकार गैस का दाब अब 50 वायुमण्डल ही रह जाता है तथा ताप भी कम हो जाता है । इस ठण्डी गैस को पुन: बाह्य नली में परिसचरित करते हैं । इस प्रकार चक्रीय प्रक्रम में गैस का शीतलन हो जाता है और यह द्रवित हो जाती है जिसे गैस नली B के निचले हिस्से में एकत्रित कर लिया जाता है ।



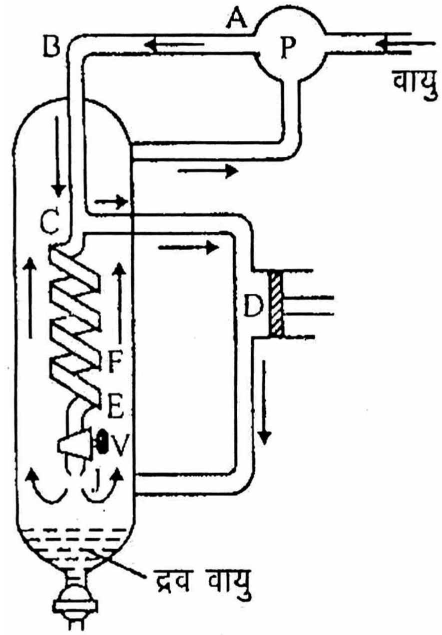
चित्र 6.10 लिण्डे विधि द्वारा वायु का द्रवण ।

(3) **क्लॉड विधि (Claude's method)**

यह विधि जूल थॉमसन प्रभाव व गैसों के रूद्धोष्म प्रसार के संयुक्त उपयोग पर आधारित है । इस विधि में उपयोग में लिया जाने वाला उपकरण चित्र (6.11) में दर्शाया गया है । इस में गैस अथवा शुद्ध वायु (CO_2 व जलवाष्प रहित) को 200 वायुमण्डल दाब तक सम्पीड़ित कर नली

ABC में प्रवाहित किया जाता है । बिन्दु C पर नली दो भागों में विभाजित होती है, एक भाग को प्रसार वाल्व J द्वारा प्रसारित होने दिया जाता है तथा दूसरा भाग सिलेण्डर D के पिस्टन को रूद्धोष्म प्रसार द्वारा बाहर धकेलने का कार्य करता है । दोनों प्रक्रम द्वारा शीतित गैस अथवा वायु तब तक पुन: परिसंचरित की जाती है जब तक द्रवण न हो जाय ।

द्रव वायु



चित्र 6.11 गैसों के द्रवीकरण के लिए क्लॉड उपकरण

इसी प्रकार गैसों का द्रवण, वाष्पशील द्रवों का तेजी से वाष्पीकरण द्वारा अनुचुम्बकीय पदार्थो का रूद्धोष्म विचुम्बकन द्वारा शीतलन आदि विधियों द्वारा भी किया जा सकता है ।

द्रवित गैसों का उपयोग (Application of liquefied gases)

वर्तमान में द्रवित गैसों का उपयोग प्रशीतक के रूप में किया जाता है । रेफ्रिजरेटर में द्रव NH_3, द्रव CO_2, द्रव फ्रीऑन आदि का उपयोग किया जाता है । रॉकेट में द्रव O_2 का उपयोग ईधन के रूप में किया जाता है । प्रयोगशाला में अभिक्रियाओं के लिए निम्न ताप, द्रव N_2 द्रव वायु, ठोस CO_2 एल्कोहॉल ईथर मिश्रण द्वारा उत्पन्न किया जाता है ।

बोध प्रश्न

15. निम्नलिखित स्तम्भ I को स्तम्भ II से सही मिलान कर उत्तर दीजिए ।

स्तम्भ I	स्तम्भ II
(i) हिम मिश्रण द्वारा शीतलन	क. जूल थॉमसन व रूद्धोष्म प्रसार का संयुक्त प्रभाव
(ii) लिण्डे विधि	ख. थिलेरिये मिश्रण
(iii) क्लॉड विधि	ग. जूल थॉमसन

16. किसी गैस के वान्डर वाल्स स्थिरांकों और व्युत्क्रम ताप में सम्बन्ध दर्शाइये ।

नोट : आप अपने उत्तर इस इकाई क भाग 6.17 में दिए गए उत्तरों से मिलान करे ।

6.14 सारांश (Summary)

- गैसों का आदर्श व्यवहार से विचलन संपीड्यता गुणांक द्वारा समझाया जाता है । बॉयल ताप पर गैसें आदर्श व्यवहार दर्शाती हैं ।
- उच्च दाब पर गैस के अणुओं का आयतन, उसके कुल आयतन की तुलना में नगण्य नहीं होता है |
- कम ताप व अधिक दाब पर गैस के अणुओं में परस्पर आकर्षण बल पाया जाता है ।
- वर्जित आयतन, गैस के अणु के वास्तविक आयतन का चार गुना होता है ।
- आदर्श गैस समीकरण में आयतन व दाब संशोधन कर वान्डर वाल्स समीकरण प्राप्त की जाती है ।
- क्रान्तिक अवस्था पर द्रव और गैसीय अवस्था में विभेद नहीं किया जा सकता है । एक अवस्था से दूसरी अवस्था में यह परिवर्तन सतत होता है ।
- गैस का क्रान्तिक ताप व क्रान्तिक दाब उसकी मात्रा पर निर्भर नहीं करता है परन्तु क्रान्तिक
- आयतन, मात्रा पर निर्भर करता है ।
- क्रान्तिक आयतन का निर्धारण सरल रेखीय व्यास नियम का उपयोग कर-दव व वाष्प के घनत्व मानों द्वारा किया जाता हैं ।
- वान्डर वाल्स समीकरण के अनुसार सभी गैसों के लिए $\frac{RT_c}{P_cV_c}$ मान 2.67 आता है ।
- दो या दो से अधिक पदार्थो का यदि समानीत ताप व समानीत दाब एक ही है तो उनके समानीत आयतन भी समान होगें ।
- जूल थॉमसन प्रभाव और रूद्धोष्म प्रसार के आधार पर गैसों का द्रवण किया जा सकता है।

6.15 शब्दावली (Glossary)

सुप्रेक्ष्य	appreciable
अभिलाक्षणिक स्थिरांक	characteristic constant
क्षैतिज	horizontal
ऊर्ध्वाधर	vertical
क्रान्तिक समतापी वक्र	critical isotherm
परवलय	parabola
शीर्ष	apex
सतत	continuous
असांतत्य	discontinuous
घनीय	cubic
अधिकल्पित	imaginary

गुणांक	coefficient
समानीत ताप	reduced temperature
समानीत दाब	reduced pressure
समानीत आयतन	reduced volume
व्युत्क्रम ताप	inversion temperature
यांत्रिक कार्य	mechanical work
परिसंचरित	Recirculate

6.16 सन्दर्भ ग्रन्थ (Reference books)

1. 1.Physical Chemistry-Puri,Sharma & Pathania
2. 2.Text book of Physical Chemistry-S.Glasstone
3. 3.Physical Chemistry-P.C.Rakshit
4. Physical Chemistry-K.L.Kapoor(Vol. 1-4)

6.17 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. (i)✓ (ii)x (iii)✓ (iv)x (v)✓
2. वह ताप जिस पर वास्तविक गैस दाब के सुप्रेक्ष्य परिसर में आदर्श गैस के नियमों का पालन करती है बॉयल ताप कहलाता है ।
3. संपीड़्यता गुणांक ((z)= $\dfrac{PV}{(PV)} = \dfrac{PV}{RT}$ आदर्श
4. वर्जित आयतन प्रति मोल (b $= 4xNx\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sigma}{2}\right)^3$ (अणु का वास्तविक आयतन)
5. $\left(P+\dfrac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$
6. a की इकाई Nm^4mlo^{-2}
   b की इकाई m^3mol^{-1}
7. $T_B = \dfrac{a}{Rb}$
8. वह अवस्था जिस में द्रव व गैसीय अवस्था में विभेद करना संभव न हो, क्रान्तिक अवस्था कहलाती है ।
9. सरल रेखीय व्यास का नियम
10. (i)सत्य (ii)सत्य (iii)असत्य (iv)असत्य
11. $(i)\ V_c = 3b\ (ii)\ Tc = \dfrac{8a}{27Rb}\ (iii)\ Pc = \dfrac{a}{27b^2}$

$(iv)\ a = \frac{27R^2T_c^{\ 2}}{64P_c}$ $(iv)\ b = \frac{RT_c}{8P_c}$

12. (i)2.67 (ii) 0.375

13. समानीत ताप $T_r = \frac{T}{T_c}$

समानीत दाब $P_r = \frac{P}{T_c}$

समानीत आयतन $V_r = \frac{V}{V_c}$

14. दो गैसों का समानीत ताप व समानीत दाब समान होने पर उनका समानीत आयतन भी समान होगा । इन गैसों को संगत अवस्था में कहते है तथा यह नियम संगत अवस्था का नियम कहलाता है।

15. 1.ख 2.ग 3.क

16. $T_i = \frac{2a}{Rb}$

6.18 अभ्यासार्थ प्रश्न (Exercise question)

1. गैसों के आदर्श व्यवहार से विचलन के कारण की व्याख्या कीजिए तथा इन्हें वान्डर वाल्स समीकरण द्वारा समझाइए ।
2. सिद्ध कीजिए कि गैस के अणुओं का वर्जित आयतन, अणु के वास्तविक आयतन का चार गुना होता है ।
3. वान्डर वाल्स समीकरण से अवस्था सांतत्य को समझाइये ।
4. संगत अवस्था का नियम क्या है ? समानीत अवस्था समीकरण को व्युत्पित कीजिए तथा इसका भौतिक महत्व समझाइये ।
5. वान्डर वाल्स समतापी वक्र और वास्तविक गैस के समतापी वक्र में क्या अन्तर है ? समझाइये । वान्डर वाल्स समीकरण की सीमाएँ दीजिए ।
6. एक मोल गैस के लिए वान्डर वाल्स समीकरण लिखिए । सिद्ध कीजिए कि वान्डर वाल्स गैस के लिए $\frac{RT_c}{PV_c}$ होता है जहाँ R गैस स्थिरांक व P_cV_c और T_c क्रमशः क्रान्तिक दाब, क्रान्तिक आयतन और क्रान्तिक ताप हैं ।
7. क्रान्तिक घटना से क्या अभिप्राय है ? किसी गैस के क्रान्तिक स्थिरांकों के प्रायोगिक निर्धारण का वर्णन कीजिए ।
8. किसी गैस के क्रान्तिक स्थिरांक और वान्डर वाल्स स्थिरांक के लिए के व्यंजक व्युत्पित कीजिए ।
9. बॉयल ताप किसे कहते हैं ? समझाइये ।

10. जूल थॉमसन प्रभाव पर आधारित गैसों के द्रवण की विधि लिखिए ।
11. कार्बन डाइऑक्साइड के समतापी वक्रों के द्वारा अवस्था सांतत्य समझाइये ।
12. किसी गैस के क्रान्तिक ताप की गणना कीजिए यदि गैस के वान्डर वाल्स स्थिरांक a व b के मान क्रमशः 428 atm $litre^2 mol^{-2}$ व 0.04 litter mol^{-1} है ।

[T_c=400K]
13. एक वान्डर वाल्स गैस के लिए P_c का मान 200 atm व b का मान 0.05 $dm^3 mol^{-1}$ है तो

क्रान्तिक ताप की गणना कीजिए ।

[हल संकेतः $a = P_c x 27b^2, T_c = \frac{8a}{27Rb}$

$$Tc = \frac{8xP_c x27b^2}{27Rb} = \frac{8P_c b}{R}\Bigg]$$

(उत्तर 974.4K)