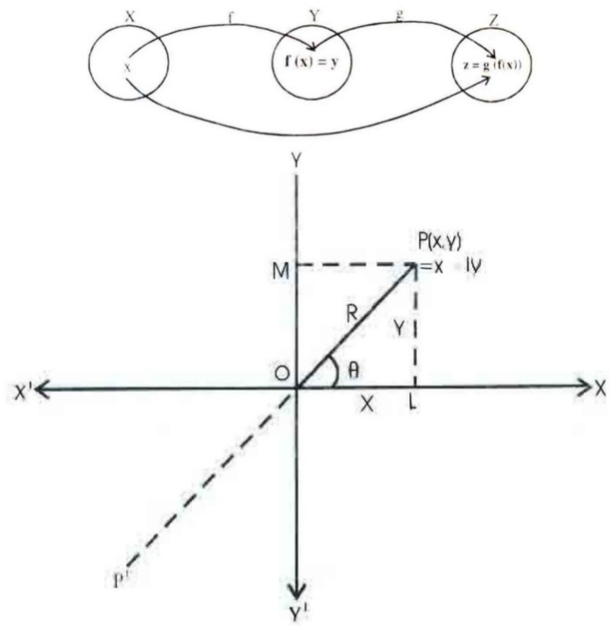
BMT

# वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा




$$\text{Log}(\alpha + i\beta) = \log_e \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + i\,(2n\pi + \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}) \qquad .....(3)$$

# गणित

BMT

वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

# गणित

## पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

**अध्यक्ष**

**प्रो. (डॉ.) नरेश दाधीच**
कुलपति
**वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा (राजस्थान)**

## संयोजक/ समन्वयक एवं सदस्य

संयोजक
**प्रो. डी. एस. चौहान**
गणित विभाग
**राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर**

सदस्य सचिव/समन्वयक
**डॉ. अशोक शर्मा**
सह- आचार्य, राजनीति विज्ञान
**वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा**

**सदस्य**

1. **प्रो. वी.पी..सक्सेना**
   भूतपूर्व कुलपति एवं सेवानिवृत्त प्रोफेसर
   **जीवाजी विश्वविद्यालय,ग्वालियर(म.प्र.)**
2. **प्रो. एस.सी. राजवंशी**
   गणित विभाग
   इंस्टीट्यूट ऑफ इंजीनियरिंग एण्ड टेक्नोलॉजी, भद्दल, रोपड़(पंजाब)
3. **प्रो. एस. पी. गोयल**
   गणित विभाग
   **राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर**
4. **डॉ. ए.के. माथुर**
   सेवानिवृत सह आचार्य, गणित विभाग
   **राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर**
5. **डॉ. के. एन. सिंह**
   सह आचार्य, गणित विभाग
   **राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर**
6. **डॉ. परेश व्यास**
   सहायक आचार्य, गणित विभाग
   **राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर**
7. **डॉ. विमलेश सोनी**
   व्याख्याता-गणित
   **राजकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, कोटा**
8. **डॉ. के.के. मिश्रा**
   व्याख्याता-गणित
   **एम.एस.जे. महाविद्यालय,भरतपुर**
9. **डॉ. के.एस. शेखावत**
   व्याख्याता-गणित
   **राजकीय कल्याण महाविद्यालय, सीकर**

## संपादन एवं पाठ्यक्रम-लेखन

संपादक
**डॉ. ए.के.माथुर**
सेवानिवृत्त सहआचार्य
**राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर**

लेखक

1. **डॉ. राकेश पाण्डेय (1,2)**
   व्याख्याता - गणित विभाग
   **एस.एस.जैन सुबोध कॉलेज, जयपुर**
2. **डॉ. के.के. मिश्रा (3,4)**
   व्याख्याता - गणित विभाग
   **एम.एस.जे.महाविद्यालय, भरतपुर**
3. **डॉ. शालिनी जैन (5,6)**
   रीडर-गणित विभाग
   **राजस्थान इंजीनियरिंग कॉलेज फॉर वीमेन भांकरोटा, जयपुर**
4. **डॉ. के. एन. सिंह (7)**
   एसोसिएट प्रोफेसर-गणित विभाग
   **राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर**
5. **डॉ. विमलेश सोनी (8)**
   व्याख्याता - गणित विभाग
   **राजकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय कोटा**
6. **डॉ. परेश व्यास (9,10)**
   असिस्टेंट प्रोफेसर-गणित विभाग
   **राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर**

## अकादमिक एवं प्रशासनिक व्यवस्था

| **प्रो. नरेश दाधीच** | **प्रो. एम. के. घडोलिया** | **योगेन्द्र गोयल** |
|---|---|---|
| कुलपति | निदेशक | प्रभारी |
| **वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा** | **संकाय विभाग** | **पाठ्य सामग्री उत्पादन एवं वितरण विभाग** |

## पाठ्यक्रम उत्पादन

**योगेन्द्र गोयल**
सहायक उत्पादन अधिकारी,**वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा**

**पुनः उत्पादन - अप्रैल 2010**



इस सामग्री के किसी भी अंश को व. म. खु. वि., कोटा की लिखित अनुमति के बिना किसी भी रूप में अन्यत्र पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।**व. म. खु. वि., कोटा के लिए कुलसचिव व. म. खु. वि., कोटा(राजस्थान) द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।**

# वर्धमान महावीर खुला विश्वविद्यालय, कोटा

## अनुक्रमणिका

# इकाई 1 : सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Numbers)

**इकाई की रूप रेखा**



## 1.0 उद्देश्य

इस इकाई में आप सम्मिश्र राशियों तथा उनके विभिन्न गुणधर्मो का अध्ययन करेंगे। सम्मिश्र राशियों के लिये डी मायवर प्रमेय का अध्ययन करेंगे एव प्रमेय के अनुप्रयोगों द्वारा सम्मिश्र राशियों से सम्बन्धित विभिन्न समस्याओं को हल कर सकेंगे। आप सम्मिश्र राशियों के लिये चरघातांकी श्रेणी, एव सम्मिश्र राशियों के त्रिकोणमितीय, अतिपरवलयिक; प्रतिलोम, वृत्तीय एवं लघुगुणक फलनों का अध्ययन भी करेंगे।

## 1.1 प्रस्तावना

वास्तविक संख्याओं से परे सम्मिश्र संख्याओं की धारणा एवं उत्पत्ति ऐसी बीजीय समीकरणों के हल हैं, जो किसी वास्तवित राशि द्वारा सन्तुष्ट नहीं होते हैं। समीकरण $x^2+1=0$ तथा $x^2-2x+4=0$ किसी भी वास्तविक राशि द्वारा सन्तुष्ट नहीं होते। गणितज्ञ आयलर R -1 के वर्गमूल का एक नये प्रतीक के रूप में परिचय कराया, जहाँ $i^2=-1$ वास्तविक गुणांकों वाले प्रत्येक बीजीय समीकरण के मूल सम्मिश्र होते हैं, जिन्हे $a+ib$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

## 1.2 सम्मिश्र संख्याएँ (Complex number)

यदि x व y वास्तविक संख्याएँ हों तो $z=x+y$ एक सम्मिश्र संख्या कहलाती है व इसे एक क्रमित युग्म (x,y) द्वारा निरूपित किया जाता है।

x व y सम्मिश्र संख्या z के घटक कहलाते हैं तथा इन्हें निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :

x = सम्मिश्र संख्या z का वास्तविक भाग = $R$ (z)

y = सम्मिश्र संख्या z काल्पनिक भाग = $I$ (z)

यह देखा जा सकता है कि यदि

(a) सम्मिश्र संख्या z में यदि घटक y=0 तब z एक विशुद्ध वास्तविक राशि होती है।

(b) सम्मिश्र संख्या यदि : x=0 तब z एक विशुद्ध काल्पनिक राशि होती है। उपरोक्त से स्पष्ट है कि यदि

$N$ =प्राकृत संख्याओं का समुच्चय, I= पूर्णाकों का समुच्चय, $R$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय तथा $C=$ सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय हो, तब

$N\subset I\subset R\subset C$

### 1.2.1 दो सम्मिश्र संख्याओं की समानता

दो सम्मिश्र संख्याएँ $z_1=(x_1,y_1)$ तथा $z_2=(x_2,y_2)$ परस्पर समान (equal) कहलाती है.

अर्थात $z_1=z_2$ यदि और केवल यदि $x_1=x_2$ तथा $y_1=y_2$

## 1.3 सम्मिश्र संख्याओं पर संक्रियाएँ

### 1.3.1 सम्मिश्र संख्याओं का योगफल

माना, $z_2=(x_2,y_2)$ तथा $z_2=(x_2,y_2)$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ है। तब $z_1$ तथा $z_2$ का योगफल $z_1+z_2$ द्वारा निरूपित होता है तथा निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$z=z_1+z_2=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2+y_1+y_2)$$

**उदाहरण**

यदि $z_1=(3,-5)$ तथा $z_2=(-7,11)$ तब

$$z=z_1+z_2=(3,-5)+(-7,11)=(3-7-5+11)$$

$$=(-4,6)$$

$$= -4 + 6i$$

**सम्मिश्र संख्याओं का योगफल निम्न गुणधर्मो का पालन करता है :**

(a) **संवरक गुण :** किन्हीं भी दो सम्मिश्र संख्याओं का योगफल भी एक सम्मिश्र संख्या होती है।

(b) **साहचर्यता गुण :** सभी सम्मिश्र संख्याओं $z_1, z_2, z_3$ के लिये

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

(c) **क्रमविनिमेयता गुण :** सभी सम्मिश्र संख्याओं $z_1, z_2$ के लिये $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

(d) **योग का तत्समक अवयव :** सभी सम्मिश्र संख्याओं $z = (x, y)$ कि लिये एक अद्वितीय सम्मिश्र संख्या $0 = (0,0)$ इस प्रकार है। कि

$$z + 0 = (x, y) + (0,0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = z$$

(e) **योग का प्रतिलोम अवयव:** प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $z = (x, y)$ के लिए एक अद्वितीय संख्या $-z = (-x, -y)$ सदैव इस प्रकार है कि

$$z + (-z) = (x, y) + (-x, -y) = (x - y, y - y) = (0,0) = 0$$

(f) **निरसन के नियम :** स भी सम्मिश्र संख्याओं $z_1, z_2$ तथा $z_3$ के लिये

$(i) z_1 + z_3 = z_2 + z_3 \Rightarrow z_1 = z_2$ (दक्षिण निरसन नियम)

$(ii) z_3 + z_1 = z_3 + z_2 \Rightarrow z_1 = z_2$ (वाम निरसन नियम)

### 1.3.2 सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल

माना $z_1 = (x_1, y_1)$ तथा $z_2 = (x_2, y_2)$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं। तब $z_1$ तथा $z_2$ का गुणनफल $z_1 z_2$ द्वारा निरूपित होता है तथा निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

**उदाहरण** यदि $z_1 = (3, -5)$ तथा $z_2 = (-7, 11)$ तब

$$z_1 z_2 = (3, -5)(-7, 11)$$

$$= (3 \times (-7) - (-5) \times 11, 3 \times 11 + (-5) \times (-7))$$

$$= (34, 68)$$

सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल निम्न मूल गुणधर्मो का पालन करता है :

a) **संवरक गुण :** किन्हीं भी दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणनफल भी एक सम्मिश्र संख्या होता है।

b) **साहचर्यता गुण :** सभी सम्मिश्र संख्याओं $z_1, z_2, z_3$ के लिये $z_1(z_2 z_3) = \left(z_1 z_2\right) z_3$

c) **क्रमविनिमेयता गुण :** सभी $z_1, z_2$ के लिये $z_1 z_2 = z_2 z_1$

d) **गुणन का तत्समक अवयव :** सभी सम्मिश्र संख्याओं $z = (x, y)$ कि लिये एक अद्वितीय सम्मिश्र संख्या (1,0) इस प्रकार है कि

$$\left(x, y\right)(1,0) = (x.1 - y.0, x.0 + y.1)$$

$$= \left(x, y\right) = z$$

इसी प्रकार $(1,0)\left(x, y\right) = \left(x, y\right) = z$

अत : सम्मिश्र संख्या (1,0) गुणन के तत्समक अवयव के रूप में विद्यमान होती है।

e) **गुणन का प्रतिलोम अवयव :** प्रत्येक अशून्य सम्मिश्र संख्या $z=(x,y)$ के लिए एक अद्‌वितीय संख्या

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$ इस प्रकार है कि

$zz^{-1}=(1,0)$ एवं $z^{-1}z=(1,0)$

f) **निरसन के नियम :** सभी सम्मिश्र संख्याओं $z_1,z_2,z_3$ के लिये

$(i) z_1z_3=z_2z_3 \Rightarrow z_1=z_2$ यदि $z_3\neq(0,0)$ (दक्षिण निरसन नियम)

तथा $(ii) z_3z_1=z_3z_2 \Rightarrow z_1=z_2$ यदि $z_3\neq(0,0)$ (वाम निरसन नियम)

g) **वंटन के नियम :** सभी सम्मिश्र संख्याओं $z_1,z_2,z_3$ के लिये

$(i) z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ (वाम बंटन नियम) तथा

$(ii)(z_2+z_3)z_1=z_2z_1+z_3z_1$ (दक्षिण बंटन नियम)

### 1.3.3 सम्मिश्र संख्याओं का व्यवकलन

माना $z_1=(x_1,y_1)$ तथा $z_2=(x_2,y_2)$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं। तब $z_1$ से $z_2$ का यवकलन $z_1-z_2$ द्‌वारा निरूपित किया जाता है तथा निम्न प्रकार से परिभाषित होता है :

$$\begin{aligned}z_1-z_2&=(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\\&=(x_1,y_1)+(-x_2,-y_2)\\&=(x_1-x_2,y_1-y_2)\end{aligned}$$ (योग के नियम से)

**उदाहरण** यदि $z_1=(3,-5)$ तथा $z_2=(-7,11)$ तब

$$\begin{aligned}z_1-z_2&=(3,-5)-(-7,11)\\&=(3,-5)+(7,-11)\\&=(3+7,(-5)+(-11))\\&=(10,16)\end{aligned}$$

### 1.3.4 सम्मिश्र संख्याओं का भागफल

माना $z_1=(x_1,y_1)$ तथा $z_2=(x_2,y_2)$ कोई दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं। तब $z_2$ द्‌वारा $z_1$ का भागफल $\frac{z_1}{z_2}$ द्‌वारा निरूपित होता तथा निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1.\frac{1}{z_2}=(x_1,y_1)\left(\frac{x_2}{x_2{}^2+y_2{}^2},\frac{-y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}\right)$$

$$=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2},\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2{}^2+y_2{}^2}\right)$$ जब कि $z_2=(x_2,y_2)\neq 0$

**उदाहरण**

यदि $z_1$=(4,-5) तथा $z_2$=(-3,2) तब

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(4,-5)}{(-3,2)}=(4,-5)\left(\frac{-3}{(-3)^2+2^2},\frac{-2}{(-3)^2+2^2}\right)$$

$$=(4,-5)\left(\frac{-3}{13},\frac{-2}{13}\right)$$

$$\left(\frac{-12-10}{13},\frac{-8+15}{13}\right)=\left(\frac{-22}{13},\frac{7}{13}\right)$$

## 1.4 सम्मिश्र संयुग्मी (Complex conjugate)

यदि $z=(x,y)$ कोई सम्मिश्र संख्या है, तब z का सम्मिश्र संयुग्मी, सम्मिश्र संख्या $(x,-y)$ है।

इसे $\bar{z}$ द्वारा निरूपित करते हैं। अत : यदि $z=(x,y)$ तब $\bar{z}=(x,-y)$

**उदाहरण 1**

यदि $z=(5,4)=5+4i$ तब $\bar{z}=\overline{(5,4)}$

$$=(5,-4)$$
$$=5-4i$$

**उदाहरण 2**

यदि $z=(-3,0)=-3+i.0$ तब $\bar{z}=\overline{(-3,0)}$

$$=(-3,-0)$$
$$=-3,-i.0$$
$$=-3$$

अतएव विशुद्ध वास्तविक संख्या का सम्मिश्र संयुग्मी स्वयं वह वास्तविक संख्या होती है।

**उदाहरण 3**

यदि $z=(0,2)=0+i.2=2i$ तब

$\bar{z}=\overline{(0,2)}=(0,-2)=0-i.2=-2i$

अत एव विशुद्ध काल्पनिक संख्या का सम्मिश्र संयुग्मी स्वयं उस काल्पनिक संख्या का ऋणात्मक मान होता है।

### 1.4.1 सम्मिश्र संयुग्मी के गुणधर्म (Properties of complex conjugate)

यदि $z, z_1$ तथा $z_2$ कोई तीन सम्मिश्र संख्याऐं हैं। तब

$(a)\, z+\bar{z}=2R(z)$

$(b)\, z-\bar{z}=2iI(z)$

$(c)\, z\bar{z}=\left[R(z)\right]^2+\left[I(z)\right]^2$

$(d)\left(\bar{\bar{z}}\right)=z$

$(e)\, \overline{z_1 \pm z_2}=\bar{z_1} \pm \bar{z_2}$

$(f)\, \overline{z_1.z_2}=\bar{z_1}.\bar{z_2}$

$(g)\, \overline{(z_1/z_2)}=\bar{z_1}/\bar{z_2}\ (z_2 \neq 0)$

**उत्पति** माना $z=(x,y)$ ,ज़हाँ $x,y \in R$

तब $(a)\, z+\bar{z_1}=(x,y)+\overline{(x,y)}$

$$=(x,y)+(x,-y)$$

$$=(x+x,y+-y)$$

$$=(2x,0)=2x=2R(z)$$

$(b)\, z-\bar{z_1}=(x,y)-\overline{(x,y)}$

$$=(x,y)-(x,-y)$$

$$=(x-x,y-(-y))$$

$$=(0.2y)=2iy=2iI(z)$$

$(c)\, z\bar{z}=(x,y)\overline{(x,y)}$

$$=(x,y)(x,-y)$$

$$=(x^2+y^2,0)$$

$$=(x^2+y^2)=\left[R(z)\right]^2+\left[I(z)\right]^2$$

$(d)\left(\bar{\bar{z}}\right)=\left(\overline{\overline{(x,y)}}\right)=\overline{(x,-y)}$

$$=(x,-(-y))(x,y)$$

$$=z$$

अब आगे गुणधर्म (e) से (g) के लिये माना

$z_1=(x_1 y_1)$ तथा $z_2=(x_2 y_2)$ जहाँ $x_1,x_2,y_1,y_2 \in R$

**तब** $(e)\, \overline{z_1 \pm z_2}=\overline{(x_1,y_1)\pm(x_2,y_2)}$

$$= \overline{x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2}$$
$$= (x_1 \pm x_2) - (y_1 \pm y_2)$$
$$= (x_1 - y_1) \pm (x_2, -y_2)$$
$$= \left(\overline{x_1, y_1}\right) \pm (x_2, y_2)$$
$$= \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

$$(f)\ \overline{z_1.z_2} = \overline{(x_1, y_1)(x_2, y_2)}$$
$$= \overline{(x_1x_2 - y_1y_2, -x_1y_2 + x_2y_1)}$$
$$= (x_1, -y_1)(x_2, -y_2)$$
$$= \overline{(x_1, y_1)}\overline{(x_2, y_2)}$$
$$= \overline{z_1}.\overline{z_2}$$

$$(g)\ \overline{(z_1/z_2)} = \overline{\left(\frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)}\right)} \quad z_2 \neq 0$$
$$= \overline{\left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}, \frac{x_2, y_1 - x_1, y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}\right)} \text{ (जहाँ } x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} \neq 0\text{)}$$
$$= \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}, -\frac{x_2, y_1 - x_1, y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}\right)$$
$$= \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}, \frac{-x_2, y_1 + x_1, y_2}{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2}}\right)$$
$$= \frac{(x_1, -y_1)}{(x_2, -y_2)} = \frac{\overline{(x_1, y_1)}}{\overline{(x_2, y_2)}}$$
$$= \overline{z_1}/\overline{z_2}$$

## 1.5 सम्मिश्र संख्या का मापांक (Modulus of a complex number)

सम्मिश्र संख्या $z = (x, y)$ मापांक वास्तविक अऋणात्मक (real nonnegative) राशि $\sqrt{x^2 + y^2}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है तथा इसे प्रतीक रूप में $|z|$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। अत: यदि $z = (x, y)$ तब

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{[R(z)]^2 + [I(z)]^2} \geq 0$$

उदाहरण के लिये यदि $z = (3, -4)$ तब

$$|z| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

### 1.5.1 सम्मिश्र संख्याओं के मापांक के गुणधर्म

यदि $z, z_1, z_2$ सम्मिश्र संख्याएँ हों तब

$(a)|z| \geq R(z)$ यथा $|z| \geq I(z)$

$(b)|z| = |\overline{z}| = |-z|$

$(c)|z|^2 = z\overline{z}$

$(d)|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$(e)\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}\ ; z_2 \neq 0$

$(f)|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$(g)|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$

$(h)|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

$(i)|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

**उपपत्ति** माना $z = (x, y)$ जहाँ $x, y \in R$ तब

$(a)|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{[R(z)]^2 + [I(z)]^2} \geq R(z)$

तथा $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{[R(z)]^2 + [I(z)]^2} \geq I(z)$

$(b)|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |\overline{z}|$

इसी प्रकार

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = |-z|$

$(c)|z|^2 = x^2 + y^2 = (x^2 + y^2, 0)$

$= (x^2 + y^2, x(-y) + xy)$

$= (x, y), (x, -y)$

$= (x, y)\overline{(x, y)}$

$= z\overline{z}$

अब आगे गुणधर्म (d) से (i) के लिये

माना $z_1 = (x_1, y_1)$ तथा $z_2 = (x_2, y_2)$ जहाँ $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R,$ तब

$(d)|z_1 z_2| = |(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)|$

$$=\sqrt{\left(x_1x_2-y_1y_2\right)^2+\left(x_1y_2+x_2y_1\right)^2}$$
$$=\sqrt{x_1^{\ 2}x_2^{\ 2}+y_1^{\ 2}y_2^{\ 2},x_1^{\ 2}y_2^{\ 2}+x_2^{\ 2}y_1^{\ 2}}$$
$$=\sqrt{\left(x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}\right)+\left(x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}\right)}$$
$$=\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}$$
$$=|z_1||z_2|$$

$(e)\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\left|\left(\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}},\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}\right)\right|$ (जहाँ $z_2\neq(0,0)$)

$$=\sqrt{\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}\right)^2+\left(\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{x_1^{\ 2}x_2^{\ 2}+y_1^{\ 2}y_2^{\ 2}+x_2^{\ 2}y_1^{\ 2}x_1^{\ 2}y_2^{\ 2}}{\left(x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}\right)^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{\left(x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}\right)+\left(x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}\right)}{\left(x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}\right)^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}}}{\sqrt{x_2^{\ 2}+y_2^{\ 2}}}$$
$$=\frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$(f)\,|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}$ गुणधर्म (c) से

$$=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)$$
$$=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+2R\left(z_1\overline{z_2}\right)...............(i)$$
$$\leq|z_1|^2+|z_2|^2+2\left|z_1\overline{z_2}\right|\left(\because R(z)\leq|z|\right)$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\left|\overline{z_2}\right|$$
$$=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|$$
$$=\left(|z_1|+|z_2|\right)^2$$

अत: $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

$$(g)\left|z_1-z_2\right|^2=\left(z_1-z_2\right)\overline{\left(z_1-z_2\right)}$$

$$=\left(z_1-z_2\right)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)$$

$$=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right)$$

$$=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}\right)$$

$$=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-2R\left(z_1\overline{z_2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\geq\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-2\left|z_1\overline{z_2}\right|\left(\because R(z)\leq|z|\right)$$

$$=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-2\left|z_1\right|\left|\overline{z_2}\right|$$

$$=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-2\left|z_1\right|\left|z_2\right|$$

$$=\left(\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\right)^2$$

अत: $\left|z_1-z_2\right|\geq\left|z_1\right|-\left|z_2\right|$

h) **समीकरण (1) से**

$$\left|z_1+z_2\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+2R\left(z_1\overline{z_2}\right)$$

$$\geq\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-2\left|z_1\overline{z_2}\right|$$

$$\left(\because R(z)\leq|z|\right)$$

$$=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-2\left|z_1\right|\left|\overline{z_2}\right|$$

$$=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-2\left|z_1\right|\left|z_2\right|$$

$$=\left(\left|z_1\right|-\left|z_2\right|\right)^2$$

**अत:** $\left|z_1-z_2\right|\geq\left|z_1\right|-\left|z_2\right|$

**(i) समीकरण (2) से**

$$\left|z_1-z_2\right|^2=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2-2R\left(z_1\overline{z_2}\right)$$

$$\leq\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+2\left|z_1\overline{z_2}\right|$$

$$\left(\because R(z)\leq|z|\right)$$

$$=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+2\left|z_1\right|\left|\overline{z_2}\right|$$

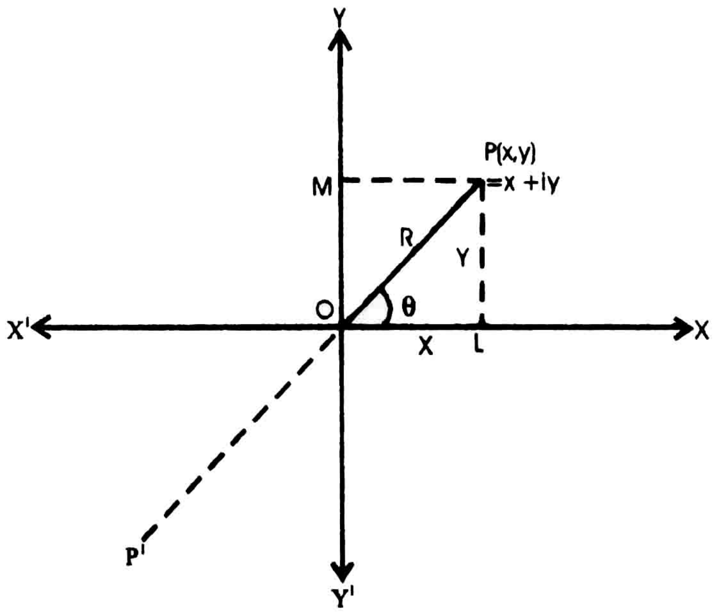
$$=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2+2\left|z_1\right|\left|z_2\right|$$

$$=\left(\left|z_1\right|+\left|z_2\right|\right)^2$$

अत: $\left|z_1+z_2\right|\leq\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$

### 1-6 सम्मिश्र संख्याओं का ज्यामितीय निरूपण

यदि किसी समतल में OX तथा OY दो परस्पर लम्बवत सरल रेखाएँ है। तथा बिन्दु O को मूल बिन्दु (origin) मानते हुये किसी बिन्दु P के निर्देशांक (x,y) हैं। तब सम्मिश्र संख्या z=(x,y)=x + iy को ज्यामितीय रूप से सदिश (दिष्ट रेखाखण्ड) OP द्वारा निरूपित किया जा सकता है। सरल रेखा OX वास्तविक अक्ष (real axis) तथा सरल रेखा OY काल्पनिक अक्ष (imaginary axis) कहलाती है। ऐसी दशा में समतल XOY को आरगेण्ड समतल (Argand plane) कहते हैं।




**चित्र 1.1**

आरगेण्ड समतल में सम्मिश्र राशि z=x + iy का वास्तविक भाग अर्थात् **R**(z)=x=**OL** को वास्तविक अक्ष **OX** के अनुदिश एवं काल्पनिक भाग अर्थात् I(z)=y=**OM** को काल्पनिक अक्ष **OY** के अनुदिश मापा जाता है।

सम्मिश्र संख्या z=(x,0) को वास्तविक अक्ष OX पर रेखाखण्ड OL एवं सम्मिश्र संख्या z=(0,y) को काल्पनिक अक्ष **OY** पर रेखाखण्ड **OM** द्वारा निरूपित किया जा सकता है। इसी प्रकार सम्मिश्र संख्या -z=(-x,-y) को ज्यामितीय रूप से सदिश $OP^1$ द्वारा निरूपित किया जा सकता है, जो लम्बाई में सदिश OP की लम्बाई के बराबर है। परन्तु सदिश **OP** के विपरीत दिशा में है।

### 1.6.1 सम्मिश्र संख्याओं का ध्रुवीय रूप (Polar form of complex numbers)

माना आरगैण्ड समतल में किसी सम्मिश्र संख्या z=x+iy को निरूपित करने वाले बिन्दु P (x,y) के ध्रुवीय निर्देशांक (r, $\theta$) हैं। तब

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

**जिससे कि,**

$z = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$= r(\cos\theta, \sin\theta)$

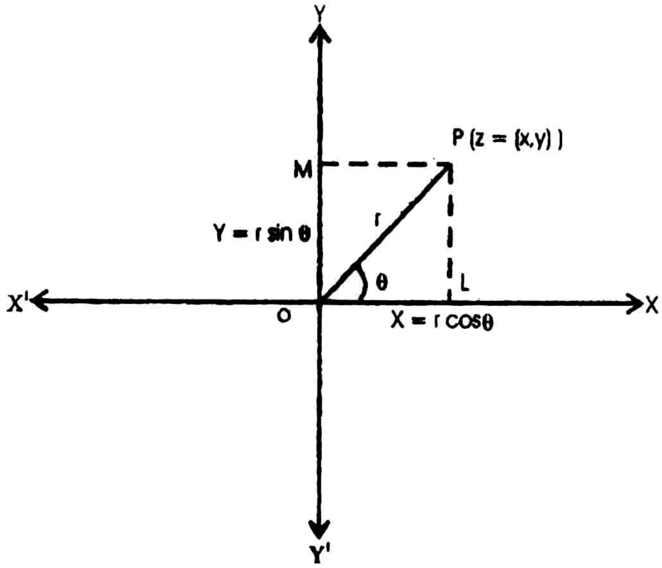
**स्पष्ट है कि**

$r^2 = x^2 + y^2$

या, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

तथा $\tan\theta = \frac{y}{x}$

या, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$




चित्र 1.2

r को सम्मिश्र संख्या z का मापांक (modulus) तथा $\theta$ को z का कोणांक अथवा आयाम (argument or amplitude) कहते हैं। इसे हम $\theta = \arg$ अथवा $\theta = amp(z)$ द्वारा निरूपित करते हैं।

सम्मिश्र संख्या z का यह रूप $z = r(\cos\theta, i\sin\theta)$ ध्रुवीय रूप कहलाता है।

**उदाहरण 1** सम्मिश्र संख्या (1+i) को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिये।

**हल** : यहाँ माना $1 + i = r(\cos\theta, i\sin\theta)$

अत: $\left.\begin{array}{l} r\cos\theta = 1 \\ r\sin\theta = 1 \end{array}\right]$ (वास्तविक एवं काल्पनिक भागों को समान रखR पर)

जिससे $r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 2$

अर्थात $r^2 = 2$

अत: $z=+\sqrt{2}$

एव $\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=1$

या $\tan\theta=1$

या, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

अतएव $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

**उदाहरण 2** सम्मिश्र संख्या $(\left(-1,\sqrt{3}\right))$ को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिये।

हल: यहाँ माना $-1+i\sqrt{3}=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$

अत: $r\cos\theta=-1$

$r\sin\theta=\sqrt{3}$

जिससे कि $r^2=1+3=4$

या $r=+2$

तथा $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$

या, $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$

अतएव $-1+i\sqrt{3}=r\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

**उदाहरण 3** सम्मिश्र संख्या $\left(-\sqrt{3},-1\right)$ को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिये।

हल: यहाँ, माना $-\sqrt{3}-i=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$

अत: $r\cos\theta=-\sqrt{3}$

$r\sin\theta=-1$

तब $r^2=4$

या, $r=+2$

यथा $\tan\theta=\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

या $\theta=\dfrac{4\pi}{3}$

(चूंकि $\sin\theta$ तथा $\cos\theta$ दोनों ही -ve हैं, अत: $\theta$ का मान $\pi$ एवं $\dfrac{3\pi}{2}$ के मध्य अर्थात तृतीय, चतुर्थांश में होना चाहिये।

अतएव $-\sqrt{3}-i=2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

**उदाहरण 4** सम्मिश्र संख्या $\frac{1+7i}{(2-i)^2}$ को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिए

हल: यहाँ, $\frac{1+7i}{(2-i)^2}=\frac{(1+7i)}{3-4i}=\frac{1+7i}{3-4i}\times\frac{3+4i}{3+4i}$

$=\frac{-25+25i}{9+16}=-1+i$

अत: $\frac{1+7i}{(2-i)^2}=-1+i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ (माना)

जिससे कि $r\cos\theta=-1$

$r\sin\theta=1$

अत: $r^2=2$

या $r=+\sqrt{2}$

तथा $\tan\theta=\frac{1}{-1}=-1$

या $\theta=\frac{3\pi}{4}$ (चूंकि $\sin\theta>0$ तथा $\cos\theta<0$ )

अतएव $\frac{1+7i}{(2-i)^2}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

**उदाहरण 5** सिद्ध कीजिये कि सम्मिश्र संख्याओं $z_1, z_2$ के लिये

$(i)\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$

$(ii)\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$

हल: माना $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$

तथा $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

तब $(i)\, z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$=r_1r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$

$=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$

अत: $\arg(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2$

$=\arg(z_1)+\arg(z_2)$

$$(i)\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)}{r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)}{\left(\cos^2\theta_2+i\sin^2\theta_2\right)}\right)$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\begin{bmatrix}\left(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\right)\\+\left(\sin\theta_1\cos\theta_2\right)+\left(\cos\theta_1\sin\theta_2\right)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+i\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right)$$

अत: $=\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\theta_1-\theta_2=\arg\left(z_1\right)-\arg\left(z_2\right)$

**उदाहरण 6** यदि $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|$ तथा $\arg\left(z_1\right)+\arg\left(z_2\right)=0$, तब प्रदर्शित कीजिये कि $z_1$, तथा $z_2$ परस्पर संयुग्मी सम्मिश्र संख्याएँ है।

हल: माना $z_1=r_1\left(\cos\theta_1+i\sin\theta_1\right)$

$z_2=r_2\left(\cos\theta_2+i\sin\theta_2\right)$

तब दिया है कि $r_1=r_2$ तथा $\theta_1+\theta_2=0$

अर्थात $\theta_2=-\theta_1$

अत: $z_2=r_1\left(\cos\left(-\theta_1\right)+i\sin\left(-\theta_1\right)\right)$

$=r_1\left(\cos\theta_1-i\sin\theta_1\right)=\overline{z_1}$

इसी प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है कि $z_1=\overline{z_1}$ अर्थात $z_1$ तथा $z_2$ परस्पर संयुग्मी संख्याएँ हैं।

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1**

1. यदि $z_1=\left(-3,5\right)$ तथा $z_2=\left(7,-4\right)$ तो $z_1-z_2=$.............
2. यदि $z_1=\left(-3,5\right)$ तथा $z_2=\left(7,-4\right)$ तो $z_1z_2=$............
3. यदि $z_1=\left(2,-1\right)$ तथा $z_2=\left(-3,4\right)$ तो $\frac{z_1}{z_2}=$................
4. यदि z=x+iy तब $\arg\left(\overline{z}\right)=$..........
5. $\arg\left(z_1/z_2\right)=$..........
6. यदि $\arg\left(z\right)=0$ तब z एक विशुद्ध ............राशि होती है।
7. यदि $\arg\left(z\right)=p$ तब z एक विशुद्ध ............राशि होती है।
8. यदि $\arg\left(z\right)=\frac{\pi}{2}$ तब z एक विशुद्ध ............राशि होती है।
9. यदि z=x+iy तब $z_1=\overline{z_1}$ तभी सम्भव है, जब................

## 1.7 डी मायवर प्रमेय (De Moivre's theorem)

n के किसी भी मान, धनात्मक अथवा ऋणात्मक पूर्णांक अथवा कोई भिन्न, के लिये सम्मिश्र राशि $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ का मान अथवा $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ के मानों में से एक मान $\cos n\theta + i\sin n\theta$ होता है।

उपपत्ति स्थिति $I$ जब n एक धनात्मक पूर्णांक है। तब

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)$$
$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

पुनः: $$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)$$
$$= (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))(\cos\theta_3 + i\sin\theta_3)$$
$$= \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

उपरोक्त प्रक्रिया को n बार दोहराR पर

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)................(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$
$$= \cos(\theta_1 + \theta_2 + ...........\theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2..........\theta_n)$$

अब $\theta_1 = \theta_2 = ..........\theta_n$ रख R पर

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

स्थिति $II$ जब n एक ऋणात्मक पूर्णांक हैं। माना n=m जहाँ m एक धनात्मक पूर्णांक है। तब

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m}$$
$$= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m}$$
$$= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \text{ (स्थिति } I \text{ से)}$$
$$= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{(\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos m\theta - i\sin m\theta)}$$
$$= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta + i\sin^2 m\theta}$$
$$= \cos m\theta - i\sin m\theta \text{ सम्मिश्र संख्याएँ}$$
$$= \cos(-m)\theta + i\sin(-m)\theta$$
$$= \cos n\theta + i\sin n\theta$$
$$\therefore (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

जब n एक ऋणात्मक पूर्णांक है।

स्थिति $III$ जब n एक भिन्न है। माना $n=\frac{p}{q}$ जहाँ, एक धनात्मक पूर्णाक है। तथा $p$ धनात्मक अथवा ऋणात्मक कोई भी पूर्णाक है।

पिछली दोना स्थितियों से,

$$\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^q=\cos q\frac{\theta}{q}+i\sin q\frac{\theta}{q}$$

$$=\cos\theta+i\sin\theta$$

अत : $\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)=\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^{1/q}$

अर्थात् $\cos\theta+i\sin\theta$ के $q$ वे मूलों में से एक मूल $\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}$ है।

अर्थात् $\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^{1/q}$ के मानो में से एक मान $\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}$ है।

अर्थात् $\left[\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^{1/q}\right]^p$ के मानों में से एक मान $\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^p$ है।

अर्थात $\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^{p/q}=\cos p\frac{\theta}{q}+i\sin p\frac{\theta}{q}$

अब चूंकि $\frac{p}{q}=n$

अत : $\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

**उदाहरण 7 सरल कीजिये**

$$(i)\frac{\left(\cos 3\theta-i\sin 3\theta\right)^4\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)^3}{\left(\cos 5\theta+i\sin 5\theta\right)^7\left(\cos 2\theta-i\sin 2\theta\right)^3}$$

$$(ii)\frac{\left(1+\sin\theta+i\cos\theta\right)^8}{\left(1+\sin\theta-i\cos\theta\right)^8}$$

**हल:** (i)चूंकि $\cos\theta-i\sin\theta=\cos\left(-\theta\right)+i\sin\left(-\theta\right)$

$$=\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^{-1}$$

इसलिये $\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)^3=\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)^{-3}$

इसी प्रकार, $\left(\cos 2\theta-i\sin 2\theta\right)^3=\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)^{-6}$

अत: $\frac{\left(\cos 3\theta+i\sin 3\theta\right)^4\left(\cos\theta-i\sin\theta\right)^3}{\left(\cos 5\theta+i\sin 5\theta\right)^7\left(\cos 2\theta-i\sin 2\theta\right)^3}$

$$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{12}(\cos\theta+i\sin\theta)^{-3}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{35}(\cos\theta+i\sin\theta)^{-6}}$$

$$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{9}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{29}}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-20}$$

$$=\cos(-20)\theta+i\sin(-20)\theta$$

$$=\cos 20\theta-i\sin 20\theta$$

$$(ii)\frac{(1+\sin\theta+i\cos\theta)^8}{(1+\sin\theta-i\cos\theta)^8}=\frac{\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)^8}{\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)^8}$$

$$=\frac{\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+2i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)^8}{\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)-2i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)^8}$$

$$=\frac{\left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)^8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)^8}{\left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)^8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)^8}$$

$$=\frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)^8}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-8}}$$

$$=\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)^{16}$$

$$=\cos(4\pi-8\theta)+i\sin(4\pi-8\theta)$$

$$=\cos 8\theta-i\sin 8\theta$$

**उदाहरण 8** सिद्ध कीजिये कि

$(i)\left(1+\cos\theta+i\sin\theta\right)^n+\left(1+\cos\theta-i\sin\theta\right)^n$

$=2^{n+1}\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}$

$(ii)\left[\left(\cos\theta+\sin\phi\right)+i\left(\sin\theta+\sin\phi\right)\right]^n+\left[\left(\cos\theta+\sin\phi\right)-i\left(\sin\theta+\sin\phi\right)\right]^n$

$=2^{n+1}\cos^n\frac{\theta-\phi}{2}\cos n\frac{\theta-\phi}{2}$

$(iii)\left(1+i\right)^n+\left(1-i\right)^n=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$

**हल** $(i)\left(1+\cos\theta+i\sin\theta\right)^n+\left(1+\cos\theta-i\sin\theta\right)^n$

$=\left[2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]^n+\left[2\cos^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]^n$

$$=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\left[\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n+\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n\right]$$

$$=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\left[\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)+\left(\cos\frac{n\theta}{2}-i\sin\frac{n\theta}{2}\right)\right]$$

$$=\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^n\left(2\cos\frac{n\theta}{2}\right)$$

$$=2^{n+1}\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}$$

$$(ii)\left[(\cos\theta+\cos\phi)+i(\sin\theta+\sin\phi)\right]^n+\left[(\cos\theta+\cos\phi)-i(\sin\theta+\sin\phi)\right]^n$$

$$=\left[2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}+2i\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}\right]^n$$

$$+\left[2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}-2i\sin\frac{\theta+\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}\right]^n$$

$$=\left[2\cos\frac{\theta-\phi}{2}\right]^n\left[\left(\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\right)^n\right]+$$

$$\left[\left(\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)-i\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\right)^n\right]$$

$$=\left[2\cos\frac{\theta-\phi}{2}\right]^n\left[\cos n\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)+i\sin n\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)+\cos n\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)-i\sin n\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\right]$$

$$=\left[2\cos\frac{\theta-\phi}{2}\right]^n\left[2\cos n\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\right]$$

$$=2^{n+1}\cos^n\frac{\theta-\phi}{2}\cos n\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$$

$$(iii)(1+i)^n+(1-i)^n$$

$$=\left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^n+\left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]^n$$

$$=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n+\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

$$=2^{\frac{n}{2}}\left[\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)+\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2^{\frac{n}{2}}\left(2\cos\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$$

**उदाहरण 9** **यदि** $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$ तथा $y+\frac{1}{y}=2\cos\phi$ तब सिद्ध कीजिये कि

$$(i)\, x^m+x^{-m}=2\cos m\theta$$

$$(ii)\, x^m y^n+\frac{1}{x^m y^n}=2\cos(m\theta+n\phi)$$

$$(iii)\, x^m y^{-n}+x^{-m}y^n=2\cos(m\theta-n\phi)$$

हल : दिया है कि $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$

इसलिये $x^2-2\cos .x+1=0$

$$x=\frac{2\cos\theta\pm\sqrt{4\cos^2-4}}{2}$$

$$=\cos\theta\pm i\sin\theta$$

धनात्मक चिन्ह लेR पर $x=\cos\theta+i\sin\theta$

इसी प्रकार दिया है कि $y+\frac{1}{y}=2\cos\phi$

अतः $y=\cos\phi+i\sin\phi$

$$(i)\, x^m+x^{-m}=(\cos\theta+i\sin\theta)^m+(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}$$
$$=(\cos m\theta+i\sin m\theta)+(\cos(-m)\theta+i\sin(-m)\theta)$$
$$=(\cos m\theta+i\sin m\theta)+(\cos m\theta-i\sin m\theta)$$
$$=2\cos m\theta$$

$$(ii)\, x^m y^n+x^{-m}y^{-n}=(\cos\theta+i\sin\theta)^m(\cos\phi+i\sin\phi)^n+(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}(\cos\phi+i\sin\phi)^{-n}$$
$$=(\cos m\theta+i\sin m\theta)(\cos n\phi+i\sin n\phi)+(\cos m\theta-i\sin m\theta)(\cos n\phi-i\sin n\phi)$$
$$=\cos(m\theta+n\phi)+i\sin(m\theta+n\phi)+\cos(m\theta+n\phi)-i\sin(m\theta+n\phi)$$
$$=2\cos(m\theta+n\phi)$$

$$(iii)\, x^m y^{-n}+x^{-m}y^{n}=(\cos\theta+i\sin\theta)^m(\cos\phi+i\sin\phi)^{-n}+(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}(\cos\phi+i\sin\phi)^{n}$$
$$=(\cos m\theta+i\sin m\theta)(\cos n\phi-i\sin n\phi)+(\cos m\theta-i\sin m\theta)(\cos n\phi+i\sin n\phi)$$
$$=\cos(m\theta-n\phi)+i\sin(m\theta-n\phi)+\cos(m\theta-n\phi)+i\sin(m\theta-n\phi)$$
$$=\cos(m\theta-n\phi)+i\sin(m\theta-n\phi)+\cos(m\theta-n\phi)-i\sin(m\theta-n\phi)$$
$$=2\cos(m\theta-n\phi)$$

**उदाहरण 10** यदि $\alpha$ और $\beta$ समीकरण $x^2-2x+4=0$ के मूल हैं। तब सिद्ध कीजिये कि $\alpha^n+\beta^n=2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$

**हल** : यहाँ $x^2-2x+4=0$

इसलिये $x=\dfrac{2\pm\sqrt{4-16}}{2}$

$=1\pm\sqrt{3}i$

अतः दिया है कि $\alpha=1+\sqrt{3},\beta=1-\sqrt{3}$

अब माना $\alpha=1+\sqrt{3}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

तब $1=r\cos\theta,\sqrt{3}=r\sin\theta$ अतः $r^2=4$ या $r=2$

तथा $\tan\theta=\sqrt{3}$ या $\theta=\frac{\pi}{3}$

अतएव $\alpha=1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

इसी प्रकार

$$\beta=1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

अब $\alpha^n+\beta^n=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^n+\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^n$

$$=2^n\left[\left(\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}\right)+\left(\cos\frac{n\pi}{3}-i\sin\frac{n\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2^n\left(2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$=2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$$

**उदाहरण 11 :** यदि $x_n=\cos\frac{\pi}{2^n}+i\sin\frac{\pi}{2^n}$ ,तब सिद्ध कीजिये कि 2घ्न 2

$x_1x_2...............x_n...........\infty=-1$

**हल:** यहाँ $x_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

$$x_2=\cos\frac{\pi}{2^2}+i\sin\frac{\pi}{2^2}$$

...............................

...............................

$$x_n=\cos\frac{\pi}{2^n}+i\sin\frac{\pi}{2^n}$$

अत: $x_1..........x_2.............x_n.......\infty=$

$$=\left[\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right]\left[\cos\frac{\pi}{2^2}+i\sin\frac{\pi}{2^2}\right]...\left[\cos\frac{\pi}{2^n}+i\sin\frac{\pi}{2^n}\right]......\infty$$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2^2}+...............\infty\right)+$ चूंकि $i\sin$ तथा $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2^2}+...............\infty\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi/2}{1-\frac{1}{2}}\right)+i\sin\left(\frac{\pi/2}{1-\frac{1}{2}}\right)$ $\left(\because\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2^2}+...............\infty\right.$ एक गु. श्रे. है)

$$=\cos\pi+i\sin\pi$$

$$=-1$$

**<u>स्वमूल्यांकन प्रश्न-2</u>**

$(1)(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n=.................$

$(2)(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{-n}=...............$

$(3)(\cos\alpha-i\sin\alpha)^{-n}=...............$

$(4)\dfrac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^5}{(\cos\alpha-i\sin\alpha)^2}$

(5) $\left(a+\frac{1}{a}\right)=2\cos\theta$ , तब $a =$...............

(6) $\left(x+\frac{1}{x}\right)=2\cos\alpha$ यथा $y+\frac{1}{y}=2\cos\beta$ ,तब $xy =$.............

(7) यदि $x_r=\cos\frac{\pi}{2^r}+i\sin\frac{\pi}{2^r}$ तब

$x_1x_2x_3.........\infty=..........$

**7.1.1 डी मायवर प्रमेय के अनुप्रयोग**

सम्मिश्र राशि $z=a+ib$ के $p, p$ मिलाये वे मूल ज्ञात करना

माना $z=a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

चूंकि हम जानते हैं कि

$$\cos\theta+i\sin\theta=\cos(2m\pi+\theta)+i\sin(2m\pi+\theta); m=0,1,2,.......$$

अतः $z^{\frac{1}{p}}=(a+ib)^{\frac{1}{p}}=r^{\frac{1}{p}}[\cos\theta+i\sin\theta]^{\frac{1}{p}}$

$$=r^{\frac{1}{p}}[\cos(2m\pi+\theta)+i\sin(2m\pi+\theta)]^{\frac{1}{p}}$$

$$=r^{\frac{1}{p}}\left[\cos\frac{2m\pi+\theta}{p}+i\sin\frac{2m\pi+\theta}{p}\right]$$

अब उपरोक्त में $m=0,1,2,................p-1$, इत्यादि p भिन्न मान रखR पर सम्मिश्र राशि के $p, p$ वे मूल प्राप्त किये जा सकते हैं।

**उदाहरण 12** निम्न सम्मिश्र राशियों के सभी मान ज्ञात कीजिये:

$a.(-1)^{\frac{1}{3}}$ $b.(-1+i)^{\frac{1}{3}}$

$c.(-i)^{\frac{3}{4}}$ $d.(i)^{\frac{1}{2}}$

**हल:** $(a) -1=-1+i.0\pi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

अतः $r\cos\theta=-1$ तथा $r\sin\theta=0$

जिससे कि $r^2=1$ या $r=1$

तथा $\tan\theta=\frac{0}{-1}=0$ या $\theta=\pi$

इसलिये $-1=\cos\pi+i\sin\pi$

$$=\cos(2m+1)\pi+i\sin(2m+1)\pi$$

जहाँ m एक पूर्ण संख्या है।

अतः $(-1)^{\frac{1}{3}}=[\cos(2m+1)\pi+i\sin(2m+1)\pi]^{\frac{1}{3}}$

$$= \cos\frac{(2m+1)\pi}{3} + i\sin\frac{(2m+1)}{3}, m = 0,1,2$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}, \cos\pi + i\sin\pi$$

तथा $\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$

अथवा $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}i\right), -1, \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}i\right)$

$(b) -1+i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

अतः $r\cos\theta = -1$ तथा $r\sin\theta = 1$

जहाँ से $r = \sqrt{2}$ तथा $\tan\theta = \frac{1}{-1} = -1$

या $\theta = \frac{3\pi}{4}$

इसलिये $-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left[\cos\left(2m\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(2m\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right]$ जहाँ $m \in W$

अतः $(-1+i)^{\frac{1}{3}} = \left[\sqrt{2}\left\{\cos\left(2m\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right\} + i\sin\left(2m\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$

$$= 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{8m\pi + 3\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{8m\pi + 3\pi}{12}\right)\right], m = 0,1,2$$

$= 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$ तथा

$$2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

$(c) -i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

अतः $(-1)^{\frac{3}{4}} = \left[\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{3}\right]^{\frac{1}{4}}$

$$= \left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{4}}$$

$= \left[\cos\left(2m\pi - \frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(2m\pi - \frac{3\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{4}}$ जहाँ $m \in W$

$$\cos\frac{(4m-3)\pi}{8}+i\sin\frac{(4m-3)\pi}{8}, m=0,1,2,3$$

$$=\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right), \cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}, \cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8},$$

$$\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}$$

अतः $(-i)^{\frac{3}{4}}=\cos\frac{3\pi}{8}-i\sin\frac{3\pi}{8}, \cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8},$

$\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}$, तथा $\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}$

(d) चूंकि $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

$$=\cos\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

जबकि m एक पूर्ण संख्या है।

अतः $(i)^{\frac{1}{2}}=\left[\cos\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(2m\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

$$=\cos\left(m\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(m\pi+\frac{\pi}{4}\right), m=0,1$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}, \cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$$

अथवा $\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$

अथवा $\pm\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$

**उदाहरण 13** डी मायवर प्रमेय का प्रयोग करते हुये समीकरण $x^9-x^5+x^4-1=0$ को हल कीजिये।

**हल:** $x^9-x^5+x^4-1=0$

या $x^5(x^4-1)+(x^4-1)=0$

या $(x^5+1)(x^4-1)=0$

**प्रथम गुणनखण्ड से**

$$x^5=-1=\cos\pi+i\sin\pi$$

$$=\cos(2m+1)\pi+i\sin(2m+1), m=0,1,2............$$

इसलिये $x=\left(\cos(2m+1)\pi+i\sin(2m+1)\pi\right)^{\frac{1}{5}}$

$$x=\left(\cos\left(2m+1\right)\pi+i\sin\left(2m+1\right)\pi\right)^{\frac{1}{5}}$$
$$m=0,1,2,3,4$$

अब $m=0,1,2,3$ तथा 4 रखR पर समीकरण $x^5+1=0$ के मूल हैं

$$\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5},\cos\frac{3\pi}{5}+i\sin\frac{3\pi}{5},\cos\pi+i\sin\pi$$
$$\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}\ \text{एवं}\ \cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}$$

परन्तु $\cos\frac{7\pi}{5}+i\sin\frac{7\pi}{5}=\cos\left(2\pi-\frac{3\pi}{5}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{3\pi}{5}\right)$

$$=\cos\frac{3\pi}{5}-i\sin\frac{3\pi}{5}$$

इसी प्रकार $\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}=\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}$

अत: समीकरण $x^5+1=0$ के मूल है:

$$\frac{\pi}{5}\pm i\sin\frac{\pi}{5},\cos\frac{3\pi}{5}\pm i\sin\frac{3\pi}{5}\ \text{तथा}\ \cos\pi+i\sin\pi$$

पुन: द्‌वितीय गुणन खण्ड से $x^4-1$

या $x^2=\pm1$

$x=\pm1$ तथा $\pm i$

अतएव दिये हुये समीकरण के समस्त मूल हैं

$$\cos\frac{\pi}{5}\pm i\sin\frac{\pi}{5},\cos\frac{3\pi}{5}\pm i\sin\frac{3\pi}{5},\cos\pi+i\sin\pi,\ \pm1\ \text{एवं}\ \pm i$$

## 1.8 सम्मिश्र राशियों की चरघातांकी श्रेणियाँ (Exponential series of complex numbers)

जब $x$ एक वास्तविक राशि है, तब हम जानते हैं कि

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(1)}$$

परन्तु यदि $x$ एक वास्तविक राशि न होकर रूप में कोई सम्मिश्र राशि है तब भी यह प्रदर्शित किया जा सकता हैं कि

श्रेणी $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$(2)

मान्य है। अब यदि श्रेणी (2) में $x=i\theta$ रखें तब (2) का रूप है।

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i\theta^2}{2!} + \frac{i\theta^3}{3!} + .......$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + ........\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!}......\right)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta$$

अत : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ .............(3)

इसी प्रकार $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ .............(4)

(3) तथा (4) का योग करने पर हम पाते हैं

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad ...............(5)$$

जब कि (3) में से (4) को घटाR पर

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2!} \quad ...............(6)$$

सम्बन्ध (5) एवं (6) आयलर के चरघातांकी का मान कहलाते हैं। समीकरण (5) एवं (6) में $\theta$ एक वास्तविक राशि है। यह प्रदर्शित किया जा सकता हैं कि यदि $\theta$ एक सम्मिश्र राशि है, जैसे से $\theta = z$ जहाँ z एक सम्मिश्र राशि है, तब भी समीकरण (5) त था (6) द्वारा दिये गये मान मान्य हैं। अर्थात्

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad ................(7)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2!} \quad ...................(8)$$

इसी प्रकार यह भी प्रदर्शित किया जा सकता हैं कि यदि $z_1$ और $z_2$ सम्मिश्र राशियाँ हैं, तब

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z$$

**सम्मिश्र त्रिकोणमितीय फलनों के आवर्तनांक**

यदि $z_1 = z$ तथा $y = 2\pi$ लें तब उपरोक्त दिये ।गये प्रथम परिणाम से हम देखते हैं कि

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z \cos 2\pi + \cos z + \sin 2\pi$$

$$= \sin z \qquad$$ [चूंकि $co2\pi = 1$ तथा $\sin 2\pi = 0$]

इसी प्रकार $\cos(z + 2\pi) = \cos z \cos 2\pi + \sin z + \sin 2\pi$

$$= \cos z$$

अत: यदि z के मान में $2\pi$ की वृद्धि कर दी जाये ,तब भी $\sin z$ एवं $\cos z$ वही बR रहते है। अत: जब z एक सम्मिश्र राशि है, तब $\sin z$ एवं $\cos z$ आवर्तनीय फलन हैं जिनका आवर्तनांक (Period) $2\pi$ है।

**उदाहरण 14** यदि Z एक सम्मिश्र राशि है, तब सिद्ध कीजिये कि,

$(a)\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

$(b)\sin 3z = 3\sin z - 4\sin^3 z$

$(c)\cos 3z = 4\cos^3 z - 3\cos z$

$(d)\cos(-z) = \cos z$

**हल:**

$$(a)\cos^2 z - \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2!}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)^2+\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(e^{2iz}+2e^{iz-iz}+e^{-2iz}\right)+\left(e^{2iz}-2e^{iz-iz}+e^{-2iz}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[2\left(e^{2iz}+e^{-2iz}\right)\right]$$

$$=\frac{e^{2iz}+e^{-2iz}}{2}$$

$$=\cos 2z$$

$$(b)\sin 3z = \frac{e^{3iz}+e^{-3iz}}{2!} = \frac{1}{2!}\left[\left(e^{iz}\right)^3+\left(e^{-iz}\right)^3\right]$$

$$=\frac{1}{2!}\left[\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)^3+3e^{iz}e^{-iz}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\right]$$

[चूंकि $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$]

$$=\frac{1}{2!}\left[\left(2i\sin z\right)^3+3\left(2i\sin z\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2!}\left[-8i\sin^3 z+6i\sin z\right]$$

$$=3\sin z-4\sin^3 z$$

$$(c)\cos z = \frac{e^{3iz}+e^{-3iz}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(e^{iz}\right)^3+\left(e^{-iz}\right)^3\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)^3-3e^{iz}e^{-iz}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\right]$$

[चूंकि $a^3-b^3=(a-b)^3-3ab(a-b)$]

$$= \frac{1}{2}\left((2\cos z)^3 - 3(2\cos z)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(8\cos^3 z - 6\cos z\right)$$

$$= 4\cos^3 z - 3\cos z$$

$$(d)\cos(-z) = \frac{e^{i(-z)} + e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2}$$

$$= \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2}$$

$$= \cos z$$

**उदाहरण 15** सिद्ध कीजिये कि सभी सम्मिश्र राशियों $z_1$ एवं $z_2$ के लिये

$$\sin z_1 + \sin z_2 = 2\sin\frac{1}{2}(z_1 + z_2)\cos\frac{1}{2}(z_1 - z_2)$$

**हल:** $\sin z_1 + \sin z_2 = \dfrac{e^{-iz_1} - e^{iz_1}}{2!} + \dfrac{e^{-iz_2} - e^{iz_2}}{2!}$

$$= \frac{1}{2i}\left[\left\{e^{i}\left(\frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_1-z_2}{2}\right) - e^{-1i}\left(\frac{z_1+z_2}{2i} + \frac{z_1-z_2}{2i}\right)\right\}\right.$$

$$\left. + \left\{e^{1}\left(\frac{z_1+z_2}{2} - \frac{z_1-z_2}{2}\right) - e^{-1i}\left(\frac{z_1+z_2}{2} - \frac{z_1-z_2}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\left\{e^{i}\left(\frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_1-z_2}{2}\right) - e^{i}\left(\frac{z_1+z_2}{2i} - \frac{z_1-z_2}{2i}\right)\right\}\right.$$

$$\left. - \left\{e^{1}\left(\frac{z_1+z_2}{2} + \frac{z_1-z_2}{2}\right) + e^{-1}\left(\frac{z_1+z_2}{2} - \frac{z_1-z_2}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{1\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)}\left\{e^{i\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{z_1-z_2}{2i}\right)}\right\} - e^{1\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)}\left\{e^{-1\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[e^{1\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)}\left\{e^{i\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{z_1-z_2}{2i}\right)}\right\} - e^{1\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)}\left\{e^{-1\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{z_1-z_2}{2}\right)}\right\}\right]$$

$$= 2\sin\frac{1}{2}(Z_1 + Z_2)\cos\frac{1}{2}(Z_1 - Z_2)$$

## 1.9 अतिपरवलयिक फलन (Hyperbolic functions)

x के किसी भी मान (वास्तविक अथवा सम्मिश्र) के लिये फलनों

$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ एवं $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ को $x$

के क्रमश अतिपरवलयिक ज्या (hyperbolic sine) तथा अतिपरवलयिक कोज्या (hyperbolic cosine) कहते हैं तथा इन्हें क्रमश: $\sinh x$ और $\cosh x$ द्वारा निरूपित किया जाता हैं। अत:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ ..........................(1)}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ .........................(2)}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\sec hx = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cos echx = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

(1) तथा (2) का योग करने पर हम देखते हैं कि

$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

### 1.9.1 अतिपरवलयिक फलनों एवं त्रिकोणमितीय (वृत्तीय) फलनों में परस्पर सम्बन्ध

अनुच्छेद 1.8 में दिये गये आयलर के चरघातांकी मानों (5) तथा (6) से,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cosh(i\theta)$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{i}\sinh(i\theta) = -i\sinh(i\theta)$$

यदि उपरोक्त में $\theta$ को $i\theta$ द्वारा प्रतिस्थापित करें तब,

$$\cos\theta = \frac{e^{i^2\theta} + e^{-i^2\theta}}{2} = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{2}$$

(चूंकि $i = -1$)

$$= \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} = \cosh\theta$$

अत: $\cosh(i\theta) = \cosh\theta$ .........(a)

तथा $\sin(i\theta) = \dfrac{e^{i^2\theta} + e^{-i^2\theta}}{2} = \dfrac{i\left(e^{-\theta} - e^{\theta}\right)}{2i^2}$

$$= i\left(\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\right) = i\sinh\theta$$

$\sin(i\theta) = i\sin\theta$ .........(b)

(a) तथा (b) से यह देखा जा सकता है कि

$$\cos\theta = \cos(i\theta)$$

तथा $\sinh\theta = \frac{1}{i}\sin(i\theta) = -i\sin(i\theta)$

इसी प्रकार से अन्य परिणाम भी प्राप्त किये जा सकते है, जो निम्न है:

$\sin\theta = -i\sinh(i\theta)$ $\sinh\theta = -i\sin(i\theta)$

$\cos\theta = \cosh(i\theta)$ $\cosh\theta = \cos(i\theta)$

$\tan\theta = -i\tanh(i\theta)$ $\tanh\theta = -i\tan(i\theta)$

$\cot\theta = i\coth(i\theta)$ $\coth\theta = i\cot(i\theta)$

$\sec\theta = \sec h(i\theta)$ $\sec h\theta = \sec(i\theta)$

$\cos ec\theta = i\cos ech(i\theta)$ $\cos ech\theta = i\cos ec(i\theta)$

### 1.9.2 अतिपरवलयिक फलनों में परस्पर सम्बन्ध

इस अनुच्छेद में हम अतिपरवलयिक फलनों में कुछ आधार छू सम्बन्धी को ज्ञात करेंगे

$(a)(i)\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$

$\text{sech}^2\theta + \tanh^2\theta = 1$

$\coth^2\theta - \cos ec\,\text{h}^2\theta = 1$

**उपपत्ति** चूंकि हम जानते है कि

$\cosh\theta - \sinh\theta = e^{\theta}$ ...................(1)

$\cosh\theta - \sinh\theta = e^{-\theta}$ ..................(2)

(1) तथा (2) की परस्पर गुणा करने से

$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ .................(3)

(3) में $\cosh^2\theta$ का भाग देR पर

$1 - \tanh^2\theta = \text{sech}^2\theta$

$\text{sech}^2\theta + \tanh^2\theta = 1$ ..................(4)

पुन: (3) में का भाग देR पर

$\coth^2\theta - \cos ec\,\text{h}^2\theta = 1$ ...................(5)

$b.(i)\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta \pm \cosh\alpha\sinh\beta$

$(ii)\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha\sinh\beta \pm \sinh\alpha\cosh\beta$

$(iii)\tanh(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tanh\alpha \pm \tanh\beta}{1 \pm \tanh\alpha\tanh\beta}$

**उपपत्ति** $(i)\sinh(\alpha \pm \beta) = -i\sin(i(\alpha \pm \beta))$

$$= -i\sin(i\alpha \pm i\beta)$$

$$= -i[\sin(i\alpha)\cos(i\beta) \pm \cos(i\alpha)\sin(i\beta)]$$

$$= \sinh\alpha\cosh\beta \pm \cosh\alpha\sinh\beta$$

$(ii)\cosh(\alpha \pm \beta) = \cos(i(\alpha \pm \beta))$

$$= \cos(i\alpha \pm i\beta)$$

$$= \cos(i\alpha)\cos(i\beta) \mp \sin(i\alpha)\sin(i\beta)$$

$$= \cosh\alpha \cosh\beta \mp ((i\sinh\alpha)(i\sinh\beta))$$

$$= \cosh\alpha \cosh\beta \mp \sinh\alpha \sinh\beta$$

$$(iii)\tanh(\alpha \pm \beta) = -i\tan(i(\alpha \pm \beta))$$

$$= -i\tan(i\alpha \pm i\beta)$$

$$= -i\left[\frac{\tan(i\alpha) \pm \tan(i\beta)}{1 \mp \tan(i\alpha)\tan(i\beta)}\right]$$

$$= -i\left[\frac{i\tanh\alpha \pm i\tanh\beta}{1 \mp (i\tanh\alpha)(i\tanh\beta)}\right]$$

$$= \frac{\tanh\alpha \pm \tanh\beta}{1 \pm \tanh\alpha \tanh\beta}$$

$$C.(i)\sinh 2\theta = 2\sinh\theta\cosh\theta = \frac{2\tanh\theta}{1-\tanh^2\theta}$$

$$(ii)\cosh 2\theta = \cosh^2\theta + \sinh^2\theta$$

$$= 2\cosh^2\theta - 1$$

$$= 1 + 2\sinh^2\theta$$

$$= \frac{1+\tanh^2\theta}{1-\tanh^2\theta}$$

$$(ii)\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tanh^2\theta}$$

**उदाहरण 16** निम्न व्यंजकों को उनके वास्तविक एवं काल्पनिक भागों में विभक्त कीजिये।

$(a)\sin(\alpha + i\beta)$

$(b)\cosh(\alpha + i\beta)$

$(c)\tan(\alpha + i\beta)$

$(d)\tanh(\alpha + i\beta)$

$(e)\cos ech(\alpha + i\beta)$

$(f)e^{\sin(\alpha+i\beta)}$

$(g)e^{\cosh(\alpha+i\beta)}$

$(h)\sin^2(\alpha + i\beta)$

**हलः** $(a)\sin(\alpha + i\beta) = \sin\alpha\cos(i\beta) + \cos\alpha\sin(i\beta)$

$$= \sin\alpha\cosh\beta + \cos\alpha(i\sinh\beta)$$

$$= \sin\alpha\cosh\beta + i\cos\alpha\sinh\beta$$

$$(b)\cosh(\alpha+i\beta)=\cos i(\alpha+i\beta)$$
$$=\cos(i\alpha-\beta)$$
$$=\cos(i\alpha)\cos\beta+\sin(i\alpha)\sin\beta$$
$$=\cosh\alpha\cos\beta+i\sinh\alpha\sin\beta$$

$$(c)\tan(\alpha+i\beta)=\frac{\sin(\alpha+i\beta)}{\cos(\alpha+i\beta)}=\frac{2\sin(\alpha+i\beta)\cos(\alpha-i\beta)}{2\cos(\alpha+i\beta)\cos(\alpha-i\beta)}$$
$$=\frac{\sin((\alpha+i\beta)+(\alpha+i\beta))+\sin((\alpha+i\beta)-(\alpha+i\beta))}{\cos((\alpha+i\beta)+(\alpha+i\beta))+\cos((\alpha+i\beta)-(\alpha+i\beta))}$$
$$=\frac{\sin 2\alpha+\sin(2i\beta)}{\cos 2\alpha+\cos(2i\beta)}$$
$$=\frac{\sin 2\alpha+i\sinh 2\beta}{\cos 2\alpha+\cosh 2\beta}$$
$$=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+\cosh 2\beta}+\frac{i\sinh 2\beta}{\cos 2\alpha+\cosh 2\beta}$$

$$(d)\tanh(\alpha+i\beta)=\frac{1}{i}\tan i(\alpha+i\beta)$$

(चूंकि $tan i\theta=i\tanh\theta$ )

$$=-i\tan(i\alpha+\beta)$$
$$=-\frac{\sin(i\alpha+\beta)}{\cos(i\alpha+\beta)}$$
$$=-i\left[\frac{2\sin(i\alpha+\beta)\cos(i\alpha+\beta)}{2\cos(i\alpha+\beta)\cos(i\alpha+\beta)}\right]$$
$$=-i\left[\frac{\sin(2i\alpha)+\sin(2\beta)}{\cos(2i\alpha)+\cos(2\beta)}\right]$$
$$=-i\left[\frac{i\sinh 2\alpha+\sin 2\beta}{\cosh 2\alpha+\cos 2\beta}\right]$$
$$=\frac{\sinh 2\alpha}{\cosh 2\alpha+\cos 2\beta}-i\frac{\sin 2\beta}{\cosh 2\alpha+\cos 2\beta}$$

$$(e)\cos ech(\alpha-i\beta)=\frac{1}{\sinh(\alpha-i\beta)}$$
$$=\frac{i}{\sin i(\alpha-i\beta)}$$

(चूंकि $\sin i\theta=i\sinh\theta$ )

$$=\frac{i}{\sin i(i\alpha+\beta)}$$

$$=i\left[\frac{2\sin(-i\alpha+\beta)}{2\sin(i\alpha+\beta)\sin(-i\alpha+\beta)}\right]$$

$$=i\left[\frac{2\{\sin\beta\cos(i\alpha)-\cos\beta\sin(i\alpha)\}}{\cos((i\alpha+\beta)-(-i\alpha+\beta))-\cos((i\alpha+\beta)+(-i\alpha+\beta))}\right]$$

$$=\frac{2\sinh\alpha\cos\beta+2i\cosh\alpha\sin\beta}{\cos 2\alpha-\cos 2\beta}$$

$$=\frac{2\sinh\alpha\cos\beta}{\cos 2\alpha-\cos 2\beta}+i\frac{2\cosh\alpha\sin\beta}{\cos 2\alpha-\cos 2\beta}$$

$(f)\, e^{\sin(\alpha+i\beta)}=e^{\sin\alpha\cos(i\beta)+\cos\alpha\sin(i\beta)}$

$=e^{\sin\alpha\cosh\beta+\cos\alpha(i\sin h\beta)}$

$=e^{\sin\alpha\cosh\beta+i\cos\alpha\sinh\beta}$

$=e^{\sin\alpha\cosh}\left[\cos\alpha(\cos\alpha\sinh\beta)+i\sin(\cos\alpha\sinh\beta)\right]$

(चूंकि $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ )

$(g)\, e^{\cosh(\alpha+i\beta)}=e^{\cos i(\alpha+i\beta)}$

$$=e^{\cos(i\alpha-\beta)}$$

$$=e^{\cos(i\alpha)cos\beta+\sin(i\beta)\sin\beta}$$

$$=e^{\cosh\alpha\cos\beta+i\sinh\alpha\sin\beta}$$

$$=e^{\cosh\alpha\cos\beta}\left[\cos(\sinh\alpha\sin\beta)+i\sin(\sinh\alpha\sin\beta)\right]$$

$(h)\sin^2(\alpha+i\beta)=\frac{1}{2}\left(2\sin^2(\alpha+i\beta)\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2(\alpha+i\beta)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\cos(2\alpha)\cos(2i\beta)-\sin(2\alpha)\sin(2i\beta)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\cos 2\alpha\cosh 2\beta-i\sin 2\alpha\sinh 2\beta\right]$$

$$=\left(\frac{1-\cos 2\alpha\cosh 2\beta}{2}\right)+i\left(\frac{\sin 2\alpha\sinh 2\beta}{2}\right)$$

**उदाहरण 17** **यदि** $\sin(\alpha+i\beta)=x+iy$ **तब सिद्ध कीजिये कि**

$$(a)\frac{x^2}{\cosh^2\beta}+\frac{y^2}{\sinh^2\beta}=1$$

$$(b)\frac{x^2}{\cosh^2\alpha}+\frac{y^2}{\sinh^2\alpha}=1$$

**हल:** यहाँ $x+iy=\sin(\alpha+i\beta)$

$$=\sin\alpha\cos(i\beta)+\cos\alpha\sin(i\beta)$$

$$=\sin\alpha\cosh\beta+i\cos\alpha\sinh\beta$$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$x=\sin\alpha\cosh\beta$ ............(i)

$y=\cos\alpha\sinh\beta$ ............(ii)

(a) एवं (2) से

$$\sin\alpha=\frac{x}{\cosh\beta} \text{ तथा } \cos\alpha=\frac{y}{\sinh\beta}$$

अतः $\dfrac{x^2}{\cosh^2\beta}+\dfrac{y^2}{\sinh^2\beta}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

(b)(1) एवं (2) से

$$\cosh\beta=\frac{x}{\sin\alpha} \text{ तथा } \sinh\beta=\frac{y}{\cos\alpha}$$

अतः $\cosh^2\beta-\sinh^2\beta=\dfrac{x^2}{\sin^2\alpha}-\dfrac{y^2}{\cos^2\alpha}$

या $\dfrac{x^2}{\sin^2\alpha}-\dfrac{y^2}{\cos^2\alpha}=1$

(चूंकि $\cosh^2\beta-\sinh^2\beta=1$)

**उदाहरण 18** **यदि** $\cos(\alpha+i\beta)=\cos\theta+i\sin\theta$ **तब सिद्ध कीजिये कि**

$$\cos 2\beta+\cos 2\alpha=2$$

**हल :** $\cos\theta+i\sin\theta=\cos(\alpha+i\beta)$

$$=\cos\alpha\cos(i\beta)-sin\alpha\sin(i\beta)$$

$$=\cos\alpha\cosh\beta-i\sin\alpha\sinh\beta$$

वास्तविक एवं काल्पनिक भागों को समान करने पर

$=\cos\alpha\cosh\beta=\cos\theta$

$=-\sin\alpha\sinh\beta=\sin\theta$

वर्ग करके योग करने पर

$\cos^2\alpha\cosh^2\beta+\sin^2\alpha\sinh^2\beta=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

या $(2\cos^2\alpha)(2\cosh^2\beta)+(2\sin^2\alpha)(2\sinh^2\beta)=4$

या $(1+\cos 2\alpha)(\cosh 2\beta+1)+(1-\cos 2\alpha)(\cosh 2\beta-1)=4$

या $2(\cos 2\alpha + \cosh 2\beta) = 4$

या $\cos 2\alpha + \cosh 2\beta = 2$

**उदाहरण 19 यदि** $\tan(\alpha + i\beta) = i$ तब **सिद्ध कीजिये कि** $\alpha$ **एक अनिधार्य**(indeterminate) **राशि है तथा** $\beta$ **एक अपरिमित।**

**हल:-** $\tan(\alpha + i\beta) = i = 0 + i$ .........................(1)

$\tan(\alpha + i\beta) = -i = 0 - i$ .........................(2)

$$\tan 2\alpha = \tan[(\alpha + i\beta) + (\alpha - i\beta)]$$

$$= \frac{\tan(\alpha + i\beta) + \tan(\alpha - i\beta)}{1 - \tan(\alpha + i\beta)\tan(\alpha - i\beta)}$$

$$= \frac{i + (-i)}{1 - (i)(-i)} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$$

जो कि एक अनिधार्य रूप है। अत: एक अनिधार्य राशि है।

पुन: $\tan(2i\beta) = \tan[(\alpha + i\beta) - (\alpha - i\beta)]$

$$= \frac{\tan(\alpha + i\beta) - \tan(\alpha - i\beta)}{1 + \tan(\alpha + i\beta)\tan(\alpha - i\beta)}$$

$$= \frac{i - (-i)}{1 + (i)(-i)} = \frac{2i}{1+1}$$

इसलिए $i \tan 2\beta = \dfrac{2i}{2} = i$

या $\tan 2\beta = 1$

या $\dfrac{e^{2\beta} - e^{-2\beta}}{e^{2\beta} + e^{-2\beta}} = 1$

या $e^{2\beta} - e^{-2\beta} = e^{2\beta} + e^{-2\beta}$

या $2e^{-2\beta} = 0$

या $e^{-2\beta} = 0$

या $e^{2\beta} = \dfrac{1}{0} = \infty$

या $2\beta = \infty$

अत: $\beta$ अपरिमित है।

**स्वमूल्यांकन प्रश्न-3**

1. Sinh x का श्रेणी के रूप में विस्तार है .....
2. Cosh x द्रका श्रेणी के रूप में विस्तार हैं......
3. Cosh x का आवर्तनाक होता है .........
4. Tanh x का आवर्तनांक होता है ......

5. $\frac{1}{2}$(cosh x + cos x) का श्रेणी के रूप में विस्तार है......

## 1.10 सम्मिश्र राशियों के लघुगुणक (Logarithms of complex quantities)

यदि x+iy कोई सम्मिश्र राशि है त था यदि $\alpha+i\beta$ कोई अन्य सम्मिश्र राशि इस प्रकार है कि

$$\alpha+i\beta=e^{x+iy} \quad \text{................ (1)}$$

तब राशि x+iy सम्मिश्र राशि $\alpha+i\beta$ का एक लघुगुणक कहलाती है।

चूंकि n के सभी पूर्णाक मानों के लिये

$$e^{2\pi ni}=\cos 2n\pi+i\sin 2n\pi=1 \quad \text{.............. (2)}$$

अत : (1) एवं (2) से = $e^{x+iy}$

$$\alpha+i\beta=e^{x+iy}.e^{2\pi ni}$$

$$=e^{x+i(y+2n\pi)}$$

अत : यह कहा जा सकता है कि यदि x+iy सम्मिश्र राशि का एक लघुगुणक है तब परिभाषानुसार x+i (y+2n $\pi$) भी सम्मिश्र राशि का एक लघुगुणक है।

माना $\alpha+i\beta=r\left[\cos(2n\pi+\theta)+i\sin(2n\pi+\theta)\right]$, जहां n कोई पूर्णांक है तथा

$$r=+\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \text{ एवं } \tan\theta=\frac{\beta}{\alpha}$$

अब यदि x+iy सम्मिश्र राशि $\alpha+i\beta$ हैं का एक लघुगुणक है, तब

$$\alpha+i\beta=r\left[\cos(2n\pi+\theta)+i\sin(2n\pi+\theta)\right]$$

$$=e^{x+iy}$$

$$=e^x.e^{iy}$$

$$=e^x\left[\cos y+i\sin y\right]$$

अत : वास्तविक एवं काल्पनिक भागों को समान रखR पर

$$e^x\cos y=r\cos(2n\pi+\theta)$$

तथा $e^x\sin y=r\sin(2n\pi+\theta)$

जहाँ से हम प्राप्त कर सकते हैं

$e^x=r$ तथा $y=2n\pi+\theta$

या $x=\log_e r$ तथा $y=2n\pi+\theta$

अतः $\alpha+i\beta$ मैं का एक लघुगुणक है $x+iy$ अर्थात $\log_e r+i(2n\pi+\theta)$

चूंकि n पूर्णांक है, अतः हम देखते हैं कि $\alpha+i\beta$ के अनन्त लघुगुणक प्राप्त किये जा सकते हैं जो $2\pi i$ के गुणक द्वारा एक दूसरे से भिन्न हैं। स्पष्ट हैं। कि $\alpha+i\beta$ हैं का लघुगुणक बहु मानीय (many valued) होता हैं। इसे हम निम्न प्रकार निरूपित करते हैं

$$Log(\alpha+i\beta)=\log_e\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+i\left(2n\pi+\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right).....(3)$$

(चूंकि $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2};\ \theta=\tan^{-1}\dfrac{\beta}{\alpha}$

जब n=0 तब (3), $\alpha+i\beta$ के लघुगुणक का मुख्य मान (principle value) कहलाता है तथा इसे $Log(\alpha+i\beta)$ द्वारा निरूपित किया जाता हैं। अत:

$$Log(\alpha+i\beta)=\log_e\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+i\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}$$

या $$Log(\alpha+i\beta)=\frac{1}{2}\log_e\left(\alpha^2+\beta^2\right)+i\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}....(4)$$

तथा तब (3) है:

$$Log(\alpha+i\beta)=Log(\alpha+i\beta)+2n\pi i.......(5)$$

**उदाहरण मान ज्ञात कीजिये।**

$(a)\log(-1)$

$(b)Log(-\theta)$

$(c)Log(i)$

$(d)\log(-i)$

$(e)\log(-5)$

$(f)\log(1+i)$

$$(a)\log(-1)=\log(\cos\pi+i\sin\pi)$$
$$=\log e^{\pi i}$$
$$=\pi i$$

$$(b)Log(-\theta)=\log_e(-\theta)+2n\pi i$$

परन्तु $$\log_e(-\theta)=\log(\theta(-1))$$
$$=\log(\theta(\cos\pi+i\sin\pi))$$
$$=\log_e\left(\theta e^{\pi i}\right)$$
$$=\log_e\theta+\log_e e^{\pi i}$$
$$=\log_e\theta+\pi i$$

अत: $$Log(-\theta)=\log_e\theta+\pi i+2n\pi i$$
$$=\log_e\theta+(2\pi+1)\pi i$$ जहाँ n कोई भी पूर्णाक है।

$$(c)\log(i)=\log i+2n\pi i$$

परन्तु $$\log i=\log\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \log\left(e^{\frac{1}{2}\pi i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\pi i$$

अतः $Logi = \frac{1}{2}\pi i + 2n\pi i$

$$= \frac{1}{2}(4n+1)\pi i$$

$(d)\,l0g(-1) = \log\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$$= \log e^{-\frac{1}{2}\pi i}$$

$$= -\frac{1}{2}\pi i$$

$(e)\log(-5) = \log(5(-1))$

$$= \log(5(\cos\pi + i\sin\pi))$$

$$= \log(5e^{\pi i})$$

$$= \log 5 + \log e^{\pi i}$$

$$= \log 5 + \pi i$$

अतएव $\log(-5)$ का व्यापक मान है:

$Log(-5) = \log 5 + \pi i + 2n\pi i$

$= \log 5 + (2n+1)\pi i$ जहाँ n कोई पूर्णांक हैं

$(f)\log(1+i) = \log(1+1.i)$

$$= \log\sqrt{1^2+1^1} + i\tan^{-1}\frac{1}{1}$$

$$= \log\sqrt{2} + i\tan^{-1}1$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{i\pi}{4}$$

अतः $\log(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{i\pi}{4} + 2n\pi i$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}(8n+1)\pi i$$

**उदाहरण** $\log(1+i)^{1-i}$ को $\alpha + i\beta$ के रूप में व्यक्त कीजिये।

**हल:** $\log(1+i)^{1-i} = (1-i)\log(1+1.i)$

$$=(1-i)\left[\log\sqrt{1+1}+i\tan^{-1}\frac{1}{1}\right]$$

$$=(1-i)\left[\frac{1}{2}\log 2+\frac{i\pi}{4}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2}\log 2+\frac{\pi}{4}\right]+i\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\right]$$

**उदाहरण** **प्रदर्शित कीजिये कि**

$$\log\frac{a+ib}{a-ib}=2i\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

**हल:** $\log\frac{a+ib}{a-ib}=\log(a+ib)-\log(a-ib)$

$$=\left[\log\sqrt{a^2+b^2}+i\tan^{-1}\frac{b}{a}\right]-\left[\log\sqrt{a^2+b^2}+i\tan^{-1}\frac{-b}{a}\right]$$

$$=i\tan^{-1}\frac{b}{a}+i\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$$=2i\tan^{-1}\frac{b}{a}$$

**उदाहरण** सिद्ध कीजिये कि

$$\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{i\theta}{2}\right)=i\tan^{-1}(\sinh\theta)$$

हल: $\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{i\theta}{2}\right)=\log\left[\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\left(\frac{i\theta}{2}\right)}{1-\tan\frac{\pi}{4}.\tan\left(\frac{i\theta}{2}\right)}\right]$

$$=\log\left(\frac{1+i\tanh\frac{\theta}{2}}{1-i\tanh\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\log\left(1+i\tanh\frac{\theta}{2}\right)-\log\left(1-i\tanh\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=\left[\frac{1}{2}\log\left(1+\tanh^2\frac{\theta}{2}\right)+i\tan^{-1}\left(\tanh\frac{\theta}{2}\right)\right]-\left[\frac{1}{2}\log\left(1+\tanh^2\frac{\theta}{2}\right)-i\tan^{-1}\left(\tanh\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$=2i\tan^{-1}\left(\tanh\frac{\theta}{2}\right)$$

$$i\tan^{-1}\left(\frac{2\tanh\frac{\theta}{2}}{1-\tanh^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$\left(\because 2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

$$=i\tan^{-1}\left(\sinh\theta\right)$$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न-4**

1. $\log\left(\alpha+i\beta\right)=$..........

2. $\log\left(\alpha+i\beta\right)=$..........

3. $Log\left(-1\right)=$...........

4. यदि $\beta$ एक धनात्मक राशि है, तब $\log\left(i\beta\right)-$............

5. $\log_e\left(\frac{\alpha+i\beta}{\alpha-i\beta}\right)=$............

## 1.11 सारांश

इस इकाई में आपR सम्मिश्र राशियों एवं उनके बीजगणित का अध्ययन किया। सम्मिश्र राशियों के लिये डी मायवर प्रमेय तथा इसके अनुप्रयोग द्वारा अRक प्रश्नों को हल किया। इसी इकाई में आपR सम्मिश्र राशियों के लिये चरघातांकी श्रेणियों, अतिपरवलयिक फलनों एवं लघुगुणक सम्बन्धी सूत्रों का निष्पादन किया।

## 1.12 शब्दावली

| | |
|---|---|
| सम्मिश्र संख्याएँ | Complex number |
| सम्मिश्र संयुग्मी | Complex conjugate |
| मापांक | Modulus |
| वास्तविक अऋणात्मक | Real nonnegative |

| | |
|---|---|
| आरगैण्ड समतल | Argand plane |
| ध्रुवीय रूप | Polar form |
| कोणांक | Argument |
| आयाम | Amplitude |
| चरघातांकी श्रेणियां | Exponential series |
| आवर्तनांक | Period |
| अतिपरवलयिक फलन | Hyperbolic function |
| अनिधार्य | Indeterminate |
| लघुगुणक | Logarithm |
| बहु मानीय | Many valued |

## 1.13 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

**स्वमूल्यांकन प्रश्न -1**

1. (-10, 9)  2. (-1, 47)  3. $\left(\frac{-2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$

4. -arg(z)  5. $\arg(z_1) - \arg(z_2)$

6. वास्तविक  7. वास्तविक  8 काल्पनिक

9. y=0

**स्वमूल्यांकन प्रश्न -2**

$1. \cos n\alpha - i\sin n\alpha \quad 2. \cos n\alpha - i\sin n\alpha$

$3. \cos n\alpha + i\sin n\alpha \quad 4. \cos 7\alpha + i\sin 7\alpha$

$5. \cos\theta + i\sin\theta \quad 6. \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$

$7. -1$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न -3**

$1. x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ....... \quad 2. 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ........$

$3. 2\pi ni \quad 4. n\pi i$

$5. 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + ........$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न -4**

$1. 1 + (\alpha + i\beta) + 2\pi ni \quad 2. \frac{1}{2}\log(\alpha^2+\beta^2) + i\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}$

$3. (2n+1)\pi i \quad 4. \log\beta + \frac{1}{2}\pi i$

$5. 2i\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}$

## 1.14 अभ्यास प्रश्न

1. सरल कीजिये'

$$\frac{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^5 (\cos\theta - i\sin\theta)^3}{(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)^7 (\cos 2\theta - i\sin 2\theta)^5}$$

(उत्तर: $\cos 13\theta - i\sin 13\theta$ )

2. यदि $2\cos\alpha = a + \frac{1}{a}, 2\cos\beta = b + \frac{1}{b}$ तथा

$2\cos\gamma = c + \frac{1}{c}$ तब प्रदर्शित कीजिये कि

$$abc + \frac{1}{abc} = 2\cos(\alpha + \beta + \gamma)$$

3. प्रदर्शित कीजिये कि

$$\frac{(1 + \cos\theta + i\sin\theta)^n}{(1 + \cos\theta - i\sin\theta)^n} = \cos\theta + i\sin\theta$$

4. वह समीकरण ज्ञात कीजिये जिसके मूल समीकरण $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$ के मूलों की n वीं घात हैं।

(उत्तर: $x^2 - 2x\cos n\theta + 1 = 0$ )

5. सिद्ध कीजिये कि

$$\sin(n\theta + \alpha) - e^{i\alpha}\sin n\theta = e^{-in\theta}\sin\alpha$$

6. सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{1}{2}(\sin jx + \sin x) = x + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \dots\dots..$$

7. सिद्ध कीजिये कि

$$\sinh x + \sinh y = 2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

8. वास्तविक एवं काल्पनिक भागों में विभक्त कीजिये:

$(i)\sec(\alpha + i\beta)$

$(ii)\cot(\alpha + i\beta)$

(उत्तर: $(i)\left(\frac{2\cos\alpha\cosh\beta}{\cos 2\alpha\cosh 2\beta}\right) + i\left(\frac{2\sin\alpha\sinh\beta}{\sin 2\alpha\sinh 2\beta}\right)$

$(ii)\left(\frac{\sin 2\alpha}{\cosh 2\beta - \cos 2\alpha}\right) + i\left(\frac{\sin 2\beta}{\cosh 2\beta - \cos 2\alpha}\right)$)

9. वास्तविक एवं काल्पनिक भागों में विभक्त कीजिये -

$(i)\, e^{\sin(x+iy)}$

$(ii)\, e^{\cosh(x+iy)}$

(उत्तर: $(i)\, e^{\sin x \cosh y}\left[\cos\left(\cos x \sinh y\right)+i\sin\left(\cos x \sinh y\right)\right]$

$(ii)\, e^{\cosh x \cos y}\left[\cos\left(\sinh x \sin y\right)+i\sin\left(\sinh x \sin y\right)\right]$)

10. सिद्ध कीजिये कि $i\log\dfrac{\alpha-i}{\alpha+i}=\pi-2\tan^{-1}\alpha$

11. सिद्ध कीजिये कि $\log_e\left(1+i\tan\alpha\right)=\log_e\sec\alpha+i\alpha$

12. सिद्ध कीजिये कि $\log\left(\dfrac{\pi}{4}+i\dfrac{\theta}{2}\right)=i\tan^{-1}\left(\sinh\theta\right)$

# इकाई 2 : सम्बन्ध, फलन, फलनों की सीमा एवं सांतत्य (Relations, Functions, Limit and Continuity of functions)

**इकाई की रूप रेखा**

## 2.0 उद्देश्य

प्रस्तुत इकाई में आप एक अरिक्त समुच्चय से किसी दूसरे अरिक्त समुच्चय में (अथवा स्वयं पर) द्विचर सम्बंध के बारे में पढ़ेंगे। गणित में फलनों (functions) का अत्यन्त महत्व है। फलन की विस्तृत व्याख्या के साथ विभिन्न प्रकार के फलनों का भी आप अध्ययन करेंगे। इकाई के अन्त में फलन की सीमा तथा किसी बिन्दु पर उसका सांतत्य के बारे में बताया गया है। जिनका अध्ययन गणित विषय को आगे बड़ाR में अत्यन्त महत्वपूर्ण है।

## 2.1 प्रस्तावना

प्रस्तुत इकाई में समुच्चयों के अवयवों में द्विचर सम्बन्धों तथा इन सम्बन्धों के नाना प्रकारों का वर्णन किया गया है। विशिष्ट कोटि के सम्बन्धी जिन्हें फलनों के रूप में परिभाषित किया जा सकता है, फलनों के रूप में अध्ययन हेतु प्रस्तुत किया गया है। फलनों के प्रकार,संयुक्त फलन इत्यादि का वर्णन किया गया है। फलन की सीमा की प्रचलित परिभाषा देते हुये अRक प्रकार के फलनों की सीमाओं से सम्बन्धित प्रश्नों को हल किया गया है। अन्त में किसी बिन्दु पर फलन के सांतत्य की परिभाषा तथा सम्बन्धित प्रश्नों को हल किया गया है।

## 2.2 सम्बन्ध (Relations)

सम्बन्ध की औपचारिक परिभाषा देR से पूर्व निम्न कुछ समुच्चयों का पुन : अध्ययन अत्यन्त आवश्यक है।

**क्रमित समुच्चय (Ordered set)** भिन्न तथा विभेदी (distinguishable) वस्तुओं के किसी अक्रमित (unordered) संग्रह को एक समुच्चय के रूप में परिभाषित किया जाता है। जब किसी समुच्चय के अवयवों को लिखा जाता है तब जिस क्रम में उन्हें सूची बद्ध किया जाता है, वह अर्थहीन होती हैं। जैसे समुच्चय {1,2,3} तथा {1,3,2} एक ही समुच्चय को निरूपित करते हैं। परन्तु जब समुच्चय के अवयवों को एक विशेष क्रम के अन्तर्गत सूचीबद्ध किया जाता है -तब समुच्चय एक **क्रमित समुच्चय (Ordered set)** कहलाता है अत : क्रमित समुच्चय भिन्न वस्तुओं का एक क्रमित संग्रह कहा जा सकता है। उदाहरण के लिये वर्ष के महीनों का समुच्चय S={जनवरी,फरवरी, मार्च,................ नवम्बर, दिसम्बर} एक क्रमित समुच्चय है।

**क्रमित युग्म (Ordered pair)** एक दिये हुये क्रम में बद्ध, अवयवों के युग्म का समुच्चय,
एक क्रमित युग्म (Ordered pair) कहलाता है। अत : अवयवों a तथा b का युग्म, जिसमें a प्रथमतथा b द्वितीय अवयव है, एक क्रमित युग्म है जिसे (a,b) द्वारा निरूपित किया जाता हैं इसी प्रकार युग्म, जिसमें b प्रथम तथा a द्वितीय अवयव है, एक अन्य क्रमित युग्म है जिसे (b,a) द्वारानिरूपित करते है। अत : (a,b) और (b,a) दो भिन्न क्रमित युग्म हैं।

स्पष्ट है कि $(a,b) \neq (b,a)$ यदि और केवल यदि $a \neq b$

अत : $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c$ तथा $b=d$

आवश्यक नहीं कि क्रमित युग्म में उपस्थित दोनों अवयव भिन्न ही हों। जैसे (a,a) एक क्रमित युग्म है, जिसमें प्रथम तथा द्वितीय दोनों अवयव a हैं।

**समुच्चयों का कार्तीय गुणनफल** दो समुच्चयों A तथा B का कार्तीय गुणनफल (Cartesian product) सभी क्रमित युग्मों (a,b) का समुच्चय है, जहाँ $a \in A$ तथा $b \in B$.A तथा B के कार्तीय गुणनफल को $A \times B$ द्वारा निरूपित करते हैं। अत :

$A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$

उदाहरण के लिये यदि A={a,b,c} तथा B={x,y} तब

$A \times B = \{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$

तथा $B \times A = \{(x,a),(x,b),(x,c),(y,a),(y,b),(y,c)\}$

स्पष्टत : $A \times B \neq B \times A$. यदि A=B तब $A \times B$ को $A^2$ है, द्वारा निरूपित किया जाता है। समुच्चयों A तथा B के कार्तीय गुणनफल की परिभाषा से स्पष्ट है कि यदि

(i) A अथवा B अथवा दोनों रिक्त समुच्चय हैं, तब $A \times B$ एवं $B \times A$ दानों ही रिक्त समुच्चय होते हैं।

(ii) A अथवा B अथवा दोनों अपरिमित समुच्चय हैं, तब $A \times B$ एवं $B \times A$ है दानों ही अपरिमित समुच्चय होते हैं।

**सम्बन्ध की परिभाषा (Definition of relations)** माना A तथा B कोई दो अरिक्त समुच्चय हैं। तब कार्तीय गुणनफल $A \times B$ का कोई भी उपसमुच्चय, समुच्चय A से समुच्चय B में एक द्विआधारी सम्बन्ध (binary relation)अथवा सम्बन्ध (relation) कहलाता है। इसे प्रतीक रूप में R द्वारा निरूपित किया जाता है।

अत: R समुच्चय A से समुच्चय B में एक सम्बन्ध है, जो कार्तीय गुणनफल $A \times B$ के क्रमित युग्मों (a,b), $a \in A, b \in B$ का एक समुच्चय है। यदि क्रमित युग्म (a,b) सम्बन्ध R का एक अवयव है, तो इसे aRb द्वारा निरूपित करते हैं। तथा a,b से R-सम्बन्धित है" पढ़ते है। इसी प्रकार यदि $a,b \notin R$ तब इसे aRb द्वारा निरूपित करते है। तथा a,b से R- सम्बंधित नही है" पढ़ते हैं। यदि R समुच्चय A से A में ही एक सम्बन्ध है अर्थात यदि $R \subseteq A \times A$ तब हम कहते हैं, कि R समुच्चय है पर एक सम्बन्ध है।

अत: कहा जा सकता है। कि यदि A तथा B दो अरिक्त समुच्चय हैं, तब A से B में कोई सम्बन्ध R है;

$$R = \{(a, b): a \in A, b \in B\}$$

उदाहरण के लिये यदि A={a,b.c} तथा B={1,2} तब क्रमित युग्मों का समुच्चय R={(a,1),(b,1),(b,2),(c,2)} ,चूंकि $A \times B$ का एक उप समुच्चय है, अत: R समुच्चय A से समुच्चय B में एक सम्बन्ध है। यहाँ aR1,bR1,bR2,cR2 परन्तु चूंकि (a,2) $\notin R$ अत: a $\not R$ 2. इसी प्रकार (c,1) $\notin R$ अत: c $\not R$ 1

समुच्चय A से समुच्चय B में किसी सम्बन्ध R में उपस्थित क्रमित युग्मों के सभी प्रथम अवयवों का समुच्चय सम्बन्ध R का प्रान्त (domain) तथा सभी द्वितीय अवयवों का समुच्चय, सम्बन्ध R परिसर (range) कहलाता है।

अत: R का प्रान्त ={a :(a,b) $\in$ R} तथा R परिसर {b: (a,b) $\in$ R}

**उदाहरण 1** माना A={1,3,5,7} तथा B={1,2,3,4, 5,6}. यदि R समुच्चय A से B में कोई सम्बन्ध है, जो निम्न प्रकार परिभाषित है

aRb $\Leftrightarrow$ "a, b को विभाजित करता हैं। " a $\in$ A तथा b $\in$ B

तब सम्बन्ध R को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में प्राप्त कीजिये तथा R का प्रान्त एवं परिसर भी ज्ञात कीजिये।

**हल:** यहाँ R= { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,3),(3,6),(5,5) } तथा R का प्रान्त { 1,3,5} एवं R का परिसर= { 1,2,3,4,5,6 }

**प्रतिलोम सम्बन्ध (Inverse relation)**माना R किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में कोई सम्बन्ध है। तब R का प्रतिलोम जो $R^{-1}$ द्वारा निरूपित होता है. समुच्चय B से समुच्चय A में एक सम्बन्ध है, तथा उन सभी क्रमित युग्मों (b,a) का समुच्चय है, जिनके लिये (a,b) $\in$ R. अर्थात

$R^{-1}$ ={(b, a): (a, b) $\in$ R}

स्पष्ट है कि (a,b) $\in$ R $\Leftrightarrow$ (b,a) $\in$ $R^{-1}$

**उदाहरण 2** माना A={ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} तथा माना R समुच्चय A पर कोई सम्बन्ध है, जहाँ

(a, b) $\in$ R $\Leftrightarrow$ a+2b=10

(अर्थात aRb $\Leftrightarrow$ a+2b=10)

तब R तथा $R^{-1}$ ज्ञात कीजिये एवं इनके प्रान्त और परिसर बताइये।

**हल** यहाँ, (a,b) $\in$ R $\Leftrightarrow$ a+2b=10 $\Leftrightarrow$ b= $\frac{10-a}{2}$

जहाँ a,b $\in$ A

अब उपरोक्त समीकरण से,

जब a=1 तब b=$\frac{10-1}{2}=\frac{9}{2}$ अत: अवयव 1 $\in$ A समुच्चय A किसी भी अवयव से R-सम्बन्धित नही है। इसी प्रकार अवयव 3,5,7 तथा 9 $\in$ A भी A के किसी अवयव से R-सम्बन्धित नहीं हैं।

पुन: जब a=2 तब $\frac{10-2}{2}=4\in A$ अत: (2,4) $\in$ R. इसी प्रकार

जब a=4 तब $\frac{10-4}{2}=3\in A$ अत: (4,3) $\in$ R

जब a=6 तब $\frac{10-6}{2}=2\in A$ अत: (6,2) $\in$ R

तथा जब a=8 तब $\frac{10-8}{2}=1\in A$ अत: (8,1) $\in$ R

अतएव R={(2,4),(4,3),(6,2),(8,1)}

फलस्वरूप $R^{-1}$={(4,2), (3,4),(2,6),(1,8)}

**R** तथा $R^{-1}$ की परिभाषा से हम देखते हैं कि

**R** का प्रान्त = {2, 4, 6, 8} = $R^{-1}$ का परिसर

**R** का परिसर {1, 2, 3, 4} = $R^{-1}$ का प्रान्त

## 2.3 सम्बन्धों के प्रकार

**तत्समक सम्बन्ध (Identity relations)**

माना A एक अरिक्त समुच्चय है। तब A $\times$ A का उपसमुच्चय $I_A$={(a,a); $\forall$ a $\in$A} समुच्चय A पर तत्समक सम्बन्ध कहलाता है। तत्समक सम्बन्ध को विकर्ण सम्बन्ध (diagonal relation) भी कहते हैं।

उदाहरण के लिए यदि A={a,b, c,d}, तब A पर परिभाषित सम्बन्ध

$R_1$= {(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)}

Aपर तत्समक सम्बन्ध है, जबकि सम्बन्ध $R_2$= {(a, a), (c, c), (d, d)} पर तत्समक सम्बन्ध नहीं है चूंकि (b, b) $\notin R_2$

इसी प्रकार सम्बन्ध $R_3$={(a,a),(a,b),(b,b),(c,c),(d,d)}, A पर तत्समक सम्बन्ध नही है, चूंकि (a,b) $\in R_3$

**स्वतुल्य सम्बन्ध (Reflexive relations)**

अरिक्त समुच्चय A पर कोई सम्बन्ध R एक स्वतुल्य सम्बन्ध कहलाता है यदि प्रत्येक a $\in$A के लिये (a,a) $\in$R अर्थात प्रत्येक a $\in$A के लिये aRa स्पष्ट है। कि A पर सम्बन्ध R स्वतुल्य नहीं है यदि कोई अवयव a $\in$A इस प्रकार है कि (a,a) $\notin$R

उदाहरण के लिए समुच्चय A={a,b, c,d} पर परिभाषित सम्बन्ध $R_1$ ={(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d)} एक स्वतुल्य सम्बन्ध है चूंकि प्रत्येक a $\in$A के लिये (a,a) $\in R_1$ जबकि सम्बन्ध $R_2$={(a,a),(a,b),(a,d),(b,a),(b,b),(c,d),(d,b),(d,d), A पर एक स्वतुल्य सम्बन्ध नहीं है चूंकि c $\in$A इस प्रकार है कि (c,c) $\notin R_2$ इसी प्रकार सार्वत्रिक सम्बन्ध

$R_3$ ={(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),(c,a),(c,b),(c,c),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c),(d,d)} A पर स्वतुल्य सम्बन्ध है।

स्वतुल्य सम्बन्ध की परिभाषा से स्पष्ट है कि तत्समक सम्बन्ध सदैव स्वतुल्य सम्बन्ध होता है जबकि स्वतुल्य सम्बन्ध आवश्यक नहीं कि तत्समक सम्बन्ध हो। जैसे कि उपरोक्त उदाहरण में A पर परिभाषित सम्बन्ध $R_1$ स्वतुल्य तो है परन्तु तत्समक नहीं।

**सममित सम्बन्ध (Symmetric relations)**

अरिक्त समुच्चय A पर परिभाषित सम्बन्ध R एक सममित सम्बन्ध कहलाता है यदि a,b $\in A$ के लिये (a,b) $\in$ R $\Rightarrow$ (b,a) $\in$ R (अर्थात aRb $\Rightarrow$ bRa)

उदाहरण के लिये समुच्चय A={1,2,3,4} पर परिभाषित सम्बन्ध

$R_1$ ={(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)} एक सममित सम्बन्ध है, चूंकि यदि (a,b) $\in R_1$ तब (b,a) $\in R_1$

**संक्रामक सम्बन्ध (Transitive relations)**

अरिक्त समुच्चय A पर परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक संक्रामक सम्बन्ध कहलाता है यदि (a,b) $\in R$, (b,c) $\in R \Rightarrow$ (a,c) $\in R$ अर्थात aRb तथा bRc $\Rightarrow$ aRc;a,b,c $\in A$ कहा जा सकता है कि A पर परिभाषित सम्बन्ध R संक्रामक नहीं है यदि अवयव a,b,c $\in A$ इस प्रकार हैं कि (a,b) $\in$ R तथा (b,c) $\in$ R परन्तु (a,c) $\notin$ R

उदाहरण के लिये प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर परिभाषित सम्बन्ध R जहाँ (a,b) $\in$ R $\Leftrightarrow$ a,b को विभाजित करता है, a,b $\in$ N

N पर एक संक्रामक सम्बन्ध है, चूंकि

प्राकृत संख्याओं में a,b को विभाजित करता है अर्थात aRb या (a,b) $\in$ R व b,c को विभाजित करता है अर्थात bRc या (b,c) $\in$ R, तब a,c को भी विभाजित करेगा अर्थात aRc या (a,c) $\in$ R

इस प्रकार(a,b) $\in$ R, (b,c) $\in$ R $\Rightarrow$ (a,c) $\in$ R. अतः यह सम्बन्ध एक संक्रामक सम्बन्ध है।

**तुल्यता सम्बन्ध (Equivalence relations)**

अरिक्त समुच्चय A पर परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध कहलाता है यदि R (i) स्वतुल्य (ii) सममित तथा (iii) संक्रामक है।

उदाहरण के लिये पूर्णाकों के समुच्चय Z परिभाषित सम्बन्ध R जहाँ

(a,b) $\in$ R $\Leftrightarrow$ a-b एक सम पूर्णाक है

अर्थात aRb $\Leftrightarrow$ a-b एक सम पूर्णाक है ;a,b $\in$ Z

Z पर एक तुल्यता सम्बन्ध है, चूंकि

(i) R स्वतुल्य है माना a $\in$ Z, तब a-a=0 जो कि एक सम पूर्णाक है।

अतः (a,a) $\in$ R, $\forall$ a $\in$ Z

अर्थात R स्वतुल्य है।

(ii) सममित है : चूंकि (a,b) $\in$ R, $\Rightarrow$ a-b एक सम पूर्णाक है, a,b $\in$ Z,

$\Rightarrow$ (b,a) $\in$ R, $\Rightarrow$ b-a एक सम पूर्णाक है।

अतः (a,b) $\in$ R $\Rightarrow$ (b,a) $\in$ R :a,b $\in$ Z

अर्थात R सममित है।

(iii) R संक्रामक है.:माना a,b,c $\in$ z तब (a,b) $\in$ R तथा (b,c) $\in$ R

$\Rightarrow$ a-b सम पूर्णाक है तथा b-c सम पूर्णाक है।

$\Rightarrow$ a-b=2m तथा $\Rightarrow$b-c=2n जहाँ m तथा n पूर्णाक हैं।

$\Rightarrow$ (a-b)+ (b-c) =2m+2n

$\Rightarrow$ a-c=2m (m+n) जो कि एक सम पूर्णाक है। अत: a-c एक समपूर्णाक है।

$\Rightarrow$(a, c) $\in$R

अर्थात R संक्रामक है।

अतएव R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

**प्रतिसममित सम्बन्ध (Anti-symmetric relations)**

अरिक्त समुच्चय A पर परिभाषित कोई सम्बन्ध R. एक प्रतिसममित सम्बन्ध कहलाता है यदि किन्ही भी दो अवयवों a,b $\in$A के लिये (a,b) $\in$R तथा (b,a) $\in$R$\Rightarrow$ a=b अर्थात aRb तथा bRa$\Rightarrow$a=b. अत: कहा जा सकता है। कि यदि a,b $\in$A इस प्रकार है। कि a $\neq$b तब (a,b) $\in$R$\Rightarrow$(b,a)$\notin$R तथा (b,a) $\in$R$\Rightarrow$(a,b) $\notin$R

उदाहरण के लिये प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर परिभाषित सम्बन्ध R, जहाँ

(a,b) $\in$ R$\Leftrightarrow$ a, b को विभाजित करता है, a, b$\in$N

समुच्चय N पर एक प्रतिसममित सम्बन्ध है, चूंकि किन्हीं भी दो प्राकृत संख्याओं a तथा b के लिये यदि a,b को विभाजित करता है तथा b,a को विभाजित करता है अर्थात (a,b) $\in$R तथा (b,a) $\in$R तब a=b. यह देखा जा सकता है कि उपरोक्त सम्बन्ध R पूर्णाकों के समुच्चय Z पर एक प्रति सममित सम्बन्ध नहीं है चूंकि किसी भी अशून्य पूर्णाक a$\in$Z के लिए a,-a को विभाजित करता है तथा -a,a को विभाजित करता है, अर्थात्

(a,-a) $\in$R तथा (-a, a) $\in$R परन्तु a$\neq$-a

**आंशिक क्रम सम्बन्ध (Partial order relations)**

अरिक्त समुच्चय A पर परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक आंशिक क्रम सम्बन्ध कहलाता है यदि (i) R स्वतुल्य है (ii) R प्रतिसममित है तथा (iii) R संक्रामक है।

उदाहरण के लिये प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर परिभाषित सम्बन्ध R जहाँ (a,b) $\in$R $\Leftrightarrow$ a,b ,को विभाजित करता है ;a,b$\in$N एक आंशिक क्रम सम्बन्ध है।

**पूर्ण क्रम सम्बन्ध (Total order relations)**

अरिक्त समुच्चय A पर परिभाषित कोई सम्बन्ध R एक पूर्ण क्रम सम्बन्ध कहलाता है, यदि

(i) R,A पर एक आंशिक क्रम सम्बन्ध है तथा

(ii) A के प्रत्येक दो अवयवों.a तथा b के लिये (a,b)$\in$R, अथवा (b,a)$\in$R. अथवा a=b

उदाहरण के लिये प्राकृत संख्याओं के समुच्चय N पर परिभाषित सम्बन्ध R जहाँ (a,b)$\in$R$\Leftrightarrow$ a$\leq$b:a,b$\in$N, एक पूर्ण क्रम सम्बन्ध है चूंकि यह सम्बन्ध स्वतुल्य है, प्रतिसममित है, संक्रामक है तथा प्रत्येक दो प्राकृत संख्याओं a,b$\in$N के लिये a<b या b<a या a=b एक अन्य उदाहरण के रूप में समुच्चय A ={1,2,3,4,5,6,12,24,36} पर सम्बन्ध R जहाँ aRb $\Leftrightarrow$ a,b को विभाजित करता है; a,b$\in$A

A पर एक पूर्णक्रम सम्बन्ध नहीं है, चूंकि R, स्वतुल्य, प्रतिसममित तथा संक्रामक है परन्तु प्रत्येक दो अवयवों

a, b $\in$ A के लिये a, b को विभाजित करता है अथवा b, a को विभाजित करता है अथवा a=b सत्य नहीं है, जैसे 2 तथा 3 $\in$ A इस प्रकार है कि न तो 2, 3 को विभाजित करता है, न ही 3, 2 को तथा साथ ही 2 $\neq$ 3.

**उदाहरण 3** वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर कोई सम्बन्ध S जहाँ (a,b) $\in$ S $\Leftrightarrow$ 1+ab>0, a,b $\in$ R स्वतुल्य एवं सममित है परन्तु संक्रामक नहीं।

हल: चूंकि सभी a $\in$ R के लिये

1+aa=1+ $a^2$ >0, अतः (a, a) $\in$ S $\forall$ a $\in$ R

अर्थात् सम्बन्ध S स्वतुल्य है।

माना (a,b) $\in$ S जहाँ a,b $\in$ R

तब (a,b) $\in$ S $\Rightarrow$ 1+ab>0

$\Rightarrow$ 1+ba>0

$\Rightarrow$ (b, a) $\in$ S

अतः S सममित है।

यह प्रदर्शित करने के लिये कि सम्बन्ध S संक्रामक नहीं हैं

चूंकि $1+1.\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}>0\ ;1,\frac{1}{2}\in R$

तथा $1+(\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})=1-\frac{1}{3}>0\ ;\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\in R$

अतः $(1,\frac{1}{2})$ $\in$ S तथा $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ $\in$ S

परन्तु $(1,\frac{1}{2})$ $\in$ S, $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$ $\in$ S $\Rightarrow$ $\left(1-\frac{1}{3}\right)$ $\notin$ S

(चूंकि $1+1\left(-\frac{3}{2}\right)=1-\frac{3}{2}=\frac{-1}{2}$ जो कि धनात्मक नहीं हैं।)

अतः S संक्रामक नहीं हैं

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1**

1 पूर्णाकों के समुच्चय Z पर सम्बन्ध aRb $\Leftrightarrow$ a+b सम पूर्णाक है, एक ................ सम्बन्ध है।

2 n अवयवों के समुच्चय A पर परिभाषित कुल सम्बन्धों की संख्या =......................

3 तत्समक सम्बन्ध सदैव एक ................................होता है।

4 यदि सम्बन्ध R = $R^{-1}$ तब R एक .................सम्बन्ध होता है।

## 2.4 फलन (Functions)

विशिष्ट प्रकार का सम्बन्ध (Relation) R जो किसी अरिक्त समुच्चय A से किसी अरिक्त समुच्चय B में इस प्रकार परिभाषित है कि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B के किसी अद्वितीय (unique) अवयव B से R- सम्बन्धित है, समुच्चय A से समुच्चय B में फलन (functions) कहलाता है। अत: कहा जा सकता है कि अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में कोई सम्बन्ध R एक फलन f है f यदि कार्तीय गुणनफल $A \times B$ का एक ऐसा उपसमुच्चय है जिसमें क्रमित युग्म इस प्रकार है कि प्रत्येक अवयव $a \in A$ एक और केवल एक ही क्रमित युग्म के प्रथम अवयव के रूप विद्यमान है अर्थात f के किन्ही भी दो भिन्न क्रमित युग्मों के प्रथम अवयव एक नहीं है (अर्थात भिन्न है।) तथा A का प्रत्येक अवयव किसी क्रमित युग्म में उपस्थित है।

स्पष्ट है कि प्रत्येक फलन एक सम्बन्ध तो है परन्तु प्रत्येक सम्बन्ध आवश्यक नहीं कि एक फलन हो।

उदाहरण के लिये माना

$f_1$={ (a,1),(b,1),(c,2),(d,3) }

$f_2$={ (a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,3),(d,4) }

तथा $f_3$={ (a,2),(b,3),(d,1) }

समुच्चय A={a,b, c,d} से समुच्चय B={1,2,3.4} पर सम्बन्ध हैं, तब $f_1$ तो A से B में एक फलन है। परन्तु $f_2$ तथा $f_3$ नहीं चूंकि $f_2$ में. $a \in A$ दो कीमत युग्मों में विद्यमान है जबकि $f_3$ में c अब हम फलन की निम्न प्रचलित परिभाषा देंगे।

**फलन की परिभाषा**

माना A तथा B दो अरिक्त समुच्चय हैं। यदि एक नियम (rule) अथवा संगति (correspondence) "f",A के प्रत्येक अवयव a को B के किसी अद्वितीय अवयव b से सम्बद्ध करे तब f, समुच्चय A से समुच्चय B में एक फलन (functions) अथवा प्रतिचित्रण (mapping) कहलाता है। अवयव $b \in A$ को a का f- प्रतिबिम्ब (f-image) कहते हैं। तथा इसे f(a) द्वारा व्यक्त करते है

संकेत रूप में समुच्चय A से समुच्चय B में किसी फलन को निम्न प्रकार से दर्शाया जाता है:

$$f: A \rightarrow B, \text{ जहाँ } f(a) = b \ \forall a \in A$$

$b \in B$ को $a \in A$ पर फलन f का मान भी कहते हैं। $a \in A$ को b का प्रति-प्रतिबिम्ब (inverse-image) कहते है।

उदाहरण के लिये यदि A={1,2} तथा B={3,6} तब

$f: N \rightarrow N$, जहाँ $f(x) = x^2+2 \ \ \forall x \in A$

समुच्चय A से समुच्चय B में एक फलन है। इसी प्रकार

$f: N \rightarrow N$, जहाँ $f(n) = 2n \ \ \forall n \in N$

धनात्मक पूर्णांकों (प्राकृत संख्याओं) के समुच्चय N पर एक फलन है। यदि f अरिक्त समुच्चय A से A में ही एक फलन हैं तब कहते हैं कि f, अरिक्त समुच्चय A पर एक फलन है।

**फलन का प्रान्त (Domain),सहप्रान्त (Co-domain),तथा परिसर (Range)**

माना f: $A \to B$, जहाँ f(a)=b $\forall a \in A$, समुच्चय A से समुच्चय B में कोई फलन है। तब समुच्चय A, फलन f का प्रान्त (domain) तथा समुच्चय B. फलन f का सह प्रान्त (co-domain) कहलाता है।

प्रान्त A के अवयवों के f प्रतिबिम्बों के समुच्चय को f का परिसर (range) कहते है तथा इसे f(A) द्वारा निरूपित करते हैं।

अत: $f(A)=\{ f(a):a \in A \}$

स्पष्ट है कि $f(A) \subset B$ उदाहरण के लिए यदि

$f: Z \to Z$ जहाँ $f(x) =2x \quad \forall x \in Z$

तब समुच्चय Z, फलन f का प्रान्त तथा सहप्रान्त भी है जबकि f का परिसर है

$f(Z) = \{2x: x \in Z\}$

$= \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6,\}$

= सभी सम पूर्णांकों का समुच्चय।

**दो फलनों की समानता**

दो फलन f तथा g परस्पर समान फलन कहलाते हैं यदि

(a) f का प्रान्त = g का प्रान्त

(b) f का सह प्रान्त = g का सह प्रान्त

तथा (c) f तथा g के उभयनिष्ट प्रान्त के प्रत्येक अवयव प्र के लिये

$f(x) = g(x)$

यदि फलन f तथा g परस्पर समान हैं तब इसे f = g द्वारा व्यक्त किया जाता है। उदाहरण के लिये यदि A= {-1,3} तथा **B**={1,5,9,13,17 }, तब फलन $f : A \to B$ जहाँ $f(x)=x^2 \ \forall x \in A$

तथा $g: A \to B$ जहाँ $g(x)=2x+3 \quad \forall x \in A$ समान फलन हैं। चूंकि $f(-I)=(-1)^2=1$ ;$g(-1)=2(-1)+3=1$

एवं $f(3)=(3)^2=9$ ; $g(3)=2(-1) +3=9$

अत: $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A$

अर्थात f = g.

**उदाहरण 4** माना $f: R \to R$

जहाँ $f(x)= 1$ यदि $x \in Q$

$= -1$ यदि $x \notin Q$

जब कि Q परिमेय राशियों का समुच्चय है तब ज्ञात कीजिये

(a) f (-5), f (5), f ($\sqrt{5}$), f ($\frac{\pi}{2}$)

(b) f के अन्तर्गत समुच्चय R का प्रतिबिम्ब समुच्चय f(R)

(c) $1 \in R$ के प्रति-प्रतिबिम्बों का समुच्चय।

**हल** (a) चूंकि -5 तथा $5 \in Q$

अत: f(-5)=1, f((5)=1

चूंकि $\sqrt{5}$ तथा $\frac{\pi}{2} \in Q$

अत : f($\sqrt{5}$)= -1, f($\frac{\pi}{2}$) = -1

(b) चूंकि प्रत्येक वास्तविक संख्या परिमेय (rational) अथवा अपरिमेय (irrational) होती है, अत : f={ -1,1 }

(c) चूंकि 1 प्रत्येक परिमेय संख्या का f - प्रतिबिम्ब है अत : 1 के प्रति - प्रतिबिम्बों का समुच्चय =Q

**उदाहरण 5** माना f: $R \rightarrow R$, जहाँ $f(x)=e^x$ $\forall x \in R$ तब ज्ञात कीजिये

(a) f के अन्तर्गत R का प्रतिबिम्ब समुच्चय, f(R)

(b) क्या सभी $x,y \in R$ के लिये

f(x+y) = f(x) f(y) सत्य है?

**हल**

(a) चूंकि x के ऋणात्मक अथवा धनात्मक किसी भी मान के लिये $e^x$ सदैव एक धनात्मक मान होता है, अत: दिये हुये फलन की परिभाषानुसार प्रान्त R का f- प्रतिबिम्ब समुच्चय f(R) = सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय, $R^+$

(b) $f(x+y)=e^{e+y}$

$= e^x e^y$

$= f(x) f(y) \quad \forall x,y \in R$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2**

1 यदि f: $R \rightarrow R$, जहाँ $f(x)=x^2+3$ तब

{x: f (x) =28} =................

2 यदि f:$R \rightarrow R$, जहाँ $f(x)=x^2$ तब

{x: f (x) =-4} =................

3 यदि f:$R^+ \rightarrow R$, जहाँ $f(x)=\log_e x$

तथा $R^+$ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तब

$f(xy)= f(x)+f(y) \quad \forall \quad x,y \in R^+$

सत्य है अथवा असत्य?

4 यदि फलन $f(x) =2x^2-1$ तथा g(x)=1 -3x

## 2.5 फलनों के प्रकार (Kinds of functions)

**अचर फलन (Constant functions)**

फलन f: $X \rightarrow Y$, जहाँ f(x)=x $\forall x \in X$ तथा $c \in Y$ एक स्थिरांक है, एक अचर फलन कहलाता है। स्पष्ट हैं कि यदि f एक अचर फलन है, तब f(x) एक एकल समुच्चय (singleton set) होता है।

उदाहरण के लिये फलन $f: X \rightarrow Y$ जहाँ f(x)=sin x, $\forall x \in X$

X = {$\pi$n: n = 0, 1, 2,} एक अचर फलन हैं चूंकि यहाँ f(x) = {0}

**तत्समक फलन (Identity function)**

अरिक्त समुच्चय X पर कोई फलन f: $X \rightarrow y$, जहाँ f(x)=x $\forall x \in X$ एक तत्समक फलन कहलाता है। इसे प्राय : $I_x$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

**एकैकी फलन (one-one functions or Injection)**

फलन f: $X \rightarrow Y$ जहाँ f(x)=X : $\forall x \in X$ एक एकैकी फलन कहलाता है, यदि भिन्न अवयवों $x \in X$, के समुच्चय Y में f- प्रतिबिम्ब भी भिन्न हैं। अर्थात

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$; $x_1$, $x2 \in X$

या $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, $x_1 x_2 \in X$

उदाहरण के लिये f: $N \rightarrow N$ जहाँ f(n)=2n+1 $\forall n \in N$

एक एकैकी फलन है, चूंकि यदि $n_{1,} n_2 \in N$ इस प्रकार हैं कि

$f(n_1) = f(n_2)$, तब

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow 2n_1+1=2n_2+1$

$\Rightarrow n_1 = n_2$

**बहु-ऐकी फलन (Many-one function)**

फलन f: $X \rightarrow Y$ जहाँ f (x)= y, $\forall x \in X$ एक बहु ऐकी फलन कहलाता है यदि दो अथवा अधिक भिन्न अवयव $x \in X$, समुच्चय Y में एक ही अवयव पर प्रतिबिम्बित होते हैं। उदाहरण के लिये फलन f :$R \rightarrow R$, जहाँ f (x) = $x^2$ , $\forall x \in R$ एक

बहु-ऐकी फलन है, चूंकि यदि $x_{1,} x_2 \in R$ तब

$F(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow x_1 = \pm x_2$

अत : $x_1$ तथा $-x_1 \in R$ का एक ही प्रतिबिम्ब है।

**आच्छादक फलन (Onto function or Surjection)**

फलन f: $X \rightarrow Y$, जहाँ f(x) = y, $\forall x \in X$ एक आच्छादक फलन कहलाता है, यदि प्रत्येक y $\in Y$ के लिये एक अवयव $x \in X$ इस प्रकार अवश्य है कि f(x) =y

उदाहरण के लिये यदि $X=\left\{\frac{n\pi}{2};n\in Z\right\}$ तथा $Y=\{0,\pm 1\}$, तब फलन f: $X\rightarrow Y$ जहाँ f(x)= cosx, $\forall x\in X$ एक आच्छादक फलन है।

**एकैकी- आच्छादक फलन (One-one function or Bijection)**

यदि फलन f: $X\rightarrow Y$ एकैकी तथा आच्छादक है, तब यह एकैकी-आच्छादक फलन कहलाता है।

**अन्तर्क्षेपी फलन (Into function)**

फलन f: $X\rightarrow Y$, जहाँ f(x)= y, $\forall x\in X$ एक अन्तर्क्षेपी फलन कहलाता है यदि Y में कम से कम एक अवयव इस प्रकार है कि यह किसी भी अवयव $x\in X$ का f- प्रतिबिम्ब नहीं है।

उदाहरण के लिये फलन f: $R\rightarrow R$, जहाँ f(x)= sinx, $\forall x\in R$ एक अन्तर्क्षेपी फलन है, चूंकि सहप्रान्त समुच्चय R में वें सभी अवयव जिनके मान -1 से कम तथा 1 से अधिक है, प्रान्त समुच्चय R किसी भी अवयव x के f-प्रतिबिम्ब नहीं है।

**उदाहरण 6** सिद्ध कीजिये कि फलन f: $Z\rightarrow Z$, जहाँ

(a) f(x)= $x^2+x$, $\forall x\in Z$ बहु-ऐकी अन्तर्क्षेपी है।

(b) f(x)= x- 3, $\forall x\in Z$ एकैकी आच्छादक है।

(c) f(x)= $x^3-x$, $\forall x\in Z$ बहु-ऐकी अन्तर्क्षेपी है।

(d) f(x)= $x^3$ , $\forall x\in Z$ एकैकी अन्तर्क्षेपी है।

**हल:**

(a) यहाँ, $f(x) = x^2+x$, $\forall x\in Z$

माना $x_1,x_2 \in Z$ $x_1 \neq x_2$

तब $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^2+x_1=x_2^2+x_2$

$$\Rightarrow (x_1^2-x_2^2)+(x_1-x_2)=0$$

$$\Rightarrow (x_1-x_2)(x_1+x_2+1)=0$$

$$\Rightarrow x_1=x_2,=-(x_2+1)$$

अत : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$ (जब $x_1 = -(x_2+1)$)

अर्थात f बहुऐकी है।

पुन : सहप्रान्त समुच्चय Z में अनेक अवयव जैसे $1\in Z$ इस प्रकार है कि यह किसी भी $x\in Z$ का f- प्रतिबिम्ब नहीं है। फलस्वरूप f अन्तर्क्षेपी है।

(b) यहाँ $f(x) = x-3$, $\forall x\in Z$

माना $x_1,x_2 \in Z$ तब

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1-3=x_2-3$$

$$\Rightarrow x_1=x_2$$

अत : f एकैकी है। f आच्छादक भी है चूंकि प्रत्येक पूर्णांक $x\in Z$ के लिये एक पूर्णांक $x+3\in Z$ सदैव इस प्रकार है कि

$f(x+3) = (x+3) - 3 = x$

अत : f आच्छादक है।

(c) यहाँ, $f(x) = x^3 - x, \ \forall x \in Z$

चूंकि, $f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$

$f(0) = 0 - 0 = 0$

तथा $f(1) = (1)^3 - 1 = 0$

अत : $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$

अर्थात f बहु-ऐकी है।

पुन : सहप्रान्त समुच्चय Z में अनेक पूर्णाक जैसे $2 \in Z$ इस प्रकार है कि यह किसी भी $x \in Z$ का f- प्रतिबिम्ब नहीं है, अत : f अन्तर्क्षेपी है।

(d) यहाँ $f(x) = x^3, \ \forall x \in Z$

चूंकि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 = x_2^3$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

अत: f एकैकी है।

पुन: $2 \in Z$ पुन: Z के किसी भी अवयव का f प्रतिबिम्ब नहीं है,

अत: f अन्तर्क्षेपी है।

**उदाहरण 7** दर्शाइये कि यदि $A = \{x: -1 \le x \le 1\}$, तब फलन $f : A \rightarrow A$, जहाँ $f(x) = \sin \pi x, \ \forall x \in A$ एकैकी आच्छादक है।

**हल**: यहाँ $f(x) = \sin \pi x, \ \forall x \in A$

माना $x_1, x_2 \in A$ तब

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sin \pi x_1 = \sin \pi x_2$

$\Rightarrow \pi x_1 = \pi x_2 \ (\because -1 \le x_1, x_2 \le 1)$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

अत: f एकैकी है।

पुन: चूंकि प्रत्येक $x \in A$ का f- प्रतिबिम्ब -1 तथा 1 के मध्य ही कोई राशि है, अत: f का परिसर

F (A) =A **(सहप्रान्त), अतएव** f **आच्छादक** है।

**उदाहरण 8 :** यदि फलन $f: Q - \{1\} \rightarrow Q$ जहाँ $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1} \quad \forall x \in Q - \{1\}$

तब सिद्ध कीजिये कि f एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं।

**हल** यहाँ $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1} \quad \forall x \in Q - \{1\}$

माना $x_1, x_2 \in Q - \{1\}$

तब $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1+3}{x_1-1} = \frac{2x_2+3}{x_2-1}$

$$(2x_1+3)(x_2-1) = (2x_2+3)(x_1-1)$$

$$\Rightarrow -2x_1+3x_2 = -2x_2+3x_1$$

$$\Rightarrow 5x_1 = 5x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

अर्थात् f एकैकी है।

पुन: प्रत्येक $y \in Q$ के लिये

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{2x+3}{x-1} = y$$

$$\Rightarrow 2x+3 = (x-1)y$$

$$\Rightarrow x(y-2) = y+3$$

$$x \Rightarrow \frac{y+3}{y-3}$$

अर्थात $y = 2 \in Q$ इस प्रकार है कि यह किसी भी $x \in Q - \{1\}$ का f- प्रतिबिम्ब नहीं है। अत: f आच्छादक नहीं है।

## 2.6 संयुक्त फलन (Composite functions)

माना f: $X \rightarrow Y$,ज़हाँ $f(x)=y \quad \forall x \in X$ तथा $g:Y \rightarrow Z$, जहाँ = $g(y)=z \quad \forall y \in Y$ क्रमश: समुच्चय X से समुच्चय Y तथा समुच्चय Y से समुच्चय Z में कोई दो फलन हैं। तब समुच्चय X से समुच्चय Z में परिभाषित फलन

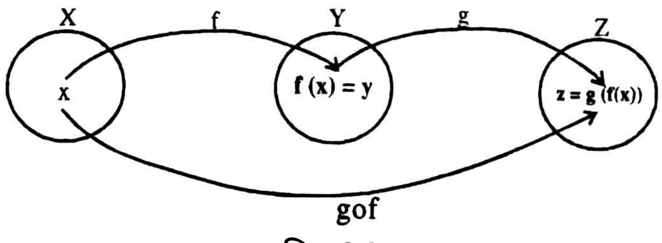
gof: $X \rightarrow Z$

जहाँ $(gof)(x)=g[f(x)]$

$=g(y) = z \quad \forall x \in X$

फलनों f तथा g का संयोजन (composition) कहलाता हैं

अत: संयुक्त फलन gof के अन्तर्गत प्रत्येक $x \in X$ का gof- प्रतिबिम्ब समुच्चय Z का कोई अवयव z है।




**चित्र 2.1**

उदाहरण के लिये माना f: $R \rightarrow R$, जहाँ $f(x) = x^3+3 \quad \forall x \in R$ तथा g: $R \rightarrow R$, जहाँ $g(x) = x - 5 \quad \forall x \in R$ फलन हैं। तब f तथा g का संयुक्त फलन है

gof : $R \to R$ जहाँ (gof) (x) =g [f(x)]

$$= g\left[x^2+3\right]$$

$$= \left(x^2+3\right)-5$$

$$= x^2-2$$

इसी प्रकार g तथा f का संयुक्त फलन है

fog: $R \to R$, जहाँ (fog) (x) =f [g(x)]

$$= g\left[x-5\right]$$

$$= \left(x-5\right)^2+3$$

$$= x^2-10x+28$$

यह स्पष्ट है कि सामान्यत: gof $\neq$ fog

**उदाहरण 9** यदि h :$X \to Y$,g: $Y \to Z$, तथा f :$Z \to W$, तीन फलन इस प्रकार हैं कि संयुक्त फलन (fog) oh तथा fo (goh) समुच्चय X से समुच्चय W में परिभाषित हैं। तब सिद्ध कीजिये कि (fog) oh = fo (goh) (साहचर्यता गुण)

**हल:**

माना कि $x \in X, y \in Y$, $z \in Z$ तथा $w \in W$ इस प्रकार है किh(x) =y ,g(y)=z तथा f(z)=w तब

$$\left[(fog)oh\right](x) = (fog)\left[h(x)\right]$$

$$= f\left[g\left(h(x)\right)\right]$$

$$= f\left[g(y)\right]$$

$$= f(z) = w \qquad \text{..........(1)}$$

पुन: $\left[fo(goh)\right](x) = f\left[(goh)(x)\right]$

$$= f\left[g\left(h(x)\right)\right]$$

$$= f\left[g(y)\right]$$

$$= f(z) = w \qquad \text{..........(2)}$$

(1) तथा (2) से

$$\left[(fog)oh\right](x) = \left[fo(goh)\right](x) \quad \forall x \in X$$

अर्थात $(fog)oh = fo(goh)$

**उदाहरण 10** यदि f : $R \to R$ तथा g : $R \to R$ वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित फलन हैं, जहाँ

f(x) =$x^2$-2x $\forall x \in R$ तथा g(x) =2x-5 $\forall x \in R$, तब

(gof) (x) एवं (fog) (x) ज्ञात कीजिये।

हल:

यहाँ, $(gof)(x) = g\left[f(x)\right]$

$$= g\left(x^2 - 2x\right)$$

$$= 2\left(x^2 - 2x\right) - 5$$

$$= 2x^2 - 4x - 5 \quad \forall x \in R$$

तथा $(fog)(x) = f\left[g(x)\right]$

$$= f(2x - 5)$$

$$= (2x-5)^2 - 2(2x-5)$$

$$= 4x^2 - 24x + 35 \quad \forall x \in R$$

## 2.7 प्रतिलोम फलन (Inverse functions)

माना f: $X \rightarrow Y$, जहाँ f(x) = y $\forall x \in X$ एक एकैकी आच्छादक फलन है। तब फलन g: Y $\rightarrow X$ जो y के प्रत्येक अवयव $y \in Y$ हों को समुच्चय X के किसी अद्‌वितीय अवयव $x \in X$ से इस प्रकार सम्बद्ध करता है कि f(x) = y, फलन f का प्रतिलोम फलन कहलाता है इसे $f^{-1}$, द्‌वारा निरूपित किया जाता है। अत: यदि f:$X \rightarrow Y$, जहाँ f(x) = y $\forall x \in X$ कोई एकैकी आच्छादक फलन है तब f का प्रतिलोम फलन हैं

$f^{-1}$: $Y \rightarrow X$ जहाँ $f^{-1}(y)$ =x $\forall y \in Y$ इस प्रकार है कि f(x) = y

उदाहरण के लिये यदि

f: $X \rightarrow Y$ जहाँ f(x) = 2x $\forall x \in X$ कोई एकैकी आच्छादक फलन है, तब f का प्रतिलोम फलन

$f^{-1}$: $Y \rightarrow X$ जहाँ $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ $x \in Y$ है चूंकि f $(\frac{x}{2})$ =2$(\frac{x}{2})$ =x

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 3**

1 यदि f: $R \rightarrow R$ जहाँ $f(x)=x^3+1$

तब $f^{-1}(0)$=.................

2 यदि : $R \rightarrow R$ जहाँ $f(x)=x^3+8$

तब $f^{-1}(19)$=.................

3 यदि f: $R \rightarrow R$ जहाँ f(x)=2x तथा

g: $R \rightarrow R$ जहाँ g(x) =x+2

तब (gof)(1)=.............

## 2.8 फलन की सीमा (Limit of a function)

स्वतन्त्र चर राशि $x \in R$ के किसी फलन f(x) का मान x के किसी विशिष्ट मान a पर f(a) होता है। प्रश्न यह उठता है कि क्या x के प्रत्येक मान के लिये फलन f(x) का मान प्राप्त किया

जा सकता है? इसके लिये फलन $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ लेते हैं, तथा x=2 पर इसका मान प्राप्त करते है। x=2 पर फलन f(x) का मान $f\left(2\right)=\dfrac{2^2-4}{2-2}=\dfrac{0}{0}$ जो कि एक अर्थहीन मान है। अत : कहा जा सकता है। कि चूंकि x=2 पर फलन परिभाषित नहीं है, इसलिये f(2) का मान अर्थहीन है।

**फलन की सीमा की धारणा**

फलन $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-4}{x-2}, x=2$ के अतिरिक्त सभी मानों के लिये परिभाषित है। जब x $\neq 2$ .तब

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=x+2$$

निम्न तालिका से हम देखते है कि जैसे जैसे x, बायीं ओर से अथवा दाहिनी ओर से 2 के समीप आता है. फलन का मान राशि 4 के लगभग समीप पहुँचता है तथा जब x,2 के अत्यन्त समीप है तब x+2 तथा 4 के मध्य अन्तर अत्यन्त कम है। अत : कहा जा सकता है। कि जैसे- जैसे x,2 की ओर अग्रसित होता है वैसे - वैसे f(x) का मान 4 की ओर बढ़ता है. अर्थात f(x) की सीमा 4 है।

| X | 1.25 | 1.5 | 1.75 | 1.8 | 1.875 | 2.03125 | 2.0625 | 2.125 | 2.2 | 2.25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 3.25 | 3.5 | 3.75 | 3.80 | 3.875 | 4.03125 | 4.0625 | 4.125 | 4.2 | 4.25 |

अत : फलन की सीमा को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है जब चर राशि x किसी मान a की और अग्रसर होती है. तब कोई राशि $l$ फलन f(x) की सीमा कहलाती है यदि किसी भी पूर्व निर्धारित सूक्ष्म से सूक्ष्मतर स्वेच्छ

धनात्मक मान $\in$(epsilon) के लिये एक धनात्मक राशि $\delta$(delta) इस प्रकार है कि

$$0<\left|x-a\right|<\delta \Rightarrow \left|f\left(x\right)-l\right|<\in$$

प्रतीक रूप मे इसे लिखते हैं।

$$\lim_{x\to a} f\left(x\right)=l$$

**वाम सीमा एवं दक्षिण सीमा (left limit and right limit)**

जब x,a के बायें पक्ष से a से छोटे मानों को प्राप्त करता हुआ, a की ओर अग्रसित होता है तब यदि फलन f(a) राशि $l$ को प्राप्त करता है, ऐसी स्थिति में राशि $l$, x=a पर फलन f(x) की वाम सीमा कहलाती है। इसे निम्न प्रकार लिखा जाता है

$L\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=l$ या $\lim\limits_{x\to(a-0)} f\left(x\right)=l$ या $\lim\limits_{x\to a^-} f\left(x\right)=l$ तथा $f\left(a-0\right)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

इसी प्रकार जब x,a के दाहिने पक्ष से a से बड़े मानी को प्राप्त करता हुआ, a की ओर अग्रसित होता है, तब यदि फलन f(x) राशि $l$ को प्राप्त करता है. ऐसी स्थिति में राशि $l$, x=a पर

फलन f(x) की दक्षिण सीमा कहलाती है। इसे f(a+0) द्वारा व्यक्त किया जाता है तथा निम्न प्रकार लिखा जाता है

$$R\lim_{x\to a} f(x)=l \text{ या } \lim_{x\to(a+0)} f(x)=l \text{ या } \lim_{x\to a^+} f(x)=l$$

जब x,a की ओर अग्रसित होता है एवं यदि

$f(a-0)=f(a+0)$ तो राशि $l$ फलन f(x) की सीमा कहलाती है।

यदि फलन f(x) तथा g(x) इस प्रकार है कि

$\lim_{x\to a} f(x)=l_1$ तथा $\lim_{x\to a} g(x)=l_2$, तब

$$(a)\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=l_1+l_2$$

$$(b)\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)=l_1l_2$$

$$(c)\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\lim_{x\to a} f(x)\Big/\lim_{x\to a} g(x)=l_1/l_2$$

$(d)\lim_{x\to a}\left[cf(x)\right]=c\lim_{x\to a} f(x)=cl_1$ जहाँ c एक स्थिरांक है।

**कुछ मानक सीमाएँ (Some Standard limits)**

$$(a)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$(b)\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

$$(c)\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$(d)\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

**उदाहरण 11 सीमा ज्ञात कीजिये:**

$$(1)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$(ii)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$(iii)\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a}$$

$$(iv)\lim_{a\to\infty}\frac{\sum n^2}{n^3}$$

$$(v)\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$$

$$(vi)\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}$$

$$(vii)\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{n}{x}\right)^{x}$$

$$(viii)\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$$

$$(ix)\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2-1}+\sqrt{3n^2-2}}{\sqrt{9n^2-5}+\sqrt{4n^2-3}}$$

**हल**

$$(i)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right]\left[\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right]}{x\left[\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left[\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=1$$

$$(ii)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[\sqrt{1+x}-1\right]\left[\sqrt{1+x}+1\right]}{x\left[\sqrt{1+x}+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{x\left[\sqrt{1+x}+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$$

$$(iii)\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2-a^2\right)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\left(x^2+a^2\right)(x+a)(x-a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(x^2+a^2\right)(x+a)$$

$$=\left(a^2+a^2\right)(a+a)=4a^3$$

$$(iv)\lim_{a\to\infty}\frac{\sum n^2}{n^3}=\lim_{a\to\infty}\frac{1^2+2^2+\dots\dots+n^2}{n^3}$$

$$= \lim_{a \to \infty} \frac{\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)}{n^3}$$

$$= \lim_{a \to \infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(1+0)(2+0) = \frac{1}{3}$$

$$(v) \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left( \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots\ldots}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots\ldots \right)$$

$$= 1 - 0 + 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= 1$$

$$(vi) \lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h)}{(1+h)-1}$$

(x=1+h लेने पर)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \ldots\ldots}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left( h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \ldots\ldots \right)$$

यहाँ $= 1 - 0 + 0 \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$= 1$$

$$(vii) \lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{n}{x}\right)^x$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[ 1 + x\left(\frac{n}{x}\right) + \frac{x(x-1)}{2!}\left(\frac{n}{x}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \right]$$

**(द्विपद प्रमेय द्वारा विस्तार करने पर)**

$$= \lim_{x\to\infty}\left[1+n+\frac{n^2}{2!}\left(1-\frac{1}{x}\right)+.........\right]$$

$$=1+n+\frac{n^2}{2!}(1-0)+..........$$

$$=1+n+\frac{n^2}{2!}+.........$$

$$=e^n$$

$$(viii)\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)}{bx\left(\frac{\sin bx}{bx}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a}{b}\left(\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}\right)$$

$$=\frac{a}{b}\left(\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}\right)$$

$$=\frac{a}{b}\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{a}{b}$$

$$(ix)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2n^2-1}+\sqrt{3n^2-2}}{\sqrt{9n^2-5}+\sqrt{4n^2-3}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{3-\frac{2}{n^2}}}{\sqrt{9-\frac{5}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{3}{n^2}}}\right)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2-0}+\sqrt{3-0}}{\sqrt{9-0}-\sqrt{4-0}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न -4**

$$(i)\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=..........$$

$$(ii)\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=..........$$

$$(iii)\lim_{x\to 0}\tan 2x\cot 5x=..........$$

$$(iv)\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+2x-3}\right)=...........$$

$$(v)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}\right)=............$$

$$(vi)\lim_{x\to 0}\left(x\sin x\frac{1}{x}\right)=...........$$

## 2.9 फलन का सांतत्य (Continuity of a function)

फलन f(x), किसी बिन्दु x=a पर संतत (continuous) कहलाता है यदि किसी पूर्वनिर्धारित सूक्ष्म से सूक्ष्म स्वेच्छ धनात्मक राशि $\in$ के लिये एक धनात्मक राशि $\delta$ इस प्रकार है कि

$0\le|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\in$ अर्थात

$$a-\delta<x<a+\delta\Rightarrow f(a)-\in<f(x)<f(a)+\in$$

उपरोक्त को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

फलन f(x) किसी बिन्दु x=a पर संतत (continuous) है, यदि

(i) f(x), x=a पर परिभाषित है

(ii) $\lim_{x\to a}f(x)$ का अस्तित्व है

तथा यह परिमित है एवं

$(iii)\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

अर्थात $f(a-0)=f(a+0)=f(a)$

यदि फलन f (x) किसी बिन्दु x = a पर संतत नहीं है तब यह x = a पर असंतत (discontinuous) कहलाता है।

**उदाहरण 12** ज्ञात कीजिये कि निम्न फलन संगत सम्मुख बिन्दुओं पर संतत हैं अथवा नहीं?

$$(i)\ f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, x\ne 0\\ 0, x=0\end{cases}$$ ; x = 0 पर

$$(ii)\ f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, x\ne 2;\\ 4, x=2\end{cases}$$ ; x = 0 पर

$(iii)\ f(x)=|x|; x=0$ पर

$(iv)\ f(x)=\dfrac{|x|}{x}; x=0$ पर

$(v)\ f(x)=\begin{cases}5x-4, 0<x\le 1\\ 4x^2-3x, 1<x<2\end{cases}$ ; x = 1 पर

$(vi)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{a}-a, 0<x<a\\ 0, x=a\\ a-\dfrac{x^2}{a}; x>a\end{cases}$ ; x = a पर

**हल**

$$(i)\ f(0-0)=\lim_{h\to 0} f(0-h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[(0-h)\left(\sin\frac{1}{0-h}\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(h\sin\frac{1}{h}\right)$$

=0 (कोई राशि जो -1 तथा 1 के मध्य स्थित है)

=0

**इसी प्रकार** $f(0+0)=\lim_{h\to 0} f(0+h)$

$$=\lim_{h\to 0}\left[(0+h)\left(\sin\frac{1}{0+h}\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(h\sin\frac{1}{h}\right)$$

= 0

पुन: दिया है की f(0)=0. अत: f(0-0) =f(0+0) = f(0) अर्थात दिया हुआ फलन x = 0 पर संतत है।

$$(ii)\ f(2-0)=\lim_{h\to 0} f(2-h)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{(2-h)^2-4}{(2-h)-2}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{(4-4h+h^2)-4}{-h}\right)$$

$=\lim_{h\to 0}(4-h)$ उत्तर:

$= 4$

इसी प्रकार

$$f(2+0) = \lim_{h\to 0} f(2+h)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(2+h)^2-4}{(2+h)-2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(4+4h+h^2)-4}{-h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}(4+h)$$

$$= 4$$

तथा चूंकि f(2) =4 दिया है, अत:f(2-0) =f(2+0) =f(2) अर्थात फलन x =2 पर संतत है।

$$(iii)\ f(0-0) = \lim_{h\to 0} f(0-h)$$

$$= \lim_{h\to 0}|0-h|$$

$$= \lim_{h\to 0}(h-0) = 0$$

तथा $f(0+0) = \lim_{h\to 0} f(0+h)$

$$= \lim_{h\to 0}|0+h|$$

$$= \lim_{h\to 0}(0+h) = 0$$

पुन: चूंकि $f(0) = |0| = 0$

**इसलिये** f(0-0) = f(0+0) = f(0)

अर्थात फलन x =0 पर संतत है।

$$(iv)\ f(0+0) = \lim_{h\to 0}(0-h)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{|0-h|}{(0-h)}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(h-0)}{(0-h)}\right) = -1$$

**तथा** $f(0+0) = \lim_{h\to 0}(0+h)$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{|0+h|}{(0+h)}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(h+0)}{(0+h)}\right) = 1$$

**चूंकि** f(0-0) $\neq$ f(0+0) अत: दिया हुआ x =0 पर असंतत है।

$$(v)\ f(1-0)=\lim_{h\to 0} f(1-h)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(5(1-h)-4\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}(1-5h)$$
$$=1-0=1$$
**तथा** $f(1+0)=\lim_{h\to 0} f(1+h)$
$$=\lim_{h\to 0}\left(5(1+h)^2-3(1+h)\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(4h^2+5h+1\right)$$
$$=0+0+1=1$$
पुन: f(1) = 5(1) -4 =1

चूंकि f(1-0) =f(1+0) = f(1) अत: फलन x = 1 पर संतत है।

यहाँ $(vi)\ f(a-0)=\lim_{h\to 0} f(a-h)$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{(a-h)^2}{a}-a\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(a-2h+\frac{(h)^2}{a}-a\right)$$
तथा $f(a+0)=\lim_{h\to 0} f(a+h)$
$$=\lim_{h\to 0}\left(a-\frac{a^3}{(a+h)^2}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(a-\frac{a^3}{a^2+2ah+h^2}\right)$$
$$=a-\frac{a^3}{a^2+0+0}=0$$
पुन: चूंकि f(a)=0, अत: f(a -0) =f (a+0)= f(a), अर्थात फलन x = a पर संतत है।

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 5**

1 फलन $x\cos\frac{1}{x}$ , x =0 पर ...............है।

2 स्थिरांक फलन (constant function) सदैव .........................होता है।

3 फलन $\sin\frac{1}{x}$ , x =0 पर ...................है।

4 यदि f (a -0) =f (a+0) $\neq$ f (a), तब फलन f (x), x=a पर .................. होता है।

## 2.10 सारांश

प्रस्तुत इकाई में आपने सम्बन्ध की परिभाषा के अतिरिक्त विभिन्न प्रकार के सम्बन्धों का अध्ययन किया। क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में फलन का अध्ययन किया एवं विभिन्न प्रकार के सम्बन्धों को परिभाषित किया। फलन की सीमा एवं सांतत्य का अध्ययन किया तथा सम्बन्धित प्रश्नों को हल किया।

## 2.11 शब्दावली

| | |
|---|---|
| द्विचर सम्बन्ध | Binary relation |
| संयुक्त सम्बन्ध | Composite relation |
| स्वतुल्य | Reflexive |
| सममित | Symmetric |
| संक्रामक | Transitive |
| प्रतिसममित | Antisymmetric |
| तुल्यता सम्बन्ध | Equivalence relation |
| आंशिक क्रम सम्बन्ध | Partial order relation |
| पूर्ण क्रम सम्बन्ध | Total order relation |
| फलन | Function |
| प्रतिचित्रण | Mapping |
| प्रान्त | Domain |
| सहप्रान्त | Co-domain |
| परिसर | Range |
| आच्छादक | Onto |
| अन्तर्क्षेपी | Into |
| सीमा | Limit |
| सांतत्य | Continuity |
| असंतत | Discontinuous |

## 2.12 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

**स्वमूल्यांकन प्रश्न1**

(1) तुल्यता (2) $2^{n^2}$

(3) तुल्यता (4) सममित

**स्वमूल्यांकन प्रश्न 2**

(1) {5} (2) $\phi$

(3) सत्य (4) $\{-2,\frac{1}{2}\}$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न 3**

(1) -1 (2) 3 (3) 4

**स्वमूल्यांकन प्रश्न 4**

(1) 1 (2) e (3) $\frac{2}{5}$

(4) $-\frac{1}{2}$ (5) $\frac{a}{d}$ (6) 0

**स्वमूल्यांकन प्रश्न 5**

(1) संतत (2) संतत

(3) असंतत (4) असंतत

## 2.13 अभ्यास प्रश्न

1 सिद्ध कीजिये कि पूर्णाकों के समुच्चय Z पर सम्बन्ध, $(a,b)\in R \Leftrightarrow a-b$, 5 से भाज्य है, एक तुल्यता सम्बन्ध है।

2 सिद्ध कीजिये कि सम्बन्ध $R \subset N\times N$ जहाँ $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ad = bc; a,b,c,d \in N$, एक तुल्यता सम्बन्ध है।

3 यदि X = R- {2} तथा Y = R - {1}, तब प्रदर्शित कीजिये कि फलन

$f: X \to Y$ जहाँ $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$ $\forall x \in X$ एकैकी आच्छादक है।

4 यदि $f: R\to R$ जहाँ $f(x)=x^2+2$ $\forall x\in R$ तथा $g:R\to R$ जहाँ

$g(x)=1+\frac{1}{x-1}, \forall x \in R$ फलन हैं, तब $(gof)(x)$ एवं $(fog)(x)$ ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : $\frac{x^2+2}{x^2+1}, \frac{3x^2-4x+2}{(1-x)^2}$]

5 सीमाएँ ज्ञात कीजिये :

$(i)\lim_{x\to a}(x-a)\cos\frac{1}{x-a}$ (उत्तर: 0)

$(ii)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ (उत्तर: $\frac{1}{2}$)

$(iii)\lim_{x\to 1}\frac{X^m-1}{X^n-1}$ (उत्तर: $\frac{m}{n}$)

$(iv)\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x\tan 3x}$ (उत्तर: $\frac{4}{3}$)

6 सिद्ध कीजिये कि निम्न फलन संतत है

$(i)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{\sin x}; x\neq 0\\ 2; x=0\end{cases}$ ; x = 0 पर

$(ii)\ f(x)=1+|x-2|$ ; x = 2 पर

$(iii)\ f(x)=\begin{cases}1+x, x\leq 2\\ 5-x, x\geq 2\end{cases}$ ; x = 2 पर

# इकाई: 3 अवकलन (Differentiation)

**इकाई की रूपरेखा**

## 3.0: उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप किसी भी अवकलनीय फलन का उसकी चर राशि के सापेक्ष अवकलन गुणांक ज्ञात कर सकेंगे ।

## 3.1: प्रस्तावना

अवकलन की विधा गणित विषय का एक अत्यंत महत्वपूर्ण अंग है। इस विधा के प्रयोग से अभियांत्रिकी, ज्यामिती आदि से संकलित कई समस्याओं का सामाधान होता है

आपने पूर्व में चर व अचर राशियों के बारे में पड़ा है । इस विषय में आप किसी आश्रित फलन का स्वतंत्र चर राशि के सापेक्ष परिवर्तन की दर ज्ञात करते है । अवकलन की सहायता से दिये हुए वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा व अभिलम्ब की प्रवणता ज्ञात कर सकते है ।

इस अध्याय में आप प्रथम सिद्धान्त से अवकलन गुणांक निकालने की विधि से प्रारंभ करके जटिल प्रश्नों का अवकलन निकालने की विधि का अध्ययन करेंगे ।

## 3.2: अवकलन गुणांक

यदि $y = f(x)$ एक स्वतंत्र चर राशि $x$ का संतत फलन हो, तो $x$ के मान में परिवर्तन होने पर $y$ के मान भी परिवर्तित होता है । $x$ के मान में परिर्वतन को $\delta x$ म् (डेल्टा $x$)से व्यक्त करे तो $y$ के मान में परिर्वतन $\delta y$ (डेल्टा $y$) होगा । $x$ के सापेक्ष $y$ की औसत परिर्वतन की दर $\frac{\delta y}{\delta x}$ से व्यक्त की जा सकती है । यदि $\delta x \to 0$( $\delta x$ शून्य की ओर अग्रसर) हो तो $\delta y \to 0$($\delta y$ शून्य की ओर अग्रसर) होगा । इस प्रकार यदि $\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ विद्‌यमान हो, तो इसे $y$ का $x$ के सापेक्ष अवकल गुणांक कहते है तथा इसे $\frac{dy}{dx}$ से निरूपित किया जाता है ।

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = f'(x)$$

### 3.2.1 संकेतन (Notation)

दिये गये फलन $y = f(x)$ को $x$ के सापेक्ष अवकलन गुणांक को साधारणतया $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{f(x)\}$ या $D\{f(x)\}$ या $\frac{dy}{dx}$ या $f'(x)$ द्‌वारा व्यक्त करते है ।

फलन $y = f(x)$ का $x = a$ पर अवकलन गुणांक को $\left[\frac{d}{dx}\{f(x)\}\right]_{x=a}$ या $f'(a)$ द्‌वारा व्यक्त करते है ।

**टिप्पणी:**

(1) यहाँ $\delta\ x$ का अभिप्राय $\delta$ और $x$ के गुणनफल से नही परन्तु यह $x$ में वृद्धि को व्यक्त करता है ।

(2) $\delta\ x$ का मान चर राशि के मान बढ़ने या घटने के अनुसार धनात्मक या ऋणात्मक होता है ।

(3) $\frac{\delta y}{\delta x}$ और $\frac{dy}{dx}$ अन्तर के अच्छी तरह समझना चाहिए । $\frac{\delta y}{\delta x}$ एक भिन्न हैं जिसके $\delta$ $y$ अंश और हर को एक दूसरे से अलग किया जा सकता हैं परन्तु $\frac{dy}{dx}$ एक भिन्न नहीं है । अपितु $\frac{\delta y}{\delta x}$ भिन्न के सीमान्त मान को प्रकट करने का एक संकेत मात्र है । $dy$ को $dx$ से अलग नहीं किया जा सकता है ।

## 3.3: प्रथम सिद्धान्त से अवकलन (Differentiation of first principle)

अवकलन की परिभाषा से अवकलन गुणांक ज्ञात करने की विधि को प्रथम सिद्धान्त से अवकलन या आदित: अवकलन कहते है । इस सिद्धान्त से अवकलन गुणांक ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित प्रकार क्रियाविधि का प्रयोग करते है ।

I दिये गए फलन $f(x)$ को निम्नलिखित प्रकार लिखिये ।

$$y=f(x)$$

II फलन में $x$ एवं $y$ के स्थान पर क्रमश: $(x+\delta x)$ और $(y+\delta y)$ लिखिये अर्थात्

$$y+\delta = f(x+\delta x)$$

III उपर्युक्त दोनो से $\delta y$ का मान ज्ञात कीजिये अर्थात्

$$\delta y = f(x+\delta x) - f(x)$$

IV दोनो पक्षों में $\delta x$ का भाग देने पर

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

V जब $\delta x \to 0$ (शून्य की ओर अग्रसर) होता है तब उपर्युक्त अनुपात की सीमा ज्ञात कीजिए अर्थात्

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}$$

या $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} = f^{-}(x)$$

उपर्युक्त कार्य विधि से फलन का प्रथम सिद्धान्त की सहायता से अवकलन गुणांक ज्ञात कर सकते है ।

## 3.4 मानक फलनों के प्रथम सिद्धान्त से अवकलन गुणांक ज्ञात करना (To find the differential coefficient of standard function by first principle)

प्रथम सिद्धान्त की सहायता से जटिल फलनों के अवकल गुणांक ज्ञात करना कठिन होता है । यहाँ आप कुछ मानक फलनों का प्रथम सिद्धान्त से अवकलन गुणांक ज्ञात करेंगे ।

### 3.4.1 $x^n$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकल गुणांक ज्ञात करना

I माना कि $y = x^n$

यदि $x$ में वृद्धि $\delta x$ के संगत $y$ में वृद्धि $\delta y$ हो, तो

II $y+\delta y=\left(x+\delta x\right)^n$

III $\therefore \delta y=\left(x+\delta x\right)^n - x^n$

दोनो पक्षों में $\delta x$ का भाग देने पर

IV $$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\left(x+\delta x\right)^n - x^n}{\delta x}=\frac{x^n}{\delta x}\left[\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n-1\right]$$

$\therefore \delta x \to 0$ होने पर $\frac{\delta x}{x}$ का संख्यात्मक मान 1 से कम होगा, अतः $\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n$ का द्विपद प्रमेय से विस्तार करने पर

$$\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{x^n}{\delta x}\left[\left\{1+n.\left(\frac{\delta x}{x}\right)+\frac{n.(n-1)}{\lfloor 2}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2+\cdots\cdots\right\}-1\right]$$

$$\frac{\delta y}{\delta x}=nx^{n-1}\left[1+\frac{n-1}{\lfloor 2}\left(\frac{\delta x}{x}\right)+\cdots\cdots\left(\frac{\delta x}{x}\right)\right]$$ की उच्च घात के पद

अतः $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0} nx^{n-1}\left[1+\frac{(n-1)}{\lfloor 2}\left(\frac{\delta x}{x}\right)+\cdots\cdots\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}nx^{n-1}$$

**अर्थात** $$\frac{dy}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$$

### 3.4.2 $e^x$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकल गुणांक ज्ञात करना

माना कि $y=e^x$

यदि $x$ मे वृद्धि $\delta x$ के संगत $y$ मे वृद्धि $\delta y$ हो, तो

$$y+\delta y=e^{(x+\delta x)}$$

$$\therefore \delta y=e^{(x+\delta x)}-e^x=e^x\left(e^{\delta x}-1\right)$$

$$=e^x\left[\left(1+\delta x+\frac{(\delta x)^2}{\lfloor 2}+\cdots\cdots\right)-1\right]$$

$$\delta y = e^x\left[\delta x + \frac{(\delta x)^2}{\lfloor 2} + \cdots\cdots\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\delta y}{\delta x} = e^x\left[1 + \delta x + \frac{\delta x}{\lfloor 2} + \frac{(\delta x)^2}{\lfloor 3} + \cdots\cdots\right]$$

$$\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} e^x\left[1 + \delta x + \frac{\delta x}{\lfloor 2} + \frac{(\delta x)^2}{\lfloor 3} + \cdots\cdots\right]$$

अतः $\dfrac{dy}{dx} = e^x$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

### 3.4.3 $\log_e x$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकल गुणांक ज्ञात करना

माना कि $y = \log_e x$

यदि $x$ में के संगत वृद्धि $\delta x$ हो, एवं $y$ में वृद्धि $\delta y$ हो तो

$$y + \delta y = \log_e(x + \delta x)$$

$$\therefore \delta y = \log_e(x + \delta x) - \log_e x = \log\left(\frac{x + \delta x}{x}\right)$$

अथवा $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{1}{\delta x}\cdot\log\left(1 + \dfrac{\delta x}{x}\right)$

जब $\delta x \to 0$ हो तो $\left|\dfrac{\delta x}{x}\right| \langle 1$ होगा ।अवकलन

अतः $\dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{1}{\delta x}\left[\dfrac{\delta x}{x} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\delta x}{x}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\delta x}{x}\right)^3 - \cdots\cdots\right]$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{x}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{x}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 - \cdots\cdots\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}\frac{1}{x}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{x}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 - \cdots\cdots\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$$

### 3.4.4 $a^x$ का प्रथम सिद्धान्त के अवकल गुणांक ज्ञात करना

माना कि $y = a^x$

यदि $x$ में वृद्धि $\delta x$ संगत $y$ में वृद्धि $\delta y$ हो, तो

$$y + \delta y = a^{(x + \delta x)}$$

$$\therefore \delta y = a^{(x+\delta x)} - a^x = a^x\left[a^{\delta x} - 1\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^x}{\delta x}\left[\left(1 + \delta x.\log_e a + \frac{(\delta x.\log_e a)^2}{\lfloor 2} + \cdots\cdots\right) - 1\right]$$

या $\dfrac{\delta y}{\delta x} = a^x \log_e a\left(1 + \dfrac{\delta x.\log_e a}{\lfloor 2} + \cdots\cdots \delta x\right)$ की उच्च घात

$\Rightarrow \lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x} = \lim\limits_{\delta x \to 0} a^x \log_e a\left(1 + \dfrac{\delta x.\log_e a}{\lfloor 2} + \cdots\cdots \delta x\right)$ की उच्च घात

$$\frac{dy}{dx} = a^x \log_e a$$

अर्थात $\dfrac{dy}{dx}\left(a^x\right) = a^x \log_e a$

**3.4.5 $\cos x$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकल गुणांक ज्ञात करना**

माना कि $y = \cos x$

यदि $x$ में वृद्धि $\delta x$ के संगत $y$ वृद्धि $\delta y$ हो, तो ।

$$y + \delta y = \cos(x + \delta x)$$

$$\Rightarrow \delta y = \cos(x + \delta x) - \cos x$$

या $\Rightarrow \dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{2\sin\left(x + \dfrac{\delta x}{2}\right)\sin\left(-\dfrac{\delta x}{2}\right)}{\delta x}$ $\quad \left[\cos C - \cos D = 2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{D-C}{2}\right]$

$$\Rightarrow \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin\left(x + \dfrac{\delta x}{2}\right)\sin\left(-\dfrac{\delta x}{2}\right)}{\dfrac{\delta x}{2}}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{(-1)\cdot\sin\left(\dfrac{\delta x}{2}\right)}{\dfrac{\delta x}{2}}$$

$\lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x} = \sin x \cdot (-1)$ $\qquad \therefore \lim\limits_{\delta x \to 0}\left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{\delta x}{2}\right)}{\left(\dfrac{\delta x}{2}\right)}\right) = 1$

अतः $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$

**अर्थात्** $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

### 3.4.6 $\sin x$ का प्रदम सिद्धान्त से अवकल गुणांक ज्ञात करना

माना कि $y = \sin x$

यदि $x$ में वृद्धि $\delta x$ के संगत $y$ में वृद्धि $\delta y$ हो, तो

$$y + \delta y = \sin(x + \delta x)$$

$$\delta y = \sin(x + \delta x) - \sin x \qquad \because \sin C - \sin D$$

$$= 2\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\sin\frac{\delta x}{2} \qquad = 2\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\sin\frac{\delta x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\sin\frac{\delta x}{2}}{\delta x}$$

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \cdot 1$$

अर्थात् $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

### 3.4.7 $\tan x$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकल गुणांक ज्ञात करना

माना कि $y = \tan x$

यदि $x$ में वृद्धि $\delta x$ के संगत $y$ में वृद्धि $\delta y$ हो, तो

$$y + \delta x = \tan(x + \delta x)$$

$$\Rightarrow \delta y = \tan(x + \delta x) - \tan x$$

$$= \frac{\sin(x + \delta x)}{\cos(x + \delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin(x + \delta x)\cos x - \cos(x + \delta x)\sin x}{\cos x \cdot \cos(x + \delta x)}$$

$$= \frac{\sin(x + \delta x - x)}{\cos x.\cos(x + \delta x)} \rightarrow \left(\because \sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B\right)$$

अतः $\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}\frac{\sin\delta x}{\delta x.\cos x.\cos(x + \delta x)}$

$$= \lim_{\delta x \to 0}\frac{\sin\delta x}{\delta x}.\lim_{\delta x \to 0}\frac{1}{\cos x.\cos(x + \delta x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

**3.4.8** $\sec x$ **का प्रथम सिद्धान्त से अवकल गुणांक ज्ञात करना**

माना कि $y = \sec x$

यदि $x$ में वृद्धि $\delta x$ के संगत $y$ में वृद्धि $\delta y$ हों तो

या $y + \delta y = \sec(x + \delta x)$

या $\delta y = \sec(x + \delta x) - \sec x$

$$= \frac{1}{\cos(x+\delta x)} - \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x - \cos(x+\delta x)}{\cos x . \cos(x+\delta x)}$$

$$= \frac{2\sin\left(x + \frac{\delta x}{2}\right)\sin\frac{\delta x}{2}}{\cos x . \cos(x+\delta x)} \qquad \because \cos x - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}{\cos x . \cos(x+\delta x)} . \frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}\frac{\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}{\cos x . \cos(x+\delta x)} . \lim_{\delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x . \cos x} . 1 = \tan x \sec x$$

अर्थात् $\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x . \sec x$

इसी प्रकार हम अन्य त्रिकोणमितीय फलनों के अवकल गुणांक ज्ञात कर सकते है । अत:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\cot x . \operatorname{cosec} x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

**3.4.9** $\sin^{-1} x$ **का प्रथम सिद्धान्त से अवकल गुणांक ज्ञात करना**

माना कि $y = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y$

यदि $x$ मे वृद्धि $\delta x$ के संगत $y$ में वृद्धि $\delta y$ हों तो

$x + \delta x = \sin(y + \delta y)$

$\therefore \delta x = \sin(y+\delta y) - \sin y$

$$= 2\cos\left(y + \frac{\delta y}{2}\right)\sin\frac{\delta y}{2}$$

अतः $\dfrac{\delta y}{\delta x}=\dfrac{2\cos(y+\frac{\delta y}{2})\sin\frac{\delta y}{2}}{\delta y}$

$$\Rightarrow \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\frac{\delta y}{2}}{\cos(y+\frac{\delta y}{2}).\sin\frac{\delta y}{2}}$$

जब $\delta x \to 0$ है तो $\delta y \to 0$

$$\therefore \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}\lim_{\delta y\to 0}\frac{\frac{\delta y}{2}}{\cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right)\sin\frac{\delta y}{2}}$$

$$=\lim_{\delta y\to 0}\frac{\frac{\delta y}{2}}{\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}\lim_{\delta y\to 0}\frac{1}{\cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1.\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \therefore \sin y = x$$

अर्थात् $\dfrac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

इसी प्रकार प्रथम सिद्धान्त से प्रतिलोम वृत्तीय फलनो के अवकल गुणांक निम्न प्रकार प्राप्त कर सकते है।

(i) $\dfrac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right)-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(ii) $\dfrac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\dfrac{1}{1+x^2}$

(iii) $\dfrac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right)=-\dfrac{1}{1+x^2}$

(iv) $\dfrac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(v) $\dfrac{d}{dx}\left(\cos ec^{-1}x\right)=\dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

**उदाहरण - 1** प्रथम सिद्धान्त से का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए ।

हलः-माना कि $y=e^{\sqrt{x}}$

दोनों पक्षों का $\log$ लेने पर

$$\log_e y=\log_e e^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}.\log_e e=\sqrt{x} \because \log_e e=1$$

यदि $x$ में वृद्धि $\delta x$ के संगत $y$ में वृद्धि $\delta y$ के संगत हों, तो

$$\log_e(y+\delta y)=\sqrt{x+\delta x}$$

$$\therefore \log(y+\delta y)-\log y=\sqrt{x+\delta x}-\sqrt{x}$$

या $$\log(1+\frac{\delta y}{y})=\left[\sqrt{\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)}-1\right].\sqrt{x}$$

या

$$\left[\frac{\delta y}{y}-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta y}{y}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{\delta y}{y}\right)^3-\ldots\ldots..\right]=\sqrt{x}\left[1+\frac{1}{2}.\frac{\delta x}{x}+\frac{\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\lfloor 2}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2+\ldots\ldots.-1\right]$$

या $$\frac{\delta y}{y}\left[1-\frac{1}{2}\frac{\delta y}{y}+\frac{1}{3}\left(\frac{\delta y}{y}\right)^2-\ldots\ldots..\right]=\frac{\sqrt{x}.\delta x}{2x}\left[1-\frac{1}{4}\frac{\delta x}{x}+\ldots\ldots..\right]$$

या $$\frac{\delta y}{\delta x}.\frac{1}{y}\left[1-\frac{1}{2}\frac{\delta y}{y}+\frac{1}{3}\left(\frac{\delta y}{y}\right)^2-\ldots\ldots..\right]=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left[1-\frac{1}{4}\frac{\delta x}{x}+\ldots\ldots..\right]$$

जब $\delta x\to 0$ तब $\delta y\to 0$

$$\Rightarrow \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}.\frac{1}{y}\left[1-\frac{1}{2}\frac{\delta y}{y}+\frac{1}{3}\left(\frac{\delta y}{y}\right)^2-\ldots\ldots..\right]=\lim_{\delta x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{x}}\left[1-\frac{1}{4}\frac{\delta x}{x}+\ldots\ldots..\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}.\frac{1}{y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{2\sqrt{x}}=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

**अर्थात्** $$\frac{dy}{dx}\left[e^{\sqrt{x}}\right]=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

## 3.5 अवकलन के लिए मूल नियम (Fundamental Rules for differentiation)

### 3.5.1फलनों के योगफल अथवा अन्तर का अवकल गुणांक

माना कि $y=u\pm v\pm w\pm\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

जहाँ $u,v,w,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$ सभी $x$ के अवकलज्य फलन है एवं $x$ वृद्धि $\delta x$ के संगत $u,v,w,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$ में संगत वृद्धि $\delta u,\delta v,\delta w,\ldots\ldots\ldots.$ हो, तो

$$\therefore y+\delta y=(u+\delta u)\pm(v+\delta v)\pm(w+\delta w)\pm\ldots\ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \frac{\delta y}{\delta x}=\frac{\delta u}{\delta x}\pm\frac{\delta v}{\delta x}\pm\frac{\delta w}{\delta x}\pm\ldots\ldots..$$

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta u}{\delta x}\pm\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta v}{\delta x}\pm\frac{\delta w}{\delta x}\pm.........$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}\pm\frac{dw}{dx}\pm...........$$

अर्थात् $\frac{d}{dx}(u\pm v\pm w\pm.........)=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}\pm\frac{dw}{dx}\pm...........$

**अतः फलनों के बीजीय योगफल का अवकल गुणांक , इन फलनों के अवकल गुणांकों के बीजीय योग के बराबर होता हैं ।**

**3.5.2 दो फलनो के गुणनफल का अवकल गुणांक:-**

माना कि $u$ और $u,v$ के अवकलज्य फलन है और

$y = u\ .v$

यदि $x$ वृद्धि $\delta x$ के संगत $u,v$ में वृद्धियाँ क्रमश. $\delta u,\delta v$ हो तो

$$y+\delta y=\delta y=(u+\delta u)(v+\delta v)$$

$$y+\delta y=uv+u.\delta v+v.\delta u+\delta u.\delta v$$

$$\therefore\delta y=u.\delta v+v.\delta u+\delta u.\delta v$$

$$\Rightarrow\frac{\delta y}{\delta x}=u.\frac{\delta v}{\delta x}+v.\frac{\delta u}{\delta x}+\delta u.\frac{\delta v}{\delta x}$$

जब $\delta x\to 0$ हो तो $\delta u\to 0$, $\delta v\to 0$ क्योंकि $u$ और $v$ अवकलज्य फलन है,

अत : $\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\lim_{\delta x\to 0}\left(u.\frac{\delta v}{\delta x}\right)+\lim_{\delta x\to 0}\left(v.\frac{\delta u}{\delta x}\right)+\lim_{\delta x\to 0}\delta u.\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta v}{\delta x}$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u.\frac{dv}{dx}+v.\frac{du}{dx}$$

अर्थात $\frac{d}{dx}(u.v=u.)=u.\frac{dv}{dx}+v.\frac{du}{dx}$

अर्थात् दो फलनों के गुणनफल का अवकल गुणांक = (प्रथम फलन) $\times$ (द्वितीय फलन का अवकलन गुणांक) + (द्वितीय फलन) $\times$ (प्रथम फलन का अवकलन गुणांक)

**टिप्पणी :**

(1) दो फलनों में से किसी भी एक को प्रथम एवं दूसरे को द्वितीय फलन माना जा सकता है ।

(2) यदि दो से अधिक फलनों को गुणनफल हो, तो एक फलन को लो और शेष को द्वितीय फलन मानकर अवकलन करों और इस क्रिया को बार-बार तब तक दुहराओं जब तक सभी फलनों का अवकलन नहीं हो जायें ।

(3) अचर राशि का अवकल गुणांक सदैव शुन्य होता है अर्थात $\frac{d}{dx}(c)=0$

(4) अचर राशि एवं फलन का अवकल गुणांक अचर राशि और फलन के अवकल गुणांक के बराबर होता है अर्थात् $\frac{d}{dx}[c.f(x)]=c.\frac{d}{dx}[f(x)]$

### 3.5.3 दो फलनों के भागफल का अवकल गुणांक -

मानो कि $u$ और $v, x$ के अवकलज्य फलन है एवं $y = \frac{u}{v} \forall v \neq 0$ है ।

अब $y = \frac{u}{v}$

यदि $x$ में वृद्धि $\delta x$ के संगत $u$ और $v$४ में वृद्धि क्रमशः $\delta u$ और $\delta v$ हो, तो

$$y + \delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v}$$

या $\delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v} - \frac{u}{v}$

$$= \frac{v(u + \delta u) - u(v + \delta v)}{v(v + \delta v)}$$

$$= \frac{v\delta u - u\delta v}{v(v + \delta v)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v.\frac{\delta u}{\delta x} - u.\frac{\delta v}{\delta x}}{v(v + \delta v)}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{v\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right) - u\left(\frac{\delta v}{\delta x}\right)}{v(v + \delta v)}$$

जब $\delta x \to 0$ है तब $\delta u \to 0$ एव $\delta v \to 0$ होगा । अतः

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v.\frac{du}{dx} - u.\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

अर्थात् $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v.\frac{du}{dx} - u.\frac{dv}{dx}}{v^2}$

दो फलनों के भागफल का अवकल गुणांक

$$= \frac{(\text{हर}) \times (\text{अंश का अवकल गुणांक}) - (\text{अंश}) \times (\text{हर का अवकल गुणांक})}{\text{हर का वर्ग}}$$

**उदाहरण 2:** :- $y = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})\left(x - \frac{1}{x}\right)$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल :-**यहाँ $y = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$$= x^{3/2} + x^{1/2} - \frac{1}{x^{1/2}} - \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$y = x^{3/2} + x^{1/2} - x^{-1/2} - x^{-3/2}$$

दोनों पक्षों का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}x^{3/2-1}+\frac{1}{2x}x^{1/2-1}-\left(-\frac{1}{2}\right)x^{(-1/2)-1}-\left(-\frac{3}{2}\right)x^{(-3/2)-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}x^{1/2}+\frac{1}{2x}x^{-1/2}+\frac{1}{2}x^{-3/2}+\frac{3}{2}x^{-5/2}$$

**उदाहरण:-3** $x^2\cos x\log_e x$ का $x$ के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए ।

हल:-माना कि $y=x^2\cos x\log_e x$

दोनों पक्षी का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\cos x.\log_e x\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+x^2\log_e x\frac{d}{dx}(\cos x)+x^2\cos x\frac{d}{dx}(\log_e x)$$

$$=\cos x\log_e x(2x)+x^2\log_e x(-\sin x)+x^2\cos x.\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=2x\cos x\log_e x-x^2.\sin x\log_e x+x\cos x$$

**उदाहरण-** 4 $\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ का $x$ के सापेक्ष मवकलन ज्ञात कीजिए ।

**हल:-**माना $y=\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

दोनों पक्षों का प्र $x$ के सापेक्ष अवकलन करने से पूर्व दिए गए फलन का परिमितीकरण करने पर

$$y=\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\times\sqrt{\frac{1-\sin x}{1-\sin x}}$$

$$y=\frac{1-\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1-\sin}{\cos x}$$

$$y=\sec x-\tan x$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\sec x)-\frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\sec x\tan x-\sec^2 x$$

$$\frac{dy}{dx}=\sec x(\tan x-\sec x)$$

## 3.6: फलन के फलन का अवकल गुणांक ज्ञात करना

## (Different coefficient of a function of a function)

अभी तक आपने ऐसे फलनों का अवकलन किया है जिसमें फलन स्वतंत्र चर एवं आश्रित चर में प्रत्यक्ष सम्बंध था । इस अनुच्छेद मे आप ऐसे फलनों का अवकल गुणांक ज्ञात करेंगे जिनमें आश्रित चर एवं स्वतंत्र चर में सम्बंध प्रत्यक्ष नहीं होकर अन्य मध्यवर्ती फलनों के माध्यम से होता है ।

माना कि $y = f\ (u)$ और $u = g(x)$ अर्थात यहाँ $y, u$ का फलन हैं और $u, x$ का फलन है । यदि $x$ में वृद्धि $\delta x$ के संगत $y$ एवं $u$ में संगत वृद्धि क्रमश : $\delta y$ अ और $\delta u$ छ हो, तो

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x}$$

एवं जब $\delta x \to 0$ है, तो $\delta u \to 0$ होगा, अत:

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left( \frac{\delta v}{\delta x} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \right)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta u} \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{\delta u}{\delta x}$$

**टिप्पणी: फलन के फलन सम्बन्धि प्रश्नो का अवकल गुणांक ज्ञात करते समय प्रत्येक आश्रित चर का उसके स्वतंत्र घर के सापेक्ष अवकलन करते है। जब तक $\frac{dy}{dx}$ प्राप्त नही हो ।**

**उदाहरण 5:** $y = e^{\sin x}$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिये ।

हल:यहाँ $e^{\sin x}$ ,$\sin x$ का फलन जो अन्तत: स्वतंत्र चर $x$ का फलन है ।

अत: यदि $u = \sin x$ , $y = e^u$

एवं $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

यहाँ $\frac{dy}{du} = e^u$ एवं $\frac{du}{dx} = \cos x$

अत: $\frac{dy}{dx} = e^u . \cos x, u$ का मान रखने पर

$$\because \sin C - \sin D$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin x} \cos x = 2\cos\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) \sin\frac{\delta x}{2}$$

**आप फलन के फलन सम्बंधित प्रश्नो के अवकल गुणांक ज्ञात करना निम्नलिखित उदाहरणों से अच्छी तरह समझ सकते हैं।**

## 3.7: $e^{ax} \sin(bx+c)$ का अवकलज ज्ञात करना (To find the differentiation of $e^{ax} \sin(bx+c)$)

यहाँ $y = e^{ax} \sin(bx+c)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{ax} \frac{d}{dx}[\sin(bx+c)] + \sin(bx+c) \frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right)$$

$$= e^{ax}.b\cos(bx+c) + \sin(bx+c).ae^{ax}$$

या $\frac{dy}{dx} = e^{ax}\left[b\cos(bx+c) + a\sin(bx+c)\right]$ ....(1)

इस परिणाम को एक अन्य रूप में लिखने के लिये ।

मानो कि $a = r\cos\theta, \quad b = r\sin\theta$

$\Rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2}; \theta = \tan^{-1}\left({}^{b}\!/\!_{a}\right)$ .... (2)

सम्बंध (2) का (1) में प्रयोग करने पर

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}\left[r\sin\theta\cos(bx+c) + r\cos\theta\sin(bx+c)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}.r\left[\sin(\theta+bx+c)\right]$$

r एवं $\theta$ का मान रखने पर

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}\sin\left(bx+c+\tan^{-1}\left({}^{b}\!/\!_{a}\right)\right)$$

अर्थात $\frac{d}{dx}\left[e^{ax}\sin(bx+c)\right] = \sqrt{a^2+b^2}\,e^{ax}.\sin\left(bx+c+\tan^{-1}\left({}^{b}\!/\!_{a}\right)\right)$

**उदाहरण:-6** $\log\left[\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right]$ का $x$ के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए

**हल:-**माना कि $y = \log\left[\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right]$

$$\Rightarrow \frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} = u, \sqrt{x^2+a^2} = v$$

$$y = \log_e u; \quad u = \frac{x+v}{a}; v = \sqrt{x^2+a^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{1}{u}; \frac{du}{dx} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{dv}{dx}\right); \frac{dv}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{u}.\frac{1}{a}\left(1+\frac{dv}{dx}\right)$$

$$= \frac{a}{\left[x+\sqrt{x^2+a^2}\right]}.\frac{1}{a}\left[1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\left[x+\sqrt{x^2+a^2}\right]}.\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

**उदाहरण :- 7** $\log\sqrt{\sin\left(e^x\right)}$ का $x$ सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए ।

हल :- मानों कि $y = \log\sqrt{\sin\left(e^x\right)}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log\sin\left(e^x\right)$$

पुन: माना कि $u = \sin e^x \quad ; v = e^x$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\log u \quad ; \quad u = \sin v \quad ; \quad v = e^x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2u}, \frac{du}{dv} = \cos v, \frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2u}.\cos v.e^x$$

$$= \frac{1}{2\sin e^x}.\cos e^x.e^x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^x.\cot e^x$$

**उदाहरण :- 8** $\sin y = x\sin(a+y)$ तो सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin^2\left(a+y\right)}{\sin a}$

हल :- दिया हुआ है कि $x = \dfrac{\sin y}{\sin\left(a+y\right)}$

दोनों पक्षों का $y$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\left(a+y\right)\cos y - \sin y\cos(a+y)}{\sin^2\left(a+y\right)} = \frac{\sin(a+y-y)}{\sin^2\left(a+y\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin a}{\sin^2\left(a+y\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2\left(a+y\right)}{\sin a}$$

## 3.8: रूपान्तरण द्वारा अवकलन (Differentiation by transformation)

त्रिकोणमितीय एवं बीजीय रूपान्तरण के द्वारा दिए गए फलन को सरलतम रूप में प्राप्त करके फलन का अवकलज सुगमता से ज्ञात किया जा सकता है । निम्नलिखित त्रिकोणमितीय सम्बन्धों की सहायता से आप फलन को सरलतम रूप में ज्ञात कर सकते हो ।

1. $\sin 2x = 2\sin x\cos x$
2. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

3. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

4. $\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

5. $\cos 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

6. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

7. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

8. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^3 x}$

9. $\tan^{-1} x \pm \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x \pm y}{1 \pm xy}$

10. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \pm \tan x \tan y}$

उपर्युक्त त्रिकोणमितीय सम्बंधों की सहायता से दिए गए फलनो को सरलतम रूप में प्राप्त करके अवकल गुणांक ज्ञात करने की क्रिया विधि को आप निम्नलिखित उदाहरणों से अच्छी तरह समझ सकते हो ।

**उदाहरण 8 :-** $y = \tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{(1+x)} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{(1+x)} + \sqrt{1-x}}\right]$ हो तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

हल -: मानों कि $x = \cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1} x$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\cos\theta} - \sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta} + \sqrt{1-\cos\theta}}\right] \qquad \because \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}}\right]$$

अंश एवं हर में $\cos\dfrac{\theta}{2}$ का भाग देने पर

$$y = \tan^{-1}\left[\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$y = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1} x \qquad \therefore \theta = \cos^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न -1**

1. यदि $y=\log(\sec x+\tan x)$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान लिखिए ।
2. यदि $f(x)=(x+c)(x+3)$ हो तथा $f'(1)=0$ हो तो $c$ का मान लिखिये ।
3. $\sin^2 x^2$ का अवकल गुणांक लिखिए ।
4. यदि $y=\sin^{-1}(\frac{1-x^2}{1+x^2})$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान क्या होगा
5. यदि $y=x^3e^x\cos x$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान लिखिए ।
6. यदि $f'(x)=\sin^2 x-\cos^2 x$ हो तो $f'(0)$ का मान लिखिए ।
7. यदि $y=\log_e\sqrt{x}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान लिखिए ।
8. $\log_{10} x$ का अवकल गुणांक लिखिए ।

## 3.9 लघुगणकीय अवकलन (Logarithmic differentiation)

यदि किसी फलन में चर राशियाँ घात में आये या फलन विभिन्न फलनों का गुणनफल हो, तो ऐसे फलनों का अवकलन करने के लिए दोनो पक्षों का लघुगणक लेते है। तत्पश्चात् प्राप्त परिणाम का अवकलन करते है।

मानो कि $u$ और $v, x$ के अवकलज्य फलन हो तथा $y=u^v$

दोनों पक्षों का $\log$ लेने पर

$$\log_e y=v\log_e u$$

दोनों पक्षों का $x$ सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=v.\left(\frac{1}{u}.\frac{du}{dx}\right)+\log_e u\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

या $$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx}+\log_e u\frac{dv}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=u^v\left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx}+\log_e u\frac{dv}{dx}\right)$$

इसी प्रकार आप कई फलनों के गुणनफल वाले फलन का भी लघुगणकीय विधि से सुगमता के साथ अवकलन ज्ञात कर सकते हो ।

## 3.10 अस्पष्ट फलनों का अवकलन (Differentiation of Implicit functions)

अभी तक आपने स्पष्ट फलनों के अवकल गुणांक ज्ञात करना सीखा है इस अनुच्छेद में आप अस्पष्ट $f(x,y)=0$ का अवकल गुणांक ज्ञात करेंगे । अस्पष्ट फलन $f(x,y)=0$ का अवकलन करते समय यह ध्यान में रखना चाहिए कि $y, x$ का फलन है और प्रत्येक पद का $x$

के सापेक्ष अवकलन करना चाहिए । इस प्रकार के फलनों के अवकलन ज्ञात करना आप निम्न उदाहरणों की सहायता से आसानी से समझ सकते हो ।

**उदाहरण 9 :-** $x^x$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए ।

हल :- मानो कि $y = x^x$

दानों पक्षों का $\log_e$ लेने पर

$$\log_e y = x \log_e x$$

अब $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}\frac{dv}{dx} = x.\frac{1}{x} + 1.\log_e x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[1 + \log_e x\right]$$

या $$\frac{dy}{dx} = x^x\left[\log_e e + \log_e x\right] = x^x \log_e\left(ex\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^x\right) = x^x \log_e\left(ex\right)$$

**उदाहरण 10:-** $y = x^{\log x} + (\sin x)^x$ का $x$ के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए ।

हल:-मानो कि $y = u + v$ और $u = x^{\log x}$ और $v = (\sin x)^x$

अत: $$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

अब $u = x^{\log x}$

$$\Rightarrow \log_e u = \log_e x.\log_e x = \left(\log_e x\right)^2$$

$$\therefore \frac{1}{u}.\frac{du}{dx} = 2.\log_e x.\frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = u\left[\frac{2\log_e x}{x}\right]$$

$$\frac{du}{dx} = x^{\log x}.\frac{2.\log_e x}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = 2.\log_e x.x^{\log_e x - 1}$$

पुन: $$\log_e v = x \log_e\left(\sin x\right)$$

$$\because \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \log_e\left(\sin x\right) + \frac{x\left(\cos x\right)}{\sin x}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = v\left[\log_e\left(\sin x\right) + x\cot x\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = \left(\sin x\right)^x\left[x\cot x + \log_e\left(\sin x\right)\right]$$

अत : $\frac{dy}{dx} = 2\log_e x.x^{\log_e x-1} + (\sin x)^x \left[x\cot x + \log_e(\sin x)\right]$

**उदाहरण :- 11** यदि $x^y = e^{x-y}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_e x}{(1+\log_e x)^2}$$

हल:-प्रश्नानुसार $x^y = e^{x-y}$

दोनो पक्षों का $\log_e$ लेने पर

$y\log_e x = (x-y)\log_e e \qquad\qquad \therefore \log_e e = 1$

$$\Rightarrow y\log_e x = x - y \Rightarrow y = \frac{x}{1+\log_e x}$$

दोनो पक्षों का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log_e x)1 - x.\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+\log_e x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\log_e x}{(1+\log_e x)^2}$$

**उदाहरण 12 :-** $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ का अवकलन गुणांक $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

**हल:-** प्रश्नानुसार $(\cos x)^y = (\sin y)^x$

दोनो पक्षों का $\log_e$ लेने पर

$y\log_e(\cos x) = x\log_e(\sin y)$

अब दोनो पक्षों का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}.\log_e(\cos x) + y.\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \log_e(\sin y) + \frac{\cos y}{\sin y}x\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left[\log_e(\cos x) - x\cot y\right] = \log_e(\sin y) + y\tan x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\log_e(\sin y) + y\tan x}{\log_e(\cos x) - x\cot y}$$

**उदाहरण :- 13** यदि $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}\,\ldots\ldots\infty}}$ हो. तो सिद्ध कीजिए कि

$$x.\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2 - y\log x}$$

**हल:-** प्रश्नानुसार $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}\,\ldots\ldots\infty}}$

$\Rightarrow y = \sqrt{x^y} = x^{y/2}$

दोनो पक्षी का $\log_e$ लेने पर

$$\log_e y = \frac{1}{2} y \log_e x$$

दोनो पक्षों का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\log_e x.\frac{dy}{dx} + y.\frac{1}{2x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2}\log_e x\right)\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2 - 2y.\frac{1}{2}.\log_e x} = \frac{y^2}{(2 - y\log_e x)}$$

## 3.11 प्राचलिक समीकरणों का अवकलन (Differentiation of parametric equations)

जब चर राशियाँ $x$ और $y$ किसी अन्य तीसरी चर राशि का फलन हो. तो तीसरी राशि को प्राचल कहते है एवं इस प्रकार के सम्बंध को प्राचलिक समीकरण कहते है । जैसे

$$x = f(t); y = \varnothing(t) \text{ या } x = at^2, y = 2at \text{ इत्यादि}$$

प्राचलिक समीकरण का अवकलन करने के लिए प्राचल का विलोपन किये बिना अवकल गुणांक निम्न सूत्र की सहायता से ज्ञात कर सकते हो :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

आप प्राचलिक समीकरण का अवकलज दोनो समीकरणों से प्राचल को विलापित करने पर प्राप्त सम्बंध का अवकलन करके भी प्राप्त कर सकते हो ।

## 3.12: अवकल गुणांक $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical meaning of the differentiation coefficient $\frac{dy}{dx}$)

यदि फलन $y = f(x)$ एक वक्र को निरूपित करता हैं तो वक्र के किसी बिन्दु $p(x, y)$ पर अवकल गुणांक $\frac{dy}{dx}$ उस कोण की स्पर्शज्या होती है जो $p(x, y)$ बिन्दु पर स्पर्श रेखा $x-$अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ निरूपित करती है। सामान्यत: इस कोण को $\psi$ से निरूपित करते है।

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x,y)} = \tan\psi$$ जो कि बिन्दु $p(x, y)$ पर वक्र की प्रवणता कहलाता है ।

यदि स्पर्श रेखा $x-$अक्ष के समान्तर होगी तो उसकी प्रवणता शुन्य होगी और $y-$अक्ष के समान्तर हो, तो स्पर्श रेखा की प्रवणता अनन्त होगी ।

### 3.12.1 स्पर्श रेखा का समीकरण:-

वक्र $y = f\left(x\right)$ के बिन्दु $p(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x,y)} x - x_1$ होगा ।

### 3.12.2 अभिलम्ब

वक्र के किसी बिन्दु पर अभिलम्ब वह सरल रेखा होती है जो उस बिन्दु से गुजरे तथा उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा पर लम्बवत हो। अतः अभिलम्ब की प्रवणता $\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}}$ होगी ।

वक्र $y = f\left(x\right)$ के बिन्दु $p\left(x, y\right)$ पर अभिलम्ब का समीकरण

$.y - y1\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} + \left(x - x_1\right) = 0$ होगा ।

**उदाहरण :- 14** यदि $x = \log t + \sin t, y = e^t + \cos t$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल:-** $x = \log t + \sin t, y = e^t + \cos t$ का प्राचल $t$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} + \cos t,; \frac{dy}{dt} = e^t - \sin t$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1 + t\cos t}{t}; \frac{dy}{dt} = e^t - \sin t$$

$$\Rightarrow \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$= \frac{\left(e^t - \sin t\right)}{\left(\frac{1 + t\cos t}{t}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t\left(e^t - \sin t\right)}{\left(1 + t\cos t\right)}$$

**उदाहरण :-** 15 यदि $x = \sin^{-1}\frac{2t}{1+t^2}$ और $y = \tan^{-1}\frac{2t}{1-t^2}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

**हल:-** प्रश्नानुसार

$$x = \sin^{-1}\frac{2t}{1+t^2} \quad ........... (1)$$

$$y = \tan^{-1}\frac{2t}{1-t^2} \quad ........... (2)$$

मानो $t - \tan\theta$

$$\Rightarrow x=\sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan\theta^2}\right)=\sin^{-1}\left(\sin 2\theta\right)=2\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\theta}=2.................(3)$$

इसी प्रकार

$$y=\tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan\theta^2}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\tan 2\theta\right)=2\theta$$

$$y=2\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta}=2................(4)$$

अत: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{2}{2}=1$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1$$

**उदाहरण 16 :-** वक्र $y=x^3-2x^2+4$ के बिन्दु $(2,4)$ पर स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए ।

हल:- प्रश्नानुसार $y=x^3-2x^2+4$ दोनो पक्षों का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-4x$$

$\therefore$ वक्र के बिन्दु (2, 4) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(2,4)}=3(2)^2-4(2)$$

$$=12-8=4$$

अत : (2 ,4) पर स्पर्श रेखा का समीकरण होगा

$$y-4=4(x-2)$$

$$\Rightarrow 4x-y=4$$

उपरोक्त से (2 ,4) पर अभिलम्ब की प्रवणता होगी $\left(-\frac{1}{4}\right)$

अत: बिन्दु (2, 4) पर अभिलम्ब का अभीष्ट समीकरण होगा

$$\Rightarrow (y-4)=\frac{-1}{4}(x-2)$$

$$\Rightarrow 4y-16=-x+2$$

$$\Rightarrow x+4y=18$$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न -2**

(1) यदि $y = x^y$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान लिखिए ।

(2) यदि $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 0$ के लिए बिन्दु (1 - 1) पर $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

(3) यदि $x = at^2$ और $y = 2at$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

(4) वक्र $x^2 + by = 4x$ के बिन्दु $(0,0)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता लिखिये ।

(5) वक्र $y = e^x$ के बिन्दु $(0,1)$ पर अभिलम्ब का समीकरण लिखिये ।

## 3.13: सारांश

इस इकाई में आपने अवकल गुणांक को परिभाषित किया तथा अवकल गुणांक ज्ञात करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन किया । अवकल गुणांक $\frac{dy}{dx}$ के ज्यामितीय अर्थ का भी आपने अध्ययन किया तथा किसी वक्र के किसी बिन्दु पर स्पर्शरेखा ओर अभिलम्ब से समीकरण भी प्राप्त किये ।

## 3.14: शब्दावली

| | |
|---|---|
| अवकलन | Differentiation |
| अवकल गुणांक | Differential Coefficient |
| अस्पष्ट फलन | Implicit Function |
| प्राचल | Parameter |
| ज्यामितीय अर्थ | Geometrical Meaning |
| स्पर्श रेखा | Tangent Line |
| अभिलम्ब | Normal |

## 3.15 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

**स्वमूल्यांकन प्रश्न -1**

(1) $\sec x$

(2) $-5$

(3) $2x\sin(2x^2)$

(4) $\frac{-2}{1+x^2}$

(5) $x^2e^x\left(3\cos x + x\cos x - x\sin x\right)$

(6) शून्य

(7) $\frac{1}{2x}$

(8) $\dfrac{1}{x\log_e 10}$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न -2**

(1) $y^2/x(1-y\log x)$

(2) $-\dfrac{2}{3}$

(3) $\dfrac{1}{t}$

(4) $\dfrac{4}{b}$

(5) $y+x-1=0$

## 3.16 अभ्यास प्रश्न

1. निम्न फलनों का प्रथम सिद्धान्त से $x$ के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए ।

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(i)\ 5^x$ | $(ii)\ xe^x$ | $(iii)\ \cos^2 x$ | $(iv)\ \sin^{-1}x^2$ |
| $(v)\ \sin^2 x$ | $(vi)\ \sin x^2$ | | |

उत्तर:- $(i)\ 5^x.\log_e 5$ $(ii)\ e^x(x+1)$ $(iii)\ -\sin 2x$ $(iv)\ \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

$(v)\ \sin 2x$ $(vi)\ 2x\cos x^2$

2. निम्न फलनों का के सापेक्ष अवकलन कीजिए ।

$(i)\ 3a^x+\tan x-5$ $(ii)\ x^3e^x\sin x$

$(iii)\ \dfrac{1+\tan x}{\sec x}$ $(iv)\ \dfrac{\sin x - x\cos x}{x\sin x+\cos x}$

$(v)\ \sqrt{\dfrac{(\sec x+1)}{\sec x-1}}$

उत्तर:- $(i)\ 3a^x\log_e a+\sec^2 x$

$(ii)\ x^2e^x[3\sin x+x\sin x+x\cos x]$

$(iii)\ \cos x-\sin x$

$(iv)\ \dfrac{(\cos x-\sin x)+x(\cos x+\sin x)+1}{(x+\cos x)^2}$

$(v)\ -\cos ecx[\cot x+\cos ecx]$

3. निम्न फलनो का $x$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए ।

$(i)\ \dfrac{2}{\pi}\sin x^o$ $(ii)\ \log\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$

$(iii)\ \sin^{-1}\left(\frac{a+b\cos x}{b+a\cos x}\right)$ $(iv)\ \sin^2(\log x^2)$

$(v)\ \tan\left(a^{1/x}\right)$ $(vi)\ e^{\sqrt{\cot x}}$

उत्तरः- $(i)\ \frac{2\cos x^o}{\pi}$ $(ii)\ \sec x$

$(iii)\ \frac{-\sqrt{b^2-a^2}}{b+a\cos x}$ $(iv)\ \frac{2}{x}\sin 2\left(\log x^2\right)$

$(v)\ \frac{-a^{1/x}.\sec^2(a^{1/x}).\log_e a}{x^2}$ $(vi)\ -\frac{1}{2}\frac{\cos ec^2 x}{\sqrt{\cot x}}.e^{\sqrt{\cot x}}$

4. निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए ।

$(i)\ \tan^{-1}\left(\frac{4x}{1-4x^2}\right)$ $(ii)\ \tan^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

$(iii)\ \sin^{-1}(3x-4x^3)$ $(iv)\ \cos^{-1}\left(1-2x^2\right)$

उत्तरः- $(i)\ \frac{4}{1+4x^2}$ $(ii)\ -\frac{2x}{1-x^4}$

$(iii)\ \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ $(iv)\ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

5. निम्नलिखित फलनों का $x$ के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए ।

(i) $\sin x\sin 2x\sin 3x\sin 4x$

(ii) $\left(\sin x\right)^x$

(iii) $\left(\tan x\right)^x$

(iv) $\left(x\right)^{x^x}$

उत्तरः-

(i) $\sin x\sin 2x\sin 3x\sin 4x\left[\cot x+2\cot 2x+3\cot 3x+4\cot 4x\right]$

(ii) $\left(\sin x\right)^x\left[x\cot x+\log\sin x\right]$

(iii) $\left(\tan x\right)^x\left[\log\tan x+2x\cos ec2x\right]$

(iv) $\left(x\right)^{x^x}\left[1+x\log x\log ex\right]x^{x-1}$

6. निम्नलिखित अस्पष्ट फलनों के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करों ।

(i) $ax^2+2hxy+by^2=0$

(ii) $xy=e^y$

(iii) $x^y+y^x=a^b$

(iv) $\log xy=x^2+y^2$

उत्तरः-

(i) $-\frac{ax+hy}{hx+by}$

(ii) $\frac{y}{x(y-1)}$

(iii) $-\frac{yx^{y-1}+y^{x}.\log y}{xy^{x-1}+x^{y}.\log x}$

(iv) $-\frac{y\left(2x^2-1\right)}{x\left(2y^2-1\right)}$

7. यदि $y=\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}=xy+1$$

8. निम्नलिखित प्राचलिक समीकरणों से $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

(i) $x=a\cos\theta; y=b\sin\theta$

(ii) $x=\frac{2t}{1+t^2}; y=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

(iii) $x=2\cos t-\cos 2t; y=2\sin t-\sin 2t$

(iv) $x=\tan^{-1}t; y=t\sin^2 2t$

उत्तरः-

(i) $-\left(b/a\right)\cot\theta$

(ii) $-2t/\left(1-t^2\right)$

(iii) $\frac{\left(\cos t-\cos 2t\right)}{\left(\sin 2t-\sin t\right)}$

(iv) $\left(1+t^2\right)\sin 2t\left(\sin 2t+4t\cos 2t\right)$

9. वक्र $9x^2+16y^2=52$ के बिन्दु $(-2,1)$ स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

उत्तरः- स्पर्श रेखा $9x-8y+26=0$

अभिलम्ब $8x+9y+7=0$

10. यदि वक्र $y^2=ax^3+b$ पर स्थित बिन्दु (2, 3) पर खींची गई स्पर्श रेखा का समीकरण $y=4x+5$ हो, तो $a$ और $b$ का मान ज्ञात कीजिए ।

$\left[a=2, b=-7\right]$

# इकाई 4: उत्तरोत्तर अवकलन एवं अनिर्धाय रूप

**इकाई की रूपरेखा**



## 4.0: उद्देश्य

इस इकाई में आप किसी ऐसे फलन का अवकल ज्ञात कर सकेंगे जिसका पूर्व अवकल ज्ञात हो । इस इकाई के बाद आप किसी फलन यथा $e^x \sin x$, $\log_e x$ इत्यादि का विभिन्न प्रमेयों की सहायता से श्रेणी में रूपान्तरण ज्ञात कर सकेंगे ।

आप इकाई में कुछ ऐसे फलनों की सीमा ज्ञात कर सकेंगे जिनका मान किसी बिन्दु पर अपरिभाषित हो यथा आप $\frac{x^2-4}{x-2}$ जैसे फलनों की सीमा $x \circledR 2$ होने पर ज्ञात कर सकेंगे ।

## 4.1 : प्रस्तावना

इस इकाई में दो विभिन्न भागों में उत्तरोत्तर अवकलन व फलन के अनिर्धाय रूपों के बारे मे अध्ययन करेंगे । पहले भाग में उत्तरोत्तर अवकलन में ऐसे फलनों का निरन्तर अवकलन ज्ञात

किया जायेगा जिनका पूर्ववर्ती अवकलन ज्ञात हो । आप दो फलनों के गुणनफलों से संबंधित n वां अवकलन ज्ञात करने का प्रमेय भी पढ़ेंगे ताकि विभिन्न मानक फलनों का n वाँ अवकलन ज्ञात करेंगे । दूसरे भाग में अनिधार्य फलनों की सीमा ज्ञात करने का दे ल हास्पिटल नियम का अध्ययन करेंगे ।

## 4.2 परिभाषा एवं संकेतन (Definition and Notation)

पूर्व इकाई में आपने फलन $y=f\left(x\right)$ का अवकलज $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करना सीखा है, इस अवकलज $\frac{dy}{dx}$ को फलन का प्रथम कम का अवकलज भी कहते है । इसे $f^{'}\left(x\right)$ या $y^{'}$ या $y_1$ या $D^{'}$ से भी निरूपित कर सकते हो ।

यदि किसी फलन $y=f\left(x\right)$ का प्रथम कोटि का अवकलज $\frac{dy}{dx}$ भी $x$ का अवकलज्य फलन हो, तो इसका अवकलज पूर्व इकाई में सीखी विधियों की सहायता से ज्ञात कर सकते है ।,जिसे फलन का द्वितीय क्रम या द्वितीय कोटि का अवकलज कहते है, जिसे $\frac{d^2y}{dx^2}$ या $f^{''}\left(x\right)$ या $y^{''}$ या $y_2$ या $D^2$ से निरूपित किया जा सकता है ।

इसी प्रकार फलन $y=f\left(x\right)$ के उच्च क्रम (कोटि) के अवकलज ज्ञात कर सकते है व फलन के उत्तरोत्तर अवकलज (प्रथम कोटि. द्वितीय कोटि. तृतीय कोटि................ n वी कोटि) निरूपित किये जा सकते है । किसी भी फलन के उत्तरोत्तर अवकलज ज्ञात करना आप निम्नलिखित उदाहरणों की सहायता से आसानी से समझ सकते हो ।

**उदाहरण 1 :-** यदि $y=x^3\log_e x$ हो, तो इसका द्वितीय कोटि का अवकलज ज्ञात कीजिए ।

**हल:-** दिया गया फलन $y=x^3\log_e x$ ..............................(1)

दोनों पक्षो का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=x^3.\frac{1}{x}+\log_e x.\left(3x^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=x^2+3x^2.\log_e x \text{......................(2)}$$

पुन: (2) का दोनो पक्षों का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2x+6x.\log_e x+3x^2.\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=6x.\log_e x+5x$$

**उदाहरण 2 :-** $y=\sin 3x\cos 6x$ के लिए $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल:-** प्रश्नानुसार $y=\sin 3x\cos 6x$

$$y=\frac{1}{2}[\sin 9x-\sin 3x]\left(\because 2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)\right)$$

दोनो पक्षों का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}[9\cos 9x-3\cos 3x]$$

पुन: $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}[-81\sin 9x+9\sin 3x]$$

$$=\frac{1}{2}[9\sin 3x-81\sin 9x]$$

**उदाहरण 3 :-**यदि $y=\sin\left(m\sin^{-1}x\right)$हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1-x^2\right)y_2-xy_1+m^2y=0$$

हल:- प्रश्नानुसार $y=\sin\left(m\sin^{-1}x\right)$

दोनो पक्षों का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y_1=\frac{dy}{dx}=\cos\left(m\sin^{-1}x\right).\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}$$

या $\sqrt{1-x^2}\,y_1=m\cos\left(m\sin^{-1}x\right)$

दोनो पक्षों का वर्ग करने पर

$$\left(1-x^2\right)y_1^2=m^2\cos^2\left(m\sin^{-1}x\right)$$

$$=m^2\left[1-\sin^2\left(m\sin^{-1}x\right)\right]$$

या $\left(1-x^2\right)y_1^2=m^2\left[1-y^2\right]$

पुन: दोनो पक्षों का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\left(1-x^2\right)2y_1y_2-2xy_1^2=m^2\left[-2yy_1\right]$$

या $\left(1-x^2\right)y_2-xy_1=m^2\left[-y\right]$ ($\therefore 2y_1$का भाग देने पर)

या $\left(1-x^2\right)y_2-xy_1+m^2y=0$

**उदाहरण 4 :-** यदि $x=\sin t,\quad y=\sin pt$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+p^2y=0$$

हल - प्रश्नानुसार $x=\sin t$ ..................(1), $y=\sin pt$ ........... (2)

दोनो सम्बंधों (1) और (2) का t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dt}=\cos t \text{ .......... (3)}$$

$$\frac{dy}{dt} = p\cos pt \text{ ........... } (4)$$

(3) एवं (4) से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{p\cos pt}{\cos t}$$

दोनो पक्षों का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[p.\frac{\cos pt}{\cos t}\right]$$

$$= p.\frac{d}{dt}\left[\frac{\cos pt}{\cos t}\right].\frac{dt}{dx}$$

$$= p.\left[\frac{\cos t(-p\sin pt) - \cos pt(-\sin t)}{\cos^2 t}\right].\frac{dt}{dx}$$

$$= p.\left[\frac{-p\cos t\sin pt + \cos pt(\sin t)}{\cos^2 t}\right].\frac{1}{\cos t}$$

या $\cos^2 t\frac{d^2y}{dx^2} = p\left[-p\sin pt + \frac{\cos pt\sin t}{\cos t}\right]$

या $\cos^2 t\frac{d^2y}{dx^2} + p^2\sin pt - p\left(\frac{\cos pt}{\cos t}\right).\sin t = 0$

या $\left(1-\sin^2 t\right)\frac{d^2y}{dx^2} - p\left(\frac{\cos pt}{\cos t}\right).\sin t + p^2\sin pt = 0$

सम्बंध (1) से (4) का प्रयोग करने पर

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + p^2y = 0$$

**उदाहरण 5 :-** यदि $y = \left[x+\sqrt{x^2-1}\right]^m$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1-x^2\right)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$$

हल:- प्रश्नानुसार

$$y = \left[x+\sqrt{x^2-1}\right]^m$$

दोनो पक्षों का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y_1 = m\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]^{m-1}.\left[1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right]$$

या $y_1 = m\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]^{m-1}.\left[\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}\right]$

या $y_1 = \frac{m}{\sqrt{x^2-1}}.y$

दोनो पक्षों का वर्ग करने पर

$\Rightarrow (x^2-1)y_1^2 = m^2y^2$

पुन: $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$2xy_1^2 + (x^2-1)2y_1y_2 = 2m^2yy_1$

दोनो पक्षों में $2y_1$ से भाग देने पर

$\Rightarrow (x^2-1)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$

---

## 4.3 मानक फलनों के n वें अवकलज ज्ञात करना (nth derivative of standard functions)

---

इस अनुच्छेद में आप कुछ अवकलनीय मानक फलनों के n वे अवकलज ज्ञात करना सीखेंगे ।

**4.3.1** $(ax+b)^m$ **का n वां अवकलज जब** $m>n$ **हो**

माना $y=(ax+b)^m$

दोनो पक्षों का उत्तरोत्तर अवकलन करने पर

$y_1 = ma(ax+b)^{m-1}$

$y_2 = m(m-1)a^2(ax+b)^{m-2}$

$y_3 = m(m-1)(m-2)a^3(ax+b)^{m-3}$

.........................................................

.........................................................

$y_n = m(m-1)(m-2)...............(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}$

अर्थात $D^n(ax+b)^m = m(m-1)(m-2)...............(m-n+1)a^n(ax+b)^{m-n}$

जब $m=n$ हो तो

$D^n(ax+b)^m = n(n-1)(n-2)...............3.2.1.....a^n(ax+b)^0$

$\Rightarrow D^n(ax+b)^m = a^n . \lfloor\underline{n}$

जब $a=1, b=0$ हो, तो

$D^n(ax+b)^m = D^n(x^m) = m(m-1)(m-2)...............(m-n+1).....x^{m-n}$

**4.3.2** $(ax+b)^{-m}$ **का n वां अवकलज ज्ञात करना**

माना $y=(ax+b)^{-m}$

दोनों पक्षों का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\Rightarrow y_1 = (-m)(ax+b)^{-m-1}.a$

या $y_1=(-1).m.(ax+b)^{-(m+1)}.a$

इसी प्रकार $y_2=(-1)^2.m.(m+1)(m+2)(ax+b)^{-(m+2)}.a^2$

$y_3=(-1)^3.m(m+1)(m+2)(ax+b)^{-(m+3)}.a^3$

.......................................................................................

.......................................................................................

$y_n=(-1)^n.m(m+1)(m+2)..............(m+n-1)(ax+b)^{-(m+n)}.a^n$

अर्थात

$D^n(ax+b)^{-m}=(-1)^n a^n m(m+1)(m+2)..............(m+n-1)(ax+b)^{-(m+n)}$

$=(-1)^n a^n.\dfrac{\lfloor(m+n-1)}{\lfloor(m-1)}(ax+b)^{-(m+n)}$

**4.3.3 $e^{ax}$ का n वाँ अवकलज ज्ञात करना**

माना $y=e^{ax}$

दोनो पक्षों का $x$ के सापेक्ष उत्तरोत्तर अवकलन करने पर

$y_1=a.e^{ax}$

$y_2=a^2.e^{ax}$

$y_3=a^3.e^{ax}$

....................

....................

$y_n=a^n.e^{ax}$

अर्थात् $D^n\left(e^{ax}\right)=a^n.e^{ax}$

**4.3.4 $\log_e(ax+b)$ का n वाँ अवकलज ज्ञात करना**

माना $y=\log_e(ax+b)$

दोनो पक्षों का के सापेक्ष उत्तरोत्तर अवकलन करने पर

$y_1=\dfrac{a}{ax+b}=a(ax+b)^{-1}$

$y_2=(-1)a^2(ax+b)^{-2}$

$y_3=(-1)^2 2.a^3(ax+b)^{-3}$

..............................................

...............................................

$y_n=(-1)^{n-1}\lfloor(n-1)a^n(ax+b)^{-n}$

अर्थात् $D^n\left[\log_e(ax+b)\right]=\dfrac{(-1)^{n-1}.\lfloor n-1}{(ax+b)^n}.a^n$

**टिप्पणी:** इसी प्रकार आप $D^n\left(a^x\right)=a^x.\left(\log_e a\right)^n$ प्राप्त कर सकते है ।

## 4.4: त्रिकोणमितीय फलनों का n वां अवकलज ज्ञात करना (nth derivative of trigonometric functions)

इस अनुच्छेद में आप त्रिकोणमितीय फलनों के n वें अवकलज ज्ञात करना सीखोगे ।

### 4.4.1 $\sin(ax+b)$ का n वां अवकलज ज्ञात करना:-

माना $y=\sin(ax+b)$

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष उत्तरोत्तर अवकलन करने पर

$$y_1=a\cos(ax+b)=a\sin\left(ax+b+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y_2=a^2\cos\left(ax+b+2.\frac{\pi}{2}\right)=a^2\sin\left(ax+b+2.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_3=a^3\cos\left(ax+b+2.\frac{\pi}{2}\right)=a^3\sin\left(ax+b+3.\frac{\pi}{2}\right)$$

.........................................................................................

.........................................................................................

इसी प्रकार $y_n=a^n\cos\left(ax+b+(n-1).\frac{\pi}{2}\right)=a^n\sin\left(ax+b+n.\frac{\pi}{2}\right)$

अर्थात् $D^n\left[\sin(ax+b)\right]=a^n\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$

इसी प्रकार आप $D^n\left[\cos(ax+b)\right]=a^n\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right)$ प्राप्त कर सकते है ।

### 4.4.2 $e^{ax}\sin(bx+c)$ का n वां अवकलज ज्ञात करना

मानो कि $y=e^{ax}\sin(bx+c)$

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$y_1=e^{ax}.b\cos(bx+c)+a.e^{ax}.\sin(bx+c)$ ............(1)

यहाँ माना कि $b=r\sin\phi$ , $a=r\sin\phi$

$\Rightarrow r^2=a^2+b^2\Rightarrow r=\sqrt{a^2+b^2}$

एवं $\tan\phi=b/a\Rightarrow\phi=\tan^{-1}(b/a)$ ........................(2)

(2) का प्रयोग (1) में करने पर

$$y_1=e^{ax}\left[r\sin\phi\cos(bx+c)+r\cos\phi\sin(bx+c)\right]$$

$$y_1=e^{ax}.r.\sin(bx+c+\phi)$$

$$\Rightarrow y_1=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right).e^{ax}.\sin(bx+c+\phi)$$

इस प्रकार पुन: दोनो पक्षों का × के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y_2=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2.e^{ax}.\sin\left(bx+c+2\phi\right)$$

$$y_3=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2.e^{ax}.\sin\left(bx+c+3\phi\right)$$

............................................................

............................................................

$$y_n=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n.e^{ax}.\sin\left(bx+c+n\phi\right)$$

अर्थात् $D^n.\left[e^{ax}.\cos\left(bx+c\right)\right]=\left(a^2+b^2\right)^{n/2}.e^{ax}.\sin\left[bx+c+n.\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right]$

इसी प्रकार आप

$$D^n.\left[e^{ax}.\cos\left(bx+c\right)\right]=\left(a^2+b^2\right)^{n/2}.e^{ax}.\cos\left[bx+c+n.\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right]$$

प्राप्त कर सकते है ।

उपर्युक्त सुत्रों के द्वारा आप किसी भी फलन का n वाँ अवकलज ज्ञात करना निम्नलिखित उदाहरणों की सहायता से समझ सकते हो ।

**उदाहरण 6 : फलन** $y=\sin 3x\cos 5x$ **का n वाँ अवकलज ज्ञात कीजिए।**

हल :- दिया हुआ है । कि

$$y=\sin 3x\cos 5x$$

आप जानते है कि

$$2\sin A\cos B=\sin\left(A+B\right)+\sin\left(A-B\right)$$

अत: $y=\frac{1}{2}(\sin 8x-\sin 2x)$

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष n वाँ अवकलन करने पर

$$y_1=\frac{1}{2}\left[8.\sin\left(8x+\frac{\pi}{2}\right)-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$y_2=\frac{1}{2}\left[8^2.\sin\left(8x+2.\frac{\pi}{2}\right)-2^2.\sin\left(2x+2.\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

इसी प्रकार $y_n=\frac{1}{2}\left[8^n.\sin\left(8x+n.\frac{\pi}{2}\right)-2^n.\sin\left(2x+n.\frac{\pi}{2}\right)\right]$

अर्थात $D^n\left[\sin 3x\cos 5x\right]=\frac{1}{2}\left[8^n.\sin\left(8x+\frac{n\pi}{2}\right)-2^{n-1}.\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$

**उदाहरण 7 :** $y=\sin^4 x$ **का n वाँ अवकलज ज्ञात कीजिए ।**

हल:- आप जानते हो कि $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$ और $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

$$y=\sin^4 x=\left(\sin^2 x\right)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2 s\log$$

या $y=\frac{1}{4}\left[1+\cos^2 2x-2\cos 2x\right]$

या $y=\frac{1}{4}\left[1+\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)-2\cos 2x\right]$

या $y=\frac{1}{8}[3+\cos 4x-4\cos 2x]$

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष n वाँ अवकलन करने पर

$$y_n=\frac{1}{8}\left[4^n.\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)-4.2^n\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

टिप्पणी: ज्या और कोज्या के घातों के फलनों को त्रिकोणमितीय बहु ल कोणों में परिवर्तित करके 11 वां अवकलज ज्ञात किया जा सकता है ।

**उदाहरण 8: यदि** $y=x^{n-1}\log_e x\forall n\geq 1$ **हो, तो फलन y का n वां अवकलज ज्ञात कीजिए।**

**हल:-** प्रश्नानुसार दिया है कि

$y=x^{n-1}\log_e x$ जहाँ $n\geq 1$ है ................. (1)

दोनो पक्षी का x सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y_1=x^{n-1}.\frac{1}{x}+(n-1).\log_e x.x^{n-2}$$

$=x^{n-2}+(n-1).\log_e x.x^{n-2}$ ................. (2)

(1) के दोनो पक्षों का x सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y_n=D^n\left[x^{n-1}\log_e x\right]$$

$$=D^{n-1}\left[D\left(x^{n-1}\log_e x\right)\right]$$

$y_n=D^{n-1}\left[x^{n-2}+(n-1).x^{n-2}.\log_e x\right]$((2) से)

$$y_n=D^{n-1}\left(x^{n-2}\right)+D^{n-1}\left[(n-1).x^{n-2}.\log_e x\right]$$

$$\therefore D^{n-1}\left(x^{n-2}\right)=0\forall n\succ 1$$

**अत:** $y_n=(n-1)D^{n-1}\left[.x^{n-2}.\log_e x\right]$

$$=(n-1)D^{n-2}\left[x^{n-3}+(n-2).x^{n-3}.\log_e x\right]$$

$$=(n-1)(n-2)D^{n-2}\left[x^{n-3}.\log_e x\right]\because D^{n-2}\left[x^{n-3}\right]=0$$

$$=(n-1)(n-2)(n-3)D^{n-3}\left[x^{n-4}.\log_e x\right]$$

$$=(n-1)(n-2)(n-3)............3...2...1...D\left[x^{n-n}.\log_e x\right]$$

.......................................................................................................

$$y_n = \lfloor n-1 . D\left[x^0.\log_e x\right] = \frac{\lfloor n-1}{x}$$

अर्थात $D^n\left[x^{n-1}.\log_e x\right] = \frac{\lfloor n-1}{x}$

## 4.5 आंशिक भिन्नों की सहायता से अवकलज ज्ञात करना

## (To find differentiation with use of partial fractions)

आप भिन्नात्मक व्यजंकों जिनके अंश एवं हर परिमेय बीजीय व्यंजक हो तो ऐसे फलनों के n वें अवकलज ज्ञात करने से पूर्व भिन्नात्मक व्यजंक को आंशिक भिन्नों (Partial fractions) में खण्डित करके n वाँ अवकलज ज्ञात कर सकते हो ।

आंशिक भिन्नो में खण्डित करके अवकलज ज्ञात करना आप निम्नलिखित उदाहरणों की सहायता से सुगमतापूर्वक समझ सकते हों ।

**उदाहरण 9:** $y = \frac{1}{\left(x^2 - a^2\right)}$ **का n वां अवकलज ज्ञात कीजिए।**

हलः- प्रश्नानुसार $y = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$

आशिक भिन्नों में खण्डित करने पर

$$y = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{(x+a)}\right]$$

दोनो पक्षों का $n$ वाँ अवकलज करने पर

$$y_n = \frac{1}{2a}\left[\frac{(-1)^n \lfloor n}{(x-a)^{n+1}} - \frac{(-1)^n.\lfloor n}{(x+a)^{n+1}}\right]$$

या $y_n = \frac{(-1)^n.\lfloor n}{2a}\left[\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]$

**उदाहरण 10 :-** $y = \frac{1}{\left(x^2 - 5x + 6\right)}$ का n वाँ अवकलज ज्ञात कीजिए ।

हल - प्रश्नानुसार

$$y = \frac{1}{\left(x^2 - 5x + 6\right)} = \frac{1}{(x-3)(x-2)}$$

आंशिक भिन्नो में खण्डित करने पर

$$y = \frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{(x-2)}$$

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष का n वाँ अवकलन ज्ञात कीजिए ।

$$y_n = D^n\left[(x-3)^{-1}-(x-2)^{-1}\right]$$

या $y_n = (-1)^n . \underline{|n}\left[\frac{1}{(x-3)^{n+1}}-\frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right]$

## 4.6 लेबनीज प्रमेय (Leibnitz's Theorem)

दो फलनों के गुणनफल का n वाँ अवकलज आप लेबनीज प्रमेय की सहायता से ज्ञात कर सकते हों । यदि u और v, x म् के दो अवकलनीय फलन हो,तो लेबनीज प्रमेय से इसे निम्न प्रकार प्राप्त कर सकते है ।

$$D^n(u.v) = {}^n c_0\left(D^n u\right).v + {}^n c_1\left(D^{n-1}u\right).Dv + {}^n c_2\left(D^{n-2}u\right).D^2 v + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+{}^n c_r\left(D^{n-r}u\right).\left(D^r v\right) + \ldots\ldots + {}^n c_n u.D^n(v)$$

इस प्रमेय के प्रयोग करते समय प्रथम फलन का चयन इस प्रकार करते है कि उसका n वाँ अवकलज आसानी से प्राप्त किया जा सकता हो तथा द्वितीय फलन का चयन इस प्रकार करते हैं कि इस फलन का उत्तरोत्तर अवकलन किसी एक स्थिति पर आकर शुन्य हो जाये ।

लेबनीज प्रमेय का प्रयोग आप निम्न उदाहरणों की सहायता से आसानी से समझ सकते हो ।

**उदाहरण 11 :** -यदि $y = x^3.\sin x$ हो तो $y_n$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल- : प्रश्नानुसार $y = x^3.\sin x$

यहाँ $\sin x$ को प्रथम तथा $x^3$ को द्वितीय फलन मानों क्यों कि $x^3$ का उत्तरोत्तर अवकलन एक स्थिति में आकर शुन्य हो जाता है । अत :

$$y_n = D^n\left[x^3\sin x\right] = x^3.D^n(\sin x) + {}^n c_1 D^{n-1}(\sin x).D\left(x^3\right) + {}^n c_2 D^{n-2}(\sin x).D^2\left(x^3\right)$$

$$+{}^n c_3 D^{n-3}(\sin x).D^3\left(x^3\right) + {}^n c_4 D^{n-4}(\sin x).D^4\left(x^3\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + {}^n c_n \sin x.D^n\left(x^3\right)$$

$$y_n = x^3.\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + 3nx^2.\sin\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right) + 3xn(n-1)\sin\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$$

$$+n(n-1)(n-2)\sin\left(x+\frac{(n-3)\pi}{2}\right)$$

**उदाहरण 12 :-** यदि $y = a\cos(\log_e x) + b\sin(\log_e x)$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + \left(n^2+1\right)y_n = 0$$

**हल:-** प्रश्नानुसार

$$y = a\cos(\log_e x) + b\sin(\log_e x)$$

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y_1 = \frac{-a\sin(\log_e x)}{x} + \frac{b\cos(\log_e x)}{x}$$

या $xy_1 = -a\sin(\log_e x) + b\cos(\log_e x)$

पुन : x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$xy_2 + y_1 = -\frac{1}{x}\left[a\cos(\log_e x) + b\sin(\log_e x)\right]$$

या $xy_2 + y_1 = -\frac{y}{x}$

या $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

लेबनीज प्रमेय से n बार अवकलन करने पर

$$D^n\left[x^2y_2\right] + D^n\left[xy_1\right] + D^n\left[y\right] = 0$$

या $y_{n+2}.x^2 + n.y_{n+1}.(2x) + \frac{n(n-1)}{2}.y_n.2 + y_{n+1}.x + ny_n.1 + y_n = 0$

या $x^2y_{n+2} + (2n+1)x.y_{n+1} + \left(n^2+1\right)y_n = 0$

**उदाहरण 13 :-** यदि $y = x^2e^x$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$y_n = \frac{1}{2}n(n-1)y_2 - n(n-2)y_1 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)y$$

**हल:-** प्रश्नानुसार

$y = x^2e^x$ .............(1)

दोनो पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$y_1 = 2xe^x + x^2e^x$ ............ (2)

$$-2xy_1^{\,2} + 2\left(1-x^2\right)y_1y_2 = 2a^2y_1y_2$$

$$\left(1-x^2\right)y_1^{\,2} = a^2y^2$$

$$y = e^{a\sin^{-1}x} = \sqrt{1-x^2}\,y_1 = ay$$

$$y_1 = e^{a\sin^{-1}x}\frac{a}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{ay}{\sqrt{1-x^2}}$$

पुन: x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y_2 = e^x\left[2+2x\right] + e^x\left[2x+x^2\right]$$

$= e^x\left[x^2+4x+2\right]$ ............. (3)

$e^x$ को प्रथम एवं $x^2$ को द्वितीय फलन मानकर (1) का लेबनीज प्रमेय से n वाँ अवकलन करने पर

$$y_n = D^n\left(e^x\right).x^2 + {}^nc_1D^{n-1}\left(e^x\right).Dx^2 + {}^nc_2D^{n-2}\left(e^x\right).D^2\left(x^2\right)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + {}^nc_n\left(e^x\right).D^n\left(x^2\right)$$

$$y_n = e^x.x^2 + n.e^x.2x + \frac{n(n-1)}{2}e^x.2 + 0 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 0$$

$$= e^x\left[x^2 + 2nx + n(n-1)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

प्रश्न की $RHS = \frac{1}{2}n(n-1)y_2 - n(n-2)y_1 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)y$

$$= \frac{1}{2}n(n-1).e^x.\left(x^2+4x+2\right) - n(n-1)(n-2).e^x.\left(x^2+2x\right)$$

$$+\frac{1}{2}n(n-1).x^2.e^x$$

$$= e^x\left[\frac{1}{2}\{n(n-1) - 2n(n-2) + (n-1)(n-2)\} + x\{2n(n-1) - 2n(n-2)\}n(n-1)\right]$$

$$= e^x\left[x^2 + 2nx + n(n-1)\right]$$

$= y_n =$ प्रश्न की $LHS$

**उदाहरण 14 :-** यदि $y = e^{a\sin^{-1}x}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1-x^2\right)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - \left(n^2+a^2\right)y_n = 0$$

**हल:-** प्रश्नानुसार $y = e^{a\sin^{-1}x}$ ................ (1)

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$y_1 = e^{a\sin^{-1}x}\frac{a}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{ay}{\sqrt{1-x^2}}$$

या $\sqrt{1-x^2}\,y_1 = ay$

उत्तरोत्तर अवकलन एवं अनिधार्य रूप

दोनो पक्षों का वर्ग करने पर

$$\left(1-x^2\right)y_1^{\,2} = a^2y^2$$

पुन: अवकलन करने पर

$$-2xy_1^{\,2} + 2\left(1-x^2\right)y_1y_2 = 2a^2y_1y_2$$

या $\left(1-x^2\right)y_2 - xy_1 - a^2y = 0; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$ (2 $y_1$ का भाग देने पर)

(2) का लेबनीज प्रमेय से n वाँ अवकलन करने पर

$$D^n\left[\left(1-x^2\right)y_2\right] - D^n\left[xy_1\right] - D^n\left[a^2y\right] = 0$$

या $\left(1-x^2\right)y_{n+2} + n(-2x)y_{n+1}. + \frac{n(n-1)}{2}(-2)y_n + (-x)y_{n+1} + n(-1)y_n - a^2y_n = 0$

या $\left(1-x^2\right)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - \left(n^2+a^2\right)y_n = 0$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न- (1)**

1. $xe^x$ का n वाँ अवकलज लिखिये ।
2. यदि $x = a\cos t,\quad y = a\sin t$ हो, तो $d^2y/dx$ का मान लिखिये ।
3. $y = x^3.\log_e x$ हो तो $y_4$ का मान होगा ।

4. यदि $y=5^x$ हो तो $y_n$ का मान होगा ।

5. यदि $y=e^{-x}$ हो तो, $y_2$ का मान होगा ।

## 4.7: अनिर्धार्य रूप (Indeterminate Form)

यदि भागफल $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\forall g(x)\neq 0$ का रूप $\frac{0}{0}$ प्राप्त होता हैं तो इस $\frac{0}{0}$ रूप को अनिर्धार्य रूप कहते है। अनिर्धार्य रूप के अन्य प्रकार निम्नलिखित होते है ।

$\frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty-\infty, 0^0, 1^\infty$ और $\infty^0$

इन अनिर्धार्य रूप के उदाहरण निम्न प्रकार है।,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2},\lim_{x\to 2}\frac{\log x}{\cot x},\lim_{x\to 0}\log x,\lim_{x\to 0}\operatorname{cosec}x-\cot x,\lim_{x\to 0}x^x,\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ आदि

इस प्रकार के अनिर्धार्य रूप वाले फलनों की सीमा ज्ञात करने के लिए दे ल हास्पिटल नियम का प्रयोग करते है।

## 4.8 दे ल '' हास्पिटल नियम (De L'Hospital's Rule)

यदि $f(x)$ और $g(x)$ पर संतत एवं अवकलनीय फलन हो तथा

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ एवं $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ होगा ।

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**टिप्पणी :-**

(1) यदि $\lim\to a$ के स्थान पर $x\to\infty$ हो तो $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ एवं $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ हो. तो x के स्थान $1/x$ प्रतिस्थापित करके $\lim$ को $x\to 0$ में परिवर्तित करके मान ज्ञात किया जा सकता है, अर्थात्

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to 0}f\left(\frac{1}{x}\right)$$

(2) दे-ल हास्पिटल नियम $\frac{\infty}{\infty}$ रूप के लिए भी प्रयोग में आता है । अनिर्धार्य रूप के $\frac{0}{0}$ रूप एवं $\frac{\infty}{\infty}$ रूप के प्रश्नों को आप निम्न उदाहरणों की सहायता से समझ सकते हो । अन्य अनिर्धार्य रूपों को इन दो प्रकारों के रूप में परिवर्तित कर हल किया जाता है ।

**उदाहरण 15** - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x-\log(1+x)}{x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल:-** प्रश्नानुसार $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-\log(1+x)}{x^2}$ $\left(\frac{0}{0}\text{रूप}\right)$

$\therefore$दे ल. हास्पिटल नियम से

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)e^x-\frac{1}{1+x}}{2x} \qquad \left(\frac{0}{0}\text{रूप}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)e^x+\frac{1}{(1+x)^2}}{2}$$

$$\frac{(0+2)e^x-\frac{1}{(1+0)^2}}{2}=\frac{3}{2}$$

**उदाहरण 16 :-** $\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\log x}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल:-** प्रश्नानुसार

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\log x} \qquad \left(\frac{0}{0}\text{रूप}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}\left[x^x-x\right]}{\frac{d}{dx}\left[1-x+\log x\right]}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1+\log x)-1}{-1+1/x} \qquad \left(\frac{0}{0}\text{रूप}\right)$$

पुन: दे ल हास्पिटल से

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^x(1/x)+x^x(1+\log x)^2}{-1/x}=\frac{1+1}{-1}=-2$$

**उदाहरण 17 :-** $\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{\cot x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हल:-** प्रश्नानुसार

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{\cot x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\text{रूप}\right)$$

अत: दे. ल 'हास्पिटल नियम से

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\cos ec^2 x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\text{रूप}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin^2 x}{x} \qquad \left(\frac{0}{0}\text{रूप}\right)$$

पुन: दे. ल " हास्पिटल नियम से

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin x \cos x}{1}$$

$$= 0$$

**उदाहरण 18 :-** $\lim_{x \to 1} \frac{\log(1-x)}{\cot \pi x}$ का मान ज्ञात कीजिए

**हल :-** प्रश्नानुसार

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log(1-x)}{\cot \pi x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ रूप}\right)$$

दे.ल " हास्पिटल नियम से

$$= \lim_{x \to 1} - \frac{\frac{1}{1-x}}{-\pi \operatorname{cosec}^2 \pi x} = \lim_{x \to 1} - \frac{\sin^2 \pi x}{\pi(1-x)} \qquad \left(\frac{0}{0} \text{ रूप}\right)$$

पुनः दे.ल " हास्पिटल नियम से

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2\pi \sin \pi x \cos \pi x}{\pi(-1)}$$

$$= 0$$

## 4.9 अन्य अनिर्धार्य रूपों पर दे ल हास्पिटल नियम का प्रयोग (The use of D'L Hospital Rule to another Inderterminate forms)

यदि अनिर्धार्य रूप $0 \times \infty - \infty, 0^0, \infty^0$ और $1^\infty$ के प्रश्नो को हल करने के लिए इनको $\frac{0}{0}$ रूप या $\frac{\infty}{\infty}$ रूप में परिवर्तित करके दे.ल हास्पिटल नियम की सहायता से दिये गये फलन की सीमा का मान ज्ञात कर सकते हो ।

**उदाहरण : 19** $\lim_{x \to \pi/2} \cos x . \log(\tan x)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल:-** प्रश्नानुसार $\lim_{x \to \pi/2} \cos x . \log(\tan x)$

जो ( $0 \times \infty$ )रूप में है, जिसे $\frac{\infty}{\infty}$ रूप में निम्न प्रकार परिवर्तित करके दे ल " हास्पिटल नियम की सहायता से मान ज्ञात कर सकते है ।

$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\log(\tan x)}{\sec x}$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sec^2 x / \tan x}{\sec x \tan x} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\sec x}{\tan^2 x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ रूप}\right)$$

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0$$

**उदाहरण 20 :-** $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल:-** प्रश्नानुसार $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right]$ जो $\infty-\infty$ रूप है जिसे आप निम्न प्रकार $\frac{0}{0}$ रूप में परिवर्तित कर सकते हो ।

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}\right] \qquad (\tfrac{0}{0}\text{ रूप})$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}.\frac{x^2}{\sin^2 x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}.\frac{x^2}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}.1 \qquad (\tfrac{0}{0}\text{ रूप})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3} \qquad (\tfrac{0}{0}\text{ रूप})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2cos2x-2}{12x^2} \qquad (\tfrac{0}{0}\text{ रूप})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x}{24x} \qquad (\tfrac{0}{0}\text{ रूप})$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-4}{12}\right).\frac{\sin 2x}{2x}$$

$$=-\frac{1}{3}.\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

**उदाहरण :-21** $\lim_{x\to 1}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{\log(1-x)}}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल:-** प्रश्नानुसार

$$y=\lim_{x\to 1}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{\log(1-x)}} \quad (\ 0^0\text{ रूप})$$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\log y=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\log\left(1-x\right)}.\log\left(1-x^2\right) \qquad (0\quad x\quad \infty\text{ रूप})$$

$$\log y=\lim_{x\to 1}\frac{\log\left(1-x^2\right)}{\log\left(1-x\right)} \qquad (\tfrac{\infty}{\infty}\text{ रूप})$$

अत: दे. ल " हास्पिटल नियम से

$$\log y = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{(1-x^2)}(-2x)}{\frac{1}{1-x}.(-1)} = \frac{2x}{1+x}$$

$$\log y = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1+x} = 1$$

$$\therefore y = e$$

**उदाहरण :-22** $y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हलः- माना $y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ ( $1^\infty$ रूप)

$$\therefore \log_e y = \lim_{x\to\infty} x.\log_e\left(1+\frac{a}{x}\right)$$ (0 x $\infty$ रूप)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\log_e\left(1+\frac{a}{x}\right)}{1/x}$$ ( $\frac{0}{0}$ रूप)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\left(1+\frac{a}{x}\right)}.\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a}{\left(1+\frac{a}{x}\right)} = a$$

$$\log_e y = a \Rightarrow y = e^a$$

**उदाहरण :-**23 $\lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x)^{\frac{1}{\log_e x}}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल :- मानो कि $y = \lim_{x\to 0}(\operatorname{cosec} x)^{\frac{1}{\log_e x}}$

$$\log_e y = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\log_e x}.\log_e(\operatorname{cosec} x)$$ ( $\infty^0$ रूप)

$$\therefore \log_e y = \lim_{x\to 0} \frac{\log_e(\operatorname{cosec} x)}{\log_e x}$$ ( $\frac{\infty}{\infty}$ रूप)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cot x}{1/x}$$ ( $\frac{\infty}{\infty}$ )

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{x}{\tan x}$$ ( $\frac{0}{0}$ रूप)

$$\log_e y = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{\sec^2 x} = -1$$

$$\therefore \log_e y = -1 \Rightarrow y = e^{-1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{e}$$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2**

1. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ का मान होगा ।   रूप
2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos xx}{x^2}$ का मान होगा ।
3. $\lim_{x\to \infty} \frac{\sin 2x}{2x}$ का मान होगा
4. $\lim_{x\to \infty} \left(1-\frac{5}{x}\right)^x$ का मान होगा ।
5. $\lim_{x\to \pi/2} \left(\frac{\tan 5x}{\tan x}\right)$ का मान होगा ।

## 4.10 सारांश

इस इकाई में आपने अवकलनीय फलनों के उत्तरोत्तर अवकलज ज्ञात करना सीखा । दो फलनों के गुणनफल का n वाँ अवकलज भी लेबनीज प्रमेय की सहायता आप ज्ञात कर सकते हो । अनिर्धार्य रूप वाले फलनों की सीमा का मान भी आप दे.ल. " हास्पिटल नियम की सहायता से ज्ञात कर सकते हो ।

## 4.11 शब्दावली

| | |
|---|---|
| उत्तरोत्तर | Successive |
| अनिर्धार्य रूप | Indeterminate form |
| मानक फलन | Standard Function |
| त्रिकोणमितीय | Trigonometrical |

## 4.11 स्वमूल्यांकन प्रश्नो के उत्तर - 1

(1) $(x+n)e^x$

(2) $-\frac{1}{a}\cos ec^3 t$

(3) $6/x$

(4) $5^x(\log_e 5)^n$

(5) $-(2\cos x)e^{-x}$

**स्वमूल्यांकन प्रश्नो के स्तर- 2**

(1) 2

(2) $\frac{1}{2}$

(3) 0

(4) $e^{-5}$

(5) $\frac{1}{5}$

## 4.13 अभ्यास प्रश्न

प्र.1 यदि $y = x\sin(\log_e x) + x\log_e x$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$x^2 y_2 - xy_1 + 2y - x\log_e x = 0$$

प्र.2 यदि $x = a\left(\cos\theta + \theta\sin\theta\right); y = a\left(\sin\theta - \theta\cos\theta\right)$ हो तो $\theta = \pi$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

उत्तर $-\frac{1}{a\pi}$

प्र.3 यदि $y^3 + 3ax^2 + x^3 = 0$ हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2a^2x^2}{y^5} = 0$$

प्र.4 यदि $y = \left(\sin^{-1} x\right)^2$ हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1 + x^2\right) y_2 - xy_1 - 2 = 0$$

प्र.5 यदि $y\left[x + \sqrt{1 + x^2}\right]^m$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1 + x^2\right) y_2 + xy_1 - m^2 y = 0$$

$$\left(1 + x^2\right) y_{n+2} + \left(2n + 1\right) xy_{n+1} - \left(n^2 - m^2\right) y_n = 0$$

प्र.6 $y = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$ हो तो $y_n$ का मान ज्ञात कीजिए ।

उत्तर $\left(-1\right)^n . \underline{|n}\left[\frac{1}{\left(x + 2\right)^{n+1}} - \frac{1}{\left(x + 3\right)^{n+1}}\right]$

प्र.7 यदि $y = x\log\left(x - 1\right)$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$y_n = \frac{\left(-1\right)^n \underline{|\left(n - 2\right)}\left(x - n\right)}{\left(x - 1\right)^n}$$

प्र.8 यदि $y = \tan^{-1} x$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(1 + x^2\right) y_{n+2} + 2\left(n + 1\right) xy_{n+1} + n\left(n + 1\right) y_n = 0$$

प्र.9 यदि $y = \left(x^2 - 1\right)^n$ हो तो, सिद्ध कीजिए कि

$$\left(x^2-1\right)y_{n+2}+2xy_{n+1}-n\left(n+1\right)y_n=0$$

प्र.10 निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए ।

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log\sin 2x}{\log\sin x}$ (ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x}{a^x};a>0$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin x\frac{a}{x}$ (iv) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]$

(v) $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\frac{1}{x}$

उत्तर (i) 1 (ii) 0. (iii) a

(iv) 0 (v) 1

प्र.11 निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए ।

(i) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2-x\right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

(ii) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\cos\theta\right)^{\cos\theta}$

उत्तर(i) $2/\pi$ (ii)1

प्र.12 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

उत्तर $\left(abc\right)^{1/3}$

# इकाई 5 : समाकलन (Integration)

**इकाई की रूपरेखा**



## 5.0 उद्देश्य

इस इकाई के माध्यम से हम जान सकेंगे कि समाकलन अवकलन प्रक्रिया की प्रतिलोम प्रक्रिया है व इसके मानक सूत्र क्या है । मानक सूत्रों द्वारा दिये गये फलनों का समाकलन किस प्रकार प्राप्त किया जाता है। इस इकाई में हम अध्ययन करेंगे कि विभिन्न विधियों-प्रतिस्थापन विधि, खण्डश: समाकलन विधि आदि द्वारा फलनों का समाकलन किस प्रकार प्राप्त किया जाता है ।

## 5.1 प्रस्तावना

समाकलन गणित की खोज वक्र या रेखाओं या वक्रों द्वारा परिबद्ध समतल क्षेत्रों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए की गई थी । इस विधि में समतल क्षेत्रों को अल्पांशों में जैसे पट्टियों (strips) या आयतकारों के रूप में विभाजित करके इन क्षेत्रफलों के योगफल की सीमा ज्ञात करते है । जहाँ अल्पांशों की संख्या अनन्त की ओर प्रवृत होती है तथा प्रत्येक अल्पांश का क्षेत्रफल शून्य की ओर प्रवृत होता है । ' समाकलन करना ' का अर्थ 'योग ज्ञात करना' है । समाकलन प्रक्रिया को अवकलन की प्रतिलोम प्रक्रिया के रूप में भी जाना जाता है । अवकलन गणित में हम दिये हुए फलनों के अवकल गुणांक ज्ञात करते है जबकि समाकलन गणित में ऐसे फलनों को ज्ञात किया जाता है जिनके अवकल गुणांक दिये हुए हो ।

## 5.2 फलन का समाकलन (Integration of a function)

यदि फलन $F(x)$ का अवकल गुणांक $f(x)$ है अर्थात $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ तो परिभाषानुसार $F(x)$ फलन $f(x)$ का $x$ के सापेक्ष समाकलन कहलाता है । इसे संकेतन रूप में निम्न प्रकार से लिखा जाता है ।

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

$\int$ का प्रयोग समाकलन हेतु तथा $dx$ का अक्षर $x$ उस चर को व्यक्त करता है जिसके सापेक्ष समाकलन करना है ।

फलन $f(x)$ जिसका समाकलन करना होता है उसे समाकल्य (Integrand) कहते है तथा $F(x)$ को समाकल (Integral) कहते है । सामान्यतया समाकल्य को $\int$ व $dx$ के मध्य लिखा जाता है ।

उदाहरणार्थ

(i) चूँकि $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$ अतः $\int x^n dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)(n+1 \neq 0)$

(ii) चूँकि $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ अतः $\int \cos x dx = \sin x$

(iii) चूँकि $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \int e^x dx = e^x$

## 5.3 समाकलन अचर (The constant of Integration)

हम जानते है कि किसी भी अचर फलन का अवकल गुणांक शून्य होता है अर्थात $\frac{d(c)}{dx} = 0$

जहाँ c एक अचर फलन है।

अब यदि $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$ हो

तब $\frac{d}{dx}[F(x)+c] = \frac{d}{dx}[F(x)] + \frac{d(c)}{dx} = f(x) + 0 = f(x)$

अत: समाकलन की परिभाषानुसार

$\int f(x)dx = F(x) + c$ होगा ।

यहाँ अचर c समाकलन अचर कहलाता है तथा $x$ से स्वतंत्र होता है। c का मान निश्चित नही होता है अर्थात c के भिन्न- भिन्न मान लेने पर दिये गये फलन के भिन्न- भिन्न समाकल प्राप्त होते है जिनमें केवल अचर पद का ही अन्तर होता है। c की अनिश्चितता के कारण ही $F(x)+c$ को $f(x)$ का अनिश्चित समाकल (Indefinite integral) कहते है।

**उदाहरणार्थ :-** (i)) $f \cos x = \sin x + c$ (ii) $\int e^x dx = e^x + c$

**टिप्पणी :** (i) अनिश्चित समाकलन की प्रत्येक समस्या में समाकलन प्रक्रिया के अन्त में समाकलन अचर c जोड़ा जाता है।

(ii) c का मान शून्य भी हो सकता है।

## 5.4: समाकलन के प्रमेय (Theorem on Integration)

**<u>प्रमेय 1</u>. एक अचर तथा एक फलन के गुणनफल का समाकलन उस अचर तथा फलन के समाकल के गुणनफल के बराबर होता है, अर्थात**

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

**<u>प्रमेय 2</u>.परिमित संख्या में दिए गए फलनों के बीजीय योगफल का समाकल इन फलनों के समाकलों के बीजीय योगफल के बराबर होता है, अर्थात**

$$\int\left[f_1(x)+f_2(x)+-----f_n(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx ------+\int f_n dx$$

## 5.5: समाकलन के मानक सूत्र (Standard Formulae of Integration)

चूँकि समाकलन, अवकलन की प्रतिलोम प्रक्रिया है। अत: कुछ फलनों के समाकल, अवकल गणित में उनके संगत परिणामों से परिभाषा द्वारा ज्ञात किये जा सकते है जो अन्य फलनों के समाकलन में मानक सूत्रों के रूप में प्रयोग किये जाते है।

| | **अवकलन** | | **समाकलन** |
|---|---|---|---|
| 1. | $\frac{d(x)}{dx} = 1$ | 1. | $\int 1.dx = x + c$ |
| 2. | $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n-1}}{n+1}\right) = x^n \left(n \neq -1\right)$ | 2. | $\int x^n dx = \frac{x^{n-1}}{n+1} + c\left(n \neq -1\right)$ |
| 3. | $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ | 3. | $\int \frac{1}{x} dx = \log_e(x) + c, x \neq 0$ |
| 4. | $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ | 4. | $\int e^x dx = e^x + c,$ |
| 5. | $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$ | 5. | $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c,$ |
| 6. | $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ | 6. | $\int \cos x dx = \sin x + c,$ |
| 7. | $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ | 7. | $\int \sin x dx = -\cos x + c$ |
| 8. | $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ | 8. | $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$ |
| 9. | $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\cos ec^2 x$ | 9. | $\int \cos ec^2 x dx = -\cot x + c$ |
| 10. | $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ | 10. | $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$ |

11. $\frac{d}{dx}(\cos ecx) = -\cos ecx \cot x$

12. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$

13. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$

14. $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \sec h^2 x$

15. $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\cos ech^2 x$

16. $\frac{d}{dx}(\sec hx) = -\sec hx \tanh x$

17. $\frac{d}{dx}(\cos echx) = -\cos echx \coth$

18. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$

19. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$

20. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

21. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

22. $\frac{d|x|}{dx} = \frac{|x|}{x}, x \neq 0$

11. $\int \cos ecx \cot xdx = -\cos ecx + c$

12. $\int \cosh xdx = \sinh x + c$

13. $\int \sinh dx = \cosh x + c$

14. $\int \sec h^2 xdx = \tanh x + c$

15. $\int \cos ech^2 xdx = -\coth x + c$

16. $\int \sec hxdx = -\sec hx + c$

17. $\int \cos ech \coth xdx = -\cos echx + c$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$ $(-1 < x < 1)$

19. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\cos^{-1} x + c$ $(-1 < x < 1)$

20. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \tan^{-1} x + c = -\cot^{-1} x + c$

21. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \sec^{-1} x + c = -\cos ec^{-1} x$

22. $\int \frac{|x|}{x} dx = |x| + c, (x \neq 0)$

टिप्पणी 1. एक फलन के अनिश्चित समाकल को विभिन्न रूपों मे लिखा जा सकता है परन्तु उसके किन्ही दो रूपों का अन्तर अचर ही होता है। निम्न उदाहरण से यह स्पष्ट होगा
उदाहरण - प्रतिलोम त्रिकोणमिती से हमे ज्ञात है कि

$$\sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x$$

चूँकि $\sin^{-1} x$ तथा $\cos^{-1} x$ दीनों का अवकलज $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ होता है इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि दोनों फलनो में केवल अचर का अन्तर है इसी प्रकार $\frac{1}{1-x^2}$ के समाकलन $\tan^{-1} x$ तथा $\cot^{-1} x$ में केवल अचर का अन्तर है।

**उदाहरण1.** $\int \frac{2x^3+3x^2+4}{x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल -** $\int \frac{2x^3+3x^2+4}{x}dx = \int\left(2x^2+3x+\frac{4}{x}\right)dx$

$$= \int 2x^2dx + \int 3xdx + \int \frac{4}{x}dx$$

$$= 2\int x^2dx + 3\int xdx + 4\int \frac{1}{x}dx$$

$$= 2.\frac{x^{2+1}}{2+1} + 3.\frac{x^{1+1}}{1+1} + 4.\log x + c$$

$$= 2.\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4\log x + c$$

**उदाहरण 2.** $\int\left(5e^x+3\sec 2x\right)dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल :** $\int\left(5e^x+3\sec 2x\right)dx = \int 5e^xdx + \int 3\sec^2 xdx$

$$= 5\int e^x + 3\int \sec^2 xdx$$

$$= 5e^x + 3\tan x + c$$

**उदाहरण-3 निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए ।**

(i) $\left(\frac{1}{5}\right)^x$ (ii) $\int\left(\frac{4+3\sin x}{\cos^2 x}\right)$ (iii) $\int\sqrt{1+\sin 2x}dx$

**हल -(**i) $\int\left(\frac{1}{5}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\log_e\left(\frac{1}{5}\right)} + c,\ \left[\int a^xdx = \frac{a^x}{\log_e a} + c\right]$

(ii) $\int \frac{4+3\sin x}{\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{4}{\cos^2 x} + \frac{3\sin x}{\cos^2 x}\right)dx$

$$= \int 4\sec^2 xdx + 3\int \sec\tan xdx$$

$$= 4\int \sec^2 xdx + 3\int \sec\tan xdx$$

$$= 4\tan x + 3\sec x + c$$

(iii) $\int\sqrt{1+\sin 2x}dx = \int\sqrt{\sin^2 + \cos^2 x + 2\sin x\cos xdx}$

$$= \int\sqrt{\left(\sin x+\cos x\right)^2}dx = \int\left(\sin x+\cos x\right)dx$$

$$= \int \sin xdx + \int \cos xdx = -\cos x + \sin x + c$$

## 5.6: समाकलन ज्ञात करने की अन्य विधियाँ

यदि दिया हुआ फलन समाकलन के मान सूत्रों द्वारा समकलित नहीं हो तो ऐसे फलनों के समाकलन ज्ञात करने के लिए निम्न विधियों का प्रयोग किया जाता है ।

### 5. 6. 1 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन

इस विधि से समाकलन ज्ञात करने के लिये समाकल्य फलन में उचित प्रतिस्थापन से स्वतंत्र चर को नये चर में परिवर्तित करके समाकल को मानक रूप में प्राप्त किया जाता है । तत्पश्चात मानक सूत्रों का प्रयोग करके समाकलन ज्ञात करते है ।

प्रमेय : - यदि $\int f(x)dx$ द्वारा चर $x$ को सम्बंध $x=\theta(t)$ द्वारा चर $t$ में बदला जाये तब

$$\int f(x)dx = \int f(\theta(t))\theta'(t)dt, \text{ जहाँ } \theta'(t) = \frac{d}{dt}\{\theta(t)\}$$

इस विधि में प्रतिस्थापन करने का कोई व्यापक नियम नहीं है । यह समाकल्य की प्रकृति पर निर्भर करता है । प्राय: समाकल्य को ऐसे दो गुणनखण्डों में तोड़ना होता है कि उन में से एक गुणनखण्ड जिस फलन का अवकल गुणांक हो, दूसरे गुणनखण्ड को उसी फलन के पदों में व्यक्त किया जा सके ।

**उदाहरण - 1 निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए ।**

(i) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ (ii) $\int \frac{\cos(\log x)}{x}dx$

हल -(i) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

माना $\sqrt{x}=t$ अत: $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{dt}{dx}$ तब $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$

$$\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dt$$

$$\therefore \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \sin t.2dt = 2\int \sin t dt \sqrt{x}$$

$$= 2(-\cos t) + c$$

**अब $t$ का मान $x$ के पदों में पुर्नस्थापित करने पर**, $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = -2\cos\sqrt{x} + c$

(ii) $\int \frac{\cos(\log x)}{x}dx$

माना $\log x = t,$ अत: $\frac{1}{x}dx = dt$

$$\therefore \int \frac{\cos(\log x)}{x}dx = \int \cos t dx$$

$$= \sin t + c$$

$$= \sin(\log x) + c$$

**उदाहरण-2** $\int \sin(ax+b)dx$ का मान ज्ञात कीजिये ।

**हल -** **माना** $ax+b=t$

**अतः** $\frac{d}{dx}\left(ax+b\right)=\frac{dt}{dx}$

**अथवा** $a=\frac{dt}{dx}$ **अथवा** $dx=\frac{1}{a}dt$

$$\therefore \int \sin(ax+b)dx=\int \sin t\frac{1}{a}dt=\frac{1}{a}\int \sin tdt$$

$$=-\frac{1}{a}\cos t+c$$

$t$ **का मान** $x$ **के पदों में पुर्नस्थापित करने पर**

$$\int \sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$$

**टिप्पणी:-** आपको ज्ञात है की $\frac{d}{dx}\left(\sin 3x\right)3\cos 3x$ होता है जहाँ फलन मे $x$ के गुणांक से गुणनफल को अवकल में प्राप्त किया जाता है । उसी प्रकार समाकलन में $x$ के गुणांक से भाग दिया जाता है जैसा कि आगे के उदाहरण में देखेंगे

**उदाहरण 3.** फलन $\sin 3x\cos 2x$ का $x$ के सापेक्ष समाकलन कीजिये ।

**हल -** $\int \sin 3x\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int 2\sin 3x\cos 2xdx$

$$=\frac{1}{2}\int\left\{\sin\left(3x+2x\right)+\sin\left(3x+2x\right)\right\}dx \quad \left[\because 2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int \sin 5xdx+\int \sin xdx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 5x}{5}-\cos x\right]+C$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\cos 5x+\cos x\right]+C$$

**उदाहरण 4.** $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$ का मान ज्ञात करो ।

हल - माना कि $e^x-e^{-x}=t,$ तब $\left(e^x+e^{-x}\right)dx=dt$

$$\therefore \int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx=\int \frac{dt}{t}=\log t+C$$

$$=\log\left(e^x-e^{-x}\right)+C$$

**उदाहरण 5.** $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\tan^{-1}x}$ का मान ज्ञात कीजिये ।

**हल : माना** $\tan^{-1}x=t,$ **तब** $\frac{1}{1+x^2}dx=dt$

$$\therefore \int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\tan -1x}=\int \frac{dt}{t}=\log t+C=\log(\tan^{-1}x)+C$$

**उदाहरण 6.** $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$ का समाकलन कीजिये।

**हल:**माना $x = a\sin\theta$, तब $dx = a\cos\theta d\theta$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos\theta d\theta}{\sqrt{\left(a^2-a^2\sin^2\theta\right)}} = \int \frac{a\cos\theta}{a\cos\theta} d\theta$$

(त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन के लिये 5.6.1 की सारिणी देंगे)

$$= \int d\theta = \theta + C = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

**त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन**

कभी कभी उचित त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन से बीजीय फलनों का समाकलन बड़ी सरलता से प्राप्त किया जा सकता है। ऐसे प्रतिस्थापन निरीक्षण द्वारा ही ज्ञात किये जाते है।

| | **समाकल्य में उपस्थित व्यंजक** | **प्रतिस्थापन** |
|---|---|---|
| 1. | $\sqrt{a^2-x^2}$ | $x = a\sin\theta$ या $a\cos\theta$ |
| 2. | $\sqrt{x^2-a^2}$ | $x = a\sec\theta$ या $a\cosh\theta$ |
| 3. | $\sqrt{a^2+x^2}$ | $x = a\tan\theta$ या $a\sinh\theta$ |
| 4. | $\sqrt{(x+a)}$ | $x = a\cos 2\theta$ |
| 5. | $\sqrt{\left(2ax-x^2\right)}$ | $x = a\left(1+\cos 2\theta\right) = 2a\sin^2\theta$ |
| 6. | $\sqrt{\left(\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}\right)}$ | $x^2 = a^2\cos 2\theta$ |

**स्वमूल्यांकन प्रश्न 1**

(i) समाकलन अचर क्या होता है?

(ii) समाकलन की प्रमेय बताइये।

(iii) समाकलन में प्रतिस्थापन विधि का प्रयोग कब किया जाता है।

## 5.6.2 खण्डश: समाकलन (Integration by parts)

कुछ फलनों के गुणनफल का समाकलन प्रतिस्थापन विधि से ज्ञात नहीं किया जा सकता । ऐसे फलनों के गुणनफल का समाकलन खण्डश: समाकलन के नियम से करते है ।

**खण्डश: समाकलन का नियम (Rule of Integration by parts)**

यदि $u$ तथा $v, x$ के दो फलन है तो

$$\int u.v dx = u\int v dx - \int\left\{\frac{du}{dx}.\int v dx\right\} dx$$

यदि $u$ को प्रथम तथा $v$ को द्वितीय फलन कहें तो उपर्युक्त समीकरण से खण्डश : समाकलन नियम को शब्दों में इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है ।

दो फलनों के गुणनफल का समाकलन

=प्रथम फलन $\times$ द्वितीय का समाकलन - [प्रथम फलन का अवकलन $\times$ द्वितीय फलन का

समाकलन ] का समाकलन

उक्त नियम के प्रयोग में द्वितीय फलन का चुनाव इस प्रकार किया जाना चाहिये कि इसका समाकलन ज्ञात हो । फलनों के चयन का कोई व्यापक नियम नहीं है फिर भी निम्न बातें ध्यान देने योग्य है -

(i) यदि समाकल्य $x$ की घात तथा त्रिकोणमितीय या चरघातांकी फलनों का गुणनफल हो तो त्रिकोणमितीय या चरघातांकी फलन को द्वितीय फलन लेना चाहिये ।

(ii) अकेले लघुगुणकी या प्रतिलोमी त्रिकोणमितीय फलनों के समाकलन के लिए इकाई 1 को द्वितीय फलन लेना चाहिये ।

(iii) आवश्यकता पड़ने पर खण्डश: समाकलन का सूत्र एक बार से अधिक प्रयोग में लिया जा सकता है ।

(iv) प्रथम फलन का चुनाव निम्न क्रम में करने पर समाकलन ज्ञात करने में सुविधा रहती है :

(i) प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन (Inverse trigonometric function)

(ii) लघुगणकीय फलन (Logarithmic Function)

(iii) बीजगणितीय फलन (Algebraic Function)

(iv) त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric Function)

(v) चर घातांकी फलन(Exponential Function)

इस क्रम को आई ILATE का क्रम कहते है ।

**उदाहरण1.** $\int x^2 \sin 2x dx$ का मान ज्ञात कीजिये ।

**हल** **यहाँ** $x^2$ को प्रथम व $\sin 2x$ को द्वितीय फलन लेकर खण्डश: समाकलन करने पर

**माना** $I = \int x^2 \sin 2x dx$

$$= x^2 \int \sin 2x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}\left(x^2\right) \int \sin 2x dx \right\} dx$$

$$= x^2 \left( \frac{-\cos 2x}{2} \right) - \int 2x \left( \frac{-\cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x dx$$

पुनः दायीं ओर के समाकल में $x$ को प्रथम व $\cos 2x$ को द्वितीय फलन लेकर खण्डश: समाकलन करने पर

$$I = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \left[ x.\frac{\sin 2x}{2} - \int 1.\frac{\sin 2x}{2} dx \right]$$

$$= -\frac{x^2}{2} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{2}\left( -\frac{\cos 2x}{2} \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \cos 2x \left( \frac{1}{2} - x^2 \right) + \frac{1}{2} x \sin 2x + C$$

**उदाहरण 2.** फलन $xe^x$ का $x$ के सापेक्ष समाकलन कीजिये ।

**हल** **माना** $I = x \int e^x dx$

यहाँ $x$ को प्रथम तथा $e^x$ द्वितीय फलन मानकर खण्डश: समाकलन करने पर

$$I = x\int e^x dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int e^x dx\right\}$$

$$= xe^x - \int 1.e^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$= e^x(x-1) + C$$

**उदाहरण 3.** $\int \log x dx$ का मान ज्ञात कीजिये ।

**हल -** यहाँ $\log x$ को प्रथम व इकाई 1 को द्वितीय फलन लेकर खण्डश: समाकलन करने पर

$$\int \log x dx = \int \log x.1.dx$$

$$= \log x\int 1.dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)\int 1.dx\right\}dx$$

$$= \log x.x - \int\left\{\frac{1}{x}.x\right\}dx$$

$$= x\log x - \int 1.dx$$

$$= x\log x - x + C$$

$$= x(\log x - 1) + C$$

**उदाहरण 4.**निम्न फलनों का समाकलन ज्ञात करो

(i) $e^{ax}\sin bx$ (ii) $e^{ax}\cos bx$

**हल** (i) $\int e^{ax}\sin bx dx$

यहां $\sin bx$ को दूसरा फलन लेकर खण्डश : समाकलन करने पर

$$I = \int \sin\theta \sin bx dx = e^{ax}\left(-\frac{\cos bx}{b}\right) - \int ae^{ax}\left(-\frac{\cos bx}{b}\right)dx$$

$$= -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx$$

$$= -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\left[\frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \int ae^{ax}\frac{\sin bx}{b}dx\right]$$

$$= -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx dx$$

**अर्थात** $I = -\dfrac{e^{ax}\cos bx}{b} + \dfrac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \dfrac{a^2}{b^2}I$

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)I = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx$$

$$\therefore \int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\sin bx - b\cos bx\right] + C$$

(ii) इसी प्रकार $e^{ax}\cos bx$ का समाकलन करने पर

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{e^{ax}}{\left(a^2+b^2\right)}\left[a\cos bx-b\sin bx\right]+C$$

**दो महत्वपूर्ण समाकल**

(i) $\int e^x\left\{f\left(x\right)+f'(x)\right\}dx=e^x f(x)+C$

(ii) $\int\left[xf'(x)+f(x)\right]dx=xf(x)+C$

**उदाहरण 5.** फलन $I=\int e^x\left(\sin x+\cos x\right)dx$ का $x$ के सापेक्ष समाकलन कीजिये ।

**हल** माना $I=\int e^x\left(\sin x+\cos x\right)dx$

$$=\int e^x\sin xdx+\int e^x\cos xdx$$

$$=\sin x\int e^x dx-\int\left[\frac{d}{dx}(\sin x)\int e^x dx\right]dx+\int e^x\cos xdx$$

$$=e^x\sin x-\int e^x\cos xdx+\int e^x\cos xdx+C$$

$$=e^x\sin x+C$$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न 2.**

(i) खण्डश: समाकलन का नियम बताइये ।

(ii) खण्डश: समाकलन विधि में प्रथम व द्वितीय फलनों का चयन किस प्रकार किया जाता है ।

### 5.6.3 बीजीय फलनों का समाकलन (Integration of Algebraic Function)

**(i) परिमेय बीजीय फलन (Rational Algebraic Functions)**

यदि $f\left(x\right)$ और $g\left(x\right)$ के दो बहुपद हो तो फलन $\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ को $x$ का परिमेय बीजीय फलन कहते है।

जैसे

$\frac{x^2}{x^2+5},\frac{x^2+5}{x^2-1},\frac{x^3+2x+3}{x^2+x-2}$ इत्यादि ।

यदि किसी परिमेय भिन्न में अंश की घात, हर की घात से कम हो तो उसे परिमेय वास्तविक भिन्न (Rational Proper Function) कहते है और यदि अंश की घात, हर की घात के बराबर या अधिक हो तो परिमेय विषम भिन्न (Rational Improper Function) कहते है ।

**(ii) परिमेय बीजीय फलनों का समाकलन (Integration of Rational Algebraic Function)**

यदि दिया गया परिमेय बीजीय फलन एक विषम भिन्न हो तो हर का अंश में भाग देकर इसको वास्तविक भिन्न तथा बहुपद के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है । जैसे

$$\frac{x^3+5x^2-3x-7}{x^2-x-1}=x+6+\frac{4x-1}{x^2-x-1}$$

अब बहुपद $x+6$ का सरलता से समाकलन किया जा सकता है एवं वास्तविक भिन्न $\frac{4x-1}{x^2-x-1}$ का समाकलन करने के लिये इसे आंशिक भिन्नों में वियोजित कर प्रत्येक भिन्न का समाकलन किया जाता है।

**(iii) आशिक भिन्न (Partial Fraction)**

वास्तविक भिन्न को आंशिक भिन्न में व्यक्त करने के लिए सर्वप्रथम यदि हर गुणनखण्डों के रूप में नही हो तो हर के गुणनखण्ड किये जाते है तथा हर की घात के बराबर अचर राशियाँ $A,B,C$ आदि मानते है ।

अब मानी गयी अचर राशियों का मान गणना द्वारा ज्ञात करके संगत आंशिक भिन्नों में प्रतिस्थापित करते है। अलग-अलग स्थितियों में वास्तविक भिन्न की संगत आंशिक भिन्नों निम्न रूप में होती है ।

**स्थिति 1 :** यदि भिन्न में हर के गुणनखण्ड एक घातीय एवं अलग अलग हो तो आंशिक भिन्नों का रूप निम्न होता है।

$$\frac{x-3}{(x-1)(x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+5}$$

$$\frac{x^2+2x+6}{(x+1)(x+2)(3x-5)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{3x-5}$$

**स्थिति 2.**यदि हर के एक घातीय गुणनखण्डों की पुनरावर्ती हो तो आंशिक भिन्नों का रूप

$$\frac{2x-3}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{(x+2)}$$

**स्थिति 3.**यदि हर में द्विघात खण्ड ले तो आंशिक भिन्नों का रूप

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\frac{x^2+2x+6}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

अचर राशियों का मान ज्ञात करना

आंशिक भिन्नों में मानी गई अचर राशियों मै, $A,B,C$........ के मान निम्न प्रकार ज्ञात करते है।

(a) भिन्न को अचर राशियों के साथ आशिक भिन्नों में व्यक्त करने के बाद दोनों पक्षों को भिन्न के हर से गुणा करके एक सर्वसमिका प्राप्त करते है। जैसे

$$\frac{7x-5}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

दोनों पक्षों को $(x+1)\,(x-2)$ से गुणा करने पर

$$7x-5=A(x-2)+B(x+1)$$

$$7x-5=(A+B)x-2A+B \qquad ......(1)$$

$x$ के समान घातों वाले पदों की तुलना करने पर

$A+B=7$ और $-2A+B=-5$

दोनों समीकरणों को हल करने पर,

$A=4$ और $B=3$ प्राप्त होता है ।

**लघुविधि:** इस विधि में अचर राशियों के मान, दाहिने पक्ष में मानी गई भिन्नों का लघुतम समापवर्त्य (LCM)लेकर दोनों प के अंशों को बराबर रखने पर प्राप्त सर्वसम में क्रमानुसार $x=-1, x=2$ रखकर प्राप्त किया जा सकता है ।

(b) यदि भिन्न के हर में एक घातीय गुणनखण्ड की पुनरावृत्ति हो रही है या द्वितीय गुणनखण्ड है तो उपर्युक्त विधि से आंशिक भिन्नों की सब अचर राशियों के मान ज्ञात नहीं कर सकते । ऐसी स्थिति में शेष अचर राशियों के मान सर्वसमिका (1) के दोनों पक्षों में x के समान घातों वाले पदों के गुणांकों की तुलना करके समीकरण प्राप्त करते है । इन समीकरणों को करने से शेष अचर राशियों के मान प्राप्त हो जाते है ।

**उदाहरण 1 :** $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$ का मान ज्ञात कीजिये ।

**हल :** यहाँ $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

अत: मान लो $\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)}$

$I=A(x-2)+B(x-1)$

अब लघु विधि से क्रमश: $x=1$ व $x=2$ रखने पर

$A=-1,\ B=1$ प्राप्त होता है ।

अत: $\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-2}$

$$\therefore \int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx=\int\left\{-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right\}dx=-\log(x-1)+\log(x-2)+C$$

$$=\log\frac{x-2}{x-1}+C$$

**उदाहरण 2.** $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$ का मान ज्ञात कीजिये ।

**हल :** मान लो $\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x^2+1)}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)}$

$$\therefore 1=A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2 \qquad \text{........(1)}$$

**समीकरण (1) में** $x=-1$ **रखने पर** $1=2B\rightarrow B=1/2$

**समीकरण (1) में** $x=i$ **रखने पर** $1=(Ci+D)(i+1)^2$

$$1=-2C+2iD$$

दोनों ओर वास्तविक व काल्पनिक भागों को समान रखने पर और

$$C = -1/2 \qquad \text{और } D = 0$$

समीकरण (1) में $x=0$ रखने पर है $A+B+D=1 \rightarrow A=1/2$

अत: $$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2(x^2+1)}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)} = \int \left\{ \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2(x^2+1)} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{(x^2+1)} dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4}\log(x^2+1) + C$$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न 3.**

(i) परिमेय वास्तविक भिन्न व परिमेय विषम भिन्न को परिभाषित कीजिये ।

(ii) आंशिक भिन्न ज्ञात करने की विधि बताइये

### 5.6.4 त्रिकोणमितीय फलनों का समाकलन (Integration of trigonometrical Functions)

इस विधि में त्रिकोणमितिय समाकल्य को प्रतिस्थापन विधि से या किसी अन्य क्रिया से मानक रूप में परिवर्तित करके मानक सूत्रों से इनका समाकलन करेंगे ।

(i) $\sin^n x$ तथा $\cos^n$ का समाकलन, जहाँ n धन पूर्णांक है :

**स्थिति - I**: जब n विषम हो :

मान लो $n = 2m+1$, जहाँ m कोई धन पूर्णांक है तब

$$\int \sin^n x dx = \int \sin^{2m+1} x dx = \int \sin^{2m} x \sin x dx$$

अब $\cos x = t$ ले तो $-\sin x dx = dt$

$$\int \sin^n x dx = -\int (1-t^2)^m dt$$

चूंकि m धन पूर्णांक है इसलिए दाहिने पक्ष के समाकल्य $(1-t^2)^m$ को द्विपद प्रमेय की सहायता से प्रसार करके प्रत्येक पद का समाकलन ज्ञात किया जा सकता है । इसी प्रकार, जब n धन विषम पूर्णांक हो, तो $\cos^n x$ का समाकलन प्रतिस्थापन $\sin x = t$ द्वारा किया जाता है।

**स्थिति - II** : जब n सम हो :

यदि n छोटा हो,तो त्रिकोणमितीय रूपान्तर की सहायता से इन्हे कोण के गुणन वाले ज्या $(\sin e)$ तथा कोज्या $(\cos ine)$ के रूप में परिवर्तित कर समाकलन करते है और यदि n बड़ा है तो यह रूपान्तर द:मायवर प्रमेय की सहायता से करते है जैसा कि आगे उदाहरण में बताया गया है।

(ii) $\sin^m x \cos^n x$ का समाकलन

स्थिति I: जब m या n धन विषम पूर्णाक हो : मान लो $m=2r+1$, जहाँ $r$ कोई धन पूर्णाक है तब के सभी मानों के लिए समाकलन, प्रतिस्थापन $\cos=t, -\sin xdx=dt$ द्वारा किया जा सकता है।

अत: $\int \sin^m x\cos^n xdx = \int \sin^{2r+1} x\cos^n dx$

$$= \int \sin^{2r} x\cos^n \sin xdx$$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)^r x\cos^n \sin xdx$$

$$= \int \left(1-t^2\right)^r t^n \left(-dt\right)$$

अब द्विपद प्रमेय से प्रसार करके समाकलन ज्ञात किया जा सकता है ।

**स्थिति :**II जब $m+n$ कोई ऋण संपूर्णांक हो :

ऐसी स्थिति में समाकल्य को तथा के पदों में व्यक्तकर प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन किया जा सकता है ।

माना $m+n=-2r,$ जहाँ r कोई धन पूर्णांक है तब

$$\int \sin^m x\cos^n xdx = \int \frac{\sin^m x}{\cos^m}\cos^{m+n} xdx$$

$$= \int \tan^m x\cos^{-2r} xdx$$

$$= \int \tan^m x\sec^{2r-2} x\sec^2 xdx$$

$$= \int \tan^m x\left(1+\tan^2 x\right)^{r-1} \sec^2 xdx$$

$$= \int \mathrm{t}^m x\left(1+\mathrm{t}^2 x\right)^{r-1} dt \text{ जहाँ } \tan x=t$$

अब द्विपद प्रमेय से प्रसार करके प्रत्येक पद का समाकलन ज्ञात किया जा सकता है ।

**स्थिति** : III जब m तथा n दोनों ही सम धन पूर्णांक हो : ऐसी स्थिति में द : मायवर प्रमेय का प्रयोग कर समाकलन किया जा सकता है । दिये गये उदाहरणों से यह विधि स्पष्ट हो जायेगी ।

**उदाहरण- 1** $\int \sin^7 xdx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल : -** यहाँ $\int \sin^7 xdx = \int \sin^6 x\sin xdx$

$$= \int \left(1-\cos^2 x\right)^3 \sin xdx$$

**अब** $\cos x=t$ रखे तो $-\sin xdx=dt$

$$\int \sin^7 xdx = \int \left(1-t^2\right)^3 t^n \left(-dt\right) = \int \left(1-3t^2+3t^4-t^6\right)dt$$

$$= -\left\{t-\frac{3t^3}{3}+\frac{3t^5}{5}-\frac{t^7}{7}\right\}+c$$

$$= -\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\cos^7 x+c$$

**उदाहरण-2** $\int \cos^4 xdx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल-** **मान लो** $Z=\cos x+i\sin x$

**तब** $Z^{-1}=\cos x-i\sin x$

$$\therefore Z + Z^{-1} = 2\cos x \text{ तथा } Z - Z^{-1} = 2i\sin x \quad ......(1)$$

पुन: द-मायवर प्रमेय से

$$Z^n = (\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$$

$$Z^{-n} = (\cos x + i\sin x)^{-n} = \cos nx - i\sin nx$$

$$\therefore Z^n + Z^{-n} = 2\cos nx \text{ तथा } Z^n - Z^{-n} = 2i\sin nx \quad .....(2)$$

**अब (1) से**

$$(2\cos x)^4 = (Z + Z^{-1})^4 = Z^4 + 4Z^3Z^{-1} + 6Z^2Z^{-2} + 4ZZ^{-3} + Z^{-4}$$

$$= (Z^4 + Z^{-4}) + 4(Z^2 + Z^{-2}) + 6$$

$$= 2\cos 4x + 4(2\cos 2x) + 6$$

$$\Rightarrow 16\cos^4 x = 2\cos 4x + 8\cos 2x + 6$$

$$\text{या } \cos^4 x = \frac{1}{8}[\cos 4x + 4\cos 2x + 3]$$

$$\textbf{अतः} \int \cos^4 x dx = \frac{1}{8}\int \{\cos 4x + 4\cos 2x + 3\} dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{\sin 4x}{4} + \frac{4\sin 2x}{2} + 3x\right] + c$$

**उदाहरण - 3** $\int \sin^3 x \cos^4 x dx =$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल :** यहाँ $\sin x$ की घात विषम धन पूर्णांक है अत:

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \sin x dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)\cos^4 x \sin x dx$$

माना $\cos x = t \;\; \therefore -\sin x dx = dt$

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx = \int (1 - t^2) t^4 (-dt)$$

$$= \int (t^4 - t^6) dt = -\left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right]$$

$$= +\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$$

**उदाहरण - 4** $\int \sin^4 x \cos^2 x dx =$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल -** यहाँ $\sin x$ और $\cos x$ दोनों की घात सम धन पूर्णांक है अत: द-मायवर प्रमेय का उपयोग करेंगे ।

माना $Z = \cos x + i\sin x \;\; \therefore Z^{-1} = \cos x - i\sin x$

$$\therefore Z + Z^{-1} = 2\cos x = tZ - Z^{-1} = 2i\sin x \; ....(1)$$

**द-मायवर प्रमेय**

$$Z^n + Z^{-n} = 2\cos nx \text{ तथा } Z^n - Z^{-n} = 2i\sin nx$$

अब समीकरण (1) से

$$
\begin{aligned}
(2i\sin x)^4 (2\cos x)^2 = \left(Z - Z^{-1}\right)^4 \left(Z + Z^{-1}\right)^2 \\
&= \left(Z^4 - 4Z^3Z^{-1} - 6Z^2Z^{-2} - 4ZZ^{-3} + Z^{-4}\right) \\
&\left(Z^2 + 2ZZ^{-1} + Z^{-2}\right) \\
&= \left[\left(Z^4 + Z^{-4}\right) - 4\left(Z^2 + Z^{-2}\right) + 6\right]\left[Z^2 + Z^{-2} + 2\right] \\
&= \left(Z^6 + Z^{-6}\right) - 2\left(Z^4 + Z^{-4}\right) - \left(Z^2 + Z^{-2}\right) + 4 \\
&= 2\cos 6x - 2(2\cos 4x) - 2(\cos 2x) + 4 \\
&2^6 \sin^4 x \cos^2 x = 2\cos 6x - 4\cos 4x - 2\cos 2x + 4
\end{aligned}
$$

**अतः:** $\int \sin^4 \cos^2 x dx = \frac{1}{32}\int \left\{\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2\right\} dx$

$$= \frac{1}{32}\left\{\frac{1}{6}\sin 6x - \frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + 2x\right\} + C$$

## 5.7 सारांश

इस इकाई अध्ययन किया कि समाकलन के मानक सूत्र क्या है एवं मानक सूत्रों का प्रयोग कर समाकलन किस प्रकार प्राप्त किया जाता है। हमें फलनों का समाकलन ज्ञात करने की विभिन्न विधियों का भी अध्ययन किया ।

## 5.8 शब्दावली

| | |
|---|---|
| समाकलन | Integration |
| फलन | Function |
| समाकल्य | Integrand |
| समाकल | Integral |
| अवकलन | Differentiation |
| त्रिकोणमितीय फलन | Trigonometric Function |
| लघुगुणकीय फलन | Logarithmic Function |
| चरघातांकी फलन | Exponential Function |
| परिमेय बीजीय फलन | Rational algebraic Function |
| आशिक भिन्न | Partial Fraction |

## 5.9 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

प्रश्न :1 प्रश्न(i), (ii) एवं (iii) के उत्तर इकाई से देखे ।

**स्वमूल्यांकन प्रश्न**

प्रश्न :2 प्रश्न (i), (ii) एवं (iii) के उत्तर इकाई से देखे ।

**स्वमूल्यांकन प्रश्न**

प्रश्न :3 प्रश्न (i), (ii) एवं (iii) के उत्तर इकाई से देखे ।

## 5.10अभ्यास प्रश्न

प्रश्न -1 निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए-

(i) $\frac{ax^2+bx+c}{x}$ (ii) $2e^x-\frac{5}{x}+3\sec^2 x$

(iii) $5^x-3e^x+\frac{2}{x}$ (iv) $\frac{\left(1-x^2\right)}{\sqrt{x}}$

प्रश्न-2 प्रतिस्थापन विधि द्वारा निम्न फलनो का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए

(i) $\frac{\cos\left(\tan^{-1}x\right)}{1+x^2}$ (ii) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

(iii) $\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$ (iv) $e^{\tan x}\sec^2 x$

(v) $e^{\cos x}\sin x$ (vi) $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$

प्रश्न -3 निम्न फलनों का खण्डशः विधि से x के सापेक्ष समाकलन कीजिए -

(i) $x^2e^{ax}$ (ii) $\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)}}$

(iii) $x\sin x$ (iv) $\tan^{-1}x$

(v) $e^x\left(\cos x+\log\sin x\right)$ (vi) $e^{3x}\cos 4x$

(vii) $\frac{xe^x}{\left(x+1\right)^2}$

प्रश्न-4 निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए -

(i) $\frac{1}{x^2-x-2}$ (ii) $\frac{3x}{x^2-x-2}$

(iii) $\frac{8}{\left(x+2\right)\left(x^2+4\right)}$ (iv) $\frac{\cos x}{\left(1+\sin x\right)\left(2+\sin x\right)}$

(v) $\frac{1}{\left(x+1\right)^2\left(x^2+1\right)}$

प्रश्न-5 निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए -

(i) $\sin^3 x$ (ii) $\sin^4 x$

(iii) $\cos^7 x$ (iv) $\sin^5 x\cos^6 x$

(v) $\sin^4 x\cos^2 x$ (vi)

**अभ्यास प्रश्नों के उत्तर**

प्र.1

(i) $\frac{ax^2}{2}+bx+c\log x+C$ (ii) $2e^x-5\log x+3\tan x+c$

(iii) $\frac{5^x}{\log 5} - 3e^x + 2\log x + c$ (iv) $2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + c$

प्र.2 (i) $\sin\left(\tan^{-1} x\right) + c$ (ii) $2e^{\sqrt{x}} + c$ (iii) $\tan^{-1}\left(\sin x\right) + c$

(iv) $e^{\tan x} + c$ (v) $-e^{\cos x} + c$ (vi) $e^{\tan^{-1} x} + c$

प्र.3 (i) $\frac{e^{ax}}{a^3}\left[a^2x^2 - 2ax + 2\right] + c$ (ii) $-\sin^{-1} x \cos\left(\sin^{-1} x\right) + c$

(iii) $-x\cos x + \sin x + c$ (iv) $x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log\left(1 + x^2\right) + c$

(v) $e^x \log\sin x + c$ (vi) $\frac{1}{25}e^{3x}\left[3\cos 4x + 4\sin 4x\right] + c$

(vii) $\frac{e^x}{x+1} + c$

प्र.4 (i) $\frac{1}{3}\log\frac{x-2}{x+1} + c$ (ii) $\log\left\{\left(x+1\right)\left(x-2\right)^2\right\} + c$

(iii) $\log\left(x+2\right) - \frac{1}{2}\log\left(x^2+4\right) + \text{ta}$

(iv) $\log\left(\frac{1+\sin x}{2+\sin x}\right) + c$ (v) $\frac{1}{2}\log\left(x+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{4}\log\left(x\right.$

प्र.5 (i) $-x\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$ (ii) $\frac{1}{32}\left[\sin 4x - 8\sin 2x + 12\right.$

(iii) $\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + c$

(iv) $-\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{2}{9}\cos^9 x - \frac{1}{11}\cos^{11} x + c$

(v) $\frac{1}{32}\left[\frac{1}{6}\sin 6x - \frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x + 2x\right]$

# इकाई 6: निश्चित समाकल (Definite Integral)

**इकाई की रूपरेखा**



## 6.0 : उद्देश्य

उद्देश्य : इस इकाई को पढ्ने के उपरान्त आप समझ सकेंगे

(1) निश्चित समाकल की परिभाषा ।

(2) निश्चित समाकल का हल ज्ञात करने की विधियों ।

(3) निश्चित समाकल के गुणधर्म ।

(4) प्रथम सिद्धान्त द्वारा समाकलन करना ।

(5) समानयन सूत्रों द्वारा समाकलन ज्ञात करना ।

## 6.1 : प्रस्तावना

पूर्व में आपने समाकलन की प्रक्रिया को अवकलन की प्रतिलोम प्रक्रिया के रूप में अध्ययन किया और फलनों के विभिन्न विधियों से समाकलन ज्ञात किये । उन परिणामों में हम एक अचर राशि को शामिल करते है और चूकि अचर राशि अनिश्चित मूल्य ले सकता है, वे समाकलन अनिश्चित समाकलन कहलाता है। वास्तव में समाकलन गणित की खोज समतल क्षेत्रों के क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हुई थी । इस इकाई में हम दिये गये फलन का दिये गये सीमा अन्तराल में निश्चित समाकल ज्ञात करने की विधि का अध्ययन करेंगे । हम अध्ययन करेंगे की दी गई श्रेणी

का योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकल किस प्रकार प्राप्त किया जाता है। समाकलन ज्ञात करने के लिए समानयन सूत्रों का प्रयोग करने की विधि का अध्ययन करेंगे ।

## 6.2 : निश्चित समाकल

परिभाषा : यदि $\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]=F(x)$ तथा a व b स्वतंत्र चर $x$ के मान हो, जबकि

तो को तथा सीमाओं के बीच $f(x)$का निश्चित समाकल कहते है। यहाँ निम्न सीमा (lower limit) तथा b ऊपरी सीमा (upper limit) कहलाती है तथा अन्तराल [a,b]को समाकलन का परिसर (Range of integration) कहते हैं।

यहाँ ध्यान देने योग्य बात यह है कि, यदि

$$f(x)dx=F(x)+c \text{ हो, तो}$$

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)+c]_a^b$$

$$=\{F(b)+c\}-\{F(a)+c\}$$

$$=F(b)-F(a)$$

अत: किसी निश्चित समाकल का मान निश्चित होता है इसलिए समाकलन करने के पश्चात अचर $c$ का प्रयोग नही किया जाता हैं।

## 6.3 : निश्चित समाकल का मान ज्ञात करना

निश्चित समाकल $\int_a^b f(x)dx$ का मान ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम $\int f(x)\, dx$ का माना, $F(x)$, इकाई 5 में वर्णित विधियों द्वारा ज्ञात किया जाता है तत्पश्चात $F(x)$ में चर $x$ के स्थान पर ऊपरी सीमा $b$ तथा निम्न सीमा a प्रतिस्थापित करके $F(b)$ तथा $F(a)$ प्राप्त किये जाते हैं अब $F(b)$ में से $F(a)$ को घटाने पर प्राप्त संख्या ही निश्चित समाकल का अभीष्ट मान होता है।

**स्वमूल्यांकन प्रश्न:1**

(1) निश्चित समाकल को परिभाषित कीजिए।

(2) मान ज्ञात कीजिये $\int_0^{\pi/4}\cos 2x dx$

**उदाहरण :**

(i) $$\int_1^3 x^2dx=\left[\frac{x^2}{3}\right]^3=\left(\frac{(3)^3}{3}\right)-\left(\frac{(1)^3}{3}\right)$$

$$=\frac{27}{3}-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$$

(ii) $$\int_2^5\frac{1}{x}dx=\left[\log(x)\right]_2^5$$

$$= \log 5 - \log 2$$
$$= \log \frac{5}{2}$$

### 6.3.1 प्रतिस्थापन विधि (Method of substitution)

प्रतिस्थापन विधि द्वारा निश्चित समाकल का समाकलन करते समय सर्वप्रथम प्रतिस्थापन द्वारा स्वतंत्र चर को नये चर में परिवर्तित किया जाता है तथा साथ ही समाकल की दी हुई सीमाओं को नई प्रतिस्थापित चर राशि के अनुसार परिवर्तित किया जाता है। तत्पश्चात पहले वाले स्वतंत्र चर राशि का नये समाकल से कोई सम्बन्ध नहीं रहता है।

**उदाहरणार्थ**

$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x dx$ में $\sin x = t$ प्रतिस्थापित करते है तो $\cos x dx = dt$ हो जाता है तथा नये चर t के संगत समाकल की निम्न व ऊपरी सीमायें निम्न प्रकार ज्ञात की जाती है -

जब $x = 0$, तब $t = \sin o$ अर्थात $t = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$ तब $t = \sin\frac{\pi}{2}$ अर्थात $t = 1$

अतः $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos x dx = \int_0^1 t^4 dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$

**उदाहरण 1:** $\int_0^1 \frac{\sin\left(\tan^{-1} x\right)}{1+x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल :** माना $\tan^{-1} x = t$ तब $\frac{1}{1+x^2} dx = dt$

सीमाएँ जब $x = 0$, $t = 0$ और जब $x = 1$ तब $t = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \int_0^1 \frac{\sin\left(\tan^{-1} x = t\right)}{1+x^2} = \int_0^{\pi/4} \sin t dt = \left[-\cos t\right]_0^{\pi/4}$$

$$= -\left[\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**उदाहरण 2:** $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**विधि- 1 :** त्रिकोणमिति फलन के प्रतिस्थापन से

**हल :** माना $x = \sin\theta$, तब $dx = co s\theta d\theta$

सीमाएं जब $x = 0$, $\theta = 0$ और जब $x = 1$, $\theta = \pi/2$

$$\therefore \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3\theta \cos\theta d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3\theta \cos\theta d\theta}{\cos\theta}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta d\theta=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{3\sin\theta-\sin 3\theta}{4}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{4}\left[-3\cos\theta+\frac{1}{3}\cos 3\theta\right]_2^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\{-0+0\}-\left\{-3+\frac{1}{3}\right\}\right]=\frac{2}{3}$$

**विधि - 2** $$\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1\frac{x^3.xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

माना $\left(1-x^2\right)=t^2$ अत : $-2xdx=2tdt$

अथवा $xdx=-tdt$

जब $x=0\,,\, t=1$

तथा $x=1\,,\, t=0$

अतः $$\int_0^1\frac{x^2xdx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_1^0\frac{\left(1-t^2\right)tdt}{t}=-\int_1^0\left(1-t^2\right)dt$$

$$=-\left[-t-\frac{t^3}{3}\right]_1^0=\left[\frac{t^3}{3}-t\right]_1^0=0\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2}{3}$$

**उदाहरण -3** मान ज्ञात कीजिए -

$$\int_1^0 x\sqrt{\frac{\left(a^2-x^2\right)}{\left(a^2+x^2\right)}}dx$$

**हल :** मान लो $x^2=a^2\cos 2\theta$, तब $2xdx=-2a^2\sin 2\theta d\theta$

या $xdx=-a^2\sin 2\theta d\theta$

तथा,जब $x=0\,,\, \cos 2\theta=1\Rightarrow\theta=\pi/4$

जब $x=a\,,\, \cos 2\theta=1\Rightarrow\theta=0$

$$\therefore\int_1^a x\sqrt{\frac{\left(a^2-x^2\right)}{\left(a^2+x^2\right)}}dx=-a^2\int_{\pi/4}^0\sqrt{\left(\frac{a^2-a^2\cos 2\theta}{a^2+a^2\cos 2\theta}\right)}\sin 2\theta d\theta$$

$$=-a^2\int_{\pi/4}^0\sqrt{\left(\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}\right)}\sin 2\theta d\theta$$

$$=-a^2\int_{\pi/4}^0\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.2\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=-a^2\int_{\pi/4}^0 2\sin^2\theta d\theta=-a^2\int_{\pi/4}^0\left(1-\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$=-a^2\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\pi/4}^0=-a^2\left[0-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}a^2(\pi-2)$$

**उदाहरण - 4** $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल - $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2 x dx}{a^2+b^2\tan^2 x}$, [ $\cos^2 x$ से भाग देने पर]

माना $\tan x=t$ तब $\frac{\sec^2 x dx=dt}{a^2+b^2\tan^2 x}$

तथा जब $x=0, t=0$ और जब $x=\frac{\pi}{2}, t=\infty$

$$\therefore \int_0^{\pi/2}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\int_0^{\infty}\frac{dt}{a^2+b^2t^2}$$

$$=\frac{1}{b^2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(a/b)^2+t^2}=\frac{1}{b^2}.\frac{b}{a}\left[\tan^{-1}\frac{bt}{a}\right]_0^{\infty}$$

$$=\frac{1}{ab}\left[\tan^{-1}\infty-\tan^{-1}0\right]$$

$$=\frac{1}{ab}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{2ab}$$

## 6.3 खण्डिश समाकलन विधि (Integration by parts)

**खण्डश:** समाकलन विधि द्वारा निश्चित समाकल $\int_a^b f(x)\theta(x)dx$ का मान ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम $\int f(x)\,\theta(x)\,dx$ का मान खण्डश: समाकलन विधि से ज्ञात करते हैं तत्पश्चात निश्चित समाकलन की परिभाषानुसार $\int_a^b f(x)\theta(x)dx$ का मान ज्ञात करते हैं।

**उदाहरण - 5** $\int_{-1}^{1}x\tan^{-1}x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हल -** यहाँ $\tan^{-1}x$ को प्रथम फलन तथा $x$ को द्वितीय फलन लेकर खण्डश: समाकलन करने पर

$$\int_{-1}^{1}x\tan^{-1}x dx=\left[\tan^{-1}x\left(\frac{1}{2}x^2\right)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}(1)-\frac{1}{2}\tan^{-1}(-1)\right]-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx$$

**[समाकल्य के अंश में 1 जोड़ने व घटाने पर]**

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}[x]_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\left[\tan^{-1}x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\left[1-(-1)\right]+\frac{1}{2}\left[\tan^{-1}(1)-\tan^{-1}(-1)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}-1+\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}-1+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-1=\frac{1}{2}(\pi-2)$$

**उदाहरण - 6** $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos 2x\log\sin x dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल**- यहाँ $\log\sin x$ को प्रथम फलन एव $\cos 2x$ को द्वितीय फलन लेकर खण्डश: समाकलन करने पर

$$=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos 2x\log\sin x dx=\left[\log\sin x\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}-\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cot x.\frac{\sin 2x}{2}dx$$

$$=\left[0-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]-\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2 x dx$$

$$=-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\log 2-\frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$=\frac{1}{4}\log 2-\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\log 2-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\log 2-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$

**उदाहरण - 7** $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल** - माना $\sin x=t,\ \therefore \cos x dx=dt$

सीमाएँ : जब $x=0,\ t=\sin 0=0$

औरजब $x=\pi/2,\ t=\sin\pi/2=1$

$$\therefore\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}dx=\int_0^1\frac{1}{(1+t)(2+t)}dt$$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{2+t}\right)dt$$

(आशिक भिन्नों में बदलने पर)

$$=\left[\log(1+t)-\log(2+t)\right]_0^1$$

$$=\left[\log\left(\frac{1+t}{2+t}\right)\right]_0^1=\log\frac{2}{3}-\log\frac{1}{2}=\log\frac{4}{3}$$

**उदाहरण - 8** $\int_0^1 xe^x dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल -** यहाँ $\int_0^1 xe^x dx=\left(xe^x\right)_0^1-\int_0^1 e^x dx$

$$=\left[e-0\right]-\left[e^x\right]_0^1$$

$$=e-\left[e-e^0\right]=1$$

**उदाहरण - 9** $\int_0^\pi x^2\sin x dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल -** $\int_0^\pi x^2\sin x dx=\left[-x^2\cos x\right]_0^\pi+2\int_0^\pi x\cos x dx$

**[खण्डश: समाकलन करने पर]**

**द्वितीय पद में पुन: खण्डश: समाकलन का प्रयोग करने पर**

$$\left[-\pi^2\cos\pi-0\right]+\left[2x\sin x\right]_0^\pi-\int_0^\pi x\sin x dx$$

$$=+\pi^2+\left[0-0\right]-2\left(-\cos x\right)_0^\pi$$

$$=\pi^2+2\left(\cos\pi-\cos 0\right)=\pi^2-4$$

## 6.4 : निश्चित समाकल के गुणधर्म(Properties of Definite integral)

गुणधर्म I :निश्चित समाकल में यदि समाकल की सीमाएँ (limits) समान रहे तो चर राशि को किसी अन्य चर राशि में बदलने पर इसके मान में कोई परिवर्तन नही होता

अर्थात $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

गुणधर्म II : निश्चित समाकल में यदि समाकल की सीमाओं को परस्पर बदला जायें तो समाकलन का मान तो वही रहता है परन्तु चिन्ह बदल जाते हैं

अर्थात $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

**गुणधर्म III :** यदि $a<c<b$ तो $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

**व्यापकीकरण**

यदि $a<c_1<c_2..............<c_n<b$ हो, तो

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{c_1} f(x)dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx+.....+\int_{c_n}^b f(x)dx$$

**टिप्पणी :** इस गुणधर्म का प्रयोग प्राय: तब करते हैं जब समाकल्य दिये गये समाकलन अन्तराल अर्थात् $[a,b]$ में एक से अधिक नियमों से प्राप्त होता है ।

**उदाहरण -** 10 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ जहाँ $f(x)=\begin{cases}1-2x, & x<0\\ 1+2x, & x>0\end{cases}$

**हल -** यहाँ दिये गये अन्तराल $[-1,1]$ मे फलन एक से अधिक नियम से परिभाषित है अर्थात

$f(x)=1-2x$, $x$के मान, $-1$से 0 के मध्य

$f(x)=1+2x$, $x$के मान,0 से 1 के मध्य

अत: $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{0}(1-2x)dx+\int_{0}^{1}(1+2x)dx$ [गुणधर्म III से]

$$=\left[x-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[x+x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$=\left[0-(-1-1)\right]+\left[1+1+0\right]$$

$$=2+2=4$$

**गुणधर्म IV:** $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$

इस गुणधर्म का प्रयोग प्राय: ऐसे समाकलों का मान ज्ञात करने में करते हैं जिनके समाकल्य अर्थात् $f(x)$ के हर में x की जगह $b-x$ रखने से परिवर्तन नहीं आता है । इस गुणधर्म के प्रयोग के लिए निम्न सीमा का शून्य होना आवश्यक है ।

**उदाहरण - 11**समाकल $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}dx$ का मान ज्ञात कीजिये ।

**हल -** माना $I=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}dx=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}}dx$

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx \qquad .......(1)$$

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\sin x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}dx \qquad \textbf{[गुणधर्म IV से]}$$

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{s\,inx}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx \qquad ......(2)$$

**समीकरण (1) व (2) को जोड़ने पर**

$$2I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{s\,inx}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\int_0^{\pi/2}I.dx=[x]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

**अतः** $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}dx=\frac{\pi}{4}$

**गुणधर्म V:** $\int_0^{na} f(x)dx=n\int_0^a f(x)dx,$ यदि $f(a+x)=f(x)$

**अर्थात फलन $f(x)$ आवर्तनांक a का आवर्ती फलन है।**

**गुणधर्म VI:** $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx,$ यदि $f(x)$ सम फलन हो अर्थात्

$f(-x)=f(x)$

=0,यदि $f(x)$ विषम फलन हो

अर्थात् $f(x)=-f(x)$

**गुणधर्म VII:** $\int_{-a}^{2a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx,$ यदि $f(2a-x)=f(x)$

=0,यदि $f(2a-x)=-f(x)$

**उदाहरण-12** निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_{-1}^{1}e^{|x|}dx$ (ii) $\int_{-a}^{\pi}|\cos x|dx$

**हल -** (i)हम जानते है कि $|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x\le 0\end{cases}$

$$\therefore \int_{-1}^{1}e^{|x|}dx=\int_{-1}^{0}e^{-x}dx+\int_0^1 e^x dx$$ **[गुणधर्म III से]**

$$=\left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\left[e^x\right]_0^1$$

$$=[-1+e]+[e-1]=2e-2$$

(ii) हम जानते हैं कि $|\cos x|=\begin{cases}\cos x, & 0<x\le\frac{\pi}{2}\\ -\cos x, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$

$$\therefore \int_0^{\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\pi/2}|\cos x|dx+\int_{\pi/2}^{\pi}|\cos x|dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos x dx-\int_{\pi/2}^{\pi}\cos x dx$$

$$=[\sin x]_0^{\pi/2}-[\sin x]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= (1-0)-(0-1) = 1+1 = 2$$

**उदाहरण- 13** $\int_0^{2\pi} \cos x dx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल :यहाँ $f(x) = \cos^5 x \quad \therefore f(2\pi - x) = \cos^5(2\pi - x) = \cos^5 x = f(x)$

$\therefore \int_0^{2\pi} \cos x dx = 2\int_0^{\pi} \cos x dx$ **[गुणधर्म VII से]**

पुनः $f(\pi - x) = \cos^5(\pi - x) = -\cos^5 x = -f(x)$

अतः $\cos^5 x$ एक विषम फलन है

$\therefore 2\int_0^{\pi} \cos x = 0$ **[गुणधर्म VII से]**

अतः $2\int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$

**उदाहरण - 14** सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$

हल : मान लो $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ ...... (1)

तब $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} dx$ **[गुणधर्म IV से]**

$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x} dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ ...... (2)

अब (1) व (2) का योग करने पर

$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \pi \int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2}$ **[माना** $\cos x = t, \quad -\sin x dx = dt$ ]

$= \pi \int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2}$ [गुणधर्म II से ]

$= \pi \left[\tan^{-1} t\right]_{-1}^{1} = \pi\left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(-1)\right]$

$= \pi\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi^2}{2}$

$\therefore I = \frac{\pi^2}{4}$

अतः $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$

### 6.4.1 एक महत्वपूर्ण समाकल (An important integral)

यहाँ हम एक ऐसे समाकल का मान ज्ञात करेंगे जिसका प्रयोग दूसरे समाकलों के मान ज्ञात करने के लिए सीधा किया जाता है। यह समाकल है :

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx = -\frac{\pi}{2} \log$$

हल : मान लो $I = \int_0^{\pi/2} \log \sin x dx$ ...... (i)

**गुणधर्म (IV)का प्रयोग करने पर**

$$I = \int_0^{\pi/2} \log \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \int_0^{\pi/2} \log \cos x dx \qquad \text{....... (ii)}$$

**निश्चित समाकल (i) तथा (ii) का योग करने**

$$2I = \int_0^{\pi/2} (\log \sin x + \log \cos x) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \sin x \cos x dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \frac{\sin 2x}{2} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\log \sin 2x - \log 2) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x dx - \int_0^{\pi/2} \log 2 dx \text{ .......(iii)}$$

$= I_1 - I_2$ [मान लो]

अब $I_1$ में $2x = t$ रखें, तो $2dx = dt$

तथा तब $x = 0, t = 0$ और जब $x = \pi/2, t = \pi$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \log \sin t . \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}.2\int_0^{\pi/2} \log \sin t dt \text{ (गुणधर्म VII से)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \sin t dx = I \text{ [गुणधर्म I से]}$$

पुनः $I_2 = \int_0^{\pi/2} \log 2 dx = \log 2 [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \log 2$

अब $I_1$ व $I_2$ का मान (iii) में रखने पर

$$2I = I - \frac{\pi}{2} \log 2 \Rightarrow I - \frac{\pi}{2} \log 2$$

टिप्पणी : क्योंकि $\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \log \cos x dx$ [गुणधर्म (IV) से ]

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \log \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न : 2**

(1) निश्चित समाकल की सीमाएँ समान रहें तो चर राशि को किसी अन्य चर राशि में बदलने पर निश्चित समाकल के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता **[सत्या/असत्य]**

(2) निश्चित समाकल की सीमाओं को परस्पर बदलने पर समाकल का मान वही रहता है परन्तु चिन्ह बदल जाते है। **[सत्या/असत्य]**

**उदाहरण- 15** मान ज्ञात कीजिए

$$\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x) dx$$

हल : मान लो $I = \int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x) dx$ ......(1)

तब $I=\int_0^{\pi/4}\log\left[1+\tan x\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]dx,$ **[गुणधर्म IV से]**

$$=\int_0^{\pi/4}\log\left[1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}dx\right]$$

$$=\int_0^{\pi/4}\log\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi/4}\log 2dx-\int_0^{\pi/4}\log\left(1+\tan x\right)dx \text{......(2)}$$

और (2) के योग से

$$2I=\int_0^{\pi/4}\log 2dx=\log 2\left[x\right]_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}\log 2$$

अतः $I=\frac{\pi}{8}\log 2$

**उदाहरण - 16** सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\infty}\frac{\log\left(1+x^2\right)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}\log 2$$

**हल-** मान लो $x=\tan\theta$ तब $dx=\sec^2\theta d\theta$

$$\therefore I=\int_0^{\pi/2}\frac{\log\left(1+\tan^2\theta\right)}{1+\tan^2\theta}\sec^2\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\log\sec^2\theta d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\log\sec^2\theta d\theta$$

$$=-2\int_0^{\pi/2}\log\sec^2\theta d\theta$$

$$=-2\left(-\frac{\pi}{2}\log 2\right)$$

$$=\pi\log 2,$$

## 6.5 : योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकल

## (Definite integral as a limit of sum)

अभी तक हमने समाकलन को अवकलज की प्रतिलोम सक्रिय के रूप में पढ़ा है । इस अनुच्छेद में हम निश्चित समाकल को एक श्रेणी के योगफल की सीमा के रूप में परिभाषित करेंगे जबकि श्रेणी के पदों की संख्या अनन्त की ओर अग्रसर होती है और श्रेणी का प्रत्येक पद शून्य की ओर अग्रसर होता है ।

**समाकलन गणित की मूल प्रमेय (Fundamental theorem of integral calculus)**

कथन : यदि अन्तराल [a,b] में $f\left(x\right)$ एक सतत फलन हो तथा $\frac{d}{dx}\left[F\left(x\right)\right]=f\left(x\right)$ तो

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = \lim_{h\to\infty} h\left[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+......+f\left[a+(n-1)h\right]\right]$$

जहाँ a और b निश्चित संख्यायें है तथा $h=\dfrac{b-a}{n}$ तथा $n\to\infty$

**उदाहरण - 17** $\int\limits_a^b x^2dx$ का मान योगफल की सीमा के रूप में ज्ञात करो ।

**हल :** यहाँ $f(x)=x^2$ अत: योगफल की सीमा के रूप में समाकल की परिभाषा से

$$\int_a^b x^2dx = \lim_{h\to 0}\left[f(a)+f(a+h)+(a+2h)+.....+f\left(a+\overline{n-1}h\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0} h\left[a^2+(a+h)^2+(a+2h)^2+.....+\left(a+\overline{n-1}h\right)^2\right]$$

$$=\lim_{h\to 0} h\left[a^2+\left(a^2+2ah+h^2\right)+\left(a^2+4ah+(ah)^2\right)+.........+\left\{a^2+2(n-1)ah+(n-1)^2h^2\right\}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0} h\left[na^2+\{1+2+3+....(n-1)\}2ah+\left\{1^2+2^2+.....(n-1)^2\right\}h^2\right]$$

$$=\lim_{h\to 0} h\left[na^2+\frac{n(n-1)}{2}2ah+\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}h^2\right]$$

$$=\lim_{h\to 0} nh\left[a^2+(nh-h)a+\frac{1}{6}(nh-h)(2nh-h)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}(b-a)\left[a^2+(b-a-h)a+\frac{1}{6}(b-a-h)(2b-2a-h)\right]$$

$$=(b-a)\left[a^2+(b-a)a+\frac{1}{3}(b-a)^2\right]$$

$$=\frac{1}{3}(b-a)\left[3a^2+3ab-3a^2+b^2+a^2-2ab\right]$$

$$=\frac{1}{3}(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)=\frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right)$$

**उदाहरण - 18** प्रथम सिद्धान्तों से $\int\limits_a^b e^xdx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल :** यहाँ $f(x)=e^x$ ,अत: समाकल की योगफल की सीमा के रूप की परिभाषा से

$$\int_a^b e^xdx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)\,f+.....+f\left(a+\overline{n-1}h\right)\right]$$

जहाँ $nh=b-a$

$$=\lim_{h\to 0} h\left[e^a+e^{a+h}+e^{a+2h}+.........+e^{a+(n-1)h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0} he^a\left[1+e^h+e^{2h}+.........+e^{(n-1)h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0} he^a\,\frac{e^{nh}-1}{e^h-1}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}e^a\left(e^{b-a}-1\right) \qquad \left[\therefore \lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{e^h}=1\right]$$

$$=1.e^a\left(e^{b-a}-1\right)=e^b-e^a$$

**उदाहरण- 19** निम्नलिखित समाकलों के मान प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात कीजिए ।

(i) $\int_a^b \sin x dx$ (ii) $\int_0^2 (2x+1)dx$

**हल :**(i) $\int_a^b \sin x dx=\lim_{h\to 0}h\left[f(a)+f(a+h)+.....+f\left(a+\overline{n-1}h\right)\right]$

$$=\lim_{h\to 0}h\left[\sin a+\sin(a+h)+\sin(a+2h)+.....+\sin\left(a+(n-1)h\right)\right]$$

$$\lim_{h\to 0}h\left[\frac{\sin\left(a+(n-1)\frac{h}{2}\right)\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\right], \qquad \left[\therefore h=\frac{b-a}{n}\right]$$

$$=2\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin\left(a+\frac{b-a}{2}-\frac{h}{2}\right)\sin\frac{b-a}{2}}{\left(\sin\frac{h/2}{h/2}\right)}\right], \qquad \left[\therefore \lim_{h\to 0}=\frac{\sin\theta}{\theta}=1\right]$$

$$=2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \quad \left[\because 2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$$

$$=\cos a-\cos b$$

(ii) $\int_0^2 (2x+1)dx$, यहाँ $a=0, b=2, f(x)=2x+1$

तथा $h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$ हैं ।

$$\therefore \int_0^2 (2x+1)dx=\lim_{h\to 0}h\left[f(0)+f(0+h)+f(0+2h)+.....+f\left(0+\overline{n-1}h\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}h\left[f(0)+f(h)+f(2h)+.....+f\left(\overline{n-1}h\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}h\left[1+(2h+1)+(2.2h+1)+.........+\left(2(n-1)h+1\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}h\left[n+2h\left(1+2+3+.....(n-1)\right)\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}h\left[n+2h\frac{n(n-1)}{2}\right], \quad \left[\therefore 1+2+3+...n=\frac{n(n-1)}{2}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[nh+h^2n^2-nh^2\right]=\lim_{h\to 0}\left[2+4-2h\right]=6$$

## 6.6: श्रेणी का योग योगफल (Summation of series)

**योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकल की परिभाषानुसार**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+.....+f\left(a+\overline{n-1}h\right)\right]$$

जहाँ $nh = b-a$

**यदि हम** $b=1$ **तथा** $a=0$ **ले तो** $h = 1/n$ **होगा तथा** $n\to\infty$

**जबकि** $h\to 0$

$$\therefore \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} h\left[f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+.....+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

या $$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n-1} f(r/n)$$

अत: एक अनन्त श्रेणी के योग को निश्चित समाकल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इस विधि से हम श्रेणियों के योग की सीमा ज्ञात कर सकते हैं।

**क्रिया विधि (Working rule):-**

(i) सर्वप्रथम दी हुई श्रेणी को निम्न रूप में व्यक्त कीजिए :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n-1} f(r/n)$$

(ii) संगत निश्चित समाकल लिखने के लिए :-

$(r/n)$के स्थान पर के स्थान पर $dx$ तथा $\sum$ के स्थान पर $\int$ लिखें ।

(iii) समाकल की निम्न एवं उच्च सीमायें लिखें, जो क्रमश: r के निम्नतम एवं उच्चतम मानों के लिए $=\lim_{h\to 0}\left(\frac{r}{n}\right)$ के मान हैं।

**टिप्पणी :**श्रेणी में पदों की संख्या n होनी चाहिये किन्तु चूंकि श्रेणी का प्रत्येक पद शून्य की ओर अग्रसर होता है अतः कुछ निश्चित पदों की संख्या बढ़ाने अथवा घटाने से अभीष्ट सीमा का मान अपरिवर्तित रहता है।

**उदाहरण - 20** निम्न श्रेणी के योग की सीमा ज्ञात कीजिए जबकि $n\to\infty$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....+\frac{1}{2n}$$

**हल :** यहाँ व्यापक पद $=\dfrac{1}{n+r}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+.....+\frac{1}{2n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n+r}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+(r/n)}.\frac{1}{n}$$

यहाँ संगत निश्चित समाकल की सीमाएँ होंगी जब $r=1$ तब निम्न सीमा $=\lim_{n\to\infty}(r/n)=0$

जब $r=n$ तब निम्न सीमा $=\lim_{n\to\infty}(r/n)=1$

$=\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$, [$\left(\frac{r}{n}\right)$ की जगह $x, \frac{1}{n}$ की जगह $dx$, तथा $\sum$ की जगह $\int$ लिखने पर]

$=\lim_{n\to\infty}\left[\log(1+x)\right]_0^1 = \log 2 - \log 1$

$=\log 2$

**उदाहरण - 21** $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{1^3+n^3}+\frac{2^2}{2^3+n^3}+.....+\frac{r^2}{r^3+n^3}+...+\frac{1}{2n}\right]$ का मान ज्ञात कीजिये।

**हल :-** यहाँ व्यापक पद $=\frac{r^2}{r^3+n^3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{1^3+n^3}+\frac{2^2}{2^3+n^3}+.....+\frac{r^2}{r^3+n^3}+...+\frac{1}{2n}\right]$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{r^2}{r^3+n^3}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{(r/n)^2}{(r/n)^3+1}.\frac{1}{n}$

अब संगत निश्चित समाकल की सीमायें होंगी

जब $r=1$ तब निम्न सीमा $=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{n}\right)=0$

जब $r=n$ तब उच्च सीमा $=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{n}\right)=1$

**अतः** $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx=\left[\frac{1}{3}\log\left(x^3+1\right)\right]_0^1=\frac{1}{3}[\log 2-\log 1]$

$=\frac{1}{3}\log 2$

**उदाहरण-22 :** निम्न श्रेणी के योग की सीमा ज्ञात कीजिए जबकि

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2}{\left(n^2+1\right)^{3/2}}+\frac{n^2}{\left(n^2+2^2\right)^{3/2}}+\frac{n^2}{\left(n^2+3^2\right)^{3/2}}+...+\frac{n^2}{\left[n^2(n-1)^2\right]^{3/2}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n-1}\frac{n^2}{\left(n^2+r^2\right)^{3/2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{\left(1+r^2/n^2\right)^{3/2}}.\frac{1}{n}$$

**संगत निश्चित समाकल**

$$=\int_0^{\pi/4}\frac{\sec^2\theta}{\left(1+\tan^2\theta\right)^{3/2}}d\theta,$$ [$\frac{r}{n}$ की जगह x, $\frac{1}{n}$ की जगह, $dx$ तथा $\sum$ की जगह $\int$ लिखने पर]

$$=\int_0^{\pi/4}\frac{\sec^2\theta}{\left(1+\tan^2\theta\right)^{3/2}}d\theta,$$ जहाँ $x=\tan\theta$

$$=\int_0^{\pi/4}\cos\theta d\theta=\left[\sin\theta\right]_0^{\pi/4}=\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

**उदाहरण -23 :** मान ज्ञात कीजिए

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right).......\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n}$$

**हल :-** मान लो

$$y=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right).......\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n}$$

अब दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\log_e y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\log\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)+\log\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right)+.......+\log\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left\{\log\left(1+\frac{r^2}{n^2}\right)\right\}.\frac{1}{n}\Rightarrow\int_0^1\log\left(1+x^2\right)dx$$

$$=\left[x\log\left(1+x^2\right)\right]_0^1-\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\left[\log 2-\log 1\right]-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\left[\log 2-\log 1\right]-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\log 2-2\left[x-\tan^{-1}x\right]_0^1=\log 2-2\left[x-\tan^{-1}(1)\right]$$

$$=\log 2-2\left(1-\pi/4\right)$$

$$\therefore\log_e y=\log 2-2+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\log_e y-\log 2=\frac{\pi}{2}-2$$

Or $\log_e y/2=\frac{1}{2}(\pi-4)\Rightarrow\frac{y}{2}=e^{\left(\frac{\pi}{2}-2\right)}$

$$\Rightarrow\frac{y}{2}=2e^{\left(\frac{\pi}{2}-2\right)}$$

**उदाहरण -24 :** $\lim_{n\to\infty} = \frac{(\lfloor n)^{1/n}}{n}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल :** मान लो $y = \lim_{n\to\infty} = \frac{(\lfloor n)^{1/n}}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1.2.3.....n}{n^n}\right]^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}.\frac{2}{n}.\frac{3}{n}...\frac{r}{n}....\frac{n}{n}\right]^{1/n}$$

**अब दोनों पक्षों का log लेने पर**

$$\log_e y = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\log\frac{1}{n}+\log\frac{2}{n}+\log\frac{3}{n}+....+\log\frac{n}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\left\{\log\left(\frac{r}{n}\right)\right\}.\frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \log x dx$$

$$= [x\log x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}.xdx$$

$$= 0 - \int_0^1 dx = -[x]_0^1 = -1\left[\lim_{x\to 0} x\log x = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0\right]$$

$$\therefore \log_e y = -1 \Rightarrow y = e^{-1} = 1/e$$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 3**

प्रश्न:1 $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n+r}$ को निश्चित समाकल के रूप में लिखिए ।

प्रश्न:2 $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{r^3}{r^4+n^4}$ को निश्चित समाकल के रूप में लिखिए ।

## 6.7 : समानयन सूत्र (Reduction formula)

वह सूत्र जो एक समाकल को किसी दूसरे सरलतम समाकल के पदों में व्यक्त करें, पहले वाले समाकल का समानयन सूत्र कहलाता है । समानयन सूत्र के प्रयोग से हम समाकल्य की घात या क्रम को संकुचित कर सरलता से समाकलन ज्ञात कर सकते है ।

यहाँ सूत्र सामान्यत: खण्डश: समाकल के नियम का प्रयोग कर प्राप्त किए जाते हैं ।

**समानयन सूत्र**

(i) $$\int \sin^n xdx = -\frac{\sin^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} xdx$$

**[यहाँ n समाधन पूर्णांक है]**

जब n विषम धन पूर्णांक हो तो $\cos x = t$ प्रतिस्थापित करके फलन का समाकलन करते है । यहाँ $n = 2k+1$ लेने पर

चूंकि $k \in N$ अतः द्विपद प्रमेय से समाकल्य $\left(1-t^2\right)^k$ का $(k+1)$ पदों के योगफल रूप में प्रसार कर प्रत्येक पद कर समाकलन किया जाता है ।

(ii) $$\int \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$$

**[जब x सम धन पूर्णांक हैं ।]**

जब n विषम धन पूर्णांक हो तो फलन का समाकलन $\sin x = t$ प्रतिस्थापन द्वारा प्राप्त किया जा सकता है ।

(iii) $$\int \tan^n x dx \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx$$

(iv) $$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int co\,t^{n-2} x dx$$

(v) $$\int \sec^n x dx = -\frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x dx$$

**[जब n विषम धन पूर्णांक हो ]**

**विशेष स्थिति :** जब n एक सम धन पूर्णांक हो, तो प्रतिस्थापन $\tan x = t$ द्वारा भी फलन का समाकलन किया जा सकता है ।

मान लो $n = 2k, \quad k \in N$

तो $\int \sec^n x dx = \int \sec^{2k} x dx$

$= \int \sec^{2k-2} x \sec^2 x dx$

$= \int \left(1+\tan^2 x\right)^{k-1} \sec^2 x dx$

$\int \sec^n x dx = \int \left(1+t^2\right)^{k-1} dt$

**चूँकि** $k \in N$, अतः द्विपद प्रमेय की सहायता से $\left(1+t^2\right)^{k-1}$ का K पदों के योगफल रूप में प्रसार कर प्रत्येक पद का समाकलन किया जा सकता है ।

(vi) $$\int co\sec^n x dx = -\frac{\cos ec^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int co\sec^{n-2} x dx$$

**[जब n विषम धन पूर्णांक हो]**

विशेष स्थिति : जब n सम धन पूर्णांक हो, तो प्रतिस्थापन $\cot x = t$ द्वारा फलन का समाकलन आसानी से प्राप्त किया जा सकता है ।

**6.7.1 निश्चित समाकल का मान ज्ञात करना**

(a) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx, x \in N$

**हल :** (a) $\sin^n x$ के समानयन सूत्र में सीमाऐं 0 तथा $\pi/2$ लेने पर

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \left[-\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx$$

$$= 0 + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-2} xdx$$

**समानयन सूत्र का पुनः प्रयोग करने पर**

$$= \frac{n-1}{n}\left\{\left[\frac{\sec^{n-2} x\cos x}{n-2}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-3}{n-2}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-4} xdx\right\}$$

$$= \frac{n-1}{n}\left\{0 + \frac{n-3}{n-2}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-4} xdx\right\}$$

$$\frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-4} xdx$$

**पुनः समानयन सूत्र का प्रयोग करने पर**

$$\frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}\int_0^{\pi/2}\sin^{n-6} xdx$$ **इत्यादि**

(i) जब n विषम हो तो अन्तिम समाकल

$$= \int_0^{\pi/2}\sin xdx$$

**अतः** $\int_0^{\pi/2}\sin xdx = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}.....\frac{4}{5}.\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\sin xdx$

$$= \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}.....\frac{4}{5}.\frac{2}{3}\left[-\cos x\right]_0^{\pi/2}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\sin xdx = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}.....\frac{4}{5}.\frac{2}{3}.1}$$

(ii) जब n सम धन पूर्णांक हो तो अन्तिम समाकल $= \int_0^{\pi/2}\sin^0 xdx = \int_0^{\pi/2}1dx$

**अतः** $\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}......\frac{3}{4}.\frac{1}{2}\left[x\right]_0^{\pi/2}$

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}......\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}}$$

(b) $\cos^n x$ में $x = \frac{\pi}{2} - t$ प्रतिस्थापित करने पर

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n xdx = \int_{\pi/2}^{0}\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt) = \int_0^{\pi/2}\sin^n tdt$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2}\cos^n xdx = \int_0^{\pi/2}\sin^n xdx$$

**अतः** $\int_0^{\pi/2}\cos^n xdx = \begin{cases}\frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}.....\frac{2}{3}.1 \\ \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}.....\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}\end{cases}$

**उदाहरण - 25** $\int_0^{\pi/4}\sin^4 2xdx$ का मान ज्ञात कीजिए ।

**हल :** माना $2x=t$ तो $2dx=dt$ या $dx=\frac{1}{2}d$

**अतः** $\int_0^{\pi/4}\sin^4 2xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sin^4 tdt$

$=\frac{1}{2}.\frac{4-1}{4}.\frac{4-3}{4-2}.\frac{\pi}{2}$ [ $lw=esan=4$ सम धन पूर्णाक रखने पर]

$=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{32}$

**उदाहरण - 26** $\int_0^{\pi/2}\sin^7 xdx$ का मान ज्ञात कीजिए।

**हल :** $\int_0^{\pi/2}\sin^7 xdx=\frac{7-1}{7}.\frac{7-3}{7-2}.\frac{7-5}{7-4}.1$

$=\frac{6}{7}.\frac{4}{5}.\frac{2}{3}.1=\frac{16}{35}$

**उदाहरण - 27** मान ज्ञात कीजिए $\int_0^{a}\left(a^2+x^2\right)^{5/2}dx$

**हल :** यदि $x=a\tan\theta$ तो $dx=a\sec^2\theta d\theta$

तथा सीमायें $x=0\Rightarrow\theta=0$ तथा $x=a\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$

**अतः** $\int_0^{a}\left(a^2+x^2\right)^{5/2}dx=\int_0^{\pi/4}a^5\sec^5\theta.a\sec^2\theta d\theta$

$=a^6\int_0^{\pi/4}\sec^7\theta d\theta$ .....(1)

अब हम निम्न समानयन सूत्र का प्रयोग करेंगे

$$\int\sec^n\theta d\theta=\frac{\sec^{n-2}\theta\tan\theta}{n-1}+\frac{n-2}{n-1}\int\sec^{n-2}\theta d\theta \qquad \text{....... (2)}$$

सूत्र (2) में बारी बारी से $n=7,5,3$ रखकर सीमा 0 से $\pi/4$ लेने पर

$=\int_0^{\pi/4}\sec^7\theta d\theta=\left[\frac{\sec^5\theta\tan\theta}{6}\right]_0^{\pi/4}+\frac{5}{6}\int_0^{\pi/4}\sec^5\theta d\theta$

$=\frac{4\sqrt{2}-0}{6}+\frac{5}{6}\int_0^{\pi/4}\sin^5\theta d\theta$ .....(3)

$\int_0^{\pi/4}\sec^5\theta d\theta=\left[\frac{\sec^3\theta\tan\theta}{6}\right]_0^{\pi/4}+\frac{5}{6}\int_0^{\pi/4}\sec^3\theta d\theta$

$=\left[\frac{2\sqrt{2}-0}{4}\right]+\frac{3}{4}\int_0^{\pi/4}\sin^3\theta d\theta$ ..........(4)

$\int_0^{\pi/4}\sec^3\theta d\theta=\left[\frac{\sec\theta\tan\theta}{2}\right]_0^{\pi/4}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\sec\theta d\theta$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\left[\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\log 1\right]_0^{\pi/4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\left[\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\log 1\right] \quad \text{.....(5)}$$

समी.(5) का प्रयोग समी.(4) में करने पर

$$\int_0^{\pi/4}\sec^5\theta d\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{5}{6}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}\right] \text{.....(6)}$$

समी.(6) का प्रयोग समी.(3) में करने पर

$$\int_0^{\pi/4}\sec^7\theta d\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{5}{6}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{4}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{5}{6\sqrt{2}}+\frac{5}{8\sqrt{2}}+\frac{5}{16}\log\left(\sqrt{2}-1\right) \quad \text{............(7)}$$

समी.(1) एवं(7) से अभीष्ट समाकल

$$\int_o^a (a^2+x^2)^{5/2} = a^6\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{5}{6\sqrt{2}}+\frac{5}{8\sqrt{2}}+\frac{5}{16}\log\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$$

$$= a^6\left[\frac{67\sqrt{2}}{48}+\frac{5}{16}\log\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$$

$$= \frac{a^6}{48}\left[67\sqrt{2}+15\log\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$$

## 6.8 : सारांश

इस इकाई में आपने निश्चित समाकल की परिभाषा एवं निश्चित समाकल को हल करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन किया। आपने जाना कि निश्चित समाकल के गुणधर्मो एव समानयन सूत्रों का प्रयोग करके समाकल्य का हल किस प्रकार प्राप्त किया जाता है आपने दी गयी श्रेणी का योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकल के रूप में हल करने की विधि का अध्ययन किया ।

## 6.9 : शब्दावली

| | |
|---|---|
| निश्चित | Definite |
| सीमाएँ | Limits |
| गुणधर्म | Properties |
| अन्तराल | Interval |
| श्रेणी | Series |

## 610 : स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

**स्वमूल्यांकन प्रश्न-1**

(1) उत्तर इकाई से पड़े

(2) $\frac{1}{2}$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न-2**

(1) सत्य

(2) सत्य

**स्वमूल्यांकन प्रश्न-3**

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$

(2) $\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}dx$

## 6.11: अभ्यास प्रश्न

प्रश्न:1 निम्नलिखित निश्चित समाकल के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$

(iii) $\int_0^{\pi/4} \sin^3 x dx$

(iv) $\int_0^2 \log x dx$

(v) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

(vi) $\int_0^{\pi/2} \sin 3x \sin 2x dx$

उत्तर : (i) $\pi/4$ (ii) $1/3$ (iii) $4/3$ (iv) $\log\frac{4}{e}$

(v) $\tan^{-1} e - \frac{\pi}{4}$ (vi) $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

प्रश्न:2 निम्न समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int_0^1 |5x-3|dx$ (ii) $\int_5^5 |x-2|dx$

उत्तर : (i) $\frac{13}{10}$ (i) 29

प्रश्न:3 सिद्ध कीजिए की निम्न में से प्रत्येक समाकल का मान है।

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan x}$

(iv) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cot x}$

[Hint: गुणधर्म (iv) की सहायता से]

प्रश्न : 4 सिद्ध कीजिए निम्न में से प्रत्येक समाकल का मान शून्य है

(i) $\int_0^{\pi/2} \log \tan \theta d\theta$ $\qquad (ii) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos X - \sin X}{1 + \sin X \cos X}$

$(iii) \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta \log \tan \theta d\theta$

प्रश्न : 5 प्रथम सिद्धान्त से निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए।

$(i) \int_0^1 a^{3x} dx$ [उत्तर = $\left(a^3 - 1\right) 3\log_e a$]

$(ii) \int_a^b e^{-x} dx$ [उत्तर = $= e^{-3} - e^{-b}$]

$(iii) \int_1^3 \left(2x^2 + 5\right) dx$ [उत्तर = $82/3$]

$(iv) \int_3^5 (x - 2) dx$ [उत्तर = 4]

प्रश्न : 6 निम्न लिखित श्रेणियों के अनन्त पदों तक योग ज्ञात कीजिए।

$(i) \frac{1}{n} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + .......... + \frac{1}{8n}$ [उत्तर = 3/8)

$(ii) \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)} + .......... + \frac{1}{3n}$ [उत्तर = log 3]

$(iii) \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+4)^3}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+8)^3}} + ........... + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\left\{n + 4(n-1)^3\right\}}}$

[उत्तर = $\frac{5 - \sqrt{5}}{10}$

प्रश्न : 7 निम्न समाकलों का मान ज्ञात कीजिए।

$(i) \int_0^{\pi} \sin^5 \frac{x}{2} dx$ $\qquad (ii) \int_0^3 \sqrt{\left(\frac{x^3}{3 - x}\right)} dx$

$(iii) \int_0^{\pi/4} \sec^3 x dx$ $\qquad (iv) \int_0^a \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)}}$

उत्तर: $(i) \frac{16}{15}$ $\qquad (ii) \frac{27}{8}\pi$

$(iii) \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \log\left(\sqrt{2} + 1\right)\right]$ $\qquad (iv) \frac{3\pi}{16} a^4$

# इकाई 7 : शांकव परिच्छेद (Conic-Section)

**इकाई की रूपरेखा**

## 7.0 : उद्देश्य

इस इकाई में शांकव परिच्छेद के विषय में चर्चा की गयी है। इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप,

* समझ सकेंगे कि शांकव परिच्छेद किसे कहते हैं और मुख्यतः ये कितने प्रकार के होते हैं।
* आप यह जानकारी प्राप्त कर सकेंगे कि इनके मानक समीकरण क्या होते हैं।
* आप समझ सकेंगे कि $x, y$ में द्विघात व्यापक समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ को इनके मानक समीकरण में किस प्रकार से परिवर्तित करते हैं।
* आप समझ सकेंगे कि कोई रेखा $y = mx + c$ शांकव परिच्छेद को यदि दो बिन्दुओं पर काटती है या स्पर्श करती है या बाहर रहती है तो इसके लिए क्या प्रतिबन्ध होते हैं।
* आप यह भी समझ सकेंगे कि शांकव परिच्छेद के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण क्या होते हैं।

## 7.1 : प्रस्तावना

इस इकाई में हम शांकव परिच्छेद के विषय में चर्चा करेंगे और यह बतलायेंगे कि शांकव परिच्छेद किन परिस्थितियों में परवलय, दीर्घवृत्त तथा अतिपरवलय होता है। इन तीनों के मानक समीकरणों का अध्ययन करते हुए इनसे सम्बन्धित प्रमुख सूत्रों के विषय में भी चर्चा करेंगे।

## 7.2: शांकव परिच्छेद की परिभाषा

शांकव परिच्छेद एक ऐसे बिन्दु P का बिन्दुपथ होता है, जो एक समतल में इस प्रकार गति करता है कि उसकी उसी समतल में स्थित एक स्थिर बिन्दु S तथा एक स्थिर रेखा से दूरीयों का अनुपात सदैव अचर रहता है।

स्थिर बिन्दु S को नाभि (Focus) स्थिर रेखा को नियता (Directrix) तथा अचर अनुपात को शांकव परिच्छेद की उत्केन्द्रता (Eccentricity) कहते हैं और इसे e से प्रदर्शित करते है। यदि e = 1, व e < 1 तथा e >, 1 हो तो शांकव परिच्छेद क्रमशः परवलय (Parabola), दीर्घवृत्त (Ellipse) तथा अतिपरवलय (Hyperbola) कहलाता है।

नियता के लम्बवत् तथा नाभि से गुजरने वाली रेखा को शांकव परिच्छेद का अक्ष कहते हैं। शांकव परिच्छेद तथा इसके अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु शांकव परिच्छेद का शीर्ष (Vertex) कहलाता है।

## 7.3 : शांकव परिच्छेद का व्यापक समीकरण

माना एक समतल में स्थित स्थिर बिन्दु S के निर्देशांक $(\alpha,\beta)$ तथा स्थिर रेखा ZZ' का समीकरण $lx + my + n = 0$ है।

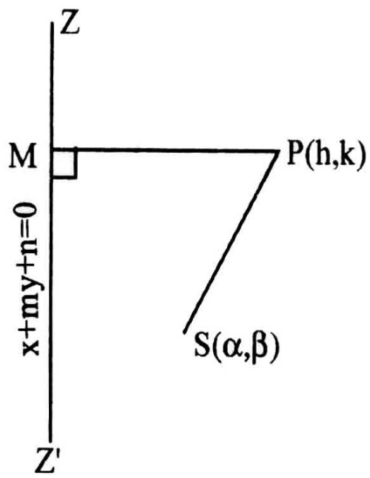



Fig.(7.1)

पुन: माना कि किसी समय इस समतल में गतिमान बिन्दु P के निर्देशांक $(h,k)$ हैं। PS को मिलाया तथा P स्थिर रेखा ZZ' पर लम्ब PM डाला। अब परिभाषा अनुसार

$$\frac{PS}{PM}=e$$

या $(PS)^2=e^2(PM)^2$

या $(h-\alpha)^2+(k-\beta)^2=e^2\left(\frac{\ell h+mk+n}{\sqrt{\ell^2+m^2}}\right)^2$

बिन्दु $P(h,k)$ का बिन्दुपथ अर्थात् शांकव परिच्छेद समीकरण होगा

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=e^2\left(\frac{\ell x+mk+n}{\sqrt{\ell^2+m^2}}\right)^2$$

इस समीकरण को सरल कर निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

**जहाँ** $a,b,c,f,g,h$ अचर हैं।

## 7.4 : परवलय की परिभाषा

परवलय एक समतल में उस गतिमान बिन्दु का बिन्दुपथ है जो इस प्रकार गति करता है कि उसकी उसी समतल में एक स्थिर बिन्दु से दूरी तथा एक स्थिर रेखा से दूरी सदैव बराबर रहती है।

### 7.4.1 परवलय का समीकरण: -

माना कि ZZ' परवलय की नियता तथा बिन्दु S परवलय की नाभि है। नाभि- S से नियता ZZ' पर SK लम्ब डाला। माना A,SK का मध्य बिन्दु है तो परवलय की परिभाषा से बिन्दु A परवलय पर स्थित होगा और यह परवलय का शीर्ष है।

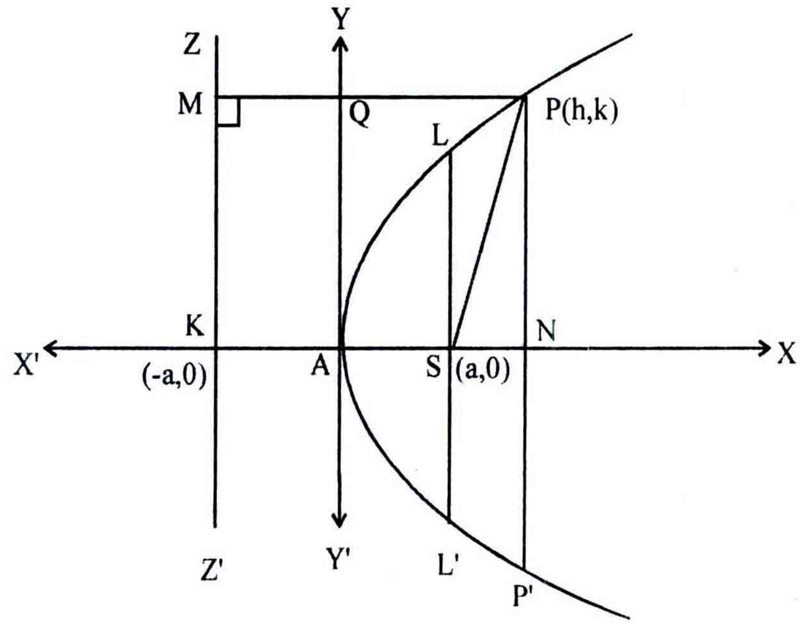



Fig.(7.2)

रेखा AS को x- अक्ष बिन्दु A को मूल बिन्दु तथा A से जाने वाली और AS पर लम्ब रेखा AY को y-अक्ष माना। माना कि नाभि S के निर्देशांक (a=0) है । चूकि AS =AK, इसलिए बिन्दु K के निर्देशांक (-a,0) होंगे। नियता का समीकरण x = -a होगा । माना P(h,k) परवलय पर स्थित कोई चर बिन्दु है। बिन्दु P से नियता ZZ' पर PM लम्ब डाला। परवलय की परिभाषा से

$$PS = PM$$

या $(PS)^2 = (PM)^2$

या $(h-a)^2 + k^2 = (h+a)^2$

या = $k^2 = 4$ a h

अत: बिन्दु P (h,k) का बिन्दुपथ $y^2 = 4ah$ होगा, जो परवलय का अभीष्ट समीकरण है।

### 7.4.2 परिभाषायें

(i) **नाभीय दूरी -** परवलय पर स्थित किसी बिन्दु P(x,y) की नाभि S से दूरी PS, बिन्दु P की नाभीय दूरी कहलाती है। चित्र (7.2) से PS = PM = PQ + QM = x+a

(ii) **नाभीय जीवा -.** परवलय की नाभि से गुजरने वाली किसी भी जीवा को नाभीय जीवा कहते हैं।

(iii) **द्विकोटि -** परवलय की वह जीवा जो परवलय की अक्ष के लम्बवत् हो परवलय की द्विकोटि कहलाती है। चित्र (7.2) में जीवा PNP' द्विकोटि है।

(iv) **नाभिलम्ब -** वह नाभीय जीवा जो परवलय के अक्ष के लम्बवत् हो नाभिलम्ब कहलाती है। अर्थात वह द्विकोटि जो नाभि से गुजरती है नाभिलम्ब कहलाती है। चित्र (7.2) में जीवा LSL' नाभिलम्ब है।

**7.4.3 नाभिलम्ब का समीकरण एवं उसकी लम्बाई: -**

नाभिलम्ब की परिभाषा के अनुसार यह एक सरल रेखा है जो y-अक्ष के समान्तर परवलय $y^2=4ax$ के नाभि (a,0) से गुजरती है। अत: इसका समीकरण x = a है । चूँकि परवलय $y^2=4ax$ अपनी अक्ष (x -अक्ष) के सममित है अत : चित्र (7. 2) के अनुसार SL = SL '. नाभिलम्ब की लम्बाई $LL^1$=2SL. माना SL=b, तो बिन्दु L के निर्देशांक (a,b) होंगे तथा यह परवलय $y^2=4ax$ पर स्थित है। अत :

$$b^2=4a^2$$

या $b=\pm 2a$

अत: नाभिलम्ब की लम्बाई $=2\times 2a=4a$, बिन्दु $L$ और $L^1$ के निर्देशांक क्रमश: $(a,2a)$ और $(a,-2a)$ होंगे।

परवलय $y^2=4ax$ के लिए : -

(i) शीर्ष (0, 0)

(ii) नाभि (a, 0)

(iii) अक्ष का समीकरण y =0

(iv) नियता का समीकरण x+a = 0

(v) नाभिलम्ब का समीकरण x = a

(vi) नाभिलम्ब की लम्बाई 4a

(vii) नाभिलम्ब के सिरों के निर्देशांक (a,2a); (a -2a)

जब नाभि नियता के बाँई ओर स्थित हो अर्थात् जब a < 0 हो तो परवलय का समीकरण $y^2=-4ax$ होगा तथा उपर्युक्त सभी परिणाम संगत परिणाम में a, की जगह, -a प्रतिस्थापित करने से प्राप्त होंगे।

यदि x और y को परस्पर बदल दें तो परवलय की स्थिति चित्र (7.3) में दर्शाये अनुसार होगी तथा इसका मानक समीकरण $a^2$ = 4ay होगा।

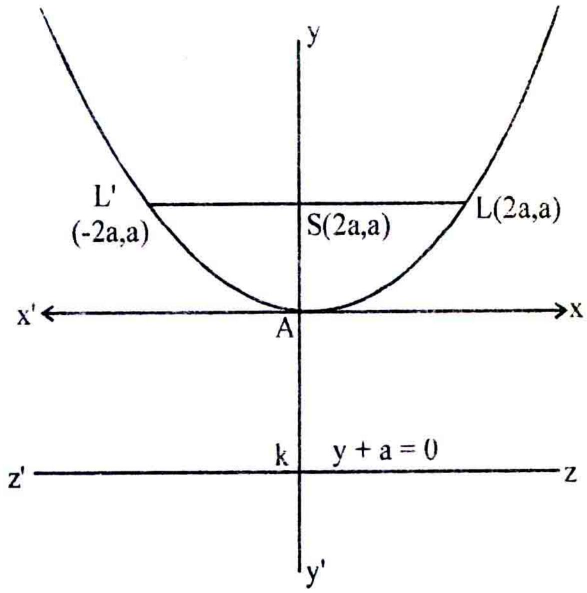



Fig.(7.3)

इस परवलय के लिए

(i) शीर्ष (0, 0)

(ii) नाभि (0, 0)

(iii) अक्ष का समीकरण x = 0

(iv) नियता का समीकरण y+a = 0

(v) नाभिलम्ब का समीकरण y= a

(vi) नाभिलम्ब की लम्बाई 4a

(vii) नाभिलम्ब के सिरों के निर्देशांक (2a,a); (-2a, a)

जब नाभि नियता के नीचे स्थित हो अर्थात् जब a < 0 हो तो उपर्युक्त परवलय का समीकरण $x^2 = -4ay$ होगा तथा इसके लिए सभी परिणाम संगत परिणाम में a की जगह -a प्रतिस्थापित करने से प्राप्त होंगे।

**7.4.4 परवलय का व्यापक समीकरण: -**

यदि किसी परवलय की नाभि $(\alpha, \beta)$ तथा नियता ax + by + c = 0 हो, तो इसका समीकरण होगा। $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$

जो सरल करने पर निम्न रूप में प्राप्त होता है $(bx-ay)^2+2gx+2fy+d = 0$, जहाँ g,f,d अचर हैं। इस समीकरण को देखने से परवलय के व्यापक समीकरण की निम्न विशेषताऐं सामने आती हैं

(i) यह दो चरों में द्विघात समीकरण है।

(ii) इसमें द्विघात के सभी पद मिलकर पूर्ण वर्ग बनाते है।

(iii) इसमे एक घात का कम से कम एक पद विद्यमान है।

अतः दो चरों x,y में व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ एक परवलय निरूपित करता है यदि

(i) $h^2=ab$

(ii) $abc+2fgh-af^2-by^2-ch^2 \neq 0$

**उदाहरण : - 1** परवलय $y^2=2y-2x$ का शीर्ष, अक्ष, नाभि, नियता एवं नाभिलम्ब की लम्बाई ज्ञात करो।

**हल : -** दिये हुए परवलय का समीकरण $y^2=2y-2x$ है

या $y^2-2y=-2x$

या $(y-1)^2=-2x+1$

या $(y-1)^2=-2(x-\frac{1}{2})$

उपर्युक्त समीकरण में y-1 = Y तथा $x-\frac{1}{2}$ = X रखने पर $Y^2$, = - 2X.......... (1)

जो परवलय $y^2$ = 4 axके रूप का है । इसका समीकरण (1) से तुलना करने पर 4a = -2 या $a=-\frac{1}{2}$ दिये हुये परवलय का शीर्ष (X= 0, Y = 0) या $\left(x=\frac{1}{2},y=1\right)$.

अतः शीर्ष है । परवलय के अक्ष का समीकरण Y = 0 या y = 1 है। परवलय की नाभि (X = a = $-\frac{1}{2}$, 0) या (x = 0,y = 1) अतः नाभि (0, 1) है।

नियता का समीकरण $X=-a=\frac{1}{2}$ या x = 1 है।

नाभिलम्ब की लम्बाई = 4 a = 2

**उदाहरण -2** सिद्ध करो कि परवलय, $y^2=4ax$ के शीर्ष से गुजरने वाली सभी जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ परवलय $y^2=2ax$ होता है।

**हल :-** माना AB परवलय, $y^2=4ax$ के शीर्ष A (0, 0) से गुजरने वाली कोई जीवा है। पुनः माना C (h, k) जीवा AB के मध्य बिन्दु के निर्देशांक हैं। अतः बिन्दु B के

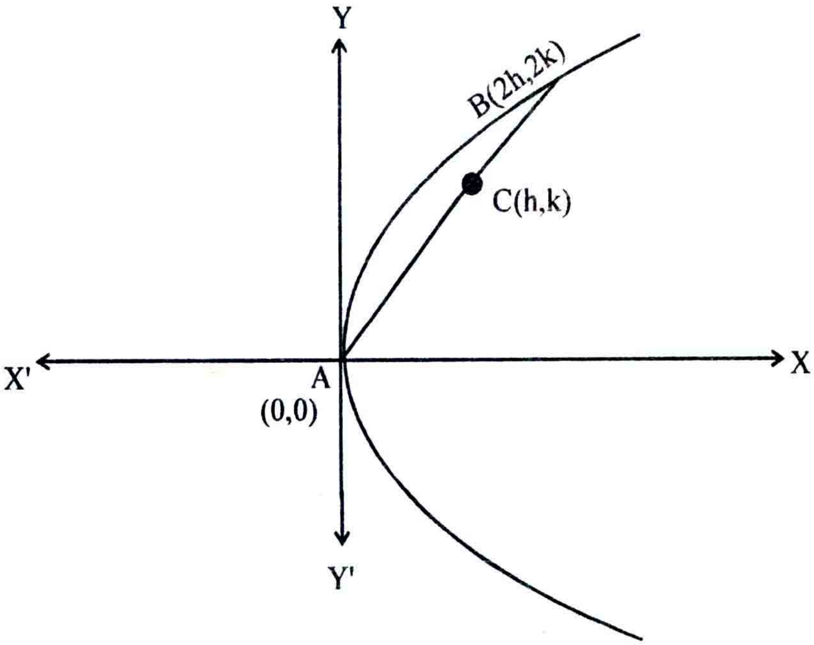



Fig.(7.4)

निर्देशांक (2h ,2k) लेंगे। चूँकि बिन्दु B (2h, 2k) परवलय $y^2=4ax$ यक्ष पर स्थित है, इसलिए $4k^2=8ah$

या $k^2=2ah$

बिन्दु C (h, k) का बिन्दुपथ $y^2=2ax$ होगा।

**उदाहरण - 3** यदि परवलय का शीर्ष व नाभि x-अक्ष पर मूल बिन्दु से क्रमश: a तथा $a^1$ दूरी पर हों तो सिद्ध करो कि परवलय का समीकरण $y^2=4\left(a^1-a\right)\left(x-a\right)$ होगा।

**हल : -** माना A परवलय का शीर्ष और S नाभि है, तो चित्र (7.5) से

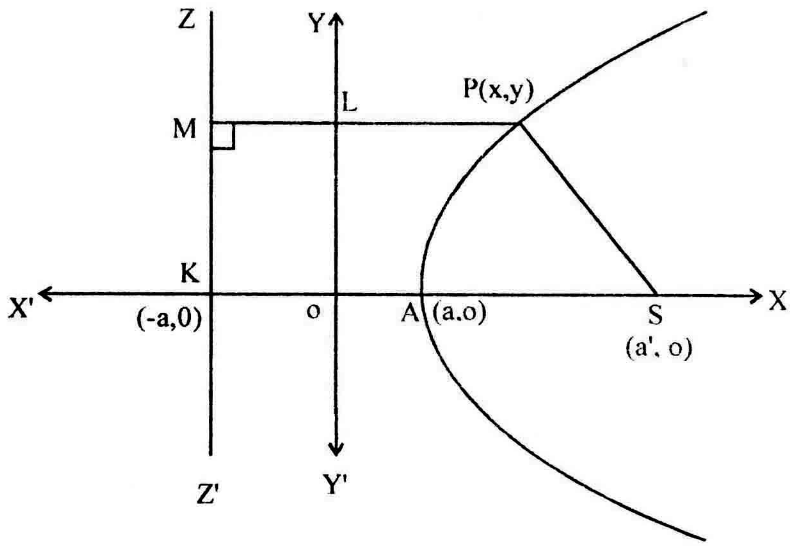



Fig.(7.5)

OA = a,    OS = $a^1$

$\therefore$ AS = OS - OA= $a^1$-a

$\therefore$ शीर्ष A और नाभि S के निर्देशांक क्रमश (a,0) और (द्ध ', ०) हैं। परवलय के अक्ष का समीकरण y = 0 है। SA को K तक इतना बढ़ाया कि

$$SA=AK=a^1-a \text{ तथा } OK=AK-OA=\left(a^1-a\right)-a=a^1-2a=LM$$

अत: नियता का समीकरण $x=-\left(a^1-2a\right)=2a-a^1$ या $x-2a+a^1=0$ है।

माना P (x, y) परवलय पर कोई बिन्दु है। परवलय के परिभाषा के अनुसार -

PS = PM

या $(PS)^2=(PM)^2=(PL+LM)^2$

या $\left(x-a^1\right)^2+(y-o)^2=\left(x-2a+a^1\right)^2$

या $x^2-2a'x+a'^2+y^2=x^2+4a^2+a'^2-4ax+2a'x-4aa^1$

या $y^2=4a^2-4ax+4a^1x-4aa^1$

या $y^2=-4a(x-a)+4a^1(x-a)$

$=4(x-a)\left(a^1-a\right)$

$=4\left(a^1-a\right)(x-a).$

**यही परवलय का अभिष्ट समीकरण है।**

**स्वमूल्यांकन प्रश्न :- 1**

1. निम्न समीकरणों में कौन-कौन से परवलय के समीकरण हैं?

(i) $x^2-y^2+2xy-5$ = 0

(ii) $4x^2+9y^2-12xy+x+1$ = 0

(iii) $4x^2+3x-5y+1$ = 0

2. उस परवलय का समीकरण ज्ञात करो जिसकी नाभि (3, 0) और नियता का समीकरण x+2 = 0 है।

## 7.5 : परवलय एवं सरल रेखा का प्रतिच्छेदन

माना परवलय का समीकरण है

$y^2=4ac$ .......... (1) तथा सरल रेखा का समीकरण है

$y=mx+c$ ............ (2) समीकरण (2) से y को मान को समीकरण (1) में रखने पर

$(mx+c)^2=4ax$

या $m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0$ ..............(3)

चूँकि समीकरण (3), x में द्विघातीय है इसलिए कोई भी सरल रेखा परवलय को दो बिन्दुओं पर काटेगी। ये दोनों बिन्दु वास्तविक एवं भिन्न, संपाती या काल्पनिक होंगे यदि समीकरण (3) के दोनों मूल वास्तविक एवं भिन्न, संपाती या काल्पनिक होंगे। इसके लिए

$$\left[2(mc-2a)\right]^2-4m^2c^2>=<=0$$

या $m^2c^2-4mca+4a^2-m^2c^2>=<0$

या $a(a-mc)>=<=0$

या $a>=<mc$

अतः रेखा $y=mx+c$ परवलय $y^2=4ax$ को स्पर्श करेगी यदि a = mc या $c=\frac{a}{m}$ अतः रेखा $y=mx+\frac{a}{m}$ सदैव परवलय $y^2=4ax$ को m वास्तविक मान $(m \neq o)$ के लिए स्पर्श करती है। स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{a}{m^2},\frac{2a}{m}\right)$ होंगे। यदि रेखा (2) परवलय (1) को दो बिन्दुओं P और Q पर काटती है तो जीवा PQ की लम्बाई $\frac{4}{m^2}\sqrt{a(a-mc)(1+m^2)}$ होगी।

## 7.6 : परवलय के प्राचलिक समीकरण सर्व प्राचलिक निर्देशांक

परवलय $y^2=4ax$ के प्राचलिक समीकरण $x=at^2,y=2at$ हैं। अतः इस परवलय पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशकों $(at^2,2at)$ हैं। बिन्दु $(at^2,2at)$ को संक्षेप में बिन्दु 't' कहते हैं। t बिन्दु का प्राचल कहलाता है।

## 7.7 : स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब का समीकरण एवं परवलय से सम्बन्धित प्रमुख सूत्र

(i) परवलय $y^2=4ax$ के बिन्दु $(x_1,y_1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $yy_1=2a(x+x_1)$ होता है।

(ii) परवलय $y^2=4ax$ के बिन्दु $(at^2,2at)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $ty=x+at^2$ होता है। परवलय $y^2=4ax$ के '$t_1$' और '$t_2$' बिन्दुओं पर खींची गई स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु $(at_1t_2,a(t_1+t_2))$ होता है।

(iii) परवलय $y^2=4ax$ के बिन्दु $(x_1,y_1)$ पर अभिलम्ब का समीकरण होता है

$$y-y_1=-\frac{y_1}{2a}(x-x_1) \quad .........(1)$$

यदि अभिलम्ब की प्रवणता m हो, तो $m=-\frac{y_1}{2a}$

या $y_1=-2am$

चूँकि बिन्दु $(x_1,y_1)$ परवलय $y^2=4ax$ पर स्थित है।

$\therefore \quad y_1^2=4ax_1$

या $4a^2m^2=4ax_1$

या $x_1=am^2$

$x_1$ और $y_1$ के मान समीकरण (1) में रखने पर

$y+2am=m\left(x-am^2\right)$

या $y=mx-2am-am^3$ ........(2)

समीकरण (2) में m उस कोण की स्पर्शज्या है जो अभिलम्ब x-अक्ष के साथ बनाता है। अभिलम्ब के पाद के निर्देशांक $\left(am^2,-2am\right)$ होंगे जहाँ. m अभिलम्ब की प्रवणता है।

(iv) **परवलय** $y^2=4ax$ के बिन्दु 't' पर अभिलम्ब का समीकरण है

$y+tx=2at+at^3$ ......... (3)

उपर्युक्त समीकरण (2) और (3) से स्पष्ट है कि m प्रवणता वाले अभिलम्ब के अभिलम्ब बिन्दु का प्राचल 't' हो, तो $t=-m$.

समीकरण (2) से स्पष्ट है कि रेखा $y=mx+c$ परवलय $y^2=4ax$ का अभिलम्ब है यदि $c=-2am-am^3$

(v) किसी बिन्दु से परवलय पर तीन अभिलम्ब खींचे जा सकते है। माना परवलय का समीकरण $y^2=4ax$ है तथा अभिलम्ब का समीकरण $y=mx-2am-am^3$ है जहाँ m अभिलम्ब की प्रवणता है। यदि यह अभिलम्ब दिये हुए बिन्दु $\left(x_1,y_1\right)$ से गुजरता है, तो

$y_1=mx_1-2am-am^3$

या $am^3+\left(2a-x_1\right)m+y_1=0$ ............(4)

चूँकि समीकरण (4), m में त्रिघातीय है इसलिए किसी बिन्दु $\left(x_1,y_1\right)$ से परवलय पर तीन अभिलम्ब खींचे जा सकते है। माना समीकरण (4) के $m_1,m_2,m_3$ हैं। इसलिए

$$m_1+m_2+m_3=-\frac{m2 \text{ का गुणांक}}{m3 \text{ का गुणांक}}$$

$$=\frac{o}{a}=0$$

अत: प्रवणताओं का योग शून्य है। अभिलम्बों के पादों की कोटियों का योग

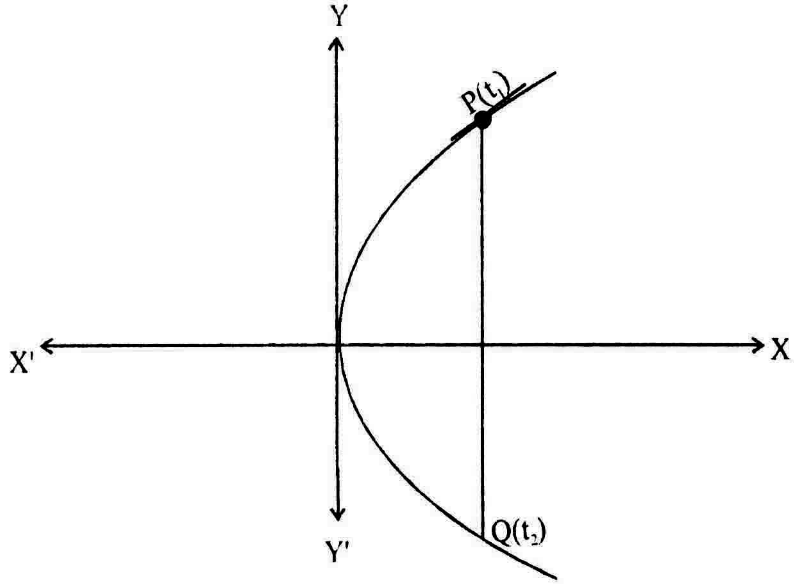
$$=-2am_1-2am_2-2am_3$$

$$=-2a\left(m_1+m_2+m_3\right)$$

$$=-2a\times 0$$

$$=0$$

(vi) परवलय के प्रत्येक बिन्दु (शीर्ष को छोड़कर) पर खींचा गया अभिलम्ब पवरवलय को पुन: एक बिन्दु पर काटता है। परिणामत: परवलय के प्रत्येक बिन्दु पर खींचे गये भिलम्ब के संगत एक जीवा प्राप्त होती है जिसे उस बिन्दु पर अभिलम्ब जीवा कहते है। यदि परवलय $y^2=4ax$ के बिन्दु




चित्र (7.6)

$P(t_1)$ पर खींचा गया अभिलम्ब परवलय को पुन: $Q(t_2)$ पर मिलता है तो $t_2=-t_1-\frac{2}{t_1}$

यदि बिन्दुओं $t_1$ और $t_2$ पर खींचे गये अभिलम्ब पुन: परवलय पर मिलते है। तो $t_1t_2=2$.

(vii) हम जानते हैं कि किसी बाहरी बिन्दु से परवलय पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं। इन दोनों स्पर्श रेखाओं के स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा उस बिन्दु के सापेक्ष परवलय की स्पर्श जीवा कहलाती है। बिन्दु $(x_1,y_1)$ से परवलय $y^2=4ax$ न पर खींची गयी स्पर्श जीवा का समीकरण $yy_1=2a(x+x_1)$ है।

(viii) परवलय $y^2=4ax$ के जीवा का समीकरण जिसके मध्य बिन्दु के निर्देशांक $(x_1,y_1)$ हैं $T=S_1$ होता है, जहाँ $T=yy_1-2a(x+x_1)$ तथा $S_1\equiv y_1^2-4ax$ हैं।

(ix) किसी परवलय की समान्तर जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दु पथ उसका व्यास कहलाता है । परवलय $y^2=4ax$ की समान्तर जीवाओं $y=mx+c$ ( $c$ प्राचल है) के मध्य बिन्दुओं का बिन्दु पथ अर्थात व्यास का समीकरण $y=\frac{2a}{m}$ होता है तथा परवलय की अक्ष के समान्तर है

(x) किसी बाहरी बिन्दु $(x_1,y_1)$ से परवलय $y^2=4ax$ पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं का संयुक्त समीकरण $SS_1=T^2$ होता है, जहाँ

$S\equiv y^2-4ax_1, S_1\equiv y_1^2-4ax_1,$ तथा $T\equiv yy_1-2a(x+x_1)$

(xi) बिन्दु $(x_1,y_1)$ परवलय $y^2=4ax$ के अन्दर या ऊपर या बाहर स्थित है यदि $S_1<0$ या $S_1=0$ या $S_1>0$, जहाँ $S_1 \equiv y_1^2-4ax_1$ है।

**स्वमूल्यांकन प्रश्न -2**

1. परवलय $y^2=16x$ के नाभिलम्ब के ऊपरी सिरे पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये।
2. रेखा $y=2x+3$ के समान्तर परवलय $y^2=8x$ के अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।
3. परवलय $y^2=8x$ के बिन्दु (2,4) पर खींचा गया अभिलम्ब परवलय को पुन: किस बिन्दु पर मिलता है?

**उदाहरण - 1** यदि परवलय $y^2=4ax$ की किसी नाभीय जीवा के एक सिरे के निर्देशांक $(at^2,2at)$ हों, तो सिद्ध कीजिये कि दूसरे सिरे के निर्देशांक $\left(\frac{a}{t^2},\frac{-2a}{t}\right)$ होंगे तथा जीवा की लम्बाई $a\left(t+\frac{1}{t}\right)^2$ होगी।

**हल -** परवलय $y^2=4ax$ पर स्थित बिन्दुओं ' $t$ ' व ' $t_1$ ' को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$y-2at=\frac{2a(t_1-t)}{a(t_1-t)(t_1+t)}(x-at^2)$$

या $$y-2at=\frac{2(x-at^2)}{(t_1+t)}$$

या $$(y-2at)(t_1+t)=2x-2at^2$$

या $$y(t_1+t)-2att_1-2at^2=2x-2at^2$$

या $$y(t_1+t)=2x+2att_1$$

यदि यह जीवा नाभि (a,0) से होकर जाती है, तो

$$0=2a+2att_1$$

या $$tt_1=-1$$

या $$t_1=-\frac{1}{t}$$

अत: दूसरे सिरे के निर्देशांक $\left(\frac{a}{t^2},\frac{-2a}{t}\right)$ होंगे।

नाभिय जीवा की लम्बायी $=\sqrt{a^2(t_1^2-t^2)^2+4a^2(t_1-t)^2}$

$$=a\sqrt{(t_1-t)^2(t_1-t)^2+4(t_1-t)^2}$$

$$=a(t_1-t)\sqrt{(t_1+t)^2+4}$$

$$=a(t_1-t)\sqrt{(t_1^2+t^2+2tt_1-4tt_1} \quad \text{क्योंकि} \quad tt_1=-1$$

$$=a\left(t+\frac{1}{t}\right)^2$$

**उदाहरण - 2** सिद्ध करो कि रेखा $y=mx+c$ परवलय $y^2=4a(x+a)$ को स्पर्श करती है, यदि $c=am+\frac{a}{m}$.

**हल -** दी हुई रेखा का समीकरण

$y=mx+c$ ...........(1)

दिये हुए परवलय का समीकरण

$y^2=4a(x+a)$ ............... (2)

समीकरण (1) से y का मान समीकरण (2) में रखने पर

$(mx+c)^2=4a(x+a)$

या $m^2x^2+2(mc-2a)x+(c^2-4a^2)=0$ .............(3)

रेखा (1) परवलय (2) की स्पर्श रेखा होगी यदि समीकरण (3) के दोनों मूल संपाती होंगे। इसके लिए

$$4(mc-2a)^2-4m^2(c^2-4a^2)=0$$

या $m^2c^2+4a^2-4amc-m^2c^2+4m^2a^2=0$

या $4a(a-mc-am^2)=0$

या $c=am+\frac{a}{m}$

**उदाहरण - 3** सिद्ध करो कि परवलय $y^2=4ax$ की उन स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दुओं का बिन्दुपथ नियता है जो एक दूसरे पर लम्ब है।

**हल -** हम जानते है कि रेखा

$y=mx+\frac{a}{m}$ ............ (1)

परवलय $y^2=4ax$ की स्पर्श रेखा होती है। माना (h, k)स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु है, तो समीकरण (1) से $k=m\hbar+\frac{a}{m}$

या $m^2h-mk+a=0$ ..........(2)

माना $m_1$ व $m_2$ इसके दो मूल हैं। अत:

$m_1m_2=\frac{a}{\hbar}$

**प्रश्नानुसार** $m_1m_2=-1$

अत: $\quad -1=\frac{a}{\hbar}$

या $\quad \hbar+a=0$

बिन्दु (h, k) का बिन्दुपथ x+a=0 होगा जो कि नियता का समीकरण है।

**उदाहरण - 4** सिद्ध करो कि परवलय $y^2=4ax$ की नाभीय जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ भी परवलय $y^2=2a(x-a)$ होता है।

**हल -** माना परवलय $y^2=4ax$ के किसी नाभीय जीवा का मध्य बिन्दु $(x_1,y_1)$ है। जीवा का समीकरण $T=S_1$ होगा।

या $\quad yy_1-2a(x+x_1)=y_1^2-4ax_1$

चूँकि यह जीवा परवलय की नाभि (a,0) से गुजरती है अत:

$$0-2a(a+x_1)=y_1^2-4ax_1$$

या $\quad y_1^2=2a(x_1-a)$

बिन्दु $(x_1,y_1)$ का बिन्दुपथ $y^2=2a(x-a)$ होगा।

**उदाहरण - 5** वृत्त $x^2+y^2+2ax=0$ तथा परवलय $y^2=4ax$ की उभयनिष्ट स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये।

**हल -** दिये हुए परवलय का समीकरण

$$y^2=4ax \qquad \text{........(1)}$$

दिये हुए वृत्त का समीकरण

$$x^2+y^2+2ax=0 \qquad \text{.........(2)}$$

वृत्त का केंद्र (-a, 0) तथा त्रिज्या a है। हम जानते है कि रेखा

$$y=mx+\frac{a}{m} \qquad \text{.......... (3)}$$

परवलय (1) की स्पर्श रेखा है। यदि यह वृत्त (2) को स्पर्श करती है, तो वृत्त के केन्द्र (-a,0) से रेखा (3) पर डाले गये लम्ब की लम्बाई वृत्त के त्रिज्या के बराबर होगी। अत:

$$\left|\frac{0-am+\frac{a}{m}}{\sqrt{1+m^2}}\right|=a$$

या $\quad (1-m^2)^2=m^2(1+m^2)$

या $\quad m^4-2m^2+1=m^2+m^4$

या $\quad 3m^2=1$

या $\quad m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

m इस मान को समीकरण (3) में रखने पर

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x\pm\sqrt{3}a$$

या $\sqrt{3}y=\pm x\pm 3a$

यही उभयनिष्ट स्पर्श रेखाओं के समीकरण हैं।

**उदाहरण-6** सिद्ध कीजिये की परवलय का अर्ध नाभिलम्ब किसी नाभिय जीवा के खण्डों का हरात्मक माध्य होता है।

**हल -** माना परवलय का समीकरण $y^2=4ax$ है। पुन: माना परवलय के किसी नाभिय जीवा के एक सिरे के निर्देशांक $P(at^2,2at)$ हैं, तो दूसरे सिरे $P'$ के निर्देशांक $\left(\frac{a}{t^2},\frac{-2a}{t}\right)$ होंगे। परवलय की नाभि $S(a,0)$ है।

$$\therefore SP=\sqrt{(at^2-a)^2+(2at-0)^2}=a\sqrt{t^4+2t^2+1}$$

$$=a(t^2+1)$$

$$SP'=\sqrt{\left(\frac{a}{t^2}-a\right)^2+\left(\frac{-2a}{t}-0\right)^2}=a\sqrt{\frac{1}{t^4}+\frac{2}{t^2}+1}$$

$$=\frac{a}{t^2}\sqrt{t^4+2t^2+1}=\frac{a}{t^2}(t^2+1)$$

अब

$$\frac{2SP.SP^1}{SP+SP^1}=\frac{\frac{2a^2}{t^2}(t^2+1)^2}{a(t^2+1)\left[1+\frac{1}{t^2}\right]}=\frac{\frac{2a^2(t^2+1)^2}{t^2}}{\frac{a(t^2+1)^2}{t^2}}$$

$=2a=$ अर्ध नाभिलम्ब

अतः $SP,2a,SP'$ हरात्मक श्रेणी में हैं।

**उदाहरण - 7** सिद्ध करो कि सरल रेखा $2x+y-12a=0$ परवलय $y^2=4ax$ पर अभिलम्ब है तथा उसकी लम्बाई $5\sqrt{5}a$ इकाई है।

**हल -** सरल रेखा का समीकरण

$y=-2x+12a$ ............ (1)

परवलय का समीकरण

$y^2=4ax$ ............(2)

समीकरण (1) से

$y=-2x+12a$ ............ (3)

हम जानते हैं कि रेखा $y=mx+c$ परवलय $y^2=4ax$ पर अभिलम्ब होती है यदि $c=-2am-am^3$. यहाँ $c=12a$ और $m=-2$.

अतः $-2am-am^3=4a-a(-2)^3=4a+8a=12a$

अतः रेखा (1) परवलय (2) पर अभिलम्ब है। अभिलम्ब का अभिलम्ब बिन्दु $(am^2,-2am)=(4a,-4a)$. इस बिन्दु की बिन्दु $(at^2,2at)$ से तुलना करने पर $t=-2$.

हम जानते है कि परवलय $y^2=4ax$ के किसी बिन्दु $'t_1'$ पर खींचा गया अभिलम्ब यदि परवलय पर पुन: बिन्दु $'t_2'$ पर मिलता हैं तो

$$t_2=-\frac{2}{t_1}-t_1$$

$$=-\frac{2}{-2}-(-2)=1+2=3$$

इस बिन्दु के निर्देशांक $(9a,6a)$ होंगे।

जीवा की लम्बाई $=\sqrt{(9a-4a)^2+(16a+4a)^2}$

$$=a\sqrt{25+100}$$

$$=a\sqrt{125}$$

$$=5\sqrt{5}a$$ इकाई

**उदाहरण - 8** किसी परवलय के उन स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात करो जो एक दूसरे से $\alpha$ कोण बनाती हैं।

**हल -** माना परवलय का समीकरण $y^2=4ax$ है। माना m के पदों में परवलय की किसी स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y=mx+\frac{a}{m} \qquad \text{...........(1)}$$

माना रेखा (1) बिन्दु $(h,k)$ से गुजरती है। अत:

$$m^2\hbar-mk+a=0 \qquad \text{........(2)}$$

माना $m_1$ व $m_2$ समीकरण (2) के मूल हैं।

$$\therefore\ m_1+m_2=\frac{\hbar}{k}$$

तथा $m_1m_2=\frac{a}{h}$

बिन्दु $(h,k)$ से जाने वाली दोनों स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण $\alpha$ है। अत:

$$\tan\alpha=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}}{1+m_1m_2}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{k^2}{h^2}-\frac{4a}{\hbar}}}{1+\frac{a}{h}}=\frac{\sqrt{k^2-4ah}}{a+h}$$

या $\quad k^2-4ah=(a-h)^2\tan^2a$

बिन्दु $(\hbar,k)$ का बिन्दुपथ होगा

$$y^2-4ax=(a+x)^2\tan^2\alpha$$

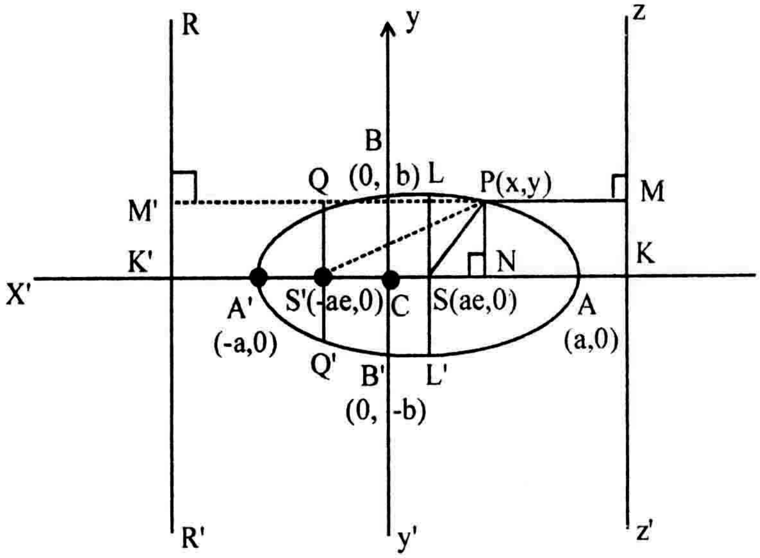
## 7.8 : दीर्घवृत्त की परिभाषा

दीर्घवृत्त एक समतल में उस बिन्दु का बिन्दुपथ है जो इस प्रकार गति करता है कि उसकी उसी समतल में एक स्थिर बिन्दु (नाभि) से दूरी तथा उसकी समतल में स्थित एक स्थिर रेखा (नियता) से दूरी का अनुपात सदैव अचर रहता है और यह अनुपात एक से कम होता है। अचर अनुपात को दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता कहते हैं और इसे e द्वारा प्रदर्शित करते है।

स्पष्टत : $e < 1$.

### 7.8.1 दीर्घवृत्त का मानक समीकरण

माना S दीर्घवृत्त की नाभि, ZZ' इसकी नियता तथा SK नाभि से नियता पर डाला गया लम्ब है। चूँकि दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता,




चित्र (7.7)

$e<1$ है इसलिए दीर्घवृत्त रेखा SK को $e:1$ के अनुपात में A और A' पर क्रमश: अन्त: एवं बाह्य विभाजित करेगा। चूँकि A दीर्घवृत्त पर है।

$\therefore AS=eAK$ ............(1)

**इसी प्रकार चूँकि** A' **दीर्घवृत्त पर है**

$\therefore A^1S=eA^1K$ ...........(2)

**माना** $AA'=2a$ **और** C **इसका मध्य बिन्दु है, तो**

$CA=CA'=a$

**समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर**

$AS+A'S=e(AK+A'K)$

या $AA'=e(CK-CA+CA'+CK)$

या $AA'=2eCK$, क्योंकि $CA=CA'$

या $2a=2eCK$, क्योंकि $AA'=2a$

या $CK=\frac{a}{e}$ ............(3)

**समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर**

$A'S-AS=e(A'K-AK)$

या $(A'C+CS)-(CA-CS)=eAA'$

या $2CS=2ae$, क्योंकि $CA=CA'$ और $AA'=2a$

या $CS=ae$ ................(4)

माना $AA'$ का मध्य बिन्दु $C$ मूल बिन्दु $CA$, x- अक्ष और $C$ से जाने वाली $AA'$ के लम्ब रेखा y अक्ष है। इसलिए नाभि S के निर्देशांक $(ae,o)$ हैं और नियता $ZZ'$ का समीकरण $x=\frac{a}{e}$ होगा।

माना $P(x,y)$ दीर्घवृत्त पर कोई बिन्दु है और $PM$ नियता $ZZ'$ पर व $PN$, x- अक्ष पर $P$ से लम्ब है। दीर्घवृत्त की परिभाषा के अनुसार

$PS=ePM$

या $(PS)^2 = e^2(PM)^2$

या $(x-ae)^2+(y-0)^2=e^2(NK)^2$, क्योंकि $PM=NK$

या $(x-ae)^2 + y^2 = e^2(CK-CN)^2$

या $(x-ae)^2 + y^2=e^2((\frac{a}{e}-x)^2)$ क्योंकि $CN=x$

या $x^2-2aex+a^2e^2+y^2=e^2\left(\frac{a^2}{e^2}-\frac{2ax}{e}+x^2\right)$

या $x^2-2aex+a^2e^2+y^2=a^2-2aex+e^2x^2$

या $x^2(1-e^2)+y^2=a^2(1-e^2)$

या $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$

या $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ जहाँ $b^2=a^2(1-e^2)$

यही दीर्घवृत्त का मानक समीकरण है। चूँकि दीर्घवृत्त में $e < 1$ होता है, इसलिए $b < a$ होगा। यदि चित्र (7.7) में x-अक्ष पर मूलबिन्दु C की दायी तरफ अर्थात् ऋणात्मक दिशा में एक बिन्दु S' तथा एक अन्य बिन्दु K' इस प्रकार लिये जायें कि CS' = CS = ae तथा $CK'=CK=\frac{a}{e}$ तो नाभि $S'(-ae,o)$, नियता $RK'$ का समीकरण $x=-\frac{a}{e}$ होगा तथा इसके सापेक्ष दीर्घवृत्त का उपर्युक्त समीकरण ही प्राप्त होता है। अत : प्रत्येक दीर्घवृत्त के लिए दो नाभियाँ तथा दो नियताएँ होती हैं।

### 7.8.2 परिभाषायें

(i) **शीर्ष :** नाभियों को मिलाने वाली रेखा दीर्घवृत को जिन बिन्दुओं पर मिलती हैं वे बिन्दु दीर्घवृत्त के शीर्ष कहलाते हैं। चित्र (7.7) में A (a, o); A' (-a, o) शीर्ष हैं।

(ii) **दीर्घ अक्ष :** दीर्घवृत्त के शीर्षों को मिलाने वाली जीवा AA' इसकी दीर्घ अक्ष कहलाती है। मानक दीर्घवृत्त के लिए दीर्घअक्ष का समीकरण y = 0 तथा इसकी लम्बाई 2a है।

(iii) **लघुअक्ष :** दीर्घवृत्त के दीर्घ अक्ष को लम्बवत् समद्विभाजित करने वाली जीवा BB' दीर्घवृत्त के लिए लघुअक्ष कहलाती है। मानक दीर्घवृत्त के लिए लघुअक्ष का समीकरण x=0 तथा इसकी लम्बाई 2b है।

(iv) **केन्द्र :** दीर्घवृत्त के दीर्घ अक्ष एवं लघु अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु दीर्घवृत्त का केंद्र कहलाता है। मानक दीर्घवृत्त के लिए केन्द्र C (0.0) है। दीर्घवृत्त के केंद्र से जाने वाली प्रत्येक जीवा केन्द्र पर समद्विभाजित होती है।

(v) **मुख्य अक्ष :** दीर्घ अक्ष व लघु अक्ष दोनों दीर्घवृत्त के मुख्य अक्ष कहलाते है।

(vi) **नाभिलम्ब :** दीर्घवृत्त के नाभि से जाने वाली और नियता के समान्तर रेखा नाभिलम्ब कहलाती है। चित्र (7.7) में LSL' और QS'Q' दो नाभिलम्ब हैं तथा नाभिलम्ब की लम्बाई $=\frac{2b^2}{a}=2a(1-e^2)$ है।

(vii) **उत्केन्द्रता :** दीर्घवृत्त के समीकरण

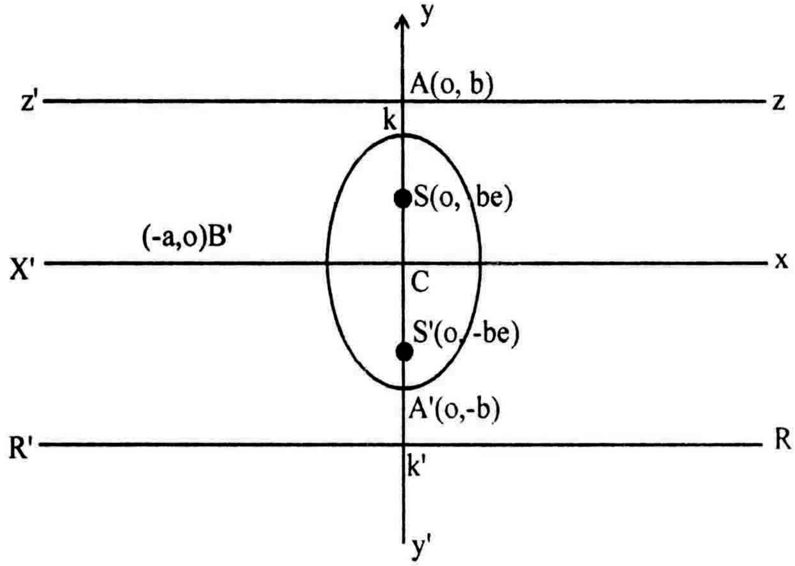
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ में $b^2=a^2(1-e^2)$ से

$$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

(viii) दीर्घवृत्त के किसी बिन्दु P की नाभीय दूरियों का योग अचर तथा दीर्घवृत्त की दीर्घ अक्ष के बराबर होता है, अर्थात् $PS+PS'=2a$. दीर्घवृत्त के इसी गुणधर्म के कारण इसे निम्न प्रकार से भी परिभाषित करते है। दीर्घवृत्त एक समतल में उस बिन्दु का बिन्दुपथ है जो इस प्रकार गति करता है कि उसी समतल में स्थित दो स्थिर बिन्दुओं से दूरियों का योग सदैव अचर रहता हैं।

(ix) यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ में b > a हो तो $a^2=b^2(1-e^2)$ होगा। दीर्घवृत्त के इस रूप में, x-अक्ष लघु अक्ष तथा y-अक्ष दीर्घ अक्ष होती है। यहाँ दीर्घ अक्ष की लम्बाई 2b तथ लघु अक्ष की लम्बाई 2a होती है।




चित्र (7.8)

इसकी नाभियों S व S' के निर्देशांक क्रमश: (o,be) व (o,-be) होते हैं। नियताओं के समीकरण $y=\pm\frac{b}{e}$ होते हैं। यहाँ नाभिलम्ब की लम्बाई $\frac{2a^2}{b}$ होती है।

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 3**

1. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (1,o), उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ तथा नियता x= 4 है।
2. दीर्घवृत्त $16x^2+25y^2=400$ के दीर्घ अक्ष की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
3. दीर्घवृत्त $9x^2+4y^2=36$. के नाभिलम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

**उदाहरण - 1** उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसकी नाभि (-1, 1), नियता $x-y+4=0$ तथा उत्केन्द्रता $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$ हैं।

**हल -** माना दीर्घवृत्त पर P(h,k) कोई बिन्दु है। पुन: माना D (-1, 1), नाभि तथा PM नियता पर P से
लम्ब है। दीर्घवृत्त के परिभाषा के अनुसार

$$PS=ePM$$

या $PS^2=e^2PM^2$

या $(h+1)^2+(k-1)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{h-k+4}{\sqrt{2}}\right)^2$

या $4\left[(h+1)^2+(k-1)^2\right]=\left(h-k+4\right)^2$

या 4 $\left[h^2+k^2+2h=2k+2\right]=\left[h^2+k^2+16-2hk+8h-8k\right]$

या $3h^2+3k^2+2hk-8=0$

**बिन्दु $p(\hbar,k)$ का बिन्दुपथ अर्थात् दीर्घवृत्त का समीकरण**

$3x^2+3y^2+2xy-8=0$ होगा।

**उदाहरण - 2** दीर्घवृत्त $3x^2+4y^2-12x-8y+4=0$ की उत्केन्द्रता, नाभिलम्ब और नाभि के निर्देशांक ज्ञात करो।

**हल - दिये हुए दीर्घवृत्त का समीकरण है**

$$3x^2+4y^2-12x-8y+4=0$$

या $3(x^2-4x)+4(y^2-2y)=-4$

या $3(x-2)^2+4(y-1)^2=-4+12+4$

या $3(x-2)^2+4(y-1)^2=12$

या $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$

$\frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{3}=1$........(1) जहाँ $X=x-2$

तथा $Y=y-1$ है।

यहाँ a > b है, इसलिए इस समीकरण की $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ से तुलना करने पर $a^2=4$ तथा $b^2=3$ **उत्केन्द्रता** $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$

**नाभिलम्ब की लम्बाई** $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\times 3}{2}=3$

दीर्घवृत्त (1) के नाभि के निर्देशांक $(X=\pm ae, Y=0)$ होंगे

या $(x-2=\pm 2\times\frac{1}{2}, y-1=0)$

या $(x=2\pm 1, y=1)$

**अतः** नाभि से निर्देशांक (3, 1) और (1, 1) होंगे ।

**उदाहरण- 3** निर्देश अक्षों को मुख्य अक्ष मान कर दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करो जिसका नाभिलम्ब 5 और उत्केन्द्रता $\frac{2}{3}$ है।

**हल -** माना दीर्घवृत्त का समीकरण है

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.............. (1)

चूँकि नाभिलम्ब की लम्बाई 5 है

$\therefore \frac{2b^2}{a}=5$

या $2b^2=5a$ ................(2)

तथा $e=\frac{2}{3}$ है।

अतः $b^2=a^2\left(1-\frac{4}{9}\right)$

$=\frac{5}{9}a^2$ ...............(3)

(2) व (3) को हल करने पर $a^2=\frac{81}{4}$ व $b^2=\frac{45}{4}$

$a^2$ $b^2$ के मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\frac{4x^2}{81}+\frac{4y^2}{45}=1$$

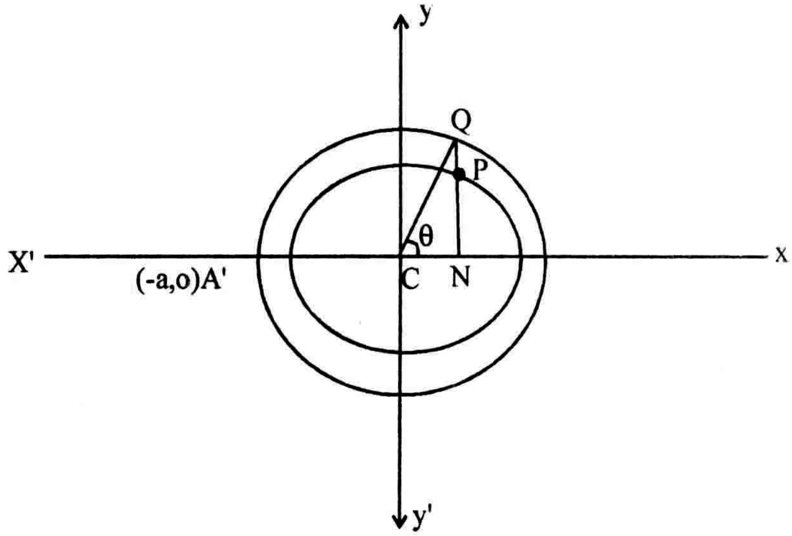
यह दीर्घवृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

## 7.9 : सहायक वृत्त और उत्केन्द्र कोण

वह वृत्त जो दीर्घ अक्ष को व्यास मानकर खींचा जाता है, सहायक वृत्त कहलाता है।

**स्पष्टत :** इसका समीकरण $x^2+y^2=a^2$ होगा।

दीर्घवृत्त पर किसी बिन्दु का उत्केन्द्र कोण वह कोण होता है जो कि सहायक




**चित्र (7.9)**

### 7.11.1 संयुग्मी व्यास: -

किसी दीर्घवृत्त के दो व्यास संयुग्मी व्यास कहलाते हैं यदि प्रत्येक व्यास दूसरे व्यास की समान्तर जीवाओं को समद्विभाजित करता है।

रेखाओं $y=m_1x$ और $y=m_2x$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की संयुग्मी व्यास है यदि $m_1m_2=-\frac{b^2}{a^2}$.

अतः यदि दीर्घवृत्त का एक व्यास $y=mx$ है तो इस व्यास के संयुग्मी व्यास का समीकरण $y=-\frac{b^2}{a^2m}x$ होगा।

**7.11.2 संयुग्मी व्यासों के गुणधर्म:-**

(i) दीर्घवृत्त के दो संयुग्मी व्यासों के सिरों के उत्केन्द्र कोणों का अपर एक समकोण होता है।

(ii) दीर्घवृत्त के दो संयुग्मी अर्धव्यासों के वर्गो का योग अचर होता है और यह दीर्घवृत्त के अर्थ-अक्षों के वर्गो के योग के बराबर लेता है।

(iii) दीर्घवृत्त के संयुग्मी व्यासों के सिरों पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ समान्तर चतुर्भुज बनाती हैं जिसका क्षेत्रफल उनके अक्षों के गुणनफल के बराबर होता है।

(iv) दीर्घवृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ संयुग्मी व्यास के समान्तर होती है।

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 4**

1. दीर्घवृत्त $4x^2+9y^2=36$ के नियामक वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।
2. दीर्घवृत्त $9x^2+4y^2=36$ के व्यास का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका संयुग्मी व्यास $9x+4y=0$ हैं।
3. यदि CP और CD दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$ के दो संयुग्मी व्यास हों तो $CP^2+CD^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

**उदाहरण- 1** यदि रेखा $y=x+c$ दीर्घवृत्त $2x^2+3y^2=6$ को स्पर्श करती है तो c का मान ज्ञात कीजिए।

**हल -** दी हुयी रेखा का समीकरण हैं

$y=x+c$ .................(1)

दिये हुए दीर्घवृत्त का समीकरण हैं

$2x^2+3y^2=6$

या $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.................(2)

हम जानते हैं कि रेखा $y=mx+c$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को स्पर्श करती है, तो

$$c^2=a^2m^2+b^2$$

$\Rightarrow c^2=3\times1+2,$ क्योंकि $m=1,\ a^2=3$ तथा $b^2=2$

या $c^2=5$

या $c=\pm\sqrt{5}$

**उदाहरण - 2** सिद्ध करो कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की स्पर्श रेखा का जो भाग दोनों अक्षों के मध्य है, उसके मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=4$ होता है ।.

**हल -** माना $P\left(a\cos\theta, b\sin\theta\right)$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर कोई एक बिन्दु है । $P$ स्पर्श रेखा का समीकरण होगा ।

$$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1 \qquad \text{.....................} \quad (1)$$

माना रेखा (1) x-अक्ष और y-अक्ष से क्रमशः A और B बिन्दु पर मिलती है । चूँकि x-अक्ष पर y=0 होता है इसलिए बिन्दु A के निर्देशांक ( $a\sec\theta, 0$) होंगे । इसी प्रकार y- अक्ष पर x=0 होता है इसलिए बिन्दु B के निर्देशांक ($o, bco\sec\theta$) होगा । माना Q$\left(h,k\right)$,AB का मध्य बिन्दु है तब

$$h=\frac{a\sec\theta}{2} \text{ तथा } k=\frac{b\sec\theta}{2}$$

$$\therefore \cos\theta=\frac{a}{2h} \text{.............} \quad (2) \text{ तथा}$$

$$\sin\theta=\frac{b}{2k} \text{.............} \quad (3) \text{ तथा}$$

$$\therefore\ k=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

$$\left(k-mh\right)^2=a^2m^2+b^2$$

$$\text{या } m^2\left(h^2-a^2\right)-2mkh+k^2-b^2=0 \text{.......} \quad (2)$$

**माना $m_1$ और $m_2$ समीकरण(2) के मूल हैं इसलिए**

$$m_1+m_2=\frac{2kh}{h^2-a^2} \text{ तथा}$$

$$m_1m_2=\frac{k^2-b^2}{h^2-a^2}$$

**चूँकि स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण $45^0$ है**

$$\therefore\ \tan 45^0=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$$

$$1=\sqrt{\frac{\left(m_1+m_2\right)^2-4m_1m_2}{1+m_1m_2}}$$

$$\text{या } 1=\sqrt{\frac{\frac{4k^2h^2}{h^2-a^2}-\frac{4\left(k^2-b^2\right)}{h^2-a^2}}{1+\frac{k^2-b^2}{h^2-a^2}}}$$

$$\text{या } \left(1+\frac{k^2-b^2}{h^2-a^2}\right)^2=4\left[\frac{h^2k^2-\left(k^2-b^2\right)\left(h^2-a^2\right)}{\left(h^2-a^2\right)^2}\right]$$

या $\left(h^2+k^2-a^2-b^2\right)^2=4\left[h^2k^2+a^2k^2-a^2b^2\right]$

**बिन्दु T(h,k) का बिंदुपथ होगा**

$$\left(x^2+y^2-a^2-b^2\right)^2=4\left(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2\right)$$

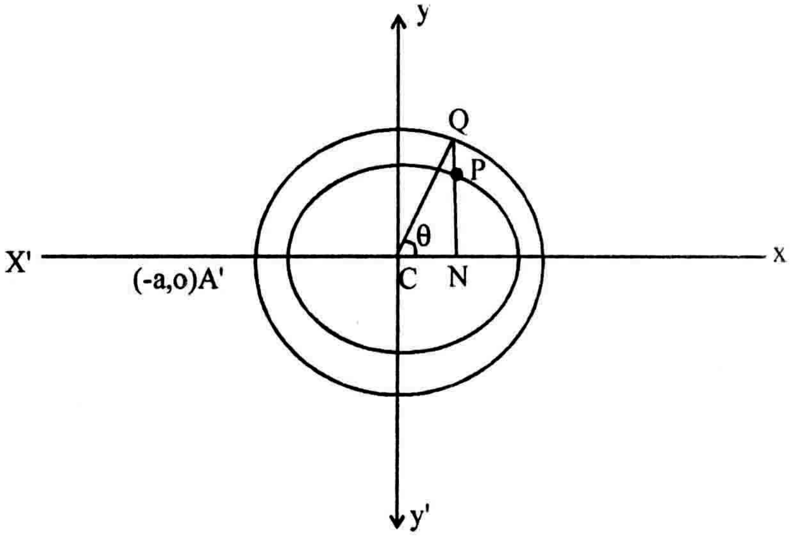
## 7.12 : अतिपरवलय की परिभाषा

अतिपरवलय एक समतल में उस बिन्दु का बिंदुपथ है जो इस प्रकार गति करता है कि उसकी उसी समतल में एक स्थिर बिन्दु (नाभि) से दूरी तथा उसकी समतल में स्थित एक स्थिर रेखा (नियता) से दूरी का अनुपात सदैव अचर रहता और यह अनुपात एक से अधिक होता है । अचर अनुपात को अतिपरवलय की उत्केन्द्रता कहते हैं और इसे e द्वारा प्रदर्शित करता हैं ।

स्पष्टत : e>1

### 7.12.1 अतिपरवलय का मानक समीकरण

अतिपरवलय का मानक समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ होता है जहाँ $b^2=a^2\left(e^2-1\right)$




चित्र (7.10)

अतिपरवलय के लिए a एवं b में क्रम सम्बन्ध निश्चित नहीं हैं। यह e के मान पर निर्भर करता है ।

$$\text{यदि } e=\sqrt{2},\ \text{तो } b<a$$
$$\text{यदि } e=\sqrt{2},\ \text{तो } b=a$$
$$\text{यदि } e>\sqrt{2},\ \text{तो } b>a$$

**उदाहरण -1** यदि एक अति परवलय तथा इसके संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केंद्रताएँ e तथा शांकव परिच्छेद $e'$तो सिद्ध करों कि $\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1$

**हल -** माना अतिपरवलय का समीकरण है

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ....... (1)$$

(1) के संयुग्मी अतिपरवलय का समीकरण होगा

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 ..... (2)$$

अतिपरवलय (1) की उत्केन्द्रता

$$e^2=1+\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2+b}{a^2} ..... (3)$$

अतिपरवलय (2) की उत्केन्द्रता

$$e'^2=1+\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^2+b}{b^2} ..... (4)$$

समीकरण (3) और (4) से $\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=\frac{a^2+b}{a^2+b^2}=1$

या $\quad \frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1$

**उदाहरण- 2** उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसकी नाभि (6,4) तथा (-4,4) है तथा उत्केन्द्रता 2 है।

**हल -** नाभियों के बीच की दूरी $=\sqrt{(6+4)^2+(4-4)^2}=10$

परन्तु नाभियों के बीच की दूरी $2ae$ होती है।

अतः $2ae=10$

या $\quad 4a=10$, क्योंकि $e=2$ हैं।

या $\quad a=\frac{5}{2}$

हम जानते हैं कि अतिपरवलय के समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ में $b^2=a^2\left(e^2-1\right)$ होता है।

$$\Rightarrow b^2=\frac{25}{4}(4-1)=\frac{75}{4}$$

अत: अतिपरवलय का अभीष्ट समीकरण होगा $\frac{\frac{x^2}{25}}{4}-\frac{\frac{y^2}{75}}{4}=1$

या $12x^2-4y^2=75$

## 7.13 : अतिपरवलय के मानक समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ से सम्बन्धित प्रमुख सूत्र

चूँकि दीर्घवृत्त के समीकरण में यदि $b^2$, की जगह - $b^2$, प्रतिस्थापित किया जाए तो हमें अतिपरवलय का समीकरण प्राप्त होता हैं । अत: वे सभी परिणाम जो दीर्घवृत्त के लिए सही हैं को अतिपरवलय के लिए भी केवल $b^2$ की जगह -. $b^2$ रख कर प्राप्त किये जा सकते हैं

चूँकि $\theta$ के प्रत्येक मान के लिए बिन्दु $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ अतिपरवलय में समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$को सन्तुष्ट करते हैं अत: अतिपरवलय पर किसी बिन्दु के प्राचलिक निर्देशांक $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ हैं तथा अतिपरवलय का प्राचलिक समीकरण $x=a\sec\theta, y=b\tan\theta$होगा।

अतिपरवलय पर '$\theta_1$' तथा '$\theta_2$' बिन्दुओं को मिलाने वाली जीवा का समीकरण होगा

अतिपरवलय के '$\theta$' बिन्दु पर अभिलम्ब का समीकरण होगा ।

## 7.14 : अनन्तस्पर्शी

मूल बिन्दु से परिमित दूरी पर स्थित एक रेखा यदि किसी वक्र को अनन्त पर स्पर्श करे तो वह रेखा उस वक्र की एक अनन्तस्पर्शी कहलाती है ।

अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ तथा इसके संयुग्मी अतिपरवलय $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की अनन्तस्पर्शी के समीकरण है । $y=\pm\frac{b}{a}x$

या $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ व $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$

इनका संयुक्त समीकरण होगा $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0$

$m_1m_2=-1$

या $\frac{k^2+b^2}{h^2-a^2}=-1$

या $h^2+k^2=a^2-b^2$

बिन्दु (h,k) का बिंदुपथ होगा

$x^2+y^2=a^2-b^2$

**उदाहरण - 3** उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके अनन्त स्पर्शी $3x-4y+7=0$ और $4x+3y+1=0$ हैं और जो मूल बिन्दु से गुजरता है ।

**हल -** अनन्तस्पर्शियों का संयुक्त समीकरण :होगा

$(3x-4y+7)(4x+3y+1)=0$ ....... (1)

चूँकि अतिपरवलय व अनन्तस्पर्शियों के संयुक्त समीकरण में एक अचर राशि का अन्तर होता है इसलिए माना अतिपरवलय का समीकरण है

$(3x-4y+7)(4x+3y+1)+k=0$ ....... (2)

चूँकि समीकरण (2) मूल बिन्दु (0, 0) से गुजरता है

$\therefore\ 7+k=0$

या $k=-7$

$k=-7$ समीकरण (2) में रखने पर

$(3x-4y+7)(4x+3y+1)-7=0$

या $12x^2 - 7xy - 12y^2 + 31x + 17y = 0$

यहीं अतिपरवलय का अभीष्ट समीकरण हैं ।

## 7.15 : सारांश

इस इकाई में हमने शांकव परिच्छेद के विषय में चर्चा की है और यह जानकारी प्राप्त की है कि शांकव परिच्छेद के परवलय, दीर्घवृत्त और अतिपरवलय होने के लिए क्या शर्ते हैं। आप ने इनके मानक समीकरण क्या होते है इसकी भी जानकारी प्राप्त की हैं। आप ने देखा है कि कोई रेखा इनको दो बिन्दुओं पर काटती है या स्पर्श करती है या बाहर रहती है तो इसके लिए प्रतिबन्ध क्या होते हैं। इनके किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा और अभिलम्ब के समीकरण क्या होते हैं आप ने इसकी भी जानकारी प्राप्त की हैं।

## 7.16 : शब्दावली

| | |
|---|---|
| शांकव परिच्छेद | Conic Section |
| नाभि | Focus |
| नियता | Directrix |
| उत्केन्द्रता | Eccentricity |
| नाभीय जीवा | Focal Chord |
| नाभिलम्ब | Latus rectum |
| प्राचलिक निर्देशांक | Parametric Coordinates |
| स्पर्श जीवा | Chord of contact |
| सहायक वृत्त | Auxiliary Circle |
| उत्केन्द्र कोण | Eccentric angle |

## 7.17 : स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1**

(i) यह परवलय का समीकरण नहीं है क्योंकि द्विघात पद पूर्ण वर्ग नहीं बनाते हैं।

(ii) यह परवलय का समीकरण है क्योंकि द्विघात पद पूर्ण वर्ग बनाते हैं तथा
$Abc+2\ fgh - af^2-bg^2-ch^2 \neq 0$

(iii) यह भी परवलय का समीकरण हैं।

2. $y^2 - 10x + 5$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2**

1. $y = 2x - 4$
2. $y = 2x - 24$
3. (18, -12)

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 3**

1. $3x^2 + 4y^2 = 12$
2. 10
3. $15/8$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 4**

1. $x^2 + y^2 = 13$
2. $y = x$
3. 13

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 5**

1. अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = 4
   संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = 6
2. $\frac{32}{3}$
3. $\frac{2a^2}{6}$

## 7.18 : अभ्यास प्रश्न

1. परवलय $4y^2 - 6x - 4y = 5$ के शीर्ष, अक्ष, नाभि, नियता और नाभिलम्ब की लम्बाई एवं समीकरण ज्ञात कीजिये।

   [उत्तर: शीर्ष और नाभि के निर्देशांक क्रमशः $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ तथा $\left(-\frac{5}{8}, \frac{1}{2}\right)$ होंगे। नाभिलम्ब की लम्बाई $\frac{3}{2}$ तथा नाभिलम्ब का समीकरण $x = -\frac{5}{8}$ है। अक्ष का समीकरण $y = \frac{1}{2}$ तथा नियता का समीकरण $x = -\frac{11}{8}$ हैं]

2. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसकी नाभि (1,0) तथा नियता $x + y + 1 = 0$ है।

   [उत्तर: $x^2 + y^2 - 2xy - 6x - 2y + 1 = 0$ ]

3. परवलय $y^2 = x$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये जो x-अक्ष से $45^o$ का कोण बनाती है। स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

   (उत्तर: स्पर्श रेखा का समीकरण $4x - 4y + 1 = 0$, स्पर्श बिन्दु $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ ]

4. परवलय $y^2 = 8x$ की उस जीवा का समीकरण ज्ञात कीलिए जिसका मध्य बिन्दु (5, -2) है।

   [उत्तर : $2x + y - 8 = 0$ .]

5. उस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए जिसकी नाभिलम्ब उसकी लघु अक्ष की आधी हो

[उत्तर : $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$]

6. यदि दीर्घवृत्त के नाभिलम्ब के एक सिरे पर खींचा गया अभिलम्ब लघु अक्ष के एक सिरे से गुजरता है, तो सिद्ध कीजिए कि वक्र की उत्केन्द्रता समीकरण $e^4+e^2-1=0$ द्वारा दर्शायी जाती है।

7. यदि बिन्दु (a,b) से दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ पर खींची गयी स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा वृत्त $x^2+y^2=c^2$ को स्पर्श करती है, तो सिद्ध कीजिए कि (a,b) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{c^2}$ पर स्थित है।

8. सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त $3x^2+4y^2=5$ के व्यास $y+3x=0$ तथा $4y-x=0$ संयुग्मी व्यास हैं।

9. सिद्ध करो कि रेखाओं $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=m$ तथा $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{1}{m}$ के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दु पथ अतिपरवलय होता है। यहाँ m प्राचल है।

10. सिद्ध करो कि अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की किसी स्पर्श रेखा पर नाभि से डाले गये लम्ब के बाद का बिन्दुपथ $x^2+y^2=a^2$ होता है।

11. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी अनन्त स्पर्शियों के समीकरण $x+2y+3=0$ तथा $3x+4y+5=0$ हैं और जो बिन्दु (1, -1) से गुजरती है।
[उत्तर: $3x^2+10xy+8y^2+14x+22y+7=0$]

# इकाई 8 : त्रिविम निर्देशांक ज्यामिती -समतल एवं सरल रेखाएँ(Three dimensional co-ordinate geometry - Plane and Straight line)

**इकाई की रूपरेखा**

## 8.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप समष्टि (Space) में किसी बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करने के साथ ही दो बिन्दुओं के बीच की दूरी एवं किसी रेखा खण्ड को विभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कर सकेंगे।

इसके साथ ही समष्टि में समतल एवं सरल रेखा के समीकरण ज्ञात करते हुए बिन्दु, समतल एवं सरल रेखा के मध्य सम्बंधों की व्याख्या कर सकेंगे। समतल एवं सरल रेखा के समीकरणों के विभिन्न रूपों को जान सकेंगे।

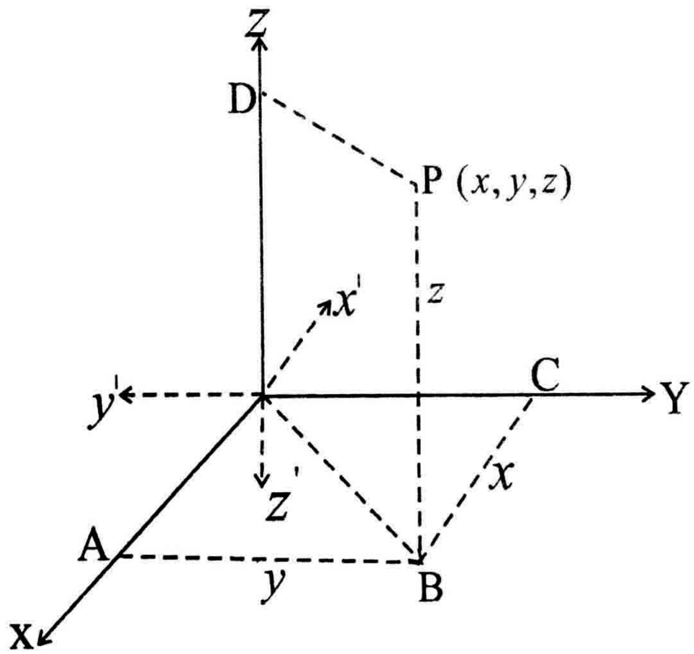
## 8.1 प्रस्तावना

पूर्व में आप द्विविम ज्यामिति का अध्ययन कर चुके हैं। इसमें सभी प्रकार का अध्ययन एक समतल में किया जाता है। जिसके लिये हमें दो विमाओं के ज्ञान की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिये, यदि हमें किसी बिन्दु के भुज एवं कोटि ज्ञात हों, तो हम एक समतल में बिन्दु की स्थिति ज्ञात कर सकते है। इसलिये इस प्रकार का अध्ययन समतल निर्देशांक ज्यामिति भी कहलाता है।

यदि हमें किसी बिन्दु की स्थिति को समष्टि में ज्ञात करना हो, तो हमें एक और विमा के ज्ञान की आवश्यकता होगी अर्थात तीन विमाओं के ज्ञात होने पर किसी भी बिन्दु को समतल के स्थान पर समष्टि में चिन्हित किया जा सकता है। अत : किसी समष्टि में ज्यामिति का अध्ययन त्रिविम निर्देशांक ज्यामिति (Three dimensional co-ordinate geometry) या ठोस निर्देशांक ज्यामिति (Solid Coordinate Geometry) कहलाता है। इस इकाई में हम समष्टि में बिन्दु के निर्देशांक समतल एवं रेखा के समीकरण एवं इनके अनुप्रयोगों का अध्ययन करेंगे। त्रिविम ज्यामिति के अध्ययन हेतु तीन प्रकार की पद्धतियों आयतीय कार्तीय, बेलनी एवं गोलीय निर्देशांक पद्धतियों में से हम आयतीत कार्तीय निर्देशांक पद्धति (Rectangular Cartesian Co-ordinate System) का प्रयोग करेंगे।

## 8.2 समष्टि में किसी बिन्दु के निर्देशांक (Coordinate of a point space)

द्विविम ज्यामिति की तरह, त्रिविम ज्यामिति में भी किसी एक बिन्दु को समष्टि में मूलबिन्दु मान लेते हैं और दो अक्षों के स्थान पर तीन परस्पर लम्बवत् रेखाओं को तीन अक्ष मान लेते है। ये अक्ष परस्पर मूलबिन्दु पर प्रतिच्छेदित होते है। इन्हें आयतीय निर्देशांक अक्ष या निर्देशांक अक्ष कहते है। चित्रानुसार, बिन्दु 0 मूलबिन्दु है।




चित्र 8.1 आयतीय निर्देशांक अक्ष

$xox', yoy', zoz'$ तीन परस्पर लम्बवत् रेखाएँ हैं जो मूलबिन्दु 0 पर प्रतिच्छेदित होती है। ये क्रमश: x-अक्ष, y- अक्ष एवं z-अक्ष कहलाती है। प्रत्येक दो निर्देशांक अक्ष एक समतल बनाते है। इस प्रकार हमें तीन परस्पर लम्बवत् समतल प्राप्त होते है। x -अक्ष और y-अक्ष से बनने वाले समतल को xoy-तल या xy-तल कहते हैं इस प्रकार x -अक्ष और z -अक्ष से बनने वाले तल को yoz -तल या yz -तल एवं x -अक्ष और z -अक्ष से बनने वाले तल को xoz -तल या xz - तल कहते है। ये तीनों तल आयतीय निर्देशांक तल (rectangular co-ordinate planes) या निर्देशांक तल (Co-ordinate Planes) कहलाते है। इन तलों का विस्तार समष्टि में अनन्त तक माना जाता है। ये तल समष्टि को आठ भागों, जिन्हे अष्टांशक (Octant) कहते हैं, विभाजित करते है।

अब हम समष्टि में किसी बिन्दु P के निर्देशांक ज्ञात करने की विधि को समझेंगे। चित्रानुसार, बिन्दु P से xy-तल PB लम्ब डाला। लम्बपाद B से x -अक्ष और y- अक्ष के समान्तर दो सरल रेखाएँ खींची जो इन अक्षों को क्रमश: बिन्दु A एवं C बिन्दु पर मिलती है। अब बिन्दु P से z - अक्ष पर OB के समान्तर एक लम्ब डाला जो z - अक्ष को D बिन्दु पर मिलता है। अब माना

दूरियाँ OA = CB = AB = y, OD = BP = z है। इस स्थिति में बिन्दु P के निर्देशांक (x,y,z)होंगे । अर्थात P(x,y,z) समष्टि में एक ऐसे बिन्दु को प्रदर्शित करता है, जिसकी yz - तल से लम्बवत् दूरी x, xz- तल से लम्बवत् दूरी y एवं xy -तल से लम्बवत् दूरी z है।

किसी बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात होने पर, आयतीय निर्देशांक पद्धति की सहायता से. उसे उपरोक्त विधि द्वारा चिन्हित भी किया जा सकता है। बिन्दु के निर्देशांको के धनात्मक और ऋणात्मक होने पर उसे विभिन्न अष्टांशको में चिन्हित किया जाता है। $x, y$ एवं $z$ के चिन्ह निम्नलिखित तालिका के अनुसार होते है:

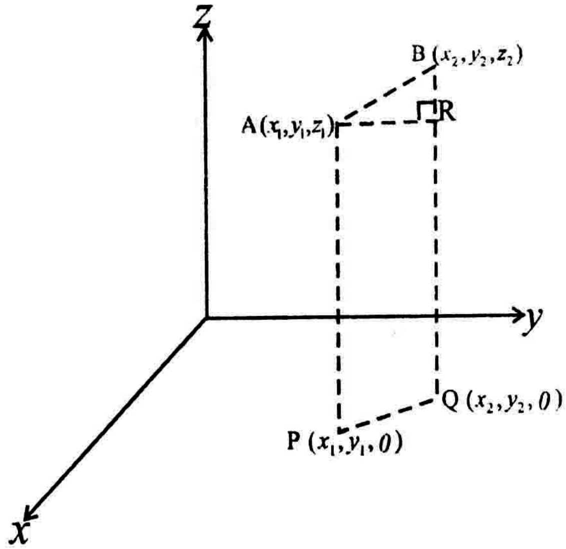
| निर्देशांक $\rightarrow$ / अष्टांशक$\downarrow$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $OXYZ$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $OXYZ$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $OXYZ$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $OXYZ$ | $+$ | $+$ | $-$ |
| $OXYZ$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $OXYZ$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $OXYZ$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $OXYZ$ | $-$ | $-$ | $-$ |

## 8.3 समष्टि में दो बिन्दुओं के बीच की दूरी (Distance between two points in the space)

दो बिन्दुओं $A(x_1, y_1, z_1)$ एवं $B(x_2, y_2, z_2)$ के बीच की दूरी ज्ञात करना।

माना समष्टि में दो बिन्दु A एवं B इस प्रकार हैं कि उनके निर्देशांक क्रमश : $(x_1, y_1, z_1)$ एवं $(x_2, y_2, z_2)$ है। A एवं B से xy- तल पर लम्ब डाले, जिनके पाद क्रमश : P एवं Q है। ये बिन्दु xy- तल में हैं अत : इनके निर्देशांक क्रमश : $(x_1, y_1, 0)$ एवं $(x_2, y_2, 0)$ होंगे। द्विविम ज्यामिति के अनुसार इस तल में इन बिन्दुओं के निर्देशांक क्रमश : $(x_1, y_1)$ एवं $(x_2, y_2)$ होंगे। द्विविम ज्यामिति में दो बिन्दुओं के बीच की दूरी के सूत्र से

$$PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \qquad \text{.........................(1)}$$




चित्र 8.2

बिन्दु A से PQ के समान्तर एक रेखा खींची जो रेखा BQ को बिन्दु R पर मिलती है। चूंकि $AR \| PQ$ एवं $PQ \perp BQ$ अत : $AR \perp BQ$ एवं $AR = PQ$ , अत : $\Delta ARB$ एक समकोण त्रिभुज होगा जिसमें $\angle ARB = 90^o$ है।

अब, समकोण त्रिभुज $ARB$ में,

$AB^2 = AR^2 + BR^2$, जहाँ $BR = BQ - RQ = BQ - AP = z_2 - z_1$

समीकरण (1) से

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

अत : दो बिन्दुओं $A(x_1, y_1, z_1)$ एवं $B(x_2, y_2, z_2)$ के बीच की दूरी

$$AB = \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right]^{1/2}$$

**टिप्पणी : 1.** किसी बिन्दु $P(x, y, z)$ की मूल बिन्दु से दूरी होगी

$$OP = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

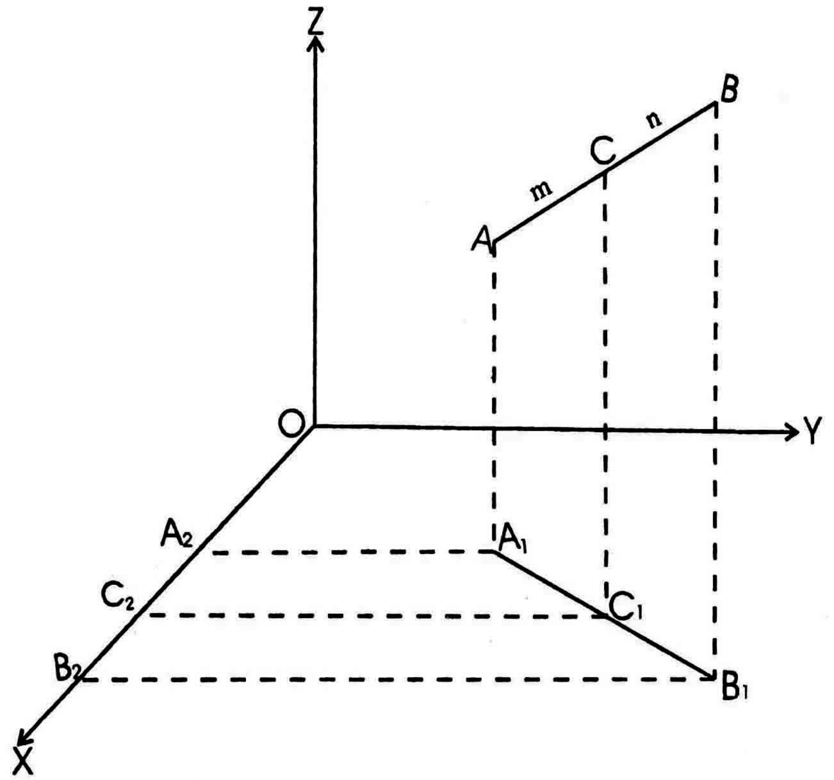
2. xy -तल में स्थित किसी बिन्दु का z-निर्देशांक शून्य होगा। इसी प्रकार yz-तल में स्थित प्रत्येक बिन्दु का x -निर्देशांक और xz -तल में स्थित प्रत्येक बिन्दु का y निर्देशांक शून्य होगा।अर्थात (x, y ,o), (x ,o ,z) (o, y, z) क्रमशः xy -तल, xz -तल एवं yz -तल में स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक है।

3. x -अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के लिये y और z दोनों निर्देशांक शून्य होंगे। अतः (x, 0 ,0),x -अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक है। इसी प्रकार (0, y,0) एवं (0, 0, z) क्रमश :y -अक्ष एवं z- अक्ष पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक होंगे।

## 8.4 दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा को विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक

दो बिन्दुओं $A(x_1, y_1, z_1)$ एवं $B(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा के खण्ड AB को m:n में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करना।

माना सरल रेखा AB को m:n में विभाजित करने वाले बिन्दु C के निर्देशांक $(x, y, z)$ है।




चित्र 8.3

बिन्दु A,B एवं C से xy-तल पर क्रमशः $AA_1$,$BB_1$, एवं $CC_1$, लम्ब डाले। लम्बपादों $A_1$,$B_1$,$C_1$ से x- अक्ष पर क्रमशः $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$ लम्ब डाले। रेखाएँ $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$ एक ही समतल पर स्थित हैं एवं बिन्दु $C_1$. रेखा $A_1B_1$ को m:n में विभाजित करेगा। अर्थात्

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n} \text{ तथा } \frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1}$$

इसी प्रकार

$$\frac{A_2C_2}{C_2B_2} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1}$$

अतः $\dfrac{A_2C_2}{C_2B_2} = \dfrac{A_1C_1}{C_1B_1} = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{m}{n}$ .........(1)

साथ ही,

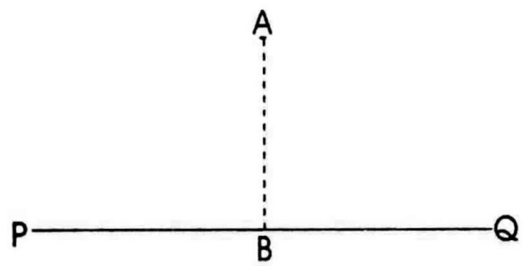
$$A_2C_2 = OC_2 - OA_2 = x - x_1$$
$$C_2B_2 = OB_2 - OC_2 = x_2 - x$$
अत: समीकरण (1) से,
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n} \Rightarrow x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$
इसी प्रकार x-अक्ष एवं z-अक्ष पर लम्ब डालने पर,
$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$
अतः बिन्दु C के निर्देशांक हैं
$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$$
टिप्पणी: 1. रेखा AB पर स्थित प्रत्येक बिन्दु, AB को $\lambda : 1$ में विभाजित करेगा। अत : इस बिन्दु के निर्देशांक
$$\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda z_2 + z_1}{\lambda + 1}\right)$$
होंगे। AB पर स्थित प्रत्येक बिन्दु के संगत $\lambda$ का एक मान प्राप्त होगा एवं $\lambda$ के प्रत्येक मान के लिये रेखा AB पर कोई बिन्दु प्राप्त होगा। इसलिये उपरोक्त निर्देशांक, सरल रेखा AB पर $\lambda$ प्राचल में, चर बिन्दु के निर्देशांक है।

2. यदि बिन्दु C, रेखा AB को बाह्य विभाजित करे. तो बिन्दु के निर्देशांक होंगे
$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right)$$
3. AB के मध्य बिन्दु के निर्देशांक होंगे
$$\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}, \frac{z_2 + z_1}{2}\right)$$

## 8.5 प्रक्षेप (Projection)

प्रक्षेप, ज्यामिति की एक महत्वपूर्ण अवधारणा है। इस भाग में हम एक बिन्दु का किसी सरल रेखा पर प्रक्षेप तथा एक रेखाखण्ड का दी हुई सरल रेखा पर प्रक्षेप का अध्ययन करेंगे।

### 8.5.1 किसी बिन्दु का एक सरल रेखा पर प्रक्षेप



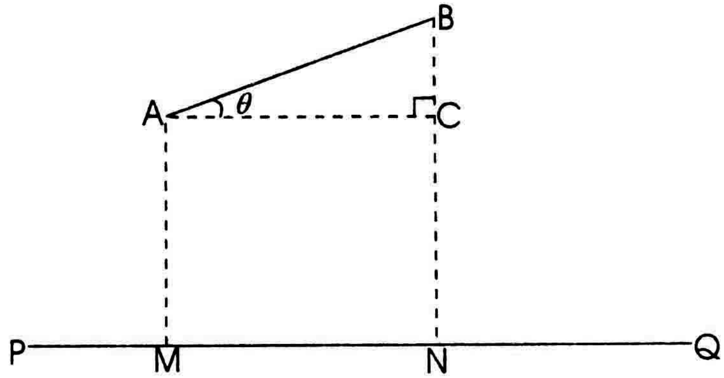

चित्र 8.4

दी हुई सरल रेखा PQ पर किसी बिन्दु A का प्रक्षेप ज्ञात करने के लिये, बिन्दु A से रेखा PQ पर एक लम्ब डाला। इस लम्ब का पाद B ही, रेखा PQ पर बिन्दु A का प्रक्षेप कहलाता है।

### 8.5.2 एक दिष्ट रेखाखण्ड का अन्य सरल रेखा पर प्रक्षेप

### (Projection of a directed line segment on another straight line)

माना AB एक दिष्ट रेखाखण्ड है एवं PQ एक अन्य सरल रेखा है। हमें AB का. रेखा PQ पर प्रक्षेप ज्ञात करना है। इसके लिये बिन्दु A एवं B से PQ रेखा पर क्रमश: AM एवं BN लम्ब डाले। बिन्दु M एवं N क्रमश: बिन्दु A एवं B के प्रक्षेप होंगे तथा रेखाखण्ड MN , दिष्ट रेखा AB का PQ पर प्रक्षेप होगा।




चित्र 8.5

माना AB और PQ के मध्य कोण $\theta$ है। चित्रानुसार A से PQ के समान्तर रेखा खींची जो BN को बिन्दु C पर मिलती है। चूंकि $MN \perp BN$ एवं $AC \| MN$ अत: $AC \perp BN$ अर्थात $\Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है, जिसमे $\angle BAC = \theta, \angle ACB = 90^0$ एवं $AC = MN$ है।

समकोण $\Delta ABC$ में,

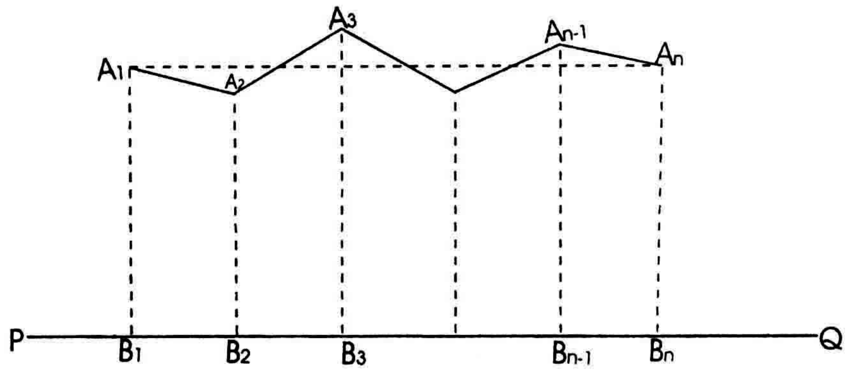
$$\frac{AC}{AB} = \cos\theta$$

$$\Rightarrow AC = AB\cos\theta \Rightarrow MN = AB\cos\theta$$

अत: AB का PQ पर प्रक्षेप $= AB\cos\theta$ , जहाँ $\theta$, AB एवं PQ के मध्य कोण है।

**टिप्पणी : 1.** प्रक्षेप की परिभाषा ABC का प्रक्षेप MN तथा BA का प्रक्षेप NM होगा। अत: AB एवं BA के प्रक्षेप के मान बराबर किन्तु विपरित दिशा में होगे।

2. यदि बिन्दु $A_1, A_2, .................A_n$ एवं इन्हें मिलाने वाली रेखाएँ चित्रानुसार हों तो $A_1A_n$ का PQ प्रक्षेप, $A_1A_2, A_2A_3, ..............A_{n-1}A_n$ के PQ पर प्रक्षेपों के योग के बराबर होगा।




चित्र 8.6

चूंकि , $B_1B_2, +B_2B_3, +.............B_{n-1}B_n = B_1B_n$

$\Rightarrow A_1A_2$ का PQ पर प्रक्षेप $+A_2A_3$ का PQ पर प्रक्षेप $+.............A_{n-1}A_n$ का PQ पर प्रक्षेप $= A_1A_n$ का PQ पर प्रक्षेप

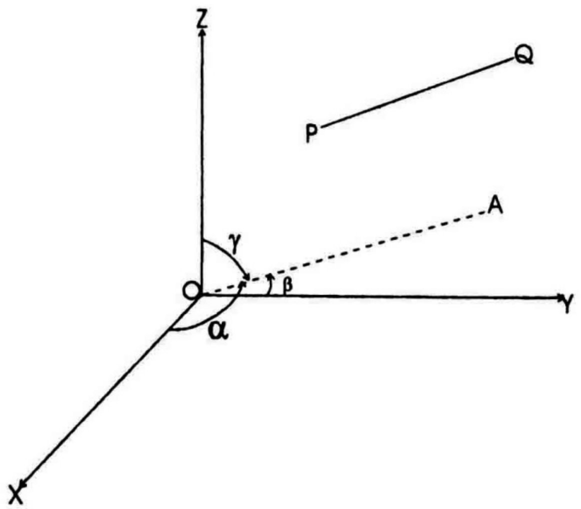
## 8.6 दिक्कोज्याएँ (Direction Cosines)

ज्यामिति में किसी सरल रेखा की दिशा को प्रदर्शित करने के लिये दिक्कोज्याओं का प्रयोग किया जाता है। यदि कोई

सरल रेखा, ox, oy एवं oz (अर्थात x-अक्ष, y-अक्ष एव z-अक्ष) की धनात्मक दिशा के साथ क्रमश: $\alpha, \beta, \gamma$ कोण बनाती है तो, इन कोणों की कोज्याओं (cosines) अर्थात $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ को सरल रेखा की दिक्कोज्याएँ कहते हैं। इन्हें क्रमश: $l, m$ एवं $n$ से प्रदर्शित करते हैं। अतः

$$l = \cos\alpha,\ m = \cos\beta,\ n = \cos\gamma$$

किसी सरल रेखा PQ के अक्षों के साथ कोण ज्ञात करने के लिये इस रेखा के समान्तर मूलबिन्दु से जाने वाली एक सरल रेखा OA खींचते हैं। मूलबिन्दु से जाने वाली इस सरल रेखा के अक्षों के साथ कोण ही, दी हुई सरल रेखा PQ के अक्षों के साथ कोण होंगे। इस प्रकार दो समान्तर सरल रेखाओं की दिक्कोज्याएँ समान होती हैं।




**चित्र 8.7**

**विशेष स्थिति: 1**. यदि सरल रेखा PQ की दिक्कोज्याएँ

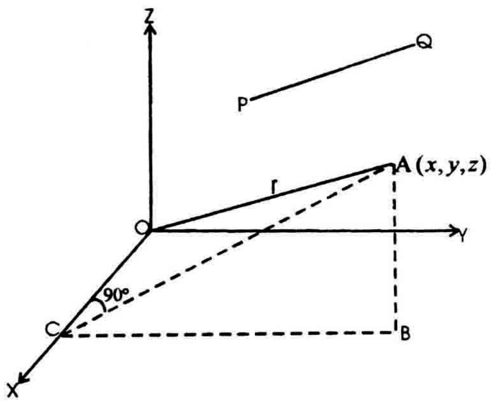
$l = \cos\alpha,\ m = \cos\beta,\ n = \cos\gamma$

है तो QP की दिककोज्याएँ $\cos(\pi-\alpha), \cos(\pi-\beta)$ एवं $\cos(\pi-\gamma)$ अर्थात $-\cos\alpha, -\cos\beta, -\cos\gamma$ या $-l, -m, -n$ होंगी।

2. चूंकि x-अक्ष, OX , OY एवं OZ की धनात्मक दिशा से क्रमश: $0, \frac{\pi}{2}$ एवं $\frac{\pi}{2}$ कोण बनाती है अत: x-अक्ष की दिक्कोज्याएं' $\cos 0, \cos\frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2}$ या 1 ,0 ,0 होंगी। इसी प्रकार y -अक्ष एवं z-अक्ष की दिक्कोज्याएँ क्रमश: 0, 1, 0 एवं 0, 0, 1 होंगी।

### 8.6.1 दिक्कोज्याओं में सम्बंध

**यदि किसी सरल रेखा की दिक्कोज्याएँ l,m,n ही तो सिद्ध करना है :** $l^2+m^2+n^2=1$




चित्र 8.8

माना PQ एक दी हुई सरल रेखा है जिसकी दिक्कोज्याएँ है। मूलबिन्दु 0 से PQ के समान्तर एक सरल रेखाएँ OA खींची। रेखा OA की दिक्कोज्याएँ $l, m, n$ होंगी।

माना बिन्दु A के निर्देशांक $(x, y, z)$ एवं OA = r है। बिन्दु A से x-अक्ष पर AC लम्ब डाला। अत : दूरी OC= x एवं $\angle OCA = \frac{\pi}{2}$ होगा। अब समकोण त्रिभुज $AOC$ में,

$$\frac{OC}{OA} = \cos \angle AOC \Rightarrow \frac{x}{r} = l \Rightarrow x = rl$$

इसी प्रकार बिन्दु A से y-अक्ष एवं z-अक्ष पर लम्ब डाल कर क्रमश: y = r m एवं z = r n प्राप्त किया जा सकता है। अतः

$$x = rl, y = rm, z = rn \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \left(l^2 + m^2 + n^2\right)$$

चूंकि $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

अत: $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ या $\cos^2 \alpha, \cos^2 \beta, \cos^2 \gamma = 1$

**टिप्पणी:** चित्रानुसार CB, y- अक्ष के समान्तर एवं AB, z- अक्ष के समान्तर है। अत:

OC का OA पर प्रक्षेप $= OC.\cos \angle AOC = xl,$

CB का OA पर प्रक्षेप $= OB.\cos \angle AOY = ym,$

BA का OA पर प्रक्षेप $= BA.\cos \angle AOZ = zm,$

भाग (8.5.2) की टिप्पणी 2 के अनुसार,

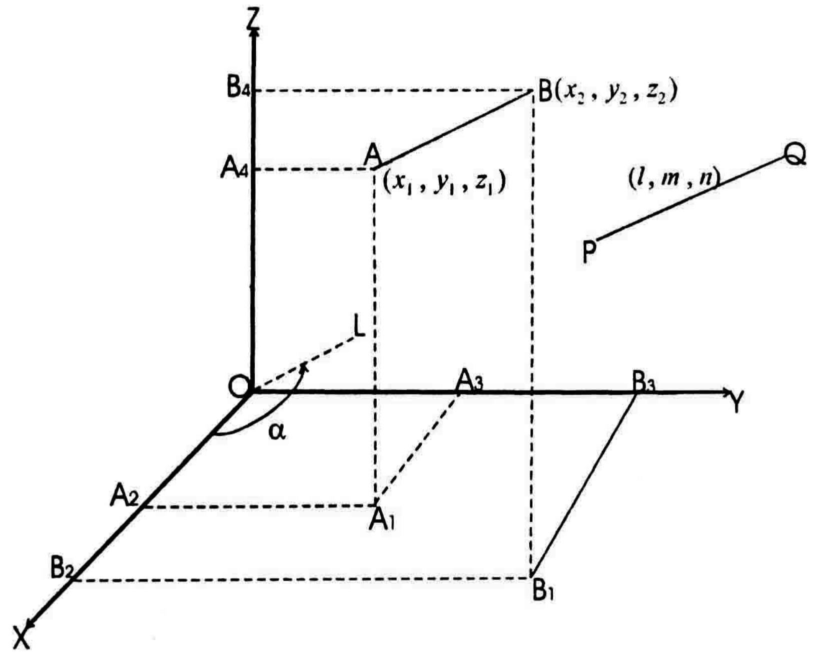
OA का OA पर प्रक्षेप = OC का OA पर प्रक्षेप + CB का OA पर प्रक्षेप + BA का OA पर प्रक्षेप

$$\Rightarrow OA \cos 0^0 = xl + my + zn$$

या $r = x \cos \alpha + m \cos \beta + n \cos y$

### 8.6.2 दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का दी हुई सरल रेखा पर प्रक्षेप (Projection of a line joining two points on a given line)

बिन्दु $A(x_1, y_1, z_1)$ एवं $B(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा का, दिक्कोज्याओं $l, m, n$ वाली सरल रेखा PQ पर प्रक्षेप ज्ञात करना है।




चित्र 8.9

चित्रानुसार, बिन्दु A एवं बिन्दु B से xy-तल पर क्रमशः $AA_1$ एवं $BB_1$ लम्ब डाले। लम्बपाद $A_1$ एवं $B_1$ से x-अक्ष पर क्रमशः तथा $A_1A_2, B_1B_2$ y- अक्ष पर क्रमशः $A_1A_3$ एवं $B_1B_3$ लम्ब डालें।

इसी प्रकार बिन्दु A एवं बिन्दु B से x-अक्ष पर क्रमशः $AA_4$ एवं $BB_4$ लम्ब डाले। चित्रानुसार,

$$A_2B_2 = x_2 - x_1 \quad , \quad A_3B_3 = y_2 - y_1 \quad , \quad A_4B_4 = z_2 - z_1$$

रेखा PQ के समान्तर, मूलबिन्दु o से जाने वाली रेखा OL खींची। रेखा OL की दिक्कोज्याएँ $l, m, n$ होंगी।

अब PQ = रेखा AB का OL पर प्रक्षेप............ (1)

साथ ही,

रेखा AB का OL पर प्रक्षेप = रेखा $A_2B_2$ का OL पर प्रक्षेप + रेखा $A_3B_3$ का OL पर प्रक्षेप + रेखा $A_4B_4$ का OL पर प्रक्षेप ............ (2)

एवं

$A_2B_2$ का OL पर प्रक्षेप = $A_2B_2 \cos(\angle A_2OL)$

= $(x_2 - x_1).\ l$

इसी प्रकार,

$A_3B_3$ का OL पर प्रक्षेप = $(y_2 - y_1).\ m$

$A_4B_4$ का OL पर प्रक्षेप = $(z_2 - z_1).\ n$

समीकरण (1) एवं (2) से

रेखा AB का PQ पर प्रक्षेप = $(x_2 - x_1)\ l + (y_2 - y_1)\ m + (z_2 - z_1)\ n$

### 8.6.3 दो बिन्दुओं का मिलाने वाली सरल रेखा की दिक्कोज्याएँ (Direction cosines of a straight line joining two points)

बिन्दु $A\left(x_1, y_1, z_1\right)$ एवं बिन्दु $B\left(x_2, y_2, z_2\right)$ को मिलाने वाली सरल रेखा की दिक्कोज्याएँ ज्ञात करना।

माना रेखा AB की दिक्कोज्याएँ $l, m, n$ है। चित्र 8.9 के अनुसार,

$A_2B_2$ = AB का x-अक्ष के पर प्रक्षेप

= $\left(x_2 - x_1\right)$ = AB. (AB का x-अक्ष के साथ कोण की कोज्या)

$$\Rightarrow \left(x_2 - x_1\right) = AB.l$$

इसी प्रकार,

$A_3B_3 =$ AB का y-अक्ष के पर प्रक्षेप. $A_4B_4 =$ AB का z -अक्ष पर प्रक्षेप

$$\Rightarrow \left(y_2 - y_1\right) = AB.m, \left(z_1 - z_2\right) = AB.n$$

अतः

$$\frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{y_2 - y_1}{m} = \frac{z_2 - z_1}{n} = AB = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 \left(z_1 - z_2\right)^2}$$

या $l = \dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{\sum\left(x_2 - x_1\right)^2}}, m = \dfrac{y_2 - y_1}{\sqrt{\sum\left(x_2 - x_1\right)^2}}, n = \dfrac{z_2 - z_1}{\sqrt{\sum\left(x_2 - x_1\right)^2}}$

### 8.6.4 लेगरॉन्ज का सर्वसमिका (Lagrange's identity)

सिद्ध करना है

$$\left(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2\right)\left(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2\right) - \left(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2\right)^2$$
$$= \left(m_1 n_2 - m_2 n_1\right)^2 + \left(n_1 l_1 - n_2 l_1\right)^2 + \left(l_1 m_2 - l_2 m_1\right)^2$$

**हल :** $L.H.S = l_1^2 l_2^2 + l_1^2 m_2^2 + l_1^2 n_2^2 + l_2^2 m_1^2 + m_2^2 m_1^2 + n_2^2 m_1^2$

$$+ l_2^2 n_1^2 + m_2^2 n_1^2 + n_2^2 n_1^2 - l_1^2 l_2^2 - m_1^2 m_2^2 + n_1^2 n_2^2 - 2 l_1 l_2 m_1 m_2$$
$$- 2 m_1 m_2 n_1 n_2 - 2 n_1 n_2 l_1 l_2$$

$$= \left(l_1^2 m_2^2 + l_2^2 m_1^2 - 2 l_1 l_2 m_1 m_2\right) + \left(n_2^2 m_1^2 + m_2^2 n_1^2 - 2 m_1 m_2 n_1 n_2\right)$$
$$+ \left(l_2^2 n_1^2 + l_1^2 n_2^2 - 2 n_1 n_2 l_1 l_2\right)$$

$$= \left(l_1 m_2 - l_2 m_1\right)^2 + \left(m_1 n_2 - m_2 n_1\right)^2 + \left(n_1 l_2 - n_2 l_1\right)$$

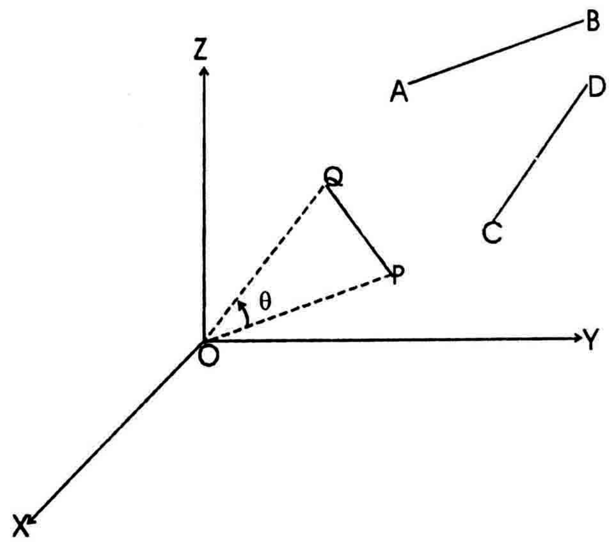
**टिप्पणी:** यदि $l_1, m_1, n_1$ एवं $l_2, m_2, n_2$ दिक्कोज्याएँ हों, तो सम्बंध $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ के

प्रयोग से,

$$1-\left(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2\right)^2=\left(l_1m_2-l_2m_1\right)^2+\left(m_1n_2-m_2n_1\right)^2+\left(n_1l_2-n_2l_1\right)^2$$

### 8.6.5 ज्ञात दिक्कोज्याओं वाली दो सरल रेखाओं के मध्य कोण (Angle between two straight lines of known direction cosines)

दो सरल रेखाएँ जिनकी दिक्कोज्याएँ क्रमशः $l_1, m_1, n_1$ और $l_2, m_2, n_2$ हैं, के मध्य कोण ज्ञात करना।




चित्र 8.10

माना AB एवं CD दो सरल रेखाएँ हैं जिनकी दिक्कोज्याएँ क्रमशः $l_1, m_1, n_1$ और $l_2, m_2, n_2$ हैं तथा इनके मध्य न्यून कोण $\theta$ है। रेखा AB एवं रेखा CD के समान्तर मूलबिन्दु O से क्रमश : OP एवं OQ रेखाएँ खींची। रेखा OP एवं रेखा OQ की दिक्कोज्याएँ क्रमश : $l_1, m_1, n_1$ और $l_2, m_2, n_2$ होगी एवं इनके मध्य न्यून कोण भी $\theta$ होगा।

माना बिन्दु P के निर्देशांक $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ एवं बिन्दु P के निर्देशांक $\left(x_2, y_2, z_2\right)$ तथा माना OP =r ,

OQ $=r_2$,

भाग (8.6.1) के अनुसार

$$x_1=r_1l_1, y=r_1m_1, z_1=r_1n_1$$

एवं $x_2=r_2l_2, y=r_2m_2, z_2=r_2n_2$

अब,

$$PQ^2=\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2$$

$$=\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)+\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)-2\left(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\right)$$

$$=r_1^2+r_2^2+-2r_1r_2\left(l_1l_2+m_1n_2+n_1n_2\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$\Delta OPQ$ में.

$$\cos\theta = \frac{OP^2 + OQ^2 - PQ^2}{2.OA.OB}$$ ..................(1)

समीकरण (1) एवं (2) से

$$\cos\theta = \frac{\left(r_1^2 + r_2^2\right) + \left[r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\left(l_1l_2 + m_1n_2 + n_1n_2\right)\right]}{2r_1r_2}$$

अत. दोनों रेखाओं के मध्य कोण निम्न द्वारा दिया जाता है

$$\cos\theta = l_1l_2 + m_1n_2 + n_1n_2$$

**विशेष स्थिति :**

1. यदि रेखाएँ लम्बवत् हों, तो $\theta = \frac{\pi}{2}$ या $\cos\theta = 0$ अत: $l_1l_2 + m_1n_2 + n_1n_2 = 0$

2. यदि रेखाएँ समान्तर हों, तो दोनो रेखाएँ अक्षों से समान कोण बनाऐंगी

   अत: $l_1 = l_2, m_1 = m_2, n_1 = n_2$

## 8.7 दिक्अनुपात (Direction cosines)

माना किसी सरल रेखा की दिक्कोज्याएँ $l, m, n$ है। यदि a, b, c तीन संख्याएँ इस प्रकार है कि ये $l, m, n$ के समानुपाती हैं, तो ये सरल रेखा के दिक्अनुपात कहलाती है। अत a, b, c यदि दिक्अनुपात हैं, तो

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = k \text{ (माना)}$$

$\Rightarrow l = ka, m = kb, n = kc$, सम्बंध $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ से

$$k = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

अत: $l = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, m = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, n = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

यदि + चिन्ह AB की दिक्कोज्याओं को प्रदर्शित करे, तो - चिन्ह BA' की दिक्कोज्याओं को प्रदर्शित करता है।

**दिक्अनुपात के पदों में कुछ परिणाम :**

1. दो सरल रेखाओं के दिक्अनुपात यदि $a_1, b_1, c_1$ एवं $a_2, b_2, c_2$ हों एवं इनके बीच का कोण $\theta$ हो,तो

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{\left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right).\left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2\right)}}$$

2. रेखाएँ लम्बवत् होने पर

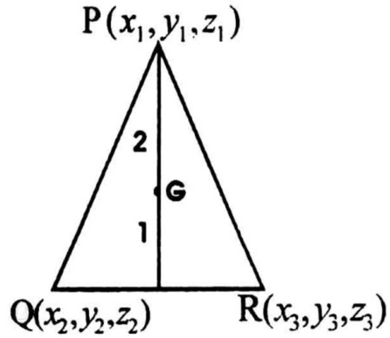
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

3. रेखाएँ समान्तर होने पर

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

**उदाहरण 1.** यदि त्रिभुज PQR के शीर्षों के निर्देशांक $P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$ एवं $Z(x_3, y_3, z_3)$ हों, तो इसके केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात कीजिये।

**हल:-**




किसी $\Delta$ का केन्द्रक G, शीर्ष और उसके सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा 2:1 में विभाजित करता है। माना S, भुजा QR का मध्य बिन्दु है। अत: बिन्दु S, के निर्देशांक होंगे (भाग (8.4) टिप्पणी 3 से)

$$\left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$$

केन्द्रक G, शीर्ष P और बिन्दु S को मिलाने वाली रेखा को 2:1 में विभाजित करता है केन्द्रक G के निर्देशांक होंगे

$$\left(\frac{2\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)+1.x_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)1..y_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)1.z_1}{2+1}\right)$$

या $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

**उदाहरण 2.** दूरी के सूत्र से सिद्ध कीजिये कि बिन्दु (1, 2, 3), (-1 ,-1 ,-1) एवं (3 ,5 ,7) सम रेख है।

**हल:** माना बिन्दु A के निर्देशांक (1 ,2 ,3), B के निर्देशांक (-1 ,-1 ,-1) एवं C के निर्देशांक (3 ,5 ,7) है। दूरी के सूत्र से

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29},$$

$$BC = \sqrt{\{3-(-1)\}^2 + \{5-(-1)\}^2 + \{7-(-1)\}^2} = \sqrt{16+36+64} = 2\sqrt{29},$$

$$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (5-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$$

अर्थात

$$AB + AC + BC$$

अतः तीनों बिन्दु समरेख है। साथ ही यह भी देखा जा सकता है कि बिन्दु A,BC का मध्य बिन्दु है।

**उदाहरण 3.** बिन्दु P (-2, 4, 7) एवं Q (3 , -5, 8) को मिलाने वाली रेखा को निर्देशांक समतल किस अनुपात में विभाजित करते है। साथ ही तलों के रेखा के साथ प्रतिच्छेद बिन्दु भी ज्ञात कीजिये।

**हल :** बिन्दु P(-2 ,4 ,7) एवं Q(3, -5, 8)को मिलाने वाली रेखा प्रतिच्छेद कोई बिन्दु, PQ को $\lambda$:1 में विभाजित करेगा। अत: इस रेखा पर स्थित किसी चर बिन्दु के निर्देशांक होंगे

$$\left(\frac{3\lambda-2}{\lambda+1},\frac{-5\lambda+4}{\lambda+1},\frac{8\lambda+7}{\lambda+1}\right)$$

xy - तल के साथ प्रतिच्छेदन: यह चर बिन्दु, रेखा एवं xy - तल का प्रतिच्छेद बिन्दु होगा, यदि और केवल यदि इसका z-निर्देशांक शून्य होगा, अर्थात्

$$\frac{8\lambda+7}{\lambda+1}=0\Rightarrow\lambda=-\frac{7}{8}$$

अर्थात xy-तल रेखा PQ को - 7:8 के अनुपात में विभाजित करेगा। $\lambda$ का मान रखने पर प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक होंगे

$$\left(\frac{3\left(-\frac{7}{8}\right)-2}{-\frac{7}{8}+1},\frac{-5\left(-\frac{7}{8}\right)+4}{-\frac{7}{8}+1},\frac{8\left(-\frac{7}{8}\right)+7}{-\frac{7}{8}+1}\right)$$

या (- 37, 67, 0)

**xy - तल के साथ प्रतिच्छेदन:** yz -तल पर स्थित बिन्दु का x -निर्देशांक शून्य होगा अत:

$$\frac{3\lambda-2}{\lambda+1}=0\Rightarrow\lambda=-\frac{2}{3}$$

अर्थात yz-तल, रेखा PQ को 2:3 के अनुपात में विभाजित करेगा। $\lambda$ का मान रखने पर प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक होंगे

$$\left(0,\frac{2}{5},\frac{37}{5}\right)$$

**xz- तल के साथ प्रतिच्छेदन:** xz -तल पर स्थित बिन्दु का y-निर्देशांक शुन्य होगा, अत:

$$\frac{-5\lambda+4}{\lambda+1}=0\Rightarrow\lambda=-\frac{4}{5}$$

अर्थात xz -तल, रेखा PQ को 4:5 के अनुपात में विभाजित करेगा। $\lambda$ का मान रखने पर प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक होंगे

$$\left(\frac{2}{9},0,\frac{67}{9}\right)$$

**उदाहरण 4.** एक सरल रेखा के अक्षों पर प्रक्षेप क्रमश: 12, 4 एवं 3 है। रेखा की लम्बाई एवं दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिये।

**हल:** माना दी हुई रेखा PQ है, जिसकी दिक्कोज्याएँ $l, m, n$ है। दिया है,

रेखा PQ का x - अक्ष पर प्रक्षेप = 12

$\Rightarrow PQ.l =$ 12 .....................(1)

इसी प्रकार

$PQ.m = 4$ .............................(2)

एवं

$PQ.n = 3$ ...............(3)

समीकरण (1) (2) एवं (3) को वर्ग करके जोडने पर,

$$PQ^2\left(l^2+m^2+n^2\right)=\left(12\right)^2+\left(4\right)^2+\left(3\right)^2=144+16+9=169$$

सम्बंध $l^2+m^2+n^2=1$ के प्रयोग से,

$PQ^2=169$ या $PQ=13$

समीकरण (1),(2) एवं (3) में PQ का मान रखने पर

13 $l$ = 12,13 $m$ =4,13 $n$ = 3

$$l=\frac{12}{13},\ m=\frac{4}{13},\ n=\frac{3}{13}$$

अतः दी गई रेखा की लम्बाई 13 इकाई एवं दिक्कोज्याएँ $\frac{12}{13},\frac{4}{13},\frac{3}{13}$ है।

**उदाहरण 5.** उन रेखाओं की दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिये जिनमें निम्न सम्बंध है

$l-5m+3n=0$ तथा $7l^2+5m^2-3n^2=0$

**हल :** दिया हुआ है

$l-5m+3n=0$ ..........(1)

$7l^2+5m^2-3n^2=0$ ...........(2)

समीकरण (1) से l का मान (2) में रखने पर,

$$7\left(5m-3n\right)^2+5m^2-3n^2=0$$

या $6m^2+2n^2-7mn=0$

या $\left(2m-n\right)\left(3m-2n\right)=0$

अतः $2m-n=0$ या $3m-2n=0$

यदि $2m-n=0$, तो $\frac{m}{1}=\frac{n}{2}$ तथा समीकरण (1) से मान रखने पर, $\frac{l}{-1}=\frac{m}{1}$ , अत:

त्रिविम निर्देशांक ज्यामिति

समतल एवं सरल रेखाएँ

$$\frac{l}{-1}=\frac{m}{1}=\frac{n}{2}$$

अर्थात दिक अनुपात - 1, 1, 2 हैं। अत:

$l=\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}}=\frac{-1}{\sqrt{6}}$, इसी प्रकार, $m=\frac{1}{\sqrt{6}}, n=\frac{2}{\sqrt{6}}$

यदि $3m-2n=0$, तो $\frac{m}{2}=\frac{n}{3}$ तथा समीकरण (1) से $\frac{l}{1}=\frac{m}{2}$ अत:

$\frac{l}{1}=\frac{m}{2}=\frac{n}{3}$,

अर्थात दिक्अनुपात 1,2,3 हैं।

अत: $l=\frac{1}{\sqrt{14}}, \quad m=\frac{2}{\sqrt{14}}, \quad n=\frac{3}{\sqrt{14}}$,

अत: रेखाओं की दिक्कोज्याएँ $-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}$ एवं $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$ है।

**स्वमूल्यांकन प्रश्न -1**

1. बिन्दु $(0,1,2)$ स्थित होगा

(i) x - अक्ष पर (ii) z - अक्ष पर

(iii) xy - तल पर (iv) yz -तल पर

2. $(-3,0,0)$ स्थित होगा

(i) x - अक्ष पर (ii) y - अक्ष पर

(iii) xy -तल पर (iv) yz -तल पर

3. $P(x_1,y_1,z_1)$ एवं $Q(x_2,y_2,z_2)$ को $a:b$ में बाह्य विभाजन करने वाले बिन्दु के निर्देशांक होंगे

(i) $\left(\frac{ax_1+bx_2}{a+b}, \frac{ay_1+by_2}{a+b}, \frac{az_1+bz_2}{a+b}\right)$

(ii) $\left(\frac{ax_1-bx_2}{b-a}, \frac{ay_1-by_2}{b-a}, \frac{az_1-bz_2}{b-a}\right)$

(iii) $\left(\frac{ax_2-bx_1}{a-b}, \frac{ay_2-by_1}{a-b}, \frac{az_2-bz_1}{a-b}\right)$

(iv) $(ax_2-bx_1, ay_2-by_1, az_2-bz_1)$

4. $A(a_1,b_1,c_1)$ एवं $B(a_2,b_2,c_2)$ को मिलाने वाली रेखा के दिक्अनुपात होंगे

(i) $a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2$

(ii) $a_2-a_1, b_2-b_1, c_2-c_1$

(iii) $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{b_1+b_2}{2}, \frac{c_1+c_2}{2}$

(iv) $\frac{a_2-a_1}{2}, \frac{b_2-b_1}{2}, \frac{c_2-c_1}{2}$

5. दो सरल रेखाएँ जिनके दिक्‌अनुपात $a_1, b_1, c_1$ एवं $a_2, b_2, c_2$ हैं, लम्बवत् होंगी यदि

(i) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ (ii) $a_1=a_2, b_1=b_2, c_1=c_2$

(iii) $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ (iv) $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=1$

6. यदि $a, b, c$ किसी सरल रेखा के दिक्‌अनुपात हैं, तो दिक्कोज्याएँ होंगी

(i) $a, b, c$ (ii) $\frac{a}{\sqrt{\sum a^2}}, \frac{b}{\sqrt{\sum a^2}}, \frac{c}{\sqrt{\sum a^2}}$

(iii) $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$

## 8.8 समतल (Plane)

**परिभाषा (Definition) :** यदि किसी पृष्ठ (surface) पर स्थित कोई भी दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का प्रत्येक बिन्दु उसी पृष्ठ पर स्थित हो, तो ऐसा पृष्ठ समतल कहलाता है। अत : समतल पर कोई भी दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा पूर्णतया : समतल पर स्थित होती है।

### 8.8.1 समतल का सामान्य समीकरण (General equation of a plane)

सिद्ध करना है कि $x, y, z$ में प्रत्येक एक घातीय (linear) समीकरण एक समतल को प्रदर्शित करता है।

तीन चरों $x, y, z$ में एक घातीय व्यापक समीकरण है

$ax+by+cz+d=0$ ............ (1)

जहाँ $a, b, c, d$ स्थिरांक हैं एवं $a, b, c$ तीनों एक साथ शून्य नहीं हैं।

अब हम यह प्रदर्शित करेंगे कि पृष्ठ (1) पर स्थित कोई भी दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु पृष्ठ (1) पर स्थित है।

माना पृष्ठ (1) पर स्थित कोई दो बिन्दु $A(x_1, y_1, z_1)$ एवं $B(x_2, y_2, z_2)$ हैं। अत : बिन्दु $A$ एवं बिन्दु $B$ के निर्देशांक पृष्ठ के समीकरण (1) को संतुष्ट करेंगे। अर्थात्

$ax_1+by_1+cz_1+d=0$ ...... (2)

$ax_2+by_2+cz_2+d=0$ ....... (3)

समीकरण (3) में $\lambda$ का गुणा करके समीकरण (2) में जोड़ने पर,

$$\lambda(ax_2+by_2+cz_2+d=0)+(ax_1+by_1+cz_1+d)=0$$

या $a(\lambda x_2+x_1)+b(\lambda y_2+y_1)+c(\lambda z_2+z_1)+d(\lambda+1)=0$

या $a\left(\frac{(\lambda x_2+x_1)}{\lambda+1}\right)+b\left(\frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}\right)+c\left(\frac{(\lambda z_2+z_1)}{\lambda+1}\right)+d=0$...... (4)

भाग (8 .4) की टिप्पणी (1) के अनुसार, दो बिन्दुओं $A(x_1,y_1,z_1)$ एवं $B(x_2,y_2,z_2)$ को मिलाने वाली सरल रेखा पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक हैं:

$$\left(\frac{(\lambda x_2+x_1)}{\lambda+1},\frac{(\lambda y_2+y_1)}{\lambda+1},\frac{(\lambda z_2+z_1)}{\lambda+1}\right)$$ जहाँ $\lambda$ प्राचल है।

समीकरण (4) प्रदर्शित करता है कि यह बिन्दु समीकरण (1) को संतुष्ट करता है अर्थात $A$ एवं $B$ को मिलने वाली रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु पृष्ठ (1) पर स्थित है, अर्थात रेखा पूर्णतया : पृष्ठ पर स्थित है। अतः समीकरण (1) द्वारा प्रदर्शित पृष्ठ एक समतल है।

**टिप्पणी :** समीकरण (1) को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है

$$\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y+\frac{c}{d}z+1=0$$

या $Ax+By+Cz+1=0$

अर्थात किसी समतल के समीकरण में तीन स्वेच्छ अचर (arbitrary constants) होते हैं। अत: किसी समतल का समीकरण ज्ञात करने के लिये तीन स्वेच्छ प्रतिबन्धों (arbitrary conditions) की आवश्यकता होती है।

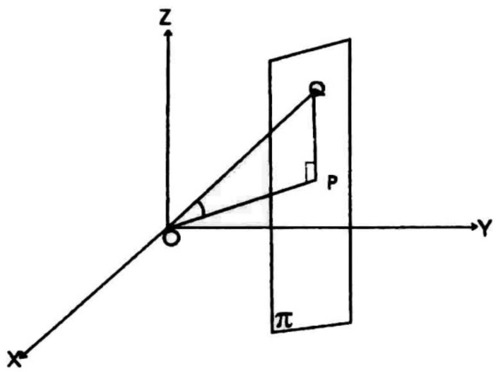
### 8.8.2 समतल के समीकरण के मानक रूप
### (Standard forms of equation of a plane)

किसी भी समतल के समीकरण को निम्नलिखित दो रूपों में भी व्यक्त किया जा सकता है :

(1) अभिलम्ब रूप (Normal forms) (2) अन्त खण्ड रूप (Intercept forms)

(1) **अभिलम्ब रूप :** किसी समतल पर मूलबिन्दु से खींचे गये अभिलम्ब की लम्बाई p एवं इसकी दिक्कोज्याएँ $l,m,n$ ज्ञात हो, तो समतल का समीकरण ज्ञात किया जा सकता है। $p,l,m,n$ के पदों में समतल का समीकरण समतल का अभिलम्ब रूप में समीकरण कहलाता है।

माना $\pi$ एक समतल है। इस पर मूलबिन्दु $O$ से एक लम्ब खींचा जो समतल को $P$ बिन्दु पर मिलता है। मान इसकी लम्बाई $OP=p$




चित्र 8.11

एवं दिक्कोज्याएँ $l,m,n$ हैं। माना, समतल पर स्थित किसी बिन्दु Q के निर्देशांक $(x,y,z)$ हैं। हमें बिन्दु Q का बिन्दुपथ अर्थात समतल का समीकरण ज्ञात करना है। मूलबिन्दु $O$ एव बिन्दु Q को मिलाने वाली रेखा खींची, साथ ही बिन्दु $P$ एवं बिन्दु Q को मिलाया। चूंकि $OP$, समतल पर लम्ब है, अत: यह रेखा $PQ$ पर भी लम्ब होगा। अत: रेखा $PQ$ एवं लम्ब $OP$ लम्बवत् हैं। अब, रेखा $OQ$ का रेखा $OP$ पर प्रक्षेप $= OQ\cos\angle QOP$

$$= OP$$

$$= p$$

($\triangle POQ = \dfrac{OP}{OQ} = \cos\angle QOP$ एवं प्रक्षेप की परिभाषा से)

परन्तु, भाग (8.6.2) से

रेखा QO का रेखा $OP$ पर प्रक्षेप $=(x-0)l+(y-0)m+(z-0)n$

(1) एवं (2) से,

$$lx+my+nz=p$$

जो कि बिन्दु $Q(x,y,z)$ का अभीष्ट बिन्दुपथ एवं समतल $ABC$ का अभिलम्ब रूप में समीकरण है। यहाँ p लम्बाई को प्रदर्शित करता हैं अत: यह सदैव धनात्मक होगा।

(2) **अन्त: खण्ड रूप:** यदि किसी समतल द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्त: खण्डों की लम्बाई ज्ञात हो, तो समतल का समीकरण ज्ञात किया जा सकता है। समतल द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्त: खण्डों के रूप में समतल का समीकरण, इसका अन्त: खण्ड रूप कहलाता है।

माना समतल, अक्षों पर क्रमश: $a,b$ एवं $c$ अत: खण्ड काटता है। यदि समतल के अक्षों के साथ प्रतिच्छेद बिन्दु $A,B$ एवं $C$ हो, जहाँ

$OA=a$, $OB=b$ एवं $OC=c$,

तो बिन्दु है, $A,B$ एवं $C$ के निर्देशांक $\pi\ (a,o,o,),(o,b,o,)$ एवं $(o,o,c,)$ होंगी।

माना समतल का समीकरण है

$$rx+sy+tz+d=0$$

चूंकि बिन्दु $A(a,o,o,),B(o,b,o,)$ एवं $C(o,o,c,)$ समतल पर स्थित हैं, अत:

$$r.a+s.o+t.o+d= \ \Rightarrow r={-d}/{a}$$

$$r.o+s.b+t.o+d= \ \Rightarrow s={-d}/{b}$$

$$r.o+s.o+t.c+d= \ \Rightarrow t={-d}/{c}$$

ये मान. समतल के समीकरण में रखने पर

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ (सरल करने पर)

यह समतल का अन्त: खण्ड रूप में समीकरण है।

### 8.8.3 समतल के व्यापक समीकरण का मानक रूपों में समानयन

### (Reduction of general equation of plane in standard forms)

1. **अभिलम्ब रूप में समानयन :** समतल का व्यापक समीकरण है

$ax+by+cz+d=0$ ........... (1)

माना समतल (1) का अभिलम्ब रूप में समीकरण है

$lx+my+nz=p$ ........... (2)

चूंकि समीकरण (1) एवं (2) एक ही समतल को व्यक्त करते हैं, अत : गुणांकों की तुलना करने पर

$$\frac{a}{l}=\frac{b}{m}=\frac{c}{n}=\frac{-d}{p}$$

या $l=\frac{ap}{d}, m=\frac{bp}{d}, n=\frac{cp}{d}$

यहाँ $l,m,n$ दिक्कोज्याएँ हैं। अत:

$$l^2+m^2+n^2=0 \Rightarrow \left(\frac{-ap}{d}\right)^2+\left(\frac{-bp}{d}\right)^2+\left(\frac{-cp}{d}\right)^2=1$$

$$\Rightarrow p^2=\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2} \text{ या } p=\pm\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

चूंकि $p$, मूलबिन्दु से समतल की दूरी है, अत : यह सदैव धनात्मक होगा इसलिये $d$ के धनात्मक होने पर $p$ के उपरोक्त मान में ऋण चिन्ह एवं $d$ के ऋणात्मक होने पर धन चिन्ह का प्रयोग करते है।

अत : $d$ के धनात्मक होने पर,

$$p=\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, l=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$m=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, n=-\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

एवं $d$ के ऋणात्मक होने पर

$$p=-\frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, l=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

$$m=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, n=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

**टिप्पणी :** $l,m,n$ के उपरोक्त मानों से स्पष्ट है कि $a,b,c$ समतल के अभिलम्ब के दिक्अनुपात हैं। अर्थात् किसी भी समतल के समीकरण में x,y एवं z के गुणांक, उस समतल के अभिलम्ब के दिक्अनुपात को प्रदर्शित करते हैं।

(2) **अन्त : खण्ड रूप में समानयन :** समतल का व्यापक समीकरण है

$ax+by+cz+d=0$ .......... (1)

यदि $d \neq 0$, तो इस समीकरण में $d$ का भाग देने पर

$$\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y+\frac{c}{d}z+1=0,$$

या $$\frac{x}{(-d/a)}+\frac{y}{(-d/b)}+\frac{z}{(-d/c)}=1,$$

या $$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1 \text{..........} \quad (2)$$

जहाँ $A=\frac{-d}{a}, B=\frac{-d}{b}, C=\frac{-d}{c}$, समतल (1) द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्त : अन्तः खण्डों की लम्बाई हैं। समीकरण (2), दिये गये समतल (1) का अन्त : खण्ड रूप में समीकरण है। यदि $d=0$ हो. तो,

$A=0, B=0, C=0$ अर्थात समतल (1) अक्षों पर कोई अन्त : खण्ड नहीं काटेगा, अर्थात समतल (1) मूल बिन्दु से गुजरेगा।

### 8.8.4 दिये हुए बिन्दुओं से जाने वाले समतल का समीकरण (Equation of the plane passing through the given points)

(1) एक बिन्दु से जाने वाले समतल का समीकरण:

माना समतल

$$ax+by+cz+d=0 \text{..........} \quad (1)$$

बिन्दु $(x_1, y_1, z_1)$ से गुजरता है। यह बिन्दु समतल के समीकरण को संतुष्ट करेगा, अत :

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0 \text{..........} \quad (2)$$

समीकरण (1) में से समीकरण (2) को घटाने पर,

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \text{.........} \quad (3)$$

यह बिन्दु $(x_1, y_1, z_1)$ से जाने वाले समतल का समीकरण है।

**विशेष स्थिति :** यदि समतल मूलबिन्दु (0,0,0) से जाता है, तो समीकरण होगा

$$ax+by+cz=0$$

अर्थात अचर पद (6) के शून्य होने पर समतल मूल बिन्दु से गुजरेगा।

(2) तीन असंरेखीय बिन्दुओं से गुजरने वाले समतल का समीकरण :

माना दिये हुए तीन असंरेखीय (non-collinear) बिन्दु

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ हैं।

माना समतल का समीकरण है

$$ax+by+cz+d \text{.......} \quad (1)$$

चूंकि दिये हुए बिन्दु समतल पर स्थित है अत : ये समतल के समीकरण (1) को संतुष्ट करेंगे, अर्थात्

$$ax_1+by_1+cz_1+d=0 \text{..........} \quad (2)$$

$$ax_2+by_2+cz_2+d=0 \text{..........} \quad (3)$$

$$ax_3+by_3+cz_3+d=0 \text{..........} \quad (4)$$

समीकरण (1), (2), (3) एवं (4) से $a, b, c$ एवं $d$ को विलोपित करने पर हमें निम्न सम्बंध प्राप्त होता है।

$$\begin{vmatrix} xyz1 \\ x_1y_1z_11 \\ x_2y_2z_21 \\ x_3y_3z_31 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

यह अभीष्ट समतल का समीकरण है।

(3) दो समतलों के प्रतिच्छेदन से गुजरने वाले समतल का समीकरण:

माना कि दिये गये दो समतलों के समीकरण हैं

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

हमें उस समतल का समीकरण ज्ञात करना है जो समतल (1) एवं समतल (2) के प्रतिच्छेदन से गुजरता है।

हम कह सकते हैं कि अभीष्ट समतल उन बिन्दुओं से गुजरता है जो समतल (1) एवं समतल (2), दोनों पर स्थित हैं। माना बिन्दु $(\alpha, \beta, \gamma)$ दोनो समतलों पर स्थित है। अत:

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + d_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

समीकरण (1) एवं (2) से

$$(a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1) + \lambda(a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + d_2) = 0 \ldots\ldots\ldots\ (3)$$

अब निम्न समीकरण पर विचार करें

$$(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0 \ldots\ldots\ldots(4)$$

समीकरण (4) तीन चरों में एक घातीय समीकरण है। अत: यह एक समतल को प्रदर्शित करता है। समीकरण (3) एवं समीकरण (4) से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि बिन्दु $(\alpha, \beta, \gamma)$ समतल (4) पर स्थित है। अर्थात समतल (4) पर वे सभी बिन्दु स्थित हैं जो समतल (1) एवं समतल (2), दोनों पर स्थित है। अत: हम कह सकते है कि समीकरण (4) एक ऐसे समतल को व्यक्त करता है जो समतल (1) एवं समतल (2) के प्रतिच्छेदन से गुजरता है। अत: समीकरण (4) अभीष्ट समतल को प्रदर्शित करता है।

### 8.8.5 दो समतलों के मध्य कोण

माना दो दिये हुए समतलों के समीकरण है

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

एवं $\;_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \ldots\ldots\ldots(2)$

दो समतलों के मध्य कोण का मान, उनके अभिलम्बों के मध्य कोण के मान के बराबर होगा। समतल (1) एवं समतल (2) के अभिलम्बों के दिक्‌अनुपात क्रमश: $a_1, b_1, c_1$ एवं $a_2, b_2, c_2$

होंगे। यदि समतलों के मध्य कोण $\theta$ हो, तो दो रेखाओं के मध्य कोण के सूत्र से (भाग (8.7) के परिणाम (1) से)

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

**विशेष स्थिति : (1)**यदि समतल परस्पर लम्ब हों, तो $\theta = 90^\circ$ या $\cos\theta = 0$ अत: $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = 0$

(2) यदि समतल परस्पर समान्तर हों, तो उनके अभिलम्ब भी समान्तर होंगे, अर्थात $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

**टिप्पणी : 1.** चूंकि समांतर समतलों के दिक्अनुपात समानुपातिक होते है, अत :

$$a_2 = \mu a_1, b_2 = \mu b_1, c_2 = \mu c_1$$

समीकरण (2) में मान रखने पर,

$$\mu a_1 x + \mu b_1 y + \mu c_1 z + d_2 = 0$$

या $a_1x+b_1y+c_1z+\left(d_2/\mu\right)=0$

या $a_1x+b_1y+c_1z+\lambda=0,$ जहाँ $\lambda = \frac{d_2}{\mu}$

अत: समान्तर समतलों के समीकरणों में केवल अचर पद भिन्न होंगे।

अत : किसी दिये हुए समतल $ax+by+cz+d=0$ के समान्तर समतल का समीकरण होगा

$$ax+by+cz+\lambda=0$$

2. यदि समतल का समीकरण अभिलम्ब रूप में

$$lx+my+nz=p$$

है, तो इसके समान्तर समतल का समीकरण होगा

$$lx+my+nz=p_1$$

जहाँ $p_1$, मूल बिन्दु से इस समतल पर डाले गये लम्ब की लम्बाई एवं $l,m,n$ इस अभिलम्ब की दिक्कोज्याएँ है। अतः दो समान्तर समतलों के बीच की दूरी $|p-p_1|$ होगी।

### 8.8.6 समतल एवं बिन्दु (Plane and point)

इस भाग में हम समतल के सापेक्ष दो दिये हुए बिन्दुओं की स्थिति एवं समतल और बिन्दु के बीच की दूरी ज्ञात करने की विधि का अध्ययन करेंगे।

(1) **समतल के सापेक्ष दो बिन्दुओं की स्थिति:** माना समतल का समीकरण है

$ax+by+cz+d=0$........... (1)

हमें वह प्रतिबन्ध ज्ञात करना है कि दो दिये हुए बिन्दु $P(x_1,y_1,z_1)$ एवं $Q(x_1,y_1,z_1)$ दिये हुए समतल (1) के एक ही पार्श्व (same side) या विपरित पार्श्वों (opposite side) की ओर स्थित हैं।

माना समतल (1) बिन्दु $P$ और $Q$ को मिलाने वाली रेखा को $\lambda:1$ के अनुपात में विभाजित करता है । बिन्दु $P$ और बिन्दु $Q$ को मिलाने वाली रेखा को $\lambda:1$ के अनुपात में विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक होंगे

$$\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1},\frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1},\frac{\lambda z_2+z_1}{\lambda+1}\right)$$

यह बिन्दु समतल पर स्थित है, अतः

$$a\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1}\right)+b\left(\frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1}\right)+c\left(\frac{\lambda z_2+z_1}{\lambda+1}\right)+d=0$$

या $(a_1x+b_1y+c_1z+d)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z+d)=0$

या $\lambda=-\dfrac{(ax_1+by_1+cz_1+d)}{(ax_1+by_1+cz_1+d)}$ ........... (2)

यदि $\lambda$ का मान धनात्मक अर्थात् $(ax_1+by_1+cz_1+d)$ एवं $(ax_2+by_2+cz_2+d)$ विपरित चिन्ह के हैं, तो समतल, रेखा $PQ$ को अन्त : विभाजित करेगा। अत : $P$ एवं $Q$, समतल के विपरीत पार्श्वों की ओर स्थित हैं।

यदि $\lambda$ का मान ऋणात्मक अर्थात् $(ax_1+by_1+cz_1+d)$ एवं $(ax_2+by_2+cz_2+d)$ समान चिन्ह के हैं, तो समतल, रेखा $PQ$ को बाह्य विभाजित करेगा। अत: $P$ एवं $Q$, समतल के एक ही पार्श्व की ओर होंगे।

**(2) समतल और दिये हुए बिन्दु के बीच की दूरी (Distance between the plane and the given point) :**

किसी समतल और एक बिन्दु की बीच की दूरी, उस बिन्दु से दिये हुए समतल पर डाले गये लम्ब की लम्बाई के बराबर होती है। माना दिया हुआ बिन्दु $P(x_1,y_1,z_1)$ एवं समतल का अभिलम्ब रूप में समीकरण है

$lx+my+nz=p$ ........... (1)

बिन्दु $P$ से गुजरने वाले समतल (1) के समान्तर समतल का समीकरण होगा (भाग (8.8.5) की टिप्पणी (1) से)

$lx+my+nz=p_1$ ........... (2)

समतल (2) बिन्दु $P$ से गुजरता है

$lx_1+my_1+nz_1=p_1$ ........... (3)

समतल (1) एवं बिन्दु $P$ बीच की दूरी

समतल (1) एवं समतल (2) के बीच की दूरी

$=|p-p_1|$ (भाग (8.8.5) की टिप्पणी 2 से)

$=|p-(lx_1+my_1+nz_1)|$ ........... (4)

**विशेष स्थिति :** यदि समतल का समीकरण $ax+by+cz+d$ के रूप में हो, तो इसका अभिलम्ब रूप होगा

$$\pm\frac{ax}{\sqrt{(a_1+b_1+c_1)}}\pm\frac{ax}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}}\pm\frac{cz}{\sqrt{(a_1+b_1+c_1)}}=\pm\frac{d}{\sqrt{(a_1+b_1+c_1)}}$$

अतः सूत्र (4) में मान रखने पर बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ की समतल $ax+by+cz+d$ से दूरी होगी

$$\pm\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$$

### 8.8.7 दो समतलों के मध्य कोण को समद्विभाजित करने वाले समतल का समीकरण (Equation of the plane bisecting angles between two planes)

माना दो दिये हुए समतलों के समीकरण हैं

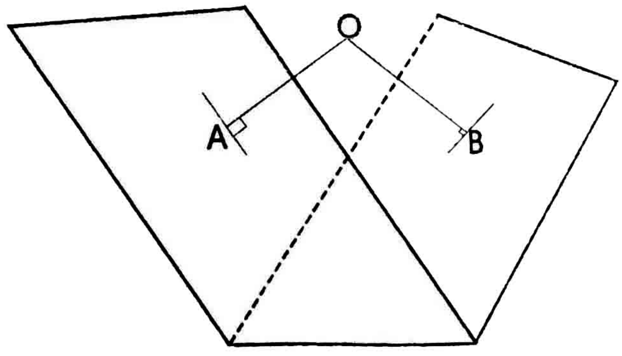
$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \text{ ........... } (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \text{ ........... } (2)$$

हमें उस समतल का समीकरण ज्ञात करना है जो समतल (1) एवं समतल (2) के बीच के कोण को समद्विभाजित करता है । माना, उस समद्विभाजक समतल के किसी बिन्दु P के निर्देशांक $(x, y, z)$ हैं। हमें इस बिन्दु P का बिन्दुपथ ज्ञात करना है। ज्यामिति से हम जानते हैं कि समद्विभाजक समतल पर स्थित प्रत्येक बिन्दु की दिये हुए दोनों समतलों से लम्बवत् दूरी समान होगी। अत : (भाग (8.8.6) (2) के अनुसार),

$$\frac{ax_1+by_1+cz_1+d_1}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}}=\pm\frac{ax_2+by_2+cz_2+d_2}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}} \text{ .............(3)}$$

जो कि बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ का बिन्दुपथ है। अत: यह दिये हुए समतलों (1) एवं (2) के मध्य कोण को समद्विभाजित करने वाले समतलों के समीकरण हैं। इनमें से एक समतल न्यून कोण को एवं दूसरा समतल अधिक कोण को समद्विभाजित करता है।




**चित्र 8.12**

**टिप्पणी :** एक दिये हुए समतल एवं एक समद्विभाजक समतल के मध्य कोण यदि $45^\circ$ से कम है तो यह समद्विमाजक समतल दिये हुए समतलों के मध्य न्यून कोण का समद्विभाजक है। अत : दूसरा समद्विभाजक समतल अधिक कोण का समद्विभाजक होगा। $\tan\theta<1$ होने पर $\theta<45^\circ$ होता है।

**उदाहरण 6.** बिन्दु (1,1,1), (1-1,1) एवं (-7,- 3,- 5) से गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये।

**हल :** हम जानते हैं कि तीन बिन्दुओं $(x_i, y_i, z_i)$ ( $i = 1,2,3$) से जाने वाले समतल का समीकरण होता है

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

अतः (1,1,1), (1-1,1) एवं (-7,- 3,- 5) से गुजरने वाले समतल का समीकरण होगा

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -7 & -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

या $$x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -7 & -5 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -7 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -7 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

या $x\left[1(1+5)-1(-1+3)+1(5+3)\right]-y\left[1(1+5)-1(1+7)+1(-5+7)\right]$

$+z\left[1(-1+3)-1(1+7)+1(-3-7)\right]-1\left[1(5+3)-1(-5+7)+1(-3-7)\right]=0$

या $12x-16z+4=0$

या $3x-4z+1=0$

यह अभिष्ट समतल का समीकरण है।

**दूसरी विधि :** माना समतल का समीकरण है

$ax+by+cz+d=0$ ................(1)

यह समतल, बिन्दु (1,1,1) से गुजरता है, अत:

$a.1+b.1+c.1+d=0$ ........ (2)

$a+b+c+d=0$

समीकरण (1) में से (2) को घटाने पर,

$a(x-1)+b(y-1)+c(z-1)=0$ ........... (3)

यह, बिन्दु (1,1,1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण है।

यह समतल बिन्दु (1,-1,1) एवं (-7,-3,-5) से गुजरता है. अत:

$a(1-1)+b(-1-1)+c(1-1)=0$ या $-2b=0$

या $b=0$ ........... (4)

एवं $a(-7-1)+b(-3-1)+c(-5-1)=0$

या $8a+4b+6c=0$ .......... (5)

समीकरण (5) में $b=0$ रखने पर

$8a+6c=0$ या $a=-\frac{3c}{4}$ ......,.... (6)

माना $c=k$, तो $a=\frac{-3k}{4}$

अब समीकरण (3) में $a=\frac{-3k}{4}$, $b=0$, $c=k$ रखने पर,

$$\left(\frac{-3k}{4}\right)(x-1)+(0)(y-1)+k(z-1)=0$$

या $3x-4z+1=0$ (सरल करने पर)

जो कि अभीष्ट समतल का समीकरण है।

**उदाहरण 7** बिन्दु (2,-3,1) से गुजरने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दुओं (3,4,-1) एवं (2,-1,5) को मिलाने वाली रेखा के अभिलम्ब हो।

**हल:** बिन्दु (2,-3,1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण होगा

$a(x-2)+b(y+3)+c(z-1)=0$ ........... (1)

बिन्दु (3,4-1) एवं (2-1,5) को मिलाने वाली रेखा के दिक्अनुपात होंगे

(3-2),(4+1), (-1-5) या 1,5-6

समतल (1) के अभिलम्ब के दिक्अनुपात हैं

$a,b,c$

समतल (1) के अभिलम्ब एवं दिये हुए दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा, जो समतल (1) अभिलम्ब है, समान्तर होंगी, अतः

$\frac{a}{1}=\frac{b}{5}=\frac{c}{-6}=k$ (माना)

$\Rightarrow a=k, b=5k, c=-6k$

ये मान समीकरण (1) में रखने पर

$k(x-2)+5k(y+3)+(-6k)(z-1)=0$

या $x-5y-6z+19=0$

यह अभीष्ट समतल का समीकरण है।

**उदाहरण 8.** उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये जो कि बिन्दु $A(\alpha,\beta,\gamma)$ से गुजरे एवं $OA$ के लम्बवत हो।

**हल:** बिन्दु $A(\alpha,\beta,\gamma)$ से गुजरने वाले किसी समतल का समीकरण होगा

$a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0$ ........... (1)

रेखा $OA$ के दिक्अनुपात होंगे

$(\alpha-0),(\beta-0),(\gamma-0)$

या $\alpha, \beta, \lambda$

ये रेखा समतल (1) के लम्बवत है, अत:

$$\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\frac{c}{\gamma}=k \quad \text{(माना)}$$

$$\Rightarrow a=\alpha k, b=\beta k, c=\gamma k$$

ये मान समीकरण (1) में रखने पर

$$(ak)(x-\alpha)+(\beta k)(y-\beta)+(\gamma k)(z-\gamma)=0$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,$$

जो कि अभीष्ट समतल का समीकरण है।

**दूसरी विधि :** समतल, रेखा $OA$ के लम्बवत है अर्थात मूलबिन्दु $O$ से समतल पर डाले गये अभिलम्ब की लम्बाई, दूरी $OA$ के बराबर एवं समतल के अभिलम्ब की दिक्कोज्याएँ वही होंगी जो रेखा $OA$ की दिक्कोज्याएँ हैं क्योंकि यहाँ बिन्दु $A$ समतल पर स्थित है।

अब, $OA$ के दिक्अनुपात होंगे

$(\alpha-0),(\beta-0),(\gamma-0)$

या $\alpha, \beta, \lambda$

अत दिक्कोज्याएँ होंगी

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}, \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

एवं दूरी $OA=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$

समतल का अभिलम्ब रूप होता है

$$lx+my+nz=p$$

जहाँ $l, m, n$ $OA$ की दिक्कोज्याएँ एवं p, दूरी $OA$ है। अत: समतल का समीकरण होगा

$$\frac{\alpha x}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}+\frac{\beta y}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}+\frac{\gamma z}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

या $\alpha x+\beta y+\gamma z=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

यह अभीष्ट समतल का समीकरण है।

**उदाहरण 9.** समतल $2x+3y-3z=5$ का अन्तःखण्ड एवं अभिलम्बीय रूप ज्ञात कीजिए। इसके द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्त: खण्ड एवं इसके अभिलम्ब की दिक्कोज्याएँ भी ज्ञात कीजिये।

**हल : अन्त : खण्ड रूप :** माना दिया गया समतल अक्षों को क्रमश: बिन्दु $A, B$,एवं $C$ पर काटता है। माना $OA=a, OB=b, OC=c$ है, तो x-अक्ष , y- अक्ष एवं z-अक्ष पर समतल द्वारा काटे गये अन्त: खण्ड क्रमश: a,b, एवं c होंगे। साथ ही बिन्दु $A, B$,एवं $C$ के

निर्देशांक क्रमशः $(a,o,o),(o,b,o)$ एवं $(o,o,c)$ होंगे। बिन्दु $A,B$,एव $C$ समतल $2x+3y-3z=5$ पर स्थित है,अत

$$2.a+3.0-3.0=5 \Rightarrow a=5/2$$

$$2.0+3.b-3.0=5 \Rightarrow b=5/3$$

$$2.0+3.0-3.c=5 \Rightarrow b=-5/3$$

समतल के अन्तः खण्ड रूप

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

में मान रखने पर

$$\frac{x}{\left(5/2\right)}+\frac{y}{\left(5/3\right)}+\frac{z}{\left(-5/3\right)}=1$$

यह समतल के समीकरण का अन्तः खण्ड रूप है एवं समतल द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्तः खण्ड क्रमशः $5/2, 5/3, -5/3$ है।

**अभिलम्ब रूप :** माना दिये समतल का अभिलम्ब रूप है

$$lx+my+nz=p \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

यह समीकरण, समतल

$$2x+3y+3z=5 \ldots\ldots\ldots (2)$$ को प्रदर्शित करेगा, यदि

$$\frac{l}{2}=\frac{m}{2}=\frac{n}{-3}=\frac{p}{5}=k$$ (माना)

या $l=2k, m=3k, n=-3k, p=5k$

चूंकि $l,m,n$ दिक्कोज्याएँ हैं, अतः

$$l^2+m^2+n^2=1$$

$$\Rightarrow (2k)^2+(3k)^2+(-3k)^2=1$$

या $4k^2+9k^2+9k^2=1$

या $22k^2=1 \Rightarrow k=\pm\frac{1}{\sqrt{22}}$

अतः $p=\pm\frac{5}{\sqrt{22}}$ चूंकि p, दूरी है अत : p का मान धनात्मक होगा। अतः $p=\frac{5}{\sqrt{22}}$ जो कि $k=\frac{1}{\sqrt{22}}$ से प्राप्त होता है। $k=\frac{1}{\sqrt{22}}$ ,$l,m,n$ के मानों में रखने पर

$$l=\frac{2}{\sqrt{22}}, m=\frac{3}{\sqrt{22}}, n=\frac{-3}{\sqrt{22}}$$

ये समतल के अभिलम्ब की दिक्कोज्याएँ होंगी। अब $l,m,n$ एवं p के मान समीकरण (1) में रखने पर समतल के समीकरण का अभिलम्ब रूप होगा

$$\left(\frac{2}{\sqrt{22}}\right)x+\left(\frac{3}{\sqrt{22}}\right)y+\left(\frac{-3}{\sqrt{22}}\right)z=\frac{5}{\sqrt{22}}$$

**उदाहरण 10.** बिन्दु (4,2,4) से गुजरने वाले एवं समतल $2x+5y+4z+1=0$ तथा $4x+7y+6z+2=0$ के लम्बवत् समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

**हल:** बिन्दु (4,2,4) से गुजरने वाले किसी समतल का समीकरण होगा

$a(x-4)+b(y-2)+c(z-4)=0$ ........... (1)

जहाँ $a,b,c$ समतल के अभिलम्ब के दिक् अनुपात है। समतल (1), समतल $2x+5y+4z+1=0$ के लम्बवत् है, अत : इनके अभिलम्ब भी लम्बवत् होंगे अर्थात्

$2a+5b+4z=0$ .......... (2)

इसी प्रकार समतल (1), समतल $4x+7y+6z+2=0$ के लम्बवत है, अत:

$4a+7b+6c+2=0$ ........... (3)

समीकरण (2) एवं (3) से

$$\frac{a}{30-28}=\frac{b}{16-12}=\frac{c}{14-20}$$

या $\frac{a}{2}=\frac{b}{4}=\frac{c}{-6}=k$ (माना)

अतः $a=2k, b=4k, c=-6k,$ समीकरण (1) में ये मान रखने पर

$(2k)+(x-4)+(4k)(y-2)+(-6k)(z-4)=0$

$2x+4y-6z+8=0$

या $x+2y-3z+4=0$

यह अभीष्ट समतल का समीकरण है।

**उदाहरण 11.** समतल $3x-2y+z+17=0$ एवं $4x+3y-6z-25=0$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

**हल:** यहाँ $a_1=3, b_1=-2, c_1=1$ एवं $a_2=4, b_2=3, c_2=-6$ अत: यदि समतलों के मध्य कोण $\theta$ हो तो

$$\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$=\frac{(3)(4)+(-2)(3)+(1)(-6)}{\sqrt{(9+4+1)}\sqrt{(16+9+36)}}$$

$$=\frac{12-6-6}{\sqrt{14}\sqrt{61}}$$

अतः $\theta=90^\circ$, अर्थात दोनों समतल लम्बवत् हैं।

**उदाहरण 12.** समतलों $x+y+z=1$ एवं $12x+3y-z+4=0$ के प्रतिच्छेदन से गुजरने वाले एवं $x$- अक्ष के समान्तर समतल का समीकरण ज्ञात।

**हल:** समतल $x+y+z=1$ एवं $12x+3y-z+4=0$ के प्रतिच्छेदन से. गुजरने वाले समतल का समीकरण होगा

$$(x+y+z-1)+\lambda(12x+3y-z+4)=0$$

या $(1+2\lambda).1+(1+3\lambda)+(1-\lambda)z+(-1+4\lambda)=0$ ..........(1)

यह समतल x - अक्ष के समान्तर है, जिसकी दिक्कोज्याएँ 1,0,0 हैं। समतल (1) का अभिलम्ब, x- अक्ष के लम्बवत् होगा, अत: $(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0)$ से

$$(1+2\lambda).1+(1+3\lambda).0+(1-\lambda).0=0$$

या $1+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-\dfrac{1}{2}$

समीकरण (1) में मान रखने पर, अभीष्ट समतल का समीकरण होगा

$$y+3z+6=0$$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 2**

1. यदि किसी समतल के अभिलम्ब के दिक्‌अनुपात 2,3 एवं 4 हों, तो उसका समीकरण होगा

$(i)$ $2x+3y+4z+d=0$ $(ii)$ $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{4}=1$

$(iii)$ $4x+3y+2z+d=0$ $(iv)$ $(x-2)+(y-3)+(z-4)+d=0$

2. यदि किसी समतल का समीकरण है $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{4}=1$ तो इसके द्वारा अक्षों पर काटे गये अन्त: खण्डों की लम्बाईयाँ क्रमश: होंगी

$(i)$ $2,3,4$ $(ii)$ $-2,-3,4$

$(iii)$ $2,3,-4$ $(iv)$ $0,0,0$

3. समतल $2x+3y+6z+11=0$ एवं $4x+6y+12z+7=0$ परस्पर होंगे

$(i)$ समांतर $(ii)$ लम्बवत्

$(iii)$ संपाती $(iv)$ इनमें से कोई नही

4. समतल $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ एवं $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ परस्पर लम्बवत् होंगे यदि

$(i)$ $a_1=a_2, b_1=b_2, c_1=c_2$ $(ii)$ $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$

$(iii)$ $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=-1$ $(iv)$ $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

5. दो समतलों $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ एवं $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ मध्य कोण को समद्विभाजित करने वाले समतल का समीकरण क्या होगा ?

6. दो बिन्दु $(x_1, y_1, z_1)$ एवं $(x_2, y_2, z_2)$ समतल $ax+by+cz+d$ के एक ही पार्श्व में स्थित होंगे यदि $ax_2+yb_2+cz_2+d$ एवं $(ax_1+by_1+cz_1+d_1)$ के मान हों

$(i)$ असमान $(ii)$ समान चिन्ह के

$(iii)$ विपरित चिन्ह के $(iv)$ शून्य

7. $xy$ -तल के अभिलम्ब की दिक्कोज्याएँ होंगी

$(i)$ 1,0,0 $(ii)$ 1,1,1

$(iii)$ 1,1,0 $(iv)$ 0,0,1

---

## 8.9 सरल रेखा (Straight line)

### 8.9.1 सरल रेखा का व्यापक समीकरण (General equation of a straight line)

दो समतलों

$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ........... (1)

$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ ............ (2)

पर विचार करें। यदि ये समतल असमान्तर हैं तो इनका प्रतिच्छेदन सदैव एक सरल रेखा होगी। अत: समीकरण (1) एवं समीकरण (2) को एक साथ लिखने पर हमें सरल रेखा का व्यापक रूप में समीकरण प्राप्त होता है। इसे असममित रूप (unsymmetrical forms) भी कहते हैं। अत : समीकरण (1) एवं समीकरण (2) अलग- अलग दो समतलों को एवं साथ लिखने पर एक सरल रेखा के व्यापक समीकरण को प्रदर्शित करेंगे।

**विशेष स्थिति:** $xy$ -तल $(z=0)$ एवं $zx$ -तल $(y=0)$ का प्रतिच्छेदन $\mathrm{x}$- अक्ष है, अत: $\mathrm{x}$ - अक्ष का समीकरण होगा

$y=0, z=0$

इसी प्रकार $\mathrm{y}$ - अक्ष एवं $z$ - अक्ष के समीकरण क्रमश: होंगे

$z=0, x=0$ एवं $x=0, y=0$

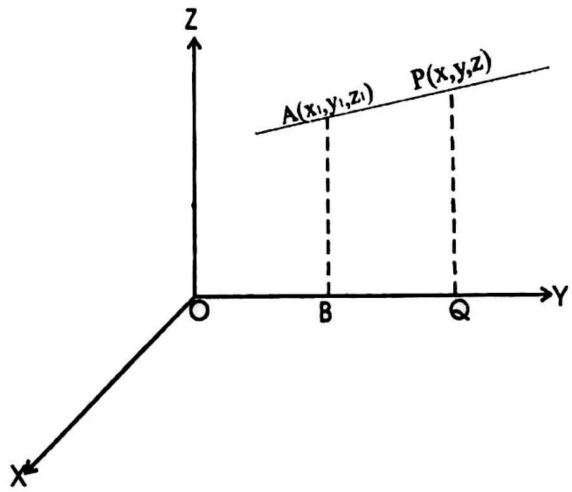
### 8.9.2 सरल रेखा का सममित रूप में समीकरण
### (Equation of a straight line in symmetrical form)

एक दिये हुए बिन्दु $(x_1, y_1, z_1)$ से गुजरने वाली $l, m, n$ दिक्कोज्याओं वाली सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना:

माना एक सरल रेखा, बिन्दु $A(x_1, y_1, z_1)$ से गुजरती है। इस रेखा पर माना कोई चर बिन्दु $P(x, y, z)$ है। बिन्दु $\mathrm{P}$ का बिन्दुपथ ही सरल रेखा का समीकरण होगा। माना $AP=r$ है।

बिन्दु $\mathrm{A}$ एवं $\mathrm{P}$ से $\mathrm{y}$ - अक्ष पर क्रमश: $\mathrm{AB}$ एवं $\mathrm{PQ}$ लम्ब डाला। अत:

$OB=y_1$ एवं $OQ=y$ एवं $BQ=y-y_1$........... (1)




चित्र : 8.13

साथ ही.

$BQ = AP$ का $y$-अक्ष पर प्रक्षेप

$AP.m = rm$ ........... (2)

जहाँ $m$, रेखा AP का $y$-अक्ष के साथ कोण की दिक्कोज्या है। समीकरण (1) एवं (2) से

$$y - y_1 = rm$$

या $r = \dfrac{y - y_1}{m}$, इसी प्रकार, $r = \dfrac{x - x_1}{l}, r = \dfrac{z - z_1}{m}$ .............(3)

उपरोक्त सम्बंधों से

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{m} \text{ ...........(4)}$$

सम्बंध (4), P के प्रत्येक मान के लिये सत्य है। अत: यह P के बिन्दुपथ अर्थात सरल रेखा के अभीष्ट समीकरण को प्रदर्शित करता है।

**दूसरी विधि** बिन्दु $A(x_1, y_1, z_1)$ एव $P(x, y, z)$ को मिलाने वाली रेखा के

दिक्अनुपात होंगे

$$x - x_1, y - y_1, z - z_1$$

किन्तु AP को मिलाने वाली रेखा की दिक्कोज्याएँ $l, m, n$ हैं। अत:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{m}$$

जो कि अभीष्ट समीकरण है।

**टिप्पणी: 1.** यहाँ $r$ दिये हुए बिन्दु $A(x_1, y_1, z_1)$ से किसी चर बिन्दु $P(x, y, z)$ की दूरी है।

अत: A से $r$ दूरी पर सरल रेखा पर स्थित किसी बिन्दु $P(x, y, z)$ के लिये (सम्बंध (3) से)

$$x = x_1 + lr, y = y_1 + mr, z = z_1 + nr$$

अत: सरल रेखा पर किसी बिन्दु के निर्देशांक होंगे

$$(x_1 + lr, y_1 + mr, z_1 + nr)$$

जहाँ $r$, प्राचल है।

2. यदि सरल रेखा की दिक्कोज्याओं $l, m, n$ के स्थान पर दिक्अनुपात a,b,c ज्ञात हों तो

$$l = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, m = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, n = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

अतः सरल रेखा का समीकरण होगा (समीकरण (4) में मान रखकर सरल करने पर)

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \quad \text{.................. (5)}$$

**ध्यान दें:** $r$ दूरी के पद में रेखा के किसी बिन्दु के निर्देशांक व्यक्त करने के लिये वास्तविक दिक्कोज्याएँ $l, m, n$ का ही प्रयोग किया जाना चाहिये। सम्बंध (5) से चर बिन्दु के निर्देशांक $(x_1+ar, y_1+br, z_1+cr)$ लिये जा सकते हैं, किन्तु यहाँ, $r$ दूरी को प्रदर्शित नहीं करेगा।

### 8.9.3 सरल रेखा के व्यापक समीकरण का सममित रूप में समानयन

### (Reduction of general equation of a straight line into symmetrical form)

माना सरल रेखा का व्यापक समीकरण (असममित रूप में) है

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \text{........... (1)}$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \quad \text{........... (2)}$$

सरल रेखा के सममित रूप के समीकरण हेतु सरल रेखा पर एक बिन्दु के निर्देशांक और रेखा के दिक्अनुपात या दिक्कोज्याएँ ज्ञात होने चाहिये।

(1) **बिन्दु ज्ञात करना:** इसे ज्ञात करने के लिये हम समीकरण (1) और (2) में $x=0$ या $y=0$ या $z=0$ लेते हैं। माना $z=0$ अत: इससे हमें वह बिन्दु प्राप्त होगा जो $xy$ - तल में स्थित है। अब,

$$a_1x + b_1y + d_1 = 0 \text{ एवं } a_2x + b_2y + d_2 = 0$$

xy के लिये हल करने पर

$$\frac{x}{b_1d_2 - b_2d_1} = \frac{y}{a_2d_1 - a_1d_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

या $x = \dfrac{b_1d_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, y = \dfrac{a_2d_1 - a_1d_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$

अतः सरल रेखा पर स्थित किसी एक बिन्दु के निर्देशांक होंगे

$$\left(\frac{b_1d_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_2d_1 - a_1d_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, 0\right)$$

(2) दिक्अनुपात ज्ञात करना: माना रेखा की दिक्कोज्याएँ $l, m, n$ हैं। यह रेखा, समतल (1) एवं समतल दोनों पर स्थित है, अत: यह रेखा इन समतलों के अभिलम्बों के लम्बवत् होगी।

अतः

$$a_1l + b_1m + c_1n = 0 \text{ एवं } a_2l + b_2m + c_2n = 0$$

हल करने पर,

$$\frac{l}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{m}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{n}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

अतः सरल रेखा के दिक्अनुपात होंगे

$$(b_1c_2 - b_2c_1), (a_2c_1 - a_1c_2), (a_1b_2 - a_2b_1)$$

अतः सरल रेखा का सममित रूप में समीकरण होगा।

$$\frac{x - \frac{b_1d_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y - \frac{a_2d_1 - a_1d_2}{a_1b_2 - a_2b_1}}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{z - 0}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

**8.9.4 दो दिये हुए बिन्दुओं से गुजरने वाली रेखा का समीकरण**

**(Equation of a starting line passing through two given points)**

दो बिन्दुओं $P(x_1.y_1, z_1)$ एवं $Q(x_2.y_2, z_2)$ से गुजरने वाली रेखा का सममित रूप में समीकरण ज्ञात करना है।New Line चूंकि बिन्दु P एवं Q सरल रेखा पर स्थित है। अतः इस रेखा के दिक्अनुपात होंगे

$$x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$$

रेखा, बिन्दु $P(x_1.y_1, z_1)$ से जाती है, अत : रेखा का समीकरण होगा

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

**टिप्पणी :** चूंकि रेखा बिन्दु $Q(x_2.y_2, z_2)$ से भी जाती है अत : रेखा का समीकरण निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है

$$\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_2}{z_2 - z_1}$$

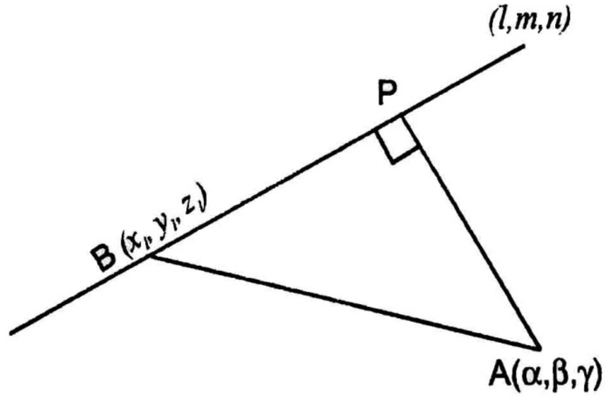
**8.9.5 एक बिन्दु की सरल रेखा से दूरी**

**(Distance of a point from a straight line)**

एक दिये हुए बिन्दु $(\alpha, \beta, \gamma)$ की सरल रेखा

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

जहाँ $l, m, n$ सरल रेखा की दिक्कोज्याएँ है, से दूरी ज्ञात करना है।




चित्र : 8.14

दिये हुए बिन्दु $A(\alpha,\beta,\gamma)$ से सरल रेखा पर लम्ब डाला। माना इस लम्ब का पाद $P$ है। दिये हुए सरल रेखा के समीकरण से ज्ञात होता है कि यह बिन्दु $B(x_1.y_1,z_1)$ से गुजरती है।

$\triangle ABC$ में, दो बिन्दुओं के बीच दूरी के सूत्र से,

$AB^2 = (\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2 + (\gamma - z_1)^2$ ......... (1)

एवं $BP = AB$ का सरल रेखा पर प्रक्षेप

$= (\alpha - x_1)l + (\beta - y_1)m + (\gamma - z_1)m$ ......... (2)

अब, समकोण त्रिभुज $ABP$ मे

$$AP^2 = AB^2 - PB^2$$

(1) एवं (2) से मान रखने पर

$$AP^2 = \left[(\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2 + (\gamma - z_1)^2\right] - \left[(\alpha - x_1)l + (\beta - y_1)m + (\gamma - z_1)n\right]^2$$

$$= \left[(\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2 + (\gamma - z_1)^2\right](l^2 + m^2 + n^2) - \left[(\alpha - x_1)l + (\beta - y_1)m + (\gamma - z_1)m\right]^2$$

$$= \left[(\alpha - x_1)m + (\beta - y_1)l\right]^2 + \left[(\alpha - x_1)n + (\gamma - z_1)l\right]^2 + \left[(\beta - y_1)n + (\gamma - z_1)m\right]^2$$

(लेगरान्ज की सर्वसमिका से)

$$= \begin{vmatrix} \alpha - x_1 & \beta - y_1 \\ l & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha - x_1 & \gamma - z_1 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta - y_1 & \gamma - z_1 \\ m & n \end{vmatrix}^2$$

$$AP = \left\{ \begin{vmatrix} \alpha - x_1 & \beta - y_1 \\ l & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha - x_1 & \gamma - z_1 \\ l & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta - y_1 & \gamma - z_1 \\ m & n \end{vmatrix}^2 \right\}$$

यह बिन्दु $A$ की दी हुई सरल रेखा से लम्बवत् दूरी को प्रदर्शित करता है।

**8.9.6 एक सरल रेखा के समीकरण में स्वेच्छ अचरों की संख्या**

**(Number of arbitrary constants in the equation of a straight line)**

माना सरल रेखा का समीकरण है

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \text{ .........(1)}$$

प्रथम दो पदों से

$$x - x_1 = \frac{l}{m}(y - y_1)$$

या $x = \frac{l}{m}y + \left(x_1 - \frac{l}{m}y_1\right)$

या $x = py + q$ ..........(2)

जहाँ $p = \frac{l}{m}, \quad q = \left(x_1 - \frac{l}{m}y_1\right)$

इसी प्रकार समीकरण (1) के अन्तिम दो पदों से,

$$y - y_1 = \frac{m}{n}(z - z_1)$$

$$y = \frac{m}{n}z + \left(y_1 - \frac{m}{n}z_1\right)$$

$y = rz + s,$ ........... (3)

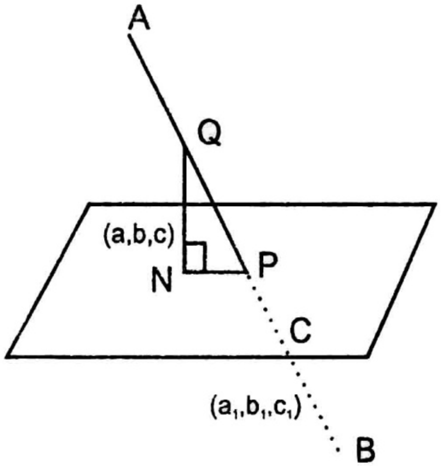
जहाँ $r = \frac{m}{n}, \quad s = \left(y_1 - \frac{m}{n}z_1\right)$

समीकरण (2) एवं (3) से ज्ञात होता है कि सरल रेखा के समीकरण में चार स्वेच्छ अचर $(p, q, r, s)$ होते हैं, अर्थात चार अचर ज्ञात होने पर सरल रेखा का सममित रूप में समीकरण ज्ञात किया जा सकता है।

## 8.10 समतल एवं सरल रेखाएँ (Line and Plane)

### 8.10.1 एक समतल और एक रेखा के बीच कोण

### (Angle between a plane and a line)




चित्र 8.15

माना दिये हुए समतल का समीकरण है

$$ax + by + cz + d = 0$$

एवं सरल रेखा का समीकरण है

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \text{ ............(2)}$$

जहाँ $a_1,b_1,c_1$ रेखा के दिक्‌अनुपात हैं।

माना सरल रेखा (2), समतल (1) को बिन्दु $P$ पर प्रतिच्छेदित करती है। माना सरल रेखा पर एक बिन्दु $Q$ है। बिन्दु $Q$ से समतल पर $QN$ लम्ब डाला एवं $N$ और $Q$ को मिलाया। माना सरल रेखा (2), एवं समतल (1) के मध्य $\theta$ कोण है, तो समकोण त्रिभुज $NQP$ में,

$$NQP=\theta \text{ या } \theta=\frac{\pi}{2}-\angle NQP \text{ ........... (3)}$$

यहाँ $\angle NQP$, रेखा एवं समतल के अभिलम्ब $NQ$ के मध्य कोण है। अत : रेखा एवं समतल के मध्य कोण, रेखा और समतल के अभिलम्ब के बीच के कोण का पूरक कोण (Complementary angle) होगा।

चूंकि रेखा (2) के दिक्‌अनुपात $a_1,b_1,c_1$ एवं समतल (1) के अभिलम्ब के दिक्‌अनुपात $a,b,c$ है, अत:

$$\cos-\angle NQP=\frac{aa_1+bb_1+cc_1}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}\sqrt{(a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2})}}$$

सम्बन्ध (3) से $\cos\angle NQP=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ , अत:

$$\sin\theta=\frac{aa_1+bb_1+cc_1}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}\sqrt{(a_1^{\,2}+b_1^{\,2}+c_1^{\,2})}} \text{ ........... (4)}$$

सूत्र (4) द्‌वारा रेखा एवं समतल के मध्य कोण $\theta$ को ज्ञात किया जा सकता है।

**विशेष स्थिति : 1.** समतल एव रेखा के समान्तर हो पर हे $\theta=0^\circ$ होगा, अत: सूत्र (4) से, $aa_1+bb_1+cc_1=0$

2. समतल एवं रखा के लम्बवत् होने पर, रेखा एवं समतल का अभिलम्ब समान्तर होंगे, अत $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$

### 8.10.2 किसी समतल में दी हुई रेखा के स्थित होने का प्रतिबन्ध (Condition for a line to lie in a plane)

माना समतल का समीकरण है

$$ax+by+cz+d=0 \text{ ........... (1)}$$

एवं सरल रेखा का समीकरण है

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}=r \text{ (माना) ........... (2)}$$

यदि $l,m,n$ सरल रेखा (2) की दिक्कोज्याएँ हैं, तो इस पर स्थित किसी चर बिन्दु के निर्देशांक होगे

$\left(x_1 + lr, y_1 + mr, z_1 + nr\right)$

यह बिन्दु, समतल (1) में विद्यमान होगा यदि

$$a\left(x_1 + lr\right) + b\left(y_1 + mr\right) + c\left(z_1 + nr\right) + d = 0$$

या $\left(ax_1 + by_1 + cz_1 + d\right) + r\left(al + bm + cn\right) = 0$ ........... (3)

चूंकि $r$ के प्रत्येक मान के लिये हमें सरल रेखा (1) पर एक बिन्दु प्राप्त होता है और साथ ही $r$ के प्रत्येक मान के लिये समीकरण (3) यदि संतुष्ट हो, तो हम कह सकते हैं कि रेखा (2) का प्रत्येक बिन्दु समतल (1) पर स्थित है अर्थात पूरी रेखा, समतल पर स्थित है।

समीकरण (3), के प्रत्येक मान के लिये संतुष्ट होगा, यदि

$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ ........... (4)

एवं $al + bm + cn = 0$ ........... (5)

समीकरण (4) एवं (5), दी हुई सरल रेखा (2) के, समतल (1) में स्थित होने के अभीष्ट प्रतिबन्ध हैं।

**विशेष स्थिति :** यदि रेखा का समीकरण

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

है, जहाँ $a_1, b_1, c_1$ दिक्‌अनुपात हैं, तो प्रतिबन्ध होंगे

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

एवं $aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$

**टिप्पणी:** प्रतिबन्ध (4) प्रदर्शित करता है कि रेखा का एक बिन्दु $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ समतल पर विद्यमान है । प्रतिबन्ध (5) प्रदर्शित करता है कि रेखा, समतल के अभिलम्ब के लम्बवत् है। अर्थात, सरल रेखा के समतल के समान्तर होने और रेखा के किसी एक बिन्दु के समतल पर होने पर पूरी रेखा, समतल पर स्थित होगी।

### 8.10.3 समतल का समीकरण जो एक दी हुई रेखा से गुजरे
### (Equation of a plane passing through the given line)

माना दी हुई सरल रेखा का समीकरण है

$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ .................... (1)

जहाँ $l, m, n$ दिक्कोज्याएँ हैं।

माना सरल रेखा (1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण है

$ax + by + cz + d = 0$ ............. (2)

समतल (2) सरल रेखा (1) से गुजरता है, अत: सरल रेखा (1) समतल (2) में पूरी तरह स्थित है । अत: भाग $(8.10.2)$ के अनुसार निम्न प्रतिबन्ध सतुष्ट होने चाहिये

$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ ........(3)

एवं $al+bm+cn=0$ ...........(4)

समीकरण (2) में से समीकरण (3) को घटाने पर

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \text{ .........(5)}$$

अत: समीकरण (5) अभीष्ट समतल का समीकरण है, जो प्रतिबन्ध (4) को संतुष्ट करता है।

### 8.10.4 समतल का समीकरण, जो दी हुई रेखा से गुजरे एवं दूसरी दी हुई रेखा के समान्तर हो (Equation of a plane which passes through a given line and parallel to other given line)

माना दी हुई सरल रेखाएँ हैं

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \text{ .........(1)}$$

एवं $$\frac{x-x_1}{l_2}=\frac{y-y_1}{m_2}=\frac{z-z_1}{n_2} \text{ .........(2)}$$

माना समतल, रेखा (1) से गुजरता है। भाग (8.11.3) से समतल का समीकरण होगा

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \text{ ..........(3)}$$

जहाँ, $al_1+bm_1+cn_1=0$ ...........(4)

चूंकि समतल (3) और सरल रेखा (2) परस्पर समान्तर हैं, अत:

$al_1+bm_2+cn_2=0$ .........(5)

समीकरण (3) (4) एवं (5) से $a,b,c$ को विलोपित करने पर

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{............(6)}$$

**विशेष स्थिति :** सरल रेखाओं के दिकअनुपात क्रमश : $a_1,b_1,c_1$ एवं $a_2,b_2,c_2$ हों, तो समीकरण

(6) निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$$

**उदाहरण 15** सरल रेखा $x-2y+3z-4=0=2x-3y+4z-5$ का सममित रूप में समीकरण ज्ञात कीजिये। इस रेखा की दिक्कोज्याएँ भी ज्ञात कीजिये।

**हल** सममित रूप के लिए हमें रेखा पर स्थित एक बिन्दु एवं इसके दिक्अनुपात ज्ञात होने चाहिये।

**बिन्दु ज्ञात करना :** दिये हुए समतलों के समीकरण में $z=0$ रखने पर.

$x-2y=4$ एवं $2x-2y=5$,

इन्हें हल करने पर

$x=-2$ एवं $y=-3$

प्राप्त होता है। अत : सरल रेख पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक होंगे

$(-2,-3,0)$

**दिक्‌अनुपात ज्ञात करना :** माना सरल रेखा की दिक्कोज्याएँ $l,m,n$ हैं। चूंकि सरल रेखा, दोनों समतलों में स्थित है अत : यह, दोनों समतलों के अभिलम्बों के लम्बवत् होगी। अत :

$l-2m+3n=0$ .......... (1)

एवं $2l-3m+4n=0$ ..........(2)

समीकरण (1) एवं (2) को हल करने पर,

$$\frac{l}{-8+9}=\frac{l}{6-4}=\frac{l}{-3+4}$$

या $\frac{l}{1}=\frac{m}{2}=\frac{n}{1}$

अतः दिक्‌अनुपात $1,2,1$ होंगे। अत : सरल रेखा का सममित रूप में समीकरण होगा

$$\frac{x-(-2)}{1}=\frac{y-(-2)}{1}=\frac{z-(-2)}{1}$$

या $\frac{x+2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$

दिक्कोज्याएँ ज्ञात करना: सरल रेखा के दिकअनुपात 1,2.1 हैं। अत: दिक्कोज्याएँ होगी

$$l=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}},m=\frac{2}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}},n=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}$$

या $l=\frac{1}{\sqrt{6}},m=\frac{2}{\sqrt{6}},n=\frac{1}{\sqrt{6}}$

**उदाहरण 16.** बिन्दु $(-2,3,4)$ से गुजरने वाली उस रेखा समीकरण ज्ञात कीजिये जो समतलो $2x+3y+4z=5$ एवं $3x+4y+5z=6$ के समान्तर है।

**हल:** माना सरल रेखा की दिक्कोज्याएँ $l,m,n$ है। यह रेखा दिये हुए समतलों के समान्तर है अत: यह समतलों के अभिलम्बों के लम्बवत् होगी। अत:

$2l+3m+4n=0$ ..........(1)

$3l+4m+5n=0$ ............(2)

हल करने पर,

$$\frac{l}{15-16}=\frac{m}{12-10}=\frac{n}{8-9}$$ । क्ष '

या $\frac{l}{-1}=\frac{m}{2}=\frac{n}{-1}$

या $\frac{l}{1}=\frac{m}{-2}=\frac{n}{1}$

अतः सरल रेखा के दिक्‌अनुपात होंगे

$1,-2,1$

अब, बिन्दु, $(-2,3,4)$ से गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण जिसके दिकअनुपात $1,-2,1$ हैं, होगा

$$\frac{x-(-2)}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-4}{1}$$

या $$\frac{x+2}{1}=\frac{3-y}{2}=\frac{z-4}{1}$$

**उदाहरण 17.** बिन्दु $A(1,2,3)$ से सरल रेखा

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{5}$$

पर लम्ब $AB$ डाला गया है । लम्ब पाद $B$ के निर्देशांक, दूरी $AB$ एव रेखा $AB$ का समीकरण ज्ञात कीजिये।

हल : सरल रेखा का समीकरण है

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{5}=r$$

इस रेखा पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक होंगे

$$(2+3r,3+4r,4+5r)$$

यदि ये बिन्दु $B$ के निर्देशांक हैं, तो $AB$ के दिक्अनुपात होंगे

$$(2+3r)-1,(3+4r),-2(4+5r)$$

या $1+3r,1+4r,1+5r$

रेखा $AB$ दी हुई रेखा (1) पर लम्ब है अत:

$$(1+3r)(3)+(1+4r)(4)+(1+5r)(5)=0$$

या $12+50r=0$

या, $r=-\dfrac{6}{25}$

अतः बिन्दु $B$ के निर्देशांक होंगे

$$\left[2+3\left(-\frac{6}{25}\right),3+4\left(-\frac{6}{25}\right),4+5\left(-\frac{6}{25}\right)\right]$$

या $\left(\dfrac{32}{25},\dfrac{51}{25},\dfrac{70}{25}\right)$

**दूरी** $AB$ **:** दो बिन्दुओं के बीच की दूरी के सूत्र से,

$$(AB)^2=\left(\frac{32}{25}-1\right)^2+\left(\frac{51}{25}-2\right)^2+\left(\frac{70}{25}-3\right)^2$$

$$=\left(\frac{7}{25}\right)^2+\left(\frac{1}{25}\right)^2+\left(\frac{-5}{25}\right)^2$$

$$=\frac{75}{(25)^2}$$

अतः $AB = \frac{\sqrt{3}}{5}$

$AB$ का समीकरण. दो बिन्दुओं से गुजरने वाली रेखा के समीकरण के सूत्र से, $AB$ का समीकरण होगा

$$\frac{x-1}{\left(\frac{32}{25}-1\right)} = \frac{y-2}{\left(\frac{51}{25}-2\right)} = \frac{z-3}{\left(\frac{70}{25}-3\right)}$$

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-5}$$

**उदाहरण 18.**, सिद्ध कीजिये कि रेखा

$$\frac{x-3}{7} = \frac{y+7}{3} = \frac{z-9}{-4}$$

समतल $3x + y + 6z - 58 = 0$ में विद्यमान है।

**हल :** यहाँ दिया हुआ है

$x_1 = 3, y_1 = -5, z_1 = 9$ ,

$a_1 = 7, b_1 = 3, c_1 = -4$

एवं $a = 3, b = 1, c = 6, d = -58$

भाग $(8.10.2)$ के अनुसार दी हुई सरल रेखा, समतल में स्थित होगी यदि

$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$ एवं $aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$

उपरोक्त मान रखने पर

$(3)(3) + (1)(-5) + (6)(9) - 58 = 9 - 5 + 54 - 58 = 0$

एवं $(3)(7) + (1)(3) + (6)(-4) = 21 + 3 - 24 = 0$

अर्थात दोनों प्रतिबन्ध संतुष्ट होते हैं। अत : दी हुई सरल रेखा, समतल में विद्यमान है।

**उदाहरण 19.** रेखा $\frac{x-1}{3} = \frac{y+6}{4} = \frac{z+1}{2}$ से गुजरने वाले तथा रेखा $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+4}{5}$ के समान्तर समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये।

**हल :** भाग $(8.10.4)$ के अनुसार, अभीष्ट समतल का समीकरण होगा

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

यहाँ

$x_1 = 1, y_1 = -6, z_1 = -1$

$a_1 = 3, b_1 = 4, c_1 = 2$

$a_2 = 2, b_2 = -3, c_2 = 5$

अतः अभीष्ट समीकरण होगा

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$$

या $(x-11)(20+6)-(y+6)(15-4)+(z+1)(-9-8)=0$

या $26x-11y-17z-109=0$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न -3**

1. $y=0, x=0$ प्रदर्शित करता है

(i) $xy$ तल को (ii) $x$ अक्ष को

(iii) $y$ अक्ष को (iv) $z$ अक्ष को

2. एक सरल रेखा जिसकी दिक्कोज्याएँ $p,q,r$ हैं तथा बिन्दु $(\alpha,\beta,\gamma)$ से गुजरे, का समीकरण होगा

$(i)\dfrac{x-\alpha}{p}=\dfrac{y-\beta}{q}=\dfrac{z-\gamma}{r}$

$(ii)\dfrac{x-p}{\alpha}=\dfrac{y-q}{\beta}=\dfrac{z-r}{\gamma}$

$(iii)\, p(x-\alpha)+q(x-\beta)+r(x-\gamma)=0$

$(iv)\dfrac{x+\alpha}{p}=\dfrac{y+\beta}{q}=\dfrac{z+\gamma}{r}$

3. सरल रेखा $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ पर $(x_1,y_1,z_1)$ से 5 इकाई दूरी पर स्थित किसी बिन्दु के निर्देशाक क्या होंगे?

4. एक समतल $ax+by+cz+d=0$ एवं रेखा $\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1}$ के मध्य कोण $\theta$ है. तो

$(i)\cos\theta=\dfrac{aa_1+bb_1+cc_1}{\sqrt{\Sigma a^2}\sqrt{\Sigma a_1^2}}$

$(ii)\sin\theta=\dfrac{aa_1+bb_1+cc_1}{\sqrt{\Sigma a^2}\sqrt{\Sigma a_1^2}}$

$(iii)\cos\theta=aa_1+bb_1+cc_1$

$(iv)$ इनमें से कोई नही

5. एक सरल रेखा जिसके दिक्अनुपात $2,3,5$ हैं, समतल $ax+by+cz+d=0$ के समान्तर है तो निम्न में से सत्य है

$(i)\, 2a+3b+5c=0$ $(ii)\dfrac{2}{a}=\dfrac{3}{b}=\dfrac{5}{c}$

$(iii)\, a=2, b=3, c=5$ $\qquad$ $(iv)$ इनमें से कोई नही

6. सरल रेखा $\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1}$ के समान्तर एवं $\dfrac{x-x_2}{a_2}=\dfrac{y-y_2}{b_2}=\dfrac{z-z_2}{c_2}$ से गुजरने वाले समतल का समीकरण क्या होगा?

## 8.11 सारांश

इस इकाई में हमने समष्टि में किसी बिन्दु को प्रदर्शित करने एवं इसके निर्देशांक ज्ञात करने की विधि का अध्ययन किया । समष्टि में ज्यामिति के अध्ययन के लिये तीन मापों जिन्हें विमाएं कहते हैं, की आवश्यकता होती है। त्रिविम ज्यामिति का अध्ययन करने के लिए एक महत्वपूर्ण अवधारणा प्रक्षेप का अध्ययन किया। बिन्दु एवं रेखा का किसी दी हुई रेखा पर प्रक्षेप, दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का अन्य रेखा पर प्रक्षेप इत्यादि का अध्ययन किया। त्रिविम ज्यामिति में किसी रेखा की दिशा को प्रदर्शित करने हेतु दिक्कोज्याओं एव दिकअनुपात का ज्ञान आवश्यक है। हमने इसे ज्ञात करने की विधि एवं इनके सम्बंधो के बारे में जाना।

साथ ही हमने समष्टि में समतल एवं इसके विभिन्न रूपों में समीकरण का अध्ययन किया। सरल रेखा एवं इसके असममित एव सममित रूप में समीकरण का अध्ययन किया। एक समतल एवं एक सरल रेखा के सम्बंधों के बारे में जाना

## 8.12 शब्दावली

| | |
|---|---|
| प्रक्षेप | Projection |
| अभिलम्ब | Normal |
| लम्बवत् (लम्ब) | Perpendicular |
| दिष्ट रेखा | Directed line |
| निर्देशांक पद्धति | Co-ordinate system |
| दिक्कोज्याएँ | Direction cosines |
| दिक् अनुपात | Direction ratios |
| समतल | Plane |
| सममित रूप | Symmetrical form |

## 8.13 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 1**

1. (iv) $\qquad$ 2. (i) $\qquad$ 3. (iii) $\qquad$ 4. (ii)

5. (iii) $\qquad$ 6. (ii)

**स्वमूल्याकन प्रश्न -2**

1. (i) $\qquad$ 2. (iii) $\qquad$ 3. (i) $\qquad$ 4. (iv)

5. $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{\Sigma a^2{}_1}}=\pm\dfrac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{\Sigma a^2{}_2}}$

6. (ii)    7. (iv)

**स्वमूल्यांकन प्रश्न -3**

1. (iv)    2. (i)

3. $(x_1+5l, y_1+5m, z_1+5n)$    4. (ii)

5. (i)    6. $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$

## 8.14 अभ्यास प्रश्न

1. सिद्ध कीजिये कि बिन्दु $(0,7,10)$, $(-1,6,6)$ एवं $(-4,9,6)$ से एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज बनता है, समान भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।
(उत्तर: $3\sqrt{2}$)

2. बिन्दु $P$ एवं $Q$ के निर्देशांक क्रमश: $(-2,2,3)$, $(13,-3,13)$ है। कोई बिन्दु $R$ इस प्रकार है कि $3PR=2QR$, $R$ तो का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए।
(उत्तर: $x^2+y^2+z^2+28x-12y+10z-247=0$)

3. यदि बिन्दु $P$ एवं $Q$ के निर्देशांक क्रमश: $(12,-4,8)$ एवं $(27,-9,8)$ हैं, तो ज्ञात कीजिये कि $PQ$ को मिलाने वाली रेखा को गोला $x^2+y^2+z^2=504$ किस अनुपात में विभाजित करेगा।
(उत्तर: $2:3$)

4. यदि $A(6,3,2)$, $B(5,1,4)$, $C(3,-4,7)$ एवं $D(0,2,5)$ चारबिन्दु हैं तो रेखा $AB$ का रेखा $CD$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिये।
(उत्तर: $13/7$)

5. उन रेखाओं की दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिये जिनमें निम्न सम्बंध है:
$l+m+n=0$ एवं $mn-2nl-2lm=0$
(उत्तर: $\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}.-\frac{2}{\sqrt{6}}$ एवं $\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}$)

6. उन दो रेखाओं के मध्य कोण ज्ञात कीजिये जिनकी दिक्कोज्याओं के लिये निम्न सम्बंध सत्य है
$l+m+n=0$, $l^2+m^2-n^2=0$
(उत्तर: $120^\circ$)

7. उस बिन्दु के निर्देशाक ज्ञात कीजिये जहाँ $(-9,4,5)$ एवं $(11,0,-1)$ को मिलाने वाली रेखा पर मूल बिन्दु से डाला गया लम्ब मिलता है।

[उत्तरः $(1,2,2)$]

8. बिन्दु $(1,1,0)$ $(1,2,1)$ एवं $(-2,2-1)$ से गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये।

(उत्तरः $2x+3y-3z=5$)

9. उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये जो मूल बिन्दु से जाने वाली उन दो रेखाओं से गुजरता है जिनके दिक्अनुपात $1,-2,2$ एवं $2,3,-1$ हैं।

(उत्तरः $4x-5y-7z=0$)

10. सिद्ध कीजिये कि बिन्दु $(0,-1,-1)$, $(4,5,1)$ $(3,9,4)$ एंव $(-4,4,4)$ समतलीय हैं।

11. समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दु $(2,-3,1)$ तथा $(-1,1,-7)$ से गुजरे एवं समतल $x-2y+5z+1=0$ के लम्बवत् हो।

(उत्तरः $4x+7y+2z+11=0$)

12. समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये जो समतल $2x+3y+4z+5=0$ एवं $x+y+z-6=0$ प्रतिच्छेदन से गुजरे एवं समतल $4x+5y-3z=8$ के लम्बवत् हो।

(उत्तरः $x+7y+13z+96=0$)

13. समतल $x+2y+3z=0$ एवं $3x+3y+2z=8$ के लम्बवत् तथा बिन्दु $(-1,3,2)$ से गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये।

(उत्तरः $5x-7y+3z+20=0$)

14. समतल $x+2y+2z=3$ एवं $3x+4y+12z+1=0$ के मध्य कोण को समद्विभाजित करने वाले समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिये और यह भी ज्ञात कीजिये कि कौन सा समद्विभाजक समतल अधिक कोण को समद्विभाजित करता है।

(उत्तरः न्यून कोण का अर्धक तल : $11x+19y+31z=18$,

अधिक कोण का अर्धक तल : $2x+7y-5z=21$

15. बिन्दु $(3,4,7)$ एवं बिन्दु $(2,3,-5)$ की समतल से दूरियाँ क्या होंगी? क्या दोनो बिन्दु समतल के विपरित पार्श्वो में है?

(उत्तरः दूरियाँ 4 एवं 3, ही)

16. सरल रेखा $4x+y-2z+2=0=x+y+z+1$ को सममित रूप में प्रदर्शित कीजिये और इसकी दिक्कोज्याएँ भी ज्ञात कीजिये।

(उत्तरः $\dfrac{x+\left(1/3\right)}{1}=\dfrac{y+\left(2/3\right)}{-2}=\dfrac{z+1}{1}$, दिक्कोज्याएँ. $\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{2}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}}$)

17. बिन्दु $(5,9,3)$ से सरल रेखा $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ पर खींचे गये लम्ब का समीकरण एवं लम्बपाद के निर्देशाक ज्ञात कीजिये।

(उत्तर: $\frac{x-5}{1}=\frac{y-9}{2}=\frac{z-3}{-2}$, लम्ब पाद के निर्देशांक होंगे $(3,5,7)$)

18. बिन्दु $(1,-2,3)$ की $(2,-3,5)$ से गुजरने वाली और अक्षों के साथ समान कोण बनाने वाली सरल रेखा से दूरी ज्ञात कीजिए।

(उत्तर: $\sqrt{\left(14/3\right)}$ )

# इकाई 9 : सदिश बीजगणित (Vector Algebra)

**इकाई की रूपरेखा**



## 9.1 : उद्देश्य

इस इकाई में सदिश की संकल्पना, सदिशों पर बीजगणितीय संक्रियाओं की चर्चा की गई है। इस अध्याय के अध्ययन के पश्चात् आप,

1. सदिश राशि की अवधारणा, उनके निरूपण से परिचित होंगे
2. सदिशों की बीजगणितीय सक्रियाओ-योग, अन्तर एवं गुणन की चर्चा कर सकेंगे
3. सदिशों की सरेखीयता एवं समतलीयता को समझ सकेगें

## 9.2 प्रस्तावना

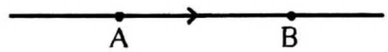
इस इकाई की विषय-वस्तु सदिश एक भौतिक राशि होती है। सदिश की अवधारणा आधुनिक गणित की प्रशाखाओं यांत्रिकी, सदिश कलन इत्यादि का मूलाधार है। ये वे शाखायें हैं जिनका अनुप्रयोग अभियांत्रिकी में व्यापक रूप से होता है। वस्तुत : भौतिक राशियों जैसे कि लम्बाई, द्रव्यमान, क्षेत्रफल, वेग, बल इत्यादि को दो वर्गो - अदिश राशियों एवं सदिश राशियाँ में विभाजन किया जाता है।

भौतिक राशियों का यह वर्गीकरण परिमाण एवं दिशा के दृष्टिगत होता है।

## 9.3 सदिश : परिभाषा, निरूपण, योग एवं अन्तर

अदिश व सदिश - ऐसी भौतिक राशि जिसमें केवल परिमाण होता है अदिश कहलाती है। जैसे गति, आयतन, द्रव्यमान अदिश हैं। इसी प्रकार ऐसी भौतिक राशि जिसमें परिमाण व एक निश्चित दिशा हो सदिश राशि कहलाती है। उदाहरणार्थ बल, वेग, त्वरण आदि सदिश राशियाँ हैं। सदिश को परिमित लम्बाई के दिष्ट रेखाखण्ड से निरूपित करते हैंजिसमें रेखाखण्ड की लम्बाई एवं निर्दिष्ट दिशा क्रमशः सदिश के परिमाण तथा सदिश की दिशा बताती है।

सदिश राशियों को $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ये इत्यादि से दर्शाते हैं । सदिश $\overrightarrow{AB}$ में $A$ तथा $B$ क्रमशः आरभिक एवं अन्तिम बिन्दु हैंतथा $\overrightarrow{AB}$ की दिशा $A$ से $B$ की ओर मानी जाती है। सदिश $\overrightarrow{AB}$ के परिमाण को $|\overrightarrow{AB}|$ से व्यक्त करते हैं। यहाँ ध्यान दीजिये कि $\overrightarrow{AB}$ दिष्ट रेखाखण्ड है अतः वह रेखा जिसका यह रेखाखण्ड है, सदिश $\overrightarrow{AB}$ का आधार (या क्रिया रेखा) कहलाती है।



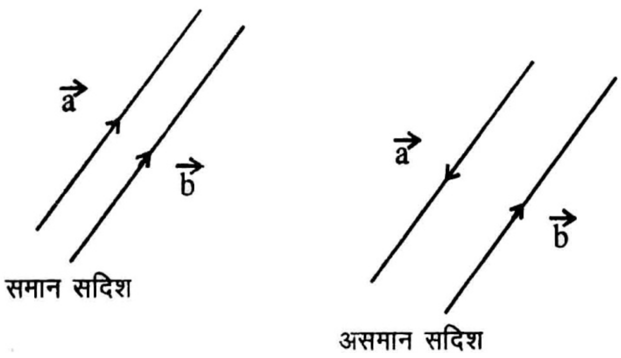

**चित्र : 9.1**

**सदिशों के प्रकार :**

(i) **शून्य सदिश :** ऐसा सदिश जिसका परिमाण शून्य तथा आरम्भिक एवं अत्तिम बिन्दु संपाती हो (अर्थात् दिशा अनिर्धार्य हो) शून्य सदिश कहलाता है जिसे $\vec{O}$ या $O$ से दर्शाया जाता है।

(ii) **समान सदिश :** दो सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ समान माने जाते हैंयदि इनकी दिशा समान हैतथा ये समान्तर दिष्ट रेखाखण्ड़ों से व्यक्त हों।

(iii) **असमान सदिश :** $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ असमान सदिश माने जाते हैंयदि उनको व्यक्त करने वाले दिष्ट रेखाखण्ड समान्तर किन्तु विपरीत दिशा में हों।

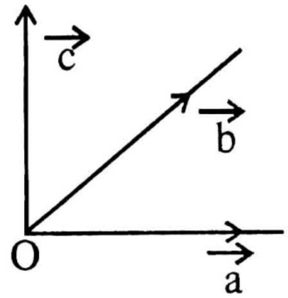



चित्र : 9.2

(iv) **तुल्य सदिश :** दो सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तुल्य कहलाते हैं यदि वे समान्तर हों तथा उनके परिमाण समान हैं । इसे $\vec{a}, = \vec{b}$ से दर्शाते हैं।

(v) **ऋणात्मक सदिश (विलोम सदिश) :** $\vec{a}$ के विलोम सदिश को $\vec{a}$ से निरूपित करते हैं जिसका तात्पर्य है कि $\vec{a}$ तथा $-\vec{a}$ के परिमाण समान परन्तु दिशा विपरीत है।

(vi) **सआरंभी सदिश :** सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ को सआरभी कहते हैं यदि उनका आरम्भिक बिन्दु एक ही हो




चित्र : 9.3

(vii) **इकाई सदिश :** इकाई परिमाण के सदिश को इकाई सदिश कहते हैं। सदिश $\vec{a}$ की दिशा में इकाई परिमाण के सदिश को $\hat{a}$ से व्यक्त करते हैं। $\hat{a}$ को ( $a$ कैप) पढ़ते हैं।

यदि $\vec{a}$ शून्य सदिश नहीं है तो

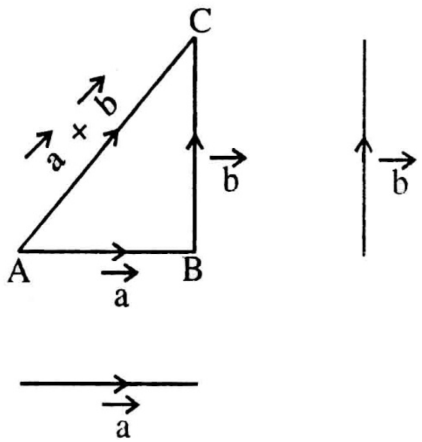
$\vec{a} = a\hat{a}$ जहाँ $|\vec{a}| = = a, \vec{a}$ का परिमाण है

अतः सदिश $\vec{a}$ की दिशा में इकाई सदिश $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

**सदिशों का योग एवं गुणधर्म :**

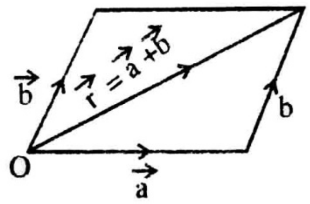
**दो सदिशों का योग :** दो सदिशो के योग के लिये त्रिभुज एवं समान्तर चतुर्भुज का नियम उपयोगी है जो निम्न प्रकार है।

**त्रिभुज नियम** : - यदि दो सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ क्रमागत रूप से त्रिभुज की भुजाओं से व्यक्त हों तो इनका योग $\vec{a} + \vec{b}$ भी एक सदिश लेता है जो त्रिभुज की तीसरी भुजा से व्यक्त होता है(यहाँ $\vec{a} + \vec{b}$ की दिशा का क्रम $\vec{a}, \vec{b}$ की दिशा के चक्रीय कम के विपरीत दिशा में होता है)




**चित्र : 9.4**

**समान्तर चतुर्भुज का नियम :** यदि दो सदिश $\vec{a},\vec{b}$ समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजाओं से निरूपित हो तो $\vec{a},\vec{b}$ का योग $\vec{r},\vec{a},\vec{b}$ के आरम्भिक बिन्दु से गुजरने वाले समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण से निरूपित होता है।




चित्र : 9.5

स्वेच्छ सदिशों $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ केलिए

$(i)\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

$(ii)\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$

$(iii)\vec{a}+\vec{o}=\vec{o}+\vec{a}=\vec{o}$

$(iv)\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\left(-\vec{a}\right)+\vec{a}=\vec{o}$

$(v)\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\neq\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$

**सदिशों का अन्तर:-** सदिशों $\vec{b}$ व $\vec{a}$ का अन्तर सदिश राशि $\vec{a}-\vec{b}$ द्वारा निरूपित होता है।

**वस्तुतः** $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$

अर्थात यदि $\vec{b}$ के ऋणात्मक सदिश व $\vec{a}$ का योग करें तो हमें $\vec{a}-\vec{b}$ प्राप्त होता है।

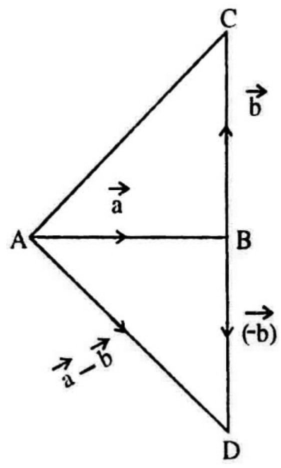
यहाँ; $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$

$$=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{BC}\right)$$

$$=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{BD}\right)$$

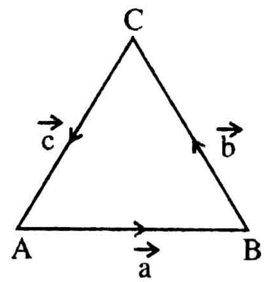
$$=\overrightarrow{AD}$$

(त्रिभुज के नियम से,)




**चित्र 9.6**

**उदाहरण - 1** निम्न चित्र की सहययता से सिद्ध कीजिये कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$




**हल -** $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ,$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ ,$\overrightarrow{CA}=\vec{c}$

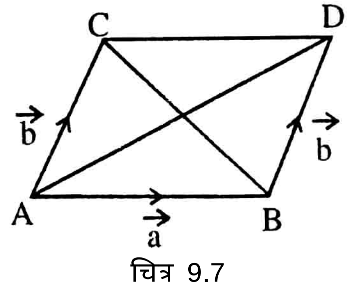
**त्रिभुज नियम से,**

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

**उदाहरण - 2** $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ की आसन भुजाये इस प्रकार हैं कि $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ,$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ ,$\overrightarrow{AD}$ तथा $\overrightarrow{BC}$ ज्ञात कीजिये।

हल - समान्तर चतुर्भुज में $AC=BD\rightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}\rightarrow \vec{b}=\overrightarrow{BD}$




चित्र 9.7

$\therefore$ त्रिभुज $ABD$ मे,

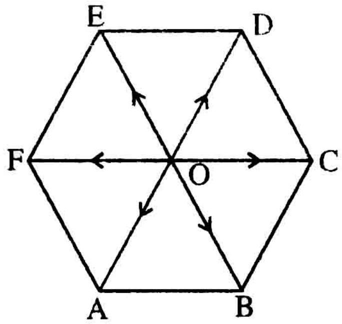
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$$

त्रिभुज $ABC$ में,

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

**उदाहरण - 3** समषट्भुज $ABCDEF$ का केन्द्र $O$ है तो सिद्ध कीजिये कि $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{O}$




**चित्र 9.9**

**हल -** प्रश्नानुसार $O$ समषटभुज $ABCDEF$ का केन्द्र है अत: $O$ इससे गुजरने वाले विकर्णो का मध्य बिन्दु है। अत: $OA = OD,\ \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OD}$

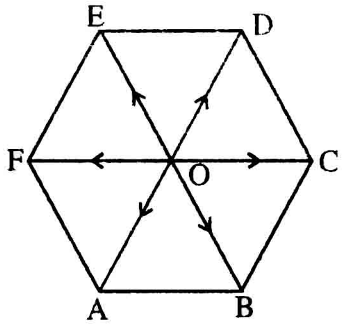
इसी प्रकार $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OE}$ ; $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OF}$

अब $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF}$

या $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{O}$

**उदाहरण - 4** माना $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ तथा $\overrightarrow{OC} = 2\vec{a} - \vec{b}$ तब $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ ज्ञात कीजिए

**हल -** उपरोक्त सदिशो का निरूपण निम्न प्रकार है




चित्र 9.9

चित्रानुसार $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$$= 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{a} = \vec{a} - \vec{b}$$

इसी प्रकार,, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} == \overrightarrow{OC}$

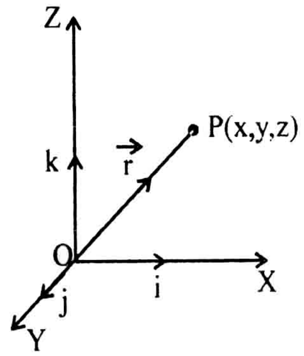
फलत: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$$2\vec{a} - \vec{b} - \vec{b} = 2\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$$

**स्थिति सदिश :** माना $O$ मूल बिन्दु है तथा $OX, OY, OZ$ अभिलाबिक कार्तीय निर्देशाक्ष हैं व समष्टि में स्थित बिन्दु $P$ के निर्देशांक $(x, y, z)$ हैं। तब सदिश $\overline{OP}$ को $O$ के सापेक्ष $P$ का

स्थिति सदिश कहते हैं। यदि $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ क्रमशः $OX,OY,OZ$ के अनुदिश इकाई सदिश हैं तो $\vec{r}=$ $\overrightarrow{OP}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ ...........(1) से निधारित किया जाता है।

जहाँ $\left|\vec{r}\right|=\left(x^2+y^2+z^2\right)$




चित्र 9.10

समीकरण (1) सदिश का घटक रूप कहलाता है। अतः यदि $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ; है तो वास्तविक संख्याये $a_1,a_2,a_3$ क्रमशः सदिश $\vec{a}$ के $X,Y,Z$ अक्ष के अनुदिश घटक हैं।

यदि $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ; $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ -

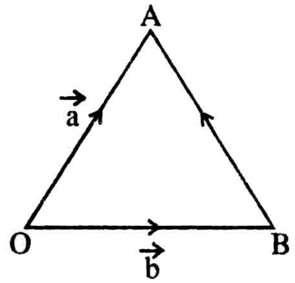
तब निम्न परिणाम ध्यान रखने योग्य हैं

$(i)\vec{a}+\vec{b}=\left(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{b_1}\right)\hat{i}+\left(\overrightarrow{a_2}+\overrightarrow{b_2}\right)\hat{j}+\left(\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{b_3}\right)\hat{k}$

$(ii)\vec{a}-\vec{b}=\left(\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{b_1}\right)\hat{i}+\left(\overrightarrow{a_2}-\overrightarrow{b_2}\right)\hat{j}+\left(\overrightarrow{a_3}-\overrightarrow{b_3}\right)\hat{k}$

$(iii)$ $\vec{a}=\vec{b}$ यदि और केवल यदि $a_1=b$ ; $a_2=b_2$; $a_3=b_3$

यदि दो सदिश एक ही बिन्दु से आरम्भ होते हैं तो निम्न सूत्र अत्यन्त उपयोगी हैं




चित्र 9.11

तब $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$

“ $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

अर्थात् $\overrightarrow{BA}=A$ का स्थिति सदिश $-B$ का स्थिति सदिश।

यदि $O$ के सापेक्ष $A$ व $B$ के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}$ व $\vec{b}$ हो तो $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$

**उदाहरण - 5** माना बिन्दुओं $A,B,C,D$ के स्थिति सदिश क्रमश $\vec{a},\vec{b},\vec{a}+\vec{b}$ तथा $\vec{a}-2\vec{b}$ हैं। $\overrightarrow{BD}$ एवं $\overrightarrow{AC}$ ज्ञात कीजियें

**हल:-** माना $O$ मूल बिन्दु है जिसके सापेक्ष उपरोक्त स्थिति सदिश हैं।

अब, $\overrightarrow{BD} = D$ का स्थिति सदिश $-B$ का स्थिति सदिश

$\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)-\left(\vec{b}\right)=\vec{a}-3\vec{b}$

$\overrightarrow{AC} = C$ का स्थिति सदिश $-A$ का स्थिति सदिश

त्र $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ $\vec{a}$ त्र $\vec{b}$

**उदाहरण 6** माना समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ में बिन्दुओं $A,B,C$ के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}+\vec{b}$ ए $\vec{a}-\vec{b}$ ए $\vec{a}-2\vec{b}$ है। बिन्दु $D$ का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिये।

**हल :** माना $D$ का स्थिति सदिश $\vec{d}$ है।

अब $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow B$ का स्थिति सदिश $A$ का स्थिति सदिश

$= C$ का स्थिति सदिश $D$ का स्थिति सदिश

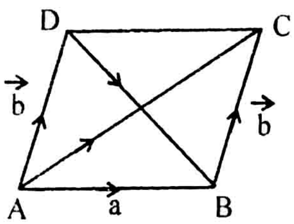
$\Rightarrow \left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)-\vec{d}$

$\Rightarrow \vec{d}=4\vec{b}+\vec{a}$

**उदाहरण 7.** माना $ABCD$ समान्तर चतुर्भुज है जहाँ $AB, AD$ आसन्न भुजायेंहैं। यदि $\overrightarrow{AB}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

तथा $\overrightarrow{AD}=2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}$ तो विकर्णो के अनुदिश इकाई सदिश ज्ञात कीजिये।

**हल :** माना $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}=\overrightarrow{BC}$




तब $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$

चित्र : 9.12

$$=\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)+\left(2\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}\right)$$

$$=3\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k}$$

अतः $\overrightarrow{AC}$ के अनुदिश इकाई सदिश $=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{3\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k}}{\sqrt{3+4+(-4)}}$

$$=\frac{3\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k}}{\sqrt{41}}$$

$$=\frac{3}{41}\hat{i}+\frac{4}{41}\hat{j}-\frac{4}{41}\hat{k}$$

इसी प्रकार $\overrightarrow{BD}=\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}$

एवं $\overrightarrow{BD}$ के अनुदिश इकाई सदिश $\frac{1}{\sqrt{41}}\hat{i}+\frac{2}{\sqrt{41}}\hat{j}-\frac{6}{\sqrt{41}}\hat{k}$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न : 1**

1. माना $O$ मूल बिंदु तथा बिंदु $P(3,-4)\,x-y$ समतल में है। तब

$(i)\overrightarrow{OP}=-4i+3j$ $\quad$ $(ii)3i+4j$

$(iii)-3i-4j$ $\quad$ $(iv)3i-4j$

2. बिन्दु $P(5,4)$ के स्थिति सदिश के $x$ तथा $y$ के अनुदिश सदिश घटक क्रमश: है-

$(i)5j,4i$ $\quad$ $(ii)4i,5k$

$(iii)5i,4j$ $\quad$ $(iv)5i,4k$

3. यदि; $\vec{a}=3i+2k$ है तब $\vec{a}$ की दिशा में इकाई सदिश है

$(i)\frac{3i+2k}{\sqrt{5}}$ $\quad$ $(ii)\frac{3i+2k}{\sqrt{3}}$

$(iii)\frac{3i+2k}{\sqrt{6}}$ $\quad$ $(iv)\frac{3i+2k}{13}$

4. माना $\overrightarrow{OA}=3\hat{i}+4\hat{j}$ $\overrightarrow{OB}=-3\hat{i}+2\hat{j}$ तब $\overrightarrow{BA}$

$(i)6\hat{i}+2\hat{j}$ $\quad$ $(ii)6\hat{i}-2\hat{j}$

$(iii)2\hat{i}+6\hat{j}$ $\quad$ $(iv)3\hat{i}-6\hat{j}$

5. $i+2j$ के समान्तर सदिश है -

$(i)i-2j$ $\quad$ $(ii)3i+6j$

$(iii)3i+4j$ $\quad$ $(iv)3k$

## 9.4 सदिशो की सरेखीयता एवं समतलीयता

## (Collinearity and Coplanarity of vectors)

**सरेखीय सदिश :** सदिश $\vec{a},\vec{b}$ सरेखीय कहलाते हैं यदि उनके आधार समान या समान्तर हैं। अर्थात् $\vec{a},\vec{b}$ सरेखीय है यदि $\vec{a},\lambda\vec{b}$

**व्यापकत:**, अशून्य सदिश $\vec{a},\vec{b}$ सरेखीय होंगे यदि और केवल यदि दो अशून्य अचर $\lambda$ तथा $\mu$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=0$$

अर्थात् $\vec{a},\vec{b}$ का एक घात संचय शून्य सदिश है।

**स्पष्टत:** अशून्य सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ के लिये यदि

$$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=0 \quad \Rightarrow \lambda=0\,,\quad \mu=0$$

तो $\vec{a},\vec{b}$ असरेखीय होंगे।

सरेखीय बिन्दु - तीन $A, B, C$ जिनके स्थिति सदिश क्रमश: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ सरेखीय होंगे यदि और केवल यदि तीन अचर
(सभी एक साथ शून्य नहीं) $\lambda, \mu, t$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि

$$\vec{a}, \vec{a}\lambda + \mu\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0} \;;\; \lambda, \mu, t = 0$$

उपरोक्त का तात्पर्य यह है कि यदि $A, B, C$ सरेखीय हो तब प्रत्येक सदिश युग्म

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ य $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ एवं $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ सरेखीय सदिश युग्म हेता है।

अतएव, तीन बिन्दुओं की सरेखीयता ज्ञात करने के लिये इन तीनों बिन्दुओं से प्राप्त सदिशों की सरेखीयता की जाँच करें।

**उदाहरण : 8** $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ ; $2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$ एवं $4\vec{a} - 7\vec{b} + 7\vec{c}$ क्रमश: बिन्दुओं $A, B, C$ के स्थिति सदिश हैं। क्या $A, B, C$ सरेखीय है?

**हल:** $A, B, C$ सरेखीय बिन्दु है यदि इन बिन्दुओं से प्राप्त सदिशों का युग्म सरेखीय है।

अब $\overrightarrow{AB} = B$ का स्थिति सदिश $-B$ का स्थिति सदिश

$$= -3\vec{a} + 5\vec{b} - \vec{c}$$

$\overrightarrow{BC} = C$ का स्थिति सदिश $-B$ का स्थिति सदिश

$$= 6\vec{a} - 10\vec{b} - 8\vec{c} = -2\left(3\vec{a} - 5\vec{b} - 4\vec{c}\right)$$

स्पष्टत: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$

अतः $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ सरेखीय है -

फलतः $A, B, C$ सरेखीय बिन्दु हैं।

**उदाहरण :** $9\lambda$ के किस मान के लिये बिन्दु जिनके स्थिति सदिश $60\hat{i} + \lambda\hat{j}$ ; $40\hat{i} - 8\hat{j}$ एवं $-40\hat{i} - 52\hat{j}$ है सरेखीय होंगे?

**हल -** माना $A, B, C$ दिये गये स्थिति सदिशों के संगत बिन्दु हैं। $A, B, C$ सरेखीय हैं यदि $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ सरेखीय है

अर्थात् $\overrightarrow{AB} = \mu\overrightarrow{BC}$ ...........(1)

अब $\overrightarrow{AB} = \left(40\hat{i} - 8\hat{j}\right)\left(60\hat{i} + \lambda\hat{j}\right)$

$$= 20\hat{i} - (\lambda + 8)\,\hat{j}$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(40\hat{i} - 52\hat{j}\right) - \left(40\hat{i} - 8\hat{j}\right)$$

$$= -\left(80\hat{i} + 44\hat{j}\right)$$

अतः (1) से,

$$= 20\hat{i} - (\lambda + 8)\,\hat{j} = -\mu\left(80\hat{i} + 44\hat{j}\right)$$

$$\Rightarrow \left(-20\hat{i} + 80\mu\right)\hat{i} + \left\{-(\lambda + 8) + 44\mu\right\}\hat{j} = \hat{0} = 0\hat{i} + 0\hat{j}$$

$$\Rightarrow -20 + 80\mu = 0 - (\lambda + 8) + 44\mu = 0$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{4}, \quad \lambda = -8 + \frac{44}{4} = 3$$

अतः $\lambda = 3$ के लिये दिये गये बिन्दु सरेखीय लेंगे

**समतलीय सदिश :**

सदिश निकाय के सदिश यदि एक समतल में स्थित हैं अथवा उनके आधार एक ही समतल के समान्तर हैं तो ऐसे सदिश समतलीय कहलाते हैं।

कोई भी दो सदिश सर्वदा समतलीय होते हैं परन्तु तीन या अधिक सदिशों के लिये यह आवश्यक रूप से सत्य नहीं है।

अब कतिपय निम्नलिखित परिणामों का अवलोकन करें

परिणाम 1 $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ अशून्य, असरेखीय सदिश हैं तो अद्वितीय अचरों $\lambda, \mu,$ के लिये सदिश $\vec{r} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $\vec{a}$ व $\vec{b}$ समतलीय होंगे।

परिणाम 2 सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समतलीय है यदि और केवल यदि अचर $\lambda, \mu, t$ (सभी एक साथ शून्य नहीं) का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + t\vec{c} \text{ त्र } \vec{0}$$

परिणाम 3 अशून्य सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के लिए यदि $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = t = 0$ तब $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ असमतलीय होंगे।

परिणाम 4 माना $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ चार बिन्दुओं के स्थिति सदिश हैं । ये बिन्दु समतलीय होंगे यदि अचर $\lambda, \mu, t, \delta$ (सभी एक साथ शून्य नहीं) इस प्रकार हैं कि $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + t\vec{c} + \delta\vec{d}$ $= \vec{0}; \lambda + \mu + t + \delta = 0$

**उदाहरण : 10.** क्या असमतलीय $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के लिये सदिश $-2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}; \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ एवं $\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c}$ समतलीय हैं?

**हल -** हमें ज्ञात है कि $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ समतलीय होते हैंयदि इनमें से किसी सदिश को शेष दो सदिशों के एक घात संचय में व्यक्त किया जा सके।

माना अचर $\lambda, \mu$ के लिये

$$\left(-2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}\right) = \lambda\left(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}\right) + \mu\left(\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c}\right)$$

$$= (\lambda + \mu)\vec{a} - (2\lambda + 3\mu)\vec{b} + (3\lambda + 5\mu)\vec{c}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के गुणाको की तुलना करने पर,

$\lambda + \mu = -2$ ..........(1)

$2\lambda + 3\mu = 3$ ......... .(2)

$3\lambda + 5\mu = -4$ .........(3)

समीकरण (1) व (2) से $\mu = 1, \quad \lambda = -3$

$\lambda, \mu$ के उरोक्त मान समीकरण (3) को संतुष्ट करते है अत: प्रदत्त सदिश समतलीय हैं।

**उदाहरण : 11** सिद्ध कीजिये कि बिन्दु $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ य $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$ य $3\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$ एवं $\vec{a} - 6\vec{b} + 6\vec{c}$ समतलीय हैं।

**हल-** माना दिये गये बिन्दु क्रमशः $A,B,C,D$ हैं। ये बिन्दु समतलीय है यदि सदिश $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ समतलीय हैं। इन सदिशों की समतलीयता के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध है :

$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}+\mu\overrightarrow{AC}$ अचर $\lambda,\mu$ हैं।..... (1)

अब $\overrightarrow{AB}=B$ का स्थिति सदिश $-A$ स्थिति सदिश

$=\left(\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}\right)-\left(2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}\right)$

$=-\vec{a}-5\vec{b}+4\vec{c}$

इसी प्रकार $\overrightarrow{AC}=\vec{a}-5\vec{b}+4\vec{c}$; $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{-a}-9\vec{b}+7\vec{c}$

अतः समीकरण (1) से

$=-\vec{a}-5\vec{b}+4\vec{c}=\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)+\mu\left(-\vec{a}-9\vec{b}+7\vec{c}\right)$

$=(\lambda-\mu)\vec{a}+(\lambda-9\mu)\vec{b}+(-\lambda+7\mu)\vec{c}$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ गुणांकों की तुलना से

$\lambda-\mu=-1$....... (2)

$\lambda-9\mu=-5$....... (3)

$-\lambda+7\mu=4$....... (4)

समीकरण (2), (3) से $\lambda=\frac{-1}{2},\quad \mu=\frac{1}{2}$

$\lambda,\mu$ के उपरोक्त प्राप्त मान समीकरण (4) को संतुष्ट करते हैं। अतः प्रदत्त चार बिन्दु समतलीय है।

**स्वमूल्यांकन प्रश्न 2**

1. सिद्ध कीजिये कि निम्न बिन्दु सरेखीय हैं
   $A(6,-7,-1);B(2,-3,1)$ एवं $C(4,-5,0)$
2. सिद्ध कीजिये कि बिन्दु जिनके स्थिति सदिश निम्नलिखित हैं समतलीय हैं
   $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k},-\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$
3. सिद्ध कीजिये कि सदिश $\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c};2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ एवं $\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$ समतलीय हैं
4. सदिश $\vec{a},\vec{b}$ सरेखीय है यदि -
   $(i)\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=0$ $\quad(ii)\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|=0$
   $(iii)2\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|=0$ $\quad(iv)2\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$
5. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ क्रमश : $A,B,C$ के स्थिति सदिश है। बिन्दु $A,B,C$ सरेखीय हैं यदि
   $(i)2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}=\vec{0}$ $\quad(ii)3\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c}=\vec{0}$
   $(iii)\vec{a}-2\vec{b}-4\vec{c}=\vec{0}$ $\quad(iv)\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

## 9.5 सदिश राशियों का गुणन

सदिश राशियों के दो प्रकार के गुणन होते हैं - अदिश गुणन एवं सदिश गुणन । इस अनुच्छेद में आप दो एवं तीन सदिशों के गुणन से परिचित होंगे

**9.5.1 दो सदिश राशियों का अदिश गुणन :**

दो सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ के अदिश गुणन को $\vec{a}.\vec{b}$ से व्यक्त करते हैं जो कि एक वास्तविक संख्या होती है।

**वस्तुतः** $\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$

जहाँ $a,b$ एवं $\theta$ क्रमशः $\vec{a}.\vec{b}$ के परिमाण एवं उनके मध्य कोण है। अदिश गुणन $\vec{a}.\vec{b}$ को बिन्दु गुणन भी कहते हैं।

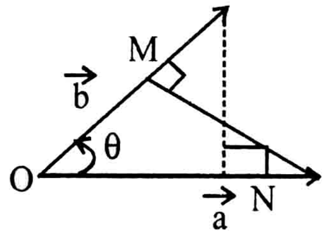
$\vec{a}.\vec{b}$ की ज्यामितीय व्याख्या :

$\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\theta = a\left(b\cos\theta\right)$

$= ba\cos\theta = \vec{b}.\vec{a}$

अतः $\vec{a}.\vec{b}$ = ( $\vec{a}$ का परिमाण) ( $\vec{b}$ के परिमाण $b$ का $\vec{a}$ की दिशा में घटक)

या $\vec{a}.\vec{b}$ = ( $\vec{b}$ का परिमाण) ( $\vec{a}$ के परिमाण $a$ का $\vec{b}$ की दिशा में घटक)




**चित्र 9.13**

**टिप्पणी**:

(1) यदि $\vec{a}.\vec{b}$ समान्तर हैं अथवा समरेखीय होतो $\theta = 0$

तब $\vec{a}.\vec{b} = ab$

(2) यदि $\vec{a}.\vec{b}$ लम्बवत है तो $\theta = 90^\circ$

अतः $\vec{a}.\vec{b} = 0$

(3) $\vec{a}.\vec{a} = aa = a^2$

(4) यदि $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ अभिलांभिक निर्देशाक्षों $OX, OY, OZ$ के अनुदिश इकाई सदिश हैं तो

$\hat{i}.\hat{i} = 1, \hat{j}.\hat{j} = 1, \hat{k}.\hat{k} = 1$

तथा $\hat{i}.\hat{j} = 0 = \hat{j}\hat{k} = \hat{k}\hat{i}$

(5) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

(6) $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

(7) यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}, \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

तब $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$\vec{a}.\vec{a} = a^2{}_1 + a^2{}_2 + a^2{}_3$

(8) सदिशो $\vec{a},\vec{b}$ के मध्य कोण $\theta$ है तो

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{ab} = \hat{a}.\hat{b}$$

पुन: यदि $\vec{a},\vec{b}$ धटक रूप

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}, \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ में हैं तो

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{ab} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a^2{}_1 + a^2{}_2 + a^2{}_3}\sqrt{b^2{}_1 + b^2{}_2 + b^2{}_3}}$$

**उदाहरण 12** यदि $\theta$, इकाई सदिशों $\hat{a},\hat{b}$ के मध्य कोण है तो दिखाइये कि $\frac{1}{2}\left|\hat{a} - \hat{b}\right| = \sin\theta$

**हल** $\hat{a}.\hat{b} = |\hat{a}||\hat{b}|\cos\theta = \cos\theta \quad [\therefore |\hat{a}| = |\hat{b}| = 1]$

**अब** $\left|\hat{a} - \hat{b}\right|^2 = \left(\hat{a} - \hat{b}\right).\left(\hat{a} - \hat{b}\right)$

$$\left|\hat{a} - \hat{b}\right|^2 = |\hat{a}|^2 + |\hat{b}|^2 - 2\left(\hat{a}.\hat{b}\right)$$

$$= 1 + 1 - 2\cos\theta = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\left|\hat{a} - \hat{b}\right|$$

**उदाहरण 13** माना बिन्दुओं $A, B$ के निर्देशांक मूल बिंदु $O$ के सापेक्ष $(1,4,3)$ $(-2,3,3)$ हैं। $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ का

अदिश गुणन ज्ञात कीजिये।

**हल:-** $\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ ; $\overrightarrow{OB} = -2\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$

अब $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \left(\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}\right).\left(-2\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}\right)$

$-2 + 12 + 9 = 19$

**स्वमूल्यांकन प्रश्न - 3**

1. यदि $\vec{r}$, बिन्दु $P(x, y, z)$ का स्थिति सदिश है तो $\vec{r}\,\vec{j}$ तुल्य है:

   (i) x (ii) y (iii) z (iv) $\hat{i}$

2. $\vec{a},\vec{b}$ परस्पर संपाती है $\vec{a}.\vec{b}$ यदि का मान है।

   (i) a2 (ii) ab (iii) $-ab$ (iv) $\vec{b}.\vec{a}$

3. $\left(2\hat{i}+\hat{j}\right)\left(2\hat{i}-\hat{j}\right)$ का मान है।

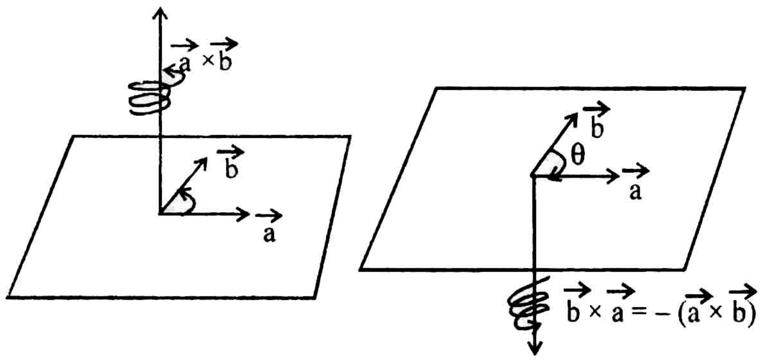
(i) 4 (ii) 3 (iii) $4\hat{i}-\hat{j}$ (iv) 5

**9.5.2 दो सदिशों का गुणन:**

सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ के सदिश गुणन को $\vec{a}\times\vec{b}$ से व्यक्त करते है।

$\vec{a}\times\vec{b}=ab\sin\theta\hat{n}\,,\ \ 0\le\theta\le\pi$

यहाँ $\theta$ सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ के मध्य कोण तथा $\hat{n},\hat{a}$ तथा $\vec{b}$ को सनिहित किये समतल के लंबवत् दिशा में इकाई सदिश है। स्पष्ट है कि $\vec{a}\times\vec{b}$ एक सदिश राशि है। ध्यान दीजिये कि सदिश $\vec{a},\vec{b}$ एवं $\vec{a}\times\vec{b}$ परस्पर लंबवत् सदिशों के दक्षिण हस्त नियम को निरूपित करते हैं।




चित्र :9.14

अब यदि $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ अभिलाबिक इकाई सदिश है।

तो $\sin\hat{i}\times\hat{j}=1.1\sin 90\hat{k}$ $\left[\begin{array}{l}\therefore |i|=|i|=1,\theta=90^\circ\\ \hat{n}=\hat{k}\end{array}\right]$

क्योकि $\hat{k}$ बाकी दोनों इकाई सदिशों को सन्निहित करने वाले समतल के लबवत् दिशा में है।

अत: $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$

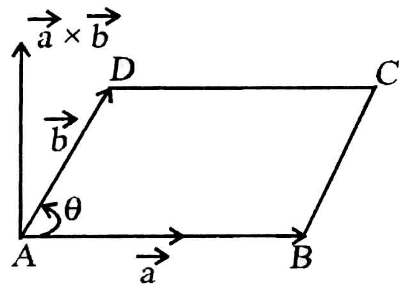
इसी प्रकार, $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\ \ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$

एवं $\hat{i}\times\hat{i}=0=\hat{j}\times\hat{j}=0=\hat{k}\times\hat{k}=0$

उनके अतिरिक्त $\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k},\ \ \hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i},\ \ \hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$

$\vec{a}\times\vec{b}$ की ज्यामितीय व्याख्या :

सदिश $\vec{a}\times\vec{b}$ आसन्न भुजाओं $\vec{a},\vec{b}$ से निर्मित समान्तर चतुर्भुज का सदिश क्षेत्रफल लेता है।




**चित्र : 9.15**

**टिप्पणी :**

$(i)\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{b}\times\vec{a}$

$(ii)\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\neq\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$

$(iii)\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

$(iv)$ यदि $l$ अचर राशि है तो

$$l\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(l\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(l\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)l$$

$(v)$ यदि $\vec{a},\vec{b}$ समान्तर या लबंवत् हैं तो क्रमश : $\theta=0$ या $\pi/2$ इसलिये $\vec{a}\times\vec{b}=0$ (समातंर) मे $\vec{a}\times\vec{b}=ab\hat{n}$ जबकि $\hat{n},\hat{a}$ एवं $\vec{b}$ के समतल के लंबवत दिशा में इकाई सदिश है।

घटक रूप में $\vec{a}\times\vec{b}$:

यदि $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k},\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

तब $\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}\right)\times\left(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}\right)$

$$=\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\hat{i}-\left(a_1b_3-a_3b_1\right)\hat{j}-\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\hat{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i}\hat{j}\hat{k}\\ a_1a_2a_3\\ b_1b_2b_3\end{vmatrix}$$

**उदाहरण 14** माना $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}$ तब $\vec{a},\vec{b}$ दोनों के लंबवत् इकाई सदिश ज्ञात कीजिये।

हल हम जानते हैं कि $\vec{b}\times\vec{c}$ सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ को सन्निहित करने वाले समतल के अभिलम्बवत् होता है। अतः वांछित इकाई सदिश $\vec{a}\times\vec{b}$ के अनुदिश होगा

$\vec{a}\times\vec{b}$ के अनुदिश इकाई सदिश $=\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$

अब $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}\hat{j}\hat{k}\\ 234\\ 3-2-2\end{vmatrix}$

$$=\left(6+8\right)\hat{i}-\left(-4-12\right)\hat{j}-\left(-4-9\right)\hat{k}$$

$$=2\hat{i}+16\hat{j}-13\hat{k}$$

अतः वांछित इकाई सदिश

$$=\frac{2\hat{i}+16\hat{j}-13\hat{k}}{\sqrt{2^2+16^2+\left(-13\right)^2}}=\frac{2\hat{i}+16\hat{j}-13\hat{k}}{\sqrt{429}}$$

**उदाहरण 15** यदि सदिश $3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}, \hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ समान्तर चतुर्भुज के विकर्णो को निरूपित करे तो समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

**हल:-** माना $\overrightarrow{AC}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$

$\overrightarrow{BD}=\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$

समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्ण हैं।

अब वाछिंत क्षेत्रफल $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$ जहाँ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

अब $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ ...........(1)

पुन: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ $[\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}]$........... (2)

(1) (2) से $\overrightarrow{AB}=\dfrac{\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}\right)}{2}=\dfrac{\left(3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right)-\left(\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}\right)}{2}$

$=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

तथा $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}}{2}$

$=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$

अब

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\hat{i}-7\hat{j}-5\hat{k}$$

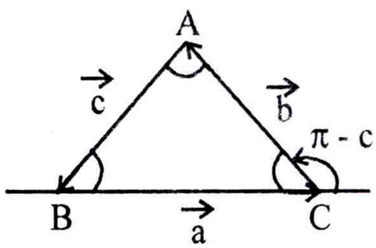
$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=5\sqrt{3}$

**उदाहरण 16** सदिश विधि से त्रिभुज $ABC$ में सिद्ध कीजिये।

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

**हल** $\triangle ABC$ **में सदिश योग से**

$\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$




चित्र : 9.16

**या** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

**अब** $\vec{a}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{0}=\vec{0}$

$$\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0} \quad [\therefore \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}]$$

या $ab\sin(\pi-C)-c\sin(\pi-B)\widehat{n}=\vec{0}$ **(जहाँ $\widehat{n}$ $\triangle ABC$ के तल के अभिलंबवत् इकाई सदिश है।)**

या $ab\sin(\pi-C)-c\sin(\pi-B)a\widehat{n}=\vec{0}$.... ......... .(1)

$\because a\neq 0, \widehat{n}\neq\vec{0}$ अतः (1) से

$$b\sin C=c\sin B\Rightarrow\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \text{ ........(2)}$$

पुनः $\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=0$ से उपरोक्तानुसार

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

(2) और (3) से

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin c}$$

**उदाहरण 17** सिद्ध करो कि

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{b}\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{O}$$

हल : वाम पक्ष : $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$

या $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}-\vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{c}=\vec{0}$

$[\because \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}]$इत्यादि

त्रिभुज का सदिश क्षेत्रफल : -

यदि त्रिभुज $ABC$ के सिरे $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ हों तो $\triangle ABC$ का सदिश क्षेत्रफल

$=\frac{1}{2}\left[\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}\right]$होगा

**उदाहरण 18** उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसके शीर्ष $(1,2,3)$ $(2,5,1)$ $(-1,1,2)$ हैं

**हल: -** माना $O$ मूल बिंदु है। तथा $A,B,C$ क्रमशः $(1,2,3)$ $(2,5,1)$ $(-1,1,2)$ निर्देशांक हैं।

अतः $\overrightarrow{OA}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}=\vec{a}$

$\overrightarrow{OB}=2\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}=\vec{b}$

$\overrightarrow{OC}=-\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}=\vec{c}$

अतः वांछित क्षेत्रफल $\left|\frac{1}{2}\left(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right)\right|$ ...........(1)

अब $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\widehat{i}\,\widehat{j}\,\widehat{k}\\123\\251\end{vmatrix}=-13\widehat{i}+5\widehat{j}+\widehat{k}$

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i}\hat{j}\hat{k}\\ 251\\ -512\end{vmatrix}=-9\hat{i}-5\hat{j}+7\hat{k}$$

$$\vec{c}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\hat{i}\hat{j}\hat{k}\\ -112\\ 123\end{vmatrix}=-\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}$$

अब $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=-5\hat{i}+5\hat{j}+5\hat{k}$

अतः वांछित क्षेत्रफल =

$$\frac{5}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$$

**उदाहरण 19** माना $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$ $\vec{b}=3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}$ सिद्ध करो कि $\vec{a}\times\vec{b}$ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के समतल के लम्बवत है।

**हल:-** $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}\hat{j}\hat{k}\\ 236\\ 3-62\end{vmatrix}=(6+36)\hat{i}-\hat{j}(4-18)+(-12-9)\hat{k}$

$=42\hat{i}+14\hat{j}-21\hat{k}$

**अतः**, $\vec{a}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right).\left(42\hat{i}+14\hat{j}-21\hat{k}\right)$

$=84+42-126=0$

$\Rightarrow \vec{a},\vec{a}\times\vec{b}$ परस्पर लम्बवत है।

पुनः $\vec{b}.\vec{a}\times\vec{b}=\left(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}\right).\left(42\hat{i}+14\hat{j}-21\hat{k}\right)$

$\Rightarrow \vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ परस्पर लम्बवत है।

अतः $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के समतल के लम्बवत है।

**उदाहरण 20** सिद्ध कीजिये कि $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=a^2b^2-\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$

हल :- $\vec{a}\times\vec{b}=ab\sin\theta\hat{n}$ अतः $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left|ab\sin\theta\hat{n}\right|^2$

या $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=a^2b^2\sin^2\theta=a^2b^2\left(1-\cos^2\theta\right)$

$=a^2b^2-a^2b^2\cos^2\theta$

$=a^2b^2-\left(\vec{a}.\vec{b}\right)^2$

### 9.5.3 तीन सदिशों का अदिश गुणन :

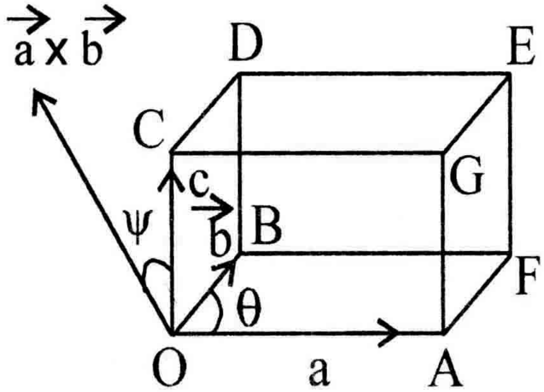
माना $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ सदिश है। सदिशों $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ एवं $\vec{c}$ के अदिश गुणनफल $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ का अदिश त्रिक गुणन कहते तथा इसे $\vec{a}\times\vec{b}.\vec{c}$ या $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]$ से निरूपित करते हैं।

ध्यान दीजिये कि $\vec{a}\times\vec{b}.\vec{c}$ का तात्पर्य $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).\vec{c}$ है नाकि $\vec{a}\times\left(\vec{b}.\vec{c}\right)$ क्योकि $\vec{b}.\vec{c}$ एक अदिश राशि है जिसके लिये $\vec{a}\times\left(\vec{b}.\vec{c}\right)$ निरर्थक है।

**ज्यामितीय व्याख्या** :

यदि सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ समान्तर षट्फलक की आसन्न भुजाओं को निरूपित करें तो

$\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|.\left|\vec{c}\right|\cos\psi$




चित्र : 9.17

= (समान्तर चतुर्भुज $OAFB$ का क्षेत्रफल) $\left(\left|\vec{c}\right|\cos\psi\right)$

= आसन भुजाओं $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ से निर्मित समान्तर षट्फलक का आयतन

इसी प्रकार $\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).\vec{a}$ तथा $\left(\vec{c}\times a\right).\vec{b}$ भी समांतर षट्फलक के आयतन को व्यक्त करते हैं।

अतः $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).\vec{a}=\left(\vec{c}\times a\right).\vec{b}$

अतः $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]=\left[\vec{b}\vec{c}\vec{a}\right]=\left[\vec{c}\vec{a}\vec{b}\right]$

**घटक रूप में त्रिक अदिश गुणन:**

माना $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ , $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

$\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$

तब $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1a_2a_3\\b_1b_2b_3\\c_1c_2c_3\end{vmatrix}$

**टिप्पणी :**

1. अदिश त्रिक गुणन में. (dot) एवं × (Cross) परस्पर परिवर्तनीय है यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ का चक्रीय कम नियत हैं

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).\vec{c}=\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

2. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ का चक्रीय क्रम बदलने से अदिश त्रिक गुणन का चिन्ह बदल जाता है।

अर्थात् $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]=\left[\vec{b}\vec{c}\vec{a}\right]=\left[\vec{c}\vec{a}\vec{b}\right]$

$= -\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right] = -\left[\vec{b}\vec{c}\vec{a}\right] = -\left[\vec{c}\vec{a}\vec{b}\right]$

3. तीन सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ समतलीय होगें यदि

$\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right] = 0$

4. तीन सदिशों में यदि दो सदिश समान हैं तो उनका अदिश त्रिक गुणन शून्य होगा क्योंकि -

$$\left[\vec{a}\vec{a}\vec{b}\right] = \left(\vec{a}\times\vec{a}\right).\vec{b} = 0 \quad \left[\because \vec{a}\times\vec{a} = 0\right]$$

**उदाहरण 21** उस समांतर षट्फलक का आयतन ज्ञात करें जिसकी आसन भुजाऐं है

$$\vec{a} = 2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}, \vec{b} = 3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}, \vec{c} = \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$$

**हल वाछित आयतन** $=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right).\vec{c}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \left|-22\right| = 22 \text{ इकाई}$$

**चतुष्फलक का आयतन :**

यदि $OABC$ चतुष्फलक है जहाँ $O$ मूल बिंदु है तथा $O$ के सापेक्ष $A,B,C$ के स्थिति सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ है तो चतुष्फलक का आयतन $V$

$$V = \frac{1}{6}\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]$$

यदि $O$ मूल बिन्दु नही है तथा $O,A,B,C$ के स्थिति सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ हैं तो

$$V = \frac{1}{6}\left[\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\left(\vec{d}-\vec{a}\right)\right]$$

**उदाहरण 22** सिद्ध करो कि शीर्षो $A(0,1,2)B(3,0,1)C(4,3,6)D(2,3,2)$ से निर्मित चतुष्फलक का आयतन 6 इकाई है।

हल माना $O$ मूल बिन्दु है तो

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \hat{j}-3\hat{k}, \vec{b} = \overrightarrow{OB} = 3\hat{i}+4\hat{k}$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{OC} = 4\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}, \vec{d} = \overrightarrow{OD} = 2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$$

अब $\vec{b}-\vec{a} = 3\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}, \vec{c}-\vec{a} = 4\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$

$$\vec{d}-\vec{a} = 2\hat{i}+2\hat{j}$$

वांछित आयतन $V = \frac{1}{6}\left[\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\left(\vec{d}-\vec{a}\right)\right]$

$$\left(\vec{b}-\vec{a}\right)x\left(\vec{c}-\vec{a}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -2i-16j+10k$$

आयतन $= \frac{1}{6}\left[\left(-2i-16j+10k\right).\left(2i+2j\right)\right]$

$$=\frac{1}{6}[-4-32]=-6=6$$ (चूँकि आयतन ऋणात्मक नहीं होता)

**उदाहरण 23** सिद्ध कीजिये कि बिंदु $A(4,5,1); B(0,-1,-1), C(3,9,4)$ एवं $D(-4,4,4)$ समतलीय हैं।

हल माना $O$ मूल बिन्दु है। दिये गये बिन्दु समतलीय होंगे यदि $AB, AC, AD$ समतलीय हैं।

$\vec{a}=AB=B$ का स्थिति सदिश $-A$ का स्थिति सदिश

$$=\left(-\vec{j}-\vec{k}\right)-\left(4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}\right)=-4\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k}$$

इसी प्रकार

$$\vec{b}=\overrightarrow{AC}=\left(3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k}\right)-\left(4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}\right)$$

$$=-\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$$

तथा

$$\vec{c}=\overrightarrow{AD}=\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)-\left(4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}\right)$$

$$=-8\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$$

अब $AB, AC, AD$ समतलीय है यदि $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]=0$

अब $$\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]=\begin{vmatrix} -4-6-3 \\ -143 \\ -8-13 \end{vmatrix}=0$$

अतः बिन्दु $A, B, C, D$ समतलीय हैं।

उदाहरण 24 सिद्ध कीजिये कि -

$$\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]^2=\begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{a}\vec{a}.\vec{b}\vec{a}.\vec{c} \\ \vec{b}.\vec{a}\vec{b}.\vec{b}\vec{b}.\vec{c} \\ \vec{c}.\vec{a}\vec{c}.\vec{b}\vec{c}.\vec{c} \end{vmatrix}$$

हल माना $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ; $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

$\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$

तब $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]^2=\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]$ क्योंकि $\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]$ एक अदिश राशि है।

अतः $$\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]^2=\begin{vmatrix} a_1a_2a_3 \\ b_1b_2b_3 \\ c_1c_2c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1a_2a_3 \\ b_1b_2b_3 \\ c_1c_2c_3 \end{vmatrix}$$

$$\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]^2=\begin{vmatrix} a^2{}_1+a^2{}_2+a^2{}_3a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 \\ b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3b^2{}_1+b^2{}_2+b^2{}_3b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 \\ c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3c^2{}_1+c^2{}_2+c^2{}_3 \end{vmatrix}$$

$$\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b} & \vec{a}.\vec{c} \\ \vec{b}.\vec{a} & \vec{b}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{c} \\ \vec{c}.\vec{a} & \vec{c}.\vec{b} & \vec{c}.\vec{c} \end{vmatrix}$$

**उदाहरण 25** सिद्ध कीजिये कि

$$\left[a+b, b+c, c+a\right] = 2\left[abc\right]$$

हल अब

$$= \left[\vec{a}+\vec{b}\ \vec{b}+\vec{c}\ \vec{c}+\vec{a}\right] = (\vec{a}+\vec{b}).\{(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a})\}$$

$$= \left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left[\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\times\vec{c}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\times\vec{a}\right]$$

$$= \left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left[\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}\right]\ \left(\because \vec{c}\times\vec{c}=0\right)$$

$$= \vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{a}.\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\vec{b}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+\vec{b}.\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$$

$$\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]+0+0+0+0+\left[\vec{b}\vec{c}\vec{a}\right]$$

$$= 2\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]\ \because \left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right] = \left[\vec{b}\vec{c}\vec{a}\right]$$

**स्वस्मांकन प्रश्न : 4**

1. निम्नलिखित में निरर्थक है

   $(i)\left(\vec{a}.\vec{b}\right).\vec{c}$ $(ii)\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\times\vec{c}$ $(iii)\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}$ $(iv)$ ऊपरोक्त सभी

2. $\left[ijk\right]$ का मान है

   (i) 3 (ii) 4 (iii) 2 (iv) 1

3. $\left[\vec{a}\vec{a}\vec{a}\right]$ का मान है

   $(i)\left|\vec{a}\right|^3$ $(ii)\vec{a}^3$ $(iii)$ शून्य $(iv)$ गणनीयनहीं

4. $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ $\vec{b} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ $\vec{c} = 3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ के लिए दिखाइये कि

$\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).\vec{c} = \vec{a}.\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$

5. सिद्ध कीजिये कि बिन्दु $(2,3,-1);(-3,0,-4)(4,5,2)$ एवं $(3,6,5)$ समतलीय है

6. निम्नलिखित भुजाओं से निर्मित Paralelopiped का आयतन ज्ञात करो।

$(i)\vec{a} = 2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}, \vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}, \vec{c} = 3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

$(ii)\vec{a} = 4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}, \vec{b} = 3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}, \vec{c} = 3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

### 9.5.4 तीन सदिशों का सदिश गुणन : -

तीन सदिशों का गुणन $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ सदिश त्रिक गुणन कहलाता है। स्पष्टत : यह एक सदिश राशि है क्योंकि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}\times\vec{c}$ सदिश राशियाँ हैं जिनका क्रास गुणन $(\times)$ भी सदिश होता है।

वस्तुत : ज्यामितीय दृष्टि से $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, सदिशों $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ को समाहित करने वाले समतल में स्थित होता है एवं $\vec{a}$ के लम्बवत् होता है।

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ का निम्नलिखित रूप अत्यन्त उपयोगी है इसे आपको स्मरण रखना चाहिये

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}.\vec{c}).\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} \text{ ...... } (1)$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=-\vec{c}\times(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$=-\left[(\vec{c}.\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}\right]$$

$$=(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}-(\vec{c}.\vec{b})\vec{a} \text{ ................} (2)$$

(1) व (2) से स्पष्ट है कि व्यापकत:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$$

**उदाहरण : 26.** सिद्ध कीजिये

$$(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{b}\times\vec{c})=\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]\vec{c}$$

**हल :** माना $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{p}$, तब

$$\vec{p}\times(\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{p}.\vec{a})\vec{c}-(\vec{p}.\vec{c})\vec{a}$$

$$=\left\{(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a}\right\}\vec{c}-\left\{(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{c}\right\}.\vec{a}$$

अब $(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a}=\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})$ तथा $(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{c}=\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{c})$

अतः $\vec{p}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = =\left\{(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{a}\right\}\vec{c}-\left\{(\vec{b}\times\vec{c}).\vec{c}\right\}.\vec{a}$

$$=\left[\vec{b}\vec{c}\vec{a}\right]\vec{c}-0$$

$$\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]\vec{c}\quad\left(\because\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]=\left[\vec{b}\vec{c}\vec{a}\right]\right)$$

**उदाहरण : 27** सिद्ध कीजिये कि $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

यदि और केवल यदि $(\vec{a}\times\vec{c})\times\vec{b}=\vec{0}$ या $\vec{a}$ एवं $\vec{c}$ सरेखीय है

हल : प्रतिबंध आवश्यक है

माना $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

तब $=(\vec{a}.\vec{c}).\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}=(\vec{a}.\vec{c}).\vec{b}-(\vec{b}.\vec{c}).\vec{a}$

या $(\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c}).\vec{a}=\vec{0}$

या $(\vec{a}\times\vec{c})\times\vec{b}=\vec{0}$ ............(1)

समीकरण (1) तभी सत्य है जबकि

$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$ या $\vec{b}=\vec{0}$

परन्तु $\vec{b}\neq\vec{0}$ अत: $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$

$\vec{a}\times\vec{c}=\vec{0}$ का तात्पर्य है कि $\vec{c},\vec{a}$ के समान या समान्तर है अर्थात् $\vec{a}$ तथा $\vec{c}$ सरेखीय है

प्रतिबंध पर्याप्त है - माना $\vec{a}$ तथा $\vec{c}$ सरेखीय हैं तब किसी अचर $\lambda$ के लिये $\vec{c}=$
$\lambda\vec{a}$

अब $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\lambda\vec{a}$

$=\lambda\left[\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{a}\right]$

$=\lambda\left[\left(\vec{a}.\vec{a}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{a}\right]$............(2)

पुनः $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\lambda\vec{a}\right)$

$=\lambda\left[\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]$

$=\lambda\left[\left(\vec{a}.\vec{a}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{a}\right]$

समीकरण (2) तथा (3) से स्पष्ट है कि

$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$

**उदाहरण : 28.** $\vec{a}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k};\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k};\vec{c}=\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ सिद्ध कीजिये-

$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\neq\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$

हल : $\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}=5\hat{i}-5\hat{k}$

$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=-\hat{i}+7\hat{j}+5\hat{k}$

अब $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & -5 & 5\end{vmatrix}=15\hat{i}-15\hat{j}-15\hat{k}$ ...........(1)

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -1 & 7 & 5\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}=24\hat{i}+7\hat{j}-5\hat{k}$ ...................(2)

(1) व (2) से स्पष्ट है कि

$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\neq\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$

**उदाहरण : 29** सिद्ध कीजिये कि

$\left|\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|\neq\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\right|$

जहाँ $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k};\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k};\vec{c}=\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$

**हल :** $\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i}\hat{j}\hat{k}\\211\\112\end{vmatrix}=\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}\hat{i}\hat{j}\hat{k}\\1-23\\1-31\end{vmatrix}=7\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$$

अब $\left|\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|=\sqrt{(7)^2+(2)^2+(-1)^2}=\sqrt{49+4+1}$

$\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

अब $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i}\hat{j}\hat{k}\\1-23\\211\end{vmatrix}=-5\hat{i}-5\hat{j}+5\hat{k}$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i}\hat{j}\hat{k}\\-555\\112\end{vmatrix}=5\hat{i}+15\hat{j}-10\hat{k}$$

$$\left|\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|=\sqrt{(5)^2+(15)^2+(-10)^2}=\sqrt{350}$$

स्पष्ट है कि $\left|\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|\neq\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}\right|$

**स्व मूल्यांकन प्रश्न -5**

1. $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ के तुल्य है

   $(i)\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\vec{a}$ $\quad$ $(ii)\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\times\vec{c}$

   $(iii)\vec{a}\left(\vec{b}.\vec{c}\right)-\left(\vec{a}.\vec{b}\right)c$ $\quad$ $(iv)\left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c}$

2. $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$ के तुल्य है

   $(i)\left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{b}.\vec{c}\right)\vec{a}$ $\quad$ $(ii)\left(\vec{a}.\vec{b}\right)c$

   $(iii)\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c}-\left(\vec{b}.\vec{c}\right)\vec{a}$ $\quad$ $(iv)\vec{a}-\vec{b}$

3. सिद्ध कीजिये $\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\left[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right]\vec{c}$

## 9.6 सारांश

इस इकाई में आपने देखा कि किस प्रकार परिमाण एवं दिशा से युक्त भौतिक राशि सदिश की अवधारणा एवं उन पर विभिन्न संक्रियाओं को परिभाषित किया गया। चतुष्फलक एवं समान्तर षटफलक के आयतन ज्ञात करने में सदिशों के अयोग से इनकी अनुप्रयोगात्मक शक्ति को आपने

अनुभव किया होगा। वस्तुत: सदिशों के ये आधारभूत सिद्धान्त उच्चतर गणित की शाखाओं में लाभकारी हैं।

## 9.7 शब्दावली

| | |
|---|---|
| सदिश | Vector |
| अदिश | Scalar |
| इकाई सदिश | Unit vector |
| स्थिति सदिश | Position vector |
| अदिश गुणन | Scalar or dot vector |
| सदिश गुणन | Vector of cross product |
| अदिश त्रिक गुणन | Scalar triple product |
| सदिश त्रिक गुणन | Vector triple product |

## 9.8 स्वमूल्यांकन प्रश्नों के उत्तर

**स्वमूल्यांकन 1**

1 (iv) 2 (iii) 3 (ii) 4 (i) 5 (ii)

**स्वमूल्यांकन 2**

1 (iv) 2 (ii)

**स्वमूल्यांकन 3**

1 (ii) 2 (ii) 3 (iv)

**स्वमूल्यांकन 4**

1 (iv) 2 (iv) 3 (iv) 4 (iii) 5 (i) 6 (ii)30

**स्वमूल्यांकन 5**

1 (iv) 2 (i) 3 (i)

## 9.9 अभ्यास प्रश्न

1. ऐसा सदिश ज्ञात कीजिये जिसका परिमाण 5 है तथा $2i-j$ के समान्तर है

   उत्तर : $\sqrt{5}(2i-j)$

2. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ क्रमश: $A(3,4);B(5,-6);C(4,-1)$ के स्थिति सदिश हैं तो $\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$ ज्ञात कीजिये

   उत्तर $i-5j$

3. यदि $A(\alpha,-1);B(2,1);C(4,5)$ सरेखीय हैं तो $\alpha$ का मान ज्ञात कीजिये।

   उत्तर $\alpha=1$

4. $m$ के कि $(m-2)\vec{a}+\vec{b};(2m+3)\vec{a}-2\vec{b}$ सरेखीय हैं जहाँ $\vec{a},\vec{b}$ असरेखीय सदिश है

   उत्तर $m=-\dfrac{1}{4}$

5. सिद्ध कीजिये कि सदिश $i-3j-5k; 2i-j+k; 3i-4j-4k$ समतलीय हैं

6. दिखाइये कि $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2\vec{a}\times\vec{b}$

7. यदि $\vec{a}=2i+j; \vec{b}=2i-j+k; \vec{c}=3i+4j+2k$ तो पुष्टि कीजिये
$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{0}$

8. उस समान्तर षटफलक का आयतन ज्ञात करो जिसकी भुजायें
$2i-3j+k; i-j+2k; 2i+j-k$ है।
उत्तर 14

9. सिद्ध कीजिये कि चार बिन्दु $2i+j-k; -j+; i+j+k\left(i+j\right)$ समतलीय है

10. स्वेच्छ सदिशों $\vec{a}$ एवं $\vec{b}$ के लिये सिद्ध कीजिये
$\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=0$

# इकाई 10: गति के नियम (Laws of Motion)

**इकाई की रुपरेखा**



## 10.0 : उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप

1. किसी वस्तु की गति से तात्पर्य और तत्सम्बंधी विषयों यथा, चाल, वेग, त्वरण, बल इत्यादि की चर्चा कर सकेगें।
2. न्यूटन के गति के नियमों एवं अनुप्रयोगों से परिचित होंगे।

## 10.1 प्रस्तावना

इस इकाई की विषय-वस्तु गतिकी या गति विज्ञान के सिद्धान्त हैं। गति विज्ञान, गणित की वह प्रशाखा है जिसमें हम कण अथवा पिण्ड (वस्तु) पर कार्यरत् बल के कारण उसकी गति का अध्ययन करते हैं। किसी वस्तु के गति करने का अर्थ है कि वह चलायमान है अर्थात् समय के साथ उसकी स्थिति में परिवर्तन होता है। स्वाभाविकत: प्रश्न उठता है कि वस्तु स्थिरावस्था से गतिमान कैसे होती है? यह पुन: विरामावस्था में आती है तो क्यों? गति अवस्था के प्रमुख कारक क्या हैं? इन जिज्ञासाओं का समाधान न्यूटन के गति नियमों से होता है जिन्हे जानने से पूर्व कतिपय मूल संकल्पनाओं से परिचय आवश्यक है।

## 10.2 मूल संकल्पनायें

दूरी, समय तथा द्रव्यमान मौलिक भौतिक मापन राशियाँ हैं। दूरी और समय को आप सहज रूप से समझते हैं। किसी वस्तु के द्रव्यमान से आशय उस वस्तु मे विद्‌यमान द्रव्य की राशि से है जिससे वस्तु बनी है। अब हम इस इकाई में उपयोगी भौतिक राशियों का अवलोकन करेगें -

**विस्थापन :-** किसी गतिशील वस्तु के विस्थापन का तात्पर्य निर्दिष्ट दिशा में स्थिति में परिवर्तन है। विस्थापन, निर्दिष्ट दिशा में तय की गई दूरी है। स्पष्टत: विस्थापन एक सदिश राशि है।

**चाल : -** किसी गतिशील वस्तु के अपने पथ पर चलने (गति करने) की दर, उसकी चाल कहलाती है।

$$\text{अतः चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

चाल एक अदिश राशि है।उदाहरणार्थ यदि आप 5 घण्टेंमें 20 किलोमीटर चलतेहै तो आपकी चाल $= \frac{20}{5} = 4$ किलोमीटर प्रति घण्टा है। लेकिन चाल से गति की दिशा का ज्ञान नहीं होता

इसलिये यह एक अदिश राशि है। कोई वस्तु समान या अचर चाल (constant or uniforms speed) से गतिमान हो सकती है। जब वस्तु समान समय अन्तराल में समान दूरियां तय करती हैं तो उसे समान चाल कहते हैं। इसके विपरीत यदि कण की चाल एक समान न हो, अर्थात् भिन्न-भिन्न समयान्तरालों में वस्तु अलग-अलग दूरियाँ तय करती हैतो औसत चाल का आकलन करते है :

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{कुल तय कि गयी दूरी}}{\text{कुल दूरी तय करने में लगा समय}}$$

चाल की इकाई दूरी प्रति समय होती है।

**वेग :-** किसी वस्तु के समय के साथ विस्थापन की दर को उसका वेग कहते हैं। वेग सदिश राशि है। स्पष्ट है कि वेग का परिमाण चाल होता है।

**वेग के दो प्रकार: -** अचर वेग एवं परिवर्ती वेग होते हैं। यदि वस्तु समान चाल से एक ही दिशा में चलें तो वस्तु का वेग अचर माना जाता है। इसके विपरीत वस्तु का वेग अचर न हो तो उसे चर या परिवर्ती वेग कहते हैं। परिवर्ती वेग के लिये दो क्षणों पर वेग, के परिमाण (चाल) या दिशा अथवा दोनों में अन्तर होता है।

**संवेग: -** द्रव्यमान (उ) तथा वेग (अ) के गुणनफल को संवेग कहते हैं।

**त्वरण :-** गतिशील वस्तु के वेग में समय के साथ परिवर्तन की दर को त्वरण कहते है। यदि समान समयान्तरालों में वेग परिवर्तन परिमाण एवं दिशा में समान हो तो ऐसा त्वरण अचर या एक समान त्वरण कहलाता है। त्वरण को f से निरूपित करते हैं। त्वरण का विपरीत मंदन होता है। वेग में इकाई समय में कमी को मंदन कहते हैं। त्वरण की इकाई दूरी प्रति $(\text{समय})^2$ होती है।

**बल : -** किसी वस्तु की विरामावस्था से गतिशील करने के लिए अथवा गतिशील वस्तु को विरामावस्था में लाने के लिए जिसकी आवश्यकता होती है उसे बल कहते है। अत: बल वह भौतिक राशि हैजिससे वस्तु की गतिशील अथवा विरामावस्था में परिवर्तन होता है। अत: बल वह है जो वस्तु की गति में त्वरण (या मंदन) उत्पन्न करने का प्रयास करे अथवा करे।

बल एक सदिश राशि है। वस्तु में उत्पन्न त्वरण f, प्रयुक्त बल $\vec{F}$ के समानुपाती होता है।

## 10.3 न्यूटन के गति के नियम

न्यूटन द्वारा प्रतिपादित गति के तीन नियम आधुनिक गति विज्ञान का मूलाधार हैं।

**प्रथम नियम :** कोई वस्तु एक सरल रेखा में गति अवस्था या विरामावस्था में रहती है जब तक कि उस पर कोई बाह्य बल आरोपित न हो। इसे जड़त्व का नियम कहते है।

**द्वितीय नियम :** यह नियम बल के मापन से सम्बन्धित है। द्वितीय नियम के अनुसार, आरोपित बल $F$ संवेग में परिवर्तन की दर के समानुपाती होता है।

अर्थात $F = k\dfrac{d}{dt}(mv), k$ स्थिरांक है

या $F = km\dfrac{dv}{dt} = kmf$ (जहाँ $f = \dfrac{dv}{dt}$ त्वरण हैं) ......... (1)

समीकरण (1) में इकाई बल को इस प्रकार चुना जाये कि वह इकाई द्रव्यमान में इकाई त्वरण उत्पन्न करें अर्थात् $F = 1$ जब $m = 1$, $f = 1$ तब $k = 1$

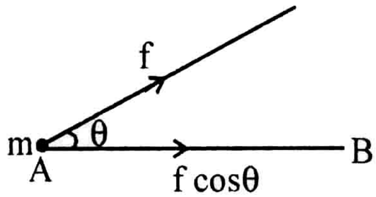
इस प्रकार $F = mf$ .........(2)

समीकरण (2) गति विज्ञान का प्रमुख कार्यकारी सूत्र है। इससे हम बल के मात्रक 'न्यूटन' को परिभाषित करते हैं। एक न्यूटन बल वह है जो 1 किलोग्राम द्रव्यमान वाली -वस्तु में 1 मीटर प्रति सेकिण्ड$^2$ का त्वरण उत्पन्न करे।

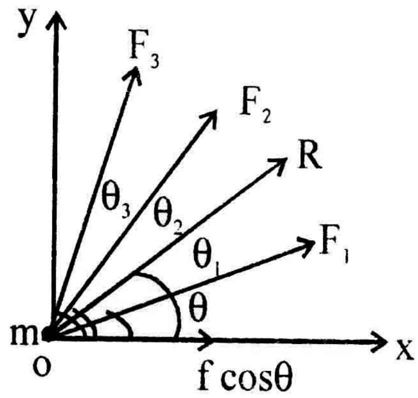
यहाँ ध्यान दीजिये कि द्रव्यमान एवं त्वरण के गुणनफल को प्रभावी बल (effevtive force) कहते हैं। अत: किसी दिशा में आरोपित बल उस दिशा में प्रभावी बल के तुल्य होता है। जैसे माना $m$ द्रव्यमान के कण $A$ पर त्वरण $f$ क्षैतिज रेखा $AB$ से $\theta$ कोण बनाता है। तब $AB$ दिशा में कण पर

प्रभावी बल = $m \times$ ( $AB$ दिशा में त्वरण)

$= m \times f\cos\theta$




यदि किसी वस्तु पर एक से अधिक बल कार्यरत हों तो प्रत्येक बल के कारण जनित त्वरण की दिशा एवं परिमाण इस बल के अनुसार हेता है (जैसे कि शेष बल कार्यरत ही ना हो, केवल यही एक बल वस्तु पर क्रियाशील है।) इस प्रकार प्रत्येक बल गति में अपना योगदान देता है। इन सभी बलों के कारण वस्तु की गति पर प्रभाव इन योगदानों का परिणामी (resultant) लेता है। जैसे यदि $O$ पर स्थित $m$ द्रव्यमान वाले कण पर समतलीय बल $F_1, F_2, F_3$ चित्रानुसार कार्यरत् हैं। माना $R$ इन बलों का परिणामी है जो $OX$ से $\theta$ कोण बनाता है




$OX$ दिशा में $m$ पर कार्यरत बलों को $\Sigma X$ से निरूपित करें तो

$$R = \cos\theta = \Sigma X = F_1 \cos\theta_1 + F_2 \cos\theta_2 + F_3 \cos\theta_3$$

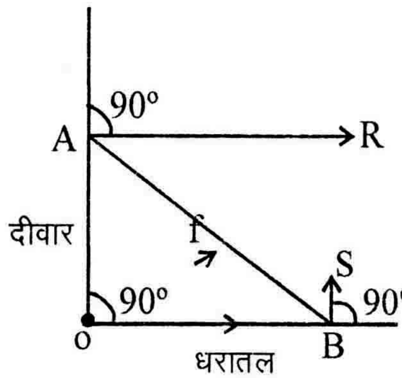
इसी प्रकार $OY$ दिशा में $m$ पर कार्यरत् बल को $\Sigma Y$ लिखें तो

$$R = \sin\theta = \Sigma Y = F_1 \sin\theta_1 + F_2 \sin\theta_2 + F_3 \sin\theta_3$$

अतः परिणामी बल $= R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2}$

एवं $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\Sigma Y}{\Sigma X}\right)$

**तृतीय नियम :** इसके अनुसार, यदि एक वस्तू दूसरी वस्तु पर बल आरोपित करती है तो दूसरी वस्तु भी पहली वस्तु पर समान (परन्तु विपरीत दिशा मे बल आरोपित करती है। प्रथम बल को क्रिया एवं द्वितीय को प्रतिक्रिया कहते हैं। प्रतिक्रिया बल सर्वदा दोनों वस्तुओं के सम्पर्क बिन्दु के अभिलंबवत् कार्य करता है। जैसे निम्न चित्र में दीवार के सहारे रखी छड़ $AB$ दीवार एवं धरातल पर क्रमशः बिन्दुओं $A$ तथा $B$ पर क्रिया (संपर्क) करती है। जिसके फलस्वरूप दीवार एवं धरातल द्वारा $A$ तथा $B$ पर प्रतिक्रियायें क्रमशः $R$ तथा $S$ है जो $OA$ तथा $OB$ के अभिलंबवत् है।




**गुरूत्वीय त्वरण एवं भार :** न्यूटन के प्रसिद्ध गुरूत्वाकर्षण सिद्धान्त से हम जानते हैं कि पृथ्वी के गुरूत्व बल के कारण हाथ से की वस्तु पृथ्वी की ओर गिरती है और उसमें त्वरण उत्पन्न होता है। इस त्वरण को गुरूत्वीय त्वरण कहते हैं। यदि वस्तु का द्रव्यमान $m$ तथा गुरूत्वीय त्वरण $g$ है तो वस्तु पर लगने वाला आकर्षण बल

$W = mg$, यहाँ $W$ को $m$ द्रव्यमान की वस्तु का भार कहते हैं।

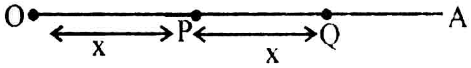
ध्यान दीजिये कि गुरूत्वीय त्वरण की दिशा पृथ्वी (के केन्द्र) की ओर होती है। यदि किसी वस्तु को पृथ्वी से दूर ऊर्ध्वाधर प्रक्षेपित किया जाये तो गुरूत्वीय त्वरण $-g$ होगा।

## 10.4 शुद्ध गतिकी

**10.4.1 सरल रेखा में गति : वेग एवं त्वरण**

**क्षैतिज सरल रेखीय गति : -**

**वेग : -** माना एक कण सरल रेखा $OA$ की दिशा में गतिमान है। माना समय $t$ तथा $t+\delta t$ पर कण $OA$ पर स्थित बिन्दुओं $P$ तथा $Q$ पर है, इस प्रकार कि $OP = x$ तथा $OQ = x+\delta x$




अतः अंतराल $\delta t$ में कण की औसत चाल = $\dfrac{\delta x}{\delta t}$ परन्तु यदि $\delta t \to 0$ (अथवा $Q \to P$) तब $\dfrac{\delta x}{\delta t}$, कण के विस्थापन की दर (वेग) को बताता है।

$$\text{अत: बिन्दु } P \text{ पर } = v = \lim_{x\to\infty} \frac{\delta t \text{ समय में वेग में परिवर्तन}}{\delta t} = \lim_{x\to\infty} \frac{\delta x}{\delta x} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

**त्वरण : -** माना क्षण $t$ तथा $t+\delta t$ पर कण क्रमशः $P$ तथा $Q$ पर है जहाँ वेग क्रमशः $v$ तथा $v+\delta v$ हैं। तब अन्तराल $\delta t$ में वेग में परिवर्तन $\delta v$ है। यदि समय $t$ पर (बिन्दु $P$ पर) त्वरण $f$ है,तो

$$f = \lim_{x\to\infty} \frac{\delta t \text{ समय में वेग में परिवर्तन}}{\delta t}$$

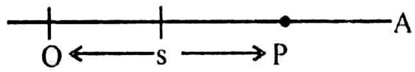
$$= \lim_{\delta t\to\infty} \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\because v = \frac{dx}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\text{पुनः} \quad f = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dx}(v)\frac{dx}{dt} = \frac{vdv}{dx}\left[\because \frac{dx}{dt} = v\right]$$

**अचर त्वरण के साथ सरल रेखा में गति :**

यदि एक कण आरंभिक वेग $u$ एवं अचर त्वरण $f$ से गति करता है तो तीन महत्वपूर्ण सूत्रों की व्युत्पत्ति प्राप्त होती है। माना सरल रेखा पर स्थित नियत बिन्दु $O$ से कण गति आरम्भ करता है तथा $t$ समय पर गतिमान कण की स्थिति $P$ है इस प्रकार कि $OP = s$




तब $OP$ की दिशा में त्वरण $= \dfrac{d^2s}{dt^2}$

चूंकि कण नियत त्वरण $f$ से गतिमान है अत: $\dfrac{d^2s}{dt^2} = f$ .........(1)

(1)समीकरण (2) का समाकलन करने पर

$\frac{ds}{dt}= ft+k_1$ जहाँ $k_1$ अचर है..... (2)

आरम्भ में $t=0$ पर $\frac{ds}{dt}=u$ अत: समीकरण (2) से

$u=o+k_1 \Rightarrow k_1=u$

फलत : $\frac{ds}{dt}=v=u+ft$ ..... (3)

पुनः समीकरण (3) का समाकलन करने पर

$\frac{ds}{dt}=v=u+ft$ ............(4)

आरम्भ में $O$ पर $t=0, s=0$

अतः $0=0+k_2 \Rightarrow k_2=0$

फलत : $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ ....... (5)

सूत्रों (3) तथा (5) में $t$ के विलोपन से हम एक नये सूत्र की प्राप्ति करेगें

अब $v^2=(u+ft)^2=u^2+f^2t^2+2uft$

$=v^2+2f\left(ut+\frac{1}{2}ft^2\right)t^2$

$v^2=u^2+2f$ ............(6)

सूत्रों (3), (5) एवं (6) को स्मरण रखना श्रेयस्कर है।

ऊर्ध्वाधर सरल रेखीय गति : यदि कण समान गुरूत्वीय त्वरण के अधीन ऊर्ध्वाधर गति करता है तो इसके समीकरण, समीकरण (3), (5), (6) के जैसे होते हैं जिसमें त्वरण $f$ के स्थान पर गुरूत्वीय त्वरण $g$ प्रतिस्थापित होता है।

यदि कण नीचे से ऊपर की ओर ऊर्ध्वाधर गतिमान है तो त्वरण $-g$ लेते है।

**उदाहरण- 1** यदि सरल रेखा में गतिशील कण की $t$ सेकण्ड में तय की गई दूरी $x=6+12t-9t^2+2t^3$ है तो किस समय उसका त्वरण शून्य होगा?

**हल:** दिया है : दूरी $x=6+12t-9t^2+2t^3$

अतः वेग $=\frac{dx}{dt}=v=12-18t+6t^2$

एवं त्वरण $f=\frac{d^2x}{dt^2}-18+12t$

त्वरण $f$ शून्य होगा यदि $12t-18=0$

अर्थात $t=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}$ सेकण्ड

अतः $\frac{3}{2}$ सेकण्ड के पश्चात् कण का त्वरण शून्य होगा

**उदाहरण- 2** सरल रेखा में गतिमान कण का वेग $v$, सम्बन्ध $v^2 = ax^2 + 2bx + c,$ से दिया जाता है। सिद्ध कीजिए कि उसका त्वरण रेखा पर स्थित किसी बिन्दु से दूरी के समानुपाती है।

**हल : -** माना कण सरल रेखा $OA$ के अनुदिश गतिमान है। $t$ समय पर कण बिन्दु $P$ पर है इस प्रकार कि $OP = x$ तथा $P$ पर कण का वेग $v$ है

दिया है : $v^2 = ax^2 + 2bx + c$ ...... (1)

(1) का $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर $2v\dfrac{dv}{dx} = 2ax + 2b$

या त्वरण $f = \dfrac{vdv}{dx} = ax + b = a\left(x + \dfrac{b}{a}\right)$

माना $X = x + \dfrac{b}{a}$ जहाँ $O'$ सरल रेखा पर स्थित नियत बिन्दु है इस प्रकार कि

$O'P = X = x + \dfrac{b}{a}$

अतः त्वरण $f = aX$

$\Rightarrow f a X$. अर्थात $f$ कण की नियत बिन्दु $O'$ से दूरी के समानुपाती है।

**उदाहरण - 3** यदि सरल रेखा में गतिमान कण की मूल बिन्दु से दूरी $x$ पर वेग $v$, $\dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^2}$ समानुपाती है तो त्वरण का नियम ज्ञात कीजिये?

हल : दिया है, वेग $= v = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^2}$ अथवा $v^2 = \dfrac{a^2 + x^2}{x^4} = \dfrac{a^2}{x^4} - \dfrac{1}{x^2}$ ...... (1)

अतः (1) को $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2v\frac{dv}{dx} = -\frac{4a^2}{x^4} + \frac{2}{x^3}$$

अथवा त्वरण $f = \dfrac{vdv}{dx} = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2a^2}{x^5}$

**उदाहरण -4** दो साईकिल चालक अचर त्वरण $\alpha$ तथा $\beta$ से प्रतिस्पर्धा में सरल रेखा में गतिमान हैं। यदि उनके आरंभिक वेग $u$ तथा $v$ हों तथा दोनों एक साथ विजेता हों तो उनके द्वारा तय दूरी ज्ञात कीजिए

हल : चूंकि दोनों साईकिल चालक संयुक्त विजेता हैं अत: समान समय में उन्होने समान दूरी तय की है। अत: $t$ समय में तय की गई दूरी $s$ है, तो

**प्रथम चालक के लिये :** $s = ut + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$ ....... (1)

**द्वितीय चालक के लिये :** $s = vt + \dfrac{1}{2}\beta t^2$,........ (2)

फलत : $ut + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 = vt + \dfrac{1}{2}\beta t^2$

$$\Rightarrow t=\frac{2(u-v)}{\beta-\alpha}, t$$ का यह मान समीकरण (1) में रखने पर,

वांछित दूरी $s=\frac{2u(u-v)}{\beta-\alpha}+\frac{2u(u-v)^2}{(\beta-\alpha)^2}$

$$=\frac{2(u-v)(u\beta-v\alpha)}{(\beta-\alpha)^2}$$

**उदाहरण - 5** सरल रेखा में अचर त्वरण से गतिमान कण, क्रमागत समय $t_1$ तथा $t_2$ में क्रमशः $x_1, x_2$ दूरियाँ तय करता है। सिद्ध कीजिए कि त्वरण $=\frac{2(x_2t_1-x_1t_2)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$

**हल -** माना कण का आरभिक $u$ है तथा $t_1$ समय पश्चात् इसका वेग $v$ है तो

$v=u+ft_1$........ (1)

एवं $x_1=ut_1+\frac{1}{2}ft^2{}_1$....... (2)

जहाँ $f$ अचर त्वरण है।

प्रश्नानुसार कण अगले समयान्तराल $t_2$ में $x_2$ दूरी चलता है। इस स्थिति में कण का आरम्भिक वेग

है अतः $x_2=vt_2+\frac{1}{2}ft^2{}_2=(u+ft_1)t_2+\frac{1}{2}ft^2{}_2$ $[\therefore (1)1sv=u+ft_1]$

$$=ut_1+ft_1t_2+\frac{1}{2}ft^2{}_2$$

अतः $x_2t_1-x_1t_2=ut_2t_1+ft_1^2t_2+\frac{1}{2}ft_1t_2^2-ut_1t_2-\frac{1}{2}ft_1^2t_2$

या $x_2t_1-x_1t_2=ft_1t_2\frac{(t_1+t_2)}{2}$

या $f=\frac{2(x_2t_1-x_1t_2)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$

**उदाहरण - 6** एक कण को 100 मीटर प्रति सेकण्ड की दर से धरातल से ऊर्ध्वाधर ऊपर फेंका जाता है। 10 सेकण्ड में कण द्वारा तय की गई दूरी क्या होगी? (यदि $g$ = 9.8 ते मीटर/सेकण्ड)

**हल -** इस स्थिति में कण पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण के विपरीत दिशा में है अतः समय एवं दूरी के सम्बन्ध में त्वरण $f=-g$ होगा।

अतः $s=ut+\frac{1}{2}gt^2$

$$s=100\times10-\times\frac{1}{2}\times9.8\times10^2$$

= 1000 - 490 = 510 मीटर

(ध्यान रहें प्रश्न के उत्तर में जहाँ संभव हो इकाई अवश्य दे)

**उदाहरण - 7** एक कण को ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर $u$ वेग से फेंका गया। $t$ समय पश्चात् एक दूसरा कण $v$ वेग से उसी बिन्दु से ऊर्ध्वाधर ऊपर फेंका गया $(v<u)$ यदि दोनों कण, दूसरे कण के प्रक्षेपण के $T$ समय पश्चात् $h$ ऊँचाई पर मिलते है तो $T$ ज्ञात कीजिए।

**हल -** प्रथम कण का आरंभिक $u$ है इसके प्रक्षेपण के $t$ समय पश्चात् दूसरा कण फेंका जाता है और वह पहले कण से माना $h$ दूरी पर अपने प्रक्षेपण के $T$ समय पश्चात् टकराता है। अर्थात प्रथम कण ने $h$ दूरी $(t+T)$ समय में तय की

अतः $s=ut+\frac{1}{2}gt^2$ से

प्रथम कण के लिये : $h=u(t+T)-\frac{1}{2}g(t+T)^2$ ..... (1)

द्वितीय कण के लिये : $h=vT-\frac{1}{2}gt^2$ ...... (2)

अतः $vT-\frac{1}{2}gT^2=u(t+T)-\frac{1}{2}g(t+T)^2$

सरल करने पर $T\left[2gt+2(v-u)\right]=2ut-gt^2$

या $T=\dfrac{2ut-gt^2}{2(gt+v-u)}$

**उदाहरण - 8** यदि सरल रेखीय गति में दूरी $s$ तथा वेग $v$ तथा समय $t$ में संबन्ध $2s=vt$ हैं तो त्वरण की प्रकृति बताइये।

हल - दिया है: $2s=vt$ ........ (1)

$\because$ त्वरण $f=\dfrac{dv}{dt}$ ....... (2)

(1) का $t$ के सापेक्ष अवकलन करने पर, $2\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{dv}{dt}t+v$

$\Rightarrow \dfrac{dv}{dt}t=v$ $[\because \dfrac{ds}{dt}=v]$

$\Rightarrow \dfrac{dv}{dt}=\dfrac{v}{t}$ ............ (3)

या $\int\dfrac{dv}{v}=\int\dfrac{dt}{t}$ अतः $\log v=\log t+\log A$

या $v=At,$..........(4)

यहाँ $A$ अचरांक है

समीकरण (3) एवं (4) से, $\dfrac{dv}{dt}=A$ (अचर)

अतः त्वरण अचरहै।

**स्वमूल्यांकन प्रश्न-1**

1. निम्नलिखित में भिन्न है-

   (i)विस्थापन (ii)बल (iii)लेग (iv)समय

2. यदि वेग $v$ तथा दूरी $u$ में सम्बंध $v^2 = 2ax$ है तो त्वरण है -

   $(i) 2a$ $(ii) a$ $(iii) \sqrt{2ax}$ $(iv)$ इनमें से कोई नहीं

3. निम्नलिखित में सत्य कथन है -

   $(i)$ चाल का परिमाण वेग होता है $(ii)$ संवेग = (द्रव्यमान) $\times$ त्वरण

   $(iii)$ संवेग = दव्यमान $\times$ दूरी $(iv)$ संवेग= द्रव्यमान $\times$वेग

4. यदि समय $t_1$ तथा $t_2$ पर वेग $u$ तथा $v$ हैं तथा $(t_2 + t_1) = t$ समय में तय की गयी दूरी $x$ है गति के नियम तो रेखीय गति के लिये सत्य है (जहाँ $f$ नियत त्वरण है)

   $(i) v^2 = u^2 + ft$ $(ii) v = u^2 + f^2t^2$

   $(iii) x = ut + \frac{f^2t^2}{2}$ $(iv) v^2 = u^2 + 2fx$

### 10.4.2 एक तलीय गति (Uniplanar motion)

एक कण (या पिण्ड) जब समतल में गतिमान होता है तो उसका पथ एक वक्र होता है। वक्र के किसी बिन्दु $P$ पर वेग $v, P$ पर स्पर्श रेखा के अनुदिश लेता है। वस्तुत: वेग तथा त्वरण की गणना करने के लिये वेग तथा त्वरण के दो परस्पर लंबवत् दिशाओं में घटक प्राप्त करते हैं।

माना कण $XOY$ समतल में किसी वक्र के अनुदिश गतिमान है। किसी क्षण $t, t + \delta t$ पर कण की

वक्र पर स्थितियाँ $P(x, y)$ तथा $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ हैं तो $OX, OY$ के अनुदिश वेग क्रमशः $\frac{dx}{dt}$

तथा $\frac{dy}{dt}$ होंगे तथा बिन्दु $P$ पर परिणामी वेग

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

बिन्दु $P$ पर इस परिणामी वेग $v$ की दिशा $OX$ अक्ष के साथ यदि $\theta$ कोण बनाती है तब,

$$\tan\theta = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx}$$

इसी प्रकार $OX, OY$ के अनुदिश त्वरण के घटक क्रमशः $\frac{d^2x}{dt^2}$ तथा $\frac{d^2y}{dt^2}$ लेते हैं तथा बिन्दु $P$ परिणामी त्वरण $f$ है तो $f=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

त्वरण $f$ की दिशा $OX$ अक्ष के साथ यदि $\beta$ कोण बनाती है तो $\tan\beta=\frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}$

**उदाहरण - 9** एक कण की गति वक्र $x=a\cos\alpha t$, $y=a\sin\alpha t$ से दी जाती है जहाँ $t$ समय है कण के वेग और त्वरण प्राप्त कीजिये।

हल : - दिया है $x=a\cos\alpha t$ ....... (1)

$y=a\sin\alpha t$ .......(2)

कण का वेग $v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

$=\sqrt{(-a\alpha\sin\alpha t)^2+(a\alpha\cos\alpha t)^2}$

$=\sqrt{a^2\alpha^2\left(\sin^2\alpha t+\cos^2\alpha t\right)}$

$=a\alpha$

कण का त्वरण $f=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

$f=\sqrt{(-a\alpha^2\sin\alpha t)^2+(-a\alpha^2\cos\alpha t)^2}$

$f=\sqrt{a^2\alpha^4\left(\cos^2\alpha t+\sin^2\alpha t\right)}$

$=a\alpha^2$

**उदाहरण - 10** एक कण की $xy$ समतल में गति वक्र $x=3\cos t-\cos 3t; y=3\sin t-\sin 3t$ द्वारा दी जाती है। यहाँ $x, y$ तथा $t$ क्रमशः मीटर तथा सेकण्ड में मापे जाते है। कण का $t=\pi/6$ सेकेण्ड पर वेग तथा त्वरण ज्ञात कीजिये।

**हल : -** वेग $v=\left|\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right|^{1/2}$

$=\left[(-3\sin t-\sin 3t)^2+(3\cos t-3\cos 3t)^2\right]^{1/2}$

$=3\left[\sin^2 t+\sin^2 3t-2\sin t\sin 3t+\cos^2 t+\cos^2 3t-2\cos t\cos 3t\right]^{1/2}$

$=3\left[2-2\left(\cos t\cos 3t+\sin t\sin 3t\right)\right]^{1/2}$

$=3\left[2-2\cos(3t-t)\right]^{1/2}=\left[2(1-\cos 2t)\right]^{1/2}$

$=3\left[2-2\sin^2 t\right]^{1/2}=6\sin t$

**अब** $t=\frac{\pi}{6}$ **सैकिन्ड पर**

वेग $=6\sin\frac{\pi}{6}=6.\frac{1}{2}=3$ मीटर प्रति सैकिन्ड

इसीप्रकार, त्वरण $f=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^{1/2}$

$$3[10-6\cos 2t]^{1/2}=3.\left[10-6\frac{1}{2}\right]^{1/2}$$

$=3\sqrt{7}$ मीटर प्रति (सैकण्ड)$^2$

**उदाहरण - 11** एक कण मूल बिन्दु से रवाना होकर समतल $XOY$ में इस प्रकार गतिमान है कि $X$-अक्ष के समान्तर वेग $y$ के समानुपाती है तथा $Y$-अक्ष के समान्तर वेग अचर है। कण का पथ ज्ञात कीजिए।

हल :- प्रश्नानुसार,, $\frac{dy}{dt}=k.y$, जहाँ $y$ अचर है...........(1)

एवं $\frac{dy}{dt}=B$ (अचर).............(2)

कण के पथ से तात्पर्य समीकरण (1), (2) से $x$ एवं $y$ में सम्बन्ध है।

अतः $\frac{dx/dt}{dy/dt}=\frac{k}{B}y=cy$

जहाँ $c$ अचर है, $c=\frac{k}{B}$

अतः $\frac{dx}{dt}=cy\ldots\ldots$ (3)

के समाकलन से, $x=\frac{cy^2}{2}+C_1$...........(4)

जहाँ $C_1$, समाकलन नियतांक है

चूंकि $t=0$ पर $x=0, y=0$ है, [$\because$ आरंभ में ( $t=0$पर) कण मूल बिन्दु (0,0) पर हैं।] तो $C_1=0$

अतः समीकरण (4) से, $x=\frac{cy^2}{2}$

जो कि वांछित पथ है तथा परवलय के आकार का है।

## 10.5 बल गतिकी

इस अनुच्छेद के अध्ययन में पूर्व वर्णित न्यूटन के नियम उपयोगीहैं। पूर्व अनुच्छेद में आपने गति के अध्ययन में गति के अत्पादक कारणों (बलों)पर विचार नहीं किया। बल गतिकी में हम इस पक्ष पर ध्यान देते हैं।

**उदाहरण - 1** 70 किलोग्राम भार का व्यक्ति $v$ मीटर/सेकण्ड की गति से गतिमान है। यदि इस व्यक्ति को $R$ किलोभार के मंदन के विरूद्ध $P$ किलोग्राम भार के बल से खींचा जाये तो सिद्ध कीजिये कि व्यक्ति को 2 0 मीटर/सेकण्ड से 5 0 मीटर/सेकण्ड की गति ख्यन करने में तय की गई दूरी :

$$\frac{70}{g}\int_{20}^{50}\frac{vdv}{(P-R)}$$

**हल -** व्यक्ति पर कार्यरत बल = $P.g$

व्यक्ति पर कार्यरत बल = $Rg$

यदि त्वरण $f$ है तो न्यूटन की गति के द्‌वितीय नियम से,

प्रभावी बल= $\underline{70f=P.g-Rg.}$ .............(1)

परन्तु त्वरण $f=\frac{vdv}{dx}$ जहाँ दूरी $x$ पर वेग $v$ है

अतः समीकरण (1) से, $\frac{vdv}{dx}=\frac{(P-R)g}{70}$

या $\frac{70}{g}\int\frac{vdv}{P-R}=\int dx$

अतः 2 0 मीटर/सेकण्ड से 5 0 मीटर/सेकण्ड तक का वेग प्राप्त करने में तय की गई दूरी

$$x=\frac{70}{g}\int_{20}^{50}\frac{vdv}{P-R}$$

**उदाहरण - 2** एक कण को प्रतिरोधी माध्यम में नीचे से ऊपर की ओर प्रक्षिप्त किया गया है। यदि प्रतिरोधी माध्यम का प्रतिरोध (मंदन) वेग के समानुपाती है तो गति का समीकरण लिखिये -

**हल-** माना कण का दव्यमान $M$ है तथा प्रक्षेप बिन्दु से दूरी $x$ पर उसका वेग $v$ है। चूंकि कण की गति ऊपर की ओर है अतः कण भार $Mg$ ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्य करेगा तथा प्रतिरोधी बल $Mkv$ भी नीचे की ओर होगा । यदि त्वरण $f$ है तो गति के य नियम से,

$Mf=-Mg-Mkv$

ध्यान दीजिये :- प्रतिरोध $\alpha$ वेग, अतः प्रतिरोध = $kv$, प्रतिरोध बल = $M(kv)$

## 10.6 विभिन्न मात्रक प्रणालियाँ एवं भौतिक राशियों की इकाई

**प्रमुखतः** तीन मात्रक प्रणालियों प्रचलन में हैं।

फुट पौण्ड सेकण्ड ( F.P.S.) प्रणाली : इसमें लम्बाई की इकाई फुट, दव्यमान की इकाई पौण्ड तथा समय की इकाई सेकण्ड होती है। इस प्रणाली में स्पष्टतः को तथा त्वरण की इकाईयाँ क्रमशः फुट/सेकण्ड एवं फुट/सेकण्ड $^2$ होती हैं।

*F.P.S.* प्रणाली में बल की इकाई पाउण्डल होती है। एक पाऊण्डल बल वह है जो इकाई पाउण्डल द्रव्यमान की वस्तु में इकाई फुट/सेकण्ड2 का त्वरण उत्पन्न करें।

सेन्टीमीटर ग्राम सेकण्ड (C.G.S.) प्रणाली : इस प्रणाली में लम्बाई, दव्यमान तथा समय की इकाईयाँ क्रमश: सेमीटर, ग्राम तथा सेकण्ड है । स्पष्टत: इस प्रणाली में वेग तथा त्वरण की इकाईयाँ क्रमश: सेंटीमीटर/सेकण्ड एवं सेंटीमीटर/सेकण्ड$^2$ होती है । इस प्रणाली में बल की इकाई डाइन होती है। एक डाइन बल वह है जो 1 ग्राम द्रव्यमान की वस्तु में 1 सेमी ,/सेकण्ड$^2$ का त्वरण उत्पन्न करें।

मीटर किलोग्राम सेकण्ड ( M.K.S ) प्रणाली : - इस प्रणाली में लम्बाई, दव्यमान तथा समय की इकाईयाँ क्रमश: मीटर, किलोग्राम तथा सेकण्ड होती हैं। अत: इस प्रणाली में वेग तथा त्वरण की इकाई क्रमश: मीटर/सेकण्ड तथा मीटर/सेकण्ड$^2$ होती है। इस प्रणाली में बल की इकाई न्यूटन होती है। एक न्यूटन बल वह है जो एक किलोग्राम दव्यमान की वस्तु में एक मीटर/सेकण्ड$^2$ का त्वरण उत्पन्न करे।

## 10.7 सारांश

इस इक़ाई में आपने देखा कि किस प्रकार विरामावस्था या गतिशील वस्तु पर कार्यरत बलों के प्रभाव का अध्ययन किया जाता है। गति के महत्वपूर्ण पक्षों, वेग, चाल, त्वरण, बल एवं इन राशियों के विभिन मात्रकों से आपका परिचय हुआ। इस अध्याय में आपने समय, विस्थापन, वेग एवं त्वरण के मध्य सम्बन्ध को निरूपित करने वाले सूत्रों के प्रतिपादन एवं उनके अनुप्रयोग को समझा। साथ ही अपने न्यूटन के गति नियमों को समझकर शुद्ध गतिकी तथा बल गतिकी के अन्तर को जाना होगा।

## 10.8 शब्दावली

| | |
|---|---|
| द्रव्यमान | Mass |
| चाल | Speed |
| वेग | Velocity |
| त्वरण | Acceleration |
| विस्थापन | Displacement |
| बल | Force |
| संवेग | Momentum |
| गति | Motion |
| सरल रेखीय गति | Rectilinear motion |
| एक तलीय गति | Uniplanar motion |
| गुरूत्वीय त्वरण | Gravitational acceleration |
| क्रिया | Action |

| | |
|---|---|
| प्रतिक्रिया | Reaction |
| मंदन | Retardation |

## 10.9 स्वमूल्यांकन प्रश्न के उत्तर

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | (iv) | 2. | (ii) | 3. | (iv) | 4. | (iv) |

## 10.10 अभ्यास प्रश्न

1. XOY समतल में गतिमान कण के X तथा Y -अक्षों के समान्तर वेग क्रमशः $u+ey$ तथा $v+ex$ हैं । कण का पथ ज्ञात कीजिये ।

उत्तर : $-(x^2-y^2)e+2(vx-uy)+$ अचर = 0

2. यदि किसी कण की सरल रेखीय गति $x+4t^2+2t$ से व्यक्त होती है जहाँ दूरी $x$ एवं गति के नियम
समय $t$ M.K.S. प्रणाली में मापे जाते हैं तो बताइये कि त्वरण कितना है।

उत्तर - 8 मीटर/सेकण्ड$^2$

3. एक समतल में गतिमान कण के समय $t$ पर निर्देशांक $x=a\cos t, y=a\sin t$ है। कण का पथ, को तथा त्वरण बताइये।

उत्तर : - $x^2+y^2=a^2;a;a$

4. एक समतल में गतिमान कण के समय $t$ पर निर्देशांक है $x=at, y=2at$ तो पथ, वेग तथा त्वरण बताइये।

उत्तर : - i Fk $y^2=4ax;$ वेग $2a\sqrt{1+t^2}$ त्वरण $2a$